



Universidade de Brasília  
Departamento de Economia

---

Dissertação de Mestrado

Risco Sistêmico e Provisão de Liquidez pelo Banco Central:  
Fluxos de Pagamento do Tipo Passeio Aleatório

Cecília de Souza Salviano

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza

Brasília, DF  
2011

Cecília de Souza Salviano

Risco Sistêmico e Provisão de Liquidez pelo Banco Central:  
Fluxos de Pagamento do Tipo Passeio Aleatório

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação, Universidade de Brasília, para obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Andrés de S. Peñaloza

Brasília, DF  
2011

*Deus dá sabedoria, conhecimento  
e felicidade ao homem que o agrada.*

*(Eclesiastes 2:26)*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço àquele de quem dependem todas as coisas: Deus.

Aos meus pais, pelo constante apoio e desprendimento.

Ao orientador desta dissertação, Prof. Dr. Rodrigo Andrés de S. Peñaloza, por sua dedicação e seu entusiasmo.

Aos professores Benjamin Tabak, Daniel Cajueiro e Maria Eduarda Tannuri Pianto, membros da banca, pelas sugestões dadas para o aprimoramento deste estudo e possíveis prolongamentos futuros.

A todos os meus amigos, em especial André Luís Brasil Cavalcante e Débora Costa Santos, pelas palavras de motivação.

## RESUMO

Inserido num contexto histórico de freqüentes tensões financeiras, a relevância deste trabalho está em contribuir para o desenvolvimento de um aparato teórico que auxilie os órgãos reguladores a identificar os níveis de vulnerabilidade do sistema bancário, a fim de que possam definir suas estratégias de regulação. Sendo assim, inspirados em trabalhos como o de Freixas, Parigi e Rochet (2000), apresentamos um modelo de conexões interbancárias que incorpora um mecanismo de aleatoriedade ao fluxo de pagamentos, o qual denominamos Cadeia de Crédito Estocástica. Os resultados mostraram que o grau de exposição do sistema à disciplina de mercado diminui conforme aumenta o número de bancos ou a intensidade dos fluxos de pagamento. Além disso, para o número de bancos adotado em cada análise, a cadeia de crédito estocástica apresentou maior nível de disciplina de mercado, se comparada com as demais estruturas consideradas. Investigamos ainda a capacidade de o sistema resistir à insolvência de algum de seus integrantes e analisamos sob quais condições o fechamento de algum banco gera uma reação em cadeia para o restante do sistema. Por fim, estudamos as circunstâncias em que o banco central deverá injetar liquidez na economia para evitar falências, o que permitiu uma melhor compreensão dos custos da política too-big-to-fail. Quanto a este último tópico, sua relevância deve-se à existência de um custo social em termos de recursos provenientes da arrecadação tributária do governo.

Palavras-chave: fluxo de pagamentos interbancários, disciplina de mercado, resiliência e regulação.

## ABSTRACT

In a historical context of frequent financial strains, the relevance of this work consists of contributing to the development of a theoretical framework which would help regulators to identify the levels of vulnerability in the banking system, in order to establish their regulatory strategies. This way, inspired by the works of authors such as Freixas, Parigi and Rochet (2000), we introduce a model of interbank connections that incorporates a mechanism of randomness to the flow of payments, which we call Stochastic Credit Chain. The results showed that the degree of exposure of the system to market discipline decreases as the number of banks or the intensity of payment flows increases. Moreover, considering the number of banks adopted in each analysis, the Stochastic Credit Chain presented a higher level of market discipline when compared with other structures considered in such analysis. We also investigated the capability of the system to resist to the insolvency of some of its members and we analyzed under what conditions the closure of a bank generates a chain reaction to the rest of the system. Finally, we studied the circumstances in which the central bank must inject liquidity into the economy to avoid bankruptcy, which allowed a better understanding of the costs of the policy too-big-to-fail. In regards to this last topic, its relevance is due to the existence of a social cost in terms of resources originating from government tax revenues.

Keywords: Interbank payment flow, market discipline, resiliency and regulation.

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1 – Introdução</b> .....	1
<b>Capítulo 2 – Revisão da Literatura</b> .....	3
<b>Capítulo 3 – Fluxo Interbancário do Tipo Passeio Aleatório</b> .....	9
<b>1. Fluxos Interbancários</b> .....	9
<b>1.1. Cadeia de Crédito (CRE)</b> .....	14
<b>1.2. Empréstimos Diversificados (DIV)</b> .....	14
<b>1.3. Cadeia de Crédito Estocástico (CCE)</b> .....	15
<b>2. Resiliência e Disciplina de Mercado</b> .....	15
<b>3. Risco de Contágio</b> .....	20
<b>4. Política <i>Too-Big-To-Fail</i></b> .....	24
<b>Capítulo 4 – Conclusão</b> .....	28
Referências Bibliográficas .....	30
Apêndice .....	31

# CAPÍTULO 1

## Introdução

Nos últimos anos, e especialmente após diversas crises financeiras, como por exemplo a deflagrada em 2008 a partir do mercado imobiliário dos Estados Unidos, o interesse a respeito de regulação bancária aumentou em todo o mundo. Isso porque, independente de qual seja a origem da crise, são necessários mecanismos de regulação que minimizem seus efeitos. De fato, os momentos de tensão financeira costumam revelar a importância da intervenção dos bancos centrais, bem como das organizações financeiras internacionais, a fim de minimizar a probabilidade de surgimento de uma crise e suas conseqüências.

Todavia, os agentes reguladores necessitam de um suporte teórico que os auxilie em suas decisões a respeito de como devem supervisionar ou interferir diretamente no funcionamento do sistema bancário. De fato, quando um banco se torna insolvente, seu fechamento pode causar repercussões sistêmicas que o órgão regulador deverá administrar. Por exemplo, o banco central necessita de mecanismos para avaliar se a sociedade incorre num custo maior com a falência de um banco ou com a utilização de recursos da sociedade para impedir a quebra. Sendo assim, nosso propósito é possibilitar um avanço no desenvolvimento desse suporte teórico.

Em Freixas, Parigi e Rochet (2000)<sup>1</sup>, os autores se propuseram a elaborar uma estrutura teórica para a análise de questões referentes a risco sistêmico. De maneira complementar, pretendemos estender a análise, incorporando um mecanismo de aleatoriedade ao nosso modelo de fluxos de pagamentos interbancários, a cadeia de créditos estocástica. Assim, com o auxílio de um modelo simplificado de conexões interbancárias, investigamos

---

<sup>1</sup>No decorrer deste trabalho, esse artigo poderá ser referenciado por FPR (2000).

a capacidade do sistema resistir à insolvência de algum de seus integrantes e, ainda, sob quais condições o fechamento de algum banco é capaz de gerar uma reação em cadeia para o restante do sistema. Além disso, apresentamos uma análise dos custos da política *too-big-to-fail*.

Os resultados mostraram que, assim como nos modelos apresentados em FPR (2000), também na cadeia de crédito estocástica, o grau de exposição do sistema à disciplina de mercado diminui conforme aumenta o número de bancos ou a intensidade dos fluxos de pagamento. Isso significa que a rede de conexões interbancárias provê um subsídio implícito, devido à resiliência do sistema interbancário, que enfraquece a disciplina de mercado e o permite enfrentar possíveis choques de liquidez, sem que ocorram falências, ainda que algum banco fique insolvente.

Demonstramos também que, para o número de bancos adotado nas análises, a cadeia de crédito estocástica apresenta maior nível de disciplina de mercado, se comparada com as estruturas apresentadas em FPR (2000), sendo, portanto, o modelo no qual um banco insolvente tem menos condições de transferir suas perdas para os demais. Provavelmente esse resultado decorre da incorporação do componente aleatório ao modelo, o que concede maior flexibilidade aos consumidores.

De modo similar ao verificado em FPR (2000), porém aplicado à cadeia de crédito estocástica, é apresentada uma forma de verificar quando o fechamento de um banco engatilha a liquidação de pelo menos mais um, isto é, as situações em que haverá contágio. Por fim, uma análise gráfica revela as circunstâncias em que o banco central deverá injetar liquidez no sistema, caso escolha evitar falências, além de viabilizar considerações a respeito do custo desse tipo de intervenção.

Com base no que foi apresentado, escolhemos subdividir o trabalho da seguinte forma: o segundo capítulo apresenta uma revisão da literatura pertinente; o terceiro discorre pelo modelo de fluxo interbancário do tipo passeio aleatório, abordando os tópicos resiliência e disciplina de mercado, risco de contágio e política *too-big-to-fail*; e o quarto capítulo apresenta as considerações finais. Por fim, para um acompanhamento mais detalhado das demonstrações, aconselhamos consultar o apêndice.

# Capítulo 2

## Revisão da literatura

Nesse capítulo, faremos uma breve retomada de algumas pesquisas mais relevantes a respeito de risco sistêmico em mercados financeiros e regulação bancária. Inicialmente, podemos citar Bhattacharya e Thakor (1993), que fizeram uma revisão da literatura em economia bancária, bem como de suas implicações para questões de política pública. Esse artigo enuncia o que denomina de “enigmas fundamentais” da teoria bancária, dentre os quais se destacam as seguintes questões: “Por que os bancos frequentemente negam crédito em vez de cobrar juros mais altos?”, “Por que os bancos financiam ativos ilíquidos com passivos líquidos?” e “Os bancos devem estar sujeitos à regulação? Como?”.

Os autores argumentam que há necessidade de mais investigações a respeito da existência de um desenho ótimo para o sistema bancário. Esse seria o primeiro passo para a compreensão do papel mais adequado para a atuação do governo nesse sistema, afinal, mesmo quando os bancos são privados, é muito comum que eles necessitem de algum apoio governamental. Além disso, um melhor entendimento sobre um possível desenho ótimo do sistema impulsionaria a resolução de questionamentos, tais como: “Quão concentrada a indústria bancária deve ser?”, “A regulação deve ser direta ou indireta?” “Fusões bancárias aumentam o bem-estar social?” e “Como alinhar os incentivos dos reguladores e dos contribuintes?”.

No que se refere mais especificamente a risco sistêmico, Rochet e Tirole (1996) o definem como a propagação das dificuldades econômicas de um agente para outros que estejam vinculados àquele por meio de transações financeiras. Analogamente, a expressão risco sistêmico aplicada a mercados financeiros refere-se à possibilidade de se alastrar um

distúrbio que tenha se iniciado em algum segmento específico. Dessa forma, a origem de uma crise pode tanto ser atribuída a um único banco com severos problemas de liquidez ou insolvência, quanto provir de variáveis macroeconômicas que estejam afetando negativamente diversas instituições ao mesmo tempo. Além disso, uma crise de natureza sistêmica no mercado financeiro certamente afeta adversamente a economia como um todo.

Quanto aos sistemas de pagamentos, Freixas e Parigi (1998) apresentam uma comparação em termos de risco e eficiência. O artigo decorre sobre os dois principais tipos de sistemas de pagamentos interbancários, o “líquido” e o “bruto”, os quais se diferenciam pelo nível de exposição ao risco de contágio. No primeiro, as compensações ocorrem apenas no fim do dia, o que implica na concessão de crédito intradiário de um banco para o outro, deixando-os mais expostos. No segundo, as transações são liquidadas na base de um-a-um, de maneira que os bancos precisam manter grandes reservas para executar suas ordens de pagamento. Nesse caso, o grau de exposição é menor. Verifica-se, dessa forma, um *trade-off* entre os sistemas.

Com o objetivo de realizar uma análise de custo-benefício, esses autores construíram um modelo de equilíbrio geral baseado em Diamond e Dybvig (1983), com duas economias-ilhas idênticas, um consumidor proveniente de cada ilha, um bem e três períodos: 0, 1, 2. O investimento de uma unidade no período 0 retorna  $R$  no período 2, com  $R > 1$ . Se uma fração  $\alpha$  for resgatada no período 1, o retorno é  $\alpha$  em  $t = 1$  e  $(1 - \alpha)R$  em  $t = 2$ . Mas diferente de Diamond e Dybvig (1983), no qual a incerteza dos consumidores surge apenas do período de consumo, no modelo de Freixas e Parigi (1998), as incertezas emergem de diversas fontes: o tempo e a localização do consumo, além do retorno dos investimentos.

Assim, a principal contribuição desse artigo é a análise do *trade-off* entre os sistemas bruto e líquido. Os resultados são consistentes com a intuição de que o sistema bruto está menos exposto ao contágio, mas necessita de uso intensivo de liquidez, já o sistema líquido economiza na liquidez, mas expõe os bancos ao contágio. O artigo mostrou também que, dependendo dos valores dos parâmetros do modelo, um determinado sistema será preferido. Dessa forma, um sistema bruto é preferido se for alta a probabilidade dos bancos terem um alto retorno, se for baixo o custo de oportunidade de manter reservas e se for pequena a proporção de consumidores que têm de consumir na outra localização.

Caso contrário, o sistema líquido domina.

Nesse sentido, os resultados também mostraram que, na ausência de incerteza sobre o retorno dos investimentos, é preferível adotar o sistema de compensação líquido. Isso acontece porque, no sistema bruto, mais consumidores sacam no primeiro período, de modo que uma maior proporção dos investimentos é liquidada em  $t = 1$ , em comparação com o sistema de compensação líquido. Como o retorno dos investimentos que chegam até o segundo período é maior que um, o sistema líquido domina o bruto. De fato, é necessário manter mais reservas para fazer frente às possíveis liquidações de investimentos em  $t = 1$  no sistema de compensação bruto.

Bandt e Hartmann (2000) apresentaram uma definição mais ampla de risco sistêmico, a qual é subjacente a uma melhor compreensão de crises financeiras, além de ser a principal justificativa para a regulação bancária, bem como para a supervisão prudencial e para a necessidade de gerenciamento de crises. Além disso, o conceito de risco sistêmico também é utilizado como base para políticas financeiras e monetárias, com vistas a manter a estabilidade dos sistemas financeiros. Os autores enfatizaram que risco sistêmico vai além da vulnerabilidade dos bancos a corridas bancárias. De fato, o cerne desse conceito é a noção de contágio, isto é, uma propagação particularmente forte de falências de uma instituição para outras, mas também inclui, por exemplo, instabilidades financeiras simultâneas decorrentes de choques agregados.

Sendo assim, esse artigo se propõe a fornecer um acesso eficiente à literatura sobre risco sistêmico, além de incentivar pesquisas que contribuam para o entendimento de exemplos concretos de crises financeiras e de possíveis políticas que possam prevenir ou aliviar futuras crises. Dessa forma, foi realizada uma minuciosa apresentação sobre risco sistêmico em mercados bancários, mercados financeiros e sistemas de liquidação e pagamentos. O trabalho apresenta também um grande número de testes econométricos, além de outras avaliações quantitativas aplicadas às diversas facetas do risco sistêmico, especialmente contágio, crises associadas e falências. Por fim, foi ressaltado que a literatura ainda é insuficiente no que se refere a testes empíricos que façam uma clara distinção entre o contágio propriamente dito e as crises associadas causadas por um choque comum, bem como entre eventos sistêmicos eficientes e ineficientes.

Freixas, Parigi e Rochet (2000), por sua vez, fizeram uma análise do risco sistêmico, enquanto perigo de contágio a partir da falência de uma instituição financeira. Esse tipo de análise é utilizada por diversos bancos centrais como uma justificativa para interferir na economia e recuperar instituições que sejam consideradas *"too-big-to-fail"* e estejam correndo risco de quebrar. Nesse artigo, foram apresentados dois modelos representativos dos fluxos dos pagamentos interbancários, os quais capturam simplificada a propagação de crises em um ambiente sujeito a choques de liquidez e de solvência. A demanda por liquidez foi considerada endógena, uma vez que os depositantes estão incertos a respeito de onde vão consumir. Essa incerteza é a justificativa para haver um mercado interbancário, o qual permitirá aos bancos transferir os recursos de uma localização para outra. Aqui, é importante lembrar que em Diamond e Dybvig (1983), os consumidores estão sujeitos a choques de preferência e estão incertos a respeito de quando vão consumir.

Alguns anos depois, Galos e Soramäki (2005) estudaram dois arranjos de liquidação interbancária alternativos: um sistema inseguro de liquidação no fim do dia e um sistema de compensação líquida seguro. A diferença entre estas estruturas é que apenas o sistema seguro possui regras para garantir os pagamentos de todos os participantes, inclusive se um ou mais deles forem incapazes de honrar suas obrigações líquidas. Estas regras incluem limites de crédito intradiário, mecanismos de garantia das posições e regras de compartilhamento das perdas. Quanto à origem do risco, no sistema inseguro, as exposições emergem quando são devolvidos os pagamentos enviados ou recebidos por um banco falido. Já no sistema seguro, os riscos surgem quando os prejuízos são partilhados de acordo com as regras estabelecidas para a divisão das perdas.

Os resultados indicaram que as conseqüências sistêmicas de uma falência bancária repentina e inesperada podem ser amplamente mitigadas, caso sejam utilizadas técnicas de administração de riscos, tais como segurança jurídica para compensação multilateral, limites de exposição, mecanismos de garantia das posições e regras de divisão das perdas. Entretanto, os autores admitem a existência de ressalvas e limitações para a aplicabilidade desses resultados. Embora a falência de um banco raramente ocorra de forma isolada das condições do mercado, a metodologia utilizada não leva em consideração a chance de transbordamento da perda de confiança para outros bancos, nem a possibilidade de deteri-

oração das expectativas futuras, o que pode reduzir o montante das garantias disponíveis. Em um cenário que considere tais circunstâncias, as consequências sistêmicas tendem a ser muito maiores. Além disso, os resultados seriam mais acurados se fosse considerado um período de tempo maior, que permitisse à análise capturar os níveis de exposição raros, porém elevados, que podem se manifestar sob situações anormais de mercado.

Sob outra perspectiva, em Acharya (2009), o risco sistêmico é determinado endogenamente no modelo e corresponde à correlação existente entre o retorno dos ativos detidos pelos bancos. Assim, quando os bancos assumem investimentos correlacionados, o risco agregado da economia aumenta. Segundo o autor, a presença de externalidades negativas na falência de um banco sobre a saúde dos demais, bem como a limitação dos passivos dos bancos, gera incentivos para a “transferência de risco sistêmico”, que é a situação em que todos os bancos assumem investimentos correlacionados, aumentando assim o risco presente na economia como um todo.

Nesse sentido, o autor argumenta que os tradicionais mecanismos de regulação, tais como política de fechamento de bancos e exigências de adequação de capital, que normalmente consideram apenas o risco do próprio banco falir, não conseguem atenuar os incentivos para a transferência de risco sistêmico, e podem, na verdade, acentuá-lo. Assim, a regulamentação prudencial é apresentada como um mecanismo que atua em um nível coletivo, regulando cada banco em função tanto dos riscos que também são comuns aos demais (riscos correlacionados), quanto em função dos riscos específicos de cada banco. Outra contribuição desse trabalho está em definir risco sistêmico como a resposta de equilíbrio dos intermediários financeiros, o que foi crucial para a construção de modelos de risco sistêmico em estruturas tradicionais de equilíbrio geral.

Allen, Babus e Carletti (2009) também consideraram esse tipo de risco sistêmico que é proveniente do incentivo que as instituições financeiras têm para diversificar seus investimentos. Isso porque, enquanto a diversificação distribui o risco entre muitas instituições, ela também aumenta a correlação entre os retornos de seus portfólios. Assim, o que inicialmente é um benefício para cada banco, pode se tornar um custo para o sistema como um todo. Em equilíbrio, os bancos escolhem o número de conexões com os outros bancos de uma maneira ótima, considerando o *trade-off* existente entre as vantagens da

diversificação e o custo de promovê-la.

Os autores fizeram uma comparação entre “redes aglomeradas”, nas quais os bancos mantêm portfólios muito similares, e “redes não aglomeradas”, que possuem carteiras com retornos menos correlacionados, e verificaram que essas estruturas só desempenham algum papel quando os bancos utilizam financiamento de curto prazo, o que acontece muitas vezes por ser mais barato do que o de longo prazo. No modelo apresentado, observa-se em determinado momento, um sinal que indica se pelo menos um banco vai falir ou não.

Sendo assim, a conclusão do artigo é que, para níveis mais baixos do custo que os bancos incorrem quando vão à falência, a chegada de um sinal negativo pode levar à liquidação apenas na rede aglomerada, o que torna preferível uma rede não aglomerada. Mas para níveis mais altos desse custo, um sinal ruim leva à liquidação nos dois tipos de rede, de maneira que a rede aglomerada será superior, porque nessa estrutura o custo associado à falência é menor e, portanto, é também menor o número de situações em que as falências ocorrem.

Finalmente, poderíamos citar diversas outras pesquisas relacionadas, todavia uma extensa revisão da literatura foge aos nossos objetivos.

# Capítulo 3

## Fluxo interbancário do tipo passeio aleatório

### 1 Fluxos interbancários

Nesta seção, será definida a estrutura básica do modelo adotado ao longo do texto, nos moldes encontrados em Freixas, Parigi e Rochet (2000). Em primeiro lugar, será adotada uma economia com  $N$  localizações, sendo que existe exatamente um banco em cada uma delas. À disposição dos consumidores, existe apenas um bem, o qual pode ser admitido como o papel-moeda da economia, já que o objetivo é a análise do crédito interbancário. Assim, uma vez que o modelo é estruturado em termos de sistemas de pagamento, os eventos ocorrem ao longo de um dia. Dessa forma, consideram-se três períodos, que podem ser interpretados da seguinte maneira:  $t = 0$  corresponde ao início do dia,  $t = 1$ , ao intradiário e  $t = 2$ , ao *overnight*.

Cada consumidor, neutro ao risco, possui uma unidade do bem em  $t = 0$ , que poderá ser estocada de um período para outro ou investida, uma vez que o consumo acontece somente em  $t = 2$ . Esse investimento não pode ser realizado diretamente pelos consumidores, que, dessa forma, deverão depositar suas dotações iniciais em algum banco. Caberá a este, portanto, escolher a parcela dos depósitos que será estocada e a que será investida. Denota-se por  $R_i$  o retorno bruto em  $t = 2$  do investimento do banco  $i$ , para cada unidade investida em  $t = 0$  e não liquidada em  $t = 1$ . Assume-se também que, para todo  $i$ ,  $R_i$  é observado por todos os bancos apenas em  $t = 1$ , embora seja verificado pelos consumidores apenas *ex post*, em  $t = 2$ .

Existe um montante  $D_0$ , definido contratualmente, a ser pago aos depositantes que

sacarem em  $t = 1$ , desde que o banco não seja fechado neste período. Assim, em  $t = 2$ , os demais depositantes dividem de modo igualitário os retornos dos ativos remanescentes. A fim de financiar os saques realizados em  $t = 1$ , os bancos utilizam a parcela dos depósitos que mantêm em estoque e, se necessário, liquidam uma parte de seus investimentos. Contudo, cada unidade de investimento liquidado antes do segundo período resulta para o banco em apenas  $\alpha$  unidades do bem ( $\alpha \leq 1$ ).

Definimos como  $\lambda$  a fração dos depositantes que consome em outras localizações no período  $t = 2$ . Estes são os chamados *viajantes*. Portanto,  $\lambda$  corresponde à fração de *viajantes* e  $(1 - \lambda)$  a de *não-viajantes*. É nesse aspecto que a incerteza é inserida no modelo, pois os consumidores estão incertos a respeito de onde vão consumir. Tal característica favorece a análise de aspectos concernentes aos fluxos de pagamento entre as localizações.<sup>1</sup>

A fim de continuar a descrição dessa estrutura teórica, é necessário esquematizar quais depositantes viajam e para quais localizações, ou seja, quais são os *padrões de viagem*. Esses padrões resultam das necessidades de pagamento dos depositantes, são exogenamente determinados pela natureza em  $t = 1$  e, então, revelados a cada consumidor individualmente. Para cada depositante da localização  $i$ , a natureza determina se ele viaja e em qual localização  $j$  ele consome em  $t = 2$ .

Todavia, na ausência de conexões interbancárias via sistemas de pagamentos, os viajantes precisam sacar em  $t = 1$  e transferir o papel-moeda por si mesmos, para que possam consumir na localização  $j$  ( $i \neq j$ ). O custo dessa transferência é a perda do retorno que seria obtido com o depósito. Assim, a fim de evitar tal prejuízo, são criadas as linhas de crédito entre os bancos, visando minimizar o montante de bens não investidos. Dessa forma, a linha de crédito concedida pelo banco  $j$  ao banco  $i$  confere aos depositantes do banco  $i$  que estão de viagem para a localização  $j$ , o direito de terem seus depósitos transferidos para a localização  $j$ , onde poderão usufruir do consumo em  $t = 2$ , de acordo com sua participação sobre os ativos do banco  $j$ .

---

<sup>1</sup>O *continuum* de depositantes sofre um choque locacional dado independentemente por variáveis aleatórias idiossincráticas com a mesma distribuição de Bernoulli. Pela Lei Fraca dos Grandes Números, a fração de viajantes será igual à probabilidade de viagem.

Para exemplificar, considere que um depositante do banco  $j$  receba um cheque emitido pelo banco  $i$  numa transação comercial e o deposite em  $j$ , e que, simultaneamente, outra pessoa deposite um cheque proveniente de  $j$  no banco  $i$ . Na linguagem do modelo, esses indivíduos são chamados de viajantes, pois se admite a existência de apenas um banco em cada localidade. Para concluir o exemplo, os bancos compensam seus direitos em  $t = 2$  e transferem o montante correspondente uns aos outros. No modelo, a tecnologia de transferência está disponível apenas para negociações entre bancos.

Ao final do segundo período, todos os passivos de um banco têm a mesma prioridade. Assim, o valor *ex post* de uma unidade de depósito no banco  $i$  é dado por  $D_i$ , que corresponde à razão entre o total de ativos e de passivos do banco  $i$ . Além disso, se um banco for fechado no primeiro período, seus ativos serão divididos apenas entre seus próprios depositantes. Esse fechamento poderá decorrer de uma decisão do regulador ou de uma corrida bancária. Dessa hipótese, infere-se que o banco liquidado em  $t = 1$  é eliminado da rede de conexões interbancárias.

Existe ainda uma matriz  $\Pi$ , que define para onde, e em qual proporção, os consumidores viajam, a qual está relacionada à matriz  $T$ , representativa dos padrões de viagem, por meio da seguinte equação:

$$\Pi = (1 - \lambda)I + \lambda T$$

onde  $\Pi = [\pi_{ij}]_{N \times N}$ ,  $I$  é a matriz identidade e  $T = [t_{ij}]_{N \times N}$ . Por definição,  $\sum_j \pi_{ij} = 1$ , para todo  $i$ , ou seja, a soma em cada linha é igual a um. Além disso, considerou-se por hipótese, a fim de simplificar as demonstrações, que  $\sum_i \pi_{ij} = 1$  para todo  $j$ , isto é, a soma em cada coluna também corresponde a um. Todavia, essa última hipótese não será adotada na seção sobre política *too-big-to-fail*.

É conveniente explicar que  $\lambda$ , a fração dos depositantes que consome em outras localizações em  $t = 2$ , captura a intensidade dos fluxos interbancários, enquanto a matriz  $T$  expressa a estrutura desses fluxos, isto é, descreve as localizações de origem e de destino dos viajantes. Sendo assim, a matriz  $\Pi$  consolida esses dois conceitos.

Em termos de Teoria dos Jogos, pode-se associar os jogadores aos  $N$  bancos e seus depositantes. Assim, os bancos decidem se estendem linhas de crédito uns aos outros em

$t = 0$ . Caso resolvam negativamente, todos os viajantes têm de sacar em  $t = 1$ , o que reduz o montante que cada banco pode investir: esta é a chamada situação autárquica. Por outro lado, na presença de linhas de crédito interbancário, cada depositante proveniente da localização  $i$ , mas que está consumindo em  $j$ , determina em  $t = 1$  a fração  $x_{ij}$  de seus depósitos a serem mantidos no banco  $j$ . Dessa forma, o percentual de investimentos remanescentes em  $j$  é:

$$X_j = \max \left[ 1 - \sum_k \pi_{jk} (1 - x_{jk}) \frac{D_0}{\alpha}, 0 \right]$$

Então, para determinar os possíveis equilíbrios do jogo dos depositantes, é necessário comparar  $D_0$  com os valores dos depósitos,  $D_1, \dots, D_N$ , os quais são determinados endogenamente para todos os bancos em  $t = 2$ , de acordo com a equação de fechamento do balanço para o banco  $i$ , na qual o lado esquerdo representa os ativos e o lado direito, os passivos.

$$X_i R_i + \sum_j \pi_{ji} x_{ji} D_j = \left( \sum_j \pi_{ji} x_{ji} + \sum_j \pi_{ij} x_{ij} \right) D_i$$

Nesse sentido, sabe-se que  $X_i R_i$  representa o retorno dos investimentos realizados pelo banco  $i$ ,  $\sum_j \pi_{ji} x_{ji} D_j$  são os créditos realizados no banco  $i$ ,  $\left( \sum_j \pi_{ji} x_{ji} \right) D_i$  são suas dívidas com os outros bancos e  $\sum_j \pi_{ij} x_{ij} D_i$ , seus depósitos. Note que a equação acima não se aplica quando o banco  $i$  é fechado, pois, nesse caso,  $X_i = D_i = 0$ .

O comportamento ótimo de cada depositante é  $x_{ij} = 1 \iff D_j \geq D_0, \forall i, j$ . Como  $x_{ij}$  depende apenas de  $j$ , será utilizada a notação  $x^j$ , onde  $x^j = 1$  se  $D_j \geq D_0$  e  $x^j = 0$ , caso contrário. Isto permite uma simplificação para a equação de fechamento do balanço:

$$X_i R_i + \left( \sum_j \pi_{ji} D_j \right) x^i = \left[ \left( \sum_j \pi_{ji} \right) x^i + \sum_j \pi_{ij} x^j \right] D_i$$

Estabelecemos ainda as seguintes notações:  $\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_N)$ ,  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$ , e  $\Pi'$  é a transposta de  $\Pi = [\pi_{ij}]_{N \times N}$ . Desta forma, para um dado vetor de estratégias  $(x_{ij})_{i,j}$  e considerando-se o banco  $i$ , pode-se calcular o percentual de investimentos remanescentes  $X_i$  e o retorno de um depósito  $D_i$ . É possível, então, checar se as estratégias são ótimas:

$$x_{ij}^* = \begin{cases} 1, & \text{se } D_j \geq D_0 \\ 0, & \text{se } D_j < D_0 \end{cases}$$

Quando o mecanismo de crédito interbancário funciona sem problemas,  $x_{ij} = 1$ , para todo  $(i, j)$  e o bem estar dos depositantes é maior do que na situação autárquica. Isso acontece porque as linhas de crédito interbancário possibilitam a cada banco manter um montante menor de reservas líquidas e investir mais. Entretanto, o sistema é também mais vulnerável, uma vez que existem outros equilíbrios além de  $x_{ij} = 1$ .

De fato, assumindo-se que  $R_i > D_0 \forall i$ , o que implica que todos os bancos estão solventes, FPR (2000) mostraram que existem pelo menos dois equilíbrios em estratégias puras para o jogo em análise: a alocação ineficiente de corrida bancária, na qual todos os bancos fecham, isto é,  $x^* = 0$  (equilíbrio de travamento especulativo) e a alocação eficiente em que nenhum banco fecha, ou seja,  $x^* = 1$  (equilíbrio das linhas de crédito). É simples concluir que o equilíbrio de linhas de crédito é preferível a uma situação autárquica que, por sua vez, é preferível ao equilíbrio de travamento especulativo.

Em relação ao equilíbrio de corrida bancária, verifica-se que  $D_i = 0$  quando  $x_{ij} = 0 \forall j$ . Quanto ao segundo equilíbrio, considere que  $x^j = 1$  implica em  $X_j = 1$ , de maneira que  $x = (1, \dots, 1)$  é um equilíbrio quando todos os bancos estão solventes. FPR (2000) ressaltam que não existem outros equilíbrios<sup>2</sup> quando  $\alpha = D_0$ . Todavia, quando  $\alpha < D_0$ , outros equilíbrios poderão existir.<sup>3</sup>

Por fim, devido à complexidade das transferências envolvidas em uma matriz  $\Pi$  arbitrária, FPR (2000) ilustram seus resultados a partir de dois tipos simplificados de padrões de viagem: a cadeia de crédito e o modelo de empréstimos diversificados.

O cerne de nosso modelo é a consideração de um terceiro tipo, que chamamos de *cadeia de crédito estocástica*. Ela é um meio-termo entre os casos extremos delineados por FPR (2000). Desenvolvemos, então, uma estrutura alternativa de conexões interbancárias. Dessa forma, determinadas investigações serão retomadas, considerando-se outra configuração de fluxos de pagamentos, a qual incorpora um passeio aleatório. É por essa razão

---

<sup>2</sup>De fato, se  $x^i = 0$ , a equação de equilíbrio do balanço implica que  $X_i = 0$  ou  $D_i = R_i$ . Entretanto,  $X_i$  não poderá ser nulo, a menos que todos os  $x^j$  também sejam. Além disso,  $D_i = R_i > D_0$  contradiz a condição do primeiro equilíbrio, porque se  $R_i > D_0$ , então  $x^i$  não pode ser igual a zero, pois o banco  $i$  não está insolvente.

<sup>3</sup> $X_i$  pode ser nulo ainda que algum  $x^j$  seja positivo, de modo que outros equilíbrios poderão existir.

que nosso modelo será chamado de cadeia de crédito estocástica (CCE).

## 1.1 Cadeia de crédito (CRE)

Nesse caso,  $t_{ij} = 1$  se  $j = i + 1$  e  $t_{ij} = 0$ , caso contrário, com a notação convencional de que  $N + 1 = 1$ . Para visualizar essa situação, basta imaginar as localizações dispostas ao redor de um círculo. Todos os viajantes de  $i$  vão para  $i + 1$ , a localização adjacente, onde deverão consumir em  $t = 2$ . Dessa forma, o banco da localização  $i + 1$  provê crédito aos depositantes que estão chegando da localização  $i$ . Isso implica que os empréstimos fluem em direção oposta à viagem: quando o consumidor viaja de  $i$  para  $j$ , é o banco desta última localização que concede uma linha de crédito interbancário para o primeiro.

$$T_{cre} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.2 Empréstimos diversificados (DIV)

Nesse segundo tipo,  $t_{ij} = \frac{1}{N-1}$ , com  $i \neq j$ . Assim, os bancos, dois a dois, permutam  $\frac{\lambda}{N-1}$  clientes, de maneira que, em  $t = 2$ , na localização  $j$ , existem  $\frac{\lambda}{N-1}$  viajantes de cada uma das outras  $(N - 1)$  localizações. Dessa forma, cada banco concede linhas de crédito uniformemente a todos os outros  $(N - 1)$  bancos.

$$T_{div} = \frac{1}{N-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.3 Cadeia de crédito estocástica (CCE)

Assim como na cadeia de crédito, para compreender o novo padrão de viagens também é conveniente imaginar as localizações dispostas ao redor de um círculo. Contudo, agora os viajantes de  $i$  vão para  $i + 1$ , uma das duas localizações vizinhas, com probabilidade  $p$ , e para  $i - 1$  com probabilidade  $(1 - p)$ . Dessa forma, o novo modelo incorpora aleatoriedade de uma maneira simples. A nova matriz  $T$ , representativa da *cadeia de crédito estocástica*, será conforme a especificação abaixo:

$$T_{cce} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 - p \\ 1 - p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 - p & 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Resiliência e Disciplina de Mercado

As primeiras questões abordadas a partir da estrutura teórica apresentada são resiliência e disciplina de mercado. Um sistema bancário pode ser considerado resiliente quando adota um mecanismo de pagamentos para o qual há maior chance de um banco insolvente não falir. Isso acontece quando o sistema absorve as perdas desse banco, sem provocar uma corrida por saques. De fato, nem sempre as forças de mercado conduzem ao fechamento dos bancos insolventes. Já o termo disciplina de mercado se refere ao fechamento do banco que se encontra insolvente, porém sem contaminar os demais. Nesse sentido, o objetivo desta seção é verificar os níveis de resiliência e disciplina de mercado em cada um dos modelos considerados.

Para viabilizar essa investigação, adotar-se-á a seguinte hipótese quanto ao retorno dos investimentos na localização  $i$ :

$$R_i = \begin{cases} R \geq D_0, & \text{quando o banco } i \text{ está solvente;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No mais, a alocação eficiente de recursos requer que os bancos sejam liquidados se, e somente se, eles estiverem insolventes. Portanto  $X_i = 0$ , se  $R_i = 0$  ou  $X_i = 1$  se  $R_i = R$ . Dessa forma, deseja-se saber sob quais condições  $x = (1, \dots, 1)$  permanecerá um equilíbrio quando o banco 1 estiver insolvente. É conveniente recordar que  $x = (1, \dots, 1)$  implica em  $D_i \geq D_0, \forall i$ , e que se o banco 1 está insolvente, então  $R_1 = 0$ , o que, por sua vez, implica em  $X_1 = 0$ .

Seja  $M(\lambda) = (2I - \Pi')^{-1}$  e recorde que  $\sum_j \pi_{ij} = 1$  e  $\sum_j \pi_{ji} = 1$ , para todo  $i$ . Sendo assim, a equação de fechamento do balanço pode ser escrita da seguinte forma:

$$X_i R_i + \left( \sum_j \pi_{ji} D_j \right) x^i = \left[ \left( \sum_j \pi_{ji} \right) x^i + \sum_j \pi_{ij} x^j \right] D^i$$

o que, em notação matricial, equivale a  $\mathbf{R} + \Pi' \mathbf{D} = 2\mathbf{D}$ . Isso implica que  $(2I - \Pi') \mathbf{D} = \mathbf{R}$  e, portanto,  $\mathbf{D} = (2I - \Pi')^{-1} \mathbf{R}$ . Logo, a equação de fechamento do balanço é:

$$\mathbf{D} = M(\lambda) \mathbf{R}$$

Para que nenhum banco quebre, ou seja,  $x = (1, \dots, 1)$ , é necessário que  $D_i \geq D_0 \forall i$ , isto é, nenhum banco fecha se todos puderem pagar aos depositantes que sacarem em  $t = 1$  ao menos o montante  $D_0$ , que é definido contratualmente. Se o banco 1 estiver insolvente, então  $R_1 = 0$ , e o vetor  $\mathbf{D}$  será:

$$\mathbf{D} = R(2I - \Pi')^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como  $R$  é dado, importa saber qual é o menor componente do vetor  $(2I - \Pi')^{-1} (0, 1, \dots, 1)$ , o qual será designado por  $\gamma$ . Note que, para valores maiores de  $\gamma$ , será mais provável que  $D_i \geq D_0 \forall i$ , ou seja, maior a chance de nenhum banco quebrar. Portanto,  $\gamma$  pode ser interpretado como uma medida inversa do grau de exposição do sistema bancário à disciplina de mercado quando algum participante está insolvente. Quanto maior  $\gamma$ , menor a disciplina de mercado. Assim, pode-se dizer que a condição para que nenhum banco quebre quando algum deles está insolvente é que  $R\gamma$  exceda  $D_0$ , o que equivale a  $D_i \geq D_0, \forall i$ , e também é similar a  $M(\lambda) R \geq D_0$ .

A partir de agora, objetiva-se descobrir como  $\gamma$  varia em função de  $\lambda$  e de  $N$  na cadeia de crédito estocástica ( $CCE$ ). Dessa forma, é necessário obter, a partir de  $T^{CCE}$ , a matriz  $(2I - \Pi')$ , a qual fora denominada  $F$ , de modo que  $M(\lambda) = F^{-1}$ . Visando descobrir uma equação que representasse  $M(\lambda)$  para  $N$  qualquer, foram calculadas as expressões de  $F^{-1}$  para  $N = \{3, \dots, 10\}$ . Embora tenha sido verificado um padrão de similaridade para os diversos  $F^{-1}$  calculados, este trabalho não apresenta uma forma genérica para  $M(\lambda)$ . Recorde que a condição necessária para que  $x = (1, \dots, 1)$  seja um equilíbrio quando  $\mathbf{R} = (0, R, \dots, R)$  é:

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \geq \frac{D_0}{R}$$

De acordo com as explicações anteriores,  $\gamma_N^{CCE}$  corresponde ao menor dos componentes do lado esquerdo da condição acima. Sendo assim, foram obtidas as expressões para  $\gamma_N^{CCE}$  para  $N = \{3, \dots, 10\}$ . Além disso, foi possível averiguar que  $\gamma_N^{CCE}$  é crescente em  $\lambda$  por meio da primeira derivada, a qual é sempre maior que zero nesse intervalo. Assim, verificou-se como  $\gamma$  varia em função de  $\lambda$  na cadeia de crédito estocástica. Já em relação a  $N$ , foi feita a suposição de que  $\lambda = 1$ , o que permitiu calcular numericamente e concluir que  $\gamma_N^{CCE}$  também é crescente em  $N$  (*vide* apêndice). Sendo assim, embora o comportamento de  $\gamma_N^{CCE}$  não tenha sido provado em termos gerais, o mais provável é que o padrão observado até  $N = 10$  se mantenha para  $N$  qualquer. Ressalta-se que esse mesmo resultado é alcançado em FPR (2000, proposição 3), porém aplicado aos modelos cadeia de crédito e empréstimos diversificados. No apêndice, reproduzimos o enunciado dessa proposição, porém com uma demonstração nossa mais detalhada.<sup>4</sup>

**Proposição 1:** *Para  $N = \{3, \dots, 10\}$ ,  $\gamma_N^{CCE}$  é crescente tanto em  $\lambda$  quanto em  $N$ .*

A demonstração da proposição 1 está no apêndice. Conforme explicação anterior,  $\gamma$

---

<sup>4</sup>A persistência do resultado para os valores de  $N$  analisados nos faz crer que esse resultado seja geral. Entretanto, devido à dificuldade analítica para inversão das matrizes, podemos apenas conjecturar, com muita convicção, essa generalidade.

é uma medida inversa do grau de exposição do sistema bancário à disciplina de mercado quando algum participante está insolvente. Assim, aumentar o tamanho da rede de conexões, ou seja, o número de bancos,  $N$ , bem como a intensidade dos fluxos de pagamentos, isto é, a proporção de viajantes,  $\lambda$ , diminui a exposição do sistema à disciplina de mercado. Isso significa que são maiores as chances de um banco insolvente não vir à falência, porque, nesse caso, os demais bancos absorvem suas perdas. Como foi dito anteriormente, a condição necessária para que nenhum banco feche as portas quando um deles está insolvente é que o menor valor dos depósitos em  $t = 2$ , ou seja,  $R\gamma$ , exceda  $D_0$ . Portanto, quanto maior  $\gamma$ , maior a chance de nenhum banco falir, nem mesmo aquele que está insolvente.

Outra análise interessante consiste em obter uma comparação entre as expressões de  $\gamma$  para os diferentes modelos de fluxos interbancários. Sendo assim, a hipótese de que  $\lambda = 1$ , a qual não traz prejuízo à análise, uma vez que  $\lambda$  encontra-se no intervalo  $[0, 1]$ , possibilita calcular  $\gamma_N^{CCE}$ ,  $\gamma_N^{CRE}$  e  $\gamma_N^{DIV}$  numericamente. A partir de tais cálculos, concluiu-se que  $\gamma_N^{CRE} > \gamma_N^{DIV} > \gamma_N^{CCE}$ .

**Proposição 2:** *Para  $N = \{3, \dots, 10\}$ ,  $\gamma_N^{CRE} > \gamma_N^{DIV} > \gamma_N^{CCE}$ . Sendo assim, numa situação com até dez bancos, a cadeia de crédito estocástica é a estrutura com maior nível de disciplina de mercado, isto é, o modelo no qual um banco insolvente tem menos condições de transferir suas perdas para os demais.*

A demonstração está no apêndice. Esse interessante resultado decorre da incorporação de um componente aleatório na cadeia de crédito estocástica. Intuitivamente, pode-se dizer que as estruturas *CRE* e *DIV* são muito rígidas. Na primeira, os viajantes só podem recorrer a um único banco fora de sua localização de origem, o que gera o pior nível de disciplina dentre os modelos estudados. Na segunda, os viajantes são obrigados a manter parcelas iguais de seus depósitos em todas as outras localizações, além de sua localidade de origem, o que aumenta o nível de disciplina em relação à cadeia de crédito, mas não em comparação com a cadeia de crédito estocástica.

Assim, dentre os três modelos considerados, o que proporciona um maior nível de disciplina é aquele que representa fluxos de pagamentos do tipo passeio aleatório, isto é, o

modelo em que os viajantes de cada localidade vão para uma das localizações adjacentes com probabilidade  $p$  e para a outra com probabilidade  $1 - p$ .

Para aprimorar a compreensão, é interessante interpretar os viajantes como aqueles consumidores que são clientes de um determinado banco, mas em decorrência de suas transações comerciais, necessitam emitir cheques para clientes de outros bancos. Nesse sentido, no momento em que um depositante do banco  $j$  deposita um cheque proveniente do banco  $i$  em sua conta, pode-se dizer que o banco  $j$  está concedendo uma linha de crédito para o banco  $i$ .

Para uma ilustração dos resultados encontrados, considere um exemplo com três bancos ( $N = 3$ ), no qual um dos bancos está insolvente, mas nenhum vai à falência. Isso significa que  $x^i = 1$  e  $X_i = 1$ , para  $i = \{1, 2, 3\}$ . Além disso, considere  $\lambda = 1$ . Nesse caso, a partir da equação de equilíbrio do balanço, obtém-se:

$$R_i + (\pi_{1i}D_1 + \pi_{2i}D_2 + \pi_{3i}D_3) = [(\pi_{1i} + \pi_{2i} + \pi_{3i}) + (\pi_{i1} + \pi_{i2} + \pi_{i3})] D_i$$

Um vez que  $i = \{1, 2, 3\}$ , a expressão acima descreve um sistema de equações a partir do qual é possível calcular  $D_i$ , dados alguns pressupostos a respeito de  $R_i$ . Nesse exemplo, suponha que o banco 1 está insolvente, ou seja,  $R_1 = 0$ , e que  $R_2 = R_3 = R$ . Devido à hipótese de que  $\lambda = 1$ , sabe-se que  $\Pi = T$ . Dessa forma, para a cadeia de crédito estocástica:

$$\Pi^{CCE} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

É interessante perceber que, para  $N = 3$  e  $p = 1$ ,  $\Pi^{CCE} = \Pi^{CRE}$ . Além disso, para  $N = 3$  e  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\Pi^{CCE} = \Pi^{DIV}$ . Sendo assim, quando  $N = 3$ , a cadeia de crédito estocástica pode ser vista como um caso geral para os outros modelos.

Substituindo-se os elementos  $\pi_{ij}$  descritos em  $\Pi^{CCE}$ , o sistema de equações poderá ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & -(1-p) & -p \\ -p & 2 & -(1-p) \\ -(1-p) & -p & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ R \end{pmatrix}$$

Donde, conclui-se que:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2p^2-2p+3}{3p^2-3p+7} R \\ \frac{2p^2-3p+6}{3p^2-3p+7} R \\ \frac{2p^2-p+5}{3p^2-3p+7} R \end{pmatrix}$$

Convém recordar que  $D_i$  corresponde ao valor de uma unidade de depósito no banco  $i$  em  $t = 2$ . Considerando-se  $p = 1$ , a solução do sistema será equivalente à verificada para o modelo da cadeia de crédito, conforme ilustrado em Freixas, Parigi e Rochet:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} R \\ \frac{5}{7} R \\ \frac{6}{7} R \end{pmatrix}$$

Isso significa que os depositantes do banco 1 recebem  $\frac{3R}{7}$ , ou equivalentemente, repassam  $\frac{4}{7}$  de suas perdas para os bancos solventes, cujos depositantes acabam recebendo  $\frac{5R}{7}$  e  $\frac{6R}{7}$ , nos bancos 2 e 3, respectivamente.

Similarmente, assumindo-se  $p = \frac{1}{2}$ , obtém-se o resultado apresentado em Freixas, Parigi e Rochet para o modelo de empréstimos diversificados, quando  $N = 3$ .

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} R \\ \frac{4}{5} R \\ \frac{4}{5} R \end{pmatrix}$$

Assim, os depositantes do banco 1 recebem  $\frac{2R}{5}$ , isto é, repassam  $\frac{3}{5}$  de suas perdas para os bancos solventes, cujos depositantes acabam recebendo  $\frac{4R}{5}$ .

Ressalta-se que, na cadeia de crédito, os depositantes do banco insolvente recebem um montante maior em depósitos, o que é justificável, considerando-se a menor exposição do sistema interbancário à disciplina de mercado nesse modelo.

### 3 Risco de Contágio

Nesta seção, vamos investigar sob quais condições o fechamento de um banco insolvente em  $t = 1$  induz a uma reação em cadeia para o restante do sistema. Suponha que o banco

$k$  é fechado no primeiro período. Uma vez que  $x^k = 0$ , o banco  $k$  será suprimido da equação de equilíbrio do balanço, a qual se tornará [FPR (2000)]:

$$\left(1 - \pi_{ik} \frac{D_0}{\alpha}\right) R + \sum_{j \neq k} \pi_{ji} D_j = (2 - \pi_{ik} - \pi_{ki})$$

Sabe-se que a condição necessária para que nenhum banco quebre quando existe um banco insolvente no sistema é que o menor valor dos depósitos em  $t = 2$ , ou seja,  $R\gamma$ , exceda  $D_0$ . Tal consideração suscita o seguinte questionamento: Será que existe um valor crítico para o menor depósito em  $t = 2$  sob o qual o fechamento de um banco causa a liquidação de pelo menos um outro banco?

Considere o sistema determinado pela equação de equilíbrio do balanço quando o banco  $k$  é eliminado e defina por  $M_k$  a inversa da matriz dos coeficientes. Todos os componentes de  $M_k$  são não negativos [FPR (2000)].

A fim de proporcionar um melhor entendimento, considere um exemplo com quatro bancos, no qual o banco dois fora eliminado. Sendo assim,  $i = \{1, 3, 4\}$  e  $k = 2$ . Aplicando-se a equação de equilíbrio do balanço que já exclui o banco  $k$  e considera que nenhum outro banco quebra, ou seja,  $x_{i,j} = 1 \forall i, j \neq k$ , obtemos:

$$\begin{cases} \left(1 - \pi_{12} \frac{D_0}{\alpha}\right) R + (\pi_{11} D_1 + \pi_{31} D_3 + \pi_{41} D_4) = (2 - \pi_{12} - \pi_{21}) D_1 \\ \left(1 - \pi_{32} \frac{D_0}{\alpha}\right) R + (\pi_{13} D_1 + \pi_{33} D_3 + \pi_{43} D_4) = (2 - \pi_{32} - \pi_{23}) D_3 \\ \left(1 - \pi_{42} \frac{D_0}{\alpha}\right) R + (\pi_{14} D_1 + \pi_{34} D_3 + \pi_{44} D_4) = (2 - \pi_{42} - \pi_{24}) D_4 \end{cases}$$

Assim, para calcular o valor crítico mencionado anteriormente, basta aplicar esse sistema à cadeia de crédito estocástica:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda p \\ 0 & -1 & \lambda(1-p) \\ \lambda(1-p) & \lambda p & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \lambda p \frac{D_0}{\alpha} - 1 \\ \lambda(1-p) \frac{D_0}{\alpha} - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, a solução do sistema será dada por:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = R M_k \begin{pmatrix} \lambda p \frac{D_0}{\alpha} - 1 \\ \lambda(1-p) \frac{D_0}{\alpha} - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Defina:

$$\xi = M_k \begin{pmatrix} \lambda p \frac{D_0}{\alpha} - 1 \\ \lambda(1-p) \frac{D_0}{\alpha} - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e seja  $\Psi_{cce} = \min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ , ou seja,  $\Psi_{cce}$  é o menor componente do vetor  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Ora:

$$\xi = c \begin{pmatrix} \alpha + \alpha\lambda + 2p^2\alpha\lambda^2 + p\alpha\lambda - p\lambda D_0 - p\alpha\lambda^2 - p\lambda^2 D_0 \\ \alpha + 2\alpha\lambda - \lambda D_0 + \alpha\lambda^2 - \lambda^2 D_0 + 2p^2\alpha\lambda^2 - p\alpha\lambda + p\lambda D_0 - 3p\alpha\lambda^2 + p\lambda^2 D_0 \\ 2D_0p^2\lambda^2 - 2D_0p\lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha \end{pmatrix}$$

em que  $c = \frac{1}{\alpha(2p^2\lambda^2 - 2p\lambda^2 + \lambda + 1)}$ . Para simplificar, suponha que  $p = \frac{1}{2}$ . Então:

$$\begin{aligned} \xi &= M_k \begin{pmatrix} \frac{\lambda D_0}{2\alpha} - 1 \\ \frac{\lambda D_0}{2\alpha} - 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha(-\lambda^2 + 2\lambda + 2)} \begin{pmatrix} 2\alpha + 3\alpha\lambda - \lambda D_0 - \lambda^2 D_0 \\ 2\alpha + 3\alpha\lambda - \lambda D_0 - \lambda^2 D_0 \\ -D_0\lambda^2 + 2\alpha\lambda + 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

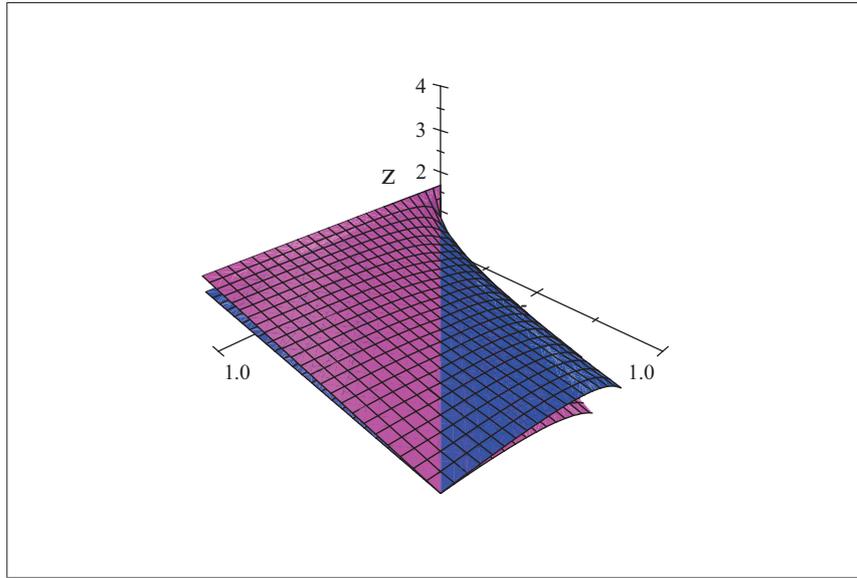
Para encontrarmos o menor elemento do vetor acima, não há perda de generalidade em supor que  $\lambda = 1$ , uma vez que  $0 < \lambda < 1$ .

$$\xi = \frac{1}{3\alpha} \begin{pmatrix} 5\alpha - 2D_0 \\ 5\alpha - 2D_0 \\ 4\alpha - D_0 \end{pmatrix}$$

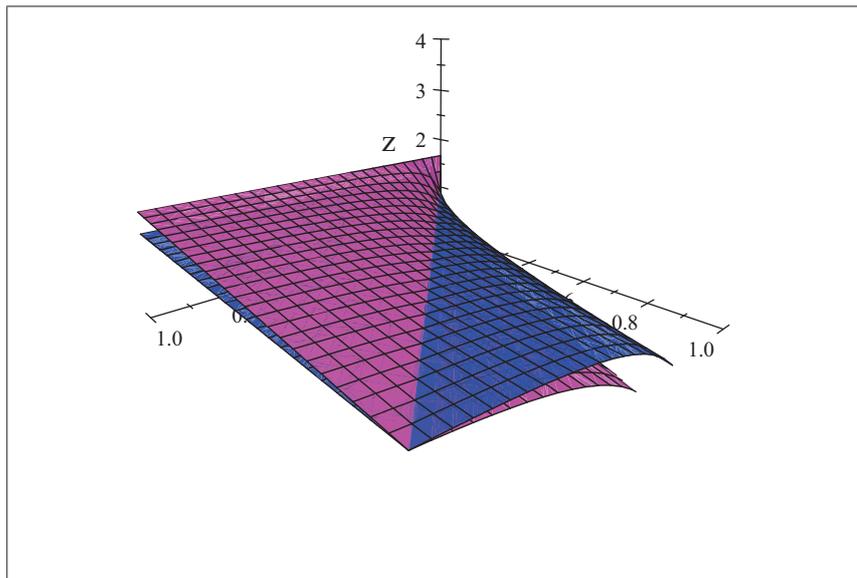
No gráfico abaixo,  $\frac{5\alpha - 2D_0}{3\alpha}$  está representado na cor rosa<sup>5</sup> e  $\frac{4\alpha - D_0}{3\alpha}$  na cor azul<sup>6</sup>. É simples perceber que as figuras se interceptam quando  $\alpha = D_0$ . Para valores em que  $\alpha < D_0$ , nota-se que  $\frac{5\alpha - 2D_0}{3\alpha} < \frac{4\alpha - D_0}{3\alpha}$ . Mas, se  $\alpha > D_0$ , então  $\frac{5\alpha - 2D_0}{3\alpha} > \frac{4\alpha - D_0}{3\alpha}$ .

<sup>5</sup>Numa impressão em preto e branco, é a cor mais clara.

<sup>6</sup>Numa impressão em preto e branco, é a cor mais escura.



Girando o gráfico um pouco, percebe-se que a superfície azul é transversal à rosa:



Na cadeia de crédito estocástica, o menor elemento do vetor acima corresponde ao valor crítico sob o qual o fechamento de um banco engatilhará a liquidação de pelo menos mais um, isto é, haverá contágio. Em outras palavras, se o menor depósito em  $t = 2$  for inferior ao menor componente desse vetor, então o fechamento de um banco causará a liquidação de pelo menos um outro banco. FPR (2000) encontraram resultado igual para os casos de empréstimos diversificados e de cadeia de crédito. Na verdade, é um resultado de existência de um menor valor crítico de depósitos abaixo do qual o fechamento de um

banco causa liquidação de pelo menos um outro. O que fizemos aqui foi mostrar qual seria esse valor mínimo no caso de cadeia de crédito estocástica, considerando-se um exemplo com quatro bancos.

## 4 Política *Too-Big-To-Fail*

Historicamente, observam-se muitas intervenções governamentais no sistema bancário com o objetivo de salvar instituições que estejam correndo risco de falência. Tal prática ficou conhecida como política *too-big-to-fail*, a qual decorre do receio de que a liquidação de um banco, considerado central na rede interbancária, provoque uma reação desastrosa em toda a economia. Todavia, existem diversas críticas a tal política, devido ao risco moral a que as autoridades reguladoras estão sujeitas.

Nesse sentido, utilizando-se estruturas simplificadas de sistemas de pagamentos, buscamos compreender algumas características da política *too-big-to-fail*. De maneira similar a FPR (2000), porém incorporando o elemento aleatório explicado anteriormente, considere o seguinte exemplo: existem três localizações, sendo que as localizações 2 e 3 são periféricas e a localização 1 pode ser considerada um centro financeiro, uma vez que todos os viajantes de 2 e 3 consomem em 1. Os viajantes de 1, entretanto, consomem em 2 com probabilidade  $p$  e em 3 com probabilidade  $1 - p$ . Assim, a matriz representativa deste sistema de pagamentos fictício é dada por:

$$T_3^{CCE} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1 - p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde deriva-se a matriz que informa qual a proporção de consumidores que viaja para cada lugar, a saber:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda p & \lambda(1 - p) \\ \lambda & 1 - \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

O objetivo desse exemplo é averiguar o que acontece quando o banco que ocupa posição central na rede torna-se insolvente. Ao substituir  $T^{CCE}$  na equação de equilíbrio do

balanço para as três localizações, considerando-se  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ ,  $R_1 = 0$  e  $R_2 = R_3 = R$ , encontra-se o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -p & 1+p & 0 \\ -(1-p) & 0 & 2-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ R \end{pmatrix}$$

donde pode-se calcular o vetor  $\mathbf{D}$ :

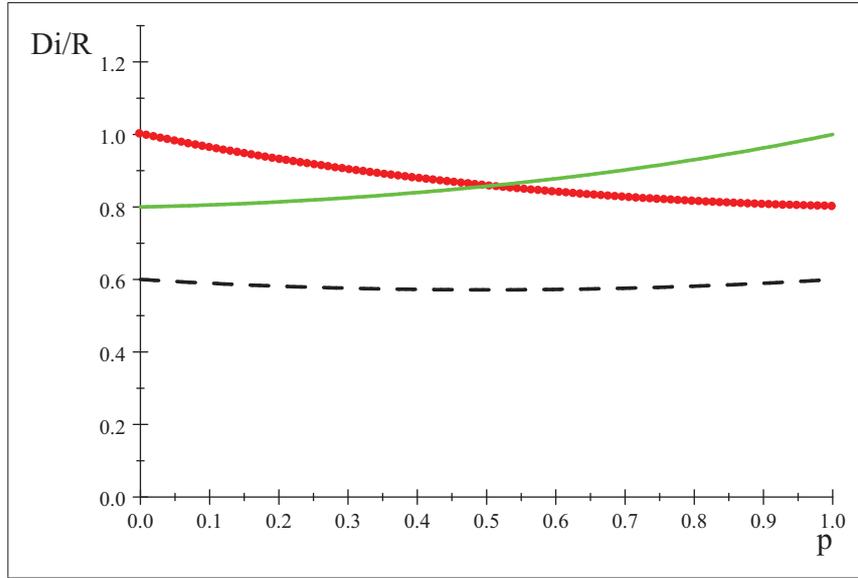
$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2 - p - 5} \begin{pmatrix} -3R \\ R(p - 5) \\ -R(p + 4) \end{pmatrix}$$

A expressão acima corresponde aos valores de  $D_i$  para os quais o banco  $i$  não será fechado quando o banco 1 estiver insolvente, isto é,  $x = (1, 1, 1)$  apesar de  $R_1 = 0$ . Quanto à necessidade de intervenção do banco central, se  $D_i > D_0$ , o banco  $i$  não fechará, ainda que esteja insolvente, sem que o banco central tenha de injetar liquidez no sistema.

A partir da expressão encontrada para o vetor  $\mathbf{D}$ , pode-se deduzir que:

$$\begin{aligned} D_1 > D_0 &\implies \frac{-3}{p^2 - p - 5} > \frac{D_0}{R} \\ D_2 > D_0 &\implies \frac{p - 5}{p^2 - p - 5} > \frac{D_0}{R} \\ D_3 > D_0 &\implies \frac{-(p + 4)}{p^2 - p - 5} > \frac{D_0}{R} \end{aligned}$$

Um gráfico para as expressões acima na variável  $p$  contribui para a análise das circunstâncias em que o emprestador de última instância deverá injetar liquidez na economia a fim de evitar falências.



No gráfico acima, a curva em preto (tracejada) corresponde a  $D_1/R$ , a vermelha (com bolinhas) ilustra  $D_2/R$  e a verde,  $D_3/R$ . Existem as seguintes possibilidades quanto à localização do ponto correspondente a  $D_0/R$ , para determinado valor de  $p$ :

a) Área abaixo da curva preta: nenhuma intervenção do banco central é necessária, apesar de um dos bancos encontrar-se insolvente, ou seja,  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$  é um equilíbrio se  $D_0/R$  for suficientemente baixo.

b) Região delimitada pelas curvas preta e verde para  $p < 1/2$  e pelas curvas preta e vermelha para  $p > 1/2$ : o banco central deverá injetar liquidez apenas no banco insolvente para que não ocorra qualquer falência.

c) Área entre as curvas verde e vermelha para valores de  $p$  inferiores a  $1/2$ : será necessário injetar liquidez nos bancos 1 e 3.

d) Entre as curvas vermelha e verde para  $p$  superior a  $1/2$ : sem a intervenção do prestador de última instância, os bancos 1 e 2 quebram.

e) Acima das três curvas, todos os bancos necessitarão de recursos do banco central para não fecharem.

**Proposição 3:** *Suponha que  $N = 3$ . Quando o banco que ocupa uma posição central na rede de conexões interbancárias estiver insolvente, será um equilíbrio nenhum banco quebrar se  $D_0/R$  for suficientemente baixo. Por outro lado, quando houver necessidade*

do banco central injetar liquidez na economia, o custo de salvar os bancos contaminados é crescente em  $D_0/R$ .

Não obstante esse resultado seja similar ao apresentado em FPR (2000), a demonstração acima refere-se ao modelo apresentado neste trabalho, a saber, a cadeia de crédito estocástica. Graficamente, foram demonstradas as situações em que  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$  é um equilíbrio quando  $R_1 = 0$ , ou seja, os casos em que nenhuma intervenção do banco central é necessária, apesar da insolvência do banco que ocupa posição central na rede. Foram detalhados também os casos em que o banco insolvente necessitará de intervenção, bem como as situações em que haverá contágio. Nesses casos, quanto mais elevado o valor de  $D_0/R$ , maior será o custo da política *too-big-to-fail*.

# Capítulo 4

## Conclusão

Essencialmente, a maior relevância deste trabalho está em contribuir para o desenvolvimento de um aparato teórico que auxilie os órgãos reguladores a identificar os níveis de vulnerabilidade do sistema bancário e, por conseguinte, definir suas estratégias de regulação.

Quanto à disciplina de mercado, que pode ser entendida como uma regra de eficiência, segundo a qual um banco quebra se, e somente se, estiver insolvente, nosso primeiro resultado mostrou que, na cadeia de crédito estocástica, o grau de exposição do sistema à disciplina de mercado varia inversamente com o número de bancos ou com a intensidade dos fluxos de pagamento, assim como em FPR (2000).

Além disso, demonstramos que a cadeia de crédito estocástica apresenta um maior nível de disciplina de mercado em comparação aos modelos apresentados em FPR (2000), ou seja, a cadeia de crédito estocástica é o modelo no qual um banco insolvente tem menos condições de transferir suas perdas para os demais. Esse resultado provavelmente se justifica pela incorporação de um passeio aleatório ao modelo de fluxos de pagamentos.

Mostramos também qual é o valor mínimo sob o qual o fechamento de um banco na cadeia de crédito estocástica engatilha a liquidação de pelo menos mais um, considerando-se um exemplo com quatro bancos. Isso significa que haverá contágio se o menor depósito em  $t = 2$  for inferior a esse valor mínimo. Sendo assim, pode-se dizer que foi apresentada uma forma de verificar quando o fechamento de um banco contamina algum outro integrante do sistema.

Por fim, a última proposição apresentada revelou as circunstâncias em que o banco

central deverá injetar liquidez na economia para evitar falências, além de permitir uma melhor compreensão dos custos desse tipo de intervenção. Nesse sentido, contribuir para que o banco central tenha condições de mensurar o custo da política *too-big-to-fail* é muito relevante, uma vez que existe um custo social em termos de recursos provenientes da arrecadação tributária do governo. Na realidade, o ideal é que seja possível verificar o que é menos prejudicial à sociedade: o fechamento da instituição insolvente e, por conseguinte, a possibilidade de direcionar a arrecadação para outras finalidades, ou injetar liquidez na economia e evitar uma possível reação em cadeia no sistema.

Certamente, ainda há uma grande margem de possibilidades de pesquisa em economia bancária, com ênfase em risco sistêmico e mecanismos de regulação. De fato, o avanço dessas pesquisas disponibilizará cada vez mais insumos conceituais e metodológicos para subsidiar as decisões dos órgãos reguladores dos sistemas financeiros, evitando ou minimizando o impacto de crises sistêmicas.

## Referências

1. ACHARYA, Viral V. (2009) "A theory of systemic risk and design of prudential bank regulation." *Journal of Financial Stability* 5, 224-255.
2. ALLEN, F., A. BABUS e E. CARLETTI (2009) "Financial Connections and Systemic Risk." European University Institute, Working Paper ECO 2010/30.
3. BANDT, Olivier e Phillip HARTMANN (2000) "Systemic Risk: a Survey." European Central Bank, Working Paper No. 35.
4. BATTACHARYA, Sudipto e Anjan V. THAKOR (1993) "Contemporary Banking Theory." *Journal of Financial Intermediation* 3, 2-50.
5. DIAMOND, Douglas W. e Philip H. DYBVIK (1983) "Bank runs, deposit insurance, and liquidity." *Journal of Political Economy* 91, 401-419.
6. FREIXAS, Xavier e Bruno M. PARIGI (1998) "Contagion and efficiency in gross and net payment systems." *Journal of Financial Intermediation* 7, 3-31.
7. FREIXAS, X., B. PARIGI e J.-C. ROCHET (2000). "Systemic risk, interbank relations and liquidity provision by the central bank." *Journal of Money, Credit and Banking* 32: 611-631.
8. GALOS, Peter e Kimmo SORAMÄKI (2005): "Systemic risk in alternative payment system designs." European Central Bank, Working Paper Series 508.
9. ROCHET, Jean-Charles e Jean TIROLE (1996): "Interbank lending and systemic risk." *Journal of Money, Credit and Banking* 28(4): 733-762.

## Apêndice

**Proposição 1:** Para  $N = \{3, \dots, 10\}$ ,  $\gamma_N^{CCE}$  é crescente tanto em  $\lambda$  quanto em  $N$ .

**Demonstração:** Com o propósito de demonstrar o primeiro resultado apresentado ao longo do trabalho, necessita-se primeiramente calcular  $M(\lambda)$  para a cadeia de crédito estocástica (CCE). Matricialmente, observa-se:

$$T_{cce} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a partir de  $\Pi = (1 - \lambda)I + \lambda T$ , verifica-se que:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda p & 0 & \cdots & \lambda(1-p) \\ \lambda(1-p) & 1-\lambda & \lambda p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda p \\ \lambda p & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

de modo que sua transposta é:

$$\Pi' = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda(1 - p) & 0 & \cdots & \lambda p \\ \lambda p & 1 - \lambda & \lambda(1 - p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda(1 - p) \\ \lambda(1 - p) & 0 & 0 & \cdots & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$2I - \Pi' = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\lambda(1 - p) & 0 & \cdots & -\lambda p \\ -\lambda p & 1 + \lambda & -\lambda(1 - p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda(1 - p) \\ -\lambda(1 - p) & 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

A matriz  $M(\lambda)$  é a inversa da matriz acima, ou seja:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\lambda(1 - p) & 0 & \cdots & -\lambda p \\ -\lambda p & 1 + \lambda & -\lambda(1 - p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda(1 - p) \\ -\lambda(1 - p) & 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda \end{pmatrix}^{-1}$$

A fim de simplificar os cálculos, considere que  $F = 2I - \Pi'$ , de modo que  $M(\lambda) = F^{-1}$ .

Além disso, adote  $p = 1/2$ . Sendo assim:

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 + \lambda)I - \frac{\lambda}{2}H \end{aligned}$$

em que:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Não apresentaremos uma forma genérica de  $F^{-1}$ , isto é, para  $N$  qualquer, mas sim, as expressões de  $F^{-1}$  para alguns valores de  $N$ , a saber  $N = \{3, \dots, 10\}$ . Dessa forma, para  $N = 3$ , verifica-se:

$$\begin{aligned} F_3^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda+2}{3\lambda+2} & \frac{\lambda}{3\lambda+2} & \frac{\lambda}{3\lambda+2} \\ \frac{\lambda}{3\lambda+2} & \frac{\lambda+2}{3\lambda+2} & \frac{\lambda}{3\lambda+2} \\ \frac{\lambda}{3\lambda+2} & \frac{\lambda}{3\lambda+2} & \frac{\lambda+2}{3\lambda+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de forma que:

$$\begin{aligned} F_3^{-1} &= \frac{\lambda+2}{3\lambda+2}I + \frac{\lambda}{3\lambda+2}H \\ &= \frac{1}{3\lambda+2}[(\lambda+2)I + \lambda H] \end{aligned}$$

Para  $N = 4$ :

$$\begin{aligned} F_4^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+4\lambda+2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} \\ \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+4\lambda+2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2}{4\lambda^2+6\lambda+2} \\ \frac{\lambda^2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+4\lambda+2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} \\ \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+4\lambda+2}{4\lambda^2+6\lambda+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de forma que:

$$\begin{aligned}
F_4^{-1} &= \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 2}{4\lambda^2 + 6\lambda + 2} I + \frac{\lambda^2 + \lambda}{4\lambda^2 + 6\lambda + 2} H + \frac{\lambda^2}{4\lambda^2 + 6\lambda + 2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4\lambda^2 + 6\lambda + 2} \left[ (\lambda^2 + 4\lambda + 2) I + (\lambda^2 + \lambda) H + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

Para  $N = 5$ :

$$\begin{aligned}
F_5^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 + 6\lambda + 4}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} \\ \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 6\lambda + 4}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} \\ \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 6\lambda + 4}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} \\ \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 6\lambda + 4}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} \\ \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 + 6\lambda + 4}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

de forma que:

$$F_5^{-1} = \frac{1}{5\lambda^2 + 10\lambda + 4} G_5$$

em que:

$$G_5 = (\lambda^2 + 6\lambda + 4) I + (\lambda^2 + 2\lambda) H + \lambda^2 A_5^i$$

e:

$$A_5^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, verifica-se que as expressões de  $F^{-1}$  até  $N = 10$ , são as seguintes. Para  $N = 6$ :

$$F_6^{-1} = \frac{1}{6\lambda^3 + 19\lambda^2 + 16\lambda + 4} G_6$$

em que:

$$G_6 = (\lambda^3 + 9\lambda^2 + 12\lambda + 4) I + (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda) H + (\lambda^3 + \lambda^2) A_6^i + \lambda^3 A_6^{ii}$$

e:

$$A_6^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_6^{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para  $N = 7$ :

$$F_7^{-1} = \frac{1}{7\lambda^3 + 28\lambda^2 + 28\lambda + 8} G_7$$

em que:

$$G_7 = (\lambda^3 + 12\lambda^2 + 20\lambda + 8) I + (\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda) H + (\lambda^3 + \lambda^2) A_7^i + \lambda^3 A_7^{ii}$$

e:

$$A_7^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_7^{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para  $N = 8$ :

$$F_8^{-1} = \frac{1}{8\lambda^4 + 44\lambda^3 + 68\lambda^2 + 40\lambda + 8} G_8$$

em que:

$$G_8 = (\lambda^4 + 16\lambda^3 + 40\lambda^2 + 32\lambda + 8) I + (\lambda^4 + 9\lambda^3 + 12\lambda^2 + 4\lambda) H \\ + (\lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2) A_8^i + (\lambda^4 + \lambda^3) A_8^{ii} + \lambda^4 A_8^{iii}$$

e:

$$A_8^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_8^{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e:

$$A_8^{iii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para  $N = 9$ :

$$F_9^{-1} = \frac{1}{90\lambda^4 + 60\lambda^3 + 108\lambda^2 + 72\lambda + 16} \begin{bmatrix} (\lambda^4 + 20\lambda^3 + 60\lambda^2 + 56\lambda + 16) I \\ + (\lambda^4 + 12\lambda^3 + 20\lambda^2 + 8\lambda) H \\ + (\lambda^4 + 6\lambda^3 + 4\lambda^2) A_9^i \\ + (\lambda^4 + \lambda^3) A_9^{ii} \\ + \lambda^4 A_9^{iii} \end{bmatrix}$$

em que:

$$G_9 = (\lambda^4 + 20\lambda^3 + 60\lambda^2 + 56\lambda + 16) I + (\lambda^4 + 12\lambda^3 + 20\lambda^2 + 8\lambda) H \\ + (\lambda^4 + 6\lambda^3 + 4\lambda^2) A_9^i + (\lambda^4 + \lambda^3) A_9^{ii} + \lambda^4 A_9^{iii}$$

e:

$$A_9^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_9^{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e:

$$A_9^{iii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para  $N = 10$ :

$$F_{10}^{-1} = \frac{1}{10\lambda^5 + 85\lambda^4 + 208\lambda^3 + 212\lambda^2 + 96\lambda + 16} G_{10}$$

em que:

$$G_{10} = (\lambda^5 + 25\lambda^4 + 100\lambda^3 + 140\lambda^2 + 80\lambda + 16) I + (\lambda^5 + 16\lambda^4 + 40\lambda^3 + 32\lambda^2 + 8\lambda) H \\ + (\lambda^5 + 9\lambda^4 + 12\lambda^3 + 4\lambda^2) A_{10}^i + (\lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3) A_{10}^{ii} + (\lambda^5 + \lambda^4) A_{10}^{iii} + \lambda^5 A_{10}^{iv}$$

e:

$$A_{10}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{10}^{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{10}^{iii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{10}^{iv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Recorde que a condição necessária para que  $x = (1, \dots, 1)$  seja um equilíbrio quando  $\mathbf{R} = (0, R, \dots, R)$  é:

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \geq \frac{D_0}{R}$$

em que  $M(\lambda) = F^{-1}$ . O menor dos componentes do lado esquerdo da condição acima é designado por  $\gamma_N^{CCE}$ , de maneira que a próxima etapa consiste em calcular  $\gamma_N^{CCE}$  para  $N = \{3, \dots, 10\}$ . Para  $N = 3$ :

$$\begin{aligned} M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda+2}{3\lambda+2} & \frac{\lambda}{3\lambda+2} & \frac{\lambda}{3\lambda+2} \\ \frac{\lambda}{3\lambda+2} & \frac{\lambda+2}{3\lambda+2} & \frac{\lambda}{3\lambda+2} \\ \frac{\lambda}{3\lambda+2} & \frac{\lambda}{3\lambda+2} & \frac{\lambda+2}{3\lambda+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{3\lambda+2} \\ \frac{2\lambda+2}{3\lambda+2} \\ \frac{2\lambda+2}{3\lambda+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de forma que  $\gamma_3^{CCE} = \frac{2\lambda}{3\lambda+2}$ . Para  $N = 4$ :

$$\begin{aligned}
M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+4\lambda+2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} \\ \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+4\lambda+2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2}{4\lambda^2+6\lambda+2} \\ \frac{\lambda^2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+4\lambda+2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} \\ \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2} & \frac{\lambda^2+4\lambda+2}{4\lambda^2+6\lambda+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(4\lambda^2+6\lambda+2)} \begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda \\ 3\lambda^2+5\lambda+2 \\ 3\lambda^2+6\lambda+2 \\ 3\lambda^2+5\lambda+2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

de forma que  $\gamma_4^{CCE} = \frac{3\lambda^2+2\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2}$ . Para  $N = 5$ :

$$\begin{aligned}
M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+6\lambda+4}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} \\ \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+6\lambda+4}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} \\ \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+6\lambda+4}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} \\ \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+6\lambda+4}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} \\ \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+2\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4} & \frac{\lambda^2+6\lambda+4}{5\lambda^2+10\lambda+4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(5\lambda^2+10\lambda+4)} \begin{pmatrix} 4\lambda^2+4\lambda \\ 4\lambda^2+8\lambda+4 \\ 4\lambda^2+10\lambda+4 \\ 4\lambda^2+10\lambda+4 \\ 4\lambda^2+8\lambda+4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

de forma que  $\gamma_5^{CCE} = \frac{4\lambda^2+4\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4}$ . De modo similar, observa-se que, para  $N = 6$ :

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(6\lambda^3+19\lambda^2+16\lambda+4)} \begin{pmatrix} 5\lambda^3+10\lambda^2+4\lambda \\ 5\lambda^3+15\lambda^2+14\lambda+4 \\ 5\lambda^3+18\lambda^2+16\lambda+4 \\ 5\lambda^3+19\lambda^2+16\lambda+4 \\ 5\lambda^3+18\lambda^2+16\lambda+4 \\ 5\lambda^3+15\lambda^2+14\lambda+4 \end{pmatrix}$$

donde  $\gamma_6^{CCE} = \frac{5\lambda^3+10\lambda^2+4\lambda}{6\lambda^3+19\lambda^2+16\lambda+4}$ . Para  $N = 7$ :

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(7\lambda^3 + 28\lambda^2 + 28\lambda + 8)} \begin{pmatrix} 6\lambda^3 + 16\lambda^2 + 8\lambda \\ 6\lambda^3 + 22\lambda^2 + 24\lambda + 8 \\ 6\lambda^3 + 26\lambda^2 + 28\lambda + 8 \\ 6\lambda^3 + 28\lambda^2 + 28\lambda + 8 \\ 6\lambda^3 + 28\lambda^2 + 28\lambda + 8 \\ 6\lambda^3 + 26\lambda^2 + 28\lambda + 8 \\ 6\lambda^3 + 22\lambda^2 + 24\lambda + 8 \\ 6\lambda^3 + 16\lambda^2 + 8\lambda \end{pmatrix}$$

de maneira que  $\gamma_7^{CCE} = \frac{6\lambda^3+16\lambda^2+8\lambda}{7\lambda^3+28\lambda^2+28\lambda+8}$ . Para  $N = 8$ :

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(8\lambda^4 + 44\lambda^3 + 68\lambda^2 + 40\lambda + 8)} \begin{pmatrix} 7\lambda^4 + 28\lambda^3 + 28\lambda^2 + 8\lambda \\ 7\lambda^4 + 35\lambda^3 + 56\lambda^2 + 36\lambda + 8 \\ 7\lambda^4 + 40\lambda^3 + 66\lambda^2 + 40\lambda + 8 \\ 7\lambda^4 + 43\lambda^3 + 68\lambda^2 + 40\lambda + 8 \\ 7\lambda^4 + 44\lambda^3 + 68\lambda^2 + 40\lambda + 8 \\ 7\lambda^4 + 43\lambda^3 + 68\lambda^2 + 40\lambda + 8 \\ 7\lambda^4 + 40\lambda^3 + 66\lambda^2 + 40\lambda + 8 \\ 7\lambda^4 + 35\lambda^3 + 56\lambda^2 + 36\lambda + 8 \\ 7\lambda^4 + 28\lambda^3 + 28\lambda^2 + 8\lambda \end{pmatrix}$$

de forma que  $\gamma_8^{CCE} = \frac{7\lambda^4+28\lambda^3+28\lambda^2+8\lambda}{8\lambda^4+44\lambda^3+68\lambda^2+40\lambda+8}$ . Para  $N = 9$ :

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(9\lambda^4 + 60\lambda^3 + 108\lambda^2 + 72\lambda + 16)} \begin{pmatrix} 8\lambda^4 + 40\lambda^3 + 48\lambda^2 + 16\lambda \\ 8\lambda^4 + 48\lambda^3 + 88\lambda^2 + 64\lambda + 16 \\ 8\lambda^4 + 54\lambda^3 + 104\lambda^2 + 72\lambda + 16 \\ 8\lambda^4 + 58\lambda^3 + 108\lambda^2 + 72\lambda + 16 \\ 8\lambda^4 + 60\lambda^3 + 108\lambda^2 + 72\lambda + 16 \\ 8\lambda^4 + 60\lambda^3 + 108\lambda^2 + 72\lambda + 16 \\ 8\lambda^4 + 60\lambda^3 + 108\lambda^2 + 72\lambda + 16 \\ 8\lambda^4 + 58\lambda^3 + 108\lambda^2 + 72\lambda + 16 \\ 8\lambda^4 + 54\lambda^3 + 104\lambda^2 + 72\lambda + 16 \\ 8\lambda^4 + 48\lambda^3 + 88\lambda^2 + 64\lambda + 16 \end{pmatrix}$$

de modo que  $\gamma_9^{CCE} = \frac{8\lambda^4+40\lambda^3+48\lambda^2+16\lambda}{9\lambda^4+60\lambda^3+108\lambda^2+72\lambda+16}$ . Para  $N = 10$ :

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_{10} \begin{pmatrix} 9\lambda^5 + 60\lambda^4 + 108\lambda^3 + 72\lambda^2 + 16\lambda \\ 9\lambda^5 + 69\lambda^4 + 168\lambda^3 + 180\lambda^2 + 88\lambda + 16 \\ 9\lambda^5 + 76\lambda^4 + 196\lambda^3 + 208\lambda^2 + 96\lambda + 16 \\ 9\lambda^5 + 81\lambda^4 + 206\lambda^3 + 212\lambda^2 + 96\lambda + 16 \\ 9\lambda^5 + 84\lambda^4 + 208\lambda^3 + 212\lambda^2 + 96\lambda + 16 \\ 9\lambda^5 + 85\lambda^4 + 208\lambda^3 + 212\lambda^2 + 96\lambda + 16 \\ 9\lambda^5 + 84\lambda^4 + 208\lambda^3 + 212\lambda^2 + 96\lambda + 16 \\ 9\lambda^5 + 81\lambda^4 + 206\lambda^3 + 212\lambda^2 + 96\lambda + 16 \\ 9\lambda^5 + 76\lambda^4 + 196\lambda^3 + 208\lambda^2 + 96\lambda + 16 \\ 9\lambda^5 + 69\lambda^4 + 168\lambda^3 + 180\lambda^2 + 88\lambda + 16 \end{pmatrix}$$

em que:

$$\mu_{10} = \frac{1}{10\lambda^5 + 85\lambda^4 + 208\lambda^3 + 212\lambda^2 + 96\lambda + 16}$$

de forma que  $\gamma_{10}^{CCE} = \frac{9\lambda^5+60\lambda^4+108\lambda^3+72\lambda^2+16\lambda}{10\lambda^5+85\lambda^4+208\lambda^3+212\lambda^2+96\lambda+16}$ . É simples perceber que, ao menos para  $N = \{3, \dots, 10\}$ ,  $\gamma_N^{CCE}$  é crescente em  $\lambda$  de acordo com o sinal da primeira derivada, a qual é sempre maior que zero, uma vez que  $\lambda$  encontra-se no intervalo  $[0, 1]$ . Seja  $(\gamma_N^{CCE})'$  a derivada de  $\gamma_N^{CCE}$  em relação a  $\lambda$ . Temos, assim, a seguinte tabela:

$N$	$\gamma_N^{CCE}$	$(\gamma_N^{CCE})'$
3	$\frac{2\lambda}{3\lambda+2}$	$\frac{4}{9\lambda^2+12\lambda+4}$
4	$\frac{3\lambda^2+2\lambda}{4\lambda^2+6\lambda+2}$	$\frac{5\lambda^2+6\lambda+2}{2(2\lambda^2+3\lambda+1)^2}$
5	$\frac{4\lambda^2+4\lambda}{5\lambda^2+10\lambda+4}$	$\frac{20\lambda^2+32\lambda+16}{(5\lambda^2+10\lambda+4)^2}$
6	$\frac{5\lambda^3+10\lambda^2+4\lambda}{6\lambda^3+19\lambda^2+16\lambda+4}$	$\frac{35\lambda^4+112\lambda^3+144\lambda^2+80\lambda+16}{(6\lambda^3+19\lambda^2+16\lambda+4)^2}$
7	$\frac{6\lambda^3+16\lambda^2+8\lambda}{7\lambda^3+28\lambda^2+28\lambda+8}$	$\frac{56\lambda^4+224\lambda^3+368\lambda^2+256\lambda+64}{(7\lambda^3+28\lambda^2+28\lambda+8)^2}$
8	$\frac{7\lambda^4+28\lambda^3+28\lambda^2+8\lambda}{8\lambda^4+44\lambda^3+68\lambda^2+40\lambda+8}$	$\frac{21\lambda^6+126\lambda^5+330\lambda^4+440\lambda^3+312\lambda^2+112\lambda+16}{4(2\lambda^4+11\lambda^3+17\lambda^2+10\lambda+2)^2}$
9	$\frac{8\lambda^4+40\lambda^3+48\lambda^2+16\lambda}{9\lambda^4+60\lambda^3+108\lambda^2+72\lambda+16}$	$\frac{120\lambda^6+864\lambda^5+2736\lambda^4+4352\lambda^3+3648\lambda^2+1536\lambda+256}{(9\lambda^4+60\lambda^3+108\lambda^2+72\lambda+16)^2}$
10	$\frac{9\lambda^5+60\lambda^4+108\lambda^3+72\lambda^2+16\lambda}{10\lambda^5+85\lambda^4+208\lambda^3+212\lambda^2+96\lambda+16}$	$\frac{165\lambda^8+1584\lambda^7+6864\lambda^6+16016\lambda^5+21840\lambda^4+17920\lambda^3+8704\lambda^2+2304\lambda+256}{(10\lambda^5+85\lambda^4+208\lambda^3+212\lambda^2+96\lambda+16)^2}$

Para concluir a demonstração, é necessário ainda verificar se  $\gamma_N^{CCE}$  é crescente em  $N$ .

Assim, suponha que  $\lambda = 1$ . Note que essa suposição não traz prejuízo, uma vez que  $\lambda$

encontra-se no intervalo  $[0, 1]$ . Portanto:

$\gamma_3^{CCE} = 0.4$	$\gamma_7^{CCE} = 0.42254$
$\gamma_4^{CCE} = 0.41667$	$\gamma_8^{CCE} = 0.42262$
$\gamma_5^{CCE} = 0.42105$	$\gamma_9^{CCE} = 0.42264$
$\gamma_6^{CCE} = 0.42222$	$\gamma_{10}^{CCE} = 0.42265$

No intervalo  $N = \{3, \dots, 10\}$ , os cálculos acima mostram que, de fato,  $\gamma_N^{CCE}$  é crescente em  $N$ . Embora o comportamento de  $\gamma_N^{CCE}$  não tenha sido provado em termos gerais, o mais provável é que o padrão observado até  $N = 10$  se mantenha para  $N$  qualquer. ■

**Proposição 2:** Para  $N = \{3, \dots, 10\}$ ,  $\gamma_N^{CRE} > \gamma_N^{DIV} > \gamma_N^{CCE}$ . Sendo assim, numa situação com até dez bancos, a cadeia de crédito estocástica é a estrutura com maior nível de disciplina de mercado, isto é, o modelo no qual um banco insolvente tem menos condições de transferir suas perdas para os demais.

**Demonstração:** Para  $N = \{3, \dots, 10\}$ , substituindo  $\lambda = 1$  nos valores para  $\gamma_N^{CRE}$ ,  $\gamma_N^{DIV}$  e  $\gamma_N^{CCE}$ , temos:

	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$
$\gamma_N^{CRE}$	0.42857	0.46667	0.48387	0.49206	0.49606	0.49804	0.49902	0.49951
$\gamma_N^{DIV}$	0.40000	0.42857	0.44444	0.45455	0.46154	0.46667	0.47059	0.47368
$\gamma_N^{CCE}$	0.40000	0.41667	0.42105	0.42222	0.42254	0.42262	0.42264	0.42265

Portanto,  $\gamma_N^{CRE} > \gamma_N^{DIV} > \gamma_N^{CCE}$ , de modo que a cadeia de crédito estocástica é o modelo, dentre os apresentados, com maior nível de disciplina de mercado. ■

**Proposição 3 de FPR (2000):** Tanto no caso da cadeia de crédito quanto nos empréstimos diversificados,  $\gamma$  varia de maneira diretamente proporcional tanto em relação a  $\lambda$  quanto a  $N$ ; isto é, quando aumenta o número de viajantes ou o número de bancos, o sistema torna-se menos exposto à disciplina de mercado. Em outras palavras, pode-se afirmar que quanto mais intenso o fluxo interbancário, menor a exposição à disciplina de mercado.

**Demonstração:** Antes de provar esta proposição, é necessário verificar  $M(\lambda)$  nos dois tipos de padrões de viagem; cadeia de crédito (*CRE*) e empréstimos diversificados (*DIV*). Na cadeia de crédito, a matriz representativa dos padrões de viagem é:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que essa matriz  $T$  transposta e elevada a  $N$  - número de bancos - é igual à matriz identidade. Como exemplo, considere  $N = 3$ . Nesse caso:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de forma que:

$$T' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} T'^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
 T'^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Portanto, pode-se concluir que  $T'^K = T'^{K+N} = T'^{K+2N} = \dots$ . Além disso, sabe-se que  $M(\lambda) = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) (I - \frac{\lambda}{1+\lambda}T')^{-1}$ . Ao desenvolver por série de MacLaurin, verifica-se que  $\sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k = (I - \frac{\lambda}{1+\lambda}T')^{-1}$ , em que  $\theta = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ . Sendo assim,

$$M(\lambda) = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k$$

Considere:

$$\begin{aligned}
 \Theta &= 1 + \theta^N + \theta^{2N} + \theta^{3N} + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (\theta^N)^k \\
 &= \frac{1}{1 - \theta^N}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Theta}{1+\lambda} &= (1 - \theta) \frac{1}{1 - \theta^N} \\
 &= \frac{1 - \theta}{1 - \theta^N}
 \end{aligned}$$

Portanto, a expressão de  $M(\lambda)$  pode ser alterada da maneira descrita a seguir:

$$\begin{aligned}
 M(\lambda) &= \frac{\Theta}{1+\lambda} \times \frac{1}{\Theta} \times \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k \\
 &= \frac{1 - \theta}{1 - \theta^N} A
 \end{aligned}$$

em que  $A = \frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k$ . A matriz  $A$  também pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 A &= I + \theta T' + (\theta T')^2 + (\theta T')^3 + \dots + (\theta T')^{N-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} (\theta T')^k
 \end{aligned}$$

Para demonstrar isso, lembre que  $\sum_{k=0}^{N-1} (\theta T')^k = \frac{I - (\theta T')^N}{I - \theta T'}$ . Com isso em mente, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k &= \frac{1}{\Theta} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} (\theta T')^k + \sum_{k=N}^{\infty} (\theta T')^k \right] \\
&= \frac{1}{\Theta} \left[ A + \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^{N+k} \right] \\
&= \frac{1}{\Theta} \left[ A + \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^N (\theta T')^k \right] \\
&= \frac{1}{\Theta} \left[ A + (\theta T')^N \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k \right] \\
&= \frac{A}{\Theta} + (\theta T')^N \frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k
\end{aligned}$$

Assim,  $\frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k = \frac{A}{\Theta} + (\theta T')^N \frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k$ . Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{A}{\Theta} &= \frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k - (\theta T')^N \frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k \\
&= \left[ I - (\theta T')^N \right] \frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k
\end{aligned}$$

de modo que  $\frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k = \left[ I - (\theta T')^N \right]^{-1} \frac{1}{\Theta} A$ . Como  $A = \frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k$ , então  $A = \left[ I - (\theta T')^N \right]^{-1} \frac{1}{\Theta} A$ . Para mostrar que  $A = \sum_{k=0}^{N-1} (\theta T')^k$ , resta provar que  $\left[ I - (\theta T')^N \right]^{-1} \frac{1}{\Theta} = I$ . De fato,  $\left[ I - (\theta T')^N \right]^{-1} \frac{1}{\Theta} = I$  é equivalente a  $I\Theta = \left[ I - (\theta T')^N \right]^{-1}$ , ou seja,  $I = \Theta \left[ I - (\theta T')^N \right]$ , que, por sua vez, equivale a  $I = -\frac{\Theta}{(1-\Theta)} (\theta T')^N$ . Sabemos que  $\Theta = \frac{1}{1-\theta^N}$ . Portanto,  $-\frac{\Theta}{(1-\Theta)} = \frac{1}{\theta^N}$ . Dessa forma,  $I = \frac{1}{\theta^N} (\theta T')^N = T'^N$ . Mas já sabemos que  $T'^N = I$ , de maneira que  $\left[ I - (\theta T')^N \right]^{-1} \frac{1}{\Theta} = I$  é equivalente a  $T'^N = I$ , que sabemos ser verdade. Sendo assim, para a cadeia de crédito temos que  $M(\lambda) = \frac{1-\theta}{1-\theta^N} A$ . É necessário agora obter a expressão de  $M(\lambda)$  correspondente aos empréstimos diversificados, cuja matriz representativa dos padrões de viagem é a seguinte:

$$T = \frac{1}{N-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Uma vez que a matriz  $T$  acima é simétrica, pode-se afirmar que  $T' = T$ , o que implica em  $T'^2 = T^2$  e assim sucessivamente. Sabemos que, para qualquer caso:

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \frac{1}{1+\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} T' \right]^{-1} \\ &= (1-\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k \end{aligned}$$

O primeiro passo é considerar que:

$$\begin{aligned} T'^2 &= \frac{1}{N-1} I + \frac{N-2}{N-1} T' \\ T'^3 &= \frac{N-2}{(N-1)^2} I + \left[ 1 - \frac{N-2}{(N-1)^2} \right] T' \\ T'^4 &= \frac{N^2-3N+3}{(N-1)^3} I + \left[ 1 - \frac{N^2-3N+3}{(N-1)^3} \right] T' \\ &\vdots \\ T'^k &= \beta_k I + (1-\beta_k) T' \end{aligned}$$

em que  $\beta_k = \frac{1}{N} \left[ 1 - \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right]$ . Vamos, então, ilustrar, apenas para efeito de compreensão, as equações acima. Com efeito:

$$\begin{aligned} T^2 &= \left( \frac{1}{N-1} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{N-1} \right)^2 \begin{bmatrix} N-1 & N-2 & \cdots & N-2 \\ N-2 & N-1 & \cdots & N-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N-2 & N-2 & \cdots & N-1 \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{N-1} \right)^2 [(N-1)I + (N-2)(N-1)T] \\ &= \frac{1}{N-1} I + \frac{N-2}{N-1} T \end{aligned}$$

Recorde que  $T' = T$  para empréstimos diversificados, de modo que, para  $k = 2$ , não

restam dúvidas. Vamos, então, verificar a validade do resultado para  $k = 3$ . Ora:

$$\begin{aligned}
T^3 &= T^2T \\
&= \left[ \frac{1}{N-1}I + \frac{N-2}{N-1}T \right] T \\
&= \frac{1}{N-1}T + \frac{N-2}{N-1}T^2 \\
&= \frac{1}{N-1}T + \frac{N-2}{N-1} \left[ \frac{1}{N-1}I + \frac{N-2}{N-1}T \right] \\
&= \frac{1}{N-1}T + \frac{N-2}{(N-1)^2}I + \frac{(N-2)^2}{(N-1)^2}T \\
&= \frac{N-2}{(N-1)^2}I + \left[ \frac{1}{N-1} + \frac{(N-2)^2}{(N-1)^2} \right] T
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o termo entre colchetes, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N-1} + \frac{(N-2)^2}{(N-1)^2} &= \frac{(N-1) + (N-2)^2}{(N-1)^2} \\
&= \frac{N^2 - 3N + 3}{(N-1)^2}
\end{aligned}$$

Dessa forma:

$$T^3 = \frac{N-2}{(N-1)^2}I + \left[ \frac{N^2 - 3N + 3}{(N-1)^2} \right] T$$

Note que  $1 - \frac{N-2}{(N-1)^2} = \frac{N^2 - 3N + 3}{(N-1)^2}$  e, portanto:

$$T^3 = \frac{N-2}{(N-1)^2}I + \left[ 1 - \frac{N-2}{(N-1)^2} \right] T$$

Assim, a expressão  $T'^k = \beta_k I + (1 - \beta_k) T'$  é válida também para  $k = 3$ . Calcularemos ainda  $T'^4$ . Ora:

$$\begin{aligned}
T^4 &= T^3T \\
&= \left[ \frac{N-2}{(N-1)^2}I + \left( 1 - \frac{N-2}{(N-1)^2} \right) T \right] T \\
&= \left( \frac{N^2 - 3N + 3}{(N-1)^3} \right) I + \left( 1 - \frac{N^2 - 3N + 3}{(N-1)^3} \right) T
\end{aligned}$$

Para completarmos a ilustração, resta-nos ainda verificar que  $\beta^k = \frac{1}{N} \left[ 1 - \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right]$ .

Para isso, partiremos das expressões já encontradas. Ora:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{1}{N-1} \\ &= \frac{1}{N} \left[ 1 - \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right]\end{aligned}$$

em que  $k-1 = 1$ . Além disso:

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \frac{N-2}{(N-1)^2} \\ &= \frac{1}{N} \left[ \frac{(N-1+1)(N-1-1)}{(N-1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[ \frac{(N-1)^2 - 1^2}{(N-1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[ 1 - \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right]\end{aligned}$$

em que  $k-1 = 2$ . Finalmente:

$$\begin{aligned}\beta_4 &= \frac{N^2 - 3N + 3}{(N-1)^3} \\ &= \frac{1}{N} \frac{(1 + (N-1)) [(N-1)^2 + 1 - (N-1)]}{(N-1)^3} \\ &= \frac{1}{N} \frac{[N(N-1)^2 + 1 - (N-1)^2]}{(N-1)^3} \\ &= \frac{1}{N} \frac{[(N-1)(N-1)^2 + 1]}{(N-1)^3} \\ &= \frac{1}{N} \left[ 1 - \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right]\end{aligned}$$

em que  $k-1 = 3$ . Portanto,

$$\begin{aligned}M(\lambda) &= (1-\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta T')^k \\ &= (1-\theta) \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k [\beta_k I + (1-\beta_k) T'] \\ &= (1-\theta) \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \beta_k I + \theta^k (1-\beta_k) T'\end{aligned}$$

A expressão acima corresponde ao  $M(\lambda)$  para o caso dos empréstimos diversificados. Agora que  $M(\lambda)$  é conhecido nos dois padrões de viagem, pode-se finalmente demonstrar a proposição 3. Considere que o banco 1 esteja insolvente, isto é,  $\mathbf{R} = (0, R, \dots, R)$ . Nesse caso, a condição necessária para que  $x = (1, \dots, 1)$  seja um equilíbrio é:

$$\mathbf{D} = M(\lambda) \mathbf{R} \geq D_0$$

Inicialmente, analizaremos o financiamento interbancário por cadeia de crédito. Nesse caso:

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \frac{\Theta}{1 + \lambda} \left[ I + \theta T' + (\theta T')^2 + \dots + (\theta T')^{N-1} \right] \\ &= \frac{1 - \theta}{1 - \theta^N} A \end{aligned}$$

Considerando que  $\Theta = 1 + \theta^N + \theta^{2N} + \dots$ , a condição de equilíbrio torna-se:

$$\mathbf{D} = \frac{1 - \theta}{1 - \theta^N} \left[ I + \theta T' + (\theta T')^2 + \dots + (\theta T')^{N-1} \right] \mathbf{R} \geq D_0$$

Tendo em mente a matriz  $T$  na cadeia de crédito e recordando que  $T'^N = I$ , é possível descobrir qual seja a primeira linha da condição de equilíbrio:

$$\frac{1 - \theta}{1 - \theta^N} (\theta^{N-1} + \dots + \theta) R \geq D_0$$

Sendo assim, a primeira linha da expressão  $\left[ I + \theta T' + (\theta T')^2 + \dots + (\theta T')^{N-1} \right] \mathbf{R}$  é:

$$(\theta^{N-1} + \dots + \theta) R$$

Para exemplificar, considere  $N = 3$ , de modo que:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies T'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\left[ I + \theta T' + (\theta T')^2 \right] R &= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^2 \\ \theta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ \vdots \\ R \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\theta^2 + \theta) R \\ (1 + \theta^2) R \\ (\theta + 1) R \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, a primeira linha da condição de equilíbrio, para  $N = 3$ , é  $\frac{1-\theta}{1-\theta^3} (\theta^2 + \theta) R$ . Para um valor arbitrário de  $N$ , a expressão correspondente é  $\frac{1-\theta}{1-\theta^N} (\theta^{N-1} + \dots + \theta) R$ . Para descobrir o valor de  $\gamma$ , é conveniente escrever de maneira diferente a condição necessária para que  $x = (1, \dots, 1)$  seja um equilíbrio. Ora,  $\frac{1-\theta}{1-\theta^N} (\theta^{N-1} + \dots + \theta) R \geq D_0$  é equivalente a  $\frac{D_0}{R} \leq 1 - \frac{1}{1+\theta+\dots+\theta^{N-1}}$ , onde o termo à direita da desigualdade é denominado  $\gamma_N^{CRE}$ . A comprovação dessa equivalência depende da igualdade entre  $\frac{1-\theta}{1-\theta^N} (\theta^{N-1} + \dots + \theta)$  e  $1 - \frac{1}{1+\theta+\dots+\theta^{N-1}}$ . Defina:

$$\begin{aligned}
\psi_N &= \theta + \theta^2 + \dots + \theta^N \\
&= \theta (1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-1}) \\
&= \theta (1 + \underbrace{\theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-1} + \theta^N}_{\psi_N} - \theta^N)
\end{aligned}$$

Assim,  $\psi_N = \theta (1 + \psi_N - \theta^N)$ , de maneira que  $\psi_N = \frac{\theta(1-\theta^N)}{(1-\theta)}$ . Sendo assim,  $\psi_{N-1} = \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-1} = \frac{\theta(1-\theta^{N-1})}{(1-\theta)}$ . Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\theta}{1-\theta^N} (\theta^{N-1} + \dots + \theta) &= \frac{1-\theta}{1-\theta^N} \times \frac{\theta(1-\theta^{N-1})}{(1-\theta)} \\
&= \frac{\theta - \theta^N}{1-\theta^N}
\end{aligned}$$

de forma que  $\frac{\theta - \theta^N}{1-\theta^N} = 1 - \frac{1-\theta}{1-\theta^N}$ . Ora, uma vez que  $\psi_N = \frac{\theta(1-\theta^N)}{(1-\theta)}$ , sabe-se que  $\frac{1-\theta}{1-\theta^N} = \frac{\theta}{\psi_N}$ .

Assim, a partir de  $\frac{1-\theta}{1-\theta^N} (\theta^{N-1} + \dots + \theta) \mathbf{R} \geq D_0$ , determina-se que:

$$\begin{aligned} \frac{D_0}{R} &\leq 1 - \frac{\theta}{\psi_N} \\ &= 1 - \frac{\theta}{\theta + \theta^2 + \dots + \theta^N} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-1}} \end{aligned}$$

em que  $1 - \frac{1}{1+\theta+\theta^2+\dots+\theta^{N-1}} = \gamma_N^{CRE}$ , como queríamos demonstrar. Note que  $\gamma_N^{CRE}$  é crescente tanto em  $N$  quanto em  $\theta$  e, conseqüentemente, também em  $\lambda$ . Além disso,  $\gamma_\infty^{CRE} = \theta$ . Até agora, está provada a proposição para a cadeia de crédito. Resta ainda o caso dos empréstimos diversificados, cuja matriz representativa já descrita anteriormente é dada por:

$$T = \frac{1}{N-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Conforme explicação anterior, é conhecido  $M(\lambda)$  também para este caso:

$$M(\lambda) = (1-\theta) \sum_{k=0}^{\infty} [\theta^k \beta_k I + \theta^k (1-\beta_k) T']$$

Substituiremos a matriz  $T$  na expressão  $\Xi_k = \theta^k \beta_k I + \theta^k (1-\beta_k) T'$ . Desenvolveremos a primeira linha, pois é só dela que precisamos. Ora:

$$\begin{aligned} \Xi_k &= \theta^k \beta_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta^k (1-\beta_k) \frac{1}{N-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta^k \beta_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} + \frac{1}{N-1} \begin{pmatrix} 0 & \theta^k (1-\beta_k) & \dots & \theta^k (1-\beta_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta^k \beta_k & \frac{\theta^k (1-\beta_k)}{N-1} & \dots & \frac{\theta^k (1-\beta_k)}{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Essa última matriz quadrada apresenta  $\theta^k \beta_k$  na diagonal principal e  $\frac{\theta^k(1-\beta_k)}{N-1}$  para todos os demais elementos. Essa matriz foi ilustrada parcialmente, já que nos limitaremos a descrever apenas a primeira linha da condição de equilíbrio. É simples compreender que:

$$\begin{pmatrix} \theta^k \beta_k & \frac{\theta^k(1-\beta_k)}{N-1} & \dots & \frac{\theta^k(1-\beta_k)}{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (N-1) \frac{\theta^k(1-\beta_k)}{N-1}$$

Dessa forma, a primeira linha da condição de equilíbrio:

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \geq \frac{D_0}{R}$$

é dada por:

$$\frac{D_1}{R} = (1-\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \theta^k (1-\beta_k) \frac{N-1}{N-1} \right] \equiv \gamma_N^{DIV} \geq \frac{D_0}{R}$$

Observe que o somatório se inicia em  $k=1$ . Com efeito:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k (1-\beta_k) = \theta^0 (1-\beta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k (1-\beta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k (1-\beta_k)$$

Ora  $T^k = \beta_k I + (1-\beta_k) T^k \implies (1-\beta_0) I = (1-\beta_0) T^k$ . Se  $(1-\beta_0) \neq 0$ , então  $I = T^k$ , uma contradição. Logo  $(1-\beta_0) = 0$ , de onde temos que  $\theta^0 (1-\beta_0) = 0$ . Substituindo-se  $\beta_k = \frac{1}{N} \left[ 1 - \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right]$  na equação de  $\gamma_N^{DIV}$ , obtém-se:

$$\gamma_N^{DIV} = (1-\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left( 1 - \frac{1}{N} \left[ 1 - \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right] \right)$$

de sorte que  $N \cdot \gamma_N^{DIV} = (1-\theta) \left[ (N-1) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k + \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right]$ . Nesse ponto, são necessárias duas considerações. A primeira é que:

$$(1-\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k = (1-\theta) \frac{\theta}{1-\theta} = \theta$$

e a segunda é:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} = \theta + \theta^2 \left( \frac{-1}{N-1} \right) + \theta^3 \left( \frac{-1}{N-1} \right)^2 + \dots$$

Observe que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^k = 1 + \theta \left( \frac{-1}{N-1} \right) + \theta^2 \left( \frac{-1}{N-1} \right)^2 + \dots$$

Assim,  $\sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} = \theta \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^k$ , de forma que:

$$(1 - \theta) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} = \theta (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^k$$

Ora,  $\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-\theta}{N-1} \right)^k$ . Seja  $\varphi = \frac{-\theta}{N-1}$ . Ora,  $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k = \frac{1}{1-\varphi}$ . Portanto,  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-\theta}{N-1} \right)^k = \frac{1}{1-\left(\frac{-\theta}{N-1}\right)}$ , donde temos:

$$\begin{aligned} \theta (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^k &= \frac{\theta (1 - \theta)}{1 + \frac{\theta}{N-1}} \\ &= \frac{(N-1) \theta (1 - \theta)}{N-1 + \theta} \end{aligned}$$

Com isso em mente, pode-se desenvolver a expressão  $\gamma_N^{DIV}$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} N\gamma_N^{DIV} &= (1 - \theta) \left[ (N-1) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k + \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^{k-1} \right] \\ &= (N-1) \theta + \theta (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left( \frac{-1}{N-1} \right)^k \\ &= (N-1) \theta + \frac{(N-1) \theta (1 - \theta)}{N-1 + \theta} \\ &= \frac{(N-1) \theta N}{N-1 + \theta} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\gamma_N^{DIV} = \frac{1}{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{N-1}}$$

Recordando que  $\theta = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ , vê-se que  $\gamma_N^{DIV}$  varia de maneira diretamente proporcional a  $\lambda$  e  $N$ . Além disso, é simples ver que  $\gamma_{\infty}^{DIV} = \theta$ . ■

**Proposição 4 de FPR (2000):** *No caso de insolvência de um banco, o sistema está mais exposto à disciplina de mercado quando está sob as condições do mecanismo de*

empréstimos diversificados do que quando está sujeito a um sistema de cadeia de crédito. Ou seja,  $\gamma_N^{CRE} > \gamma_N^{DIV}$ . Ressalta-se ainda que  $\gamma$  é uma medida inversa do grau de disciplina de mercado, ou seja, quanto maior  $\gamma$  menor a disciplina.

**Demonstração:** É necessário comparar  $\gamma_N^{CRE}$  e  $\gamma_N^{DIV}$ . Como explicado anteriormente, sabe-se que  $\gamma_N^{DIV} = \frac{(N-1)\theta}{N-1+\theta}$  e  $\gamma_N^{CRE} = \frac{\theta-\theta^N}{1-\theta^N}$ . Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_N^{DIV}}{\theta} &= \frac{(N-1)}{N-1+\theta} \\ &= \frac{1}{1+\frac{\theta}{N-1}}\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_N^{CRE}}{\theta} &= \frac{1}{\theta} \frac{\theta(1-\theta^{N-1})}{1-\theta^N} \\ &= \frac{1-\theta^{N-1}}{1-\theta^N}\end{aligned}$$

Além disso, pode-se escrever  $\frac{\gamma_N^{CRE}}{\theta}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{1-\theta^{N-1}}{1-\theta^N} &= \frac{\theta(1-\theta^{N-1})}{1-\theta} \times \frac{1-\theta}{(1-\theta^N)\theta} \\ &= \psi^{N-1} \times \frac{1}{\psi^N} \\ &= \frac{\theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-1}}{\theta + \theta^2 + \dots + \theta^N} \\ &= \frac{\theta(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-2})}{\theta(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-1})} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\theta^{N-1}}{1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-2}}}\end{aligned}$$

Sendo assim, o objetivo desta demonstração resume-se à comparação entre  $\frac{\theta}{N-1}$  e  $\frac{\theta^{N-1}}{1+\theta+\theta^2+\dots+\theta^{N-2}}$ .

Para igualar os numeradores, façamos:

$$\frac{\theta^{N-1}\theta^{2-N}}{(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-2})\theta^{2-N}} = \frac{\theta}{\theta^{2-N} + \theta^{3-N} + \dots + \theta^{N-(N-1)} + \theta^{N-N}}$$

Como  $0 < \theta < 1$ , pode-se deduzir que:

$$\theta^{2-N} + \theta^{3-N} + \dots + \theta^{N-(N-1)} + \theta^{N-N} = \frac{1}{\theta^{N-2}} + \frac{1}{\theta^{N-3}} + \dots + \frac{1}{\theta} + 1$$

Assim:

$$\theta^{2-N} + \theta^{3-N} + \dots + \theta^{N-(N-1)} + \theta^{N-N} > \underbrace{1 + 1 + \dots + 1 + 1}_{N-1 \text{ vezes}}$$

de modo que  $\theta^{2-N} + \theta^{3-N} + \dots + \theta^{N-(N-1)} + \theta^{N-N} > N - 1$ . Portanto, invertendo:

$$\frac{\theta}{\theta^{2-N} + \theta^{3-N} + \dots + \theta + 1} < \frac{\theta}{N - 1}$$

Como  $0 < \theta < 1$ , temos que  $\frac{\theta^{N-1}}{1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-2}} < \frac{\theta}{\theta^{2-N} + \theta^{3-N} + \dots + \theta + 1}$ . Assim:

$$\frac{\theta^{N-1}}{1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-2}} < \frac{\theta}{N - 1}$$

Portanto:

$$\frac{1}{1 + \frac{\theta^{N-1}}{(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-2})}} > \frac{1}{1 + \frac{\theta}{N-1}}$$

de forma que  $\frac{\gamma_N^{CRE}}{\theta} > \frac{\gamma_N^{DIV}}{\theta}$ . Logo,  $\gamma_N^{CRE} > \gamma_N^{DIV}$ . ■