Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Subvariedades tipo-espaço em um espaço de De Sitter com a curvatura escalar sendo um múltiplo da curvatura média

por

Jairo Gomes da Silva

Brasília

2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

Subvariedades tipo-espaço em um espaço de De Sitter com a curvatura escalar sendo um múltiplo da curvatura média

por

Jairo Gomes da Silva *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de junho de 2011

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo - UnB - Orientador

Prof. Dr. Pedro Roitman - MAT/UnB

Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa - MAT/UFMG

*O autor foi bolsista da Capes durante a elaboração deste trabalho.

A minha família, aos meus amigos.

Agradecimentos

Primeiramente e acima de tudo agradeço ao meu Senhor e Deus Jesus Cristo, que aqui veio e permanece conosco no intuito de fazer "com que tenhamos vida e a tenhamos em abundância." Jo 10,10.

Agradeço aos meus pais Cinezio e Adelizia, e a todos os meus irmãos que desde sempre procuram viver em unidade e ajuda mútua, constituindo para todos nós coluna de apoio e fimeza em nossos projetos.

Agradeço a todos os profesores que tanto contribuíram a minha formação intelectual, em especial destaco professores como Edinalva, Carlos e Adilson que acima de tudo acreditaram e trabalharam esta pedra bruta transformando-a em algo de muito valor.

Agradeço a todos os amigos que no início, durante e final do mestrado tanto fizeram pelo meu sucesso. Numa amizade desinteressada me possibilitaram atingir metas que sozinho jamais teria alcançado. Embora não quisesse citar nomes devido serem muitos os que passaram pela minha vida durante este tempo, não posso deixar de mencionar minha gratidão a Renato, Hudson, Elis Gardel e Mônica, a eles minha sincera e mais profunda gratidão, muito obrigado.

Agradeço e com muita satisfação ao meu orientador Professor Dr. Kellcio Oliveira Araújo, que não mediu esforços em me ajudar a enriquecer tão grande trabalho acadêmico. O Professor Kellcio além de me ajudar a transpor barreiras no horizonte que por ora atrapalhava minha visão, também me levou acreditar em mim mesmo e que era possível dar um passo a mais sempre que imaginava ter alcançado meu limite. A ele minha gratidão, pela presença, pela fé e pelo amor com que conduziu cada etapa deste trabalho.

Enfim, a todas as pessoas, que de alguma forma, me ajudaram a chegar aqui, nesta fase tão importante em minha vida.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a classificação de subvariedades completas tipo-espaço M^n num espaço de De Sitter $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ com $n \geq 3$ tal que $n(n-1)r = k'H$ em que r denota a curvatura escalar normalizada, $H \neq 0$ é a curvatura média e $k' > 0$ é uma constante. Admitimos também que o vetor curvatura média normalizado é paralelo e a curvatura média H atinge o seu máximo sobre M^n. Nessas condições, provamos que M^n é totalmente umbílica ou isométrica ao cilindro hiperbólico $H^1(\text{sinh r}) \times S^{n-1}(\text{cosh r})$.

Palavras chave: subvariedades tipo-espaço, espaço de De Sitter, curvaturas escalar e média, totalmente umbílica.

Abstract

This dissertation, we study the classification of complete space-like submanifolds M^n in a De Sitter space $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ with $n \geq 3$, such that $n(n-1)r = k'H$, where r is the normalized scalar curvature , $H \neq 0$ is the mean curvature and $k' > 0$ is a constant. We assume also that the normalized mean curvature vector is parallel and the mean curvature H obtains its maximum on M^n. These conditions, we prove that M^n is totally umbilical or isometric to a hyperbolic cylinder $H^1(\text{sinh r}) \times S^{n-1}(\text{cosh r})$.

Key words: space-like submanifolds, de De Sitter space, scalar and mean curvatures, totally umbilical.

Sumário

Introdução

Considere $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ uma variedade semi-riemanniana conexa de dimensão $n+p$ com curvatura constante c e índice p. Nesse caso, $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ é chamada de forma espacial indefinida de índice p (ou simplesmente forma espacial se $p=0$). Seja M^n uma variedade diferenciável imersa em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$. M^n é dita ser tipo-espaço se a métrica induzida sobre M^n for positiva definida.

Defina ξ como sendo o vetor curvatura média de M^n e denote por $H = \|\xi\|$ a curvatura média de M^n em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$.

Se $c>0$, então, $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ é conhecido como Espaço de De Sitter e denotado por $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ em que

$$\mathbb{S}_p^{n+p}(c) = \left\{ (x_1, \cdots, x_{n+p+1}) \in \mathbb{R}_p^{n+p+1} / -\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{j=p+1}^{n+p+1} x_j^2 = \frac{1}{c} \right\}.$$

Em 1977, Goddard [18] conjecturou que hipersuperfícies completas tipo-espaço no Espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ com curvatura média constante são totalmente umbílicas.

Em 1987, Akutagawa [2] provou que a conjectura de Goddard é verdadeira para os seguintes casos:

1. $n=2$ com $H^2 \leq c$;
2. $n=2$ e M^2 é compacta;
3. $n \geq 3$ com $H^2 < \dfrac{4(n-1)}{n^2}c$.

Em 1991, Cheng [11] estendeu o resultado de Akutagawa para subvariedades num Espaço de De Sitter. Mais precisamente ele provou o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *(Cheng [11]) Seja M^n uma subvariedade completa tipo-espaço em $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média paralelo. Se*

$$H^2 \leq c, \ \ para \ \ n = 2$$

ou

$$H^2 < \frac{4(n-1)}{n^2} c \ \ para \ \ n \geq 3,$$

então, M^n é totalmente umbílica.

Por outro lado, em 1990, Cheng [8] estudou hipersuperfícies tipo-espaço em $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ tal que a curvatura escalar $n(n-1)R$ é um múltiplo da curvatura média H por uma constante $k \geq 0$. Ele provou o seguinte teorema:

Teorema 0.2. *(Cheng [8])*

Seja M^n uma hipersuperfície completa tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ com curvatura seccional não negativa. Se a curvatura escalar r e a curvatura média H de M^n satisfazem $r = kH$, em que $k = const. \geq 0$ e H atinge máximo em M^n, então, M^n é isométrica ao Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$ ou a Esfera $\mathbb{S}^n(c_1)$, $0 < c_1 < c$.

Em 2006, seguindo essa linha de estudo Shu Shichang [29] provou o seguinte teorema:

Teorema 0.3. *(Shu [29])*

Seja M^n uma hipersuperfície completa tipo-espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}(1)$ com $n \geq 3$. Suponha que exista uma constante $k' > 0$ tal que $n(n-1)R = k'H$ em que R e H denotam a curvatura escalar normalizada e a curvatura média, respectivamente. Se a curvatura média $H \geq 0$ atinge um máximo sobre M^n, então,

1. *se $H^2 < \frac{4(n-1)}{n^2}$ em M^n, segue que M^n é totalmente umbílica.*
2. *se $H^2 = \frac{4(n-1)}{n^2}$ em M^n, segue que M^n é totalmente umbílica ou M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$.*
3. *se $\frac{4(n-1)}{n^2} < H^2 \leq 1$ em M^n e o quadrado da norma da segunda forma fundamental $\|h\|^2$ satisfaz $\|h\|^2 \leq nH^2 + (B_H^-)^2$ ou $\|h\|^2 \geq nH^2 + (B_H^+)^2$ em M^n, então, M^n é totalmente umbílica ou é isométrica ao cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$, em que $B_H^{\pm}$ são duas raízes reais do polinômio*

$$P_H(x) = x^2 - \frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}} x + n(1 - H^2). \tag{1}$$

Dentre outros, temos pelos textos de Liu [22] e Montiel [24] que hipersuperfícies completas tipo-espaço com curvatura média constante são dadas por

$$M^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1} \mid p_{k+1}^2 + \cdots + p_{n+1}^2 = \cosh^2 r\},$$

com $r \in \mathbb{R}$ e $1 \leq k \leq n$, em que $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais. Podemos provar que M^n é isométrica ao produto riemanniano $H^k(\sinh r) \times S^{n-k}(\cosh r)$ de um espaço hiperbólico k-dimensional e uma esfera $(n-k)$-dimensional de raios $\sinh r$ e $\cosh r$, respectivamente. M^n tem k curvaturas principais iguais a $\coth r$ e $(n-k)$ curvaturas principais iguais a $\tanh r$. Portanto, a curvatura média é dada por $nH = k \coth r + (n-k) \tanh r$. Se $k = 1$, o produto riemanniano $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$ é chamado de *cilindro hiperbólico*.

Em 2010, seguindo essa linha de generalização de resultados para o caso de subvariedades, Cao e Shu [3] estenderam o Teorema 0.3 para o caso da codimensão ser maior que 1. Essencialmente, eles provaram o seguinte teorema:

Teorema 0.4. *(Cao-Shu [3]) Seja M^n uma subvariedade completa tipo-espaço num espaço de De Sitter $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ com $n \geq 3$. Suponha que existe uma constante positiva k' tal que $n(n-1)R = k'H$, em que R é a curvatura escalar normalizada e H a curvatura média. Suponha que o vetor curvatura média normalizado é paralelo e que H atinge seu máximo em M^n. Então,*

(1) se $H^2 < \frac{4(n-1)c}{m^2}$ em M^n, segue que M^n é totalmente umbílica.

(2) se $H^2 = \frac{4(n-1)c}{m^2}$ em M^n, segue que M^n é totalmente umbílica ou M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$.

(3) se $\frac{4(n-1)c}{m^2} < H^2 \leq c$ em M^n e o quadrado da norma da segunda forma fundamental $\|h\|^2$ satisfaz $\|h\|^2 \leq nH^2 + (B_H^-(n,p,H))^2$ ou $\|h\|^2 \geq nH^2 + (B_H^+(n,p,H))^2$ em M^n, então, M^n é totalmente umbílica ou M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$, em que $m^2 = (n-2)^2 p + 4(n-1)$ e $B_H^{\pm}(n,p,H)$ são duas raízes reais distintas do polinômio

$$P_H(x) = \frac{1}{p}x^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx + n(c - H^2). \tag{2}$$

Observação 0.5. *No caso em que $p = 1$, como $m^2 = (n-2)^2 p + 4(n-1)$, segue que $m = n$. Então, nesse caso o Teorema 0.4 se reduz ao Teorema 0.3 após considerar $c = 1$.*

Nesta dissertação, estudamos a demonstração do Teorema 0.4 visando entender os fatos e resultados utilizados em cada etapa da sua demonstração. Nesse sentido, também discutiremos conceitos e propriedades de Álgebra Linear, além de destacar importantes resultados clássicos. Ressaltamos que o leitor deverá ter um certo conhecimento sobre o Método do Referencial Móvel.

Capítulo 1

Subvariedades em formas espaciais semi-riemannianas

Visando estabelecer importantes conceitos e propriedades, introduzimos algumas seções que permitirão o entendimento da prova do resultado principal desta dissertação. Ressaltamos que as duas próximas seções foram baseadas em [7].

1.1 As três formas espaciais semi-riemannianas

Seja $\mathbb{R}_p^{n+p}$ um espaço vetorial real de dimensão $n+p$ munido com um produto interno de índice p dado por

$$\langle x, y \rangle = -\sum_{i=1}^{p} x_i y_i + \sum_{j=p+1}^{n+p} x_j y_j,$$

em que $x = (x_1, \cdots, x_{n+p})$ denota um vetor de $\mathbb{R}_p^{n+p}$. Esse espaço vetorial definido dessa forma é denominado *espaço semi-euclideano* e a sua curvatura é $c = 0$.

De maneira análoga, define-se variedades semi-riemannianas $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ (com $c > 0$) e $\mathbb{H}_p^{n+p}(c)$ (com $c < 0$), da seguinte forma:

$$\mathbb{S}_p^{n+p}(c) = \left\{ (x_1, \cdots, x_{n+p+1}) \in \mathbb{R}_p^{n+p+1} \Big/ -\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{j=p+1}^{n+p+1} x_j^2 = \frac{1}{c} \right\}$$

$$\mathbb{H}_p^{n+p}(c) = \left\{ (x_1, \cdots, x_{n+p+1}) \in \mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1} \Big/ -\sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 + \sum_{j=p+2}^{n+p+1} x_j^2 = \frac{1}{c} \right\}.$$

Cada uma dessas variedades é chamada de *forma espacial indefinida de índice p*. $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ é conhecida como *espaço de De Sitter* e $\mathbb{H}_p^{n+p}(c)$ é chamada de *espaço semi-hiperbólico*.

Denotemos por $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ essas três formas espaciais que são variedades semi-riemannianas completas e conexas de índice p com curvatura constante c. Consideremos uma imersão $\varphi : M^n \to \mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ em que M^n denota uma variedade diferenciável de dimensão n. Essa imersão é dita *tipo-espaço* se a métrica de $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ induzida sobre M^n for positiva definida.

Conforme dito na introdução, o resultado principal que demonstraremos está associado a subvariedades tipo-espaço imersas em $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$, embora a maioria dos resultados auxiliares serão provados para o caso geral $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$.

1.2 Preliminares

Seja M^n uma subvariedade conexa tipo-espaço em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$. Podemos escolher um referencial ortonormal local semi-riemanniano $e_1, e_2, \dots, e_{n+p}$ definido em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ adaptado a M^n, ou seja, em cada ponto p de M^n tem-se que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base para o espaço tangente T_pM^n. Utilizaremos a seguinte convenção padrão para os índices:

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n+p; \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq n; \quad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n+p.$$

Visando não sobrecarregar a notação vamos sempre omitir a variação dos índices e respeitar rigorosamente o domínio estabelecido na convenção acima. Agora, considerando o coreferencial dual $\{\omega_1, \cdots, \omega_{n+p}\}$ correspondente desse campo de vetores segue que a métrica semi-riemanniana de $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ é dada por

$$d\bar{s}^2 = \sum_A \varepsilon_A \omega_A^2, \text{ em que } \varepsilon_i = 1 \text{ e } \varepsilon_\alpha = -1.$$

Então, as equações de estrutura de $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ são dadas por

$$d\omega_A = \sum_B \varepsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \qquad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0,$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \varepsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_D K_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D,$$

$$K_{ABCD} = c\varepsilon_A \varepsilon_B (\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}).$$

Agora, restringindo essas 1-formas a M^n, segue que

$$\omega_\alpha = 0, \forall \alpha.$$

Então, a métrica riemmaniana de M^n é dada por

$$ds^2 = \sum_i \omega_i^2.$$

Como $0 = d\omega_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i$, pelo lema de Cartan podemos escrever

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{1.1}$$

Denotemos por h a segunda forma fundamental de M^n. Então,

$$h = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha \omega_i \omega_j e_\alpha.$$

Sejam ξ, H e $\|h\|^2$, respectivamente o *vetor curvatura média*, a *curvatura média* e o *quadrado da norma da segunda forma fundamental* de M^n. Então, esses conceitos são expressos, respectivamente, por

$$\xi = \frac{1}{n}\sum_\alpha (\sum_i h_{ii}^\alpha) e_\alpha, \quad H = \|\xi\| = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_\alpha (\sum_i h_{ii}^\alpha)^2}, \quad \|h\|^2 = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^\alpha)^2.$$

As equações de estrutura de M^n são dadas por

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{ki} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l.$$

Usando as equações de estrutura, podemos obter a *equação de Gauss*

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) - \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha). \tag{1.2}$$

As componentes do *tensor curvatura de Ricci* e a *curvatura normalizada escalar* R, são dadas, respectivamente, por

$$R_{jk} = c(n-1)\delta_{jk} - \sum_{\alpha}\Big(\sum_{i} h^{\alpha}_{ii}\Big)h^{\alpha}_{jk} + \sum_{\alpha,i} h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{ji},$$

$$n(n-1)(R-c) = \|h\|^2 - n^2H^2. \tag{1.3}$$

As equações de estrutura do fibrado normal de M^n são dadas por

$$d\omega_{\alpha} = -\sum_{\beta}\omega_{\alpha\beta}\wedge\omega_{\beta}, \qquad \omega_{\alpha\beta}+\omega_{\beta\alpha}=0,$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = -\sum_{\gamma}\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta} - \frac{1}{2}\sum_{i,j}R_{\alpha\beta ij}\omega_i\wedge\omega_j, \tag{1.4}$$

em que

$$R_{\alpha\beta ij} = \sum_{m}(h^{\alpha}_{im}h^{\beta}_{mj} - h^{\alpha}_{jm}h^{\beta}_{mi}). \tag{1.5}$$

A derivada covariante h^{α}_{ijk} de h^{α}_{ij} satisfaz

$$\sum_{k} h^{\alpha}_{ijk}\omega_k = dh^{\alpha}_{ij} + \sum_{k} h^{\alpha}_{ik}\omega_{kj} + \sum_{k} h^{\alpha}_{jk}\omega_{ki} - \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij}\omega_{\beta\alpha}. \tag{1.6}$$

Assim, pela diferenciação exterior de (1.1), obtemos as *equações de Codazzi*

$$h^{\alpha}_{ijk} = h^{\alpha}_{jik} = h^{\alpha}_{ikj}. \tag{1.7}$$

Analogamente, por meio da segunda derivada covariante h^{α}_{ijkl} de h^{α}_{ij} temos que

$$\sum_{l} h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l = dh^{\alpha}_{ijk} + \sum_{l} h^{\alpha}_{ljk}\omega_{li} + \sum_{l} h^{\alpha}_{ilk}\omega_{lj} + \sum_{l} h^{\alpha}_{ijl}\omega_{lk} - \sum_{\beta} h^{\beta}_{ijk}\omega_{\beta\alpha}.$$

Pela diferenciação exterior de (1.6) obtemos as *fórmulas de Ricci*, dadas por

$$h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk} = \sum_{m} h^{\alpha}_{im}R_{mjkl} + \sum_{m} h^{\alpha}_{jm}R_{mikl} + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij}R_{\alpha\beta kl}. \tag{1.8}$$

O Laplaciano Δh^{α}_{ij} de h^{α}_{ij} é definido por $\Delta h^{\alpha}_{ij} = \sum_{k} h^{\alpha}_{ijkk}$. Assim, de (1.7) e (1.8), obtemos

$$\Delta h^{\alpha}_{ij} = \sum_{k} h^{\alpha}_{kkij} + \sum_{m,k} h^{\alpha}_{km}R_{mijk} + \sum_{m,k} h^{\alpha}_{mi}R_{mkjk} + \sum_{k,\beta} h^{\beta}_{ik}R_{\alpha\beta jk}. \tag{1.9}$$

No caso em que o vetor curvatura média nunca se anula, ou seja, $\xi \neq 0$, segue que $e_{n+1} = \dfrac{\xi}{H}$ é um campo normal de vetores definido globalmente em M^n. Nesse caso, definimos $\|\mu\|^2 := \sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij})^2$, $\|\tau\|^2 := \sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2$, que são funções que estão definidas globalmente em M^n.
Vale a seguinte relação:

$$\|h\|^2 - nH^2 = \|\mu\|^2 + \|\tau\|^2. \tag{1.10}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\mu\|^2 + \|\tau\|^2 &= \sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij})^2 + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2 \\
&= \sum_{i,j}[(h_{ij}^{n+1})^2 - 2Hh_{ij}^{n+1}\delta_{ij} + H^2\delta_{ij}^2] + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2 \\
&= \sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1})^2 - 2H\sum_{i,j}h_{ij}^{n+1}\delta_{ij} + H^2\sum_{i,j}\delta_{ij}^2 + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2 \\
&= \sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1})^2 - 2H\sum_{i}h_{ii}^{n+1} + H^2\sum_{i}1 + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2 \\
&= \sum_{\alpha}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2 - 2H(nH) + nH^2 \\
&= \|h\|^2 - nH^2.
\end{aligned}$$

Definição 1.1. *Um vetor η normal a M^n é dito paralelo no fibrado normal (ou simplesmente paralelo) se $\nabla^{\perp}\eta \equiv 0$, em que $\nabla^{\perp}$ denota a conexão normal de M^n em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$.*

Observação 1.2. *Se o vetor curvatura média ξ for paralelo, então, a curvatura média $H = \|\xi\|$ é constante.*

De fato, como $X\langle\xi,\xi\rangle = 2\langle\nabla_X^{\perp}\xi,\xi\rangle$ e $\nabla_X^{\perp}\xi = 0$ para qualquer campo X de vetores tangentes a M^n, segue que $X\langle\xi,\xi\rangle = 0$. Logo, $\langle\xi,\xi\rangle$ é constante donde conclui-se a veracidade da afirmação.

Observação 1.3. *Se o vetor curvatura média $\xi \neq 0$ é paralelo, então, o vetor curvatura média normalizado $\dfrac{\xi}{\|\xi\|}$ é também paralelo.*

De fato, seja X um campo de vetores tangente a M^n. Pelas propriedades da conexão normal $\nabla^{\perp}$ e pela observação anterior, note que

$$\nabla_X^{\perp}\frac{\xi}{\|\xi\|} \;=\; \nabla_X^{\perp}\frac{1}{\|\xi\|}\xi \;=\; \frac{1}{\|\xi\|}\nabla_X^{\perp}\xi + X(\frac{1}{\|\xi\|})\xi \;=\; 0+0 \;=\; 0.$$

A recíproca da Observação 1.3 nem sempre é verdadeira.

Observação 1.4. *Se $H \neq 0$, escolhendo $e_{n+1} = \dfrac{\xi}{H}$, segue da própria definição de ξ que*

$$H^{n+1} := \frac{1}{n} trH_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}^{n+1} = H, \quad H^{\alpha} := \frac{1}{n} trH_{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}^{\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > n+1, \tag{1.11}$$

em que H_α denota a matriz $[h_{ij}^{\alpha}]$. Então, segue que $trH_{n+1} = nH$ e $trH_\alpha = 0, \forall \alpha > n+1$. Ressaltamos que H^α é apenas uma notação que não deve ser confundida com H_α.

Capítulo

2

Principais resultados utilizados

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados que são essenciais para a demonstração do teorema principal desta dissertação, além de fornecerem suporte para o estabelecimento de resultados auxiliares.

2.1 Propriedades sobre o conceito de traço de uma matriz quadrada

Nesta seção, apresentaremos propriedades envolvendo o seguinte conceito:

Definição 2.1. *O traço de uma matriz quadrada A $n \times n$ é a soma dos elementos da sua diagonal principal. Dessa forma, denotamos*

$$trA = \sum_i a_{ii},$$

em que a_{ii} denota o elemento da i-ésima linha e da i-ésima coluna da matriz A.

O conceito de traço de uma matriz quadrada possui importantes propriedades que serão utilizadas ao longo do texto. Nesta seção, essas propriedades estão organizadas em forma de observação.

Observação 2.2. *Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$. Então, vale a igualdade*

$$tr(AB) = tr(BA).$$

Essa observação segue diretamente do conceito de traço e está proposto como exercício em [20].

Observação 2.3. *Sejam A e B matrizes simétricas $n \times n$. Então, vale a igualdade*

$$tr(AB)^2 = tr(BA)^2.$$

De fato, denotemos por a_{ij} e b_{ij}, respectivamente, os elementos genéricos das matrizes A e B. Logo, um elemento genérico da matriz AB é $(AB)_{ij} = \sum\limits_k a_{ik}b_{kj}$. Agora, notemos que

$$(AB)^2_{ij} = \sum_r (AB)_{ir}(AB)_{rj} = \sum_r \left(\sum_k a_{ik}b_{kr}\right)\left(\sum_l a_{rl}b_{lj}\right) = \sum_{r,k,l} a_{ik}b_{kr}a_{rl}b_{lj}.$$

Então, pela Definição 2.1, segue que

$$tr(AB)^2 = \sum_i (AB)^2_{ii} = \sum_i \left(\sum_{r,k,l} a_{ik}b_{kr}a_{rl}b_{li}\right) = \sum_{i,r,k,l} a_{ik}b_{kr}a_{rl}b_{li}.$$

Por outro lado, temos que

$$(BA)^2_{ij} = \sum_r (BA)_{ir}(BA)_{rj} = \sum_r \left(\sum_k b_{ik}a_{kr}\right)\left(\sum_l b_{rl}a_{lj}\right) = \sum_{r,k,l} b_{ik}a_{kr}b_{rl}a_{lj}.$$

Então, novamente pela Definição 2.1, temos

$$\begin{aligned} tr(BA)^2 = \sum_i (BA)^2_{ii} = \sum_i \left(\sum_{r,k,l} b_{ik}a_{kr}b_{rl}a_{li}\right) &= \sum_{i,r,k,l} b_{ik}a_{kr}b_{rl}a_{li} \\ &= \sum_{i,r,k,l} a_{kr}b_{ik}a_{li}b_{rl} \\ &= \sum_{i,r,k,l} a_{rk}b_{ki}a_{il}b_{lr}, \end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos o fato que as matrizes são simétricas. Agora, realizando a troca de índices $r \leftrightarrow i$ na última expressão, concluímos que $tr(AB)^2 = tr(BA)^2$.

Observação 2.4. *Seja $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real das matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{R}$. Então,*

$$N(A) := tr(AA^t) \geq 0, \quad \forall\ A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

em que A^t denota a transposta da matriz A.

De fato, seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e considere $B = A^t$. Note que um elemento genérico da matriz AB é dado por $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Como $b_{ij} = a_{ji}$, vale a seguinte sequência de igualdades

$$N(A) = tr(AA^t) = tr(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \Big(\sum_k a_{ik}b_{ki}\Big) = \sum_{i,k} a_{ik}a_{ik} = \sum_{i,k}(a_{ik})^2 \geq 0.$$

2.2 O laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental

O próximo lema exibe a expressão para o laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma subvariedade tipo-espaço imersa numa forma espacial semi-riemanniana.

Lema 2.5. *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço imersa em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$. Se o vetor curvatura média for não nulo, isto é, $\xi \neq 0$, então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij} + cn\|h\|^2 - cn^2H^2 \\ &- nH\sum_{\alpha} tr(H_\alpha^2 H_{n+1}) + \sum_{\alpha,\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2 \\ &+ \sum_{\alpha,\beta} N(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha), \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que H_α denota a matriz (h_{ij}^α) para todo α e $N(A) = tr(AA^t)$, para toda matriz quadrada $A = (a_{ij})$.

Demonstração: Escolha um referencial ortonormal local semi-riemanniano $e_1, e_2, \ldots, e_{n+p}$ definido em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ adaptado a M^n, ou seja, em cada ponto p de M^n tem-se que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base para o espaço tangente T_pM^n. Considere ainda que $e_{n+1} = \dfrac{\xi}{H}$. Por definição, $\|h\|^2 = \sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^\alpha)^2$. Logo, pela linearidade do operador laplaciano, temos

$$\Delta\|h\|^2 = \Delta\Big(\sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^\alpha)^2\Big) = \sum_{\alpha,i,j}\Delta(h_{ij}^\alpha)^2. \tag{2.2}$$

Por outro lado, note que

$$[(h_{ij}^\alpha)^2]_k = 2h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha,$$

em que k denota o índice da derivada segundo a direção tangente e_k. Calculando a derivada da última relação na direção de e_k, temos

$$[(h_{ij}^{\alpha})^2]_{kk} = [2h_{ij}^{\alpha}h_{ijk}^{\alpha}]_k = 2[h_{ijk}^{\alpha}h_{ijk}^{\alpha} + h_{ij}^{\alpha}h_{ijkk}^{\alpha}] = 2[(h_{ijk}^{\alpha})^2 + h_{ij}^{\alpha}h_{ijkk}^{\alpha}].$$

Agora, realizando o somatório em k para obtermos o laplaciano, segue que

$$\Delta(h_{ij}^{\alpha})^2 = \sum_k 2[(h_{ijk}^{\alpha})^2 + h_{ij}^{\alpha}h_{ijkk}^{\alpha}].$$

Substituindo a última relação em (2.2), obtemos

$$\Delta\|h\|^2 = \sum_{\alpha,i,j}\Delta(h_{ij}^{\alpha})^2 = \sum_{\alpha,i,j}\Big(\sum_k 2[(h_{ijk}^{\alpha})^2 + h_{ij}^{\alpha}h_{ijkk}^{\alpha}]\Big).$$

Note que a relação anterior pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}.$$

Agora, substituindo a relação (1.9) na última igualdade obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^{\alpha}\Bigg(\sum_k h_{kkij}^{\alpha} + \sum_{m,k}h_{km}^{\alpha}R_{mijk} \\
&\quad + \sum_{m,k}h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk} + \sum_{k,\beta}h_{ik}^{\beta}R_{\alpha\beta jk}\Bigg) \\
&= \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^{\alpha}\Big(\sum_k h_{kkij}^{\alpha}\Big) + \sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^{\alpha}\Big(\sum_{m,k}h_{km}^{\alpha}R_{mijk}\Big) \\
&\quad \sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^{\alpha}\Big(\sum_{m,k}h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk}\Big) + \sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^{\alpha}\Big(\sum_{k,\beta}h_{ik}^{\beta}R_{\alpha\beta jk}\Big) \\
&= \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha,i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}R_{mijk} \\
&\quad + \sum_{\alpha,i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R_{\alpha\beta jk}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Para obter a expressão enunciada, provaremos separadamente os seguintes itens:

(i) $\displaystyle\sum_{\alpha,i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha} = \sum_{i,j}h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij}.$

(ii) $\displaystyle\sum_{\alpha,i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}R_{mijk} = c\|h\|^2 - cn^2H^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(H_{\alpha}H_{\beta})]^2 - \sum_{\alpha,\beta}tr\big(H_{\alpha}H_{\beta}\big)^2.$

(iii) $\displaystyle\sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk} = cn\|h\|^2 - c\|h\|^2 + \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) - nH \sum_{\alpha} tr(H_\alpha^2 H_{n+1}).$

(iv) $\displaystyle\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} R_{\alpha\beta jk} = \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) - \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta)^2.$

(v) $\displaystyle 2\sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) - 2\sum_{\alpha,\beta} tr(H_\beta H_\alpha)^2 = \sum_{\alpha,\beta} N(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha).$

Demonstração de (i):

Notemos que

$$\sum_{\alpha,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} = \sum_{i,j,k} h_{ij}^{n+1} h_{kkij}^{n+1} = \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} \Big(\sum_{k} h_{kkij}^{n+1} \Big),$$

pois pela Observação 1.4 temos que $\displaystyle\sum_{k} h_{kk}^{\alpha} = 0$, $\forall \alpha \in \{n+2, \cdots, n+p\}$. Além disso, como $nH = \displaystyle\sum_{k} h_{kk}^{n+1}$ segue que

$$(nH)_{ij} = (h_{11}^{n+1} + \cdots + h_{nn}^{n+1})_{ij},$$

em que os índices i e j denotam as respectivas derivadas segundo as direções e_i e e_j. Logo, podemos escrever $(nH)_{ij} = \displaystyle\sum_{k} h_{kkij}^{n+1}$. Portanto,

$$\sum_{\alpha,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} = \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} (nH)_{ij},$$

ou seja, a igualdade do item (i) é válida.

Demonstração de (ii):

Pela relação (1.2), temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} R_{mijk} &= \sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} \Big(c(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) - \sum_{\beta} (h_{mj}^{\beta} h_{ik}^{\beta} - h_{mk}^{\beta} h_{ij}^{\beta}) \Big) \\
&= \sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} c(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} \big(h_{mj}^{\beta} h_{ik}^{\beta} - h_{mk}^{\beta} h_{ij}^{\beta} \big) \\
&= c \sum_{\alpha,i,m} h_{im}^{\alpha} h_{im}^{\alpha} - c \sum_{\alpha,i,m} h_{ii}^{\alpha} h_{mm}^{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} h_{ij}^{\beta} \\
&\quad - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} h_{mj}^{\beta} h_{ik}^{\beta}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de $\|h\|^2$ e pela Observação 1.4 concluímos que

$$c\sum_{\alpha,i,m}(h^{\alpha}_{im})^2 - c\sum_{\alpha,i,m} h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{mm} = c\|h\|^2 - cn^2H^2.$$

Para concluir a demonstração basta provar as seguintes igualdades:

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{ij} = \sum_{\alpha,\beta}\big[tr(H_\alpha H_\beta)\big]^2,$$

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik} = \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta)^2.$$

Denotemos por h^{α}_{ij}, h^{β}_{ij} os elementos genéricos das matrizes H_α e H_β, respectivamente. Então, um elemento genérico da matriz $H_\alpha H_\beta$ é dado por $(H_\alpha H_\beta)_{ij} = \sum_k h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{kj}$. Logo, pela Definição 2.1, segue

$$tr\big(H_\alpha H_\beta\big) = \sum_i (H_\alpha H_\beta)_{ii} = \sum_i\Big(\sum_k h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{ki}\Big) = \sum_{i,k} h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{ki}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2 = \Big(\sum_{i,j} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ji}\Big)\Big(\sum_{m,k} h^{\alpha}_{mk}h^{\beta}_{km}\Big) &= \sum_{i,j,m,k} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ji}h^{\alpha}_{mk}h^{\beta}_{km}\\ &= \sum_{i,j,m,k} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{ij},\end{aligned}$$

em que na última igualdade utilizamos o fato que H_α e H_β são matrizes simétricas, além da comutatividade dos números reais. Agora, realizando o somatório em α e β, concluímos que

$$\sum_{\alpha,\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2 = \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{ij}.$$

Por outro lado, seguindo essa mesma linha de raciocínio notemos que

$$\begin{aligned}(H_\alpha H_\beta)^2_{ij} &= \sum_m (H_\alpha H_\beta)_{im}(H_\alpha H_\beta)_{mj} = \sum_m\left(\sum_k h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{km}\right)\left(\sum_r h^{\alpha}_{mr}h^{\beta}_{rj}\right)\\ &= \sum_{m,k,r} h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{km}h^{\alpha}_{mr}h^{\beta}_{rj}.\end{aligned}$$

Agora, pela Definição 2.1, obtemos que

$$tr(H_\alpha H_\beta)^2 = \sum_i (H_\alpha H_\beta)^2_{ii} = \sum_i \left(\sum_{m,k,r} h^\alpha_{ik} h^\beta_{km} h^\alpha_{mr} h^\beta_{ri} \right) = \sum_{i,m,k,r} h^\alpha_{ik} h^\beta_{km} h^\alpha_{mr} h^\beta_{ri}.$$

Usando o fato de que as matrizes H_α e H_β são simétricas e trocando k por j e r por k na última expressão, segue que

$$tr(H_\alpha H_\beta)^2 = \sum_{i,m,j,k} h^\alpha_{ij} h^\beta_{jm} h^\alpha_{mk} h^\beta_{ki} = \sum_{i,m,j,k} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mk} h^\beta_{jm} h^\beta_{ki} = \sum_{i,m,j,k} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{km} h^\beta_{mj} h^\beta_{ik}. \tag{2.4}$$

Logo, $\displaystyle\sum_{\alpha,\beta} tr\big(H_\alpha H_\beta\big)^2 = \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{km} h^\beta_{mj} h^\beta_{ik}$. Portanto, está demonstrada a seguinte relação conforme enunciado em (ii):

$$\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{km} R_{mijk} = c\|h\|^2 - cn^2H^2 + \sum_{\alpha,\beta} [tr(H_\alpha H_\beta)]^2 - \sum_{\alpha,\beta} tr\big(H_\alpha H_\beta\big)^2.$$

Demonstração de (iii):

Considerando a quarta parcela de (2.3) e usando (1.2), segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} R_{mkjk} &= \sum_{\alpha,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} \Big(c(\delta_{mj}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{kj}) - \sum_\beta (h^\beta_{mj} h^\beta_{kk} - h^\beta_{mk} h^\beta_{kj}) \Big) \\
&= cn \sum_{\alpha,i,j} (h^\alpha_{ij})^2 - c \sum_{\alpha,i,j} (h^\alpha_{ij})^2 - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} \big(h^\beta_{mj} h^\beta_{kk} - h^\beta_{mk} h^\beta_{kj} \big) \\
&= cn\|h\|^2 - c\|h\|^2 + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} h^\beta_{mk} h^\beta_{kj} - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} h^\beta_{mj} h^\beta_{kk}.
\end{aligned}$$

Notemos o que ocorre com a última parcela dessa igualdade:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} h^\beta_{mj} h^\beta_{kk} = \sum_{\alpha,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} h^{n+1}_{mj} h^{n+1}_{kk} &= \Big(\sum_k h^{n+1}_{kk} \Big) \Big(\sum_{\alpha,i,j,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} h^{n+1}_{mj} \Big) \\
&= nH \sum_{\alpha,i,j,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} h^{n+1}_{mj},
\end{aligned}$$

em que utilizamos novamente a Observaçao 1.4. O último termo da expressão acima pode ser escrito como

$$nH \sum_{\alpha,i,j,m} h_{ij}^{\alpha} h_{mi}^{\alpha} h_{mj}^{n+1} = nH \sum_{\alpha} tr(H_{\alpha}^2 H_{n+1}).$$

De fato, sejam h_{ij}^{α} e h_{ij}^{n+1} os elementos genéricos das matrizes H_{α} e H_{n+1}, respectivamente. Então, $(H_{\alpha}^2)_{ij} = \sum\limits_{k} h_{ik}^{\alpha} h_{kj}^{\alpha}$. De forma análoga, um termo genérico da matriz $H_{\alpha}^2 H_{n+1}$ é dado por

$$(H_{\alpha}^2 H_{n+1})_{ij} = \sum_{m} (H_{\alpha}^2)_{im} (H_{n+1})_{mj} = \sum_{m} \left(\sum_{k} h_{ik}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} \right) h_{mj}^{n+1} = \sum_{m,k} h_{ik}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} h_{mj}^{n+1}.$$

Logo, pela Definição 2.1, temos que

$$tr(H_{\alpha}^2 H_{n+1}) = \sum_{i} (H_{\alpha}^2 H_{n+1})_{ii} = \sum_{i} \left(\sum_{m,k} h_{ik}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} h_{mi}^{n+1} \right) = \sum_{i,m,k} h_{ik}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} h_{mi}^{n+1}.$$

Agora, realizando o somatório em α e usando o fato de que as matrizes H_{α} e H_{n+1} são simétricas, obtemos

$$\sum_{\alpha} tr(H_{\alpha}^2 H_{n+1}) = \sum_{\alpha,i,m,k} h_{ik}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} h_{mi}^{n+1} = \sum_{\alpha,i,m,k} h_{ki}^{\alpha} h_{mk}^{\alpha} h_{mi}^{n+1} = \sum_{\alpha,j,m,i} h_{ij}^{\alpha} h_{mi}^{\alpha} h_{mj}^{n+1},$$

em que na última igualdade trocamos i por j e k por i.

Por outro lado, vale a seguinte igualdade

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{mi}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} h_{kj}^{\beta} = \sum_{\alpha,\beta} tr(H_{\alpha} H_{\beta} H_{\beta} H_{\alpha}).$$

De fato, um elemento genérico da matriz $H_{\alpha} H_{\beta}$ é dado por $(H_{\alpha} H_{\beta})_{ij} = \sum\limits_{k} h_{ik}^{\alpha} h_{kj}^{\beta}$. Analogamente, temos $(H_{\beta} H_{\alpha})_{ij} = \sum\limits_{m} h_{im}^{\beta} h_{mj}^{\alpha}$. Logo, um elemento genérico da matriz $H_{\alpha} H_{\beta} H_{\beta} H_{\alpha}$ é dado por

$$\begin{aligned}
(H_{\alpha} H_{\beta} H_{\beta} H_{\alpha})_{ij} &= \sum_{r} (H_{\alpha} H_{\beta})_{ir} (H_{\beta} H_{\alpha})_{rj} \\
&= \sum_{r} \left(\sum_{k} h_{ik}^{\alpha} h_{kr}^{\beta} \right) \left(\sum_{m} h_{rm}^{\alpha} h_{mj}^{\beta} \right) = \sum_{r,k,m} h_{ik}^{\alpha} h_{kr}^{\beta} h_{rm}^{\alpha} h_{mj}^{\beta}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, o traço dessa matriz é dado por

$$tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) = \sum_i (H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha)_{ii} = \sum_{i,r,k,m} h^\alpha_{ik} h^\beta_{kr} h^\beta_{rm} h^\alpha_{mi}.$$

Agora, realizando o somatório em α e β e usando o fato que as matrizes H_α e H_β são simétricas, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) &= \sum_{\alpha,\beta,i,r,k,m} h^\alpha_{ik} h^\beta_{kr} h^\beta_{rm} h^\alpha_{mi} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,r,k,m} h^\alpha_{ik} h^\alpha_{mi} h^\beta_{rm} h^\beta_{kr} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,r,k,m} h^\alpha_{ik} h^\alpha_{mi} h^\beta_{mr} h^\beta_{rk} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,k,j,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} h^\beta_{mk} h^\beta_{kj}, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

em que na última igualdade trocamos r por k e k por j. Portanto, concluímos que

$$\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\alpha_{mi} R_{mkjk} = cn\|h\|^2 - c\|h\|^2 + \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) - nH \sum_\alpha tr(H_\alpha^2 H_{n+1}),$$

ou seja, vale a relação afirmada em (iii).

Demonstração de (iv):

Devemos provar que:

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^\alpha_{ij} h^\beta_{ik} R_{\alpha\beta jk} = \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) - \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta)^2.$$

Lembremos da relação (1.5), ou seja,

$$R_{\alpha\beta ij} = \sum_m (h^\alpha_{im} h^\beta_{mj} - h^\alpha_{jm} h^\beta_{mi}).$$

Então, usando essa relação concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^\alpha_{ij} h^\beta_{ik} R_{\alpha\beta jk} &= \sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^\alpha_{ij} h^\beta_{ik} \Big(\sum_m (h^\alpha_{jm} h^\beta_{mk} - h^\alpha_{km} h^\beta_{mj}) \Big) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\beta_{ik} h^\alpha_{jm} h^\beta_{mk} - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij} h^\beta_{ik} h^\alpha_{km} h^\beta_{mj}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, valem as seguintes igualdades:

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{jm}h^{\beta}_{mk} = \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha),$$

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj} = \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta)^2.$$

De fato, pelas igualdades (2.5) e (2.4), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) &= \sum_{\alpha,\beta,i,k,j,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,k,j,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{kj}h^{\beta}_{mk}h^{\alpha}_{mi} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,k,j,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{jk}h^{\beta}_{km}h^{\alpha}_{mi} \text{ (troque } i \leftrightarrow j) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ji}h^{\beta}_{ik}h^{\beta}_{km}h^{\alpha}_{mj} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{jm}h^{\beta}_{mk}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta} tr\big(H_\alpha H_\beta\big)^2 &= \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}.
\end{aligned}$$

Portanto, o item (iv) está provado.

Agora, a partir das igualdades (i), (ii), (iii) e (iv), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2 + \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij} \\
&\quad +c\|h\|^2 - cn^2H^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2 - \sum_{\alpha,\beta} tr\big(H_\alpha H_\beta\big)^2 \\
&\quad +cn\|h\|^2 - c\|h\|^2 + \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) - nH\sum_{\alpha} tr(H^2_\alpha H_{n+1}) \\
&\quad +\sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) - \sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta)^2.
\end{aligned}$$

Notemos que a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2+\sum_{i,j}h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij}+cn\|h\|^2-cn^2H^2\\
&-nH\sum_{\alpha}tr(H^2_\alpha H_{n+1})+\sum_{\alpha,\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2\\
&+2\sum_{\alpha,\beta}tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha)-2\sum_{\alpha,\beta}tr(H_\alpha H_\beta)^2.
\end{aligned}$$

Assim, pela igualdade (v), obtemos a expressão desejada, ou seja, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2+\sum_{i,j}h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij}+cn\|h\|^2-cn^2H^2\\
&- nH\sum_{\alpha}tr(H^2_\alpha H_{n+1})+\sum_{\alpha,\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2\\
&+ \sum_{\alpha,\beta}N(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha).
\end{aligned}$$

Demonstração de (v): Pela definição de N, segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta}N(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha) &= \sum_{\alpha,\beta}tr\big((H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)^t\big)\\
&= \sum_{\alpha,\beta}tr\big((H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)((H_\alpha H_\beta)^t-(H_\beta H_\alpha)^t)\big)\\
&= \sum_{\alpha,\beta}tr\big((H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)((H_\beta)^t(H_\alpha)^t-(H_\alpha)^t(H_\beta)^t)\big)\\
&= \sum_{\alpha,\beta}tr\big((H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)(H_\beta H_\alpha-H_\alpha H_\beta)\big)\\
&= \sum_{\alpha,\beta}tr\big(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha-(H_\beta H_\alpha)^2-(H_\alpha H_\beta)^2+H_\beta H_\alpha H_\alpha H_\beta\big)\\
&= \sum_{\alpha,\beta}tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha)-\sum_{\alpha,\beta}tr(H_\beta H_\alpha)^2\\
&- \sum_{\alpha,\beta}tr(H_\alpha H_\beta)^2+\sum_{\alpha,\beta}tr(H_\beta H_\alpha H_\alpha H_\beta)\\
&= 2\sum_{\alpha,\beta}tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha)-2\sum_{\alpha,\beta}tr(H_\beta H_\alpha)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$2\sum_{\alpha,\beta} tr(H_\alpha H_\beta H_\beta H_\alpha) - 2\sum_{\alpha,\beta} tr(H_\beta H_\alpha)^2 = \sum_{\alpha,\beta} N(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha),$$

ou seja, a igualdade (v) é verdadeira. Isso encerra a demonstração.

■

2.3 Importante lema envolvendo matrizes simétricas

O seguinte lema é um resultado amplamente utilizado e sua demonstração pode ser encontrada em [28].

Lema 2.6. *Sejam A, B matrizes simétricas $n\times n$ satisfazendo $AB = BA$ e $trA = trB = 0$. Então, vale a desigualdade*

$$|trA^2B| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(trA^2)(trB^2)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $(n-1)$ dos autovalores x_i de A e os correspondentes autovalores y_i de B satisfazem $|x_i| = \dfrac{(trA^2)^{1/2}}{\sqrt{n(n-1)}}$, $x_ix_j \geq 0$, $y_i = \dfrac{(trB^2)^{1/2}}{\sqrt{n(n-1)}}$ $\left(resp.\ y_i = -\dfrac{(trB^2)^{1/2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$.

2.4 Princípio do Máximo para um operador linear elíptico

Um operador diferencial parcial de segunda ordem e linear L tem a forma

$$L[u](x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_k b_k(x)u_k(x) + c(x)u(x), x \in \Omega,$$

em que $a_{ij} = a_{ji}$, b_k e c são funções contínuas e $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pertence a um domínio Ω em R^n, $n \geq 2$. Assumimos $u \in C^2(\Omega)$.

Definição 2.7. *O operador L é dito elíptico em $x \in \Omega$ se a matriz simétrica $[a_{ij}(x)]$ é positiva definida; é dito elíptico em Ω, se for elíptico em cada ponto de Ω; é chamado de uniformemente elíptico em Ω, se a função Λ/λ é limitada em Ω, em que $\Lambda(x) > 0$ e $\lambda(x) > 0$ denotam o maior e o menor dos autovalores da matriz positiva definida $[a_{ij}(x)]$.*

Temos o seguinte teorema:

Teorema 2.8. *(O princípio do máximo de E. Hopf) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto conexo. Considere um operador* L *uniformemente elíptico em* Ω *com* $c \equiv 0$ *e* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*. Se* $Lu \geq 0$ *em* Ω *e* u *atinge máximo em* Ω*, então,* u *é constante em* Ω*.*

Demonstração: Ver [17].

■

2.5 Redução de codimensão

Dada uma imersão isométrica $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+p}(c)$, em qual situação existe uma subvariedade própria totalmente geodésica N de $\overline{M}^{n+p}(c)$ tal que $x(M^n) \subset N$? Para responder essa pergunta apresentaremos um resultado provado por Erbacher [15]. Primeiramente, considere a seguinte definição:

Definição 2.9. *O primeiro espaço normal* $N_1(x)$ *é o complemento ortogonal de*

$$\{\xi \in T_x^{\perp}M / A_\xi = 0\} \quad em \quad T_x^{\perp}M^n.$$

Teorema 2.10. *(Erbacher [15]) Se o primeiro espaço normal* $N_1(x)$ *é invariante por translação paralela com respeito a conexão do fibrado normal e,* l *é a dimensão constante de* N_1*, então, existe uma subvariedade totalmente geodésica* N^{n+l} *de* $\overline{M}^{n+p}(c)$ *de dimensão* $n + l$ *tal que* $x(M^n) \subset N^{n+l}$*.*

Capítulo 3

Teorema Principal

Neste capítulo, demonstraremos alguns resultados auxiliares para gerar subsídios para a demonstração do teorema principal. Primeiramente, considere a seguinte observação:

Observação 3.1. *Vale a seguinte relação*

$$\Delta H^2 = 2H\Delta H + 2|\nabla H|^2. \tag{3.1}$$

De fato, pela Observação 1.4 temos $H^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{n+1}\right)^2$. Denotemos por k a derivada na direção de e_k. Então, temos que

$$\left[\left(\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{n+1}\right)^2\right]_k = 2\frac{1}{n^2}\sum_i h_{ii}^{n+1}h_{iik}^{n+1}.$$

Derivando novamente,

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{n+1}\right)^2\right]_{kk} &= \left[2\frac{1}{n^2}\sum_i h_{ii}^{n+1}h_{iik}^{n+1}\right]_k \\ &= 2\left[\frac{1}{n^2}\sum_i (h_{iik}^{n+1})^2 + \frac{1}{n^2}\sum_i h_{ii}^{n+1}h_{iikk}^{n+1}\right].\end{aligned}$$

Agora, realizando o somatório em k obtemos que

$$\Delta H^2 = 2|\nabla H|^2 + 2H\Delta H.$$

3.1 O operador $\square$ associado a um tensor simétrico

Seja $T = \sum_{i,j} T_{ij}\omega_i\omega_j$ um tensor simétrico sobre M^n definido por $T_{ij} = nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1}$. De acordo com Cheng-Yau [10], introduzimos um operador $\square$ associado a T agindo sobre $f \in C^2$ por

$$\square(f) := \sum_{i,j} T_{ij}f_{ij} = \sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1})f_{ij},$$

em que i e j no termo f_{ij} denotam as derivadas nas direções e_i e e_j, respectivamente. Agora, notemos que

$$\begin{aligned}\square(nH) &= \sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1})(nH)_{ij}\\ &= \sum_{i,j}(n^2H\delta_{ij}H_{ij}) - \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij}\\ &= n^2H\Delta H - \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por outro lado, pela relação (3.1), temos que $\Delta H^2 = 2H\Delta H + 2|\nabla H|^2$. Logo, podemos escrever

$$H\Delta H = \frac{1}{2}\Delta H^2 - |\nabla H|^2.$$

Multiplicando a igualdade anterior por n^2, obtemos

$$n^2H\Delta H = \frac{1}{2}n^2\Delta H^2 - n^2|\nabla H|^2.$$

Substituindo essa igualdade em (3.2), concluímos que

$$\square(nH) = \frac{1}{2}n^2\Delta H^2 - n^2|\nabla H|^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij}. \tag{3.3}$$

Por outro lado, pela relação (1.3) vale $n(n-1)R = n(n-1)c + \|h\|^2 - n^2H^2$. Então, aplicando o laplaciano nessa relação, segue que

$$n(n-1)\Delta R = \Delta\|h\|^2 - \Delta(n^2H^2),$$

ou seja,

$$n^2\Delta H^2 = \Delta\|h\|^2 - n(n-1)\Delta R.$$

Substituindo essa última relação em (3.3), concluímos que

$$\square(nH) = \frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 - \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R - n^2|\nabla H|^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij}. \tag{3.4}$$

Usando um método similar ao que se encontra em [8], provaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço num espaço de De Sitter $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$. Suponha que existe uma constante positiva k' tal que $n(n-1)R = k'H$, em que R é a curvatura escalar normalizada e H a curvatura média. Então, o operador $L = \square + (k'/2n)\Delta$ é elíptico e $R > 0$ e $H > 0$.*

Demonstração: Pela própria definição segue que $H \geq 0$. Como $k' > 0$, por hipótese devemos ter a curvatura escalar satisfazendo $n(n-1)R \geq 0$. Utilizando (1.3), concluímos que

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= n(n-1)R - n(n-1)c + n^2H^2 \\ &= k'H - n(n-1)c + n^2H^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Suponha, por absurdo, que existe $p \in M^n$ tal que $R(p) = 0$. Logo, $H(p) = 0$. Consequentemente, por (3.5) temos que $\|h\|^2(p) + n(n-1)c = 0$, ou seja, um absurdo porque $c > 0$. Logo, devemos ter $R > 0$ e $H > 0$ em M^n.

Agora, escolha um referencial ortonormal local semi-riemanniano $e_1, e_2, \ldots, e_{n+p}$ definido em $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ adaptado a M^n, ou seja, em cada ponto p de M^n tem-se que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base para o espaço tangente T_pM^n. Suponha ainda que $e_{n+1} = \dfrac{\xi}{H}$. Para cada α fixado, considere a forma diagonalizada da matriz h_{ij}^α, ou seja, $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$. Lembre que valem as relações $nH = \sum_i h_{ii}^{n+1}$ e $\sum_i h_{ii}^\alpha = 0$ para $n+2 \leq \alpha \leq n+p$ (conforme a Observação 1.4). Usando (3.5) e considerando qualquer i, concluímos que

$$\begin{aligned} nH - \lambda_i^{n+1} + k'/2n &= \sum_j \lambda_j^{n+1} - \lambda_i^{n+1} + \frac{1}{2}\big[\|h\|^2 + n(n-1)c - n^2H^2\big](nH)^{-1} \\ &= \sum_j \lambda_j^{n+1} - \lambda_i^{n+1} + \frac{1}{2}\big[\sum_{\alpha,j}(\lambda_j^\alpha)^2 + n(n-1)c - (nH)^2\big](nH)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que na última igualdade usamos que

$$\|h\|^2 = \sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^\alpha)^2 = \sum_{\alpha,i,j}(\lambda_i^\alpha\delta_{ij})^2 = \sum_{\alpha,j}(\lambda_j^\alpha)^2.$$

Então, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
nH - \lambda_i^{n+1} + k'/2n \;\geq\; & \sum_j \lambda_j^{n+1} - \lambda_i^{n+1} \\
+ \; & \frac{1}{2}\big[\sum_j (\lambda_j^{n+1})^2 + n(n-1)c - (\sum_j \lambda_j^{n+1})^2\big](nH)^{-1} \\
= \; & \Big[nH \sum_j \lambda_j^{n+1} - nH\lambda_i^{n+1} \\
& + \frac{1}{2}\sum_j (\lambda_j^{n+1})^2 + \frac{1}{2}n(n-1)c - \frac{1}{2}(\sum_j \lambda_j^{n+1})^2\Big](nH)^{-1} \\
= \; & \big[(\sum_j \lambda_j^{n+1})^2 - \lambda_i^{n+1}(\sum_j \lambda_j^{n+1})\big](nH)^{-1} \qquad (3.7) \\
& + \frac{1}{2}\big[\sum_j (\lambda_j^{n+1})^2 - (\sum_j \lambda_j^{n+1})^2\big](nH)^{-1} + \frac{1}{2}n(n-1)c(nH)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_j (\lambda_j^{n+1})^2 - (\sum_j \lambda_j^{n+1})^2 &= (\lambda_1^{n+1})^2 + \cdots + (\lambda_n^{n+1})^2 - (\lambda_1^{n+1} + \cdots + \lambda_n^{n+1})^2 \\
&= (\lambda_1^{n+1})^2 + \cdots + (\lambda_n^{n+1})^2 \\
&\quad - \Big[(\lambda_1^{n+1})^2 + \cdots + (\lambda_n^{n+1})^2 + \sum_{l\neq j} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1}\Big] \\
&= -\sum_{l\neq j} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Substituindo a última igualdade em (3.7), obtemos

$$
\begin{aligned}
nH - \lambda_i^{n+1} + k'/2n \;\geq\; & \big[(\sum_j \lambda_j^{n+1})^2 - \lambda_i^{n+1}(\sum_j \lambda_j^{n+1}) \\
- & \frac{1}{2}\sum_{l\neq j} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} + \frac{1}{2}n(n-1)c\big](nH)^{-1} \\
= & \big[\sum_j (\lambda_j^{n+1})^2 + \sum_{l\neq j} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} - \lambda_i^{n+1}(\sum_j \lambda_j^{n+1}) \\
- & \frac{1}{2}\sum_{l\neq j} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} + \frac{1}{2}n(n-1)c\big](nH)^{-1} \\
= & \big[\sum_j (\lambda_j^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{l\neq j} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} \\
- & \lambda_i^{n+1}(\sum_j \lambda_j^{n+1}) + \frac{1}{2}n(n-1)c\big](nH)^{-1} \\
= & \big[\sum_{j\neq i} (\lambda_j^{n+1})^2 + (\lambda_i^{n+1})^2 \\
& + \frac{1}{2}\lambda_i^{n+1}\sum_{l\neq i} \lambda_l^{n+1} + \frac{1}{2}\lambda_i^{n+1}\sum_{j\neq i} \lambda_j^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{l\neq j \\ l,j\neq i}} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} \\
& -(\lambda_i^{n+1})^2 - \lambda_i^{n+1}\sum_{j\neq i} \lambda_j^{n+1} + \frac{1}{2}n(n-1)c\big](nH)^{-1} \\
= & \big[\sum_{j\neq i} (\lambda_j^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{l\neq j \\ l,j\neq i}} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} + \frac{1}{2}n(n-1)c\big](nH)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Agora, analisemos o segundo termo dessa última igualdade:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{l\neq j \\ l,j\neq i}} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} = & \sum_{l\neq j} \lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} - \sum_{l\neq i} \lambda_l^{n+1}\lambda_i^{n+1} - \sum_{j\neq i} \lambda_i^{n+1}\lambda_j^{n+1} \\
= & -\sum_j (\lambda_j^{n+1})^2 + (\sum_j \lambda_j^{n+1})^2 - \sum_{l\neq i} \lambda_l^{n+1}\lambda_i^{n+1} - \sum_{j\neq i} \lambda_i^{n+1}\lambda_j^{n+1} \\
= & -\sum_{j\neq i} (\lambda_j^{n+1})^2 - (\lambda_i^{n+1})^2 + (\lambda_i^{n+1} + \sum_{j\neq i} \lambda_j^{n+1})^2 \\
& -\sum_{l\neq i} \lambda_l^{n+1}\lambda_i^{n+1} - \sum_{j\neq i} \lambda_i^{n+1}\lambda_j^{n+1} \\
= & -\sum_{j\neq i} (\lambda_j^{n+1})^2 + (\sum_{j\neq i} \lambda_j^{n+1})^2.
\end{aligned}
$$

Retornando à desigualdade anterior temos que

$$\begin{aligned} nH - \lambda_i^{n+1} + k'/2n &\geq \big[\sum_{j\neq i}(\lambda_j^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{l\neq j\\ l,j\neq i}}\lambda_l^{n+1}\lambda_j^{n+1} + \frac{1}{2}n(n-1)c\big](nH)^{-1} \\ &= \big[\sum_{j\neq i}(\lambda_j^{n+1})^2 - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}(\lambda_j^{n+1})^2 + \frac{1}{2}(\sum_{j\neq i}\lambda_j^{n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}n(n-1)c\big](nH)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\big[\sum_{j\neq i}(\lambda_j^{n+1})^2 + (\sum_{j\neq i}\lambda_j^{n+1})^2 + n(n-1)c\big](nH)^{-1} > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$nH - \lambda_i^{n+1} + k'/2n > 0, \forall\, i,$$

ou seja, concluímos que todo elemento da diagonal da matriz diagonalizada do operador L é positivo. Portanto, L é um operador elíptico. ■

O seguinte lema afirma que sob as mesmas condições do resultado anterior, se a curvatura média H for limitada em M^n, então, L é um operador uniformemente elíptico.

Lema 3.3. *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço num espaço de De Sitter $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$. Suponha que existe uma constante positiva k' tal que $n(n-1)R = k'H$, em que R é a curvatura escalar normalizada e H a curvatura média. Suponha que a curvatura média H é limitada sobre M^n. Então, o operador $L = \square + (k'/2n)\Delta$ é uniformemente elíptico.*

Demonstração: Conforme realizado na demonstração anterior, para cada α considere a matriz diagonalizada $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha\delta_{ij}$. Como H é limitada, existe $C > 0$ tal que $H(p) \leq C$, $\forall p \in M^n$. Retornemos ao último termo da demonstração acima e notemos que

$$\begin{aligned} (nH - \lambda_i^{n+1} + k'/2n) &\geq \frac{1}{2}\big[\sum_{j\neq i}(\lambda_j^{n+1})^2 + (\sum_{j\neq i}\lambda_j^{n+1})^2 + n(n-1)c\big](nH)^{-1} \\ &\geq \frac{1}{2}[n(n-1)c](nH)^{-1} \\ &= \frac{(n-1)c}{2H} \geq \frac{(n-1)c}{2C} =: \mu_o > 0, \end{aligned}$$

em que μ_o é uma constante positiva. Logo, pela Definição 2.7, L é uniformemente elíptico. ■

3.2 Uma desigualdade num espaço de De Sitter

Na demonstração da próxima proposição, usaremos os seguintes lemas de Álgebra Linear:

Lema 3.4. *Seja* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial real das matrizes* $m \times n$ *sobre o corpo* $\mathbb{R}$. *Então,* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *pode ser munido com um produto interno dado por*

$$\langle A, B\rangle = tr(B^t A), \quad \forall\ A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}). \tag{3.8}$$

Para mais informações sobre esse lema consulte [19]. Sua importância consistirá em possibilitar o uso da *Desigualdade de Schwarz* na prova de uma desigualdade na demonstração da próxima proposição.

Lema 3.5. *(Desigualdade de Schwarz) Seja* E *um espaço vetorial real munido com um produto interno. Então, vale*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\ \|v\|,\ \forall u, v \in E.$$

Além disso ocorre a igualdade se, e somente se, os vetores u *e* v *são linearmente dependentes.*

Demonstração: Ver [20]. ■

Agora, temos condições de provar a seguinte proposição:

Proposição 3.6. *Seja* M^n *uma subvariedade tipo-espaço num espaço de De Sitter* $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$. *Suponha que existe uma constante positiva* k' *tal que* $n(n-1)R = k'H$, *em que* R *é a curvatura escalar normalizada e* H *a curvatura média. Então,* $\|\nabla h\|^2 \geq n^2\|\nabla H\|^2$.

Demonstração:

Escolha um referencial ortonormal local semi-riemanniano $e_1, e_2, \ldots, e_{n+p}$ definido em $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ adaptado a M^n, ou seja, em cada ponto p de M^n tem-se que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base para o espaço tangente T_pM^n. Para cada α, considere a forma diagonalizada da matriz h_{ij}^α, ou seja, $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$. Notemos que $\|h\|^2 = \sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^\alpha)^2 = \sum_{\alpha,i}(\lambda_i^\alpha)^2 \neq 0$. De fato, se $\|h\|^2 = \sum_{\alpha,i}(\lambda_i^\alpha)^2 = 0$ em algum $p \in M^n$, então, $\lambda_i^\alpha = 0$, $\forall i, \alpha$ em p. O que implica $H(p) = 0$ e $R(p) = 0$. Nesse caso, por (1.3) teríamos $-n(n-1)c = 0$, um absurdo.

Por outro lado, como vale (1.3) e por hipótese temos $n(n-1)R = k'H$, concluímos que $k'H = n(n-1)c + \|h\|^2 - n^2H^2$. Logo,

$$\begin{aligned} k'(\nabla_i H) &= \nabla_i\big(n(n-1)c + \|h\|^2 - n^2H^2\big) \\ &= \nabla_i(\sum_{\alpha,k,j}(h^\alpha_{kj})^2) - \nabla_i(n^2H^2) \\ &= \sum_{\alpha,k,j} 2h^\alpha_{kj}h^\alpha_{kji} - 2n^2H\nabla_i H. \end{aligned}$$

Agora, colocando em evidência o termo $\nabla_i H$ no primeiro membro, elevando ao quadrado e realizando o somatório em i, podemos escrever

$$(\frac{k'}{2} + n^2H)^2\|\nabla H\|^2 = \sum_i \big(\sum_{\alpha,k,j} h^\alpha_{kj}h^\alpha_{kji}\big)^2.$$

Por outro lado, vale $\sum_i \big(\sum_{\alpha,k,j} h^\alpha_{kj}h^\alpha_{kji}\big)^2 \leq \Big(\sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{ij})^2\Big)\Big(\sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2\Big)$. De fato, consideremos a matriz $\nabla_i H_\alpha$ dada por

$$\nabla_i H_\alpha = \begin{pmatrix} h^\alpha_{11i} & h^\alpha_{12i} & \dots & h^\alpha_{1ni} \\ h^\alpha_{21i} & h^\alpha_{22i} & \dots & h^\alpha_{2ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha_{n1i} & h^\alpha_{n2i} & \dots & h^\alpha_{nni} \end{pmatrix}.$$

Assim, conforme (3.8), segue que

$$\langle \nabla_i H_\alpha, H_\alpha\rangle = tr((H_\alpha)^t\nabla_i H_\alpha) = \sum_{k,j} h^\alpha_{kj}h^\alpha_{kji}.$$

Agora, pela desigualdade de Schwarz, concluímos que

$$|\langle H_\alpha, \nabla_i H_\alpha\rangle|^2 = |\sum_{k,j} h^\alpha_{kj}h^\alpha_{kji}|^2 \leq \|H_\alpha\|^2\|\nabla_i H_\alpha\|^2 = \langle H_\alpha, H_\alpha\rangle\ \langle\nabla_i H_\alpha, \nabla_i H_\alpha\rangle,$$

o que implica pelas próprias definições

$$\big(\sum_{k,j} h^\alpha_{kj}h^\alpha_{kji}\big)^2 \leq \Big(\sum_{k,j}(h^\alpha_{kj})^2\Big)\Big(\sum_{k,j}(h^\alpha_{kji})^2\Big).$$

Realizando o somatório em α, segue que

$$\Big(\sum_{\alpha,k,j} h^\alpha_{kj}h^\alpha_{kji}\Big)^2 \leq \sum_\alpha \Big[\Big(\sum_{k,j}(h^\alpha_{kj})^2\Big)\Big(\sum_{k,j}(h^\alpha_{kji})^2\Big)\Big] \leq \Big(\sum_{\alpha,k,j}(h^\alpha_{kj})^2\Big)\Big(\sum_{\alpha,k,j}(h^\alpha_{kji})^2\Big),$$

Realizando o somatório em i, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\sum_i\Big(\sum_{\alpha,k,j} h^\alpha_{kj}h^\alpha_{kji}\Big)^2 &\leq \sum_i\Big(\sum_{\alpha,k,j}(h^\alpha_{kj})^2\Big)\Big(\sum_{\alpha,k,j}(h^\alpha_{kji})^2\Big)\\ &= \Big(\sum_{\alpha,k,j}(h^\alpha_{kj})^2\Big)\Big(\sum_{\alpha,k,j,i}(h^\alpha_{kji})^2\Big)\\ &= \Big(\sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{ij})^2\Big)\Big(\sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2\Big),\end{aligned}$$

conforme desejado. Como $\Big(\sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{kj})^2\Big)\Big(\sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2\Big) = \|h\|^2\|\nabla h\|^2$, obtemos

$$(\frac{k'}{2}+n^2H)^2\|\nabla H\|^2 \leq \|h\|^2\|\nabla h\|^2,$$

ou de forma equivalente

$$\|h\|^2\|\nabla h\|^2 \geq (\frac{k'}{2}+n^2H)^2\|\nabla H\|^2.$$

Logo, pela desigualdade anterior concluímos que

$$\begin{aligned}\big(\|\nabla h\|^2 - n^2\|\nabla H\|^2\big)\|h\|^2 &\geq \big[(\frac{k'}{2}+n^2H)^2 - n^2\|h\|^2\big]\|\nabla H\|^2\\ &= \big[\frac{(k')^2}{4} + k'n^2H + n^4H^2 - n^2\|h\|^2\big]\|\nabla H\|^2\\ &= \big[\frac{(k')^2}{4} + n^2(k'H + n^2H^2 - \|h\|^2)\big]\|\nabla H\|^2\\ &= \big[\frac{(k')^2}{4} + n^2(n(n-1)c + \|h\|^2 - \|h\|^2)\big]\|\nabla H\|^2\\ &= \big[\frac{(k')^2}{4} + n^3(n-1)c\big]\|\nabla H\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Assim, devemos ter $\|\nabla h\|^2 - n^2\|\nabla H\|^2 \geq 0$. Portanto, temos que

$$\|\nabla h\|^2 \geq n^2\|\nabla H\|^2,$$

como queríamos demonstrar. ∎

3.3 Propriedades e Lema Auxiliar

Baseando em [7], consideremos o seguinte tensor simétrico

$$\Phi = \sum_{\alpha,i,j} \Phi_{ij}^{\alpha} \omega_i \omega_j e_\alpha,$$

em que $\Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij}$ e H^{α} está definido conforme a Observação 1.4. Notemos que Φ^{α} possui traço nulo e valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} N(\Phi^{\alpha}) &= N(H_\alpha) - n(H^{\alpha})^2, \\ |\Phi|^2 &= \sum_{\alpha} N(\Phi^{\alpha}) = \|h\|^2 - nH^2, \end{aligned} \tag{3.9}$$

em que Φ^{α} denota a matriz $[\Phi_{ij}^{\alpha}]$.

Daqui pra frente, vamos supor que o vetor curtatura média normalizado $\dfrac{\xi}{H}$ de M^n é paralelo. Então, escolhendo um referencial ortonormal local $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+p}\}$ com $e_{n+1} = \dfrac{\xi}{H}$, temos que e_{n+1} torna-se o vetor curvatura média normalizado paralelo em cada ponto $p \in M^n$. A partir dessa escolha e da Observação 1.4, provaremos a validade das seguintes relações:

$$H_{n+1}H_\alpha = H_\alpha H_{n+1}, \ \forall\alpha \tag{3.10}$$

$$\Phi_{ij}^{n+1} = h_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij}, \tag{3.11}$$

$$N(\Phi^{n+1}) = tr(\Phi^{n+1})^2 = tr(H_{n+1})^2 - nH^2 = N(H_{n+1}) - nH^2, \tag{3.12}$$

$$tr(H_{n+1})^3 = tr(\Phi^{n+1})^3 + 3HN(\Phi^{n+1}) + nH^3, \tag{3.13}$$

$$\Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha}, \quad N(\Phi^{\alpha}) = N(H_\alpha), \quad \alpha \geq n+2. \tag{3.14}$$

De fato, a igualdade (3.10) é válida pela seguinte observação:

Observação 3.7. *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço imersa em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$. Suponha que o vetor curvatura média normalizado seja paralelo e considere $e_{n+1} = \dfrac{\xi}{H}$. Então, $\omega_{n+1\alpha} = 0$, $\forall\alpha$. Além disso, vale $H_{n+1}H_\alpha = H_\alpha H_{n+1}$, $\forall\alpha$.*

Com efeito, dado qualquer campo X de vetores tangentes a M^n vale $\omega_{n+1\alpha}(X) = \langle \nabla_X^{\perp} e_{n+1}, e_\alpha\rangle$. Agora, pela Definição 1.1 segue que $\omega_{n+1\alpha}(X) = 0$ (o que prova a primeira conclusão da afirmação). Logo, $d\omega_{n+1\alpha} = 0$, $\forall\alpha$. Por outro lado, lembremos da equação

(1.4), isto é,

$$d\omega_{\alpha\beta} = -\sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} - \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{\alpha\beta ij}\omega_i \wedge \omega_j.$$

Agora, tomando $\alpha = n+1$ na equação acima, esta se reduz a

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{n+1\beta ij}\omega_i \wedge \omega_j = 0$$

que implica em $R_{n+1\beta ij} = 0$. Daí pela equação (1.5) concluímos que

$$\sum_{l}(h_{il}^{n+1}h_{lj}^{\beta} - h_{jl}^{n+1}h_{li}^{\beta}) = 0.$$

Logo, considerando o elemento genérico ij na representação matricial, podemos escrever

$$(H_{n+1}H_{\beta})_{ij} = \sum_{l} h_{il}^{n+1}h_{lj}^{\beta} = \sum_{l} h_{jl}^{n+1}h_{li}^{\beta} = \sum_{l} h_{il}^{\beta}h_{lj}^{n+1} = (H_{\beta}H_{n+1})_{ij},$$

em que também usamos o fato que as matrizes H_{n+1} e H_{β} são simétricas. Portanto, segue que $H_{n+1}H_{\beta} = H_{\beta}H_{n+1}, \ \forall\beta$. Isso conclui a prova da Observação 3.7.

Por outro lado, por definição $\Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij}$. Se $\alpha = n+1$, pela Observação 1.4 segue que $\Phi_{ij}^{n+1} = h_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij}$. Agora, se $\alpha > n+1$, ainda pela Observação 1.4 temos $H^{\alpha} = 0$. Então, segue que $\Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha}, \forall\alpha \geq n+2$. Portanto, as relações (3.11) e (3.14) são válidas.

Para provar a relação (3.12), notemos que

$$\begin{aligned} N(\Phi^{n+1}) &= tr(\Phi^{n+1}(\Phi^{n+1})^t) = tr(\Phi^{n+1})^2 = tr(H_{n+1} - HI)^2 \\ &= tr\Big((H_{n+1})^2 - 2HH_{n+1}I + H^2I\Big) = tr(H_{n+1})^2 - 2H(nH) + H^2n \\ &= tr(H_{n+1})^2 - 2nH^2 + nH^2 = N(H_{n+1}) - nH^2. \end{aligned}$$

Para provar a relação (3.13), vejamos:

$$\begin{aligned} tr(H_{n+1})^3 &= tr(\Phi^{n+1} + HI)^3 \\ &= tr\Big((\Phi^{n+1})^3 + 3H(\Phi^{n+1})^2 I + 3H^2\Phi^{n+1}I^2 + H^3I^3\Big) \\ &= tr(\Phi^{n+1})^3 + 3Htr(\Phi^{n+1})^2 + 3H^2 tr(\Phi^{n+1}) + H^3 tr(I) \\ &= tr(\Phi^{n+1})^3 + 3HN(\Phi^{n+1}) + 3H^2(nH - nH) + H^3 n \\ &= tr(\Phi^{n+1})^3 + 3HN(\Phi^{n+1}) + nH^3. \end{aligned}$$

Portanto, todas as relações enunciadas acima são verdadeiras. Antes de demonstrar o próximo resultado, considere a seguinte observação:

Observação 3.8. *Vale a seguinte desigualdade*

$$\sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2 \geq \frac{1}{p}|\Phi|^4. \tag{3.15}$$

De fato, como $|\Phi|^2 = \sum_\alpha N(\Phi^\alpha)$ segue que

$$|\Phi|^4 = |\Phi|^2|\Phi|^2 = \Big(\sum_\alpha N(\Phi^\alpha)\Big)\Big(\sum_\beta N(\Phi^\beta)\Big).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\Phi|^4 &= N(\Phi^{n+1})\sum_\beta N(\Phi^\beta) + N(\Phi^{n+2})\sum_\beta N(\Phi^\beta) + \cdots + N(\Phi^{n+p})\sum_\beta N(\Phi^\beta) \\ &= \sum_\beta N(\Phi^{n+1})N(\Phi^\beta) + \sum_\beta N(\Phi^{n+2})N(\Phi^\beta) + \cdots + \sum_\beta N(\Phi^{n+p})N(\Phi^\beta) \\ &\leq \sum_\beta N(\Phi^\beta)N(\Phi^\beta) + \sum_\beta N(\Phi^\beta)N(\Phi^\beta) + \cdots + \sum_\beta N(\Phi^\beta)N(\Phi^\beta) \\ &= p\sum_\beta [N(\Phi^\beta)]^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|\Phi|^4 \leq p\sum_\beta [N(\Phi^\beta)]^2$. Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2 &= \sum_{\alpha,\beta>n+1}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2 + 2\sum_{\beta>n+1}[tr(\Phi^{n+1}\Phi^\beta)]^2 + [tr(\Phi^{n+1})^2]^2\\
&\geq \sum_{\alpha>n+1}[tr(\Phi^\alpha)^2]^2 + [tr(\Phi^{n+1})^2]^2\\
&= \sum_{\alpha>n+1}[N(\Phi^\alpha)]^2 + [N(\Phi^{n+1})]^2\\
&= \sum_\alpha [N(\Phi^\alpha)]^2.
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$|\Phi|^4 \leq p\sum_\alpha (N(\Phi^\alpha))^2 \leq p\sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2,$$

como queríamos demonstrar.

Agora, passemos a demonstrar o seguinte lema:

Lema 3.9. *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço imersa em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$. Se o vetor curvatura média for não nulo, isto é, $\xi \neq 0$, então, vale a desigualdade*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &\geq \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij} + n(c-H^2)|\Phi|^2\\
&- nH\sum_\alpha tr((\Phi^\alpha)^2\Phi^{n+1}) + \sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2.
\end{aligned}\tag{3.16}$$

Demonstração:

Pelo Lema 2.5, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij} + nc(\|h\|^2 - nH^2)\\
&- nH\sum_\alpha tr(H_\alpha^2 H_{n+1}) + \sum_{\alpha,\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2\\
&+ \sum_{\alpha,\beta} N(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha).
\end{aligned}$$

Agora, usando as relações (3.9), (3.11) e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij} + nc|\Phi|^2\\ &- nHtr(H_{n+1})^3 - nH\sum_{\alpha>n+1} tr\big((\Phi^\alpha)^2(\Phi^{n+1}+HI)\big) + \sum_{\alpha,\beta>n+1}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2\\ &+ 2\sum_{\alpha>n+1}[tr(\Phi^\alpha(\Phi^{n+1}+HI))]^2 + [tr(H^2_{n+1})]^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha).\end{aligned}$$

Substituindo (3.13) no lugar de $tr(H_{n+1})^3$ acima, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij} + nc|\Phi|^2\\ &- nH\big(tr(\Phi^{n+1})^3 + 3Htr(\Phi^{n+1})^2 + nH^3\big)\\ &- nH\sum_{\alpha>n+1} tr\big((\Phi^\alpha)^2\Phi^{n+1} + H(\Phi^\alpha)^2\big) + \sum_{\alpha,\beta>n+1}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2\\ &+ 2\sum_{\alpha>n+1}[tr(\Phi^\alpha\Phi^{n+1} + H\Phi^\alpha)]^2 + [tr(H^2_{n+1})]^2\\ &+ \sum_{\alpha,\beta} N(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha).\end{aligned}$$

Agrupando novamente esses termos e substituindo (3.12) em $[tr(H^2_{n+1})]^2$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij} + nc|\Phi|^2\\ &- nH\big(tr(\Phi^{n+1})^3 + \sum_{\alpha>n+1} tr((\Phi^\alpha)^2\Phi^{n+1})\big) - 3nH^2tr(\Phi^{n+1})^2\\ &- n^2H^4 - nH^2\sum_{\alpha>n+1} tr(\Phi^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta>n+1}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2\\ &+ 2\sum_{\alpha>n+1}[tr(\Phi^\alpha\Phi^{n+1}) + Htr(\Phi^\alpha)]^2 + [tr(\Phi^{n+1})^2 + nH^2]^2\\ &+ \sum_{\alpha,\beta} N(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha).\end{aligned}$$

Como $tr(\Phi^\alpha) = 0$, temos que $2\sum_{\alpha>n+1}[tr(\Phi^\alpha\Phi^{n+1}) + Htr(\Phi^\alpha)]^2 = 2\sum_{\alpha>n+1}[tr(\Phi^\alpha\Phi^{n+1})]^2$.

Então, após reagrupar alguns termos podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2+\sum_{i,j}h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij}+nc|\Phi|^2\\
&- nH\sum_{\alpha}tr\big((\Phi^{\alpha})^2\Phi^{n+1}\big)-n^2H^4+\big(tr(\Phi^{n+1})^2\big)^2+2nH^2tr(\Phi^{n+1})^2\\
&+ n^2H^4-3nH^2tr(\Phi^{n+1})^2-nH^2\sum_{\alpha>n+1}tr(\Phi^{\alpha})^2+\sum_{\alpha,\beta>n+1}[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta})]^2\\
&+ 2\sum_{\alpha>n+1}\big[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{n+1})\big]^2+\sum_{\alpha,\beta}N(H_{\alpha}H_{\beta}-H_{\beta}H_{\alpha})\\
&= \sum_{\alpha,i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2+\sum_{i,j}h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij}+nc|\Phi|^2+\sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta})]^2\\
&- nH\sum_{\alpha}tr\big((\Phi^{\alpha})^2\Phi^{n+1}\big)-nH^2\big(tr(\Phi^{n+1})^2+\sum_{\alpha>n+1}tr(\Phi^{\alpha})^2\big)\\
&+ \sum_{\alpha,\beta}N(H_{\alpha}H_{\beta}-H_{\beta}H_{\alpha}).
\end{aligned}$$

Pela Observação 2.4, temos que $N(H_{\alpha}H_{\beta}-H_{\beta}H_{\alpha})\geq 0, \forall\alpha,\beta$.
Como $tr(\Phi^{n+1})^2+\sum_{\alpha>n+1}tr(\Phi^{\alpha})^2=\sum_{\alpha}tr(\Phi^{\alpha})^2=|\Phi|^2$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &\geq \sum_{\alpha,i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2+\sum_{i,j}h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij}+nc|\Phi|^2\\
&+ \sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta})]^2-nH\sum_{\alpha}tr\big((\Phi^{\alpha})^2\Phi^{n+1}\big)-nH^2|\Phi|^2,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &\geq \sum_{\alpha,i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2+\sum_{i,j}h^{n+1}_{ij}(nH)_{ij}+n(c-H^2)|\Phi|^2\\
&- nH\sum_{\alpha}tr\big((\Phi^{\alpha})^2\Phi^{n+1}\big)+\sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta})]^2
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

■

3.4 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção, provaremos o principal resultado deste trabalho que consiste na demonstração do teorema que generaliza o Teorema 0.3:

Teorema 3.10. *(Cao-Shu [3]) Seja M^n uma subvariedade completa tipo-espaço num espaço de De Sitter $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ com $n \geq 3$. Suponha que existe uma constante positiva k' tal que $n(n-1)R = k'H$, em que R é a curvatura escalar normalizada e H a curvatura média. Suponha que o vetor curvatura média normalizado é paralelo e que H atinge seu máximo em M^n. Então,*

(1) se $H^2 < \frac{4(n-1)c}{m^2}$ em M^n, segue que M^n é totalmente umbílica.

(2) se $H^2 = \frac{4(n-1)c}{m^2}$ em M^n, segue que M^n é totalmente umbílica ou M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$.

(3) se $\frac{4(n-1)c}{m^2} < H^2 \leq c$ em M^n e o quadrado da norma da segunda forma fundamental $\|h\|^2$ satisfaz $\|h\|^2 \leq nH^2 + (B_H^-(n,p,H))^2$ ou $\|h\|^2 \geq nH^2 + (B_H^+(n,p,H))^2$ em M^n, então, M^n é totalmente umbílica ou M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$, em que $m^2 = (n-2)^2 p + 4(n-1)$ e $B_H^{\pm}(n,p,H)$ são duas raízes reais distintas do polinômio

$$P_H(x) = \frac{1}{p}x^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx + n(c - H^2). \tag{3.17}$$

Demonstração: Escolha um referencial ortonormal local semi-riemanniano $e_1, e_2, \dots, e_{n+p}$ definido em $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ adaptado a M^n, ou seja, em cada ponto p de M^n tem-se que $\{e_1$, e_2, ..., $e_n\}$ é uma base para o espaço tangente T_pM^n. Consideremos ainda que $e_{n+1} = \dfrac{\xi}{H}$. Agora, definamos o seguinte tensor simétrico

$$\Phi = \sum_{\alpha,i,j} \Phi_{ij}^{\alpha} \omega_i \omega_j e_{\alpha},$$

em que $\Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij}$ e H^{α} está definido conforme a Observação 1.4. Como o vetor curvatura média normalizado é paralelo temos que $H_{\alpha}H_{n+1} = H_{n+1}H_{\alpha}$, $\forall \alpha$ (pela Observação 3.7). Logo, pela relação (3.14) concluímos que $\Phi^{\alpha}\Phi^{n+1} = \Phi^{n+1}\Phi^{\alpha}$. Como $tr\Phi^{\alpha} = 0$, $\forall \alpha$, tomando $A = \Phi^{\alpha}$ e $B = \Phi^{n+1}$, pelo Lema 2.6, temos que

$$|tr((\Phi^{\alpha})^2\Phi^{n+1})| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(tr(\Phi^{\alpha})^2)(tr(\Phi^{n+1})^2)^{1/2}.$$

Então, vale a desigualdade

$$tr((\Phi^\alpha)^2\Phi^{n+1}) \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(tr(\Phi^\alpha)^2)(tr(\Phi^{n+1})^2)^{1/2}.$$

Agora, realizando o somatório em α, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_\alpha tr((\Phi^\alpha)^2\Phi^{n+1}) &\leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_\alpha(tr(\Phi^\alpha)^2)(tr(\Phi^{n+1})^2)^{1/2}\\ &= \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2\|\mu\|,\end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos que $|\Phi|^2 = \sum_\alpha tr(\Phi^\alpha)^2$ e

$$tr(\Phi^{n+1})^2 = \sum_{i,j}\Phi_{ij}^{n+1}\Phi_{ji}^{n+1} = \sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij})^2 = \|\mu\|^2.$$

Observemos que

$$\sum_\alpha tr((\Phi^\alpha)^2\Phi^{n+1}) \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2\|\mu\| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3, \tag{3.18}$$

pois pela relação (1.10), temos $\|\mu\|^2 = \|h\|^2 - nH^2 - \|\tau\|^2$ que implica

$$\|\mu\|^2 \leq |\Phi|^2, \tag{3.19}$$

dado a validade da relação (3.9). Por outro lado, lembremos da desigualdade (3.16)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &\geq \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{i,j}h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij} + n(c-H^2)|\Phi|^2\\ &- nH\sum_\alpha tr((\Phi^\alpha)^2\Phi^{n+1}) + \sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2.\end{aligned}$$

Utilizando, simultaneamente as desigualdades (3.15) e (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &\geq \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij} + n(c-H^2)|\Phi|^2 \\
&\quad -nH\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3 + \frac{1}{p}|\Phi|^4 \\
&= \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij} \\
&\quad +|\Phi|^2\Big\{n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + \frac{1}{p}|\Phi|^2\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Agora, lembremos da relação (3.4), ou seja,

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 - \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R - n^2|\nabla H|^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij}.$$

Então, pela desigualdade (3.20) segue que

$$\begin{aligned}
\Box(nH) &\geq -\frac{1}{2}n(n-1)\Delta R - n^2|\nabla H|^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij} + \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}(nH)_{ij} \\
&+ |\Phi|^2\Big\{n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + \frac{1}{p}|\Phi|^2\Big\}.
\end{aligned}$$

Como $\|\nabla h\|^2 = \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2$, podemos reescrever a desigualdade anterior da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\Box(nH) &\geq -\frac{1}{2}n(n-1)\Delta R + \|\nabla h\|^2 - n^2\|\nabla H\|^2 \\
&\quad +|\Phi|^2\Big\{n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + \frac{1}{p}|\Phi|^2\Big\} \\
&\geq -\frac{1}{2}n(n-1)\Delta R \qquad (3.21) \\
&\quad +|\Phi|^2\Big\{n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + \frac{1}{p}|\Phi|^2\Big\},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

em que utilizamos a Proposição 3.6 para obter a última desigualdade. Agora, notemos que

$$(k'/2)\Delta H = \frac{1}{2}\Delta(k'H) = \frac{1}{2}\Delta\Big(n(n-1)R\Big) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R.$$

Portanto, pela definição do operador L podemos escrever

$$\begin{aligned}
nLH &= n[\Box H + (k'/2n)\Delta H] = \Box(nH) + (k'/2)\Delta H = \Box(nH) + \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R. \\
&\geq |\Phi|^2\Big\{n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + \frac{1}{p}|\Phi|^2\Big\} \\
&= |\Phi|^2 P_H(|\Phi|), \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

em que na última igualdade definimos o polinômino do segundo grau

$$P_H(x) := n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx + \frac{1}{p}x^2. \qquad (3.24)$$

Notemos que o discriminante de P_H é dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} &= \Big(\frac{-n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}\Big)^2 - 4\frac{1}{p}n(c-H^2) \\
&= \frac{n(n-2)^2H^2}{n-1} - \frac{4n(c-H^2)}{p} \\
&= \frac{np(n-2)^2H^2 - 4n(n-1)(c-H^2)}{(n-1)p} \\
&= \frac{n}{(n-1)p}\Big[p(n-2)^2H^2 - 4(n-1)(c-H^2)\Big] \\
&= \frac{n}{(n-1)p}\Big[(n-2)^2pH^2 - 4(nc - nH^2 - c + H^2)\Big] \\
&= \frac{n}{(n-1)p}\Big[(n-2)^2pH^2 - 4nc + 4nH^2 + 4c - 4H^2\Big] \\
&= \frac{n}{(n-1)p}\Big[\Big((n-2)^2p + 4(n-1)\Big)H^2 - 4(n-1)c\Big].
\end{aligned}$$

Logo, o discriminante de P_H pode ser escrito como $\tilde{\Delta} = \dfrac{n}{(n-1)p}[m^2H^2 - 4(n-1)c]$, em que

$$m^2 = (n-2)^2p + 4(n-1).$$

Agora, passemos a analisar as três possibilidades para o sinal de $\tilde{\Delta}$.

1. Se $\tilde{\Delta} < 0$, ou equivalentemente, se $H^2 < \frac{4(n-1)c}{m^2}$ em M^n, então, $P_H(\|\Phi\|) > 0$ em M^n e o lado direito de (3.23) é não-negativo. Como o operador L é elíptico e H obtém seu máximo em M^n, segue que H é constante em M^n. Logo, temos que $|\Phi|^2 P_H(|\Phi|) = 0$ e, portanto, $|\Phi|^2 = 0$. Então, M^n é totalmente umbílica.

De fato, para cada α consideremos a matriz diagonalizada $h_{ij}^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$. Pela Observação 1.4, temos

$$H^{n+1} = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{n+1} = \frac{1}{n}\sum_i \lambda_i^{n+1} = H \text{ e } H^{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_i \lambda_i^{\alpha} = 0,\ \forall \alpha \geq n{+}2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i}(H^{\alpha} - \lambda_i^{\alpha})^2 &= \sum_{\alpha,i}\big((H^{\alpha})^2 - 2H^{\alpha}\lambda_i^{\alpha} + (\lambda_i^{\alpha})^2\big) \\
&= \sum_{\alpha,i}(H^{\alpha})^2 - 2\sum_{\alpha,i} H^{\alpha}\lambda_i^{\alpha} + \sum_{\alpha,i}(\lambda_i^{\alpha})^2 \\
&= n\sum_{\alpha}(H^{\alpha})^2 - 2H^{n+1}\sum_i \lambda_i^{n+1} + \sum_{\alpha,i}(\lambda_i^{\alpha})^2 \\
&= n(H^{n+1})^2 - 2H^{n+1}(nH) + \|h\|^2 \\
&= n(H)^2 - 2H(nH) + \sum_{\alpha,i}(\lambda_i^{\alpha})^2 \\
&= nH^2 - 2nH^2 + \|h\|^2 \\
&= \|h\|^2 - nH^2 \\
&= |\Phi|^2,
\end{aligned}$$

em que na última igualdade utilizamos a relação (3.9). Como $|\Phi|^2 = 0$, concluímos que $H^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha}, \forall \alpha, i$. Logo, para todo i temos

$$\lambda_i^{\alpha} = \begin{cases} H & \text{se} \quad \alpha = n+1 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha > n+1. \end{cases}$$

Como H é constante em M^n, segue que M^n é totalmente umbílica.

2. Agora, consideremos o caso em que $\tilde{\Delta} = 0$ ou de forma equivalente, suponha que $H^2 = \frac{4(n-1)c}{m^2}$ em M^n. Então, a única raiz de P_H é dada por

$$\begin{aligned}
s &= \frac{\dfrac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H}{2\dfrac{1}{p}} = \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\frac{p}{2} = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{n^2(n-2)^2}{n(n-1)}}\sqrt{\frac{4(n-1)c}{m^2}} \\
&= \frac{(n-2)p\sqrt{n}\sqrt{c}}{m}.
\end{aligned}$$

Logo, $P_H(|\Phi|) = (|\Phi| - \frac{(n-2)p\sqrt{nc}}{m})^2 \geq 0$ em M^n. Assim, novamente temos que $|\Phi|^2 P_H(|\Phi|) = 0$. Portanto, $|\Phi|^2 = 0$ em M^n e M^n é totalmente umbílica (como anteriormente) ou $P_H(|\Phi|) = 0$. Se $P_H(|\Phi|) = 0$, como H é constante podemos concluir que ocorrem as igualdades em (3.23), (3.21), (3.20), (3.19) e inclusive ocorre a igualdade em (2.6) do Lema 2.6. Como ocorre a igualdade em (3.19), temos $\|\mu\|^2 = \|h\|^2 - nH^2$. Isso implica que $\|\mu\| = |\Phi|$ e $\|\tau\| = 0$ (pela relação (1.10)). Como e_{n+1} é paralelo no fibrado normal $T^{\perp}(M^n)$ de M^n, usando o método de Yau (redução da codimensão), concluímos que M^n está contida numa subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ de $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$. Como ocorre a igualdade no Lema 2.6, segue que M^n tem $(n-1)$ curvaturas principais iguais e constantes. Como H é constante e as curvaturas principais são constantes segue que M^n é isoparamétrica. Dessa forma, segue que M^n é isométrica a um cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$ pelo teorema da congruência em [1].

3. Para finalizar, consideremos o caso em que $\tilde{\Delta} > 0$ ou equivalentemente $\frac{4(n-1)c}{m^2} < H^2$. Nesse caso, P_H tem duas raízes reais $B_H^{\pm}(n,p,H)$ dadas por

$$\begin{aligned} B_H^{\pm}(n,p,H) &= \frac{p}{2}\Big[\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H \pm \sqrt{\frac{n}{(n-1)p}[m^2H^2 - 4(n-1)c]}\Big] \\ &= \frac{p}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\big[(n-2)H \pm \frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{m^2H^2 - 4(n-1)c}\big]. \end{aligned}$$

Claramente, $B_H^{+}(n,p,H)$ é sempre positivo. Agora, notemos que $B_H^{-}(n,p,H) \geq 0$ se, e somente se, $\frac{4(n-1)c}{m^2} < H^2 \leq c$. Por hipótese $\|h\|^2 \leq nH^2 + (B_H^{-}(n,p,H))^2$, ou $\|h\|^2 \geq nH^2 + (B_H^{+}(n,p,H))^2$, em M^n. Então, $|\Phi| \leq B_H^{-}(n,p,H)$ ou $|\Phi| \geq B_H^{+}(n,p,H)$ em M^n devido (3.9). Portanto, temos que $P_H(|\Phi|) \geq 0$ em M^n. Como L é elíptico e H atinge seu máximo em M^n segue de (3.23) que H é constante em M^n. Logo, temos $|\Phi|^2 P_H(|\Phi|) = 0$. Então, $|\Phi|^2 = 0$ e M^n é totalmente umbílica (como feito anteriormente) ou $P_H(|\Phi|) = 0$. Se $P_H(|\Phi|) = 0$, então,

$$|\Phi| = B_H^{-}(n,p,H) \text{ ou } |\Phi| = B_H^{+}(n,p,H), \tag{3.25}$$

em M^n. Se $|\Phi| = B_H^{-}(n,p,H) = 0$, então, $|\Phi|^2 = 0$ e, portanto, como feito anteriormente, concluímos que M^n é totalmente umbílica. Se $|\Phi| = B_H^{-}(n,p,H) > 0$, ocorrem as igualdades em (3.23), (3.21), (3.20), (3.19) e inclusive ocorre a igualdade em (2.6) do Lema 2.6. Utilizando os mesmos agumentos da prova no caso anterior, concluímos que M^n é isométrica a um cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$. Se $|\Phi| = B_H^{+}(n,p,H)(> 0)$ também teremos que M^n é isométrica a um cilindro hiperbólico $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$. Isso encerra a demonstração do Teorema Principal.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] Abe, N.; Koike, N. and Yamaguch, S. *Congruence theorems for proper semi-riemannian hypersurfaces in a real space form*, Yokohama Math. J., **16** (1987), 123-136.

[2] Akutagawa, K. *On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in a de Sitter space*, Math. Z., **196** (1987), 13-19.

[3] Cao, J.; Shu, S. *Curvature and Rigidity of Complete Space-Like Submanifolds in a de Sitter Space*, Internat. Math. Forum **5** (2010), 175-184;

[4] Cecil, T. E; Chi, Q.-S.; Jensen, G. R., *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures*, eprint arXiv:math/0402272, 02/2004.

[5] Chaves, R. M. B.; Sousa Jr,L. A. M. *On complete space-like submanifolds in the de Sitter space with parallel mean curvature vector*, Rev. Un. Mat. Argentina, **47**, (2006), 85-98.

[6] Chaves, R. M. B.; Sousa Jr, L. A. M. *Some applications of a Simons' type formula for complete spacelike submanifolds in a semi-Riemannian space form*, Diff. Geo. and its Applications **25**, (2007), 419-432.

[7] Chaves, R. M. B.; Camargo, F. E. C.; Sousa Jr, L. A. M. *New characterizations of complete spacelike submanifolds in semi-riemannian space forms*, Kodai Math. J. **32** (2009), 209-230.

[8] Cheng, Q.M. *Complete space-like hypersurfaces of a de Sitter space with $r = kH$*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., **44**(1990), 67-77.

[9] Cheng, Q.M. *Submanifolds with constant scalar curvature*, Royal Society of Edinburgh, **132A**, (2002), 1163-1183.

[10] Cheng, S. Y.; Yau, S. T. *Hypersurfaces with constant scalar curvatrue*, Math. Ann., **225** (1977), 195-204.

[11] Cheng, Q.M. *Complete space-like submanifolds in a de Sitter space with parallel mean curvature vector*, Math. Z., **206**, (1991), 333-339.

[12] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*,4 ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2006.

[13] do Carmo, M. P., *O método do referencial móvel*, 2 ed., Rio de Janeiro, 2009.

[14] do Carmo, M. P., *Formas e aplicações diferenciais*, 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1971.

[15] Erbacher, J., *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J. Differential Geometry. **5** (1971), 333-340.

[16] Folland, G. B., *Introduction to partial differential equations*, 2nd Ed, Princeton Academic Press, Princeton, 1995.

[17] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations os second order*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[18] Goddard, A. J. *Some remarks on the existence of space-like hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Combrige Phil. Soc., **82** (1977), 489-495.

[19] Hoffman, K., Kunze, R. *Álgebra Linear*, 2. ed. Rio de Janeiro, 1979.

[20] Lima, E. L., *Álgebra Linear*, 3 ed., Rio de Janeiro, IMPA, 1998.

[21] Li, H. *Global rigidity theorems of hypersurfaces*, Ark. Mat., **35**(1997), 327-351.

[22] Liu, X., *Complete space-like hypersurfaces with constant scalar curvature*, Manuscripta Math., **105** (2001), 367-377.

[23] Marsdan, J.; Tipler, F. *Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity*, Bull. Am. phys. Soc., **23** (1978), 84-90.

[24] Montiel, S., *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J., **37** (1988), 909-917.

[25] O'Neill, Barret, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[26] Protter, M.H.; Weinberger, H. F., *Maximum principles in differential equations*, Englewood Cliffs, N, J., Prentice-Hall, Inc. (1967).

[27] Ramanathan, J. *Complete space-like hypersurfaces of constant mean curvature in the de Sitter space*, Indiana University Math. J., **36** (1987), 349-359.

[28] Santos, W. *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres*, Tôhoku Math. J., **46** (1994),403-415.

[29] Shu, S. C. *Complete space-like hypersurfaces in a de Sitter space* , Bull. Austral. Math. Soc., **73** (2006), 9-16.

[30] Stumbles, S. *Hypersurfaces of constant mean extrinsic curvature*, Ann. Phys., **133** (1980), 28-56.

[31] Tenenblat, K., *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, Pitman Monographs 1998, Addison Wesley Longman L., 1998.

[32] Yau, S. T. *Submanifolds with constant curvature*,American J. Math., **96**, (1974), 346-366.

[33] Zheng, Y. *Space-like hypersurfaces with constant scalar curvature in the de Sitter spaces*, Differential Geom. Appl., **6** (1996), 51-54.