Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Classes de Soluções para a Equação de Langevin Generalizada

por

Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos

Brasília

2011

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Classes de Soluções para a Equação de Langevin Generalizada

Por

Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 22 de março de 2011

Comissão Examinadora:

Prof$^{\underline{a}}$. Chang Chung Yu Dorea - MAT/UnB (Orientadora)

Prof$^{\underline{a}}$. Cátia Regina Gonçalves - MAT/UnB

Prof. Ary Vasconcelos Medino - MAT/UnB

Prof$^{\underline{a}}$. Silvia Regina Costa Lopes - MAT/UFRGS

Prof. Vladimir Belitsky - IME/USP

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, principalmente à minha mãe, Margaret, e irmãs, Andréa e Maria Henedina, pelo carinho, motivação e confiança que sempre me transmitiram.

Agradeço aos meus amigos Alacyr, José Eduardo e Flávio, pelo incentivo, confiança e convivências etílicas.

Agradeço aos meus colegas de trabalho e de doutorado: Marina Maria, Janete, Walter (companheiro de disciplinas e conversas sobre probabilidade, inclusive), Luciene, Magno, Débora, Adriana, Simone, Newton, Ricardo e Eudes.

Agradeço aos meus professores de graduação, mestrado e doutorado; principalmente aos professores Luiz Salomão (grande mestre), Maurílio (orientador de mestrado e amigo como consequência disto), Ary (pelas conversas extra-classe sobre coisas estocásticas), Catia e Marcelo.

Agradeço à minha orientadora, professora Chang, pela dedicação e paciência para com este orientando viajante. Foi uma experiência enriquecedora.

Finalmente agradeço à minha esposa Magda; companheira nos momentos difíceis (nos bons momentos é fácil), carinhosa, tolerante, solidária... mais fácil dizer assim: a pessoa sem a qual eu não me entendo.

"Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um tem o direito de fazer mudanças, recomeçar, e, fazer um novo fim." - Chico Xavier

RESUMO

Para a equação de Langevin generalizada (ELG) governada por um ruído de cauda pesada, determinamos duas classes de soluções. Neste caso, ao contrário da equação de Langevin clássica, o cálculo de Itô não pode ser aplicado para obter soluções em média quadrática. Nossa abordagem baseia-se nas propriedades da transformada de Laplace para processos estáveis e na identificação da ELG como uma equação de Volterra estocástica. Para o índice de estabilidade $1 < \alpha \leq 2$ mostramos que a conjectura de A. V. Medino [24], é realmente uma classe de soluções em probabilidade. Além disso, mostramos que algumas séries de Fourier-Stieltjes aleatórias convergem para a solução da ELG e discutimos o papel do índice de estabilidade no modo de convergência.

Palavras-chave e frases: Equação de Langevin generalizada, processos estáveis, transformada de Laplace, séries de Fourier-Stieltjes aleatórias.

ABSTRACT

For the Generalized Langevin Equation (GLE) driven by heavy-tailed noise we derive several classes of solutions. In this case, unlike the classical Langevin Equation case, the Ito's calculus cannot be applied to obtain mean square solutions. Our approach relies on the properties of Laplace transforms for stable processes and on the identification of GLE as Volterra stochastic integro-differential equation. For stability index $1 < \alpha \leq 2$ we show that Medino's conjecture [24] is indeed a class of solutions in probability. Moreover, making use of random Fourier-Stieltjes series we exhibit approximating series that converge to the solution and discuss the role of stability index in the convergence mode.

Keywords and phrases: Generalized Langevin equation, stable process, Laplace transform, random Fourier-Stieltjes series.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais estocásticas estão inseridas em diversos ramos do conhecimento, modelando fenômenos na Física, Química, Biologia e Economia, entre outros. Por exemplo, na Economia, a equação de Black-Scholes

$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dB(t),$$

onde $B(t)$ é o movimento Browniano e r e σ são constantes, descreve a evolução dos mercados financeiros ([8], [19]); em Epidemiologia, a equação

$$dX(t) = [(1 - X(t))(aX(t) + c) - bX(t)]dt + mX(t)(1 - X(t))dB(t),$$

onde a, b, c e m são constantes, modela a deflagração em uma população, de uma doença que não confere imunidade (gonorréia, por exemplo) ([7], [19]). Particularmente, a equação diferencial estocástica conhecida como equação generalizada de Langevin (ELG) faz parte do contexto das chamadas difusões anômalas ou *Lévy-flights* ([10], [21], [22], [24]) e modela, por exemplo, o crescimento de determinados tipos de tumores, [25], e o transporte de proteínas via membrana celular, [14]. A ELG, na sua formulação matemática, é dada por

$$\begin{cases} dV(t) = -\int_0^t \gamma(t-s)V(s)dsdt + dX(t) \\ V(0) = 0, \end{cases}$$

onde $\gamma(t)$ é uma função denominada, no mundo da Física, de função memória e $X(t)$ pode ser o movimento Browniano ou, de forma mais geral, um processo estável. A função $\gamma(t)$ recebe o nome de função memória porque "armazena" a informação contida no passado e a transmite no presente. O estudo da ELG quando $X(t)$ é um processo estável é interessante, pois os processos estáveis são processos de Lévy com variância infinita (com exceção do movimento Browniano) não permitindo assim, que as ferramentas usuais do cálculo estocástico clássico possam ser utilizadas; isto é, todo o aparato que surge como consequência do estudo de integração com respeito a processos de segunda ordem não pode ser aplicado.

Historicamente, o estudo da ELG começou com o trabalho de Paul Langevin em 1908, [20], quando ele abordou o problema de modelar o movimento de uma partícula de massa m imersa em um fluido de viscosidade γ e sujeita aos choques aleatórios com as moléculas do fluido e com a parede do recipiente. Langevin obteve a equação

$$m\dot{v}(t) = -m\gamma v(t) + \xi(t),$$

onde $\xi(t)$ é um ruído branco; isto é, um processo que goza das propriedades: $E(\xi(t)) = 0$, $E(\xi(t)v(0)) = 0$ e $E(\xi(t)\xi(s)) = k\delta(t)$, onde k é uma constante e $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. Em 1964, Hazime Mori propôs um modelo ([27], [28]) que melhor se adequava aos sistemas que possuíam algum tipo de interação não instantânea entre as partículas, isto é, um sistema com memória. A equação proposta por Mori foi

$$m\dot{v}(t) = -m \int_0^t \gamma(t-s)v(s)ds + \xi(t),$$

onde $\gamma(t)$ é a função memória e $\xi(t)$ é uma força estocástica satisfazendo $E(\xi(t)) = 0$, $E(\xi(t)v(0)) = 0$ e $E(\xi(t)\xi(s)) = c\gamma(t-s)$, com c uma constante.

Uma das formulações matemáticas da equação de Langevin leva em conta que o ruído branco é a derivada no sentido generalizado do movimento Browniano, isto é, $\dfrac{dB(t)}{dt} = \xi(t)$; dessa forma a ELG fica assim

$$dV(t) = -\int_0^t \gamma(t-s)V(s)dsdt + dB(t), \;\; V(0) = 0,$$

ou, na sua forma integral

$$V(t) = -\int_0^t \int_0^u \gamma(u-s)V(s)dsdu + B(t).$$

Substituindo o movimento Browniano na equação acima por um processo estável $X(t)$, obtemos a versão da ELG que será estudada neste trabalho:

$$V(t) = -\int_0^t \int_0^u \gamma(u-s)V(s)dsdu + X(t).$$

Cabe ressaltar que, quando $X(t)$ é o movimento Browniano, ou, mais geralmente, uma martingale quadrado integrável $M(t)$, a equação tem solução; neste último caso, em 1977, Dan Kannan encontrou uma forma explícita, em média quadrática, para a solução, [16]. O processo solução apresentado por Kannan é

$$V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dM(s),$$

onde a função ρ satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)\,\rho(s)\,ds \\ \rho(0) = 1. \end{cases}$$

Esta classe de soluções apresentada por Kannan é, na verdade, o ponto de partida de nosso estudo.

Nas próximas linhas será feita uma breve apresentação de cada um dos capítulos desta tese. Antes disso, vale lembrar que todos os processos estocásticos abordados no decorrer do trabalho são adaptados à filtragem usual e estão definidos em um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

O Capítulo 1 deste trabalho tem duas seções bastante distintas; na Seção 1.1 estão presentes os pré-requisitos para o desenvolvimento da tese; desde a definição de processo estável até a apresentação de resultados clássicos como a fórmula de Itô, o teorema das três séries e resultados de convergência em L^p. Na Seção 1.2, definimos a transformada de Laplace para processos estáveis (no sentido da convergência em probabilidade) e assim como no caso determinístico, algumas propriedades como a linearidade e o teorema da convolução são demonstrados no Teorema 1.2.1.

No Capítulo 2, apresentamos alguns aspectos históricos que complementarão as informações dadas aqui, além de apresentar, com mais detalhes, o resultado formulado por Kannan. Ainda neste capítulo, expomos algumas tentativas frustradas de encontrar uma solução para a ELG (Seção 2.2);

discorremos, por exemplo, sobre a dificuldade em aplicar as ferramentas da integração com respeito às semimartingales ([19], [31]) para resolver o problema (o leitor verá que o principal entrave reside no caráter não-linear da ELG e assim sendo, a fórmula de integração por partes, por exemplo, não pode ser aplicada). Uma forma de determinarmos uma classe de soluções para a ELG surgiu quando tivemos acesso aos textos de Richard Bellman e Kenneth L. Cook, [6], Francesco G. Tricomi, [35], Kôsaku Yosida, [36], e Albert T. Bharucha-Reid, [4], e percebemos que a teoria das equações de Volterra poderia nos auxiliar; isto porquê a ELG pode ser escrita no formato "equação de Volterra" e isto anuncia a possibilidade de adaptar as técnicas destes textos para os nossos fins. Através de algumas manipulações, conseguimos reescrever a equação de Langevin assim:

$$V(t) = \int_0^t K(t-s)V(s)ds + X(t),$$

onde $K(t-s) = -\int_s^t \gamma(u-s)du$ (a função K é chamada *núcleo de Volterra*). Baseado na definição de solução em [24], provamos, no Teorema 2.3.1, que

$$V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dX(s),$$

é solução, em probabilidade, da ELG, onde

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)\,\rho(s)\,ds \\ \rho(0) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

desde que $\alpha \in (1, 2]$. A demonstração deste resultado baseia-se no uso das propriedades da transformada de Laplace para processos estáveis, que foi construída no Capítulo 1 e a restrição do índice de estabilidade ao intervalo $(1, 2]$ é consequência da utilização da desigualdade de Hölder na prova de algumas propriedades desta transformação. Na demonstração deste resultado fica clara a existência do vínculo da solução com o problema de valor inicial (1). A reescrita da ELG e o resultado que nos dá a primeira classe de soluções são conteúdos da Seção 2.3.

Aproveitando as leituras sobre equações de Volterra determinísticas e estocásticas (em particular, [4]), eis que surge a oportunidade, na primeira seção do Capítulo 3, de provar que uma nova classe de processos também é solução, em probabilidade, da ELG. A segunda proposta de solução, teor do Teorema 3.1.1, é

$$V(t) = -\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds + X(t), \tag{2}$$

onde $\Gamma(t-s)$ é o *núcleo resolvente* do núcleo de Volterra $K(t-s)$, isto é,

$$\Gamma(t-s) := -\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(t-s), \tag{3}$$

com os *núcleos iterados* $K^{(n)}(t-s)$ obtidos, via recorrência, assim:

$$K^{(1)}(t-s) = K(t-s), \;\; K^{(n)}(t-s) = \int_0^t K^{(n-1)}(t-z)K(z-s)dz, \;\; n \geq 2.$$

Aqui também o índice de estabilidade está confinado no intervalo $(1,2]$ e o motivo é o mesmo da restrição no Teorema 2.3.1. Note que esta solução, diferentemente da classe de soluções anterior, não carrega o vínculo com um problema de valor inicial determinístico; porém, exige o cálculo de Γ. O núcleo resolvente que surge neste processo solução está intimamente relacionado com o núcleo de Volterra $K(t-s)$ (além da definição (3), é claro) e goza da importante propriedade:

$$\Gamma(t-s)+K(t-s)-\int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)dz=0.$$

Esta igualdade será fundamental na demonstração dos Teoremas 3.1.1 e 3.2.1.

Na Seção 3.2 nosso objetivo é mostrar que as duas classes de soluções são iguais. O Teorema 3.2.1 será o último resultado do Capítulo 3 e consistirá basicamente na seguinte afirmação: "Se $\alpha \in (1,2]$ e $t\max\limits_{s\leq t}|K(t-s)|<1$, então as classes coincidem". O que nos motivou a fazer tal afirmação foi o Exemplo 3.1.2, pág. 66; este exemplo consiste em determinar a solução da equação

$$V(t)=-\gamma\int_0^t V(s)ds+B(t).$$

Via Teorema 3.1.1, sabemos que tal solução é

$$V(t)=-\gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}B(s)ds+B(t).$$

Utilizando a fórmula de integração por partes, provamos que

$$-\gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}B(s)ds+B(t)=\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}dB(s),$$

ou seja, a solução dada pelo Teorema 3.1.1 coincide com a solução dada pelo Teorema 2.3.1. Assim, o caso $\alpha=2$ nos permitiu ter esperanças de que as classes seriam iguais para α em $(1,2]$.

No Capítulo 4 abordamos, dentre outras coisas, a convergência de um determinado tipo de série aleatória para a integral estocástica $\int_0^t f(s-u)dX(u)$, onde $X(t)$ é um processo estável com índice de estabilidade $\alpha\in(0,2]$ e o modo de convergência depende do índice de estabilidade. As Seções 4.1 e

4.2 consistem de aspectos históricos envolvendo a convergência destas séries e resultados preliminares sobre processos estáveis, respectivamente.

A argumentação a seguir compõe a Seção 4.3, última da tese. O trabalho de Chanchala Nayak, Swadheenananda Pattanayak e Mahendra N. Mishra em 1987, [29], sobre a convergência da série de Fourier-Stieltjes $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n\, e^{2n\pi is}$ (a_n é o coeficiente de Fourier de f e A_n é o coeficiente de Fourier-Stieltjes do processo $X(t)$) para a integral $\displaystyle\int_0^1 f(s-u)dX(u)$ nos fez pensar na seguinte questão: existe alguma série aleatória da forma Fourier-Stieltjes que converge para a integral estocástica $I(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-s)dX(s)$? A pergunta é relevante pois no Capítulo 2 provamos que a solução da ELG é uma integral com esta forma. Conseguindo realizar esta tarefa estaríamos possibilitando aproximar esta integral por truncamentos da série, por exemplo.

Tendo em mãos uma função $f \in L^p[0,t]$, com $p > 0$, periódica de período t e trabalhando com um processo simétrico $X(t)$ e estável com índice de estabilidade $\alpha \in (0,2]$, para o qual definimos o coeficiente associado $A_k := \displaystyle\int_0^t e^{\frac{-2k\pi iu}{t}} dX(u)$, conseguimos provar, no Teorema 4.3.10, que:

i) Se $\alpha \in (1,2)$ e $p \geq \alpha$, então a série converge em probabilidade para $I(t)$.

ii) Se $\alpha = p = 2$, então a série converge quase certamente para $I(t)$.

Este teorema não inclui o caso $\alpha \in (0,1]$, pois, embora tenhamos provado que neste caso, a série converge para a integral $I(t)$, não conseguimos mostrar que a integral $I(t)$ é solução da ELG (devido a problemas técnicos envolvendo a transformada de Laplace já mencionados).

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este trabalho está intimamente relacionado com o cálculo estocástico, em particular com a integração com respeito a processos α-estáveis e com a determinação da solução de uma equação diferencial estocástica prolífica: a equação de Langevin generalizada. Este capítulo de preliminares é formado por duas seções; na Seção 1.1 apresentamos vários conceitos e resultados básicos como, por exemplo, a consagrada fórmula de Itô, a definição de processos α-estáveis e o teorema de Kolmogorov para a convergência quase certa de somas infinitas de v.a.'s; a Seção 1.2 é devotada à construção de uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes: a transformada de Laplace para processos α-estáveis.

1.1 Processos Estáveis e Alguns Outros Conceitos Importantes

Ratificando as considerações iniciais, apresentamos nesta seção alguns teoremas e conceitos úteis no decorrer do caminho; particularmente importante é a definição de processos α-estáveis (Definição

1.1.7), pois todo o trabalho será construído em torno de tais processos. Comecemos com a fórmula de Itô, resultado fundamental na teoria integral envolvendo o movimento Browniano.

Teorema 1.1.1 (Fórmula de Itô)**.** *Suponha que* $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$*. Então*

$$f(t,B(t)) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B(s))dB(s) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,B(s))ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B(s))ds.$$

Outro resultado bastante útil do cálculo estocástico é a fórmula de integração por partes envolvendo dois processos de Itô, digamos $X(t)$ e $Y(t)$ (um processo $Z(t)$ é dito um *processo de Itô* se é da forma $Z(t) = \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)$, $0 \leq t \leq T$, onde $\mu(t)$ e $\sigma(t)$ são $\mathcal{F}_t$-adaptados, $\int_0^T |\mu(t)|dt < \infty$ e $\int_0^T \sigma^2(t)dt < \infty$).

Teorema 1.1.2 (Integração por partes)**.** *Se* $X(t)$ *e* $Y(t)$ *são processos de Itô, então*

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s).$$

O Capítulo 2 consistirá, entre outras coisas, de uma breve apresentação das integrais estocásticas relativas a semimartingales e o conceito de função de variação finita será útil; ei-lo:

Definição 1.1.1. *Se f é uma função real, sua variação sobre o intervalo* $[a,b]$ *é definida como*

$$V_f([a,b]) = \sup \sum_{i=0}^{n} |f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)|,$$

onde o supremo é tomado sobre as partições $a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = b$*. Se* $V_f([a,b])$ *é finita, então f é dita ser uma função de variação finita sobre* $[a,b]$*. Se f é uma função de* $t \geq 0$*, então a função de variação de f é definida como*

$$V_f(t) = V_f([0,t]).$$

Dessa forma, diz-se que f é de variação finita se $V_f(t) < \infty$ para todo t.

O próximo resultado nos dá condições para que a soma $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convirja quase certamente, onde $\{X_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Este resultado é conhecido como o Teorema das três séries ou Teorema de Kolmogorov e será utilizado na demonstração do Teorema 4.3.4.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Kolmogorov). *Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Uma condição necessária e suficiente para a convergência quase certa da série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ é a convergência das três séries seguintes:*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq 1)$;

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n 1_{\{|X_n|\leq 1\}})$;

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n 1_{\{|X_n|\leq 1\}})$.

Em análise matemática, quando uma série converge no sentido de que as médias aritméticas das reduzidas converge, dizemos que ela é Cesàro-somável. A importância de enxergar a série sob este ângulo é que uma soma infinita divergente pode ter soma de Cesàro bem definida. Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ diverge no sentido usual, mas é Cesàro-somável para $\frac{1}{2}$, [12]. No Capítulo 4, em particular no Teorema 4.3.7, provaremos que uma série especial (que será definida no momento oportuno) é Cesàro-somável em probabilidade. Esta somabilidade alternativa é o teor da próxima definição.

Definição 1.1.2. *Dizemos que* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *é Cesàro-somável em probabilidade para* X *se, para qualquer* $\varepsilon > 0$*, tivermos*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_0 + \cdots + X_{n-1}}{n} - X\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

O quociente $\dfrac{X_0 + \cdots + X_{n-1}}{n}$ *recebe o nome de n-ésima soma de Cesàro.*

Processos estocásticos α-estáveis serão objeto de estudo em todos os capítulos deste trabalho; antes de introduzi-los, comecemos com as variáveis aleatórias α-estáveis ou variáveis aleatórias com distribuição estável:

Definição 1.1.3. *Dizemos que uma variável aleatória* X *tem distribuição estável se, para cada* $n \geq 2$*, existem constantes* $C_n > 0$ *e* $D_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} C_n X + D_n,$$

onde $X_1, \ldots, X_n$ *são cópias independentes de* X*.*

Observação: Pode-se mostrar que $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$, para algum $\alpha \in (0, 2]$ (ver, por exemplo, [34]).

Tendo em vista a necessidade, no Capítulo 4, de trabalhar com a função característica de uma classe de processos α-estáveis, nada mais natural do que apresentar a próxima definição, que é equivalente à Definição 1.1.3, [34], e caracteriza uma variável aleatória α-estável através da sua função característica.

Definição 1.1.4. *Uma variável aleatória* X *tem distribuição estável se existem parâmetros* $\alpha \in (0, 2]$*,* $\sigma \in [0, \infty)$*,* $\beta \in [-1, 1]$ *e* $\mu \in \mathbb{R}$ *tais que sua função característica é da forma*

$$\varphi(t) = \begin{cases} exp\left\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta\, sign(t)\, tg\Big(\dfrac{\pi\alpha}{2}\Big)\right] + i\mu t\right\}, se\ \ \alpha \neq 1 \\ exp\left\{-\sigma|t| \left[1 + \dfrac{2\beta i}{\pi}\, sign(t)\, ln|t|\right] + i\mu t\right\}, se\ \ \alpha = 1. \end{cases}$$

O parâmetro α na definição acima é chamado *índice de estabilidade* e para denotar uma variável aleatória com índice de estabilidade α (ou v.a. α-estável), usa-se a notação $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

As v.a.'s α-estáveis estão inseridas no contexto da *teoria de risco*. Um dos problemas centrais desta teoria consiste na estimação da probabilidade da ruína associada a um processo de reserva de risco, [11]. Sob este ângulo, as indenizações são v.a.'s estáveis e uma propriedade importante destas variáveis é largamente explorada: todas elas possuem *cauda pesada*; isto é, se X é uma v.a. α-estável com função de distribuição F, então

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} P(X > x) = \infty, \ \ \forall \lambda > 0.$$

Sabemos que uma variável aleatória X é dita simétrica se

$$P(X \in A) = P(-X \in A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Para denotar uma variável aleatória α-estável e simétrica, utiliza-se a notação $X \sim S\alpha S$. Vejamos dois exemplos de variáveis aleatórias α-estáveis:

Exemplo 1.1.1. *Se $X \sim N(\mu, 2\sigma^2)$, então $X \sim S_2(\sigma, 0, \mu)$.*

Exemplo 1.1.2. *Se X tem distribuição de Cauchy, isto é, tem densidade*

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi[(x-\mu)^2 + \sigma^2]},$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, então $X \sim S_1(\sigma, 0, \mu)$.

Precisamos definir vetor aleatório estável antes de apresentar o conceito de processo α-estável.

Definição 1.1.5. *Um vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é dito um vetor aleatório estável se para quaisquer números positivos A e B, existe um número positivo C e um vetor $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$A\boldsymbol{X}^{(1)} + B\boldsymbol{X}^{(2)} \stackrel{\mathrm{d}}{=} C\boldsymbol{X} + D,$$

onde $\boldsymbol{X}^{(1)}$ e $\boldsymbol{X}^{(2)}$ são cópias independentes de $\boldsymbol{X}$.

Observação: Pode-se mostrar que $\mathbf{X}$ é um vetor aleatório estável se, e somente se, para cada $n \geq 2$, existe um número $\alpha \in (0, 2]$ e um vetor $\mathbf{D}_n$ tais que

$$\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)} + \cdots + \mathbf{X}^{(n)} \stackrel{\mathrm{d}}{=} n^{\frac{1}{\alpha}}\mathbf{X} + \mathbf{D}_n,$$

onde $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}$ são cópias independentes de $\mathbf{X}$ (ver, por exemplo, [34]).

Precisamos recordar a definição de distribuições de dimensão finita, objetos que caracterizam totalmente um processo estocástico.

Definição 1.1.6. *Seja T um conjunto de parâmetros. As distribuições de dimensão finita de um processo estocástico $X = \{X(t) : t \in T\}$ são as distribuições dos vetores*

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n)),\ t_1, \ldots, t_n \in T,\ n \geq 1.$$

Podemos agora, definir processos α-estáveis:

Definição 1.1.7. *Um processo estocástico é dito α-estável se todas as distribuições de dimensão finita são α-estáveis e é dito α-estável e simétrico se todas as distribuições de dimensão finita são α-estáveis e simétricas. Se o processo $X(t)$ é estável, usamos a notação $X(t) \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e dizemos que o seu índice de estabilidade é α.*

O movimento Browniano $B(t)$, por exemplo, é um processo 2-estável com parâmetros $\sigma = t^{1/2}$, $\beta \in [-1, 1]$ e $\mu = 0$, ou seja, $B(t) \sim S_2(t^{1/2}, \beta, 0)$. Outro exemplo importante é a classe dos processos α-estáveis com $\mu = \beta = 0$; estes processos são simétricos e sua função característica tem a forma

$$\varphi(u,t) = e^{-\sigma^\alpha |u|^\alpha t}.$$

Devido à simplicidade da sua função característica, os processos α-estáveis e simétricos serão o principal objeto de estudo no Capítulo 4.

Uma forma alternativa de definir os processos estáveis é considerar uma classe mais geral da qual os estáveis fazem parte: os processos de Lévy. Um processo $X(t)$ é dito um processo de Lévy se

i) $X(0) = 0$ q.c.;

ii) $X(t)$ tem incrementos independentes, isto é, as variáveis aleatórias

$$X(t_2) - X(t_1),\, X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

são independentes para quaisquer $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$;

iii) $X(t)$ é contínuo em probabilidade; isto é, para cada $t \geq 0$ temos

$$\lim_{h \to 0} P(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon) = 0, \, \forall \, \varepsilon > 0.$$

Uma consequência interessante desta definição é que os processos de Lévy tem trajetórias càdlàg (do francês: *continu à droit, limite à gauche*) quase certamente, isto é, trajetórias contínuas pela direita e com limites à esquerda, [31]. Agora, um processo α-estável $X(t)$ é um processo de Lévy tal que $X(t) - X(s) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$, para todo $0 \leq s < t < \infty$ e para algum $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$, [34].

Note que os processos estáveis possuem incrementos estacionários, pois sua distribuição depende apenas do comprimento do intervalo $[s,t]$. Quando $\alpha = 2$, $X(t)$ é o movimento Browniano, pois a variável aleatória $X(t) - X(s)$ tem distribuição normal com média 0 e variância $2|t-s|$, ou seja, $X(t) - X(s) \sim S_2((t-s)^{\frac{1}{2}}, \beta, 0)$.

Os dois próximos resultados serão utilizados na demonstração do Teorema 1.2.1 e estão relacionados com propriedades assintóticas de processos estáveis; o primeiro deles, quando o índice de estabilidade está restrito ao intervalo $(0,2)$ ([18], [3]) e o segundo, quando o processo estável é o movimento Browniano, [19].

Teorema 1.1.4. *Sejam $X(t)$ um processo estável com índice de estabilidade $\alpha \in (0,2)$ e $h(t)$ uma função positiva e crescente sobre $(0,\infty)$ e satisfazendo $\int_1^\infty h^{-\alpha}(t)dt < \infty$. Então*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X(t)|}{h(t)} = 0 \quad q.c.$$

Teorema 1.1.5. *Se $B(t)$ é o movimento Browniano padrão, então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0 \quad q.c.$$

No Capítulo 4, mostramos a convergência de determinadas séries aleatórias para um tipo de integral estocástica. Por sua vez, esta integral poderá possuir propriedades de continuidade e/ou diferenciabilidade em algum sentido que não o usual; daí vem a necessidade de apresentar as definições de processo contínuo em média quadrática, contínuo em probabilidade e de processo diferenciável em probabilidade.

Definição 1.1.8. *Um processo estocástico $X(t)$ é dito contínuo em probabilidade em $t = t_0$ se, para todo $\varepsilon > 0$, tivermos*

$$\lim_{h\to 0} P(|X(t_0+h) - X(t_0)| > \varepsilon) = 0.$$

Definição 1.1.9. *Um processo estocástico $X(t)$ é dito contínuo em média quadrática em $t = t_0$ se,*

$$\lim_{h\to 0} E(|X(t_0+h) - X(t_0)|^2) = 0.$$

Naturalmente, o processo $X(t)$ é contínuo em média quadrática no intervalo $[a,b]$ se é contínuo em média quadrática em todo $t_0 \in [a,b]$.

Definição 1.1.10. *Um processo estocástico $X(t)$ é dito diferenciável em probabilidade em $t = t_0$, se existe um processo $Y(t)$ tal que para todo $\delta > 0$,*

$$\lim_{h\to 0} P\left(\left|\frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} - Y(t_0)\right| > \delta\right) = 0.$$

Dizemos que $X'(t)$ representa a derivada em probabilidade de $X(t)$.

Denotemos por

$$f_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, e^{\frac{2k\pi i s}{t}},$$

a sequência das somas parciais da série de Fourier de uma função f de período t, onde a_k é o coeficiente de Fourier de f. Os próximos resultados também serão utilizados no Capítulo 4, em particular na demonstração dos Teoremas 4.3.1, 4.3.2, 4.3.8 e 4.3.9.

Teorema 1.1.6. *Seja $f \in L^p[0,t]$, com $p \geq 1$. Então,*

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^t |f(s) - f_n(s)|^p ds = 0;$

ii) $\displaystyle\lim_{s\to l} \int_0^t |f(s-u) - f(l-u)|^p du = 0.$

Teorema 1.1.7. *Seja $f \in L^p[0,t]$, com $0 < p < 1$ e tal que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ e $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty$. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t |f(s) - f_n(s)|^p ds = 0.$$

Na próxima seção nos encarregaremos de definir a transformada de Laplace para processos estáveis e de demonstrar algumas de suas propriedades.

1.2 A Transformada de Laplace para Processos Estáveis

Como vimos, um processo α-estável $\{X(t)\}$ possui incrementos independentes e estacionários e é contínuo em probabilidade. Estas condições nos permitem definir as seguintes integrais estocásticas no sentido da convergência em probabilidade:

$$\int_0^\infty g(t)X(t)dt \quad \text{e} \quad \int_0^\infty g(t)dX(t),$$

onde g é uma função real e contínua ([23], [24]). Mais ainda, se $X'(t)$ representa a derivada em probabilidade de $X(t)$, Definição 1.1.10, temos a identidade

$$\int_0^\infty g(t)X'(t)dt = \int_0^\infty g(t)dX(t).$$

Por integral estocástica no sentido da convergência em probabilidade entende-se o seguinte: considere a sequência de subdivisões do intervalo $[a, b]$:

$$\mathcal{P}_n : a = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,n} = b, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) = 0. \tag{1.1}$$

Em cada subintervalo $[t_{n,k-1}, t_{n,k}]$, escolha um ponto $t^*_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ tal que

$$t_{n,k-1} \leq t^*_{n,k} \leq t_{n,k}. \tag{1.2}$$

Seja $g(t)$ uma função contínua definida sobre $[a, b]$. Considere as somas de Riemann:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} g(t^*_{n,k})X(t^*_{n,k})(t_{n,k} - t_{n,k-1}) \quad \text{e}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} g(t^*_{n,k})(X(t_{n,k}) - X(t_{n,k-1})).$$

Se o limite em probabilidade de s_n e S_n existir (chame-os de s e S, respectivamente) e for o mesmo para todas as sequências $\mathcal{P}_n$ satisfazendo (1.1) e todas as escolhas dos pontos intermediários $t^*_{n,k}$ satisfazendo (1.2), então estes limites são chamados de integrais estocásticas e escrevemos

$$s = \int_a^b g(t)X(t)dt \quad \text{e} \quad S = \int_a^b g(t)dX(t). \tag{1.3}$$

Observe que se o limite em probabilidade, com $b \to \infty$, das integrais em (1.3) existir, então teremos definido as integrais impróprias

$$\int_a^{+\infty} g(t)X(t)dt \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} g(t)dX(t). \tag{1.4}$$

Para se definir a *Transformada de Laplace* do processo $X(t)$, basta tomar $a = 0$ e, para $s > 0$ fixo, a função $g(t) = e^{-st}$. Usaremos a notação usual

$$\mathcal{L}\{X\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} X(t)dt.$$

Observação: Sabemos que $X(t)$ possui incrementos independentes e estacionários e é contínuo em probabilidade. Se $g(t)$ for uma função contínua, então a integral $\displaystyle\int_0^t g(s)dX(s)$ está bem definida, [23].

A transformada de Laplace de um processo estável $X(t)$ goza das mesmas propriedades que a transformada de Laplace usual. O resultado abaixo trata disso.

Teorema 1.2.1. *Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ processos α-estáveis, com $X(t)$ diferenciável em probabilidade, f uma função contínua sobre $[0, \infty]$ e $k \in \mathbb{R}$.*

1) Se $\alpha \in (0, 2]$, então

1.1) $\mathcal{L}\{X + kY\}(s) = \mathcal{L}\{X\}(s) + k\mathcal{L}\{Y\}(s)$ e

1.2) $\mathcal{L}\{X'\}(s) = s\mathcal{L}\{X\}(s)$.

2) Se $\alpha \in (1, 2]$, então

2.1) $\mathcal{L}\{f * X\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{X\}(s)$ e

2.2) $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{X\}\}(t) = (f * X)(t)$.

Observações:

✓ No item (2.1), a operação "$*$" é a bem conhecida convolução; isto é,

$$(f * X)(t) = \int_0^t f(t-u)X(u)du.$$

✓ No item (2.2), $\mathcal{L}^{-1}\{f\}$ representa a transformada de Laplace inversa; ou seja, se $F(t)$ tem transformada de Laplace $f(s)$, então a transformada de Laplace inversa é definida como

$$\mathcal{L}^{-1}\{f\} = F.$$

Passemos à demonstração do Teorema 1.2.1.

Prova:

Para o item (1.1), a linearidade da transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{X + kY\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}[X(t) + kY(t)]dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}X(t)dt + k\int_0^{+\infty} e^{-st}Y(t)dt \\ &= \mathcal{L}\{X\}(s) + k\mathcal{L}\{Y\}(s). \end{aligned}$$

Para provar o item (1.2), faremos uma integração por partes. Considere

$$dv = X'(t)dt \text{ e } u = e^{-st}.$$

Como $X(t)$ é diferenciável em probabilidade, podemos interpretar $\int_0^t X'(s)ds = X(t)$; logo,

$$v = X(t) \text{ e } du = -se^{-st}dt.$$

Posto isso, temos que

$$\mathcal{L}\{X'\}(s) = \lim_{t\to\infty}[e^{-st}X(t)] - X(0) + s\int_0^{\infty} e^{-st}X(t)dt. \tag{1.5}$$

Precisamos calcular o limite acima. Para o caso $\alpha \in (0, 2)$, aplicamos o Teorema 1.1.4 com $h(t) = e^{st}$ e para o caso $\alpha = 2$, aplicamos o Teorema 1.1.5, obtendo, em ambas as situações,

$$\lim_{t\to\infty}[e^{-st}X(t)] = 0 \quad q.c.$$

Utilizando, em (1.5), esta informação e o fato de que $X(0) = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{X'\}(s) &= s\int_0^\infty e^{-st}X(t)dt \\ &= s\mathcal{L}\{X\}(s).\end{aligned}$$

O item (2.1) é conhecido, no caso determinístico, como teorema da convolução. Vejamos a sua demonstração.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f*X\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(f*X)(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\Big[\int_0^t f(t-u)X(u)du\Big]dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st}f(t-u)X(u)dudt. \qquad (1.6)\end{aligned}$$

Note que $0 \leq u \leq t$ e $0 \leq t < \infty$ se, e somente se, $0 \leq u < \infty$ e $u \leq t < \infty$. Logo, podemos reescrever (1.6) assim

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f*X\}(s) &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st}f(t-u)X(u)dtdu \\ &= \int_0^\infty X(u)\int_u^\infty e^{-st}f(t-u)dtdu. \qquad (1.7)\end{aligned}$$

Mostrando-se que o processo $e^{-st}f(t-u)X(u)$ é integrável, a troca na ordem de integração feita acima estará justificada. Observe que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^t |e^{-st}f(t-u)X(u)|dudt &= \int_0^\infty e^{-st}\Big(\int_0^t |f(t-u)||X(u)|du\Big)dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-st}\Big[\Big(\int_0^t |f(t-u)|^q du\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_0^t |X(u)|^p du\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]dt,\end{aligned}$$

onde a majoração foi obtida aplicando-se a desigualdade de Hölder à integral $\int_0^t |f(t-u)||X(u)|du$, com $1 \leq p < \alpha$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Agora,

i) o processo $X(t)$ é estável com índice de estabilidade α; logo, a integral $\int_0^t |X(u)|^p du$ é finita, [34];

ii) como a função f é contínua, a integral $\int_0^t |f(t-u)|^q du$ também é finita para cada $t \geq 0$.

Denotando o produto dessas duas integrais por M, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^t |e^{-st} f(t-u) X(u)| du dt &\leq M \int_0^\infty e^{-st} dt \\
&= \frac{M}{s},
\end{aligned}
$$

que é finito para cada $s \neq 0$. Justificada a troca na ordem de integração, voltemos a (1.7). Fazendo a mudança de variáveis $v = t - u$, obtemos a igualdade desejada:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f * X\}(s) &= \int_0^\infty X(u) \int_0^\infty e^{-s(v+u)} f(v) dv du \\
&= \int_0^\infty e^{-su} X(u) du \int_0^\infty e^{-sv} f(v) dv \\
&= \mathcal{L}\{f\}(s) \mathcal{L}\{X\}(s).
\end{aligned}
$$

O item (2.2) é verdadeiro, pois

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{X\}(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} X(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} X(\tau) f(u) du d\tau. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = u + \tau$ em (1.8), obtemos

$$\mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{X\}(s) = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} X(\tau) f(t-\tau) dt d\tau. \tag{1.9}$$

Se definirmos $f(s) = 0$, para $s < 0$, então $f(t-\tau) = 0$ se $t < \tau$ e assim podemos estender a integral com relação à t em (1.9), desde $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{X\}(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} X(\tau) f(t-\tau) dt d\tau \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} X(\tau) f(t-\tau) d\tau dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \Big[\int_0^\infty X(\tau) f(t-\tau) d\tau \Big] dt \\
&= \mathcal{L}\Big\{ \int_0^\infty X(\tau) f(t-\tau) d\tau \Big\} \\
&= \mathcal{L}\Big\{ \int_0^t X(\tau) f(t-\tau) d\tau \Big\}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Observe que a segunda igualdade acima foi obtida usando-se o mesmo argumento utilizado na demonstração do item (c), ou seja, basta mostrar que o processo $e^{-st}X(\tau)f(t-\tau)$ é integrável. A última igualdade vale devido à definição de $f(s)$ para valores negativos de s, ou seja, $f(t-\tau) = 0$, se $\tau > t$. Finalmente, aplicando a transformada de Laplace inversa nos dois membros da igualdade em (1.10), concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{X\}\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\Big\{ \int_0^t X(\tau) f(t-\tau) d\tau \Big\} \\
&= \int_0^t X(\tau) f(t-\tau) d\tau \\
&= (f * X)(t).
\end{aligned}$$

□

No próximo capítulo iniciaremos a nossa caminhada rumo à determinação de uma classe de soluções para a equação de Langevin generalizada.

CAPÍTULO 2

UMA CLASSE DE SOLUÇÕES PARA A ELG

Neste capítulo, o objeto de estudo é a equação de Langevin generalizada (ELG) e o objetivo principal é determinar uma classe de soluções para esta equação. Na primeira seção, começaremos discorrendo sobre um caso particular: a equação de Langevin clássica (ELC); aqui também, citaremos algumas datas e cientistas que contribuíram para o desenvolvimento da teoria e, finalmente, apresentaremos a formulação física da ELG e a formulação matemática pertinente para nossos propósitos (aquela em que o termo estocástico é um processo α-estável). Na Seção 2.2 serão expostas as tentativas frustradas e o porquê do insucesso de se determinar a solução do problema utilizando ferramentas provenientes das teorias de integração de Itô, integração com respeito à martingales e integração com respeito à semimartingales. Finalizando o capítulo, na Seção 2.3, motivados pela teoria das equações de Volterra determinísticas, reescreveremos a ELG em um formato especial (como uma equação de Volterra), enunciaremos e demonstraremos o Teorema 2.3.1, resultado que explicita a primeira de duas classes de soluções propostas para a ELG (a segunda classe será apresentada no

Capítulo 3). A demonstração deste resultado necessita, basicamente da transformada de Laplace para processos estáveis, ferramenta que foi definida no Capítulo 1. O interesse em estudar as equações de Langevin reside no fato de que essas equações modelam fenômenos físicos, químicos e biológicos importantes; em biologia molecular, por exemplo, a Langevin generalizada descreve o movimento do citoplasma bacteriano, [14]; em física nuclear a ELG descreve reações de fusão nuclear, [5], e no estudo de difusões anômalas, a ELC modela o crescimento de tumores, [25].

2.1 Um Pouco Sobre a História da Equação de Langevin

Comecemos com um pouco de história. O estudo do movimento estocástico de partículas imersas em algum fluido iniciou-se com o botânico escocês Robert Brown na primeira metade do século XIX. Brown observou o movimento incessante de partículas de pólen dissolvidas em água, isto é, observou o movimento que mais tarde receberia o seu nome: movimento Browniano. Este tipo de dinâmica foi estudada e apresentada com algum rigor, pela primeira vez, pelo o físico francês Paul Langevin em 1908 através da equação diferencial estocástica que posteriormente o homenagearia: a equação de Langevin; porém, o primeiro artigo científico publicado sobre o movimento Browniano, deve-se ao físico alemão Albert Einstein em 1905. No próximo parágrafo será apresentada a possibilidade mais simples no que tange à flutuações estocásticas.

Suponha que uma partícula de massa m esteja imersa em um líquido ou gás (ou em geral, em um fluido) e esteja sujeita a duas forças: a viscosidade do fluido, que será considerada proporcional à sua velocidade e uma força de caráter aleatório (podemos entender esta força como a resultante do bombardeio incessante das partículas do fluido) . A partícula deve ser pequena o suficiente para executar movimento Browniano e suficientemente grande quando comparada com as moléculas do fluido. Sob estas hipóteses e sob a luz da física, a forma mais simples de descrever o movimento desta partícula é dada pela ELC:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\alpha v(t) + R(t, w). \tag{2.1}$$

Nesta equação, $v(t)$ representa a velocidade da partícula, $\alpha > 0$ representa a viscosidade do fluido (ou coeficiente de fricção) e $R(t, w)$ representa a força aleatória. Assume-se que $R(t, w)$ satisfaz as seguintes condições:

(a) $R(t, w)$ é independente de $v(t)$;

(b) $R(t, w)$ é centrada e Gaussiana;

(c) $E[R(s)R(t)] = \delta(s - t)$, onde δ é a função delta de Dirac.

Note que se denotarmos $\gamma = \dfrac{\alpha}{m}$ e $\xi(t) = \dfrac{R(t)}{m}$, então podemos reescrever a equação (2.1) assim:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + \xi(t). \tag{2.2}$$

Observe que as condições (a), (b) e (c) acima continuam valendo. O processo $\xi(t)$ é comumente chamado de *ruído branco*.

Na tentativa de considerar situações mais realísticas, Ryogo Kubo e Hazime Mori propuseram, em 1965 e 1966, respectivamente, uma extensão natural da ELC, a ELG:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\int_{t_0}^{t} \gamma(t - s)v(s)ds + \xi(t),\ t > t_0, \tag{2.3}$$

onde $\gamma(t)$ é um "efeito retardado" da força de fricção, comumente chamado, nos dias de hoje, de "função memória" e $\xi(t)$ é uma força aleatória não correlacionada com a velocidade inicial $v(t_0)$.

Precisamos dar um tratamento matemático à ELG, a fim de estudar a existência de soluções. Primeiramente, podemos interpretar a força aleatória $\xi(t)$ supracitada, como a derivada (em algum sentido) do movimento Browniano; isto é,

$$\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt}.$$

A expressão "em algum sentido" faz-se necessária, pois esta derivada não existe no sentido usual; as trajetórias do movimento Browniano são não diferenciáveis quase certamente, mas são diferenciáveis no sentido das funções generalizadas, [2]. Considerando $t_0 = 0$ e $v(0) = 0$, podemos reescrever a ELG assim:

$$\begin{cases} dV(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)V(s)ds + dB(t) \\ V(0) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Este é um caso particular da equação diferencial estocástica que estudaremos neste trabalho, pois estaremos interessados em estudar esta equação quando o movimento Browniano é substituído por um processo α-estável.

A ELG como está escrita acima é, na verdade, uma forma compacta (chamada *forma diferencial*) de representar a seguinte equação integral:

$$V(t) = -\int_0^t \int_0^s \gamma(v-u)\, V(u)\, duds + B(t).$$

Integrais como a que aparece na forma diferencial (2.4) podem ser entendidas, trajetória por trajetória, como integrais de Riemann ou Lebesgue. Se o processo estocástico $V = \{V(t) : t \geq 0\}$ for mensurável e separável, definido em um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, [9], a integração pode ser entendida no sentido da convergência em média quadrática, [17], ou no sentido da convergência em probabilidade, [23].

Note que se $\gamma(t)$ for a função $\gamma\delta(t)$, onde γ é uma constante e δ é a função delta de Dirac, então a equação (2.4) torna-se a ELC:

$$\begin{cases} dV(t) = -\gamma V(t)dt + dB(t) \\ V(0) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

pois $\displaystyle\int_0^t \delta(t-s)V(s)ds = V(t)$.

No que diz respeito à existência e unicidade de soluções para a equação (2.5), existe uma vasta literatura ([2], [19], [30], [31]). Podemos encontrar a solução da ELC seguindo os seguintes passos: aplicando a fórmula de integração por partes (Teorema 1.1.2) ao processo $Y(t) = e^{\gamma t}V(t)$, obtemos

$$dY(t) = \gamma e^{\gamma t}V(t)dt + e^{\gamma t}dV(t).$$

Como $V(t)$ satisfaz (2.5), segue que

$$dY(t) = e^{\gamma t}dB(t);$$

isto é,

$$Y(t) = \int_0^t e^{\gamma s}dB(s).$$

Portanto, $V(t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dB(s)$ é solução do problema de valor inicial (2.5) (na verdade, esta é a única solução do problema, [30]).

Pensemos na ELG um pouco mais geral agora. D. Kannan e A. T. Bharucha-Reid mostraram em 1972, [15], que a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dV(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)V(s)ds + \int_0^t dM(s) \\ V(0) = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

possui uma única solução, onde $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ é uma martingale contínua tal que existe uma função não-decrescente $F(t)$, $t \geq 0$, com a propriedade de que, para $s < t$,

$$E[M(t) - M(s)]^2 = F(t) - F(s). \tag{2.7}$$

Note que na integral $\int_0^t dM(s)$ o integrador é uma martingale contínua para a qual vale a condição (2.7) (para o movimento Browniano padrão, tem-se $E[M(t)-M(s)]^2 = |t-s|$). Uma pergunta natural é: em qual sentido esta integral está definida? A condição (2.7) será satisfeita se $M(t)$ for um processo com incrementos ortogonais e como a integração com respeito a processos com incrementos ortogonais pode ser definida no sentido da convergência em média quadrática, [17], o problema está resolvido.

Outro questionamento que pode ser feito é: esta solução única garantida por Kannan e Reid em 1972 para a equação (2.6) pode ser exibida? No trabalho de 1972 a solução não é exibida, porém em 1977, D. Kannan teve outro trabalho publicado, [16], no qual uma forma fechada para a solução é dada. Neste artigo, o resultado que garante a existência e unicidade de soluções para a equação (2.3) é o seguinte:

Teorema 2.1.1. *Sejam $M \in \mathcal{L}[\mathbb{R}^+, L_2(\Omega)]$ e $\gamma \in \mathcal{L}_\infty[\mathbb{R}]^+, \mathbb{R}]$, onde $\mathcal{L}$ é o espaço de todas as funções localmente integráveis sobre $\mathbb{R}^+$ e assumindo valores em $L_2(\Omega)$ e $\mathcal{L}_\infty$ é o espaço de todas as funções reais essencialmente limitadas sobre $[0,T]$, para cada $T > 0$. Então existe uma única solução em média quadrática para o problema (2.6) sobre $[0,T]$, para cada $T > 0$.*

Perceba que a integral estocástica envolvida está sendo considerada no sentido da convergência em média quadrática. O resultado referente à forma da solução é:

Teorema 2.1.2. *Fixe um $T > 0$ arbitrário e suponha que valham as hipóteses do Teorema 2.1.1. Então, toda solução em média quadrática sobre $[0,T]$ do problema (2.6) satisfaz*

$$V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dM(s),$$

onde ρ é solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)\rho(s)ds \\ \rho(0) = 1. \end{cases}$$

Nossa proposta de estudo é analisar a existência e unicidade de soluções para o problema (2.6) quando o integrador for um processo que não tenha, necessariamente, segundo momento finito (a finitude do segundo momento foi uma hipótese assumida nos trabalhos citados). A escolha por processos estáveis para substituir a martingale $M(t)$ deve-se ao conteúdo do Capítulo 4; conteúdo este que consiste no estudo da convergência de determinadas séries aleatórias para integrais estocásticas da forma $\displaystyle\int_0^t f(t)dX(t)$, onde f será, por exemplo, uma função de L^p e $X(t)$ será um processo estável. Posto isso, a equação diferencial estocástica que nos interessa é

$$\begin{cases} dV(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)V(s)ds + dX(t) \\ V(0) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ é um processo estável e simétrico com índice de estabilidade α (ver Definição 1.1.7). Lembremo-nos que a ELG na sua forma integral é:

$$V(t) = -\int_0^t \int_0^u \gamma(u-s)V(s)dsdu + X(t). \tag{2.9}$$

Na próxima seção exporemos algumas tentativas, e fracassos, ao tentar encontrar explicitamente a solução do problema (2.8).

2.2 Tentativas para Determinar a Solução da ELG

Quando se trata de determinar uma solução explícita para uma equação diferencial estocástica (EDE), algumas abordagens podem ser feitas. Se a EDE for linear, ou seja, da forma

$$dY(t) = [\alpha(t) + \beta(t)Y(t)]dt + [\gamma(t) + \delta(t)Y(t)]dB(t), \tag{2.10}$$

onde as funções α, β, γ e δ são processos adaptados à filtragem usual e são funções contínuas de t e $B(t)$ é o movimento Browniano, podemos encontrar uma solução supondo que ela é da forma

$$Y(t) = U(t)V(t),$$

onde

$$\begin{cases} dU(t) = \beta(t)U(t)dt + \delta(t)U(t)dB(t) \\ U(0) = 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} dV(t) = a(t)dt + b(t)dB(t) \\ V(0) = Y(0), \end{cases}$$

e então escolher coeficientes $a(t)$ e $b(t)$ de forma que a igualdade $Y(t) = U(t)V(t)$ valha. Nesse caso, a solução é dada por, [19]:

$$Y(t) = U(t)\left[Y(0) + \int_0^t \frac{\alpha(s) - \delta(s)\gamma(s)}{U(s)}ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{U(s)}dB(s)\right]. \tag{2.11}$$

A ELC (2.5) é um caso particular de (2.10), basta tomar $\alpha(t) = \delta(t) = 0$, $\beta(t) = -\gamma$ e $\gamma(t) = 1$. Portanto, de (2.11), segue que a solução da equação de Langevin clássica é

$$Y(t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-u)}dB(u).$$

Havíamos encontrado esta solução na seção anterior via fórmula de integração por partes (Teorema 1.1.2).

Um questionamento natural é: esta técnica pode ser utilizada para encontrar uma solução para a ELG? Infelizmente, o caráter não-linear da ELG é um obstáculo, pois não é possível "separar as variáveis" e encontrar uma solução da forma

$$V(t) = X(t)Y(t).$$

As referências [8], [19] e [31], por exemplo, trazem outra abordagem no que diz respeito à integração estocástica. Nessas obras, a integração é realizada com respeito às semimartingales (objeto matemático que será definido a seguir). Visto que um processo α-estável é uma semimartingale, há interesse em estudar a ELG sob a luz desta teoria e verificar se os resultados apresentados proporcionam alguma ferramenta que permita explicitar uma solução para a ELG.

Faremos a partir de agora uma breve explanação sobre este aparato (não a fizemos no capítulo de preliminares por entender que a conexão seria perdida). Comecemos com a definição de semimartingale.

Definição 2.2.1. *Um processo adaptado e contínuo pela direita com limites à esquerda (càdlàg) é uma semimartingale se pode ser representado como uma soma de dois processos: uma martingale local $M(t)$ e um processo de variação finita $A(t)$ (Definição 1.1.1).*

Para que um processo adaptado $M(t)$ possa ser chamado de martingale local, deve existir uma sequência de tempos de parada τ_n, tal que $\tau_n \uparrow \infty$ e para cada n o processo $M(t \wedge \tau_n)$ (chamado processo de parada) é uma martingale uniformemente integrável em t, isto é, se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t} E(|M(t)|I(|M(t)| > n)) = 0,$$

onde o supremo é tomado em $[0, \infty)$.

Não entraremos em detalhes sobre como a integração com respeito às semimartingales é definida, pois seria necessária uma seção para tal proposta, e fugiríamos do enfoque principal: quais ferramentas desta teoria podemos utilizar para resolver a ELG? Sucintamente, visto que uma semimartingale $S(t)$ é um processo tal que

$$S(t) = M(t) + A(t),$$

onde $M(t)$ é uma martingale local e $A(t)$ é um processo de variação finita, então, a integral com respeito a $S(t)$ é a soma de duas integrais, uma com respeito a $M(t)$ e outra com respeito a $A(t)$. A integral com respeito a $A(t)$ pode ser vista, trajetória por trajetória, como uma integral de Stieltjes; a integral com respeito a $M(t)$ é mais delicada. Uma condição *sine qua non* nas bibliografias já citadas para se definir a integração com respeito à semimartingales, é que a martingale $M(t)$ seja uma martingale quadrado integrável, ou seja,

$$E(M^2(t)) < \infty, \forall t \geq 0.$$

Essa exigência frustra nossos propósitos, pois estamos trabalhando com processos α-estáveis e tais processos não têm, necessariamente, segundo momento finito. De qualquer forma, esta teoria também possui a sua fórmula de Itô e como consequência dela, um resultado, [31], que explicita a solução da seguinte equação diferencial estocástica:

$$X(t) = \int_0^t X(s)dZ(s) + H(t),$$

onde $H(t)$ é um processo adaptado e com trajetórias càdlàg e $Z(t)$ é uma semimartingale contínua. Esta equação está longe de poder ser identificada com a ELG (2.8) e a tentativa de adaptar a demonstração do resultado supracitado para a ELG foi frustrada, pois a técnica utilizada foi a de assumir que a solução é da forma $X(t) = C(t)U(t)$ e utilizar a fórmula de Itô. Devido ao caráter não-linear da ELG, esta técnica não funciona; sem contar o fato de que $H(t)$ não tem, necessariamente, segundo momento finito, o que nos impede de aplicar a fórmula de Itô.

Caminhando no sentido de encontrar uma forma fechada para a solução da ELG, recorremos à definição proposta por Medino, A. V., [24], para a solução do problema (2.8), quando a ELG é governada por um processo $L(t)$ contínuo em probabilidade, com incrementos estacionários e independentes e satisfazendo $L(0) = 0$ quase certamente. A definição é a seguinte:

Definição 2.2.2. *Seja $V = \{V(t) : t \geq 0\}$ um processo estocástico e $\rho = \{\rho(t) : t \geq 0\}$ uma função determinística. Diremos que o par (V, ρ) representa uma solução da ELG se V é dado por*

$$V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dL(s)$$

e a função ρ satisfaz à equação íntegro-diferencial determinística

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)\,\rho(s)\,ds \\ \rho(0) = 1. \end{cases}$$

Motivados por esta definição, apresentamos agora, uma conjectura envolvendo uma classe de processos-solução para a ELG que é mais restrita do que a classe apresentada na definição anterior.

Conjectura: Se $X(t)$ é um processo α-estável e $\gamma(t)$ é integrável, então o processo

$$V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dX(s)$$

é solução da ELG, onde a função ρ satisfaz à equação íntegro-diferencial determinística

$$
\begin{cases}
\rho'(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)\,\rho(s)\,ds \\
\rho(0) = 1.
\end{cases}
$$

Na próxima seção veremos que a teoria envolvendo um tipo especial de equação de Volterra nos deu subsídios para mostrar que esta conjectura se concretiza. Entretanto, poderão haver restrições quanto ao intervalo de existência do índice de estabilidade.

2.3 A Equação de Volterra Estocástica

Depois de caminhar no sentido de determinar a solução da ELG utilizando as ferramentas anteriores, a teoria das equações integrais nos forneceu a esperança necessária para fazer mais uma tentativa. A proposta otimista reside no fato de que equações integrais da forma

$$
y(t) = \varphi(t) - \int_0^t K(t-s)y(s)ds, \tag{2.12}
$$

possuem uma forma fechada para a sua solução. A equação (2.12) pertence a uma classe de equações integrais chamada "Equações integrais de Volterra do segundo tipo"; em particular, a equação (2.12) recebe o nome de "Equação de renovação" ou "Equação de Ciclo Fechado". Estes nomes devem-se ao operador $L_t(\varphi(s)) \equiv \displaystyle\int_{-\infty}^t K(t,s)\varphi(s)ds$. Este operador transforma qualquer função $\varphi(s)$ com período L em outra função periódica com o mesmo período L se, e somente se, $K(t,s)$ é do tipo $K(t-s)$.

Equações da forma (2.12) podem ser resolvidas, por exemplo via transformada de Laplace, e sua solução pode ser explicitada sem a dependência desta transformada. Além disso, o fato mais importante, é que a ELG pode ser reescrita no mesmo formato que a equação (2.12). Vejamos como fazer isso. A ELG é

$$V(t) = -\int_0^t \int_0^u \gamma(u-s)V(s)dsdu + X(t).$$

Trocando a ordem de integração na igualdade anterior obtemos

$$V(t) = \int_0^t \left[-\int_s^t \gamma(u-s)du \right] V(s)ds + X(t). \tag{2.13}$$

Definindo

$$-\int_s^t \gamma(u-s)du := K_t(s), \tag{2.14}$$

a equação (2.13) torna-se

$$V(t) = \int_0^t K_t(s)V(s)ds + X(t). \tag{2.15}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $r = u - s$ em (2.14), temos que

$$-\int_s^t \gamma(u-s)du = -\int_0^{t-s} \gamma(r)dr,$$

ou seja, a função $K_t(s)$ definida anteriormente só depende do comprimento do intervalo $[s,t]$, o que justifica escrever

$$K(t-s) = -\int_s^t \gamma(u-s)du. \tag{2.16}$$

Posto isso, reescrevemos (2.15) assim:

$$V(t) = \int_0^t K(t-s)V(s)ds + X(t) \tag{2.17}$$

e, para cada $w \in \Omega$ fixo, a equação (2.17) é então uma equação do tipo renovação e a função $K(t-s)$ é chamada de *Núcleo de Volterra*.

Algumas linhas atrás dissemos que escrever a ELG no formato (2.17) seria vantajoso devido à vasta literatura que trata das equações integrais ([6], [35], [36]). Vamos então, a partir de agora, determinar uma solução para a ELG. O próximo resultado tem como objetivo estabelecer uma classe de soluções para o problema. Além disso, a solução dada por este teorema coincide com a conjectura motivada pela proposta de solução dada por Medino, A. V. em [24].

Teorema 2.3.1. *Sejam $X(t)$ um processo α-estável, com índice de estabilidade $\alpha \in (1,2]$, definido sobre $\Omega \times [0,T]$ e $K(t-s)$ um núcleo de Volterra contínuo definido sobre $[0,T] \times [0,T]$, com $T > 0$. Então, o processo*

$$V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dX(s), \tag{2.18}$$

é solução da ELG, onde

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)\,\rho(s)\,ds \\ \rho(0) = 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Prova:

Fixe $w \in \Omega$. Fazendo isso, estamos trabalhando com as trajetórias de $X(t)$, ou seja, funções determinísticas de t. Para este w fixo considere a ELG (que pode ser vista como uma equação de Volterra do segundo tipo):

$$V(t) = \int_0^t K(t-s)V(s)ds + X(t). \tag{2.20}$$

Considere a "equação auxiliar"

$$\rho(t) = 1 + \int_0^t K(t-s)\rho(s)ds. \tag{2.21}$$

Se a função $\rho(t)$ é solução da equação (2.21), então uma solução de (2.20) é dada por

$$V(t) = \int_0^t \rho(t-s)X'(s)ds. \tag{2.22}$$

Vamos mostrar isso. Aplicando a transformada de Laplace nos dois membros de (2.20) e utilizando as propriedades (1.1) e (2.1), respectivamente, do Teorema 1.2.1, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{V\}(s) &= \mathcal{L}\{X\}(s) + \mathcal{L}\{K * V\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{X\}(s) + \mathcal{L}\{K\}(s)\mathcal{L}\{V\}(s).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{V\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{X\}(s)}{1 - \mathcal{L}\{K\}(s)}. \tag{2.23}$$

Aplicando a transformada de Laplace nos dois membros de (2.21), utilizando as propriedades (1.1) e (2.1), respectivamente, do Teorema 1.2.1 e lembrando que $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\rho\}(s) &= \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{K * \rho\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{K\}(s)\mathcal{L}\{\rho\}(s).\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\mathcal{L}\{\rho\}(s) = \frac{1}{s[1 - \mathcal{L}\{K\}(s)]}. \tag{2.24}$$

De (2.23), (2.24) e da propriedade (1.2) do Teorema 1.2.1, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}\{V\}(s)}{\mathcal{L}\{\rho\}(s)} &= \frac{s[1 - \mathcal{L}\{K\}(s)]\mathcal{L}\{X\}(s)}{1 - \mathcal{L}\{K\}(s)} \\ &= s\mathcal{L}\{X\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{X'\}(s);\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{V\}(s) = \mathcal{L}\{\rho\}(s)\mathcal{L}\{X'\}(s).$$

Finalmente, aplicando a propriedade (2.2) do Teorema 1.2.1 na igualdade anterior, resulta que

$$V(t) = \int_0^t \rho(t-s)X'(s)ds;$$

ou seja, $V(t)$ tem a forma (2.22). Agora, se $X(t)$ for um processo diferenciável em probabilidade, então podemos interpretar $X'(s)ds$ como $dX(s)$ e reescrever a última igualdade assim

$$V(t)=\int_0^t \rho(t-s)dX(s).$$

Resta mostrar que a função $\rho(t)$ satisfaz a equação (2.21) se, e somente se, satisfaz a equação (2.19). Suponha que $\rho(t)$ satisfaz (2.19). Integrando os dois membros sobre o intervalo $[0,t]$, obtemos

$$\int_0^t \rho'(s)ds=-\int_0^t\left[\int_0^u \gamma(u-s)\rho(s)ds\right]du;$$

ou seja,

$$\rho(t)=1+\int_0^t\left[-\int_s^t \gamma(u-s)du\right]\rho(s)ds.$$

Lembrando da igualdade em (2.16), concluímos que

$$\rho(t)=1+\int_0^t K(t-s)\rho(s)ds.$$

Suponha agora, que $\rho(t)$ satisfaz (2.21). Faça $\Psi(t,s):=K(t-s)\rho(s)$. Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,s) &= \frac{\partial}{\partial t}[K(t-s)\rho(s)]\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[-\int_s^t \gamma(u-s)du\right]\rho(s)\right\}\\
&= \rho(s)\frac{\partial}{\partial t}\left[-\int_s^t \gamma(u-s)du\right]\\
&= -\rho(s)\gamma(t-s). \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Dessa forma, utilizando a relação $\frac{d}{dt}\left[\int_0^t \Psi(t,s)ds\right]=\Psi(t,t)+\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,s)\right]ds$, e utilizando as igualdades $\Psi(t,t)=0$ e (2.25), podemos estabelecer as seguintes igualdades

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t K(t-s)\rho(s)ds \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^t \Psi(t,s)ds \\
&= \Psi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,s)ds \\
&= -\int_0^t \gamma(t-s)\rho(s)ds. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

Naturalmente $\rho(0) = 1$ e por (2.26) concluímos que $\rho'(t) = -\int_0^t \gamma(t-s)\rho(s)ds$, como queríamos.

$\square$

Observações:

✓ Considere os seguintes resultados, contidos em [1], p. 342:

"Sejam f e g funções contínuas sobre $(0, \infty)$. Se f e g tem a mesma transformada de Laplace, então $f(t) = g(t)$ para todo $t > 0$."

"Seja $f \in L^1(-\infty, \infty)$. Se existe um ponto $t \in \mathbb{R}$ e um intervalo $I = [t-\delta, t+\delta]$, para $\delta > 0$, tal que f seja de variação limitada sobre I, então para cada $a > 0$, vale a *fórmula de inversão para a transformada de Laplace*:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t}\mathcal{L}\{f\}(v)dv.''$$

Se pudermos adaptar estes teoremas para os nossos fins, isto é, para $X(t)$ e $Y(t)$ α-estáveis (que são contínuos em probabilidade), então o procedimento utilizado na demonstração anterior garante que o processo $V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dX(s)$ é solução da ELG, sem a necessidade de fazer a inspeção.

✓ A verificação de que (2.18) satisfaz a ELG foi feita e o procedimento será descrito a seguir.

Note que

$$\begin{aligned} A(t) &:= \int_0^t K(t-s)V(s)ds \\ &= \int_0^t \left[\int_0^s \rho(s-u)dX(u)\right] K(t-s)ds. \end{aligned}$$

Trocando a ordem de integração na última igualdade, obtemos

$$A(t) = \int_0^t \left[\int_u^t K(t-s)\rho(s-u)ds\right] dX(u). \tag{2.27}$$

Vamos trabalhar um pouco com a integral entre colchetes. Fazendo a mudança de variáveis $v = s-u$ em

$$C(t,u) := \int_u^t K(t-s)\rho(s-u)ds,$$

obtemos

$$C(t,u) = \int_0^{t-u} K(t-u-v)\rho(v)dv.$$

Por (2.21), a igualdade anterior fica assim

$$C(t,u) = \rho(t-u) - 1.$$

Substituindo esta última igualdade em (2.27), concluímos que

$$
\begin{aligned}
A(t) &= \int_0^t [\rho(t-u)-1]dX(u) \\
&= \int_0^t \rho(t-u)dX(u) - \int_0^t dX(u) \\
&= \int_0^t \rho(t-u)dX(u) - X(t) \\
&= V(t) - X(t).
\end{aligned}
$$

A última igualdade mostra que o processo em (2.18) é solução da ELG.

✓ Podemos também, mostrar indiretamente que (2.18) é solução da ELG. No Capítulo 3, o Teorema 3.1.1 nos dá uma outra classe de soluções para a ELG, e a verificação de que esta classe de fato satisfaz a ELG foi feita via inspeção. O Teorema 3.2.1 garante que esta nova classe coincide com a classe dada pelo Teorema 2.3.1; logo, mostramos (sem a necessidade da inspeção) que $V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dX(s)$ é mesmo solução da ELG.

Exemplo 2.3.1. *Considere a equação* $V(t) = -\beta \int_0^t V(s)ds + X(t)$, *com* $X(t)$ *é um processo* α*-estável com índice de estabilidade* $\alpha \in (1,2]$. *Pelas construções feitas para reescrever a ELG na forma de uma equação de Volterra, concluímos que* $\gamma(t) = \beta\delta(t)$, *onde* $\delta(t)$ *é a função delta de Dirac. Dessa forma,* $\rho(t) = e^{-\beta t}$ *e então, pelo Teorema 2.18, a solução da equação dada é* $V(t) = \int_0^t e^{-\beta(t-s)}dX(s)$.

Quando $X(t)$ *é o movimento Browniano, a equação dada é a equação de Langevin clássica e a sua solução pode ser determinada via fórmula de integração por partes (Teorema 1.1.2).*

No próximo capítulo apresentaremos a solução da ELG em um outro formato; sem a dependência da função $\rho(t)$. Porém, esta solução também só existe quando o índice de estabilidade do processo $X(t)$ pertence ao intervalo $(1,2]$. Inevitavelmente, uma pergunta deve ser feita: as classes de soluções para a ELG coincidem? A resposta será dada na Seção 3.2.

CAPÍTULO 3

UMA SEGUNDA CLASSE DE SOLUÇÕES PARA A ELG

Como já havíamos antecipado, neste capítulo apresentaremos uma nova classe de soluções para a ELG; esta nova proposta foi motivada, particularmente, por um resultado devido à Bharucha-Reid contido em seu livro *Random Integral Equations*, [4]. O novo formato de solução difere daquele apresentado no capítulo anterior, pois esta nova classe não carrega consigo o vínculo com um problema de valor inicial. Na Seção 3.1 apresentaremos tal solução e provaremos que ela é, de fato, solução da ELG. Para cumprir esta tarefa precisaremos de três lemas envolvendo um objeto que ainda não foi explorado neste trabalho: o *núcleo resolvente.* Os lemas mostrarão, entre outras coisas, a relação estreita entre o núcleo de Volterra $K(t-s)$ e o núcleo resolvente (Lema 3.1.2). Finalizando o capítulo, na Seção 3.2, mostraremos que as duas classes de soluções propostas são iguais e para tal fim utilizaremos novamente a transformada de Laplace para processos estáveis.

3.1 Uma Nova Classe de Soluções para a ELG

O núcleo de Volterra pode ser utilizado para definir uma outra função, chamada núcleo resolvente (que denotaremos por $\Gamma(t-s)$), da seguinte maneira:

$$\Gamma(t-s) := -\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(t-s), \tag{3.1}$$

onde os *Núcleos Iterados* $K^{(n)}(t-s)$ são obtidos, via recorrência, assim:

$$K^{(1)}(t-s) = K(t-s)$$

$$K^{(n)}(t-s) = \int_0^t K^{(n-1)}(t-z)K(z-s)dz, \ \ n \geq 2.$$

Definido o núcleo resolvente, passemos à apresentação da nova classe de soluções para a ELG. Embora haja a limitação do índice de estabilidade α estar confinado em $(1,2]$, o próximo resultado nos dá condições para que possamos explicitar a solução da Langevin generalizada, escrita na forma (2.17), sem a dependência da equação íntegro-diferencial (2.19).

Teorema 3.1.1. *Seja $K(t-s)$ um núcleo de Volterra definido sobre $[0,T]\times[0,T]$, com a propriedade $t\max_{s\leq t}|K(t-s)| < 1$. Se $X(t)$ é um processo estável, com índice de estabilidade $\alpha \in (1,2]$, definido sobre $\Omega\times[0,T]$, então o processo*

$$V(t) = -\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds + X(t) \tag{3.2}$$

é solução da ELG, onde $\Gamma(t-s)$ é o núcleo resolvente do núcleo de Volterra $K(t-s)$.

Para evitar que a demonstração do Teorema 3.1.1 fique demasiadamente longa, usaremos três lemas. Primeiramente mostraremos que a série que define o núcleo resolvente é convergente.

Lema 3.1.1. *Se $\Gamma(t-s)$ e $K(t-s)$ são como no Teorema 3.1.1, então o núcleo resolvente está bem definido.*

Prova:

Note que

$$
\begin{aligned}
K^{(1)}(t-s) &= K(t-s) \\
&\leq \max_{s\leq t} |K(t-s)|.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^{(2)}(t-s) &= \int_0^t K(t-z)K(z-s)dz \\
&\leq t\left(\max_{s\leq t}|K(t-s)|\right)^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^{(3)}(t-s) &= \int_0^t K^{(2)}(t-z)K(z-s)dz \\
&\leq t^2\left(\max_{s\leq t}|K(t-s)|\right)^3.
\end{aligned}
$$

Indutivamente, temos que

$$
K^{(n)}(t-s) \leq \max_{s\leq t}|K(t-s)|\left(t\max_{s\leq t}|K(t-s)|\right)^{n-1}, \quad n \geq 1.
$$

Como, por hipótese, $t \max_{s \leq t} |K(t-s)| < 1$, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(t-s)$ converge uniformemente quando comparada com a série geométrica. Portanto, o núcleo resolvente $\Gamma(t-s)$ está bem-definido.

$\square$

O próximo lema mostra uma importante relação envolvendo os núcleos de Volterra e resolvente.

Lema 3.1.2. *Se $\Gamma(t-s)$ e $K(t-s)$ são como nas hipóteses do Teorema 3.1.1, então vale a relação*

$$\Gamma(t-s) + K(t-s) - \int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)dz = 0.$$

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(t-s) + K(t-s) - \int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)dz = &-\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(t-s) + K^{(1)}(t-s) \\ &- \int_0^t K(t-z)\left(-\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(z-s)\right)dz.\end{aligned}$$

O Lema 3.1.1 garante que a série $-\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(t-s)$ é uniformemente convergente, logo podemos permutar o somatório com o sinal de integral no último termo do segundo membro da igualdade anterior e obter

$$\begin{aligned}\Gamma(t-s) + K(t-s) - \int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)dz = &-\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(t-s) + K^{(1)}(t-s) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t K^{(n)}(t-z)K(z-s)dz\right). \quad (3.3)\end{aligned}$$

Sabemos que $\int_0^t K^{(n)}(t-z)K(z-s)dz = K^{(n+1)}(t-s)$; dessa forma, (3.3) fica assim

$$
\begin{aligned}
\Gamma(t-s)+K(t-s)-\int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)dz &= -\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(t-s)+K^{(1)}(t-s)+\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n+1)}(t-s)\\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n+1)}(t-s)+\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n+1)}(t-s)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

o que encerra a demonstração.

□

No próximo e último lema, veremos sob quais condições o processo $K(t-z)\Gamma(z-s)X(s)$ é integrável; esta informação será imprescindível na demonstração do Teorema 3.1.1.

Lema 3.1.3. *Se $K(t-s)$, $\Gamma(t-s)$ e $X(t)$ são como nas hipóteses do Teorema 3.1.1, então o processo $K(t-z)\Gamma(z-s)X(s)$ é integrável.*

Prova:

Basta mostrar que $\displaystyle\int_0^t\int_0^t |K(t-z)\Gamma(z-s)X(s)|dsdz<\infty$. Observe que

$$
\int_0^t\int_0^t |K(t-z)\Gamma(z-s)X(s)|dsdz=\int_0^t |K(t-z)|\left\{\int_0^t |\Gamma(t-s)X(s)|ds\right\}dz. \tag{3.4}
$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder com $p=q=2$ ao segundo membro de (3.4), obtemos

$$
\int_0^t\int_0^t |K(t-z)\Gamma(z-s)X(s)|dsdz\leq\left(\int_0^t |K(t-z)|^2dz\right)^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^t\left(\int_0^t |\Gamma(t-s)X(s)|ds\right)^2 dz\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}
$$

Como $t\max\limits_{s\leq t}|K(t-s)|<1$, então $\displaystyle\int_0^t |K(t-z)|^2dz<\infty$. Quanto à integral $\displaystyle\int_0^t |\Gamma(t-s)X(s)|ds$, podemos aplicar a desigualdade de Hölder novamente, com $1\leq p<\alpha$ e q satisfazendo $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, obtendo

$$\int_0^t |\Gamma(t-s)X(s)|ds \leq \left(\int_0^t |\Gamma(t-s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t |X(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.6}$$

Agora, pelo Lema 3.1.1, temos que $\displaystyle\int_0^t |\Gamma(t-s)|^q ds < \infty$. Além disso, o processo $X(t)$ é estável com índice de estabilidade $\alpha \in (1,2]$, logo $\displaystyle\int_0^t |X(s)|^p ds < \infty$, desde que $1 \leq p < \alpha$. Dessa forma, voltando à desigualdade (3.6), concluímos que

$$\int_0^t |\Gamma(t-s)X(s)|ds < \infty. \tag{3.7}$$

Retornando à (3.5) e utilizando a informação em (3.7), obtemos

$$\int_0^t \int_0^t |K(t-z)\Gamma(z-s)X(s)|dsdz < \infty,$$

o que encerra a demonstração.

□

Encerrada a tarefa de demonstrar estes três lemas, podemos agora, demonstrar o Teorema 3.1.1.

Prova: **(Teorema 3.1.1)**

Do Lema 3.1.2, sabemos que

$$\Gamma(t-s) + K(t-s) - \int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)dz = 0.$$

Multiplicando a igualdade anterior por $X(s)$ e integrando sobre o intervalo $[0,t]$ temos

$$\int_0^t X(s)\left[\Gamma(t-s)+K(t-s)-\int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)dz\right]ds=0;$$

ou seja,

$$\int_0^t K(t-s)X(s)ds+\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds-\int_0^t\left[\int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)X(s)dz\right]ds=0.$$

O Lema 3.1.3 garante que ordem de integração na integral dupla da igualdade anterior pode ser trocada. Fazendo isso, obtemos

$$\int_0^t K(t-s)X(s)ds+\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds-\int_0^t\left[\int_0^t K(t-z)\Gamma(z-s)X(s)ds\right]dz=0.$$

Promovendo a mudança de variáveis $s=z$ na primeira integral da igualdade anterior, vem que

$$\int_0^t K(t-z)X(z)dz-\int_0^t K(t-z)\left[\int_0^t \Gamma(z-s)X(s)ds\right]dz=-\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds;$$

isto é,

$$\int_0^t K(t-z)\left[X(z)-\int_0^t \Gamma(z-s)X(s)ds\right]dz=-\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds.$$

Por (3.2), $V(t)=X(t)-\displaystyle\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds$; logo, a igualdade anterior fica assim

$$\int_0^t K(t-z)V(z)dz=-\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds.$$

Somando e subtraindo $X(t)$ no segundo membro da relação acima e usando novamente (3.2), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t K(t-z)V(z)dz &= X(t) - \int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds - X(t) \\
&= V(t) - X(t).
\end{aligned}
$$

A última igualdade nos garante que $V(t) = X(t) + \int_0^t K(t-z)V(z)dz$. Portanto, o processo $V(t)$ em (3.2) é solução da ELG.

$\square$

Vejamos dois exemplos de aplicação deste resultado. Note que, no primeiro deles, a maior dificuldade é determinar o núcleo resolvente.

Exemplo 3.1.1. *Considere a equação* $V(t) = -\int_0^t V(s)ds + X(t)$ *sobre* $[0,1]$. *Aqui,* $X(t)$ *é um processo* α*-estável, com índice de estabilidade* $\alpha \in (1,2]$ *e o núcleo de Volterra é dado por*

$$
K(t-s) = \begin{cases} -1, & se \;\; s \le t \\ 0, & se \;\; s > t. \end{cases}
$$

Note que a condição $t \max_{s \le t} |K(t-s)| < 1$ *está satisfeita para* $t \in [0,1]$. *Precisamos determinar o núcleo resolvente* $\Gamma(t-s)$. *Observe que*

$$
K^{(1)}(t-s) = K(t-s).
$$

$$
\begin{aligned}
K^{(2)}(t-s) &= \int_0^t K(t-z)K(z-s)dz \\
&= \int_s^t 1dz, \ \ s \leq t \\
&= t-s, \ \ s \leq t.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^{(3)}(t-s) &= \int_0^t K^{(2)}(t-z)K(z-s)dz \\
&= -\int_s^t (t-z)dz, \ \ s \leq t \\
&= -\frac{(t-s)^2}{2!}, \ \ s \leq t.
\end{aligned}
$$

Indutivamente, temos que

$$
K^{(n)}(t-s) = \frac{(-1)^n (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, \ \ s \leq t.
$$

Portanto, o núcleo resolvente é dado por

$$
\begin{aligned}
\Gamma(t-s) &= -\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(t-s) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \begin{cases} e^{-(t-s)}, & se \ \ s \leq t \\ 0, & se \ \ s > t. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o Teorema 3.1.1, nos garante que a solução da equação dada é

$$
V(t) = -\int_0^t e^{-(t-s)} X(s)ds + X(t).
$$

Exemplo 3.1.2. *Considere a equação do exemplo anterior, mas com o núcleo de Volterra dado por*

$$K(t-s) = \begin{cases} -\gamma, & se \ \ s \leq t \\ 0, & se \ \ s > t, \end{cases}$$

com $\gamma > 0$. *Neste caso, o núcleo resolvente é:*

$$\Gamma(t-s) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma(t-s)}, & se \ \ s \leq t \\ 0, & se \ \ s > t. \end{cases}$$

Se considerarmos $X(t)$ *como sendo o movimento Browniano* $B(t)$, *então a equação dada é, na verdade, a equação de Langevin clássica e o Teorema 3.1.1 nos diz que a sua solução é dada por* $V(t) = -\gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} B(s) ds + B(t)$, *desde que* $t \in \left[0, \frac{1}{\gamma}\right]$. *Esta solução não é, a princípio, igual à solução encontrada no Exemplo 2.3.1, pág. 55. Porém, uma simples aplicação da fórmula de Itô (Teorema 1.1.1) à função* $f(t,x) = e^{\gamma t} x$, *fornece a igualdade:*

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dB(s) = -\gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} B(s) ds + B(t);$$

ou seja, as soluções são iguais.

O caso $\alpha = 2$, isto é, quando $X(t)$ é o movimento Browniano não é privilegiado neste sentido; veremos na próxima seção que as soluções da ELG dadas pelos Teoremas 2.3.1 e 3.1.1 coincidem.

3.2 As Classes Coincidem

No final do Capítulo 2 uma pergunta foi feita: as soluções para a ELG dadas por (2.18) e (3.2) são iguais? O Exemplo 3.1.2 nos deu indícios de que a resposta seria afirmativa, pelo menos para o caso $\alpha = 2$. Tendo em mãos a transformada de Laplace para processos estáveis e a igualdade do Lema 3.1.2, temos ferramentas suficientes para mostrar que as classes coincidem. Vamos ao resultado:

Teorema 3.2.1. *Seja $K(t-s)$ um núcleo de Volterra definido sobre $[0,T] \times [0,T]$, contínuo em t e tal que $t \max_{s \leq t} |K(t-s)| < 1$. Se $X(t)$ definido sobre $\Omega \times [0,T]$ é um processo estável, com índice de estabilidade $\alpha \in (1,2]$, então as soluções da ELG, (2.18) e (3.2), são iguais.*

Prova:

Se (3.2) é solução da ELG, então

$$X(t) - \int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds = X(t) - \int_0^t K(t-s)V(s)ds.$$

Logo,

$$\int_0^t \Gamma(t-s)X(s)ds = \int_0^t K(t-s)V(s)ds. \tag{3.8}$$

Aplicando a transformada de Laplace aos dois membros de (3.8) e usando o Teorema 1.2.1, item (2.1), obtemos

$$\mathcal{L}\{\Gamma\}(s)\mathcal{L}\{X\}(s) = \mathcal{L}\{K\}(s)\mathcal{L}\{V\}(s);$$

e então,

$$\mathcal{L}\{V\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{\Gamma\}(s)}{\mathcal{L}\{K\}(s)}\mathcal{L}\{X\}(s). \tag{3.9}$$

Considere a equação auxiliar

$$\rho(t) = 1 - \int_0^t K(t-s)\rho(s)ds.$$

Aplicando a transformada de Laplace aos dois membros da igualdade acima e recorrendo ao Teorema 1.2.1, item (2.1), segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\rho\}(s) &= \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{K * \rho\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{K\}(s)\mathcal{L}\{\rho\}(s).\end{aligned}$$

Como consequência da igualdade anterior, depreende-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\rho\}(s) &= \frac{\mathcal{L}\{1\}}{1 + \mathcal{L}\{K\}(s)} \\ &= \frac{\mathcal{L}\{1\}}{\mathcal{L}\{K\}(s)} \frac{\mathcal{L}\{K\}(s)}{[1 + \mathcal{L}\{K\}(s)]}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Lembremo-nos que o Lema 3.1.2 garante a validade da igualdade

$$\Gamma(t-z) - K(t-z) + \int_0^t K(t-s)\Gamma(s-z)ds = 0.$$

Fazendo $z = 0$, aplicando a transformada de Laplace aos dois membros da igualdade acima e utilizando o Teorema 1.2.1, item (2.1), temos que

$$\mathcal{L}\{\Gamma\}(s) - \mathcal{L}\{K\}(s) + \mathcal{L}\{K\}(s)\mathcal{L}\{\Gamma\}(s) = 0;$$

isto é,

$$\mathcal{L}\{\Gamma\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{K\}(s)}{1+\mathcal{L}\{K\}(s)}. \tag{3.11}$$

Agora, substituindo (3.11) em (3.10), obtemos

$$\mathcal{L}\{\rho\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{1\}\mathcal{L}\{\Gamma\}(s)}{\mathcal{L}\{K\}(s)};$$

ou seja,

$$\frac{\mathcal{L}\{\Gamma\}(s)}{\mathcal{L}\{K\}(s)} = \frac{\mathcal{L}\{\rho\}(s)}{\mathcal{L}\{1\}}. \tag{3.12}$$

Finalmente, substituindo (3.12) em (3.9), concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{V\}(s) &= \frac{\mathcal{L}\{\rho\}(s)}{\mathcal{L}\{1\}}\mathcal{L}\{X\}(s) \\
&= s\mathcal{L}\{\rho\}(s)\mathcal{L}\{X\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{\rho\}(s)[\mathcal{L}\{X'\}(s) + X(0)] \\
&= \mathcal{L}\{\rho\}(s)\mathcal{L}\{X'\}(s). \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

A segunda igualdade vale, pois $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$. A terceira igualdade foi obtida aplicando-se o Teorema 1.2.1, item (1.2) à $s\mathcal{L}\{X\}(s)$. Para concluir a demonstração, vamos aplicar novamente o Teorema 1.2.1, item (2.2), à igualdade (3.13) e obter

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{V\}\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\rho\}\mathcal{L}\{X'\}\}(t) \\
&= (\rho * X')(t) \\
&= \int_0^t \rho(t-s)X'(s)ds \\
&= \int_0^t \rho(t-s)dX(s).
\end{aligned}
$$

A última igualdade foi obtida interpretando $X'(s)ds$ como $dX(s)$. Portanto,

$$
V(t) = \int_0^t \rho(t-s)dX(s),
$$

o que mostra que as soluções são iguais.

□

O assunto que será tratado no próximo capítulo, refere-se a uma classe especial de séries aleatórias: as séries de Fourier-Stieltjes. O desenvolvimento do capítulo se dará objetivando relacionar o limite (em algum sentido) de tais séries (que como o leitor verá, será uma integral estocástica da forma $\int_0^t f(t-s)dX(s)$) com a classe de soluções da ELG dada pelo Teorema 2.3.1.

CAPÍTULO 4

SÉRIES DE FOURIER STIELTJES ALEATÓRIAS

Quando estudamos análise de Fourier, um problema clássico é: sob quais condições, uma dada função f pode ser escrita como soma de senos e/ou cossenos? Isto é, o quão boa deve ser a função f para que possamos representá-la na forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi i x}{L}}, \tag{4.1}$$

onde L é o período de f (já surge uma imposição: f deve ser periódica) e c_n é um coeficiente a determinar (coeficiente de Fourier de f). A série acima é chamada série de Fourier da função f.

Formalmente, se f for periódica, de período $2L$, integrável e absolutamente integrável no intervalo $[-L, L]$, então o seu coeficiente de Fourier pode ser determinado e é dado por:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{n\pi i x}{L}} dx;$$

além disso, sua série de Fourier pode ser escrita na forma (4.1). O fato de determinar a série de

Fourier de f não significa que a função e sua série de Fourier são iguais; precisamos exigir mais de f. Um resultado que garante a convergência da série de Fourier de f para a função f é o seguinte, [12]: "se f for uma função periódica, contínua e com derivada primeira quadrado integrável, então a série de Fourier de f converge uniformemente para f".

A esta altura o leitor deve estar se perguntando: qual é a relação entre a análise de Fourier clássica e a ELG ou os processos α-estáveis? A resposta é a seguinte: também existem "séries de Fourier" associadas a processos α-estáveis e estas séries convergem, sob condições que veremos adiante, para um processo estocástico, representado por uma integral estocástica do tipo $\displaystyle\int_0^t f(s-u)dX(u)$. Note que esta integral tem a mesma forma da solução proposta para a ELG (Definição 2.18) e é justamente isto que motiva o estudo destas séries; assim como na análise de Fourier clássica, temos aqui, a oportunidade de aproximar, em algum sentido, a primeira classe de soluções para a ELG através de um tipo especial de série aleatória. Anteriormente, escrevemos séries de Fourier entre aspas porque o termo geral destas séries não envolverá somente o coeficiente de Fourier da função f, mas também o "coeficiente de Fourier" do processo estável em questão (objeto que ainda iremos definir).

O assunto que será abordado neste capítulo diz respeito a essas séries de Fourier associadas aos processos α-estáveis e a maneira como estas somas infinitas convergem (modos de convergência) para a integral supracitada. Veremos que o modo de convergência depende do índice de estabilidade do processo.

A Seção 4.1 traz um pequeno histórico sobre as séries de Fourier-Stieltjes aleatórias e uma apresentação inicial das idéias que permeiam este capítulo. Na Seção 4.2 apresentaremos alguns resultados relativos à integrais envolvendo processos estáveis como, por exemplo, a determinação da função característica do processo $I(t) = \int_0^t f(s-u)dX(u)$ e a prova de que este processo pode ser definido no sentido da convergência em probabilidade, quando $f \in L^p$. O capítulo será encerrado com a Seção 4.3 e lá serão apresentados e demonstrados teoremas que nos dão condições sob as quais um tipo particular de série aleatória converge para a integral $I(t)$.

4.1 Sobre as Séries de Fourier-Stieltjes Aleatórias

A idéia de representar um processo estocástico por uma série de Fourier, assim como se faz com funções determinísticas, é o cerne do trabalho de G. Samal em 1970, [32]. Neste artigo, o autor se vale dos seguintes objetos:

- $X(t)$ é um processo estocasticamente contínuo, com incrementos independentes e cujas trajetórias são limitadas q.c. no intervalo $[0,1]$.
- f é uma função contínua qualquer com derivada primeira também contínua.

Com este aparato, a existência da integral de Stieltjes $\int_0^1 f(t)dX(t)$ está garantida (devido às características das trajetórias de $X(t)$); em particular, está bem definida a integral $\int_0^1 e^{2n\pi it}dX(t)$, a qual denotaremos por A_n.

Motivado pela análise de Fourier do mundo determinístico, G. Samal definiu, segundo suas palavras, um "tipo de expansão de Fourier-Stieltjes" para $X(t)$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-2n\pi iy}$, mas não obteve nenhum resultado relativo à convergência desta série; o principal teorema obtido em [32] diz respeito à convergência quase certa da série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{n}\, e^{-2n\pi iy}$, $n \neq 0$. Mais precisamente, o resultado é o seguinte:

Teorema 4.1.1. *Se o processo estocástico $X(t)$ definido anteriormente possui derivada igual a zero* *para todo t fixo e para quase todo w e se é definido fora do intervalo* $[0,1]$ *pela relação* $X(t+1) = X(t)$*, então para todo y fixo,* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{n}\ e^{-2n\pi iy}$*,* $n \neq 0$*, converge para*

$$2i\left[-X(1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k\pi y)}{k} - 2\pi X(y) + \pi\int_0^1 X(t)dt\right], \tag{4.2}$$

para quase todo w.

Note que a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{n}\ e^{-2n\pi iy}$, $n \neq 0$ "representa" a v.a. (4.2) assim como uma série de Fourier pode representar uma função determinística.

Em 1971, Samal G. e Mishra, M. N. estabeleceram uma propriedade da soma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{n}\ e^{-2n\pi iy}$, $n \neq 0$: a continuidade em probabilidade. Na referência [33], os autores optaram por trabalhar com processos α-estáveis e o motivo de tal escolha se deve à fácil manipulação da função característica de tais processos, quando exigido que sejam simétricos. Para mostrar que a soma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{n}\ e^{-2n\pi iy}$, $n \neq 0$ é fracamente contínua em probabilidade (é esse o único resultado em [33]), os autores tiveram de recorrer a um importante resultado envolvendo processos α-estáveis (Uma generalização deste resultado, considerando f em $L^p[a,b]$, $p \geq 1$, será muito utilizada em algumas demonstrações neste capítulo):

"Se $f(t)$ é uma função contínua e com derivada primeira contínua em $[a,b]$ e $X(t)$ é um processo simétrico e α-estável, com índice de estabilidade $\alpha \in (0,2]$, então para todo $\delta > 0$,

$$P\left(\left|\int_a^b f(t)dX(t)\right| > \delta\right) \leq \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\delta^\alpha}\int_a^b |f(t)|^\alpha dt,$$

onde C é uma constante positiva".

Na prova desta desigualdade, usa-se o fato de que a função característica, $\varphi(u,t)$, de um processo α-estável simétrico e com índice de estabilidade $\alpha \in (0,2]$ é da forma $\varphi(u,t) = e^{-\sigma^\alpha |u|^\alpha t}$, onde σ é uma constante não-negativa.

O próximo trabalho relacionado às séries de Fourier-Stieltjes aleatórias, só foi publicado em 1980, [26], e diz respeito à convergência e continuidade de séries mais gerais que aquelas estudadas em [32] e [33]. Tratando com processos α-estáveis e simétricos e considerando A_n o coeficiente associado e esses processos e já citado anteriormente, os resultados, como veremos, dizem respeito ao modo de convergência das séries e a propriedades relativas à continuidade do limite, sem porém, explicitar este limite.

As séries consideradas a seguir tem como termo geral o produto $a(n)\, A_n\, e^{-2n\pi iy}$, onde $a(n)$ é uma função qualquer. Os dois resultados mais importantes deste trabalho serão enunciados a seguir. No primeiro deles, um resultado bem conhecido é exposto como hipótese: se $a(n)$ é uma função definida em um intervalo simétrico em relação à origem, então $a(n)$ pode ser escrita como soma de outras duas funções, uma par e outra ímpar.

Teorema 4.1.2. *Se $a(n) = a_1(n) + a_2(n)$, onde a_1 é uma função par e a_2 é uma função ímpar, $1 < \alpha < 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_1^2(n) < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_2^2(n) < \infty$, então a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) A_n\, e^{-2n\pi iy}$ converge quase certamente.*

No próximo teorema, é permitido ao índice de estabilidade percorrer todo o intervalo $(0,2]$, porém a convergência não é mais quase certa, e sim em probabilidade.

Teorema 4.1.3. *Se $\alpha \in (0,2]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a^2(n) < \infty$, então a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) A_n\, e^{-2n\pi iy}$ converge em probabilidade.*

Seguindo a linha de relacionar séries de Fourier-Stieltjes aleatórias e processos estocásticos (no sentido da série representá-lo de alguma forma), eis que surge o artigo que motivou a elaboração deste capítulo; no trabalho [29], Nayak, C., Pattanayak, S. e Mishra, M. N. conseguem mostrar a convergência de certas séries aleatórias para integrais estocásticas do tipo $\displaystyle\int_0^1 f(y-t)dX(t)$, onde f é uma função de L^p com $p \geq 1$ e $X(t)$ é um processo α-estável e simétrico. Ora, esta integral estocástica é muito parecida com a solução proposta por Medino para a ELG em [24], a não ser pelo limite superior de integração (que está intimamente relacionado com o período da função f).

Denotando por a_n o coeficiente de Fourier de uma função $f \in L^p$, $p > 0$ e por A_n o coeficiente associado a um processo α-estável (com índice de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$), Nayak, C., Pattanayak S. e Mishra, M. N. conseguem mostrar em [29], que séries da forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, A_n\, e^{2n\pi i y} \tag{4.3}$$

convergem, em algum sentido que depende do índice de estabilidade do processo $X(t)$, para a integral estocástica $\displaystyle\int_0^1 f(t-y)dX(t)$. Naturalmente, se considerarmos funções de L^p, $p > 1$, com período t, a conjectura imediata é que a série (4.3) convirja, em algum sentido, para a integral estocástica $\displaystyle\frac{1}{t}\int_0^t f(t-y)dX(t)$. Note que o quociente $\displaystyle\frac{1}{t}$ é herdado do coeficiente A_n; logo, se o objetivo é que a série (4.3) convirja para $\displaystyle\int_0^t f(t-y)dX(t)$, isto é, convirja para a solução proposta da ELG, então podemos considerar um outro coeficiente associado ao processo. O coeficiente A_n carregava a informação de que o processo $X(t)$ também tinha período 1, hipótese exigida nos trabalhos [26], [29], [32] e [33]. No decorrer deste trabalho não exigiremos que o processo α-estável $X(t)$ seja periódico e tentaremos obter, desta forma, convergência de (4.3) para a integral $\displaystyle\int_0^t f(t-y)dX(t)$.

A partir da Seção 4.3, apresentaremos os resultados que generalizam os resultados de [29]. A generalização é no seguinte sentido: ao invés de funções com período 1, trataremos com funções de período t e ao invés de processos α-estáveis com período 1, não exigiremos processos periódicos. As séries do tipo (4.3) são chamadas de séries de Fourier-Stieltjes aleatórias e o nome é auto-explicativo; embora o coeficiente A_n que será utilizado a partir da próxima seção não carregue a informação sobre o período de $X(t)$, mesmo porque o processo não precisa ser periódico, manterei o nome já dado a estas séries e utilizarei a abreviatura SFSA para referenciá-las. A próxima seção contém resultados muito importantes para o desenvolvimento da última seção deste capítulo e diz respeito à resultados envolvendo integrais estocásticas cujo integrador é um processo α-estável.

4.2 Resultados Preliminares sobre Processos α-estáveis

O conjunto dos resultados desta seção será de fundamental importância no desenvolvimento deste capítulo, pois culminam no Lema 4.2.4, resultado que é determinante nas demonstrações dos teoremas da próxima seção e que envolverão a convergência da SFSA. Antes de enunciar e demonstrar tais resultados precisamos abrir espaço para uma breve discussão sobre a integral $\int_0^t f(s)dX(s)$, onde $X(t)$ é um processo estável e f é uma função, a princípio, contínua. A discussão refere-se à forma de como esta integral será definida. No Capítulo 1 a transformada de Laplace para processos estáveis foi definida no sentido da convergência em probabilidade; se f for contínua, então a integral $\int_0^t f(s)dX(s)$ também pode ser definida no sentido da convergência em probabilidade (o leitor interessado pode consultar [23], p. 148).

O primeiro resultado desta seção refere-se à determinação da função característica da integral estocástica $\int_0^t f(s)dX(s)$ e é uma generalização do resultado em [32], pois lá, a função característica de tal integral foi determinada; porém, naquele artigo, a integral de interesse era $\int_0^1 f(s)dX(s)$.

Observação: Nos resultados seguintes, a constante σ é um dos quatro parâmetros relacionados à função característica do processo α-estável e simétrico $X(t)$.

Lema 4.2.1. *Sejam $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ um processo simétrico e α-estável com índice de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$ e f uma função contínua. Então, a função característica $\varphi(u, t)$ da integral estocástica $I(t) = \int_0^t f(s)dX(s)$ é dada por*

$$\varphi(u, t) = e^{-\sigma^\alpha |u|^\alpha \int_0^t |f(s)|^\alpha ds}.$$

Prova:

Para cada $n \geq 1$, considere uma partição qualquer do intervalo $[0, t]$:

$$\mathcal{P}_n : 0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = t,$$

com $\delta = \max_r \{u_r - u_{r-1}\}$ tendendo a zero quando $n \to \infty$.

Considere também a sequência de somas de Riemann-Stieltjes:

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(X(u_r) - X(u_{r-1})),$$

onde $\xi_r \in [u_{r-1}, u_r]$. Vamos calcular a função característica $\varphi_n(u)$ de S_n:

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= E(e^{iuS_n}) \\
&= E\left\{ e^{\left[iu\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(X(u_r)-X(u_{r-1})) \right]} \right\} \\
&= E\left\{ \prod_{r=1}^{n} e^{[iuf(\xi_r)(X(u_r)-X(u_{r-1}))]} \right\} \\
&= \prod_{r=1}^{n} E\{e^{[iuf(\xi_r)(X(u_r)-X(u_{r-1}))]}\}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Observe que a última igualdade vale porque $X(t)$ possui incrementos independentes. Agora,

$$X(u_r) = X(u_r) - X(u_{r-1}) + X(u_{r-1}) - X(0);$$

e assim,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{X(u_r)}(u) &= E\{e^{[iu(X(u_r)-X(u_{r-1})+X(u_{r-1})-X(0))]}\} \\
&= \varphi_{X(u_r)-X(u_{r-1})}(u) \cdot \varphi_{X(u_{r-1})-X(0)}(u).
\end{aligned}
$$

Sabemos que a função característica de $X(t)$ é $e^{\psi(u)t}$, onde $\psi(u) = -\sigma^{\alpha}|u|^{\alpha}$. Além disso, $X(u_r) - X(u_{r-1})$ e $X(u_{r-1}) - X(0)$ são independentes; daí segue que

$$e^{[u_r\psi(u)]} = \varphi_{X(u_r)-X(u_{r-1})}(u) \cdot e^{[u_{r-1}\psi(u)]}.$$

Daí, obtemos

$$\varphi_{X(u_r)-X(u_{r-1})}(u) = e^{[(u_r-u_{r-1})\psi(u)]}. \tag{4.5}$$

Voltando a (4.4) e utilizando (4.5), concluímos que

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= \prod_{r=1}^{n} E\{e^{[iuf(\xi_r)(X(u_r)-X(u_{r-1}))]}\} \\
&= \prod_{r=1}^{n} \varphi_{X(u_r)-X(u_{r-1})}(uf(\xi_r)) \\
&= \prod_{r=1}^{n} e^{[(u_r-u_{r-1})\psi(uf(\xi_r))]} \\
&= e^{\left[\sum_{r=1}^{n}(u_r - u_{r-1})\psi(uf(\xi_r))\right]}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

A integral estocástica $I(t) = \int_0^t f(s)dX(s)$ é o limite em probabilidade da sequência de somas de Riemann-Stieltjes $\{S_n\}_{n\geq 1}$; logo, a sequência de funções características $\{\varphi_n(u)\}_{n\geq 1}$ converge para a função característica $\varphi(u)$ de $I(t)$. Pela continuidade de ψ e de f, temos

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n}(u_r - u_{r-1})\psi(uf(\xi_r)) = \int_0^t \psi(uf(s))ds.
$$

Passando ao limite com $n \to \infty$ nos dois membros de (4.6), segue que, para cada $u \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_n(u) &= \lim_{n\to\infty} e^{\left[\sum_{r=1}^{n}(u_r - u_{r-1})\psi(uf(\xi_r))\right]} \\
&= e^{\int_0^t \psi(uf(s))ds}.
\end{aligned}
$$

Agora, $\psi(uf(s)) = -\sigma^\alpha |u|^\alpha |f(s)|^\alpha$; logo, a função característica de $I(t)$ é dada por

$$
\varphi(u,t) = e^{-\sigma^\alpha |u|^\alpha \int_0^t |f(s)|^\alpha ds}.
$$

$\square$

O próximo lema relaciona a função característica e sua função de distribuição associada. O resultado não será demonstrado, mas o leitor interessado, pode encontrar a demonstração em [13], p. 54.

Lema 4.2.2. *Se $\varphi(u)$ é a função característica correspondente à função de distribuição $F(t)$, então para $\tau > 0$,*

$$F\left(\frac{2}{\tau}\right) - F\left(-\frac{2}{\tau}\right) \geq \left|\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(u)du\right| - 1.$$

A próxima desigualdade será fundamental no momento em que formos provar que a integral estocástica $\int_0^t f(s)dX(s)$, com $f \in L^p$, pode ser definida no sentido da convergência em probabilidade. A exigência com relação ao integrando, neste momento, é que ele seja uma função contínua.

Lema 4.2.3. *Sejam f uma função contínua em $[0,t]$ e $X(s)$ um processo simétrico e α-estável, com índice de estabilidade $\alpha \in (0,2]$. Então, para todo $\delta > 0$,*

$$P\left(\left|\int_0^t f(s)dX(s)\right| > \delta\right) \leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\delta^\alpha}\int_0^t |f(s)|^\alpha ds.$$

Prova:

Sejam $F(t)$ a função de distribuição e $\varphi(u)$ a função característica de $\int_0^t f(s)dX(s)$ (a função característica nós já conhecemos (Lema 4.2.1)).

Temos que

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\int_0^t f(s)dX(s)\right| > \delta\right) &= 1 - P\left(\left|\int_0^t f(s)dX(s)\right| \leq \delta\right) \\
&= 1 - \left[P\left(\int_0^t f(s)dX(s) \leq \delta\right) - P\left(\int_0^t f(s)dX(s) < -\delta\right)\right] \\
&= 1 - [F(\delta) - F(-\delta)] \\
&\leq 1 - \left(\frac{\delta}{2}\int_{-\frac{2}{\delta}}^{\frac{2}{\delta}} \varphi(u)du - 1\right) \\
&= 2 - \frac{\delta}{2}\int_{-\frac{2}{\delta}}^{\frac{2}{\delta}} \exp\left(-\sigma^\alpha |u|^\alpha \int_0^t |f(s)|^\alpha ds\right) du \\
&< 2 - \frac{\delta}{2}\int_{-\frac{2}{\delta}}^{\frac{2}{\delta}} \left(1 - \sigma^\alpha |u|^\alpha \int_0^t |f(s)|^\alpha ds\right) du \\
&= 2 - \delta\int_0^{\frac{2}{\delta}} \left(1 - \sigma^\alpha u^\alpha \int_0^t |f(s)|^\alpha ds\right) du \\
&= \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\delta^\alpha}\int_0^t |f(s)|^\alpha ds.
\end{aligned}
$$

Note que a primeira desigualdade foi obtida aplicando-se o Lema 4.2.2 com $\delta = \dfrac{2}{\tau}$ e a segunda desigualdade segue do fato que $e^{-u} > 1 - u$, $\forall u$.

□

Integrais estocásticas são objeto de estudo nesta tese e isso não é novidade; definir estas integrais no sentido da convergência em probabilidade também não é novidade, pois já fizemos isto em duas oportunidades. A *nuance* contida no próximo resultado é que o integrando f será um elemento do espaço L^p.

O leitor verá que o teorema a seguir trata somente do caso $p \geq 1$; o caso $0 < p < 1$ será visto na próxima seção e o adiamento deve-se à necessidade de introduzir novos resultados envolvendo funções de L^p com $0 < p < 1$ e que, no meu entendimento, farão mais sentido se apresentados posteriormente.

Teorema 4.2.1. *Se $X(t)$ é um processo simétrico e α-estável, com índice de estabilidade $\alpha \in [1,2]$, então para $f \in L^p[a,b]$, $p \geq \alpha$, a integral $\int_a^b f(t)dX(t)$ pode ser definida no sentido da convergência em probabilidade.*

Prova:

Dada $f \in L^p[a,b]$, $p \geq 1$, existe uma sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de funções contínuas com derivadas contínuas em $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^p dt = 0.$$

Pela desigualdade de Minkowski, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_a^b |f_n(t) - f(t) + f(t) - f_m(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f_m(t) - f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^p dt = 0. \tag{4.7}$$

Aplicando o Lema 4.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\int_a^b f_n(t)dX(t) - \int_a^b f_m(t)dX(t)\right| > \delta\right) &= P\left(\left|\int_a^b [f_n(t) - f_m(t)]dX(t)\right| > \delta\right) \\
&\leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\delta^\alpha} \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^\alpha dt. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Visto que $p \geq \alpha$, então por (4.7), concluímos que

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^\alpha dt = 0. \tag{4.9}$$

Voltando a (4.8) e utilizando (4.9) obtemos a seguinte convergência

$$\lim_{m,n\to\infty} P\left(\left| \int_a^b f_n(t)dX(t) - \int_a^b f_m(t)dX(t) \right| > \delta \right) = 0;$$

isto é, a integral estocástica $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dX(t)$ converge em probabilidade. Portanto existe uma variável aleatória Y tal que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \int_a^b f_n(t)dX(t) - Y \right| > \delta \right) = 0.$$

É importante ressaltar que a existência da variável aleatória Y independe da escolha da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$. De fato, suponha que exista uma outra sequência $\{g_n\}_{n\geq 1}$ de funções contínuas com derivadas contínuas em $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |g_n(t) - f(t)|^p dt = 0.$$

Recorrendo à desigualdade de Minkowski, segue que

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |f_n(t) - g_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_a^b |f_n(t) - f(t) + f(t) - g_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g_n(t) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(t)-g_n(t)|^p dt = 0. \tag{4.10}$$

Do Lema 4.2.3, sabemos que

$$\begin{aligned} P\left(\left|\int_a^b f_n(t)dX(t) - \int_a^b g_n(t)dX(t)\right| > \delta\right) &= P\left(\left|\int_a^b [f_n(t)-g_n(t)]dX(t)\right| > \delta\right) \\ &\leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\delta^\alpha}\int_a^b |f_n(t)-g_n(t)|^\alpha dt. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Finalmente, de (4.10) e (4.11), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\int_a^b f_n(t)dX(t) - \int_a^b g_n(t)dX(t)\right| > \delta\right) = 0.$$

Dessa forma, definimos a variável aleatória Y como sendo a integral estocástica $\displaystyle\int_a^b f(t)dX(t)$.

□

Durante a próxima seção o lema a seguir será utilizado constantemente. Este resultado é uma generalização do Lema 4.2.3, pois o integrando é um elemento de L^p.

Lema 4.2.4. *Sejam $X(t)$ um processo simétrico e α-estável com índice de estabilidade $\alpha \in [1,2]$ e $f \in L^p[0,t]$, com $p \geq \alpha$. Então para todo $\delta > 0$, existe $\theta < \delta$ tal que*

$$P\left(\left|\int_0^t f(s)dX(s)\right| > \delta\right) \leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\theta^\alpha}\int_0^t |f(s)|^\alpha ds.$$

Prova:

Como $f \in L^p$, então existe uma sequência de funções contínuas com derivadas contínuas $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^p dt = 0. \tag{4.12}$$

Agora, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\int_0^t f(s)dX(s)\right| > \delta\right) &= P\left(\left|\int_0^t [f(s)-f_n(s)+f_n(s)]dX(s)\right| > \delta\right)\\
&= P\left(\left|\int_0^t [f(s)-f_n(s)]dX(s)+\int_0^t f_n(s)dX(s)\right| > \delta\right)\\
&\leq P\left(\left|\int_0^t [f(s)-f_n(s)]dX(s)\right| + \left|\int_0^t f_n(s)dX(s)\right| > \delta\right)\\
&\leq P\left(\left|\int_0^t [f(s)-f_n(s)]dX(s)\right| > \varepsilon\right)\\
&\qquad + P\left(\left|\int_0^t f_n(s)dX(s)\right| > \delta-\varepsilon\right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

O Teorema 4.2.1 garante que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\int_0^t f(s)dX(s) - \int_0^t f_n(s)dX(s)\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\int_0^t [f(s)-f_n(s)]dX(s)\right| > \varepsilon\right) = 0. \tag{4.14}$$

Além disso, pelo Lema 4.2.3, temos que

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\int_0^t f_n(s)dX(s)\right| > \delta-\varepsilon\right) &\leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)(\delta-\varepsilon)^\alpha}\int_0^t |f_n(s)|^\alpha ds\\
&= \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)(\delta-\varepsilon)^\alpha}\int_0^t |f_n(s)-f(s)+f(s)|^\alpha ds.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Minkovski, no segundo membro da igualdade anterior obtemos

$$P\left(\left|\int_0^t f_n(s)dX(s)\right| > \delta - \varepsilon\right) \leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)(\delta-\varepsilon)^\alpha}\left[\left(\int_0^t |f_n(s)-f(s)|^\alpha ds\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\int_0^t |f(s)|^\alpha ds\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^\alpha.$$

Passando ao limite com $n \to \infty$ a desigualdade acima e utilizando (4.12), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\int_0^t f_n(s)dX(s)\right| > \delta - \varepsilon\right) = \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)(\delta-\varepsilon)^\alpha}\int_0^t |f(s)|^\alpha ds. \tag{4.15}$$

Voltando a (4.13), fazendo $\delta - \varepsilon = \theta$ e recorrendo a (4.14) e (4.15) encontramos

$$P\left(\left|\int_0^t f(s)dX(s)\right| > \delta\right) \leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\theta^\alpha}\int_0^t |f(s)|^\alpha ds,$$

o que finaliza a demonstração.

□

Na próxima seção serão apresentados alguns resultados que relacionam este capítulo com os capítulos 2 e 3. Na verdade, mostraremos sob quais condições uma série de Fourier-Stieltjes aleatória converge, em algum sentido, para uma integral estocástica da forma $\int_0^t f(s-u)dX(u)$. Além disso, dependendo de onde esteja o índice de estabilidade α, esta integral goza de algumas propriedades como continuidade fraca e diferenciabilidade em probabilidade; o leitor perceberá que a questão é: quais exigências sobre o coeficiente de Fourier da função f devem ser impostas para que essas propriedades valham?

4.3 SFSA e Integrais Estocásticas

Como já havia antecipado, em toda esta seção $X(t)$ será um processo simétrico e α-estável, com índice de estabilidade $\alpha \in (1,2)$ ou $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$ e f será uma função de L^p com $p > 0$ e periódica de período t. Denotaremos por a_n o coeficiente de Fourier de f e desde já defino $A_k := \int_0^t e^{\frac{-2k\pi iu}{t}} dX(u)$, o qual chamaremos de "coeficiente associado ao processo $X(t)$."

O primeiro resultado desta seção diz respeito à convergência da série (4.3), quando $\alpha \in (1,2)$. Vale ressaltar que, em todos os resultados que virão, o modo de convergência depende da variação de α; no próximo teorema, a convergência se dá em probabilidade.

Teorema 4.3.1. *Seja $X(t)$ um processo simétrico e estável com $\alpha \in (1,2)$. Se $f \in L^p[0,t]$, com $p \geq \alpha$, então a série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi is}{t}}$ converge em probabilidade para a integral estocástica $\int_0^t f(s-u)dX(u)$.*

Prova:

Sejam

$$S_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\, A_k\, e^{\frac{2k\pi is}{t}}$$

e

$$f_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\, e^{\frac{2k\pi is}{t}}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
S_n(s) &= \sum_{k=-n}^{n} a_k \int_0^t e^{\frac{-2k\pi i u}{t}} dX(u)\, e^{\frac{2k\pi i s}{t}} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \int_0^t a_k e^{\frac{-2k\pi i(s-u)}{t}} dX(u) \\
&= \int_0^t \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\frac{-2k\pi i(s-u)}{t}} dX(u) \\
&= \int_0^t f_n(s-u) dX(u).
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\int_0^t f(s-u)dX(u) - S_n(s)\right| > \delta\right) &= P\left(\left|\int_0^t f(s-u)dX(u) - \int_0^t f_n(s-u)dX(u)\right| > \delta\right) \\
&= P\left(\left|\int_0^t [f(s-u) - f_n(s-u)]dX(u)\right| > \delta\right) \\
&\leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\theta^\alpha} \int_0^t |f(s-u) - f_n(s-u)|^\alpha du,
\end{aligned}
$$

onde $\theta < \delta$. A desigualdade anterior foi obtida aplicando-se o Lema 4.2.4.

Passando ao limite com $n \to \infty$ e utilizando o Teorema 1.1.6, item (i), obtemos, para todo $\delta > 0$,

$$
\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\int_0^t f(s-u)dX(u) - S_n(s)\right| > \delta\right) = 0,
$$

o que conclui a demonstração.

□

O próximo resultado nos dá condições para que a integral estocástica $\int_0^t f(s-u)dX(u)$ seja contínua em probabilidade.

Teorema 4.3.2. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.3.1, a integral estocástica* $\int_0^t f(s-u)dX(u)$ *é contínua em probabilidade.*

Prova:

Suponha $l \neq s$ (caso contrário não há o que fazer). Para todo $\delta > 0$, aplicando o Lema 4.2.4, temos que

$$\begin{aligned} P\left(\left|\int_0^t f(s-u)dX(u) - \int_0^t f(l-u)dX(u)\right| > \delta\right) &= P\left(\left|\int_0^t [f(s-u) - f(l-u)]dX(u)\right| > \delta\right) \\ &\leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\theta^\alpha} \int_0^t |f(s-u) - f(l-u)|^\alpha du, \end{aligned}$$

onde $\theta < \delta$.

Passando ao limite, com $s \to l$, na desigualdade acima e utilizando o Teorema 1.1.6, item (ii), estabelecemos a igualdade desejada; isto é,

$$\lim_{s \to l} P\left(\left|\int_0^t f(s-u)dX(u) - \int_0^t f(l-u)dX(u)\right| > \delta\right) = 0.$$

□

O próximo resultado diz respeito à diferenciabilidade em probabilidade da integral estocástica $\int_0^t f(s-u)dX(u)$. O Teorema de Riesz-Fischer será utilizado na demonstração e ficará claro o porquê da hipótese restritiva sobre o coeficiente de Fourier da função f.

Teorema 4.3.3. *Sejam $X(t)$ e f como no Teorema 4.3.1. Se* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |na_n|^2 < \infty$, *então a integral estocástica* $\int_0^t f(s-u)dX(u)$ *é diferenciável em probabilidade.*

Prova:

Visto que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |na_n|^2 < \infty$, então pelo Teorema de Riesz-Fischer existe uma função $g \in L^2$ tal que na_n é o coeficiente de Fourier de g; isto é:

$$na_n = \frac{1}{t}\int_0^t e^{\frac{-2n\pi is}{t}} g(s)ds.$$

Seja $S(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi is}{t}}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{S(s+h)-S(s)}{h} &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi i(s+h)}{t}} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi is}{t}}}{h} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n \left(\frac{e^{\frac{2n\pi i(s+h)}{t}} - e^{\frac{2n\pi is}{t}}}{h}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi is}{t}} \left(\frac{e^{\frac{2n\pi ih}{t}} - 1}{h}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi i n a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi is}{t}} \left(\frac{e^{\frac{2n\pi ih}{t}} - 1}{2\pi inh}\right).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Denotando $b_n = na_n$ e $d_n = b_n \left(\frac{e^{\frac{2n\pi ih}{t}} - 1}{2\pi inh}\right)$, podemos reescrever (4.16) assim:

$$\frac{S(s+h)-S(s)}{h} = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi is}{t}}.$$

Pois bem, o segundo membro da igualdade acima é uma série de Fourier-Stieltjes com peso d_n. Além disso,

$$
\begin{aligned}
d_n &= b_n \left(\frac{e^{\frac{2n\pi i h}{t}} - 1}{2\pi i n h} \right) \\
&= b_n \frac{1}{th} \int_{-h}^{0} e^{\frac{-2\pi n i u}{t}} du \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t e^{\frac{-2n\pi i s}{t}} g(s) ds \frac{1}{th} \int_{-h}^{0} e^{\frac{-2\pi n i u}{t}} du \\
&= \int_0^t \frac{1}{t^2 h} \int_{-h}^{0} g(s) e^{\frac{-2n\pi i (s+u)}{t}} du ds. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Tomando $s = y - u$, podemos reescrever (4.17) da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
d_n &= \int_u^{t+u} \frac{1}{t^2 h} \int_{-h}^{0} g(y-u) e^{\frac{-2n\pi i y}{t}} du dy \\
&= \int_0^t \frac{1}{t^2 h} \int_{-h}^{0} g(y-u) e^{\frac{-2n\pi i y}{t}} du dy \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{1}{th} \int_{-h}^{0} g(y-u) du \right) e^{\frac{-2n\pi i y}{t}} dy.
\end{aligned}
$$

Note que o fato de g ter período t garante a validade da segunda igualdade. Além disso, a última igualdade acima nos diz que d_n é o coeficiente de Fourier da integral

$$\frac{1}{th} \int_{-h}^{0} g(y-l) dl := G(y).$$

Posto isso, o Teorema 4.3.1 garante que a SFSA $2\pi i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \, A_n \, e^{\frac{2n\pi i s}{t}}$ converge em probabilidade para a integral estocástica

$$2\pi i \int_0^t G(s-u) dX(u) = 2\pi i \int_0^t \frac{1}{th} \int_{-h}^{0} g(s-u-l) dl dX(u) := H(s).$$

O próximo passo é mostrar que $2\pi i \int_0^t g(s-u) dX(u)$ é a derivada em probabilidade de $S(s)$.

Observe que

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{S(s+h)-S(s)}{h}-2\pi i\int_0^t g(s-u)dX(u)\right|>\delta\right)\\
&=P\left(\left|\frac{S(s+h)-S(s)}{h}-H(s)+H(s)-2\pi i\int_0^t g(s-u)dX(u)\right|>\delta\right)\\
&=P\left(\left|2\pi i\int_0^t \frac{1}{th}\int_{-h}^0 g(s-u-l)dldX(u)-2\pi i\int_0^t g(s-u)dX(u)\right|>\delta\right)\\
&=P\left(\left|\int_0^t 2\pi i\left[\frac{1}{th}\int_{-h}^0 g(s-u-l)dl-g(s-u)\right]dX(u)\right|>\delta\right).
\end{aligned}
$$

Aplicando o Lema 4.2.4 à $2\pi i\left[\frac{1}{th}\int_{-h}^0 g(s-u-l)dl-g(s-u)\right]$, obtemos

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{S(s+h)-S(s)}{h}-2\pi i\int_0^t g(s-u)dX(u)\right|>\delta\right)&\\
\leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\theta^\alpha}\int_0^t\left|2\pi i\left[\frac{1}{th}\int_{-h}^0 g(s-u-l)dl-g(s-u)\right]\right|^\alpha du&\\
=\frac{2^{\alpha+2}\pi\sigma^\alpha}{(\alpha+1)t\theta^\alpha}\int_0^t\left|\frac{1}{h}\int_{-h}^0 g(s-u-l)dl-g(s-u)\right|^\alpha du.&
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variáveis $v=\frac{-lt}{h}$ e definindo $K(\alpha,\theta):=\frac{2^{\alpha+2}\pi\sigma^\alpha}{(\alpha+1)t\theta^\alpha}$, segue que

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{S(s+h)-S(s)}{h}-2\pi i\int_0^t g(s-u)dX(u)\right|>\delta\right)\\
&\leq K(\alpha,\theta)\int_0^t\left|\frac{1}{t}\int_0^t g\left(s-u-\frac{vh}{t}\right)dv-g(s-u)\right|^\alpha du\\
&=K(\alpha,\theta)\int_0^t\left|\frac{1}{t}\int_0^t g\left(s-u-\frac{vh}{t}\right)dv-\frac{1}{t}\int_0^t g(s-u)dv\right|^\alpha du\\
&=K(\alpha,\theta)\int_0^t\left|\frac{1}{t}\int_0^t \left[g\left(s-u-\frac{vh}{t}\right)-g(s-u)\right]dv\right|^\alpha du\\
&\leq K(\alpha,\theta)\int_0^t\left[\frac{1}{t}\int_0^t \left|g\left(s-u-\frac{vh}{t}\right)-g(s-u)\right|dv\right]^\alpha du.
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Hölder no segundo membro da última desigualdade acima, temos que

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{S(s+h)-S(s)}{h}-2\pi i\int_0^t g(s-u)dX(u)\right|>\delta\right)&\\
\leq K(\alpha,\theta)\int_0^t\left\{\left[\frac{1}{t}\int_0^t\left|g\left(s-u-\frac{vh}{t}\right)-g(s-u)\right|^\alpha dv\right]^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{1}{t}\int_0^t 1dv\right]^{1-\frac{1}{\alpha}}\right\}^\alpha du&\\
=\frac{K(\alpha,\theta)}{t}\int_0^t\int_0^t\left|g\left(s-u-\frac{vh}{t}\right)-g(s-u)\right|^\alpha dvdu.&\quad(4.18)
\end{aligned}
$$

Visto que $g\in L^2$, então $g\in L^p$, $p\leq 2$ e, nestas condições,

$$
\lim_{h\to 0}\int_0^t|g(x+hv)-g(x)|^\alpha dx=0.
$$

Assim, passando ao limite com $h\to 0$ em (4.18), concluímos que

$$
\lim_{h\to 0}P\left(\left|\frac{S(s+h)-S(s)}{h}-2\pi i\int_0^t g(s-u)dX(u)\right|>\delta\right)=0,
$$

confirmando que a SFSA é diferenciável em probabilidade.

□

O próximo resultado refere-se à convergência da SFSA no caso $\alpha=2$, ou seja, quando $X(t)$ é o movimento Browniano $B(t)$. A convergência neste caso ocorrerá quase certamente e o Teorema 1.1.3 será fundamental na demonstração.

Teorema 4.3.4. *Seja $B(t)$ o movimento Browniano simétrico. Se $f\in L^2[0,t]$, então a série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\,A_n\,e^{\frac{2n\pi is}{t}}$ converge quase certamente para a integral estocástica $\int_0^t f(s-u)dB(u)$.*

Prova:

Sejam

$$S_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, A_k \, e^{\frac{2k\pi i s}{t}}$$

e

$$f_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, e^{\frac{2k\pi i s}{t}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_n(s) &= \sum_{k=-n}^{n} a_k \int_0^t e^{\frac{-2k\pi i u}{t}} dB(u) \, e^{\frac{2k\pi i s}{t}} \\ &= \int_0^t f_n(s-u) dB(u). \end{aligned}$$

Sabemos que para o movimento Browniano vale a seguinte igualdade (conhecida como isometria de Itô):

$$E\left(\left| \int_0^t f(s) dB(s) \right|^2 \right) = \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

Portanto,

$$E\left(\left| S_n(s) - \int_0^t f(s-u) dB(u) \right|^2 \right) = \int_0^t |f_n(s-u) - f(s-u)|^2 du.$$

Passando ao limite com $n \to \infty$ na igualdade anterior e utilizando o Teorema 1.1.6, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left| S_n(s) - \int_0^t f(s-u) dB(u) \right|^2 \right) = 0,$$

ou seja, a SFSA converge em média quadrática para a integral estocástica considerada.

Para dar continuidade à demonstração vale a pena relembrar algumas propriedades da integral de Itô:

a) Se g for uma função contínua em $[a,b]$, então a integral $\int_a^b g(s)dB(s)$ é uma variável aleatória normalmente distribuída com média zero e variância finita. Em particular, $A_n = \int_0^t e^{\frac{-2n\pi iu}{t}} dB(u)$ goza desta propriedade.

b) $E(A_n\overline{A_m}) = 0$ para $n \neq m$ (A_n é o mesmo do item (a)).

Observe que, de (a) e (b), segue que $\{A_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Além disso, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} E\left(\left|a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi is}{t}}\right|^2\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 E\left(\left|\int_0^t e^{\frac{2n\pi i(s-u)}{t}} dB(u)\right|^2\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^t \left|e^{\frac{2n\pi i(s-u)}{t}}\right|^2 du \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 t.
\end{aligned}$$

Como $f \in L^2$, sabemos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Logo,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E\left(\left|a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi is}{t}}\right|^2\right) < \infty.$$

Isto significa que $\{S_n(s)\}_{n\geq 1}$ constitui uma soma de variáveis aleatórias normalmente distribuídas, independentes e cuja soma das variâncias é finita. Pelo Teorema 1.1.3, concluímos que a SFSA converge quase certamente. Sabíamos que o limite da série, em média quadrática, é a integral $\int_0^t f(s-u)dB(u)$;

pela unicidade do limite, esta integral também é o limite quase certo, o que finaliza a demonstração deste teorema.

$\square$

Ainda no caso $\alpha = 2$, os dois próximos resultados dizem respeito à continuidade da integral $\int_0^t f(s-u)dB(u)$. Primeiramente trataremos da continuidade em média quadrática e, em seguida, da continuidade quase certa.

Teorema 4.3.5. *Mantendo-se as hipóteses do Teorema 4.3.4, a integral estocástica* $\int_0^t f(s-u)dB(u)$ *é contínua em média quadrática.*

Prova:

Suponha $s < l$. Da isometria de Itô segue que

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^t f(s-u)dB(u) - \int_0^t f(l-u)dB(u)\right|^2\right) &= E\left[\left|\int_0^t (f(s-u) - f(l-u))dB(u)\right|^2\right] \\ &= \int_0^t |f(s-u) - f(l-u)|^2 du. \end{aligned}$$

Passando ao limite com $s \to l$ e utilizando o fato de que, para $f \in L^2$, vale a igualdade:

$$\lim_{s \to l} \left(\int_0^t |f(s-u) - f(l-u)|^2 du\right) = 0;$$

concluímos que

$$\lim_{s \to l} E\left(\left|\int_0^t f(s-u)dB(u) - \int_0^t f(l-u)dB(u)\right|^2\right) = 0;$$

ou seja, a integral $\int_0^t f(s-u)dB(u)$ é contínua em média quadrática.

□

Impondo a condição

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty \tag{4.19}$$

ao coeficiente de Fourier de f, a integral $\int_0^t f(s-u)dB(u)$ é contínua quase certamente. O próximo resultado trata desta situação.

Teorema 4.3.6. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.3.4, a integral estocástica* $\int_0^t f(s-u)dB(u)$ *será contínua quase certamente desde que valha a condição (4.19).*

Prova:

Note que a série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi i s}{t}}$ converge uniformemente para quase todo s (e o limite é contínuo q.c.) se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n A_n| < \infty \text{ q.c.} \tag{4.20}$$

Para mostrar que (4.20) vale é suficiente provar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(|a_n A_n|) < \infty$. Passemos a esta prova. Temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(|a_n A_n|) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| E(|A_n|) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| E\left(\left|\int_0^t e^{\frac{-2n\pi i s}{t}} dB(s)\right|\right) \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| E\left(\int_0^t \left|e^{\frac{-2n\pi i s}{t}}\right| dB(s)\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| E(B(t)) \\
&= E(B(t)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty.
\end{aligned}
$$

Portanto, a condição (4.20) está satisfeita e isto conclui a demonstração.

□

Na Definição 1.1.2 abordamos o significado de convergência em probabilidade segundo Cesàro. O próximo resultado relaciona este conceito com a convergência das séries aleatórias no caso em que $\alpha = 1$.

Teorema 4.3.7. *Seja $X(t)$ um processo simétrico e estável com $\alpha = 1$. Se $f \in L^1[0,t]$, então a série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n A_n e^{\frac{2n\pi i s}{t}}$ é Cesàro-somável em probabilidade para a integral estocástica $\int_0^t f(s-u)dX(u)$.*

Prova:

Sejam

$$\sigma_n'(s) = \frac{S_0 + S_1 + \cdots S_{n-1}}{n}$$

e

$$\sigma_n(s) = \frac{f_0 + f_1 + \cdots f_{n-1}}{n},$$

onde $S_n(s)$ e $f_n(s)$ são os mesmos dos Teoremas 4.3.1 e 4.3.4.

Já sabemos que $S_n(s) = \int_0^t f_n(s-u)dX(u)$; logo,

$$\begin{aligned}
\sigma_n'(s) &= \frac{1}{n}\left[\int_0^t f_0(s-u)dX(u) + \cdots + \int_0^t f_{n-1}(s-u)dX(u)\right] \\
&= \frac{1}{n}\int_0^t [f_0(s-u) + \cdots + f_{n-1}(s-u)]dX(u) \\
&= \int_0^t \sigma_n(s-u)dX(u).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma_n'(s) - \sigma_m'(s) &= \int_0^t \sigma_n(s-u)dX(u) - \int_0^t \sigma_m(s-u)dX(u) \\
&= \int_0^t [\sigma_n(s-u) - \sigma_m(s-u)]dX(u).
\end{aligned}$$

Agora, aplicando o Lema 4.2.4 com $\alpha = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
P(|\sigma_n'(s) - \sigma_m'(s)| > \delta) &= P\left(\left|\int_0^t [\sigma_n(s-u) - \sigma_m(s-u)]dX(u)\right| > \delta\right) \\
&\leq \frac{2\sigma}{\theta}\int_0^t |\sigma_n(s-u) - \sigma_m(s-u)|du.
\end{aligned}$$

Considere agora a seguinte manipulação: some e subtraia f no último integrando acima e use a desigualdade triangular para obter

$$P(|\sigma_n'(s) - \sigma_m'(s)| > \delta) \leq \frac{2\sigma^\alpha}{\theta}\left(\int_0^t |\sigma_n(s-u) - f(s-u)|du + \int_0^t |\sigma_m(s-u) - f(s-u)|du\right). \tag{4.21}$$

Observe que $\sigma_n(s)$ representa a n-ésima soma de Cesàro da série de Fourier de f; logo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t |\sigma_n(s-u)-f(s-u)|du = 0. \tag{4.22}$$

Dessa forma, passando ao limite com $n, m \to \infty$ em (4.21) e utilizando (4.22), obtemos

$$\lim_{n,m\to\infty} P(|\sigma'_n(s)-\sigma'_m(s)| > \delta) = 0,$$

o que confirma a convergência em probabilidade da sequência $\{\sigma'_n\}_{n\geq 1}$.

Agora, temos que

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sigma'_n(s) - \int_0^t f(s-u)dX(u)\right| > \delta\right) &= P\left(\left|\int_0^t \sigma_n(s-u)dX(u) - \int_0^t f(s-u)dX(u)\right| > \delta\right) \\ &\leq \frac{2\sigma^\alpha}{\theta}\int_0^t |\sigma_n(s-u)-f(s-u)|du. \end{aligned} \tag{4.23}$$

A desigualdade anterior foi obtida aplicando-se o Lema 4.2.4 com $\alpha = 1$. Passando ao limite com $n \to \infty$ em (4.23) e recorrendo a (4.22), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\sigma'_n(s) - \int_0^t f(s-u)dX(u)\right| > \delta\right) = 0;$$

ou seja, a SFSA é Cesàro-somável em probabilidade para a integral estocástica $\displaystyle\int_0^t f(s-u)dX(u)$.

□

Discorreremos agora sobre o caso $\alpha \in (0,1)$. Devemos voltar ao problema de definir a integral $\displaystyle\int_a^b f(s)dX(s)$ quando α percorre o intervalo $(0,1)$. O Teorema 4.2.1 nos dava condições para que pudéssemos definir tal integral no sentido da convergência em probabilidade, quando $\alpha \in [1,2]$; as hipóteses sobre o coeficiente de Fourier de f agora, serão mais restritivas, pois precisaremos recorrer ao Teorema 1.1.7. No resultado a seguir, a_n é o coeficiente de Fourier de f.

Teorema 4.3.8. *Seja $X(t)$ um processo simétrico e estável, com índice de estabilidade $\alpha \in (0,1)$. Se f é uma função contínua, então a integral $\int_0^t f(s)dX(s)$ pode ser definida no sentido da convergência em probabilidade desde que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$.*

Prova:

Considere $f_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\frac{2k\pi i s}{t}}$, a n-ésima soma parcial da série de Fourier de f. Como f é contínua, então $f \in L^p[a,b]$, com $\alpha \leq p < 1$. Posto isso, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t |f_m(s) - f_n(s)|^p ds &= \int_0^t |f_m(s) - f(s) + f(s) - f_n(s)|^p ds \\
&\leq \int_0^t [|f_m(s) - f(s)| + |f_n(s) - f(s)|]^p ds \\
&\leq \int_0^t |f_m(s) - f(s)|^p ds + \int_0^t |f_n(s) - f(s)|^p ds. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Passando ao limite com $m, n \to \infty$ em (4.24) e recorrendo ao Teorema 1.1.7, obtemos

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_0^t |f_m(s) - f_n(s)|^p ds = 0. \qquad (4.25)$$

Agora, pelo Lema 4.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\int_0^t f_m(s)dX(s) - \int_0^t f_n(s)dX(s)\right| > \delta\right) &= P\left(\left|\int_0^t [f_m(s) - f_n(s)]dX(s)\right| > \delta\right) \\
&\leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\delta^\alpha} \int_0^t |f_m(s) - f_n(s)|^\alpha ds. \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Passando ao limite com $n, m \to \infty$ em (4.26) e utilizando a convergência em (4.25), temos

$$\lim_{n,m\to\infty} P\left(\left|\int_0^t f_n(s)dX(s) - \int_0^t f_m(s)dX(s)\right| > \delta\right) = 0,$$

o que garante que a sequência $\left\{\int_0^t f_n(s)dX(s)\right\}_{n\geq 1}$ converge em probabilidade. Portanto, existe uma variável aleatória Y tal que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\int_0^t f_n(s)dX(s) - Y\right| > \delta\right) = 0.$$

Naturalmente, definimos Y como a integral estocástica $\int_0^t f(s)dX(s)$ e isto conclui a demonstração.

$\square$

O próximo teorema nos diz como a SFSA comporta-se com relação à convergência para a integral $\int_0^t f(s)dX(s)$, quando $\alpha \in (0,1)$. O modo de convergência coincidirá com o caso $\alpha \in (1,2)$.

Teorema 4.3.9. *Seja $X(t)$ um processo simétrico e estável com $\alpha \in (0,1)$. Se f é uma função contínua, então a série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, A_n\, e^{\frac{2n\pi i s}{t}}$ converge em probabilidade para a integral $\int_0^t f(s-u)dX(u)$, desde que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad e \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Prova:

Considere $S_n(s)$ e $f_n(s)$ como aqueles definidos no Teorema 4.3.1. Também já sabemos que $S_n(s) = \int_0^t f_n(s-u)dX(u)$. Agora, aplicando o Lema 4.2.3, temos que

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\int_0^t f(s-u)dX(u) - S_n(s)\right| > \delta\right) &= P\left(\left|\int_0^t [f(s-u) - f_n(s-u)]dX(u)\right| > \delta\right) \\
&\leq \frac{2^{\alpha+1}\sigma^\alpha}{(\alpha+1)\delta^\alpha}\int_0^t |f(s-u) - f_n(s-u)|^\alpha du. \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Observe que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é a sequência de somas parciais da série de Fourier de f; assim, pelo Teorema 1.1.7, obtemos

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^t |f(s-u) - f_n(s-u)|^\alpha du = 0. \qquad (4.28)
$$

Passando ao limite com $n \to \infty$ em (4.27) e utilizando (4.28), concluímos que

$$
\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\int_0^t f(s-u)dX(u) - S_n(s)\right| > \delta\right) = 0.
$$

Portanto a SFSA converge em probabilidade para a integral estocástica desejada.

□

Vamos agora, finalizar esta seção exibindo um resultado que estabelece a conexão entre os capítulos 2 e 4. Para isso, observe que a integral estocástica que é limite da SFSA está definida para qualquer $s \geq 0$; logo, quando $s = t$ obtemos a convergência da série aleatória para a classe de soluções da ELG dada pelo Teorema 2.3.1. Neste último teorema, $V(t) = \displaystyle\int_0^t \rho(t-s)dX(s)$ representa esta solução, a_n é o coeficiente de Fourier de $\rho(t)$ e α representa o índice de estabilidade do processo estável e simétrico $X(t)$. O desfecho é o seguinte:

Teorema 4.3.10. *Seja $\rho \in L^p[0,t]$, com $p \geq 1$.*

1) Se $\alpha \in (1,2)$ e $p \geq \alpha$, então a SFSA converge em probabilidade para $V(t)$. Além disso, $V(t)$ é contínuo em probabilidade. Se, adicionalmente, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |na_n|^2 < \infty$, então $V(t)$ é diferenciável em probabilidade.

2) Se $\alpha = p = 2$, então a SFSA converge quase certamente para $V(t)$. Além disso, $V(t)$ é contínuo em média quadrática. Sob a condição adicional $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, $V(t)$ é contínuo quase certamente.

A demonstração deste teorema é imediata e consiste simplesmente em reunir as conclusões dos Teoremas 4.3.7, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5 e 4.3.6, respectivamente. Vale ressaltar que o caso $\alpha \in (0,1]$ não está incluso no teorema anterior, pois, devido às limitações técnicas encontradas na demonstração das propriedades da transformada de Laplace, não conseguimos mostrar que a ELG tem solução para α nestas condições.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] APOSTOL, T. M. **Mathematical Analysis**. 2nd ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[2] ARNOLD, L. **Stochastic Differential Equations**: Theory and Applications. New York: John Wiley & Sons, 1974.

[3] BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; MIKOSCH, T.; RESNICK, S. I. **Lévy Processes Theory and Applications**. Boston: Birkhäuser, 2001.

[4] BHARUCHA-REID, A. T. **Random Integral Equations**. New York: Academic Press, v. 96, 1972.

[5] BAO, J. D.; ZHUO, Y. Z. **Investigation on Anomalous Diffusion for Nuclear Fusion Reactions**. Phys. Rev. C, v. 67, 2003.

[6] BELLMAN, R.; COOK, K. L. **Differential-Difference Equations**. London: Academic Press, v. 6, 1963.

[7] COBB, L. **Stochastic Differential Equations for the Social Sciences**. Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences, 1981, Westview Press

[8] CONT, R.; TANKOV, P. **Financial Modelling With Jump Processes**. Financial Mathematics Series. Florida: Chapman & Hall/CRC, 2004.

[9] DOOB, J. L. **Stochastic Processes**. Wiley Classics Library Edition. New York: John Wiley & Sons, 1990.

[10] DOREA, C. C. Y.; MEDINO A. V. **Anomalous Diffusion Index for Lévy Motions**. Journal of Statistical Physics, EUA, v. 123, n. 3, p. 685-698, 2006.

[11] FERREIRA, D. B. **Distância de Mallows para Estimação da Probabilidade de Ruína em Processos de Risco Clássico**. 2009. 81 f. Tese (Doutorado em Matemática)-Instituto de Matemática, UnB, Brasília, 2009.

[12] FIGUEIREDO, D. G. de **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2000.

[13] GNEDENKO, B. V.; KOLMOGOROV, A. N. **Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables**. 1st ed. Massachusetts: Addison Wesley, Inc., 1954.

[14] GOLDING, I.; COX, E. C. **Physical Nature of Bacterial Cytoplasm**. Phys. Rev. Lett., v. 96, p. 96-102, 2006.

[15] KANNAN, D.; BHARUCHA-REID, A. T. **Random Integral Equation Formulation of a Generalized Langevin Equation**. Journal of Statistical Physics, New York, v. 5, n. 3, p. 209-233, 1972.

[16] KANNAN, D. **On the Generalized Langevin Equation**. Journal of Mathematical and Physical Sciences, v. 11, n. 1, p. 259-271, 1977.

[17] KANNAN, D. **An introduction to Stochastic Processes**. North Holland Series in Probability and Applied Mathematics. New York: Elsevier North Holland, 1979.

[18] KHINTCHINE, Y. A. **Zwei Sätze Über Stochastische Prozesse mit Stabilen Verteilungen**. Mat. Sbornik, n. 3, p. 577-584, 1938.

[19] KLEBANER, F. C. **Introduction to Stochastic Calculus With Applications**. 2nd ed. London: Imperial College Press, 2005.

[20] LANGEVIN P., **Sur la Théorie du Mouvement Brownien**. C. R. Acad. Sci., Paris, v. 146, p. 530-533, 1908.

[21] LAPAS, L. C. **Transporte Balístico**. 2005. 79 f. Dissertação (Mestrado em Física)-Instituto de Física, UnB, Brasília, 2005.

[22] LAPAS, L. C. **Difusão Anômala e Termodinâmica de Nanopartículas**. 2008. 132 f. Tese (Doutorado em Física)-Instituto de Física, UnB, Brasília, 2008.

[23] LUKACS, E. **Stochastic Convergence**. 2nd ed. New York: Academic Press, v. 30, 1975.

[24] MEDINO, A. V. **Índice de Difusão Anômala, Processos de Lévy e Equação de Langevin Generalizada**. 2005. 67 f. Tese (Doutorado em Matemática)-Instituto de Matemática, UnB, Brasília, 2005.

[25] MEI, D. C.; XIE, G. Z.; ZHANG, L. **The Stationary Properties and the State Transition of the Tumor Cell Growth Mode**. The European Physical Journal B, v. 41, p. 107-112, 2004.

[26] MISHRA, M. N.; NAYAK, N. N.; PATTANAYAK, S. **Some Continuity Properties of a Random Fourier-Stieltjes Series**. Jour. Math. Phy. Sci., v. 14, n. 3, p. 259-271, 1980.

[27] MORI, H. **Transport, Collective Motion and Brownian Motion**. Progress of Theoretical Physics, v. 33, n. 3, p. 423-455, 1965.

[28] MORI, H. **A Continued-Fraction Representation of Time-Correlation Functions**. Progress of Theoretical Physics, v. 34, n. 3, p. 399-416, 1965.

[29] NAYAK, C., PATTANAYAK, S.; MISHRA, M. N. **Random Fourier-Stieltjes Series Associated With Stable Process**. Tôhoku Math. Journ., 39, p. 1-15, 1987.

[30] OKSENDAL, B. **Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications**. 5th ed. London: Springer-Verlag, 1998.

[31] PROTTER, P. E. **Stochastic Integration and Differential Equations**. 2th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[32] SAMAL, G. **Fourier Series Associated With the Sample Functions of a Stochastic Process**. Proc. Camb. Phil. Soc., 67, p. 101-106, 1970.

[33] SAMAL, G.; MISHRA, M. N. **Continuity Property of a Random Fourier-Stieltjes Series**. Bull. Cal. Math. Soc. 63, p. 97-100, 1971.

[34] SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M. S. **Stable Non-Gaussian Random Processes** Stochastic Models with Infinite Variance. London: Chapman & Hall, 2000.

[35] TRICOMI, F. G. **Integral Equations**. 1th ed. New York: Interscience Publishers, Inc., 1957.

[36] YOSIDA, K. **Lectures on Differential and Integral Equations**. New York: Interscience Publishers, v. 10, 1960.