Universidade de Brasília
FACE – Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciências da Informação e Documentação
Departamento de Economia – Programa de Pós-Graduação

Preferências sobre Menus Dinamicamente Consistentes: o Caso Incompleto

Aluna: Fernanda Senra de Moura

Orientador: Gil Riella, Ph.D

Brasília, 2011

Universidade de Brasília
FACE – Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciências da Informação e Documentação
Departamento de Economia – Programa de Pós-Graduação

Preferências sobre Menus Dinamicamente Consistentes: o Caso Incompleto

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília, sob a orientação do Professor Doutor Gil Riella, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas.

Aluna: Fernanda Senra de Moura

Orientador: Gil Riella, Ph.D

Brasília, 2011

“Preferências sobre Menus Dinamicamente Consistentes: o Caso Incompleto”

FERNANDA SENRA DE MOURA

Dissertação apresentada como exigência do Curso de Mestrado em Economia da Universidade de Brasília.

Avaliação
BANCA EXAMINADORA

____
Professor Doutor Gil Riella
Orientador

____
Professor Doutor José Guilherme de Lara Resende
Membro interno

____
Professor Doutor Maurício Soares Bugarin
Membro externo

Brasília, DF. Julho de 2011.

____

Fernanda Senra de Moura

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu professor e orientador Gil Riella, sem o qual este trabalho não seria possível. Agradeço pela paciência, pela confiança, pela disponibilidade e entusiasmo que tornaram este trabalho uma experiência inspiradora.

Agradeço à todos do Departamento de Economia da Universidade de Brasília, em especial aos professores José Guilherme de Lara Resende, Bernardo Borba de Andrade, Vander Lucas e Roberto Ellery. Cada um deles teve uma participação decisiva em minha formação.

Agradeço aos amigos que tornaram infinitos dias em dias agradáveis. Agradeço em especial ao meu grande amigo Luís Fernando Brands Barbosa, que me ajudou "não-enumeráveis" vezes ao longo desses anos.

Resumo

Kochov (2007) demonstra que preferências incompletas sobre menu de loterias admitem uma representação baseada em um espaço de estados subjetivos único e um conjunto de crenças. Esta é uma generalização da representação de preferências completas sobre menus desenvolvida em Dekel, Lipman, and Rustichini (2001). Quando preferências sobre menus são completas, Riella (2010) mostra que Flexibility Consistency é a versão apropriada de Dynamic Consistency, a propriedade geralmente associada a representações em que o espaço de estados é exógeno. Neste trabalho, procuramos por uma versão apropriada para Flexibility Consistency quando as preferências não são completas. Uma versão mais geral de Flexibility Consistency, chamada Flexibility Consistency II, que também é relacionada com noções de preferência por flexibilidade, quando satisfeita, garante que novas informações são usadas para atualizar as crenças na representação pela Regra de Bayes.

Abstract

Kochov (2007) shows that incomplete preferences over menus of lotteries admit a representation based upon a unique subjective state space and a set of priors. This is a generalization of the representation for complete preferences over menus developed by Dekel, Lipman, and Rustichini (2001). When preferences over menus are complete Riella (2010) shows that Flexibility Consistency is the appropriate version of Dynamic Consistency, the property usually associated with exogenous space state representations. In this paper we look for an appropriate version of Flexibility Consistency when preferences are not complete. A more general version of Flexibility Consistency, deemed Flexibility Consistency II, which is also related to notions of preference for flexibility, if satisfied is enough to guarantee that new information will be used to update the priors by the Bayes' Rule .

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

Como a disponibilidade de novas informações afeta os indivíduos em seus problemas de escolha? Como uma informação nova deveria influenciar a decisão de um agente racional? Uma vasta literatura na teoria da decisão investiga relações de preferência em que novas informações sobre os possíveis estados da natureza são absorvidas por uma atualização bayesiana das distribuições de probabilidade subjetivas do indivíduo. Neste trabalho, demonstramos que preferências incompletas sobre menus são dinamicamente consistentes quando satisfazem ao axioma Flexibility Consistency II.

Um novo dado é relevante quando informa a respeito de eventos incertos e, por isso, os modelos de escolha sob incerteza, em especial aqueles com incerteza subjetiva, são o ambiente ideal para o estudo das propriedades dinâmicas de uma relação de preferência. Formalmente, tais propriedades são avaliadas a partir da comparação de duas relações de preferência $\succsim$ e $\succsim^*$, antes e depois da obtenção de uma nova informação com base na qual o agente reduz o espaço de estados da natureza que leva em consideração.

Em modelos no estilo de Savage, como o trabalho seminal de Anscombe e Aumann (1962) em que são consideradas preferências sobre atos, uma distribuição de probabilidades subjetiva faz parte da representação das preferências do indivíduo, mas o espaço de estados da natureza sobre os quais essas crenças são estabelecidas é exógeno e imposto nas primitivas do modelo. Em geral, preferências deste tipo são atualizadas pela Regra de Bayes quando satisfazem ao axioma Dynamic Consistency, que basicamente caracteriza duas relações de preferência $\succsim$ e $\succsim^*$ que concordam sempre que os estados de natureza a mais considerados pela preferência $\succsim$ forem irrelevantes para a comparação de dois atos.

Dekel, Lipman e Rustichini (2001), daqui por diante, DLR, caracterizam relações de preferências cuja representação inclui além de uma distribuição de probabilidade subjetiva, estados da natureza subjetivos. As primitivas dos modelos de DLR são relações de preferência sobre menus de loterias. A idéia é que em um primeiro estágio o agente escolha um menu para, em um segundo estágio, escolher uma das loterias desse menu. A incerteza vem do fato de que o agente não sabe quais serão seus gostos no segundo estágio. Com essas primitivas foi possível demonstrar a existência de uma representação com um único espaço de estados subjetivos, o que sustenta sua interpretação como a representação das preferências de um indivíduo que não tem certeza sobre quais serão seus gostos no futuro.

Riella (2010) encontrou a versão de Dynamic Consistency quando as primitivas do modelo são preferências completas sobre menus que admitem as representações encontradas em DLR. Flexibility Consistency é a propriedade que garante que duas relações de preferência são dinamicamente consistentes e, sob este axioma, duas relações de preferência

$\succsim$ e $\succsim^*$ só discordam se, em pelo menos uma situação, quando o indivíduo tem menos informações sobre os estados de natureza ele prefere ter mais flexibilidade no segundo estágio, isto é, ele prefere escolher no presente um menu que ofereça mais opções no futuro.

Os trabalhos acima se referem à relações de preferência que, entre outros axiomas, satisfazem ao de completude. Ou seja, é pressuposto destes modelos que os indivíduos são sempre capazes de comparar dois menus, que eles nunca ficam indecisos. Todavia, este é um axioma com pouco apelo descritivo ou normativo e, por isso, os principais teoremas de representação foram generalizados para preferências incompletas. Kochov (2007) retira o axioma de completude da primitiva de DLR e deriva uma representação para preferências incompletas sobre menus caracterizada por um único espaço de estados subjetivos e por um conjunto de distribuições de probabilidade subjetivas sobre este espaço. Este trabalho parte de seus resultados e, à luz das análises contidas em Riella (2010), define uma versão apropriada de Flexibility Consistency quando as preferências são incompletas e o agente considera um número finito de estados da natureza em suas avaliações dos menus.

Flexibility Consistency II, embora formalmente diferente de Flexibility Consistency, tem a mesma interpretação do primeiro e, de fato, pode ser visto como uma versão mais geral do axioma formulado em Riella (2010). Neste sentido, o ponto fundamental ainda é que duas relações de preferência incompletas sobre menus são dinamicamente consistentes se discordarem apenas quando existir uma situação em que, quando dispõe de menos informações, garantir flexibilidade para o futuro é mais importante para o agente.

2 PREFERÊNCIAS SOBRE MENUS

Suponha que um indivíduo precise, hoje, tomar uma decisão que determinará quais opções ele terá disponíveis em uma escolha futura. Esse poderia ser o caso de um estudante universitário escolhendo sua área de formação, de um empresário decidindo em que país instalar uma fábrica ou de alguém que precisa escolher entre duas ou mais ofertas de trabalho. Suponha ainda que, no momento em que precisa escolher uma área de formação, o estudante não saiba exatamente qual carreira desejará seguir, isto é, que ele não tenha certeza sobre quais serão suas preferências futuras. É razoável acreditar que para um indivíduo desse tipo ter mais opções disponíveis no futuro seja confortável, isto é, que sempre que possível, ele prefira flexibilidade. Este trabalho partirá desse princípio simples: um indivíduo que enfrenta incertezas sobre seus gostos futuros pode ser associado ao que se chama preferência por flexibilidade.

Kreps (1979) formalizou essa idéia através de um modelo cuja primitiva é uma relação de preferência sobre "conjuntos de oportunidades", ou, simplesmente, menus. Sua abordagem exprime o caráter dinâmico deste problema ao considerar um processo em que o indivíduo primeiro escolhe um menu para, em um momento futuro, decidir por uma das opções contidas no menu previamente escolhido. Uma motivação intuitiva para essa abordagem é a de que quando o indivíduo não sabe quais serão suas preferências no futuro, nem sempre é possível reduzir esse problema dinâmico a um problema estático de escolha de estratégia intertemporal, ou seja, nem sempre é possível utilizar o modo como ele avalia os menus para derivar consistentemente uma relação de preferência sobre o conjunto das opções que compõem os menus. Além de um processo de escolha em duas fases, outra diferença fundamental entre o trabalho de Kreps e as representações no estilo de Savage[1] é que, enquanto as últimas requerem a imposição de um espaço de estados de natureza como uma das primitivas do modelo, isto é, exógeno, o primeiro deriva os estados de natureza endogenamente, ou seja, permite que a relação de preferência "revele"quais possíveis cenários futuros o agente tem em mente na hora de escolher um menu. Todavia, essa interpretação só tem apelo se a partir da relação de preferência for possível encontrar um espaço de estados de natureza único, o que não acontece apenas com base nas primitivas de Kreps. Estas, porém, foram refinadas por Dekel, Lipman e

[1] Nas representações de Savage (1954), as probabilidades sobre o espaço de estados da natureza são subjetivas no sentido de que elas surgem como parte da representação a partir das preferências do agente. Na mesma linha, o trabalho de Anscombe e Aumann (1963) trata de ambos, risco e incerteza. O primeiro é imposto exógenamente através dos objetos sobre os quais a primitiva do modelo é definida: loterias. A segunda, assim como no modelo de Savage, faz parte da representação a partir das preferências do agente. Todavia, em ambas as formulações o espaço de estados da natureza sobre os quais essas probabilidades subjetivas estão definidas é exógeno e imposto entre as primitivas do modelo. Essa formulação não permite a interpretação desses resultados como representação para um agente que tem uma percepção própria sobre quais são os possíveis estados da natureza, como seria o caso, por exemplo, de um indivíduo que não tem certeza sobre quais serão seus gostos no futuro.

Rustichini, DLR, (2001) e por Dekel, Lipman, Rustichini e Sarver (2007), DLRS, que, então, encontraram representações em que o espaço de estados de natureza é, além de subjetivo, único. Por este motivo, as representações derivadas em DLR e DLRS serão o ponto de partida deste trabalho e, sendo assim, sua compreensão se torna essencial. Para tanto, esta seção apresenta as primitivas utilizadas em DRL e DLRS, comenta suas representações e discute seus axiomas.

2.1 Preferências sobre menus: primitivas do modelo

Seja X um conjunto finito de alternativas e $\Delta(X)$ [2] o espaço de distribuições de probabilidades (loterias) sobre X. Seja $\mathcal{X}$ o conjunto de todos os subconjuntos fechados e não vazios do interior relativo de $\Delta(X)$ [3]. As primitivas do modelo são relações de preferência $\succsim$ sobre $\mathcal{X}$. Os elementos de $\mathcal{X}$ são chamados *menus e* representados por letras maiúsculas A, B, C, D, etc. Os elementos de $\Delta(X)$ serão representados por letras minúsculas p, q, r, s, etc.

São consideradas preferências de um agente cujo problema de escolha tem duas fases. Na primeira, ele opta por um menu do qual, na segunda etapa, escolherá uma loteria. Assim como nos trabalhos precedentes a este, o problema da escolha no segundo período será omitido. No primeiro estágio, o agente não tem certeza sobre quais serão seus gostos no futuro, ou seja, sobre quais serão suas preferências no segundo estágio. Cada possível preferência futura (*ex post)* é associada a um estado subjetivo e a incerteza do agente em relação a elas é representada por uma distribuição de probabilidades sobre esse conjunto de estados subjetivos (S). Uma função de utilidade dependente do estado $U : S \times \Delta(X) \to \mathbb{R}$ representa esse fato. É imposto que cada função de utilidade *ex post* seja do tipo utilidade esperada. Por conveniência, o conjunto de funções de utilidade *ex post* (estados subjetivos) é normalizado conforme

$$\mathcal{U} := \left\{ u \in \mathbb{R}^{|X| 4} : \sum_{i=1}^{|X|} u_i = 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{|X|} u_i^2 = 1 \right\}.$$

Neste trabalho, $\mathcal{U}$ será visto como um sub-espaço métrico de $\mathbb{R}^n$.

---

[2] $\Delta(X) := \left\{ (p_1, ..., p_n) : p_i \geq 0, \forall\ i = 1, ..., n; \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$

[3] Ou seja, são consideradas apenas as loterias de suporte completo. Vale notar que os teoremas de representação de DLR e DLRS não assumem essa restrição. Entretanto, por razões técnicas ela será necessária aos resultados desenvolvidos nas seções posteriores. Para uma discussão mais detalhada, ver Riella (2010).

2.2 Preferências sobre menus: representações

Em um ambiente como o tal, que tipo de representação faria sentido? Apenas para ilustrar, um exemplo clássico: imagine uma pessoa que gostaria de comemorar uma data especial em um restaurante e, para tanto, precisa fazer as reservas com pelo menos um dia de antecedência. No momento da reserva, ela não sabe exatamente o que terá mais vontade de comer na ocasião do jantar. Para simplificar, suponha que essa pessoa só coma peixe e massa. Ou seja, que ela vislumbre para o futuro apenas dois possíveis estados da natureza: (i) ter vontade de comer peixe e (ii) ter vontade de comer massa. Na hora de escolher o restaurante em que fazer a reserva, é natural que ela compare apenas as melhores opções dos respectivos menus em cada cenário, isto é, que ela avalie um restautante com base em sua melhor opção caso ela esteja com vontade de comer peixe e caso ela esteja com vontade de comer massa. Então, uma representação adequada para uma preferência desse tipo deveria levar em consideração apenas a maior utilidade que um menu é capaz de proporcionar em cada cenário considerado pelo indivíduo. Com essa intuição em mente, considere a seguinte definição:

Definição. A lista $((S,\Sigma),\mu,U)$ é uma representação por **Utilidade Esperada Aditiva Positiva (UEAP)** se (S,Σ) é um espaço mensurável[5], μ é uma medida de probabilidade[6] sobre (S,Σ) e $U : S \times \Delta(X) \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável dependente do estado com $U(s,.)$ sendo não-trivial e do tipo utilidade esperada para todo $s \in S$[7]. Uma representação **UEAP** é dita canônica se $S = \mathcal{U}$, μ é uma medida de Borel sobre $\mathcal{U}$, Σ é o conjunto dos subconjuntos de Borel de $\mathcal{U}$ e, para todo $u \in \mathcal{U}$ e $p \in \Delta(X)$, $U(u,p) = E_p(u)$[8]. Note que uma representação canônica é inteiramente identificada pela crença μ.Uma representação **UEAP** $((S,\Sigma),\mu,U)$ representa uma relação binária $\succsim$ sobre $\mathcal{X}$ se a função $W : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ defina por

$$W(A) := \int_S \max_{p\in A} U(s,p)\mu(ds)$$

representa $\succsim$.

[5]O par (S,Σ) em que S é um conjunto e Σ é uma σ-álgebra contida em $P(S)$ (conjunto das partes de S) é chamado um espaço mensurável.

[6]Dado um espaço mensurável (S,Σ), uma função de probabilidade μ é uma função definida em Σ tal que

1. $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \Sigma$;
2. $\mu(S) = 1$;
3. Se $A_1, A_{2,\ldots} \in \Sigma$ são dois a dois disjuntos, então $\mu(\cup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

[7]Com isto, queremos dizer que, para todo menu $A \in \mathcal{X}$, a função $\sigma_A : S \to \mathbb{R}$ definida por $\sigma_A(s) := \max_{p\in A} U(s,p)$ para cada $s \in S$ é mensurável.

[8]Onde $E_p(u) = \sum_{x\in X} p(x)u(x)$

De acordo com esta definição, o indivíduo avalia um menu A ponderando as melhores opções que ele oferece em cada estado da natureza pela probabilidade de que cada um desses estados ocorra, sendo que tanto os estados de natureza considerados possíveis como as probabilidades associadas a eles são subjetivos. Isto é, fazem parte da representação das preferências do indivíduo, mas não das primitivas do modelo.

Ainda conforme esta definição, não há nenhuma restrição sobre o tamanho de S, de modo que essa poderia ser uma representação para preferências de um indivíduo que considera possível a ocorrência de infinitos estados de natureza no futuro. Entretanto, é possível argumentar que em diversas situações os indivíduos levam em consideração apenas um número finito de possíveis preferências futuras na hora de tomar sua decisão em relação a um menu. Neste caso, a representação acima poderia assumir o seguinte formato:

Definição. $((S, \Sigma), \mu, U)$ é uma representação **UEAP** finita quando $((S, \Sigma), \mu, U)$ é uma representação **UEAP** com $|S| < \infty$ e $\Sigma = 2^S$[9]. Uma representação **UEAP** canônica é finita se μ tem suporte finito.

Além de intuitiva, esta representação finita pode ser obtida a partir de axiomas bastante razoáveis. Ademais, será este o tipo de representação utilizado nas próximas seções.

2.3 Preferências sobre menus: axiomas e teoremas

O que mais é preciso saber sobre uma relação de preferência $\succsim$ a fim de garantir que ela tenha uma representação como a descrita acima? Antes de enumerar os axiomas sob os quais uma representação do tipo UEAP existe, estabelecer algumas definições facilitará a compreensão dessas propriedades:

Definição. Uma relação binária[10] $\succsim$ é dita:

1. reflexiva se $A \succsim A$ para todo $A \in \mathcal{X}$;
2. transitiva se, para quaisquer $A, B, C \in \mathcal{X}$, $A \succsim B$ e $B \succsim C \implies A \succsim C$;
3. completa se, para quaisquer $A, B \in \mathcal{X}$, $A \succsim B$ ou $B \succsim A$.

De posse desses conceitos, é possível formalizar a definição a seguir.

Definição (Pré-ordem)**.** Uma relação binária $\succsim$ é uma pré-ordem (relação de preferência) se:

[9] Em que 2^S é o conjunto de todos os subconjunto de S, incluindo o próprio S.

[10] Uma relação binária $\succsim$ sobre um conjunto X é um subconjunto de $X \times X$.

1. $\succsim$ é reflexiva;

2. $\succsim$ é transitiva.

Conforme DLR (2001), os axiomas que caracterizam uma relação binária que admite representações **UEAP** ou **UEAP** canônica são:

Axioma 1 (Pré-ordem completa). *$\succsim$ é uma pré-ordem completa sobre $\mathcal{X}$.*

Logo, este axioma quer dizer que $\succsim$ é uma relação que exprime as preferências de um indivíduo capaz de comparar todos os menus de $\mathcal{X}$.

Axioma 2 (Continuidade vNM). *Para quaisquer menus A, B, C com $A \succ B \succ C$, existem dois números reais α e $\beta \in (0,1)$ tais que*

$$A \oplus_\alpha C \succ B \succ A \oplus_\beta C$$[11].

A intuição desse axioma é a de que um menu C, embora pior do que um menu B, nunca pode ser tão ruim. Ou seja, as opções do menu C não podem ser tão piores a ponto de, quando misturadas com as loterias de um menu A melhor do que B, sempre gerarem loterias piores do que o menu B. Da mesma forma, o axioma quer dizer que um menu A, por melhor que seja, nunca será composto por loterias tão boas que estas nunca possam se tornar piores do que o menu B pela composição com um menu C pior do que B. Por isso essa propriedade é chamada de continuidade, porque ela descreve as preferências de um indivíduo que compara os menus de uma maneira "suave".

Axioma 3 (Independência). *Para todo $\lambda \in (0,1]$ e para quaisquer menus A, B e $C \in \mathcal{X}$, $A \succsim B \iff \lambda A + (1-\lambda)C \succsim \lambda B + (1-\lambda)C$.*

Em geral, o axioma de independência se refere à propriedade de que ao comparar dois elementos, o que importa para o indivíduo é a diferença entre eles e não a semelhança que guardam entre si. Neste contexto, de acordo com DLR(2001) a interpretação é a mesma: a avaliação de dois menus $\lambda A + (1-\lambda)C$ e $\lambda B + (1-\lambda)C$ será governada apenas pela forma como o agente compara os menus A e B, o que independe do menu C.

Axioma 4 (Monotonicidade). *Para quaisquer menus A and B, $A \subseteq B$ implica $B \succsim A$.*

Este axioma, sugerido pela primeira vez no trabalho de Koopmans (1964) e utilizado no modelo de preferências sobre menus de Kreps (1979), diz que um menu B que contenha as opções de um menu A, será sempre pelo menos tão bom quanto ele.

[11] Onde $A \oplus_\lambda C := \{p \in \Delta(X) : p = \lambda q + (1-\lambda) r \text{ para algum } q \in A \text{ e } r \in B\}$.

Ou seja, mais opções é sempre preferível a menos opções. De acordo com Kreps (1988), este tipo de propriedade está associado ao fato de que o agente enfrenta incerteza em relação aos seus gostos futuros, já que para uma pessoa que saiba exatamente quais serão suas preferências no segundo estágio, ter mais opções seria, no mínimo, irrelevante. Vale notar, ainda, que este axioma implica que ter mais opções nunca gera desconforto para o indivíduo, o que com certeza não se aplica à todos os contextos. De fato, em DLR e DLRS as representações são obtidas sem assumir o axioma de monotonicidade. Neste trabalho, entretanto, manteremos o foco em relações de preferência que satisfaçam este axioma.

Axioma 5 (Não-trivialidade)**.** *Existem dois menus A e B tais que $A \succ B$.*

DLRS (2007) demonstra que uma relação binária $\succsim$ que satifaz os axiomas acima admite representações UEAP e UEAP canônica. O seguinte teorema sintetiza este resultado:

Teorema 1 (DLRS)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\succsim$ satisfaz aos axiomas 1-5.
2. $\succsim$ tem uma representação UEAP $((S, \Sigma), \mu, U)$.
3. $\succsim$ tem uma representação UEAP canônica μ.

Embora esta tenha sido a contribuição seminal dos autores, em 2008 este resultado foi especializado para um representação em que S é finito, isto é, em que o indivíduo considera apenas um número finito de estados de natureza. O axioma a seguir caracteriza preferências que possuem este tipo de representação.

Axioma 6 (Finitude)**.** *Todo menu A tem um subconjunto finito C tal que $A \sim C$.*

Isto é, ao avaliar um menu com infinitas opções, o indivíduo levará em consideração apenas uma parte finita delas em sua análise. Do ponto de vista descritivo, este axioma é bastante razoável e, além disso, sustenta a existência de um tipo de representação no qual este trabalho se concentrará durante as próximas seções.

Teorema 2 (DLR2)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\succsim$ satisfaz aos axiomas 1-6.
2. $\succsim$ tem uma representação UEAP $((S, \Sigma), \mu, U)$ finita.

3. $\succsim$ tem uma representação UEAP canônica e finita μ.

Finalmente, da discussão acima é possível concluir que preferências que satisfaçam os axiomas 1 à 6 podem ser representadas por

$$A \succsim B \iff \sum_{s\in S} \mu(s) \max_{p\in A} U(s,p) \geq \sum_{s\in S} \mu(s) \max_{p\in B} U(s,p),$$

ou, ainda, pela representação canônica

$$A \succsim B \iff \sum_{u\in supp(\mu)} \mu(u) \max_{p\in A} E_p(u) \geq \sum_{u\in supp(\mu)} \mu(s) \max_{p\in B} E_p(u).$$

3 PREFERÊNCIA POR FLEXIBILIDADE: UMA CONDIÇÃO PARA CONSISTÊNCIA DINÂMICA

Os modelos de representação de preferências sobre menus têm um caráter dinâmico no sentido de que levam em consideração o fato de que, após a escolha do menu, o agente irá tomar outra decisão em um momento posterior. Todavia, o que um indivíduo faria se, antes de escolher o menu, tivesse acesso a novas informações capazes de alterar suas preferências futuras? Em outras palavras, o que aconteceria com as preferências de um indivíduo se, a partir da observação de um sinal, ele soubesse que um dos estados de natureza que ele leva em consideração não pode mais acontecer?

Em um tratamento normativo dessa questão, muitos investigaram as propriedades uma relação de preferência deve ter de modo que, diante de novas informações, o indivíduo atualize suas crenças pela Regra de Bayes[12], procedimento geralmente associado ao que seria um indivíduo "racional". Em modelos no estilo de Savage, as preferências precisam satisfazer ao axioma de *Consistência Dinâmica.* Riella (2010) deriva uma versão apropriada desse axioma para preferências sobre menus de um indivíduo que reage à disponibilidade de novas informações de maneira racional, isto é, atualizando suas crenças pela Regra de Bayes. Seus resultados são apresentados nesta seção.

Entretanto, antes de abordar qualquer aspecto dinâmico da decisão do agente é preciso, em primeiro lugar, estabelecer com precisão de que maneira o dinamismo é inserido no ambiente escolhido - o mundo dos menus. Basicamente, o fenômeno será modelado como duas relações de preferência $\succsim$ e $\succsim^*$ diferentes, sendo que a segunda representa as preferências do agente após a ocorrência de um sinal observável capaz de afetar seu comportamento. Ou seja, é através da comparação entre essas duas relações de preferência que o modelo ganha o aspecto dinâmico de interesse[13].

Compreender a que tipo de situação um modelo como este se refere é mais fácil através de um exemplo. Considere o problema de uma pessoa que precisa escolher em que supermercado comprar ingredientes para preparar um jantar que oferecerá em sua casa. Suponha que entre seus convidados está sua chefe, que entretanto não confirmou

[12] Dada uma medida de probabilidade μ e um evento T com $\mu(T) > 0$, de acordo com a Regra de Bayes, após a observação de um evento T qualquer, o indivíduo atualiza sua crença de modo que a probabilidade de um evento $\widehat{T}$ qualquer passe a ser $\mu(\widehat{T} \backslash T) = \frac{\mu(T \cap \widehat{T})}{\mu(T)}$.

[13] Assim como em Riella (2010), por simplicidade este trabalho irá se limitar ao caso em que o agente recebe um único sinal. Esta simplificação pode ser feita sem perda de generalidade porque no caso em que um indivíduo recebe vários sinais é preciso trabalhar com uma coleção de $\succsim^*$'s, o que não afeta as análises conduzidas no contexto deste trabalho.

presença. Suponha ainda que, caso a chefe vá ao jantar, seja importante para este agente oferecer um prato e um vinho sofisticados. Caso contrário, ele prefere economizar e oferecer uma refeição mais informal. Imagine que, antes de sair de casa, o indivíduo fique sabendo que sua chefe não poderá aceitar o convite. Nos termos do modelo, o indivíduo tem uma relação de preferência $\succsim$ sobre os supermercados (menus) antes de saber se a chefe vai ou não, e outra relação de preferência $\succsim^*$ depois de receber a ligação da chefe (sinal observável). As propriedades que duas relações de preferência $\succsim$ e $\succsim^*$ precisam ter para que a segunda seja uma atualização racional da outra são discutidas em Riella (2010), cujos principais resultados são apresentados a seguir.

3.1 Atualização Bayesiana de Preferências sobre Menus

Riella (2010) apresenta os axiomas que caracterizam preferências sobre menus que são dinamicamente consistentes quando o espaço de estados da natureza subjetivo é finito e quando é infinito. Este trabalho, por sua vez, restringe atenção ao caso finito. Dada a existência de uma representação finita por função de utilidade para preferências sobre menus (Teorema 2), considere os seguintes definição e axioma:

Definição. Para quaisquer dois menus A, B a relação de flexibilidade extra $\rhd$ é definida por:

$$\begin{aligned} A \rhd B \text{ se, e somente se, } A &\supseteq B \text{ e existe um menu } C \text{ tal que} \\ A \cup C &\succ B \cup C \text{ mas } A \cup C \sim^* B \cup C. \end{aligned}$$

Para entender a definição acima, suponha que $A \supseteq B$, o que pelo axioma de monotonicidade implica que $A \succsim B$. Se $A \rhd B$, então existe um menu C que quando adicionado aos menus A e B, elimina qualquer valor que $\succsim^*$ pudesse associar às opções extras em A, algo que não ocorre com $\succsim$. Isto é, se $A \rhd B$, então em pelo menos uma situação, a preferência $\succsim$ vê na maior flexibilidade oferecida pelas opções adicionais de um menu A um valor que a preferência $\succsim^*$ não vê. Riella (2010) trabalha com a seguinte propriedade:

Axioma 7 (Flexibility Consistency). *Para quaisquer dois menus A e B,*

$$A \succ^* B \text{ e } B \succsim A \Rightarrow A \cup B \rhd A.$$

Impor que $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfaçam este axioma é impor que toda discordância que eventualmente seja observada entre elas decorra do fato de que a preferência $\succsim$ veria ganhos em se adicionar as opções do menu B ao menu A que $\succsim^*$não veria. A idéia fica mais clara com a observação de que o axioma pode ser escrito como

$$\begin{aligned} A &\succ {}^{*}B \text{ e } B \succsim A \Rightarrow (A \cup B) \cup C \succ A \cup C \\ \text{mas } (A \cup B) \cup C &\sim {}^{*}A \cup C, \text{ para algum } C \in \mathcal{X} \cup \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Note que, se $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency, então, se as preferências $\succsim$ e $\succsim^*$ não concordam, deve existir pelo menos uma situação em que a preferência $\succsim$ considera estritamente melhor o menu que contém as opções adicionais encontradas no menu B, enquanto a preferência $\succsim^*$ é indiferente entre ter ou não tais opções no menu $A \cup C$. Ou seja, em pelo menos uma situação, $\succsim$ vê na flexibilidade mais valor do que $\succsim^*$. No exemplo anterior, isto corresponderia a dizer que as preferências do indivíduo antes e depois de saber da ausência da chefe só podem discordar se, sem saber da informação, for importante para o agente ir a um supermercado que tenha ambas as opções (jantar informal e itens sofisticados) e, após receber a informação, um supermercado ter ou não itens sofisticados não tenha mais importância. As implicações desse axioma sobre as representações de $\succsim$ e $\succsim^*$ são enunciadas através do seguinte teorema:

Teorema 3 (Riella (2010))**.** *Seja $\succsim$ uma preferência UEAP finita e seja $\succsim^*$ uma preferência UEAP genérica. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency;
2. Para qualquer representação UEAP finita $((S, \Sigma), \mu, U)$ de $\succsim$, existe $T \subseteq S$ tal que $((S, \Sigma), \mu_T, U)$ representa $\succsim_*$, onde μ_T é a atualização bayesiana de μ depois da observação de T;
3. A representação canônica μ^* de $\succsim^*$ é a atualização bayesiana da representação canônica μ de $\succsim$ depois da observação do evento *supp* (μ^*).

Preferências completas sobre menus que satisfazem Flexibility Consistency são dinamicamente consistentes no sentido de que o agente, a partir de um sinal observável, computa a informação de que um ou mais estados de natureza não podem ocorrer e, então, atualiza sua crença sobre o espaço de estados subjetivos usando a Regra de Bayes. Ou seja, quando uma preferência $\succsim$ só discorda de $\succsim^*$ se em alguma situação uma valoriza mais flexibilidade do que a outra, na representação de $\succsim^*$ a crença do indivíduo (distribuição de probabilidade μ^*) é a atualização bayesiana da crença μ da representação de $\succsim$.

4 PREFERÊNCIAS SOBRE MENUS: ANÁLISES DO CASO INCOMPLETO

Os trabalhos de DLR, DRLS e Riella tratam de relações de preferências que, entre outros axiomas, satifazem o axioma de completude. Todavia, supor que um indivíduo é sempre capaz de fazer comparações é, para alguns, uma hipótese forte demais. Nas palavras de Aumann (1962), o axioma de completude é o mais questionável. Segundo Ok (2000), à princípio não há motivos para supor que um indivíduo racional não possa, em determinadas situações, ficar indeciso. Este argumento é antigo e remete aos trabalhos seminais de Aumann (1962) e Bewley (1986). Completude é *"inaccurate as a description of real life..." e "...hard to accept even from the normative viewpoint"*(Aumann, 1962, p.446). De fato, para muitos, nem do ponto de vista normativo impor completude tem apelo (Ok, 2000): *"If probabilities are not known, there seems to be no normative justification for completness"*(Bewley, 1986, p.11). Ademais, segundo Ok (2000), além de mais realistas, preferências incompletas podem ser uma solução alternativa para os casos em que faltam informações a respeito das preferências do agente. Isto é, quando só há informações parciais sobre uma determinada relação de preferência, modelar o indivíduo como se ele tivesse preferências incompletas é uma maneira rigorosa de tratar o problema da falta de informação. Finalmente, preferências sociais ou preferências que expressam decisões coletivas são outros bons argumentos de Ok (2000) para o tratamento de preferências incompletas. Dito isto, não surpreende que os principais teoremas de representação tenham sido generalizados para preferências incompletas. Em linha com esta literatura, o objetivo deste trabalho é retirar o axioma de completude e encontrar a versão apropriada de Flexibility Consistency para preferências incompletas. Nesta seção, os teoremas de representação para preferências incompletas sobre menus demonstrados em Kochov (2007) são apresentados e especializados para o caso finito.

4.1 Preferências incompletas sobre menus: representações

Sem a hipótese de completude, qual seria uma representação apropriada para as preferências de um indivíduo que precisa escolher um menu do qual, posteriormente, terá a chance de optar por uma de suas alternativas? Ainda faz sentido que, ao avaliar um menu, o agente leve em consideração apenas suas melhores opções em cada cenário. Suponha que existam dois menus A e B entre os quais o indivíduo fique indeciso, isto é, dois menus que o agente não seja capaz de comparar[14]. O que poderia motivar tal indecisão? Embora o indivíduo não saiba quais serão suas preferências no segundo estágio, ele acredita que esses eventos seguem uma determinada distribuição de probabilidade e

[14]Notação: $A \bowtie B$ quando A e B não são comparáveis.

é através dessa crença que ele leva em consideração a incerteza em relação ao futuro. Mas, se o agente não tiver crenças claras a respeito dos possíveis cenários, isto é, se ele não souber ao certo qual entre várias distribuições de probabilidade deve considerar na hora de tomar sua decisão, então é possível que, por exemplo, um menu A seja melhor do que um menu B de acordo com uma crença enquanto, sob uma outra distribuição de probabilidade, o menu B seja melhor do que o menu A. Em uma situação como a tal, o indivíduo não teria como chegar a uma conclusão a respeito de como os menus A e B se comparam. Todavia, caso o menu A fosse melhor do que o B sob qualquer uma das distribuições de probabilidade, ele ainda conseguiria dizer que $A \succsim B$. Esta é a idéia da seguinte definição:

Definição. Dizemos que uma lista $((S,\Sigma),\Delta,U)$ é uma representação por **Utilidade Esperada Aditiva Positiva Incompleta (UEAPI)** se (S,Σ) é um espaço mensurável, Δ é um conjunto de medidas de probabilidade sobre S e $U : S \times \Delta(X) \to \mathbb{R}$ é uma função de utilidade mensurável dependente do estado, com $U(s,.)$ sendo não-trivial e do tipo de utilidade esperada para todo $s \in S$. Uma **UEAPI** é dita canônica se $S = \mathcal{U}$, Δ é um conjunto fechado e convexo de medidas sobre $\mathcal{U}$ e, para cada $u \in \mathcal{U}$ e $p \in \Delta(X)$, $U(u,p) = E_p(u)$. Note que uma representação UEAPI canônica é inteiramente caracterizada pelo conjunto de crenças Δ. Dizemos que uma relação binária $\succsim$ incompleta sobre $\mathcal{X}$ tem uma representação **UEAPI** quando

$$A \succsim B \iff \int_S \max_{p\in A} E_p(s,.)\,\mu(ds) \geq \int_S \max_{p\in B} E_p(s,.)\,\mu(ds) \text{ para toda } \mu \in \Delta.$$

Mais uma vez, uma representação como a acima descrita inclui também indivíduos que consideram infinitos estados de natureza como possíveis cenários futuros. Conforme mencionado anteriormente, neste trabalho nos concentraremos em representações finitas. Considere a definição a seguir.

Definição. Uma lista $((S,\Sigma),\Delta,U)$ é uma representação **UEAPI** finita se $((S,\Sigma),\Delta,U)$ é uma representação **UEAPI** com $|S| < \infty$.Uma representação **UEAPI** canônica é finita se $|\cup_{\mu\in\Delta} supp(\mu)| < \infty$.

4.2 Preferências incompletas sobre menus: axiomas e teoremas

Kochov (2007) explorou a questão acima e axiomatizou preferências que admitem estes tipo de representação. Segundo seu principal resultado, uma relação binária incompleta $\succsim$ tem uma representação **UEAPI** ou **UEAPI** canônica quando satisfaz, entre outros, os seguintes axiomas:

Axioma 8 (Pré-ordem). *$\succsim$ é uma pré-ordem sobre $\mathcal{X}$.*

Axioma 9 (Continuidade II)**.** *Para quaisquer duas sequências convergentes*[15] $\{A_n\}$ *e* $\{B_n\}, A_n \succsim B_n$ *para todo* n *implica* $\lim \{A_n\} \succsim \lim \{B_n\}$.

A interpretação desses axiomas é essencialmente a mesma do caso completo. Todavia, vale ressaltar que, em Kochov, $\succsim$ é uma pré-ordem (relação binária transitiva e reflexiva), mas não é uma pré-ordem completa. Ou seja, as primitivas do modelo de Kochov podem ser preferências de um indivíduo que eventualmente fique indeciso entre dois menus. O principal resultado de Kochov (2007) pode ser enunciado como:

Teorema 4 (Kochov)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\succsim$ satisfaz aos axiomas 3-5 e 8-9;
2. $\succsim$ tem uma representação UEAPI $((S,\Sigma),\Delta,U)$.
3. $\succsim$ tem uma representação UEAPI canônica Δ.

Entretanto, embora tenha generalizado as representações **UEAP** para preferências incompletas, as relações de preferências tratadas em Kochov não satifazem ao axioma de finitude. A fim de obter uma representação finita, considere mais uma vez o axioma de finitude.

Axioma 10 (Finitude)**.** *Todo menu* A *tem um subconjunto finito* C *tal que* $A \sim C$.

A imposição de Pré-ordem, Continuidade II, Monotonicidade, Independência, Não-trivialidade e Finitude nos permite demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\succsim$ satisfaz aos axiomas 3-5, 8-10;
2. $\succsim$ tem uma representação UEAPI $((S,\Sigma),\Delta,U)$ finita.
3. $\succsim$ tem uma representação UEAPI canônica Δ tal que $|\cup_{\mu\in\Delta}\text{supp}(\mu)| < \infty$.

A idéia da demonstração (cujos detalhes encontram-se no apêndice) é basicamente mostrar que se $\succsim$ não tem uma representação canônica finita, isto é, que se $|\cup_{\mu\in\Delta}\text{supp}(\mu)| = \infty$, então existe um menu A[16] tal que, para nenhum menu C com $|C| < \infty$, temos que $A \sim C$. Com isso, temos a representação finita de preferências incompletas sobre menus necessária para a demonstração dos resultados a seguir.

[15] Em que por convergência entende-se convergência na métrica de Hausdorff.

[16] Qualquer menu A tal que $A := \{q \in \Delta(X); d(p,q) \leq \alpha\}$ para algum $p \in \Delta(X)$ e $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, isto é, que seja uma esfera, é um exemplo desse caso.

5 PREFERÊNCIAS SOBRE MENUS: DINÂMICA CONSISTENTE SOB INCOMPLETUDE

Quando uma relação de preferência $\succsim$ sobre menus é (entre outras características) completa, Riella (2010) demonstra as condições sob as quais, diante de novas informações, a atualização $\succsim^*$ de $\succsim$ é dinamicamente consistente no sentido de que a cringa μ^* na representação de $\succsim^*$ é uma atualização bayesiana da crença μ na representação de $\succsim$. Dado que existe uma representação para uma relação de preferência incompleta $\succsim$ sobre menus, o que caracteriza as preferências de um indivíduo que, a despeito da incompletude, atualiza suas crenças de acordo com a Regra de Bayes quando observa um sinal capaz de informar sobre suas preferências ex-post? Esta é a pergunta que este trabalho pretende responder e, à luz dos resultados de Riella (2010), temos como objetivo encontrar a versão apropriada de Flexibility Consistency quando as preferências sobre menus não são completas. Para tanto, a mesma estratégia utilizada em Riella (2010) será empregada em nossas análises: a partir da ocorrência de um sinal observável, duas relações de preferência $\succsim$ (antes do sinal) e $\succsim^*$ (depois do sinal) serão comparadas. As relações entre $\succsim$ e $\succsim^*$ serão exploradas e culminarão em um axioma que caracterizará $\succsim$ e $\succsim^*$ quando elas forem dinamicamente consistentes.

5.1 Noções de flexibilidade comparativa: o caso incompleto

Uma vez que o objetivo é observar como duas relações de preferência interagem a partir da observação de um sinal, há a necessidade de definir termos específicos sob os quais essas duas relações de preferência podem ser comparadas. Para tanto, noções básicas de flexibilidade comparativa serão discutidas nesta seção.

No caso completo, temos que se duas relações de preferência $\succsim$ e $\succsim^*$ discordam entre si apenas quando uma vê mais valor na flexibilidade do que a outra em pelo menos uma situação, então $\succsim$ e $\succsim^*$ serão dinamicamente consistentes. Dois conceitos básicos dessa conclusão são: discordância e valor da flexibilidade. A fim de estabeler os resultados para o caso incompleto, esses conceitos serão formalizados de acordo com as definições abaixo. Com base nelas também será possível estabeler resultados preliminares que serão utilizados na demonstração do nosso principal teorema. Relembre a definição da relação de flexibilidade extra introduzida acima.

Definição. Para quaisquer dois menus A, B a relação de flexibilidade extra $\rhd$ é definida por:

$$A \rhd B \text{ se, e somente se, } A \supseteq B \text{ e existe um menu } C \text{ tal que}$$
$$A \cup C \succ B \cup C \text{ mas } A \cup C \sim^* B \cup C.$$

De acordo com essa definição, se um menu A é tal que $A \supseteq B$ e $A \rhd B$, então, em pelo menos uma situação as opções extras do menu A têm valor para a preferência $\succsim$, mas são irrelevantes de acordo com a preferência $\succsim^*$. Quando duas relações de preferência $\succsim$ e $\succsim^*$ têm uma representação canônica finita, é possível demonstrar o seguinte lema:

Lema 1. *Sejam $\succsim$ e $\succsim^*$ preferências com representações UEAPI canônicas finitas Δ e Δ^*, respectivamente. Defina $S := \cup_{\mu \in \Delta} supp\,(\mu)$ e $S^* := \cup_{\mu^* \in \Delta^*} supp\,(\mu^*)$. Para quaisquer dois menus A e B tais que $A \supseteq B$, $A \rhd B$ se, e somente se, existe $u \in S \setminus S^*$ tal que*

$$\max_{p \in A} E_p(u) > \max_{p \in B} E_p(u).$$

Note que, como consequência da não-completude das preferências, é necessário lidar com um conjunto de crenças sobre o espaço de estados da natureza subjetivo e, naturalmente, levar em consideração o suporte de cada uma dessas priors. O lema acima exprime essa idéia através dos conjuntos S e S^*. O axioma de finitude é uma condição necessária para que os conjuntos S e S^* sejam fechados, característica importante para a demonstração dos resultados. Neste sentido, a incompletude das preferências torna necessário que os resultados utilizados sejam obtidos a partir de condições mais restritivas do que as impostas no caso completo. A idéia da demonstração, por sua vez, continua a mesma. Se $A \supseteq B$ e $A \rhd B$, é imediato que existe $u \in S \setminus S^*$ tal que $\max\limits_{p \in A} E_p(u) > \max\limits_{p \in B} E_p(u)$. A outra direção tem uma intuição geométrica simples. Para ilustrar, suponha que $|X| = 3$ e considere dois menus A e B tais que $A \supseteq B$ (figura 1). Suponha que exista $u^* \in S \setminus S^*$ tal que $\max\limits_{p \in A} E_p(u^*) > \max\limits_{p \in B} E_p(u^*)$. Chame de q^* a loteria que, no estado u^*, tem um valor esperado maior ou igual a todas as outras opções do menu B (figura 2).

Precisamos demonstrar que existe um menu C cujas loterias, quando adicionadas ao menu B, sejam tais que $A \cup C \succ B \cup C$ mas $A \cup C \sim^* B \cup C$. Ou seja, é preciso adicionar ao menu B opções de modo que ele se torne pelo menos tão bom quanto o menu A de acordo com a preferência $\succsim^*$ e, ao mesmo tempo, garantir que nenhuma dessas opções adicionais seja a loteria q^*.

Nos casos como o do estado u ilustrado na figura 2, é possível fazer isso adicionando ao menu B as melhores loterias do menu A. Porém, em casos como o do estado $\overline{u}$, a melhor loteria de A coincide com a loteria q^*, o que faria com que o maior valor esperado dos menus $A \cup C$ e $B \cup C$ no estado u^* fossem iguais. Na figura 3, é possível observar esse

2

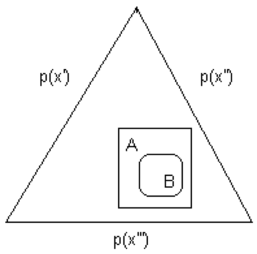

Figura 1 - Menus A e B tais que o menu B está contido no menu A.

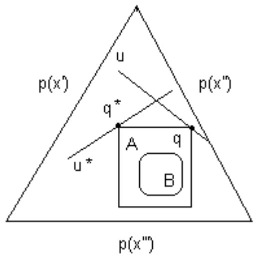

Figura 2 - Estados em que a melhor loteria do menu A é diferente de q*.

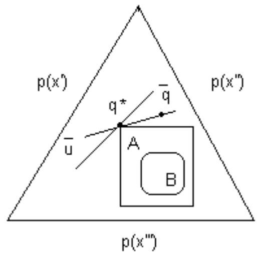

Figura 3 - Estados em que a melhor loteria do menu A é a loteria q*.

1.*pdf*

caso. Como adicionar a loteria q^* ao menu B é problemático no sentido acima, então a estratégia é adicionar a loteria $\overline{q}$ ao menu B. No estado $\overline{u}$ essa loteria é indiferente a loteria q^* e, ao mesmo tempo, é tal que no estado u^* a loteria q^* ainda é melhor do que ela. Construindo C dessa forma, isto é, coletando tais loteria para cada uma dos estados, é possível obter um menu C tal que $A \cup C \succ B \cup C$ mas $A \cup C \sim^* B \cup C$.

De acordo com este lema, sempre que existir uma situação em que $\succsim$ vê algum valor adicional em escolher um menu A com mais opções do que um menu B, mas $\succsim^*$ não, então existirá um estado de natureza considerado possível em S, mas não em S^*, tal que a melhor opção do menu A seja estritamente melhor do que a melhor opção do menu B. Ou seja, é como se o ganho gerado em $\succsim$ em função da maior flexibilidade do menu A estivesse diretamente associado à ocorrência de um gosto futuro (estado da natureza) que a preferência $\succsim^*$, por sua vez, não considera como uma possibilidade.

Seguindo essa intuição e lembrando que quando as preferências sobre menus são completas o processo de atualização pela Regra de Bayes pode ser associado ao fato de que as preferências de um indivíduo antes ($\succsim$) e depois ($\succsim^*$) da observação de um sinal só discordam se a primeira valorizar mais flexibilidade do que a outra, o passo que segue é considerar qual versão de *Flexibility Consistency* garante os mesmos resultados quando as preferências $\succsim$ e $\succsim^*$ não são completas. Para tanto, é conveniente expressar a idéia de discordância na ausência de completude.

Considere uma preferência $\succsim^*$ incompleta sobre $\mathcal{X}$ que tenha representação **UEAPI.** Sejam dois menus A e B. Do Teorema 4,

$$A \succsim^* B \iff \int_{\mathcal{U}^*} \max_{p \in A} E_p(s,.)\, \mu^*(du) \geq \int_{\mathcal{U}^*} \max_{p \in B} E_p(s,.)\, \mu^*(du) \text{ para toda } \mu^* \in \Delta^*.$$

Agora considere uma preferência $\succsim$ e note que para que $\succsim$ discorde de $\succsim^*$, uma condição suficiente é que

$$\int_{\mathcal{U}^*} \max_{p\in B} E_p(s,.)\,\mu(du) > \int_{\mathcal{U}^*} \max_{p\in A} E_p(s,.)\,\mu(du) \ \ \exists\ \mu \in \Delta,$$

ou seja, apenas que $A \not\succsim B$, o que, no caso incompleto, não implica que $B \succ A$.

Analogamente, se $B \succsim A$, então $\succsim$ discorda de $\succsim^*$ se $B \not\succsim^* A$. Isto é,

$$B \not\succsim^* A \iff \int_{S^*} \max_{p\in A} E_p(s,.)\,\mu^*(ds) > \int_{S^*} \max_{p\in B} E_p(s,.)\,\mu^*(ds) \ \ \exists\ \mu^* \in \Delta^*,$$

e

$$B \succsim A \iff \int_{S} \max_{p\in B} E_p(s,.)\,\mu(ds) \geq \int_{S} \max_{p\in A} E_p(s,.)\,\mu(ds) \quad \text{para toda } \mu \in \Delta.$$

Embora no caso incompleto seja mais trabalhoso construir intuições, com base na idéia acima, o seguinte axioma fica mais intuitivo:

Axioma 11 (Flexibility Consistency II)**.** *Para quaisquer dois menus A e B*

$$A \succsim^* B \text{ e } A \not\succsim B \text{ ou } B \not\succsim^* A \text{ e } B \succsim A \implies A \cup B \rhd A.$$

É possível entender o axioma acima como uma versão mais geral daquele empregado no caso completo. Basta notar que, se as relações de preferência forem completas, então

$$\begin{aligned}
A &\succsim {}^*B \text{ e } A \not\succsim B \text{ ou } B \not\succsim^* A \text{ e } B \succsim A \implies A \cup B \rhd A \\
&\Downarrow \\
A &\succsim {}^*B \text{ e } B \succ A \text{ ou } A \succ^* B \text{ e } B \succsim A \implies A \cup B \rhd A \\
&\Downarrow \\
A &\succ {}^*B \text{ e } B \succsim A \implies A \cup B \rhd A.
\end{aligned}$$

Ou seja, Flexibility Consistency II impõe sobre preferências incompletas o mesmo tipo de comportamento imposto pelo axioma Flexibility Consistency na presença de completude[17].

A relação de flexibilidade extra expressa a existência de situaçõs em que as opções adicionais de um menu são estritamente preferidas em uma das relações de preferência, mas inrrelevantes de acordo com a outra. Entretanto, é possível aplicar uma definição mais precisa para uma relação de preferência $\succsim$ que valoriza flexibilidade mais do que

[17] A discussão acima mostra que no caso completo, Flexibility Consistency II é mais forte do que Flexibility Consistency. Todavia, para preferências UEAP as duas definições são equivalentes.

uma relação de preferência $\succsim^*$.

Definição. Uma relação de preferência $\succsim$ sobre $\mathcal{X}$ valoriza flexibilidade mais do que uma relação de preferência $\succsim^*$ sobre $\mathcal{X}$ se, e somente se, para quaisquer dois menus A e B tais que $A \subseteq B$

$$B \succ^* A \implies B \succ A.$$

Ou seja, se $\succsim$ valoriza flexibilidade mais do que $\succsim^*$, sempre que um menu B com mais opções é estritamente preferido do que um menu A por $\succsim^*$, $\succsim$ também irá preferir estritamente o menu B ao menu A. Esta definição guarda a seguinte relação com o axioma Flexibility Consistency II.

Lema 2. *Sejam $\succsim$ e $\succsim^*$ duas preferências UEAPI. Se $\succsim$ e $\succsim^*$satisfazem Flexibility Consistency II, então $\succsim$ valoriza flexibilidade mais do que $\succsim^*$.*

Em palavras, se duas relações de preferência $\succsim$ e $\succsim^*$ só discordam quando em alguma situação ter mais flexibilidade é mais importante para $\succsim$ do que para $\succsim^*$, então, $\succsim$ valoriza mais flexibilidade do que $\succsim^*$ no sentido da definição acima.

Até este ponto, foram definidas formas de interação entre relações de preferência, mas a idéia de que uma $\succsim^*$ é a atualização da outra $\succsim$ depois da observação de um sinal não foi formalizada. O próximo lema expressa essa idéia.

Lema 3. *Suponha que $\succsim$ e $\succsim^*$sejam preferências UEAPI com representações canônicas finitas Δ e Δ^*, respectivamente. Então, $\succsim$ valoriza flexibilidade mais do que $\succsim^*$ se, e somente se,*

$$\cup_{\mu^* \in \Delta^*} supp\,(\mu^*) \subseteq \cup_{\mu \in \Delta} supp\,(\mu)\,.$$

Logo, se $\succsim$ valoriza flexibilidade mais do que $\succsim^*$, então a união dos suportes de μ^* está continda na união dos suportes de μ, ou seja, de acordo com a relação de preferência $\succsim^*$, o número de estados de natureza que podem se realizar no segundo estágio é igual ou menor ao número considerado em $\succsim$. Este lema sugere a interpretação $\succsim$ e $\succsim^*$ como as preferências de um indivíduo antes e depois da observação de um sinal a partir do qual ele pode concluir que alguns dos estados de natureza que ele considerava possíveis não podem acontecer.

Detalhes da demonstração estão no apêndice. Se $\cup_{\mu^* \in \Delta^*} supp\,(\mu^*) \subseteq \cup_{\mu \in \Delta} supp\,(\mu)$ e $B \succ^* A$, onde $A \subseteq B$, é imediato que $B \succ A$. A fim de demonstrar a outra direção, a estratégia consiste basicamente em provar que se $\cup_{\mu^* \in \Delta^*} supp\,(\mu^*) \nsubseteq \cup_{\mu \in \Delta} supp\,(\mu)\,,$ então é possível encontrar dois menus A e B tais que $B \succ^* A$, mas $A \sim B$, de modo que, nesse caso, $\succsim$ não valoriza flexibilidade mais do que $\succsim^*$.

5.2 Flexibility Consistency II e Atualizações Bayesianas: o caso incompleto

Quando duas relações de preferência incompletas $\succsim$ e $\succsim^*$ têm representações UEAPI canônicas finitas, cada uma delas é associada a um conjunto de crenças (Δ e Δ^*). Neste contexto, a consistência dinâmica entre $\succsim$ e $\succsim^*$ depende de como esses dois conjuntos se relacionam. Seja $\Delta\mid_{S^*}$ o conjunto das atualizações bayesianas das crenças de Δ quando $\succsim$ é restrita ao espaço de estados subjetivos $S^* := \cup_{\mu^*\in\Delta^*} supp\,(\mu^*)$. Diremos que $\succsim$ e $\succsim^*$ são dinamicamente consistentes se $\Delta\mid_{S^*}= \Delta^*$, ou seja, se Δ^* é o conjunto de todas as atualizações bayesianas das priors em Δ. É possível demonstrar que se $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency II, então $\succsim$ e $\succsim^*$ são dinamicamente consistentes conforme a definição acima. O teorema a seguir formaliza este resultado.

Teorema 6. *Sejam $\succsim$ e $\succsim^*$ preferências UEAPI finitas. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency II;
2. Para qualquer representação UEAPI finita $((S,\Sigma),\Delta,U)$ de $\succsim$ existe $T\subseteq S$ tal que $((S,\Sigma),\Delta_T,U)$ representa $\succsim^*$, onde Δ_T é o conjunto das atualizações bayesianas de cada $\mu\in\Delta$ depois da observação de T;
3. A representação UEAPI canônica finita Δ^* de $\succsim^*$ é o conjunto das atualizações bayesianas da representação UEAPI canônica Δ de $\succsim$ depois da observação do evento $S^* := \cup_{\mu^*\in\Delta^*} supp\,(\mu^*)$.

Detalhes da demonstração estão no apêndice. A seguir, apresentamos a intuição do argumento.

Defina $S^* := \cup_{\mu^*\in\Delta^*} supp\,(\mu^*)$, $S := \cup_{\mu\in\Delta} supp\,(\mu)$ e $\sigma_A(u) := \max_{p\in A} E_p(u)$, para cada $u\in\mathcal{U}$. Suponha que $\Delta\mid_{S^*}= \Delta^*$. Então, para quaisquer menus A e B,

$$\sum_{u\in S^*}\sigma_A(u)\mu^*(u)\geq\sum_{u\in S^*}\sigma_B(u)\mu^*(u)\text{ para toda }\mu^*\in\Delta^*$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{u\in S^*}\sigma_A(u)\mu(u)\geq\sum_{u\in S^*}\sigma_B(u)\mu(u)\text{ para toda }\mu\in\Delta.$$

Agora, suponha que $A\succsim^* B$ mas $A\not\succsim B$. Isto implica que

$$\sum_{u\in S}\sigma_B(u)\mu\left(u\right) > \sum_{u\in S}\sigma_A(u)\mu\left(u\right)\ \ \exists\ \mu\in\Delta,$$

mas, é claro que isto só pode ocorrer se

$$\sigma_B(\hat{u}) > \sigma_A(\hat{u}) \text{ para algum } \hat{u}\in S\backslash S^*$$

Então, pelo lema 1, temos que $A\cup B \rhd A$. Com um raciocínio análogo é possível mostrar que se $B \not\succsim^* A$ e $B \succsim A$ e $\Delta\ |_{S^*}= \Delta^*$, então $A\cup B\ \rhd\ A$. Isso conclui a demonstração de que $\Delta\ |_{S^*}= \Delta^*$ implica que $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency II. Suponha agora que existe $\widehat{\mu}\in\Delta\ |_{S^*}$ tal que $\widehat{\mu}\notin\Delta^*$. Nesse caso, é possível encontrar dois menus A e B tais que

$$\sum_{u\in S^*}\sigma_A(u)\mu^*\left(u\right) > \sum_{u\in S^*}\sigma_B(u)\mu^*\left(u\right)\ \text{ para toda } \mu^*\in\Delta^*$$

mas

$$\sum_{u\in S}\sigma_B(u)\widehat{\mu}\left(u\right) > \sum_{u\in S}\sigma_A(u)\widehat{\mu}\left(u\right)$$

e

$$\sigma_A(u) > \sigma_B(u) \text{ para toda } u\in S\backslash S^*,$$

ou seja, tais que $A\succ^* B$, $A \not\succsim B$, mas $A\cup B \not\rhd A$. Analogamente, suponha que exista $\overline{\mu}$ $\in\Delta^*$ tal que $\overline{\mu}\notin\Delta\ |_{S^*}$. É possível demonstrar que existem menus A e B tais que

$$\sum_{u\in S}\sigma_B(u)\mu\left(u\right) > \sum_{u\in S}\sigma_A(u)\mu\left(u\right)\ \text{ para todo } \mu\in\Delta\ |_{S^*},$$

mas

$$\sum_{u\in S^*}\sigma_A(u)\widehat{\mu}\left(u\right) > \sum_{u\in S^*}\sigma_B(u)\widehat{\mu}\left(u\right)$$

e

$$\sigma_A(u) > \sigma_B(u) \text{ para todo } u\in S\backslash S^*.$$

Isto é, existem menus A, B tais que $B\succ A$, $B \not\succsim^* A$, mas $A\cup B \not\rhd A$. Ou seja, se $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency II, então $\Delta^* = \Delta\ |_{S^*}$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os teoremas de representação no estilo de Savage incorporam a noção bastante razoável de que, em um ambiente de incerteza, os indivíduos escolhem de acordo com probabilidades subejtivas; em um contexto dinâmico, uma atualização baysiana dessas crenças representa a preferências de um indivíduo que acessa mais informações sobre o futuro se o axioma Dynamic Consistency também caracterizar sua relação de preferência. Quando o espaço de estados da natureza deixa de ser exógeno, como nas representações em DLR, a consistência dinâmica é assegurada se a relação de preferência sobre menus satisfaz ao axioma Flexibility Consistency.

Esses resultados dependem do axioma de completude, uma hipótese simplificadora, porém controversa. Ao longo dos anos, os principais teoremas de representação foram generalizados para preferências incompletas e este trabalho estendeu este tipo de análise para a questão do update.

Com base na existência de uma representação para preferências incompletas sobre menus (Kochov, 2007), demonstramos primeiro que sob o axioma de finitude, a representação em Kochov assume uma forma finita - mais intuitiva -, conforme o Teorema 5. A partir dessa representação, demonstramos que a versão apropriada de Flexibility Consistency para preferências incompletas sobre menus é o axioma Flexibility Consistency II, uma versão mais geral sob a qual é possível garantir que diante da disponibilidade de novas informações a respeito dos estados da natureza futuros, o indivíduo irá atualizar seu conjunto de crenças utilizando a Regra de Bayes. Entretanto, os resultados deste trabalhos são restritos aos casos em que a representação das preferências dos indivíduos admite um espaço de estados de natureza finito. Uma extensão das análises aqui apresentadas para o caso infinito ficam como sugestão de pesquisa. Além disso, as representações aqui utilizadas assumem que as preferências satisfazem Monotonicidade. Os resultados de DLR, entretanto, não assumem tal condição e, com isso, oferecem uma representação ainda mais geral. Tendo isso em vista, a generalização dos axiomas Flexibility Consistency e Flexibility Consistency II para preferências não monotônicas também podem compor uma agenda de pesquisa.

7 DEMONSTRAÇÕES

7.1 Preliminares Matemáticas

7.1.1 Relações de preferência

As definições a seguir são baseadas em Ok (2007) e Kreps (1988) e utilizadas ao longo do texto e nas demonstrações desta seção.

Definição (Par ordenado)**.** Um par ordenado é uma lista (a, b) em que a e b são dois objetos.

Definição (Produto cartesiano)**.** O produto cartesiano de dois conjuntos não-vazios A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. Isto é, $A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Definição (Relação binária)**.** Uma relação binária $\succsim$ sobre um conjunto X é um subconjunto de $X \times X$ e $(x, y) \in \succsim$ se o par ordenado (x, y) está na relação $\succsim$.

Definição. Uma relação binária $\succsim$ sobre X é dita:

1. reflexiva se $x \succsim x$ para todo $x \in X$;
2. transitiva se $x \succsim y$ e $y \succsim z$ implica $x \succsim z$ para todo $x, y, z \in X$;
3. completa se $x \succsim y$ ou $y \succsim x$ para todo $x, y \in X$;

Definição (Pré-ordem (ou relação de preferência))**.** Uma relação binária $\succsim$ sobre X é uma pré-ordem (ou relação de preferência) se $\succsim$ é uma relação binária reflexiva e transitiva.

Definição (Pré-ordem completa)**.** Uma relação binária $\succsim$ sobre X é uma pré-odem completa se $\succsim$ é uma relação binária reflexiva, transitiva e completa.

7.1.2 Conceitos básicos de análise real e teoria de probabilidade

Discussões e detalhes a respeito das definições abaixo podem ser encontradas em Lima (1929), Fernandez (1940), Rudin (1976), Ok (2007) e Casella e Berger (2001).

Definição. Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos se não existe x tal que $x \in A$ e $x \in B$, isto é, se $A \cap B = \emptyset$.

Definição. Seja X um conjunto não-vazio. Uma função distância (ou métrica) é uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que, para todo $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definição. (X, d) é um espaço métrico se d é uma função distância sobre X.

Definição. $S \subseteq X$ é um conjunto aberto em X se, para todo $x \in S$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N_{\varepsilon,X}(x) \subseteq S$, onde $N_{\varepsilon,X}(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$. O maior conjunto aberto em X que contém S é dito interio de S em relação a X e denotado por $int_X(S)$.

Definição. $S \subseteq X$ é um conjunto fechado em X se $X \setminus S$ é um conjunto aberto em X. O fecho de S em relação a X é o menor conjunto fechado em X que contém S e é denotado por $cl_X(S)$.

Definição. Seja X um conjunto não-vazio. Uma lista $(X, +, \cdot)$ é chamado um espaço linear se

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in X$;

2. Existe $0 \in X$ tal que $0 + x = x + 0$ para todo $x \in X$;

3. Para cada $x \in X$, existe $-x \in X$ tal que $x + -x = 0 = -x + x$;

4. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in X$;

5. $\alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x$ para todo $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in X$;

6. $(\alpha + \lambda)x = \alpha x + \lambda x$ e $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ para todo $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in X$;

7. $1x = x$.

Definição. O conjunto das combinações afins de finitos elementos de um subconjunto não-vazio S de um espaço linear X é chamado de affine hull de S em X e denotado por $aff_X(S)$.

Definição. Seja S um subconjunto de um espaço linear X. Um vetor $x \in S$ é chamado um ponto interior relativo de S se, para qualquer $y \in aff(S)$, existe $\alpha_y > 0$ tal que $(1 - \alpha)x + \alpha y \in S$ para todo $0 \leq \alpha \leq \alpha_{y.}$ O conjunto de todos os pontos interiores relativos de S é chamado interior relativo de S e denotado por $ri(S)$.

Definição. Uma coleção de subconjuntos de S é dita uma σ-álgebra (denotada por Σ) se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \in \Sigma$;

2. Se $A \in \Sigma$, então $S \setminus A \in \Sigma$;

3. Se $A_1, A_2, ... \in \Sigma$, então $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Definição. Uma terna (S, Σ, μ), em que S é um conjunto, Σ é uma σ-álgebra contida em $P(S)$ (conjunto das partes de S) e μ é uma medida sobre Σ, é chamada um espaço de medida. O par (S, Σ) é chamado um espaço mensurável.

Lema 4 (Uryson)**.** *Sejam A e B dois subconjuntos fechados e não-vazios de um espaço métrico X com $A \cap B = \emptyset$. Para quaisquer $-\infty < a \leq b < \infty$, existe uma função contínua $\varphi \in [a, b]^X$ tal que $\varphi(x) = a$ para todo $x \in A$ e $\varphi(x) = b$ para todo $x \in B$.*

7.1.3 Funções suporte

Neste apêndice, estabelecemos resultados preliminares e a notação que será utilizada na demonstração dos resultados deste trabalho. Lembrando que o espaço de estados subjetivos pode ser normalizado por:

$$\mathcal{U} := \left\{ u \in \mathbb{R}^{|X|} : \sum_{i=1}^{|X|} u_i = 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{|X|} u_i^2 = 1 \right\},$$

é conveniente a seguinte definição:

Definição. Para todo menu A, a função suporte $\sigma_A(u) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ é defina por

$$\sigma_A(u) := \max_{p \in A} E_p(u), \text{ para cada } u \in \mathcal{U}.$$

Logo, por uma representação UEAPI canônica de $\succsim$ entende-se, para quaisquer menus A e B,

$$A \succsim B \iff \int_{\mathcal{U}} \sigma_A(u) \mu(du) \geq \int_{\mathcal{U}} \sigma_B(u) \mu(du) \text{ para toda } \mu \in \Delta.$$

Também serão utilizados as seguintes propriedades das funções suporte e resultados demonstrados por DLR:

Lema 5. *Para quaisquer menus A e B, são satisfeitas as seguintes condições*[18]*:*

1. $\sigma_{\lambda A + (1-\lambda)B} = \lambda \sigma_A + (1 - \lambda) \sigma_B$ *para todo* $\lambda \in [0, 1]$;

2. $\sigma_{A \cup B} = \max \{\sigma_A(u), \sigma_B(u)\}$;

[18] Para detalhes, ver Riella (2010).

3. $d_{Hausdorff}\left(co\left(A\right),co\left(B\right)\right)$[19] $= d_{Supnorm}$[20] $\left(\sigma_A,\sigma_B\right)$.[21]

Além disso, as funções suporte são funções contínuas em $\mathcal{U}$, isto é

$$\{\sigma_A : A \text{ é um menu}\} \subseteq C(\mathcal{U})^{22}.$$

Finalmente, sejam

$$C_+ := \{\sigma; \sigma(s) \geq 0 \text{ para todo } s \in S\},$$

$$H = \cup_{r\geq 0} rC_+$$

e

$$H^* = H - H = \left\{\sigma \in C(\mathcal{U}); \sigma = \sigma^1 - \sigma^2, \text{ para } \sigma^1, \sigma^2 \in H\right\}.$$

DLR (2001) demonstra os seguintes resultados:

Lema 6 (DLR)**.** *H^* satisfaz as seguintes propriedades:*

1. H^* é um subespaço linear de $C(\mathcal{U})$;
2. Para todo $f \in H^*$, existem $r > 0$ e $\sigma^1, \sigma^2 \in C_+$ tais que $f = r(\sigma^1 - \sigma^2)$;
3. $H*$ é denso em $C(\mathcal{U})$.

7.2 Prova do Teorema 5

[$1 \Longrightarrow 3$] Seja A^* uma esfera[23] no interior de $\Delta(X)$. Como A^* é uma esfera, cada $u \in \mathcal{U}$ é maximizado por uma única loteria $p \in A^*$. Defina A^e por

$$A^e := \{p \in A : \sigma_A(u) = E_p(u), \exists\ u \in S\}.$$

É possível mostrar que, para qualquer menu $B \subseteq A, B \sim A$ implica que $A^e \subseteq B$. Para verificar isso, suponha que $B \subseteq A$ é tal que $A^e \backslash B \neq \emptyset$. Isto implica que existe $u^* \in S$ tal que $\sigma_A(u^*) > \sigma_B(u^*)$. Pela continuidade das funções menus, $\sigma_A(u) > \sigma_B(u)$ para todo u em alguma vizinhança de u^*. Mas, nesse caso, não seria verdade de que $B \sim A$. Então,

[19] *Seja* (X, d_X) um espaço métrico. A métrica de Hausdorff é definida por $d_{Hausdorff}(A,B) = \max\left\{\sup\left\{d_X(z,B) : z \in A\right\}, \sup\left\{d_X(z,A) : z \in B\right\}\right\}.$

[20] $d_{Supnorm}\left(\sigma_A,\sigma_B\right) = \sup\left\{|\sigma_A(u) - \sigma_B(u)| : u \in \mathcal{U}\right\}$

[21] *Em que* $co(A)$ é o conjunto de todas as combinações convexas de finitos elementos de um conjunto A subconjunto não-vazio de um espaço linear X.

[23] Isto é, defina A conforme: $A := \{q \in \Delta(X); d(p,q) \leq \alpha\}$ para algum $p \in \Delta(X)$ e $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

por finitude, existe B^f tal que $\left|B^f\right| < \infty$ e $A^e \subseteq B^f$. Como A é uma esfera, A^e tem as mesma cardinalidade de S e, portanto, S é finito. Finalmente, é imediato que (3) implica (2) e que (2) implica (1). ■

7.3 Prova do Lema 3

[$\Longleftarrow$] Seja $S := cl(\cup_{\mu\in\Delta} supp\,(\mu))$[24] e $S^* := cl(\cup_{\mu^*\in\Delta^*} supp\,(\mu^*))$.Como $B \subseteq A$, temos que $\sigma_A(u) \geq \sigma_B(u)$ para todo $u \in \mathcal{U}$. Se $A \succ^* B$, então $\sigma_A(u^*) > \sigma_B(u^*)$ para algum $u^* \in S^* \subseteq S$. Pela continuidade das funções menu, isso implica que $\sigma_A(u) > \sigma_B(u)$ para todo u em alguma vizinhança de u^*, o que por sua vez implica que existem $\widehat{\mu} \in \Delta$ e $\widehat{u} \in supp\,(\widehat{\mu})$ tais que $\sigma_A(\widehat{u}) > \sigma_B(\widehat{u})$. Mas, então,

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_A(u)\widehat{\mu}\,(du) > \int_{\mathcal{S}} \sigma_B(u)\widehat{\mu}\,(du) \ ,$$

o que implica que $A \succ B$.

[$\Longrightarrow$] Suponha que $S^*\backslash S \neq \emptyset$ e fixe $\widehat{u} \in S^*\backslash S$[25]. Seja A qualquer esfera fechada no interior de $\Delta(X)$ e defina

$$B := \cup_{u\in S} \arg\max_{p\in E} E_p(u).$$

Como A é uma esfera, $\sigma_A(u) > \sigma_B(u)$ para todo $u \in S^*\backslash S$. Pela definição de B, $\sigma_A(u) = \sigma_B(u)$ para todo $u \in S$. Isso implica que $A \succ^* B$, mas $B \sim A$, o que significa que $\succsim$ não valoriza flexibilidade mais do que $\succsim^*$. ■

7.4 Prova do Lema 2

Primeiro é necessário demonstrar que para quaisquer dois menus A e B tais que $B \subseteq A$, se $A \succ^* B$ e $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency II, então, $A \succ B$. Sejam A e B tais que $B \subseteq A$. Como $B \subseteq A, A \cup B = A$. Mas, isso implica que

$$A \cup B \sim^* A$$

e

$$A \cup B \sim A,$$

[24]Em que $cl(X)$ é o fecho do conjunto X.
[25]Em que $S^*\backslash S := \{u : u \in S^* \text{ e } u \notin S\}$.

o que, por sua vez, implica que

$$(A \cup B) \cup C \sim^* A \cup C$$

e

$$(A \cup B) \cup C \sim A \cup C$$

para todo $C \in \mathcal{X}$. Mas então, não existe $C \in \mathcal{X}$ tal que

$$(A \cup B) \cup C \succ A \cup C$$

e

$$(A \cup B) \cup C \sim^* A \cup C.$$

Logo, se $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency II e $A \succ^* B$, então não pode ser o caso de $A \not\succ B$, o que siginifica que $A \succ B$, isto é, que $A \succ^* B \Longrightarrow A \succ B$ o que, por definição, implica que $\succsim$ valoriza flexibilidade mais do que $\succsim^*$. ∎

7.5 Prova do Lema 1

[$\Longrightarrow$] Se $A \cup C \succ B \cup C$ mas $A \cup C \sim^* B \cup C$, temos que

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_{A \cup C}(u) \mu(ds) \geq \int_{\mathcal{S}} \sigma_{B \cup C}(u) \text{ para todo } \mu \in \Delta \ ,$$

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_{A \cup C}(u) \mu(ds) > \int_{\mathcal{S}} \sigma_{B \cup C}(u) \mu(ds) \ \exists \ \mu \in \Delta$$

e

$$\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_{A \cup C}(u) \mu(ds^*) = \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_{B \cup C}(u) \mu(ds^*) \text{ para todo } \mu^* \in \Delta^*.$$

Como $B \subseteq A$, isso implica que existe $\widehat{u} \in S$ com $\sigma_{A \cup C}(\widehat{u}) > \sigma_{B \cup C}(\widehat{u})$ enquanto $\sigma_{A \cup C}(u) = \sigma_{B \cup C}(u)$ para todo $u \in S^*$. Isto é, $\widehat{u} \in S \setminus S^*$. Pelas propriedade das funções suporte, isto implica que $\sigma_A(\widehat{u}) > \sigma_B(\widehat{u})$.

[$\Longleftarrow$] Detalhes do argumento formal podem ser encontrados em Riella (2010). Apresentamos aqui uma intuição geométrica da demonstração. Suponha que existe $u^* \in S \setminus S^*$ com $\sigma_A(u^*) > \sigma_B(u^*)$. É possível encontrar um menu C tal que $\sigma_A(u^*) > \sigma_C(u^*)$ mas $\sigma_A(u) = \sigma_C(u)$ para todo $u \in S^*$. É necessário considerar dois casos: primeiro, suponha que $u \in S^*$ é tal que existe $p \in A$ com $E_p(u) = \sigma_A(u)$ e $E_p(u^*) < \sigma_A(u^*)$.

Nesse caso, defina $q^u := p$.Agora, suponha que $u \in S^*$ é tal que $E_p(u) = \sigma_A(u)$ implica que $E_p(u^*) = \sigma_A(u^*)$. Nesse caso, como A pertence ao interior de $\Delta(X)$, é possível escolher q no hiperplano ortogonal a u^* que passe por alguma $p \in A$ com $E_p(u) = \sigma_A(u)$, mas $E_p(\widehat{u}) < \sigma_A(\widehat{u})$. Defina $q^u := q$.Agora, seja $C := \{q^u : u \in S^*\}$. Por construção, $\sigma_{A\cup C}(u^*) > \sigma_{B\cup C}(u^*)$ e $\sigma_{A\cup C}(u) = \sigma_{B\cup C}(u)$ para todo $u \in S^*$. ■

7.6 Prova do Teorema 6

$[3 \Longrightarrow 1]$ Suponha que $\Delta^* = \Delta \mid_{S^*}$, isto é, suponha que Δ^* é o conjunto das atualizações bayesianas de todas as priors $\mu \in \Delta$ .Primeiramente, sejam A, B dois menus quaisquer tais que $A \succsim^* B$ e $A \not\succsim B$.Ou seja,

$$\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_A(u)\mu^*(du) \geq \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_B(u)\mu^*(du) \text{ para toda } \mu^* \in \Delta^*,$$

e

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_B(u)\mu(du) > \int_{\mathcal{S}} \sigma_A(u)\mu(du) \ \exists\ \mu \in \Delta.$$ [26]

Se as medidas de probabilidade em Δ^* são atualizações bayesianas das distribuições em Δ, então, para quaisquer dois menus A, B isto implica que

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_A(u)\mu^*(du) & \geq & \displaystyle\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_B(u)\mu^*(du) \text{ para todo } \mu^* \in \Delta^* \\ & \Longleftrightarrow & \\ \displaystyle\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_A(u)\mu(du) & \geq & \displaystyle\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_B(u)\mu(du) \text{ para toda } \mu \in \Delta. \end{array}$$

Mas, se $B \not\succsim A$ então existe $\hat{u} \in S \setminus S^*$ com

$$\sigma_B(\hat{u}) > \sigma_A(\hat{u}),$$

o que, por sua vez, implica que

$$\sigma_{B\cup A}(\hat{u}) > \sigma_A(\hat{u}).$$

Então, pelo lema 1, temos que $A \cup B \rhd A$.

Agora, sejam A, B dois menus tais que $B \succsim A$ e $B \not\succsim^* A$.Isto é,

[26] Ou seja, ou $B \succsim A$ ou $B \bowtie A$

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_B(u)\mu(du) \geq \int_{\mathcal{S}} \sigma_A(u)\mu(du) \text{ para toda } \mu \in \Delta,$$

e

$$\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_A(u)\mu^*(du) > \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_B(u)\mu^*(du) \ \exists \ \mu^* \in \Delta^*.$$

Se as crenças em Δ^* são atualizações bayesianas das priors em Δ, então, para quaisquer menus A, B isto implica que

$$\begin{array}{ccc} \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_A(u)\mu^*(du) & \geq & \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_B(u)\mu^*(du) \text{ para toda } \mu^* \in \Delta^* \\ & \Longleftrightarrow & \\ \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_A(u)\mu(du) & \geq & \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_B(u)\mu(du) \text{ para toda } \mu \in \Delta. \end{array}$$

Mas, se $B \succsim A$, isto implica que existe $\hat{u} \in S \setminus S^*$ com

$$\sigma_B(\hat{u}) > \sigma_A(\hat{u}),$$

o que, por sua vez, implica que

$$\sigma_{B \cup A}(\hat{u}) > \sigma_A(\hat{u}).$$

Então, pelo lema 1, temos $A \cup B \rhd A$. Em conclusão, se $\Delta^* = \Delta \mid_{S^*}$ então

$$A \succsim^* B \text{ e } A \not\succsim B \text{ ou } B \not\succsim^* A \text{ e } B \succsim A \implies A \cup B \rhd A.$$

$[1 \implies 3]$ Como $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency, pelos lemas 1 e 2 tem-se que $\cup_{\mu^* \in \Delta^*} supp\,(\mu^*) \subseteq \cup_{\mu \in \Delta} supp\,(\mu)$. A idéia é mostrar que $\Delta^* = \Delta \mid_{S^*}$. O primeiro passo é demonstrar que $\Delta \mid_{S^*} \subseteq \Delta^*$. Suponha que existe $\widehat{\mu} \in \Delta \mid_{S^*}$ tal que $\widehat{\mu} \notin \Delta^*$. Por um argumento de separação, existe uma função $f \in C(\mathcal{U})$ tal que

$$\int_{\mathcal{S}^*} f(u)\mu^*(du) > 0 \text{ para toda } \mu^* \in \Delta^*,$$

mas

$$\int_{\mathcal{S}^*} f(u)\widehat{\mu}(du) < 0.$$

A seguir, uma aplicação do Lema de Uryson gera o resultado desejado. Como $\succsim$ tem uma representação finita, é imediato pensar em $\mathcal{U}$ como dois conjuntos fechados e disjuntos a fim de aplicar o lema. Dado que S e S^* são conjuntos finitos e, portanto, fechados, o mesmo pode ser dito do conjunto $S \setminus S^*$. Então, $S \setminus S^*$ e S^* são conjuntos disjuntos e fechados. Pelo Lema de Uryson, existe uma função contínua $g : \mathcal{U} \to [0,1]$ tal que $g(u) = 1$ para todo $u \in S^*$ e $g(u) = 0$ para todo $u \in S \setminus S^*$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}^*} g(u)f(u)\mu^*(du) &= \int_{\mathcal{S}^*} 1.f(u)\mu^*(du) \quad \text{para toda } \mu^* \in \Delta^* \\ &= \int_{\mathcal{S}^*} f(u)\mu^*(du) > 0 \text{ para toda } \mu^* \in \Delta^*, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} g(u)f(u)\widehat{\mu}(du) &= \int_{\mathcal{S}^*} g(u)f(u)\widehat{\mu}(du) + \int_{\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^*} g(u)f(u)\widehat{\mu}(du) \\ &= \int_{\mathcal{S}^*} 1.f(u)\widehat{\mu}(du) + \int_{\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^*} 0.f(u)\widehat{\mu}(du) \\ &= \int_{\mathcal{S}^*} f(u)\widehat{\mu}(du) < 0. \end{aligned}$$

Defina $h := fg$. Note que h é tal que $h \in C(\mathcal{U})$, $h(u) = 0$ para todo $u \in S \setminus S^*$ e

$$\int_{\mathcal{S}^*} h(u)\mu^*(du) > 0 \quad \text{para todo } \mu^* \in \Delta^*,$$

mas

$$\int_{\mathcal{S}} h(u)\widehat{\mu}(du) < 0.$$

Seja $\widetilde{h} := h - \varepsilon, \varepsilon > 0$, tal que valha

$$\int_{\mathcal{S}^*} (h(u) - \varepsilon)\mu^*(du) > 0 \quad \text{para toda } \mu^* \in \Delta^*,$$

mas

$$\int_{\mathcal{S}} (h(u) - \varepsilon)\widehat{\mu}(du) < 0.$$

Pelo lema 6, isto implica que existem menus A, B tais que

$$\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_A(u)\mu^*(du) > \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_B(u)\mu^*(du) \quad \text{para toda } \mu^* \in \Delta^*,$$

mas

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_B(u)\widehat{\mu}(du) > \int_{\mathcal{S}} \sigma_A(u)\widehat{\mu}(du)$$

e

$$\sigma_B(u) > \sigma_A(u) \text{ para toda } u \in S \backslash S^*.$$

Isto é, existem menus A, B tais que $A \succsim^* B$, $A \not\succsim B$, mas $A \cup B \not\sim A$.

Analogamente, é possível provar que $\Delta^* \subseteq \Delta \mid_{S^*}$. Suponha que exista $\overline{\mu} \in \Delta^*$ tal que $\overline{\mu} \notin \Delta \mid_{S^*}$. Mais uma vez, por um argumento de separação, existe uma função $f \in C(\mathcal{U})$ tal que

$$\int_{\mathcal{S}^*} i(u)\mu\,(du) < 0 \;\; \text{para todo } \mu \in \Delta \mid_{S^*},$$

mas

$$\int_{\mathcal{S}^*} i(u)\overline{\mu}\,(du) > 0.$$

Assim como antes, $S \setminus S^*$ e S^* são conjuntos fechados e disjuntos e, pelo lema de Uryson, existe uma função contínua $j : \mathcal{U} \to [0,1]$ tal que $j(u) = 1$ para todo $u \in S^*$ e $j(u) = 0$ para todo $u \in S \setminus S^*$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} j(u)i(u)\mu\,(du) &= \int_{\mathcal{S}^*} j(u)i(u)\mu\,(du) + \int_{S \backslash \mathcal{S}^*} j(u)i(u)\mu\,(du) \text{ for all } \mu \in \Delta \mid_{S^*} \\
&= \int_{\mathcal{S}^*} 1.i(u)\mu\,(du) + \int_{S \backslash \mathcal{S}^*} 0.i(u)\overline{\mu}\,(du) \text{ for all } \mu \in \Delta \mid_{S^*} \qquad (1) \\
&= \int_{\mathcal{S}^*} i(u)\mu\,(du) < 0 \text{ for all } \mu \in \Delta \mid_{S^*},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{S^*} j(u)i(u)\overline{\mu}\,(du) &= \int_{\mathcal{S}^*} 1.i(u)\overline{\mu}\,(du) \\
&= \int_{\mathcal{S}^*} i(u)\overline{\mu}\,(du) > 0.
\end{aligned}$$

Defina $l := ij$. Observe que l é tal que $l \in C(\mathcal{U})$, $l(u) = 0$ para todo $u \in S \setminus S^*$ e

$$\int_{\mathcal{S}} l(u)\mu\,(du) < 0 \text{ para todo } \mu \in \Delta \mid_{S^*},$$

mas

$$\int_{\mathcal{S}^*} l(u)\overline{\mu}\,(du) > 0.$$

Seja $\widetilde{l} := l - \varepsilon, \varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\int_{\mathcal{S}} (l(u) - \varepsilon)\mu\,(du) < 0 \text{ para todo } \mu \in \Delta \mid_{S^*},$$

mas

$$\int_{\mathcal{S}^*} (l(u) - \varepsilon)\overline{\mu}\,(du) > 0.$$

Pelo lema 6, isto implica que existem menus A, B tais que

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_B(u)\mu\,(du) > \int_{\mathcal{S}} \sigma_A(u)\mu\,(du) \quad \text{para todo } \mu \in \Delta \mid_{S^*},$$

mas

$$\int_{\mathcal{S}^*} \sigma_A(u)\widehat{\mu}\,(du) > \int_{\mathcal{S}^*} \sigma_B(u)\widehat{\mu}\,(du)$$

e

$$\sigma_B(u) > \sigma_A(u) \text{ for all } u \in S \backslash S^*.$$

Isto é, existem menus A, B tais que $B \succsim A$, $B \not\succsim^* A$, mas $A \cup B \not\triangleright A$.

Enfim, se $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Flexibility Consistency, então $\Delta^* = \Delta \mid_{S^*}$, o que significa que Δ^* é o conjunto das atualizações bayesianas das priors $\mu \in \Delta$.

[$3 \Longrightarrow 2$] Sejam Δ e Δ^* tais que $\Delta^* = \Delta \mid_{S^*}$ e dois menus A e B quaisquer. Defina $S^* := \cup_{\mu^* \in \Delta^*} supp\,(\mu^*)$ e $S := \cup_{\mu \in \Delta} supp\,(\mu)$. Fixe qualquer esfera fechada E no interior relativo de $\Delta(X)$ e defina o seguinte menu

$$D := \cup_{\ u \in\ S\ \setminus\ S^*} \arg\max_{p \in E}\ E_p(u).$$

Considere os menus

$$F := (E \oplus_\lambda A) \cup [D \oplus_\lambda (AUB)]$$

e

$$G := (E \oplus_\lambda B) \cup [D \oplus_\lambda (AUB)],$$

em que $\lambda \in (0, 1)$ suficientemente grande, de modo que

$$\begin{aligned} \sigma_{E \oplus_\lambda A}(u) &= \sigma_F(u), \text{ para todo } u \in S^* \\ &\text{e} \\ \sigma_{E \oplus_\lambda B}(u) &= \sigma_G(u), \text{ para todo } u \in S^*.^{27} \end{aligned}$$

Note que $\sigma_{(E \oplus_\lambda A) \cup [D \oplus_\lambda (AUB)]}(u) = \sigma_{(E \oplus_\lambda B) \cup [D \oplus_\lambda (AUB)]}(u)$ para todo $u \in S \backslash S^*$. Então,

$\Delta^* = \Delta \mid_{S^*}$ implica que

$$\begin{array}{rcl} A & \succsim & ^*B \\ & \Longleftrightarrow & \\ (E \oplus_\lambda A) \cup [D \oplus_\lambda (AUB)] & \succsim & (E \oplus_\lambda B) \cup [D \oplus_\lambda (AUB)]. \end{array}$$

Seja $T := \{s \in S : \exists u \in S^*$ tal que $U(s,.)$ e u representam a mesma utilidade esperada$\}$. Então,

$$\begin{array}{rcl} (E \oplus_\lambda A) \cup [D \oplus_\lambda (AUB)] & \succsim & (E \oplus_\lambda B) \cup [D \oplus_\lambda (AUB)] \\ & \Longleftrightarrow & \\ \sum_{s \in T} \max_{p \in A} E_p(U(s,.))\mu(s) & \geq & \sum_{s \in T} \max_{p \in B} E_p(U(s,.))\mu(s) \text{ para toda } \mu \in \Delta. \end{array}$$

Mas então, $((S, \Sigma), \Delta_T, U)$, onde Δ_T é o conjunto das atualizações baysianas das crenças em Δ depois da observação de T, representa $\succsim^*$. Finalmente, é imediato que 2 implica 3, o que conclui a demonstração. ■

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSCOMBE, F.J., AUMANN, R.J., A definition of subjective probability. Annals of Mathematical Statistics, vol. 34, 199-205, 1963.

BEWLEY, T. Knightian Decision Theory: Part I. *Decisions in Economics and Finance*, 25(2): 79-110, 2002.

CASELLA, G.. BERGER, R.L. Statistical Inference. Segunda Edição. Duxbury Press, 2001.

DEKEL, E., LIPMAN, B.L.,RUSTICHINI, A. Representing preferences with a unique subjective state space. Econometrica 69(4), 891.934, 2001.

___________________________________. Temptation-driven preferences. Review of Economic Studies, 76 (3), 937-971.

DEKEL, E., LIPMAN, B.L.,RUSTICHINI, A., SARVER, T. Representing preferences with a unique subjective state space: a corrigendum. Econometrica 75(2), 591-600, 2007.

EPSTEIN, L. G. An axiomatic model of non-bayesian updating. Review of Economic Studies 73, 413.436, 2006.

EPSTEIN, L. G., LE BRETON, M. Dynamically consistent beliefs must be bayesian. Journal of Economic Theory 61, 1.22, 1993.

EPSTEIN, L. G., MARINACCI, M., SEO, K. Coarse contingencies and ambiguity. Theoretical Economics 2, 355.394, 2007.

EPSTEIN, L. G., NOOR, J. SANDRONI, A. Non-Bayesian updating: a theoretical framework. Theoretical Economics 3, 193.229, 2008.

EPSTEIN, L. G., SCHNEIDER,M. Recursive multiple-priors. Journal of Economic Theory 113, 1.31, 2003.

FERNANDEZ, P.J. Medida e Integração. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1940.

GHIRARDATO, P. Revisiting savage in a conditional world. Economic Theory 20, 83.92, 2002.

GILBOA, I., SCHMEIDLER D. Maxmim expected utility with non-unique prior. Journal of Mathematical Economics 18(2), 141.153, 1989.

_________________________Updating ambiguous beliefs. Journal of Economic Theory 59(1), 33.49, 1993.

GUL, F., PESENDORFER, W. Temptation and self-control. Econometrica 69(6), 1403.1435, 2001.

HANANY, E., KLIBANOFF, P. Updating preferences with multiple priors. Theoretical Economics 2, 261.298, 2007.

KOOPMANS, T. C. On flexibility of future preferences. Em M. W. Shelly and G. L. Bryan (Eds.), Human Judgments and Optimality, pp. 243.254. New York, John Wiley and Sons,1964.

KOCHOV, A. Subjective States without the Completeness Axiom, University of Rochester, Mimeo, 2007.

KREPS, D. M. A representation theorem for "preference for flexibility". Econometrica 47(3), 565.578, 1979.

____________ Notes on the Theory of Choice. Estados Unidos, 1988.

LIMA, E.L. Curso de análise volume 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1929.

NEHRING, K. Preference for flexibility in a savage framework. Econometrica 67(1),101.119, 1999.

OK, E. A. Real Analysis with Economic Applications. Princeton University Press, 2007.

__________ Utility Representation of an Incomplete Preference Relation. Mimeo, 2000.

RIELLA, G. Preference for Flexibility and Dynamic Consistency. Working Paper, Mimeo. 2011

ROCKAFELLAR, R. T. Convex Analysis. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.

RUDIN, W. Principles of Mathematical Analysis, Third Edition, 1976.

SARVER, T. Anticipating regret: Why fewer options may be better. Econometrica 76(2), 263.305, 2008
.
SAVAGE, L.J., The Foundations of Statistics. John Wiley and Sons. Revised edition. Nova Iorque, 1972.

SINISCALCHI, M. Dynamic choice under ambiguity. Theoretical Economics, Forthcoming, 2009.