

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO EM QCD:  
MÁXIMA VIOLAÇÃO DE HELICIDADE, TWISTORS E  
O ALGORITMO BCFW**

PEDRO LISBÃO OLIVEIRA DE CARVALHO

ORIENTADOR:

AMÍLCAR RABELO DE QUEIROZ

Brasília, 22 de Agosto de 2011

# Agradecimentos

Quero agradecer à minha família, aos amigos e a todos os que me apoiaram.

Em particular gostaria de agradecer à minha mãe, mecenas do meu trabalho e dos meus sonhos, por confiar cegamente na minha capacidade; por investir absolutamente tudo o que está ao alcance dela nos filhos, por todo o amor. Ao meu pai, por instigar curiosidade e interesse, por ser um exemplo. Aos meus irmãos, por estarem sempre ao meu lado. Ao Dudz, por ser incomensuravelmente amável, por ser o Dudz. À Dinda, minha segunda mãe, por ter me criado do jeito que sou. À Iazsmin, por ter me apoiado durante os momentos mais difíceis, por estar constantemente ao meu lado, por acreditar em mim até quando eu não o faço; por inspirar uma vida melhor a cada instante, pelo amor incondicional, por tudo que passaremos juntos. À família da Iazsmin, por me receber dentro do seu círculo com muito carinho. Ao Paulo, meu irmão científico, pelas discussões, pelo estudo e pela companhia. Ao Amílcar, por ter sido um orientador eficiente e inteligente, pela liberdade que eu tive, por estimular progresso e alto padrão de qualidade a todo o momento; pelas lições de vida acadêmica, cada vez mais úteis. A todos os professores e colegas que me ajudaram a crescer enquanto físico.

Esse trabalho foi financiado pelo CNPq.

# Resumo

Recentemente, novos métodos que otimizam o cálculo de amplitudes de espalhamento em teorias de calibre não abeliano, em particular QCD, tem recebido atenção na literatura e tem sido alvo de extensiva pesquisa. Dentre os tópicos de interesse se destacam as amplitudes de máxima violação de helicidade (MHV), relacionadas a espalhamentos envolvendo bósons de calibre onde esses bósons não tem todos a mesma helicidade. O cálculo das amplitudes MHV se baseia na notação dos twistors e, em geral, é muito mais simples que o cálculo das amplitudes de Feynman usuais, permitindo-nos trabalhar com processos mais complexos usando a mesma capacidade computacional. O algoritmo BCFW nos permite reduzir amplitudes onde não há a máxima violação de helicidade à produtos de amplitudes MHV, simplificando então o cálculo de processos mais complexos.

O objetivo desta dissertação é revisar toda essa tecnologia usada em QCD, de maneira a permitir ao leitor a aplicação imediata dos métodos, numa linguagem de fácil leitura.

# Abstract

Recently, new methods that optimize the evaluation of scattering amplitudes in non abelian gauge theories, in particular QCD, have received attention in the literature and are object to extensive research. Amongst the topics of interest the maximum helicity violation (MHV) amplitudes stand out, related to gauge boson scattering in which not all bosons have the same helicity. The calculation of MHV amplitudes is based in twistor notation and is in general much simpler than the usual Feynman amplitudes, allowing us to work with more complex processes with the same computational force. The BCFW algorithm allows us to reduce amplitude that are not MHV amplitudes to products of MHV amplitudes, simplifying then the calculation of even more complex processes.

The goal of this work is to review all this technology used in QCD, so that the reader is able to apply those methods immediately, in a easy to read language.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>O Campo de Yang-Mills</b>	<b>9</b>
2.1	O Campo Escalar. . . . .	9
2.2	A Simetria SU(2) e o Campo de Yang-Mills . . . . .	15
2.3	A Natureza Geométrica dos Campos de Calibre. . . . .	20
<b>3</b>	<b>Representações Espinoriais do Grupo de Lorentz</b>	<b>27</b>
3.1	Motivação . . . . .	27
3.2	Campos Espinoriais . . . . .	35
<b>4</b>	<b>A Equação de Dirac e o Maquinário dos Twistors</b>	<b>47</b>
4.1	A equação de Dirac. . . . .	47
4.2	Soluções da Equação de Dirac. . . . .	56
4.3	Férmions sem massa e helicidade. . . . .	61
<b>5</b>	<b>Amplitudes de Máxima Violação de Helicidade e o Algoritmo BCFW</b>	<b>77</b>
5.1	Regras de Feynman para QCD . . . . .	77
5.2	Calculando diagramas com a notação dos Twistors . . . . .	78
5.3	Ordenação de Cor . . . . .	85
5.4	Amplitudes de Máxima Violação de Helicidade (MHV) . . . . .	89

5.5	O algoritmo BCFW . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>110</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O Modelo Padrão das partículas elementares descreve as interações fortes pela dinâmica da carga de cor, regida pelo grupo  $SU(3)$ . Tal interação age nos quarks, que vivem na representação fundamental do grupo  $SU(3)$ . O nome Cromodinâmica Quântica foi dado devido a essa representação de cor, pois tem-se três tipos de carga, nomeadas de acordo com as três cores básicas. A QCD é famosa por exibir duas propriedades peculiares: o confinamento e a liberdade assintótica. Confinamento significa que quarks isolados não são observáveis, uma vez que estados físicos são singletos de cor. A liberdade assintótica diz que a constante de acoplamento  $\alpha_{QCD}$  é proporcional a  $\frac{1}{\ln(Q)}$ , onde  $Q$  é a escala de energia; isso dificulta a implementação de técnicas perturbativas na região do infravermelho,  $Q \rightarrow 0$ .

Desde a construção do LHC, surgiu a necessidade de se calcular processos de espalhamento de hádrons com um grande número de partículas, para que possamos comparar teoria e experimento com eficiência. Contudo, devido ao caráter não linear das teorias de calibre não abeliano, o número de diagramas a serem calculados cresce mais rápido que  $n!$ , para um espalhamento de  $n$  gluons []. Para resolver tal problema, novos métodos foram desenvolvidos para que se possa calcular as amplitudes de espalhamento dos bósons de calibre.

As amplitudes de máxima violação de helicidade (MHV), foram propostas por Parke e Taylor em [14] e demonstradas posteriormente por Berends e Giele em [12]. A idéia é que a amplitude de espalhamento na qual todos os constituintes tem a mesma helicidade é nula; as primeiras amplitudes não nulas são aquelas onde a diferença entre o número de partículas com uma helicidade, e com a outra, é máximo. A fórmula de Parke e Taylor nos permite encontrar, imediatamente, todas as amplitudes em nível de árvore com até cinco pernas externas.

Para poder calcular processos mais complexos, Britto, Feng, Cachazo e Witten propuseram um algoritmo que, através de uma continuação analítica dos momentos das partículas, nos permite tratar amplitudes mais complexas [20]. O caminho seguido aqui é o usado por Cachazo, Svrček [17] e Witten [16].

Esse review foi pensado como um guia de estudo para o aluno de pós graduação interessado em física de altas energias. Com isso em mente, todos os cálculos foram cuidadosamente expressos, além dos pré-requisitos necessários estarem, salvo exceção, contidos nas seções anteriores. A linha seguida é um meio termo entre os trabalhos similares já existentes, possibilitando que o teórico possa ter uma visão aplicada do formalismo, e ao mesmo tempo mostrando a estrutura por trás de tudo para o fenomenologista.

A organização do trabalho é a seguinte: No Capítulo 2 define-se o que é um campo de calibre, dado um grupo; após uma breve preliminar com o campo escalar estuda-se o campo de Yang-Mills simétrico sob o  $SU(2)$ . Depois constrói-se o formalismo dos campos de calibre de maneira geométrica, de modo a poder generalizá-lo para campos simétricos sob qualquer grupo de Lie, na linha de [5]. O Capítulo 3 trata das representações do grupo de Lorentz, partindo de objetos conhecidos até a introdução das representações espinoriais. Discutem-se as características dos espinores a fundo. O Capítulo 4 trata da equação de Dirac, equação de movimento dos campos de spin  $\frac{1}{2}$ . Encontram-se as soluções tipo onda plana, e a partir delas estudam-se as características dos espinores enquanto soluções para a eq. de Dirac. Assume-se trabalhar com férmions sem massa,



e introduz-se a notação dos twistors, que facilita o procedimento com espinores não massivos. Muita atenção é dada às propriedades dos twistors. Ambos os capítulos 3 e 4 seguem o estilo de [1]. O Capítulo 5 introduz os métodos almejados, fazendo-se exemplos. Alguns processos de QED são calculados, antes de partir-se para QCD. Descreve-se a ordenação de cor, que consiste em separar a informação relativa ao grupo de simetria da informação cinética nas amplitudes, tornando o cálculo mais enxuto. Descrevem-se as amplitudes de máxima violação de helicidade para o processo de espalhamento entre quark-antiquark-gluons e para o espalhamento entre gluons. Por fim, o algoritmo BCFW é descrito com o intuito de reduzir amplitudes que não são resolvidas usando as expressões encontradas anteriormente a objetos dentro do nosso escopo. O algoritmo também é usado para demonstrar a expressão das amplitudes MHV. A organização do Capítulo 5 é a mesma de [9], com passagens inspiradas em [8].

## Capítulo 2

# O Campo de Yang-Mills

### 2.1 O Campo Escalar.

Nosso ponto de partida é um campo escalar do tipo  $\phi(x^\mu)$ , uma generalização da função horária de uma partícula  $x(t)$ , agora com dependência nas quatro coordenadas  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  do espaço de Minkowski. O espaço está dotado da métrica  $\eta^{\mu\nu}$ , com assinatura  $(-, +, +, +)$ . O campo satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (2.1.1)$$

Pode-se checar diretamente que a Lagrangiana que produz tal equação é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (2.1.2)$$

Caso o campo tenha duas componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , dizemos que o campo é escalar e complexo. Em retrospecto, o campo escalar de uma componente é chamado de campo escalar

real. Podemos escrever

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \\ \phi^* &= \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Em analogia com a Lagrangiana do campo escalar real, temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - \frac{m^2}{2}\phi\phi^*.\tag{2.1.4}$$

Esta Lagrangiana satisfaz as condições exigidas, como as equações de Klein-Gordon para cada componente; ela também é real, isto é, invariante sob conjugação complexa.

É interessante notar que há uma simetria que não estava presente no caso real. Quando feita a transformação

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow e^{-i\Omega}\phi, \\ \phi^* &\rightarrow e^{i\Omega}\phi^*,\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

não se altera a forma da Lagrangiana, e conseqüentemente, das equações de movimento. Esse tipo de transformação é chamada de transformação de calibre, uma vez que se pode alterar o campo - calibrá-lo - para um valor conveniente sem alterar a física. Devido ao fator  $\Omega$  ser constante, temos covariância, isto é o campo e sua derivada se transformam da mesma maneira; isso pode ser visto diretamente das transformações infinitesimais:

$$\begin{aligned}\delta\phi &= -i\Omega\phi, \\ \delta\phi^* &= i\Omega\phi^*,\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

e para as derivadas,

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i\Omega(\partial_\mu\phi), \quad (2.1.7)$$

$$\delta(\partial_\mu\phi^*) = i\Omega(\partial_\mu\phi^*).$$

Podemos representar o campo escalar complexo de uma forma muito interessante, valendo-nos de geometria. Inspirados pela representação de números complexos no plano de Argand-Gauss, podemos escrever as componentes do campo como componentes de um vetor no plano:

$$\vec{\phi} = \hat{i}\phi_1 + \hat{j}\phi_2. \quad (2.1.8)$$

Nessa forma, usamos produtos escalares para construir a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu\vec{\phi}) - \frac{m^2}{2}\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}. \quad (2.1.9)$$

Se usarmos agora a relação de Euler,  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ , podemos escrever a transformação de calibre de maneira também geométrica

$$\phi'_1 + i\phi'_2 = e^{-i\Omega}(\phi_1 + i\phi_2) = (\cos\Omega - i\sin\Omega)(\phi_1 + i\phi_2), \quad (2.1.10)$$

$$\phi'_1 - i\phi'_2 = e^{i\Omega}(\phi_1 - i\phi_2) = (\cos\Omega + i\sin\Omega)(\phi_1 - i\phi_2),$$

ou seja,

$$\phi'_1 = \phi_1 \cos\Omega + \phi_2 \sin\Omega, \quad (2.1.11)$$

$$\phi'_2 = -\phi_1 \sin\Omega + \phi_2 \cos\Omega.$$

Assim fica clara uma vantagem conceitual de representar o campo escalar complexo

como um vetor no plano: pode-se encarar as transformações de calibre como rotações. Tais rotações misturam as componentes do campo entre si, não surtindo nenhum efeito físico; temos, com efeito, uma transformação interna.

Essa formulação do problema é possível uma vez que as rotações no plano são geradas pelo grupo  $SO(2)$ , e as transformações de calibre (2.1.11) com as quais trabalhamos até agora são elementos do  $U(1)$ ; esses grupos são isomórficos. O mapa entre os dois grupos é justamente a representação da função exponencial complexa como a soma de funções trigonométricas.

Por fim, nota-se que o parâmetro da transformação de calibre é constante.

Seria interessante estudar o caso no qual o parâmetro depende das coordenadas do espaço-tempo também. Nesse caso temos

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi - i\Omega\phi, \\ \delta\phi &= -i\Omega\phi,\end{aligned}\tag{2.1.12}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi &\rightarrow \partial_\mu\phi - i(\partial_\mu\Omega)\phi - i\Omega(\partial_\mu\phi), \\ \delta(\partial_\mu\phi) &= -i(\partial_\mu\Omega)\phi - i\Omega(\partial_\mu\phi).\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

Podemos tomar o complexo conjugado para encontrar a variação de  $\phi^*$  e  $\partial_\mu\phi^*$ . Devido ao termo extra na expressão de  $\partial_\mu\phi$  e  $\partial_\mu\phi^*$ , com a derivada do parâmetro de transformação, dizemos que a derivada do campo não se transforma covariantemente, isto é, da mesma maneira que o campo em si. Uma consequência disso é que a Lagrangiana não mais é invariante sob as transformações de calibre, a saber

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \delta\left((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*)\right) - m^2\delta(\phi\phi^*) & (2.1.14) \\
&= \delta(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) + (\partial_\mu\phi)\delta(\partial^\mu\phi^*) \\
&= \left(-i(\partial_\mu\Omega)\phi - i\Omega(\partial_\mu\phi)\right)(\partial^\mu\phi^*) + (\partial_\mu\phi)\left(-i(\partial^\mu\Omega)\phi^* - i\Omega(\partial^\mu\phi^*)\right) \\
&= (\partial_\mu\Omega)(-i\phi\partial^\mu\phi^* + i\phi^*\partial^\mu\phi) \\
&= (\partial_\mu\Omega)J^\mu.
\end{aligned}$$

onde  $J^\mu = -i\phi\partial^\mu\phi^* + i\phi^*\partial^\mu\phi$  é a corrente associada à transformação do  $U(1)$ . Note que a variação do termo de massa é nula,  $\delta(\phi\phi^*) = \delta(\phi)\phi^* + \phi\delta(\phi^*) = -i\Omega(\phi\phi^* - \phi\phi^*) = 0$ . Para recuperar a invariância de calibre, adicionamos à Lagrangiana o termo

$$\mathcal{L}_1 = -ie(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)A_\mu, \quad (2.1.15)$$

dependente do quadri vetor  $A_\mu$ , chamado de potencial de calibre. Ele se acopla com o termo sobran te da Lagrangiana de modo a garantir a simetria. O fator  $e$  é uma constante de acoplamento. O potencial  $A_\mu$  se transforma segundo

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Omega, \quad (2.1.16)$$

tal que

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_1 &= -e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu(\delta A_\mu) & (2.1.17) \\
&= -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu\partial_\mu\Omega.
\end{aligned}$$

Uma vez cancelado o termo extra da variação de  $\mathcal{L}$  com o segundo termo da variação de  $\mathcal{L}_1$ , precisamos cancelar o primeiro,  $-e(\delta J^\mu)A_\mu = -e(2\phi^*\phi\partial^\mu\Omega)A_\mu$ . Adicionemos então

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \quad (2.1.18)$$

com

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_2 &= 2e^2 A_\mu (\delta A^\mu) \phi^* \phi \\ &= 2e A_\mu (\partial^\mu \Omega) \phi^* \phi \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

De modo que a Lagrangiana total  $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  é invariante por transformações de calibre. Um outro termo que podemos adicionar à Lagrangiana, dessa vez sem perder a simetria de calibre, é

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.1.20)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . A comutação das derivadas parciais garante a invariância de  $\mathcal{L}_4$ , então trata-se de um termo permitido. Temos, finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^* - ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.1.21) \\ &= (\partial_\mu \phi + ie A_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* - ie A^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= (D_\mu \phi)(D^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Aqui introduzimos a derivada covariante,  $D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$ , que substitui  $\partial_\mu$  na

Lagrangiana fazendo com que a derivada (covariante) do campo se transforme da mesma maneira que o campo:

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu\phi) &= \delta(\partial_\mu\phi) + ie(\delta A_\mu)\phi + ieA_\mu(\delta\phi) & (2.1.22) \\
&= -i\Omega(\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi) \\
&= -i\Omega(D_\mu\phi).
\end{aligned}$$

Além disso, vale notar que o tensor  $F^{\mu\nu}$ , chamado tensor intensidade de campo eletromagnético, surgiu naturalmente uma vez introduzido o potencial  $A_\mu$ . Dizemos então que o campo eletromagnético é invariante sob transformações locais do grupo  $U(1)$ .

Na próxima seção generalizaremos as noções aqui discutidas para outros grupos de simetria.

## 2.2 A Simetria $SU(2)$ e o Campo de Yang-Mills

Na discussão do campo escalar complexo na seção anterior encaramos a simetria  $U(1)$  de um ponto de vista geométrico, tratando as relações entre as componentes do campo como rotações no plano. O próximo passo, seguindo essa linha, é estudar uma simetria análoga às rotações tridimensionais. O campo  $\phi$  terá então três componentes

$$\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3). \quad (2.2.1)$$

Uma rotação misturando essas componentes transformará  $\phi_i$  da seguinte maneira:

$$\phi'_i = \phi_i - \Omega^j \phi^k \varepsilon_{ijk}, \quad (2.2.2)$$

$$\delta\phi_i = -\Omega^j \phi^k \varepsilon_{ijk}, \quad (2.2.3)$$



onde  $\vec{\Omega} = \{\Omega_i\}$  são ângulos de rotação, e  $\varepsilon_{ijk}$  é um tensor totalmente antissimétrico definido por  $\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{132} = 1$ . É fácil ver que tal transformação é não abeliana, devido à antissimetria de  $\varepsilon_{ijk}$ . Vale notar que  $\vec{\Omega}$  é independente das coordenadas do espaçotempo, transformando todos os pontos de  $\phi_i$  da mesma forma.

A generalização para o caso com N componentes pode ser feita facilmente.

Gostaríamos, contudo, de trabalhar com transformações que são dependentes das coordenadas, como fizemos com o campo escalar. Assim,

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(x^\mu). \quad (2.2.4)$$

Com tal dependência, precisamos adicionar

$$\partial_\mu \phi'_i = \partial_\mu \phi_i - \partial_\mu \Omega^j \phi^k \varepsilon_{ijk} - \Omega^j \partial_\mu \phi^k \varepsilon_{ijk}, \quad (2.2.5)$$

$$\delta \partial_\mu \phi_i = -(\partial_\mu \Omega^j) \phi^k \varepsilon_{ijk} - \Omega^j \partial_\mu \phi^k \varepsilon_{ijk}. \quad (2.2.6)$$

Novamente queremos que a derivada do campo se transforme de maneira análoga ao campo; em outras palavras, covariantemente. O primeiro termo no lado direito de (2.2.6) deve, então, ser cancelado. Usamos o mesmo procedimento da seção (2.1), que também funciona para este caso. Introduzimos uma derivada covariante, definida como

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + g A_\mu^j \phi^k \varepsilon_{ijk}. \quad (2.2.7)$$

Aqui deve ser enfatizado que os índices latinos dizem respeito ao espaço interno, que serão melhor discutidos em breve. Tais índices não tem nenhuma relação com os índices gregos do espaçotempo.

O potencial de calibre análogo a  $A_\mu$  é  $A_\mu^i$ , cuja estrutura extra é devida à maior complexidade do grupo SU(2) quando comparado com o U(1). A constante de acoplamento

$g$  é análoga à carga elétrica  $e$  do campo escalar complexo.

A exigência da covariância com a nova derivada é

$$\delta(D_\mu \phi_i) = -\Omega^j (D_\mu \phi^k) \varepsilon_{ijk}, \quad (2.2.8)$$

que para ser satisfeita, precisamos ter

$$\delta A_{\mu i} = -\Omega^j A_{\mu}^k \varepsilon_{ijk} + \frac{1}{g} \partial_\mu \Omega_i. \quad (2.2.9)$$

Então

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \phi_i) &= \delta(\partial_\mu \phi_i) + g((\delta A_\mu^j) \phi^k + A_\mu^j (\delta \phi^k)) \varepsilon_{ijk} \\ &= -(\partial_\mu \Omega^j) \phi^k \varepsilon_{ijk} - \Omega^j \partial_\mu \phi^k \varepsilon_{ijk} - g \phi^j \Omega_l A_{\mu m} \varepsilon^{klm} \varepsilon_{ijk} \\ &\quad + (\partial_\mu \Omega^j) \phi^k \varepsilon_{ijk} - g A_\mu^j \Omega_l \phi_m \varepsilon^{klm} \varepsilon_{ijk} \\ &= -\Omega^j \partial_\mu \phi^k \varepsilon_{ijk} - g \phi^j \Omega_l A_{\mu m} \varepsilon^{klm} \varepsilon_{ijk} - g A_\mu^j \Omega_l \phi_m \varepsilon^{klm} \varepsilon_{ijk}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Agora, se lembrarmos da identidade de Jacobi:

$$\varepsilon^{lmk} \varepsilon_{kij} + \varepsilon^{lik} \varepsilon_{kjm} + \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{kmi} = 0, \quad (2.2.11)$$

e reescrevermos

$$\begin{aligned} &A_l B_m C^j \varepsilon^{lmk} \varepsilon_{kij} + A^m B_l C_j \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{kmi} + A_i B^j C_l \varepsilon^{lik} \varepsilon_{kjm} = 0 \\ \rightarrow &A_l B_m C^j \varepsilon^{lmk} \varepsilon_{kij} + A_i B^j C_l \varepsilon^{lik} \varepsilon_{kjm} = -A^m B_l C_j \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{kmi} \\ \rightarrow &A_l B_m C^j \varepsilon^{lmk} \varepsilon_{kij} + A_i B^j C_l \varepsilon^{ilk} \varepsilon_{jkm} = A^m B_l C_j \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{mki}, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

onde  $A \equiv \Omega$ ,  $B \equiv A_\mu$ ,  $C \equiv \phi$ , então, trocando os índices  $j$  e  $m$ , temos

$$\begin{aligned} -\Omega^m \partial_\mu \phi^k \varepsilon_{imk} - g \phi^m \Omega_l A_{\mu j} \varepsilon^{klj} \varepsilon_{imk} - g A_\mu^m \Omega_l \phi_j \varepsilon^{klj} \varepsilon_{imk} \\ = -\Omega^m (\partial_\mu \phi^k + g A_{\mu l} \phi_j \varepsilon^{ljk}) \varepsilon_{mki} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Obtivemos assim a forma simplificada

$$\delta(D_\mu \phi_i) = -\Omega^j (D_\mu \phi^k) \varepsilon_{ijk}, \quad (2.2.14)$$

$$\delta \phi_i = -\Omega^j \phi^k \varepsilon_{ijk}. \quad (2.2.15)$$

Para definir o tensor intensidade de campo  $F_{\mu\nu}$  análogo ao do campos escalar, temos de lembrar que no presente caso tratamos de um vetor sob  $SU(2)$ , ou em outras palavras, o tensor terá um índice latino. Dito isso, o tensor intensidade de campo deve se transformar como o campo e a derivada do campo,

$$\delta(F_{\mu\nu}^i) = -\Omega^j (F_{\mu\nu}^k) \varepsilon_{ijk}. \quad (2.2.16)$$

O tensor análogo ao tensor de Faraday, que respeita a exigência acima é

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g A_\mu^j A_\nu^k \varepsilon_{ijk}. \quad (2.2.17)$$

É intuitivo que temos uma generalização da intensidade de campo eletromagnético, uma vez que o termo extra depende da estrutura do grupo. Se o grupo é o  $U(1)$ , não é necessário utilizar índices internos, e não haverá termo extra. Seguindo a mesma linha de raciocínio, não podemos adicionar termos não escalares à Lagrangiana, de modo que todos os índices latinos devem estar contraídos. A contração dos índices latinos é equivalente ao traço na representação correspondente do grupo  $SU(2)$ .

Finalmente, a Lagrangiana que construímos é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi^i)(D^\mu\phi_i) - \frac{m^2}{2}\phi^i\phi_i - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu}. \quad (2.2.18)$$

Vejamos agora as equações de movimento. Usando a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(A_\mu^i)} = \partial_\nu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^i)} \right), \quad (2.2.19)$$

temos que

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^i + gA^{\nu j} F_{\mu\nu}^k \varepsilon_{ijk} = g\varepsilon_{ijk} [(\partial_\mu\phi^j)\phi^k + g(A_{\mu m}\phi_n \varepsilon^{jmn})\phi^k], \quad (2.2.20)$$

ou seja,

$$D^\nu F_{\mu\nu}^i = g(D_\mu\phi^j)\phi^k \varepsilon_{ijk} \equiv gJ_\mu^i. \quad (2.2.21)$$

Usamos no último passo a definição da derivada covariante, e definimos uma corrente vetorial  $J_\mu^i$ .

Apesar de a analogia na qual estivemos insistindo - entre o campo de Yang-Mills e o eletromagnetismo - ainda valer, devemos ressaltar aqui uma importante diferença resultante da generalização. Na ausência de matéria temos  $\phi^i = 0$  e conseqüentemente  $J_\mu^i = 0$ . Assim, a equação de movimento (2.2.21) fica

$$D^\nu F_{\mu\nu}^i = 0 \quad \text{ou} \quad \partial^\nu F_{\mu\nu}^i = -gA^{\nu j} F_{\mu\nu}^k \varepsilon_{ijk}. \quad (2.2.22)$$

A intensidade de campo  $F_{\mu\nu}^i$  também age como uma fonte. Este comportamento não linear é talvez o primeiro aspecto fenomenológico a ser mencionado quando contrastamos o campo de Yang-Mills com o campo eletromagnético. As conseqüências se estendem

além da quantização, com propriedades intrigantes. Trata-se de algo comum a todos os campos com grupos de calibre não abelianos, e por isso nos referimos a esses campos como campos de calibre não abeliano.

Nota-se que se adicionarmos um termo de massa à Lagrangiana, i.e.  $m^2 A_\mu^i A_i^\mu$ , a simetria de calibre se quebraria, uma vez que tal termo não é invariante sob as transformações que definimos para os  $A_\mu^i$ ; indicando a presença de um campo de calibre sem massa, como o fóton.

Há uma carga conservada associada a essa simetria de calibre.

As equações de movimento contêm um fator  $g$ , a constante de acoplamento. O ponto interessante é que a mesma constante aparece na definição de  $F_{\mu\nu}^i$ , e indica que todos os campos acoplam com a mesma intensidade aos campos de calibre - a exceção daqueles que não se acoplam de maneira alguma - temos então um acoplamento universal. Este detalhe também é característico das teorias de calibre, uma vez que independentemente do grupo escolhido haverá um acoplamento universal na definição da intensidade de campo.

### 2.3 A Natureza Geométrica dos Campos de Calibre.

Estamos interessados em estudar o campo de calibre gerado por qualquer grupo de Lie, e para isso precisamos repensar o nosso formalismo numa maneira mais abstrata. Geometria parece uma boa escolha, já que estamos interessados em transformações que são diferentes para cada ponto no espaço. Pode-se dizer que estamos adicionando estrutura interna ao espaçotempo; esta estrutura interna é unicamente dependente do grupo, e qualquer variação - variação interna - não produz nenhuma variação física no espaçotempo.

Na última seção escrevemos uma variação no campo sob uma transformação de calibre da seguinte forma

$$\vec{\phi}' = \vec{\phi} - \vec{\Omega} \times \vec{\phi}, \quad (2.3.1)$$

ou equivalentemente,

$$\vec{\phi}' = e^{T^i \Omega_i} \vec{\phi}. \quad (2.3.2)$$

A última linha é apenas uma maneira mais sofisticada de escrever a anterior. Os geradores  $T^i$  são escolhidos de um modo que garanta a equivalência das duas relações acima. Quando lidando com o  $SU(2)$ , temos

$$(T_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}, \quad (2.3.3)$$

onde o índice  $i$  rotula qual dos três geradores está sendo usado, e os índices  $j, k$  rotulam a entrada da matriz em questão.

Se quisermos lidar com um grupo geral, precisamos nos concentrar nos geradores. Todo grupo de Lie tem geradores respeitando um conjunto específico de condições:

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k \quad (2.3.4)$$

onde os colchetes usados são os colchetes de Lie usuais, e os números  $C_{ij}^k$  são as constantes de estrutura da álgebra de Lie correspondente. A existência desse produto define a álgebra. No caso do  $SU(2)$  temos  $C_{ijk} = i\varepsilon_{ijk}$ . Sempre que escrevemos  $(T_i)_{jk} = C_{ijk}$ , dizemos que estamos na representação adjunta.

Passemos agora para uma discussão que nos é familiar. Se fizermos uma transformação de calibre em um campo, queremos estudar a transformação da derivada do campo. Assim,

$$\phi^{j'} = e^{T^i \Omega_i} \phi^j = I(x^\nu) \phi^j, \quad (2.3.5)$$

$$\partial_\mu \phi^{j'} = (\partial_\mu I(x^\nu)) \phi^j + I(x^\nu) \partial_\mu \phi^j. \quad (2.3.6)$$

A explicação geométrica para essa não covariância se dá por termos eixos de coordenadas diferentes ponto a ponto. O resultado é que quando comparamos  $\phi(x^\nu + dx^\nu)$  com  $\phi(x^\nu)$  na definição de diferenciação, nós estamos cometendo um erro; estamos comparando funções em dois sistemas de coordenadas diferentes.

A saída é transportar a função  $\phi(x^\nu)$  paralelamente ao ponto  $x^\nu + dx^\nu$ , e comparar  $\phi(x^\nu)$  com o valor que teria caso os eixos fossem todos no mesmo sistema de coordenadas.

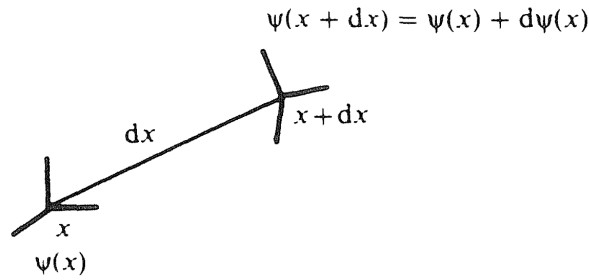


Figura 2.1: Eixos de coordenadas diferentes ponto a ponto. Fonte: [5].

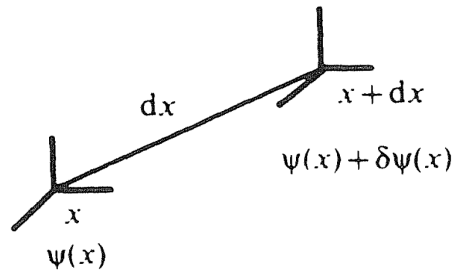


Figura 2.2: Eixos de coordenadas iguais. Fonte: [5].

Se definirmos agora  $\delta\phi$  como a variação em  $\phi$  em razão do transporte paralelo; e  $d\phi$  a variação usual, fazendo a diferença de  $\phi$  em ambos os pontos, nos resta indagar qual é

a dependência de  $\delta\phi$ . Assumindo que trata-se de algo proporcional a  $\phi$ ,  $dx^\mu$  e ao campo de calibre  $A_\mu^j$ , temos

$$\delta\phi = igT_j A_\mu^j dx^\mu \phi. \quad (2.3.7)$$

O fator constante  $g$  aqui serve apenas como ajuste dimensional, enquanto  $T_j$  ainda é um gerador do grupo,  $A_\mu^j$  também pode ser interpretado - num ponto de vista geométrico - como uma medida de quanto os eixos diferem de ponto a ponto. Essas quantidades terão interpretações diferentes quando adicionarmos interpretação física. Agora, com duas variações possíveis de  $\phi$  em mãos, tomamos a diferença entre ambas para obter uma derivada covariante:

$$\begin{aligned} D\phi &= (\phi + d\phi) - (\phi + \delta\phi) = d\phi - \delta\phi, \\ &= d\phi - igT_j A_\mu^j dx^\mu \phi, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

portanto,

$$\frac{D\phi}{dx^\mu} = D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - igT_j A_\mu^j \phi. \quad (2.3.9)$$

Definindo assim de maneira definitiva a derivada covariante. Pode-se mostrar que ela reproduz as derivadas utilizadas até então: trocando  $T_j = -1$  e  $g = e$  temos a derivada acoplada ao campo eletromagnético; trocando  $(T_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}$  temos a derivada acoplada ao campo de Yang-Mills.

Estamos interessados em estudar as propriedades dos objetos recém definidos sob o grupo de calibre, ou como se diz comumente, sob rotações no espaço interno. O campo  $\phi$  e a derivada covariante  $D_\mu\phi$  devem ter o mesmo comportamento, isto é,



$$\phi \rightarrow \phi' = S\phi , \quad (2.3.10)$$

$$D_\mu\phi \rightarrow D'_\mu\phi' = SD_\mu\phi .$$

Onde  $S$  é uma transformação. O potencial de calibre é vinculado por estas expressões. Assim,

$$(\partial_\mu - igA'_\mu)\phi' = (\partial_\mu - igA'_\mu)S\phi = S(\partial_\mu - igA_\mu)\phi, \quad (2.3.11)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = SA_\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^{-1}. \quad (2.3.12)$$

Onde usamos  $T_j A_\mu^j = A_\mu$  por simplicidade, e a lei de transformação para o potencial de calibre é uma consequência direta de (2.3.10). O termo inhomogêneo, contudo, pode ser problemático. Queremos saber se podemos tomar uma rotação interna  $S$  tal que o  $A'_\mu$  rotacionado seja zero. Se isso for possível, então toda a nossa discussão terá sido em vão, já que poderemos fazer transformações de calibre que nos levem a um potencial nulo.

O teste de tal propriedade é felizmente muito simples. Escolhemos um caminho fechado - talvez um retângulo ABCD - e transportamos paralelamente o campo  $\phi$  em torno dele. O efeito do transporte é representativo do efeito do potencial. Primeiro, tomamos  $\phi$  de A até B, através de um trecho de comprimento  $\Delta x^\mu$ , mantendo termos até segunda ordem em  $\Delta x^\mu$ . Temos,

$$\phi_B = (1 + \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2}\Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu)\phi_{A,0}. \quad (2.3.13)$$

Em seguida, indo de B até C através de uma distância  $\delta x^\mu$ ; e depois de volta a A

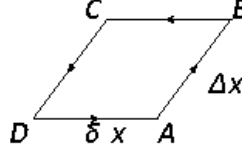


Figura 2.3: Caminho fechado

passando por D

$$\begin{aligned}
 \phi_C &= (1 + \delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu D_\mu D_\nu) \phi_B & (2.3.14) \\
 &= (1 + \delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu D_\mu D_\nu) (1 + \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu) \phi_{A,0} \\
 &= [1 + (\delta x^\mu + \Delta x^\mu) D_\mu + (\frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu + \delta x^\mu \Delta x^\nu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu) D_\mu D_\nu] \phi_{A,0}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_D &= (1 - \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu) \phi_C & (2.3.15) \\
 &= (1 - \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu) [1 + (\delta x^\mu + \Delta x^\mu) D_\mu \\
 &\quad + (\frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu + \delta x^\mu \Delta x^\nu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu) D_\mu D_\nu] \phi_{A,0} \\
 &= [1 + \delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu D_\mu D_\nu + (\delta x^\mu \Delta x^\nu - \Delta x^\mu \delta x^\nu) D_\mu D_\nu] \phi_{A,0}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{A,1} &= (1 - \delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu D_\mu D_\nu) \phi_D & (2.3.16) \\
 &= (1 - \delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu D_\mu D_\nu) [1 + \delta x^\mu D_\mu \\
 &\quad + \frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu D_\mu D_\nu + (\delta x^\mu \Delta x^\nu - \Delta x^\mu \delta x^\nu) D_\mu D_\nu] \phi_{A,0} \\
 &= [1 + (\delta x^\mu \Delta x^\nu - \Delta x^\mu \delta x^\nu) D_\mu D_\nu] \phi_{A,0} \\
 &= (1 + \delta x^\mu \Delta x^\nu [D_\mu, D_\nu]) \phi_{A,0}.
 \end{aligned}$$

Chegamos à expressão do comutador entre duas derivadas covariantes, que obviamente dependerá das propriedades do potencial de calibre.

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] & (2.3.17) \\
&= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]) \\
&= -igF_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.3.18)$$

A diferença entre  $\phi_{A,0}$  e  $\phi_{A,1}$  é proporcional a  $F_{\mu\nu}$  e à área do retângulo. Se  $F_{\mu\nu}$ , e consequentemente  $A_\mu$ , são não nulos então há um efeito devido ao transporte paralelo em torno do caminho fechado. Pode-se mostrar que o tensor intensidade de campo  $F_{\mu\nu}$  se transforma, sob rotações internas, como

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = SF_{\mu\nu}S^{-1}. \quad (2.3.19)$$

Isso significa que  $F_{\mu\nu}$  não pode ser levado a zero - ou é zero em todos os calibres, ou diferente de zero em todos. Além disso, nossa discussão não foi em vão, já que haverá um efeito físico devido ao potencial.

## Capítulo 3

# Representações Espinoriais do Grupo de Lorentz

### 3.1 Motivação

Se nos recordarmos da ação dos operadores unitários nos campos escalares, temos, para  $\Lambda$  um elemento do grupo de Lorentz, e  $U(\Lambda)$  uma representação unitária no espaço dos campos escalares  $\varphi(x)$ ,

$$U(\Lambda)^{-1}\varphi(x)U(\Lambda) = \varphi(\Lambda^{-1}x) := \varphi(\bar{x}). \quad (3.1.1)$$

Fica claro que a transformação mantém o caráter escalar do campo, transformando apenas o argumento deste. Para entender a ação nos campos vetoriais, olhamos a ação na derivada do campo escalar.

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)^{-1}\partial_\mu\varphi(x)U(\Lambda) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \frac{\partial\bar{x}^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\rho}\varphi(\Lambda^{-1}x) = \Lambda_\mu{}^\rho\bar{\partial}_\rho\varphi(\bar{x}),
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

onde

$$\bar{\partial}_\rho := \frac{\partial}{\partial\bar{x}^\rho}. \tag{3.1.3}$$

Assim, seguindo a mesma regra, temos para um campo vetorial  $A^\mu$ ,

$$U(\Lambda)^{-1}A^\mu(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho A^\rho(\bar{x}). \tag{3.1.4}$$

Analogamente, para analisar um campo tensorial  $B^{\mu\nu}$  escrevemos este como o produto de dois campos vetoriais, ou seja,  $B^{\mu\nu}(x) = A^\mu(x)A^\nu(x)$

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)^{-1}B^{\mu\nu}(x)U(\Lambda) &= U(\Lambda)^{-1}A^\mu(x)U(\Lambda)U(\Lambda)^{-1}A^\nu(x)U(\Lambda) \\
&= \Lambda^\mu{}_\rho A^\rho(\bar{x})\Lambda^\nu{}_\sigma A^\sigma(\bar{x}) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma B^{\rho\sigma}(\bar{x}).
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

É claro que um campo tensorial  $B^{\mu\nu}$  qualquer não necessariamente pode ser escrito como um produto de dois campos vetoriais, mas no que diz respeito às transformações tensoriais ambos se comportam da mesma maneira. Ainda assim, cabe perguntar se podemos escrever um campo tensorial como uma composição de objetos mais simples. Começando com  $B^{\mu\nu}$ , nota-se que se  $B^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}$  onde  $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$  é simétrico nos índices, temos

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)^{-1}S^{\mu\nu}(x)U(\Lambda) &= U(\Lambda)^{-1}S^{\nu\mu}(x)U(\Lambda) \\
&= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma S^{\rho\sigma}(\bar{x}) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma S^{\sigma\rho}(\bar{x}).
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

De onde vem que campos simétricos nos índices são levados em campos também simétricos nos índices. Analogamente, se  $B^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ ,

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)^{-1}A^{\mu\nu}(x)U(\Lambda) &= -U(\Lambda)^{-1}A^{\nu\mu}(x)U(\Lambda) \\
&= -\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma A^{\rho\sigma}(\bar{x}) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma A^{\sigma\rho}(\bar{x}).
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Ainda, se tomarmos o traço  $T = \eta_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ , temos

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)^{-1}T(x)U(\Lambda) &= U(\Lambda)^{-1}\eta_{\mu\nu}B^{\mu\nu}(x)U(\Lambda) \\
&= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\eta_{\mu\nu}B^{\rho\sigma}(\bar{x}) = \eta_{\rho\sigma}B^{\rho\sigma}(\bar{x}) = T(\bar{x}),
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

lembrando que  $\eta_{\mu\nu}$  é invariante por transformações de Lorentz. Nota-se que o traço se transforma como um escalar. Vale ressaltar que um tensor simétrico sem traço ainda é simétrico, de maneira que podemos decompor o tensor  $B^{\mu\nu}$  em três tensores invariantes:

$$B^{\mu\nu}(x) = S^{\mu\nu}(x) + A^{\mu\nu}(x) + \frac{\eta^{\mu\nu}T(x)}{4}, \tag{3.1.9}$$

onde

$$S^{\mu\nu} = \frac{B^{\mu\nu} + B^{\nu\mu}}{2} - \frac{\eta^{\mu\nu}T}{4}, \quad (3.1.10)$$

$$A^{\mu\nu} = \frac{B^{\mu\nu} - B^{\nu\mu}}{2}, \quad (3.1.11)$$

$$T = \eta_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.$$

Cada classe de objetos é levada em si mesma via transformações de Lorentz; temos então uma decomposição do tensor de rank 2 em constituintes invariantes. Queremos, contudo, trabalhar com invariantes que sejam constituídos de qualquer tensor, não apenas os de rank 2. Para isso precisamos de uma discussão mais genérica das representações do grupo de Lorentz.

Considere

$$U(\Lambda)^{-1}\varphi_A(x)U(\Lambda) = L_A^B\varphi_B(\bar{x}), \quad (3.1.12)$$

onde A e B são índices genéricos, e  $L_A^B$  são matrizes que formam uma representação do grupo de Lorentz. Estas respeitam a lei de composição do grupo

$$L_A^B(\Lambda)L_B^C(\Lambda') = L_A^C(\Lambda\Lambda'). \quad (3.1.13)$$

Se  $\Lambda$  é uma transformação infinitesimal, ou seja, tão próxima da identidade quanto se queira, temos

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu,$$

$$U(\mathbf{1} + \omega) = I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \quad (3.1.14)$$

com  $\omega \ll 1$ ,

onde  $M^{\mu\nu}$  são os geradores do grupo. A álgebra destes geradores é dada por

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}). \quad (3.1.15)$$

Podemos separar as transformações que relacionam apenas dimensões espaciais (rotações) daquelas que envolvem dimensões espaciais e a temporal (boosts), escrevendo

$$J_i := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}, \quad (3.1.16)$$

$$K^i := M^{i0}. \quad (3.1.17)$$

As relações de comutação da álgebra ficam escritas como

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ij}^k J_k, \quad (3.1.18)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ij}^k J_k, \quad (3.1.19)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ij}^k K_k. \quad (3.1.20)$$

Agora, escrevamos as matrizes de representação  $L_A^B(\Lambda)$  na forma infinitesimal



$$L_A^B(\mathbf{1} + \omega) = \delta_A^B + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_A^B. \quad (3.1.21)$$

Onde  $(S^{\mu\nu})_A^B$  são matrizes da representação adjunta. Finalmente, podemos deduzir a representação da ação das transformações  $U(\Lambda)$  no campo  $\phi_A$ . Do lado esquerdo de (3.1.12), temos

$$\begin{aligned} U(\Lambda)^{-1}\varphi_A(x)U(\Lambda) &= (I - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu})\varphi_A(x)(I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) \\ &= \varphi_A(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\varphi_A(x) + \frac{i}{2}\varphi_A(x)\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \\ &= \varphi_A(x) + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[M^{\mu\nu}, \varphi_A(x)]. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Por outro lado, analisando o lado direito de (3.1.12),

$$L_A^B\varphi_B(\bar{x}) = \varphi_A(\bar{x}) + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_A^B\varphi_B(\bar{x}), \quad (3.1.23)$$

mas

$$\begin{aligned} \varphi_A(\bar{x}) &= \varphi_A(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu) \\ &= \varphi_A(x) - \frac{1}{2}(x^\nu\partial_\mu\varphi_A(x))\omega^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}(x_\mu\partial^\nu\varphi_A(x))\omega^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Então

$$[\varphi_A(x), M^{\mu\nu}] = \frac{1}{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\varphi_A(x) + (S^{\mu\nu})_A^B\varphi_B(x). \quad (3.1.25)$$

Queremos achar as representações finito-dimensionais de (3.1.18). No estudo da

mecânica quântica encontramos as mesmas relações de comutação, quando lidamos com o momento angular; trata-se da álgebra  $\mathfrak{so}(3)$ , que gera o grupo  $SO(3)$ . As representações são dadas por três matrizes hermitianas,  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ , de ordem  $(2j+1) \times (2j+1)$ . Uma dessas três matrizes terá autovalores  $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ ; onde  $j$  é um número inteiro ou semi-inteiro. Tais matrizes são as representações irredutíveis, e duas representações com  $j$  diferentes são inequivalentes.

É importante notar que as matrizes de Pauli usadas em mecânica quântica na representação do momento angular são matrizes unitárias de ordem 2 com determinante unitário; constituindo, portanto, representações do grupo  $SU(2)$ . Isso decorre da álgebra do  $\mathfrak{so}(3)$  ser isomórfica à álgebra do  $\mathfrak{su}(2)$ , mas devemos tomar cuidado, pois o grupo  $SO(3)$  não é isomórfico ao grupo  $SU(2)$ .

O isomorfismo entre as álgebras está relacionado com a estrutura local de ambas, enquanto a não existência desse isomorfismo entre os grupos está relacionado com a estrutura global dos grupos. O  $SU(2)$  é o grupo de cobertura dupla do  $SO(3)$ , isto é, existe uma relação 2 para 1 entre o  $SU(2)$  e o  $SO(3)$ . Isso fica evidente quando tomamos as representações com  $j$  semi-inteiro: uma rotação de  $2\pi$  radianos resulta, nessa configuração, a uma inversão; as matrizes de representação com  $j$  semi-inteiro são  $4\pi$ -periódicas. O  $SO(3)$ , por outro lado, trata das rotações no espaço e é  $2\pi$ -periódico. Podemos assim mapear dois elementos de  $SU(2)$  em um elemento do  $SO(3)$ .

Uma vez que conhecemos as representações de (3.1.18), é interessante procurar as representações de (3.1.19) e (3.1.20). Para tal fazemos

$$N_j := \frac{1}{2}(J_j - iK_j), \quad N_j^\dagger := \frac{1}{2}(J_j + iK_j). \quad (3.1.26)$$

Com esses operadores, reescrevemos as relações (3.1.18) - (3.1.20),

$$[J_i, J_j] = [N_i + N_i^\dagger, N_j + N_j^\dagger] \quad (3.1.27)$$

$$\begin{aligned} &= [N_i, N_j] + [N_i^\dagger, N_j] + [N_i, N_j^\dagger] + [N_i^\dagger, N_j^\dagger] \\ &= i\epsilon_{ij}^k (N_k + N_k^\dagger), \end{aligned}$$

$$[J_i, K_j] = [N_i + N_i^\dagger, i(N_j - N_j^\dagger)] \quad (3.1.28)$$

$$\begin{aligned} &= i[N_i, N_j] + i[N_i^\dagger, N_j] - i[N_i, N_j^\dagger] - i[N_i^\dagger, N_j^\dagger] \\ &= -\epsilon_{ij}^k (N_k - N_k^\dagger), \end{aligned}$$

$$[K_i, K_j] = -[N_i - N_i^\dagger, N_j - N_j^\dagger] \quad (3.1.29)$$

$$\begin{aligned} &= -[N_i, N_j] + [N_i^\dagger, N_j] + [N_i, N_j^\dagger] - [N_i^\dagger, N_j^\dagger] \\ &= -i\epsilon_{ij}^k (N_k + N_k^\dagger). \end{aligned}$$

Agora, com um pouco de álgebra,

$$(3.1.27) + (3.1.29) \rightarrow [N_i, N_j^\dagger] = 0 = [N_i^\dagger, N_j], \quad (3.1.30)$$

$$(3.1.27) + i(3.1.28) \rightarrow [N_i^\dagger, N_j^\dagger] = i\epsilon_{ij}^k N_k^\dagger, \quad (3.1.31)$$

$$(3.1.27) - i(3.1.28) \rightarrow [N_i, N_j] = i\epsilon_{ij}^k N_k. \quad (3.1.32)$$

Temos, após a substituição, duas álgebras  $\mathfrak{su}(2)$ , cuja representação nos é familiar. Rotulamos a representação com dois índices,  $(n, n')$ , contendo  $(2n+1)(2n'+1)$  componentes.

O índice  $j$  é obtido a partir de  $n$  e  $n'$  como na soma de momentos angulares,

$$j \in \{|n - n'|, |n - n'| + 1, \dots, n + n' - 1, n + n'\}. \quad (3.1.33)$$

Com essa notação, nomeamos os campos

$$(n, n') : \text{nome do campo} \tag{3.1.34}$$

$(0, 0)$  : escalar,

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$  : espinorial direito,

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  : espinorial esquerdo,

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  : vetorial.

### 3.2 Campos Espinoriais

Seja  $\varphi_\alpha(x)$  um campo espinorial canhoto, que corresponde à representação  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  da álgebra de Lie do grupo de Lorentz. O índice espinorial  $\alpha$  toma dois valores, pois temos  $(2n + 1)(2n' + 1) = (2\frac{1}{2} + 1)(2 \cdot 0 + 1) = 2$ .

Podemos refazer todos os passos da expansão infinitesimal das transformações de Lorentz da última seção, apenas trocando os índices genéricos de Lorentz  $A, B, \dots$  por índices espinoriais  $\alpha, \beta, \dots$

Partindo-se de (3.1.25), temos

$$[\varphi_\alpha(x), M^{\mu\nu}] = \frac{1}{i}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)\varphi_\alpha(x) + (S_L^{\mu\nu})_\alpha^\beta \varphi_\beta(x). \tag{3.2.1}$$

Por simplicidade, tomamos  $x^\mu = 0$ , fazendo assim nulos os dois primeiros termos do lado direito; fazemos assim uma vez que tal termo independe da natureza espinorial do campo, não sendo então relevante em uma discussão das características exclusivas dos campos espinoriais - esse termo está ligado ao momento angular orbital. A matriz de representação  $(S_L^{\mu\nu})_\alpha^\beta$  é antissimétrica nos índices  $\mu$  e  $\nu$  e o subscrito L é devido ao campo ser canhoto (*left*). Assim,

$$[\varphi_\alpha(0), M^{\mu\nu}] = (S_L^{\mu\nu})_\alpha^\beta \varphi_\beta(0). \quad (3.2.2)$$

Se tomarmos  $\mu\nu = ij$ , usando (3.1.16)

$$\varepsilon^{ijk}[\varphi_\alpha(0), J_k] = (S_L^{ij})_\alpha^\beta \varphi_\beta(0). \quad (3.2.3)$$

O número quântico  $j$  que rotula a representação é  $\frac{1}{2}$ , e convencionam-se

$$(S_L^{ij})_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\sigma_k)_\alpha^\beta, \quad (3.2.4)$$

onde  $\sigma_k$  são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

e  $\alpha, \beta$  rotulam a entrada da matriz. Agora, para analisar  $\mu\nu = i0$ , vale notar que

$$J_k = N_k + N_k^\dagger, \quad K_k = i(N_k - N_k^\dagger); \quad (3.2.6)$$

e que estamos na representação  $(\frac{1}{2}, 0)$ , logo

$$J_k = N_k, \quad K_k = iN_k, \quad (3.2.7)$$

portanto

$$K_k = (S_L^{k0})_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{2}i(\sigma_k)_{\alpha}{}^{\beta}. \quad (3.2.8)$$

Voltemos nossa atenção novamente ao campo espinorial. Se tomarmos o conjugado hermitiano do campo espinorial esquerdo  $\varphi_{\alpha}(x)$  - na representação  $(\frac{1}{2}, 0)$  - obtemos um campo espinorial destro  $\varphi_{\dot{\alpha}}^{\dagger}(x)$ , na representação  $(0, \frac{1}{2})$ . Note que os índices destros tem pontos, e que acabamos de descrever a relação

$$[\varphi_{\alpha}(x)]^{\dagger} = \varphi_{\dot{\alpha}}^{\dagger}(x). \quad (3.2.9)$$

Uma análise similar dos campos espinoriais destros nos dá

$$[\varphi_{\dot{\alpha}}^{\dagger}(0), M^{\mu\nu}] = (S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \varphi_{\dot{\beta}}^{\dagger}(0) \quad (3.2.10)$$

que, tomando o hermitiano,

$$[M^{\mu\nu}, \varphi_{\alpha}(0), ] = [(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}]^{\dagger} \varphi_{\dot{\beta}}(0), \quad (3.2.11)$$

tal que

$$(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = -[(S_L^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}]^{\dagger}. \quad (3.2.12)$$

Uma vez estruturados os campos espinoriais canhotos e destros, é interessante analisar um campo espinorial com dois índices. Assim,

$$U(\Lambda)^{-1}C_{\alpha\beta}(x)U(\Lambda) = L_{\alpha}^{\gamma}L_{\beta}^{\delta}C_{\gamma\delta}(\bar{x}). \quad (3.2.13)$$

Queremos saber se  $C_{\alpha\beta}$  pode ser decomposto em objetos invariantes, como aconteceu com  $B^{\mu\nu}$ . Temos um campo na representação  $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0)$ , análogo em mecânica quântica a dois estados de spin  $\frac{1}{2}$ . Estes podem ter spin total 0 ou 1, onde o estado com spin nulo é a combinação antissimétrica dos dois estados de uma partícula, enquanto os três estados de spin 1 são combinações simétricas. Escrevemos

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0). \quad (3.2.14)$$

Seguindo esse raciocínio, fazemos a decomposição

$$C_{\alpha\beta}(x) = \varepsilon_{\alpha\beta}D(x) + G_{\alpha\beta}(x), \quad (3.2.15)$$

onde

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}, \quad (3.2.16)$$

$$G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}.$$

O primeiro termo do lado direito foi escrito como um produto pois uma matriz  $2 \times 2$  antissimétrica pode ser determinada a menos de uma constante, onde

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.17)$$

Para que  $\varepsilon_{\alpha\beta}D(x)$  seja invariante, deve existir a relação

$$\begin{aligned} U(\Lambda)^{-1}\varepsilon_{\alpha\beta}D(x)U(\Lambda) &= L_{\alpha}^{\gamma}L_{\beta}^{\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}D(\bar{x}), \\ L_{\alpha}^{\gamma}L_{\beta}^{\delta}\varepsilon_{\gamma\delta} &= \varepsilon_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$  é então um símbolo invariante sob transformações de Lorentz, assim como a métrica  $\eta_{\mu\nu}$ . Podemos usar  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  e sua inversa  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  para subir e descer índices espinoriais. Definimos  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  como

$$\begin{cases} \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\gamma} \\ \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \end{cases}$$

Determinando completamente  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  a partir de (3.2.17),

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.19)$$

e nos permitindo definir

$$\varphi^{\alpha} := \varepsilon^{\alpha\beta}\varphi_{\beta}, \quad \varphi_{\alpha} := \varepsilon_{\alpha\beta}\varphi^{\beta}. \quad (3.2.20)$$

Devemos, contudo, lembrar que dada a antissimetria de  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , devemos tomar cuidado



com os índices

$$\varphi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\varphi^\beta = -\varepsilon_{\beta\alpha}\varphi^\beta = -\varphi^\beta\varepsilon_{\beta\alpha} = \varphi^\beta\varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (3.2.21)$$

Numa contração, temos

$$\varphi^\alpha\chi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\varphi_\beta\chi_\alpha = -\varepsilon^{\beta\alpha}\varphi_\beta\chi_\alpha = -\varphi_\beta\chi^\beta. \quad (3.2.22)$$

Convencionamos fazer a contração sempre com o segundo índice de  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  ou  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ . A diferença de sinal se dá pela ordem dos índices contraídos, já que

$$\alpha_\alpha = -\alpha^\alpha \quad (3.2.23)$$

Analogamente, toda a discussão feita para  $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0)$  vale também para  $(0, \frac{1}{2}) \otimes (0, \frac{1}{2})$ , de onde definimos  $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  e  $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  idênticos aos análogos canhotos, apenas representados com pontos. Todos os passos podem ser refeitos adicionando pontos aos índices, chegando até

$$\dot{\alpha}^{\dot{\alpha}} = -\dot{\alpha}_{\dot{\alpha}} \quad (3.2.24)$$

Uma convenção importante adotada envolve a omissão dos índices, quando escritos  $\alpha_\alpha$  e  $\dot{\alpha}^{\dot{\alpha}}$ . Para essa notação, é importante notar que os campos que lidamos são fermiônicos - ver [1] - e por isso anticomutam. Assim,

$$\varphi\chi = \varphi^\alpha\chi_\alpha = -\chi_\alpha\varphi^\alpha = \chi^\alpha\varphi_\alpha = \chi\varphi. \quad (3.2.25)$$

A primeira troca de sinal é devido à natureza fermiônica dos campos, e a segunda devido à antissimetria dos índices. Os espinores destros seguem analogamente. Na ausência de índices surge a questão de como diferenciar os campos canhotos dos destros. Para tal, sempre representaremos os campos destros com  $\dagger$ , e os canhotos sem.

Para fechar esta seção, vamos discutir um pouco mais sobre a natureza dos símbolos invariantes por transformações de Lorentz, como a métrica do espaço-tempo  $\eta_{\mu\nu}$  e as métricas do espaço dos espinores  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  e  $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ . Para isso afirmamos que  $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma})$  também é um símbolo invariante, já que

$$U(\Lambda)^{-1}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu L_\alpha{}^\beta L_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \quad (3.2.26)$$

Uma vez que as matrizes são todas constantes. Nota-se que contrações de símbolos invariantes também são invariantes, i.e.,

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu} &= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\mu\beta\dot{\beta}} & (3.2.27) \\
&= -\mathbf{1}_{\alpha\dot{\alpha}}\mathbf{1}_{\beta\dot{\beta}} + \sigma_{1\alpha\dot{\alpha}}\sigma_{1\beta\dot{\beta}} + \sigma_{2\alpha\dot{\alpha}}\sigma_{2\beta\dot{\beta}} + \sigma_{3\alpha\dot{\alpha}}\sigma_{3\beta\dot{\beta}} \\
&= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \\
&= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ =1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -2\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}
\end{aligned}$$

Um resultado intuitivo, já que só conhecemos estes símbolos invariante com índices espinoriais, e por isso os únicos candidatos para o lado direito da relação (3.2.27). O fator  $-2$ , contudo, só poderia ter sido encontrado com um cálculo direto. Da mesma maneira podemos utilizar as inversas e escrever

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu} = -2\eta^{\mu\nu} \quad (3.2.28)$$

Se tomarmos a expressão infinitesimal das transformações de Lorentz, como fizemos no início do capítulo, temos

$$\Lambda^{\rho}_{\sigma} = \delta^{\rho}_{\sigma} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S_V^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma} \quad (3.2.29)$$

$$L_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} \quad (3.2.30)$$

$$L_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (3.2.31)$$

Com a ressalva que antes (3.2.29) era escrito como em (3.1.14),  $\Lambda^{\rho}_{\sigma} = \delta^{\rho}_{\sigma} + \omega^{\rho}_{\sigma}$ , então

$(S_V^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma$  é definido como

$$(S_V^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma := \frac{1}{i}(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu{}_\sigma), \quad (3.2.32)$$

e o rótulo  $V$  indica que a matriz de representação diz respeito à representação vetorial, em contraste com as representações espinoriais direita e esquerda.

As transformações dos símbolos invariantes, na forma infinitesimal, são

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= L_\alpha{}^\gamma L_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} \quad (3.2.33) \\ &= \left( \delta_\alpha{}^\gamma + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_\alpha{}^\gamma \right) \left( \delta_\beta{}^\delta + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_\beta{}^\delta \right) \varepsilon_{\gamma\delta} \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \left( (S_L^{\mu\nu})_\alpha{}^\gamma \varepsilon_{\gamma\beta} + (S_L^{\mu\nu})_\beta{}^\delta \varepsilon_{\alpha\delta} \right) \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \left( -(S_L^{\mu\nu})_{\alpha\beta} + (S_L^{\mu\nu})_{\beta\alpha} \right). \end{aligned}$$

No último passo, a troca de sinal é devido à convenção de contrair o segundo índice de  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ . Para a invariância valer para um  $\omega_{\mu\nu}$  arbitrário, precisamos de

$$(S_L^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = (S_L^{\mu\nu})_{\beta\alpha} \quad (3.2.34)$$

as matrizes de representação são simétricas nos índices espinoriais. Analogamente,

$$(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (S_R^{\mu\nu})_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \quad (3.2.35)$$

Analisemos agora as transformações de  $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu$ , também na forma infinitesimal. Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\rho} &= \Lambda^{\rho}_{\sigma} L_{\alpha}^{\beta} L_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\sigma} & (3.2.36) \\
&= \left( \delta^{\rho}_{\sigma} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S_V^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma} \right) \left( \delta_{\alpha}^{\beta} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S_L^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} \right) \left( \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \right) \sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\sigma} \\
&= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\rho} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \left( (S_V^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\sigma} + (S_L^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\rho} + (S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\rho} \right),
\end{aligned}$$

Novamente, para a invariância do símbolo  $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}$  com  $\omega_{\mu\nu}$  arbitrário, temos

$$(S_V^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\sigma} + (S_L^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\rho} + (S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\rho} = 0 \quad (3.2.37)$$

Substituindo a expressão de  $(S_V^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}$ , (3.2.32),

$$\frac{1}{i} (\eta^{\mu\rho} \delta^{\nu}_{\sigma} - \eta^{\nu\rho} \delta^{\mu}_{\sigma}) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\sigma} + (S_L^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\rho} + (S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\rho} = 0. \quad (3.2.38)$$

Agora multiplicando pela direita por  $\sigma_{\rho\gamma\dot{\gamma}}$  e por  $i$ ,

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\mu} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\nu} + i (S_L^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\rho} \sigma_{\rho\gamma\dot{\gamma}} + i (S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\rho} \sigma_{\rho\gamma\dot{\gamma}} = 0. \quad (3.2.39)$$

Usando (3.2.27), temos

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\mu} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\nu} - 2i(S_L^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} - 2i(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \\
&= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\mu} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\nu} - 2i(S_L^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} - 2i(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \\
&= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\mu} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\nu} - 2i(S_L^{\mu\nu})_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} - 2i(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\varepsilon_{\alpha\gamma} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Podemos agora encontrar uma expressão para  $(S_R^{\mu\nu})$  e  $(S_L^{\mu\nu})$ . Para isso basta lembrar de (3.2.34) e (3.2.35) que estas são simétricas nos índices espinoriais, e que o símbolo  $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ , além de ser antissimétrico, pode ser contraído  $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} = -2$ . Assim, se multiplicarmos por  $\varepsilon^{\alpha\gamma}$  temos

$$(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} = \frac{1}{4i}\varepsilon^{\alpha\gamma}(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\nu} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\mu}). \tag{3.2.41}$$

Analogamente, se multiplicarmos por  $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$ ,

$$(S_L^{\mu\nu})_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4i}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\nu} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\mu}). \tag{3.2.42}$$

Por fim, é importante definir um último símbolo invariante:

$$\bar{\sigma}^{\nu\alpha\dot{\alpha}} := \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu}, \tag{3.2.43}$$

$$\bar{\sigma}^{\nu\alpha\dot{\alpha}} = (\mathbf{1}, -\vec{\sigma}); \tag{3.2.44}$$

de modo a escrever (3.2.28) como

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu\alpha\dot{\alpha}} = -2\eta^{\mu\nu}, \quad (3.2.45)$$

ou ainda,

$$(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})_{\alpha}{}^{\beta} = -2\eta^{\mu\nu}\delta_{\alpha}{}^{\beta} \quad (3.2.46)$$

$$(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \quad (3.2.47)$$

e assim reescrever  $(S_R^{\mu\nu})$  e  $(S_L^{\mu\nu})$  de maneira mais econômica omitindo os índices contraídos.

$$(S_L^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\gamma} = \frac{1}{4i}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})_{\alpha}{}^{\gamma}, \quad (3.2.48)$$

$$(S_R^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}} = -\frac{1}{4i}(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}}. \quad (3.2.49)$$

## Capítulo 4

# A Equação de Dirac e o Maquinário dos Twistors

O objetivo deste capítulo é discutir as características dos espinores enquanto campos, e por isso solução de uma equação de campo. O intuito é complementar a apresentação mais abstrata feita no capítulo anterior via representações do grupo de Lorentz.

### 4.1 A equação de Dirac.

Na discussão feita para o campo escalar partimos da equação de Klein-Gordon (2.1.1) para encontrar a Lagrangiana do campo escalar (2.1.2). Aqui, estamos interessados em encontrar uma Lagrangiana para os campos espinoriais para podermos analisar as equações de movimento destes.

A ação, e conseqüentemente a Lagrangiana, são hermitianas, e por isso queremos uma expressão que contenha tanto  $\psi_\alpha$  quanto  $\psi_\alpha^\dagger$ . Utilizando a Lagrangiana do campo escalar como modelo, procuramos por uma que seja quadrática nos campos, para que as equações de movimento sejam lineares. O primeiro candidato é o termo



$$\psi\psi = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta. \quad (4.1.1)$$

Esta é não nula pois os campos são anticomutantes - ver [1]. Seguindo o modelo da Lagrangiana de Klein-Gordon, o termo com derivadas deve ser algo como  $\partial^\mu\psi\partial_\mu\psi$ . Contudo, se olharmos a Hamiltoniana resultante, veremos que esta não é limitada por baixo.

Um candidato a termo cinético é  $i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi$ . Nota-se rapidamente que este não é hermitiano, mas

$$\begin{aligned} (i\psi_\alpha^\dagger\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\psi_\beta)^\dagger &= -i\partial_\mu\psi_\beta^\dagger\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha}\psi_\alpha \\ &= i\psi_\beta^\dagger\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha - \partial_\mu(\psi_\beta^\dagger\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha}\psi_\alpha). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Assim, esse termo é não hermitiano devido à presença de uma derivada total, e tal derivada pode ser descartada sob o sinal da integral da ação, dada uma escolha conveniente das condições de contorno dos campos no infinito.

A Lagrangiana resultante é, então,

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}m\psi\psi - \frac{1}{2}m\psi^\dagger\psi^\dagger. \quad (4.1.3)$$

O parâmetro  $m$  é, a priori, um parâmetro complexo; sua fase, contudo, pode ser absorvida em  $\psi$ , nos permitindo escrevê-lo como um parâmetro real. Conhecendo a Lagrangiana, vamos agora encontrar as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} &= i\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \psi_\alpha^\dagger + m\psi^\alpha \\ &= -i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \psi^{\dagger\dot{\alpha}} + m\psi_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Podemos encontrar a equação para  $\psi$  apenas tomando o hermitiano de (4.1.4),

$$(i\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \psi_\alpha^\dagger + m\psi^\alpha)^\dagger = -i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha + m\psi^{\dagger\dot{\alpha}} = 0. \quad (4.1.5)$$

Temos um sistema de equações lineares. Podemos escrever esse sistema como

$$\begin{pmatrix} m\delta_\alpha^\beta & -i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu \\ -i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} \partial_\mu & m\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\beta \\ \psi^{\dagger\dot{\beta}} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.1.6)$$

Agora, é interessante notar que podemos escrever a matriz de (4.1.6) como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m\delta_\alpha^\beta & -i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu \\ -i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} \partial_\mu & m\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} &= -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu + m \begin{pmatrix} \delta_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\ &= -i\gamma^\mu \partial_\mu + m\mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

onde

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.8)$$

Nota-se que o produto de matrizes  $\gamma^\mu$  nos é familiar,

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\gamma\dot{\beta}}^\nu \\ \bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}\beta} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}\beta} + \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\beta}}^\nu \\
&= (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta + (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

pois se tomarmos o anticomutador  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu$ , e nos recordamos de (3.2.46), temos

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}. \tag{4.1.10}$$

Suprimiu-se uma matriz identidade  $\mathbf{1}_{4 \times 4}$  no lado direito. Com isso em mãos, se definimos o lado direito de (4.1.6) como

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\beta \\ \psi^{\dagger\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \tag{4.1.11}$$

chamado campo de Majorana, escrevemos (4.1.6) de maneira bem concisa:

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi_M = 0 \tag{4.1.12}$$

Esta é a famosa equação de Dirac. Vale notar que se agirmos com  $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)$  novamente na equação, obtemos

$$\begin{aligned}
(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi_M &= (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\Psi_M & (4.1.13) \\
&= \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\nu \partial_\mu + m^2\right)\Psi_M \\
&= (-\square + m^2)\Psi_M \\
&= 0
\end{aligned}$$

Usou-se (4.1.10) no último passo, e  $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$ . Mostramos que o campo de Majorana satisfaz a equação de Klein-Gordon, assim como o campo escalar. Isso é devido à equação de Klein-Gordon ser uma expressão da covariância relativística, e deve ser satisfeita por todos os campos. A equação de Dirac, por outro lado, é característica dos campos de spin  $\frac{1}{2}$ .

Logo após de estudarmos o campo escalar real, consideramos o caso de dois campos escalares relacionados por uma simetria  $SO(2)$ ; nos levando ao campo escalar complexo. Podemos fazer o mesmo, considerando dois campos espinoriais esquerdos, com a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sum_j i\psi_j^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_j - \frac{1}{2}m\psi_j \psi_j - \frac{1}{2}m\psi_j^\dagger \psi_j^\dagger. \quad (4.1.14)$$

Procedendo como em (2.1.3), temos

$$\chi = \frac{\psi_1 + i\psi_2}{\sqrt{2}}, \quad (4.1.15)$$

$$\xi = \frac{\psi_1 - i\psi_2}{\sqrt{2}}, \quad (4.1.16)$$

e a Lagrangiana (4.1.14) fica

$$\mathcal{L} = i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - \frac{1}{2}m\chi\xi - \frac{1}{2}m\xi^\dagger \chi^\dagger, \quad (4.1.17)$$

que é invariante sob transformações do grupo  $SO(2) = U(1)$ , i.e.  $\chi \rightarrow e^{-i\Lambda}\chi$  e  $\xi \rightarrow e^{i\Lambda}\xi$ .

A expressão análoga a (4.1.6) é

$$\begin{pmatrix} m\delta_\alpha^\beta & -i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu \\ -i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} \partial_\mu & m\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\beta \\ \xi^{\dagger\dot{\beta}} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.1.18)$$

de onde definimos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\beta \\ \xi^{\dagger\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (4.1.19)$$

denominado campo de Dirac. O campo de Dirac também satisfaz a equação de Dirac, e é denotado apenas por  $\Psi$  por simplicidade; o importante é não confundi-lo com o campo de Majorana  $\Psi_M$ .

Para estudar a ação do grupo de Lorentz sobre os espinores de Majorana e Dirac, basta lembrar que as componentes esquerda e direita se transformam como em (3.2.1), com  $L(\Lambda)_\alpha^\beta$  e  $L(\Lambda)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$  dados por (3.2.30) e (3.2.31). Usando ainda (3.2.46) e (4.1.9), temos

$$\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] := S^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (S_L^{\mu\nu})_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & -(S_R^{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (4.1.20)$$

De modo que escrevemos a ação do grupo como

$$U(\Lambda)^{-1}\Psi U(\Lambda) = D(\Lambda)\Psi(\bar{x}), \quad (4.1.21)$$

onde, para um  $\Lambda$  infinitesimal,

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}. \quad (4.1.22)$$

Para escrevermos a Lagrangiana (4.1.17) em termos do campo de Dirac, é preciso notar que o hermitiano de  $\Psi$ ,  $\Psi^\dagger = (\chi^\dagger_\beta, \xi^\beta)$ , não nos permite escrever os termos que contém  $\chi$  e  $\xi$ . Para isso, usamos a matriz

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \\ \delta_\alpha^\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.23)$$

de modo a definir

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \beta = (\xi^\alpha, \chi^\dagger_{\dot{\alpha}}). \quad (4.1.24)$$

Tal que

$$\bar{\Psi}\Psi = (\xi^\alpha, \chi^\dagger_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \xi^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \xi^\alpha \chi_\alpha + \chi^\dagger_{\dot{\alpha}} \xi^{\dagger\dot{\alpha}} \quad (4.1.25)$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi &= (\xi^\alpha, \chi^\dagger_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} \chi_\beta \\ \xi^{\dagger\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \\ \chi^\dagger_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu\chi_\beta \\ \partial_\mu\xi^{\dagger\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\
&= \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\xi^{\dagger\dot{\beta}} + \chi^\dagger_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\chi_\beta \\
&= -(\partial_\mu\xi^\alpha)\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\dagger\dot{\beta}} + \partial_\mu(\xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\dagger\dot{\beta}}) + \chi^\dagger_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\chi_\beta \\
&= \xi^\dagger_{\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\xi_\alpha + \partial_\mu(\xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\dagger\dot{\beta}}) + \chi^\dagger_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\chi_\beta.
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Os últimos dois passos foram com o intuito de escrever o termo cinético contendo os campos  $\xi$  da mesma forma que o termo com os campos  $\chi$ . Novamente, a divergência pode ser descartada, como feito em (4.1.2). Podemos enfim escrever a Lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \tag{4.1.27}$$

Que além de reproduzir (4.1.3), é invariante sob a ação do grupo  $U(1)$ , isto é,

$$\begin{aligned}
\Psi &\rightarrow e^{-i\Lambda}\Psi, \\
\bar{\Psi} &\rightarrow e^{i\Lambda}\bar{\Psi}.
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

Para finalizar esta seção, note que os campos espinoriais definidos no capítulo anterior são componentes dos espinores de Dirac e de Majorana; eles são chamados espinores de Weyl. Para se obter um espinor de Weyl a partir de um espinor de Dirac ou de Majorana

precisamos projetar o espinor na direção que queremos. Para isso definimos os projetores  $P_L$  e  $P_R$ ,

$$P_L \equiv \begin{pmatrix} \delta_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.29)$$

$$P_R \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (4.1.30)$$

que claramente selecionam a componente esquerda e direita, respectivamente, dos espinores de Dirac e Majorana. Uma outra maneira de representar os projetores se dá definindo a matriz  $\gamma_5$

$$\gamma_5 := \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (4.1.31)$$

que nos permite escrever os projetores mais sucintamente:

$$P_L := \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad (4.1.32)$$

$$P_R := \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (4.1.33)$$

Podemos, ainda, expressar a  $\gamma_5$ , nas nossas contas, como o produto das matrizes  $\gamma$ ,

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (4.1.34)$$



## 4.2 Soluções da Equação de Dirac.

Vimos na relação (4.1.13) que as soluções da equação de Dirac também são soluções da equação de Klein-Gordon. Podemos então trabalhar com soluções tipo onda plana.

Usando como ansatz

$$\Psi(x) = u(\vec{p})e^{ipx} + v(\vec{p})e^{-ipx}, \quad (4.2.1)$$

temos, substituindo o ansatz na equação de Dirac,

$$(p_\mu \gamma^\mu + m)u(\vec{p})e^{ipx} + (-p_\mu \gamma^\mu + m)v(\vec{p})e^{-ipx} = 0; \quad (4.2.2)$$

ambos os termos devem ser nulos independentemente, logo

$$(p_\mu \gamma^\mu + m)u(\vec{p}) = 0, \quad (4.2.3)$$

$$(-p_\mu \gamma^\mu + m)v(\vec{p}) = 0. \quad (4.2.4)$$

Onde  $p^0 = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$ . As funções  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  são espinores constantes, com quatro componentes. As equações (4.2.3) e (4.2.4) tem duas soluções linearmente independentes cada, que denotaremos por  $u(\vec{p})_\pm$  e  $v(\vec{p})_\pm$ .

Ainda, a partir de agora usaremos a notação  $a_\mu \gamma^\mu = \not{a}$ , para qualquer quadrivetor  $a_\mu$ .

Estamos interessados nas soluções com  $m = 0$ , mas primeiro precisamos estudar as soluções massivas. Uma maneira conveniente de fazê-lo é analisar o comportamento dos espinores no referencial do repouso, e depois aplicar boosts para obter o caso geral. Se

$\vec{p} = 0$ , as soluções  $u(0)$  e  $v(0)$  são diferentes apenas pelo autovalor da matriz de spin,

$$S_z u_{\pm}(0) = \pm \frac{1}{2} u_{\pm}(0), \quad (4.2.5)$$

$$S_z v_{\pm}(0) = \mp \frac{1}{2} v_{\pm}(0), \quad (4.2.6)$$

onde

$$\begin{aligned} S_z &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{4}[\gamma^1, \gamma^2] = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Se notarmos que, para  $\vec{p} = 0$ ,  $\not{p} = -m\gamma^0$ , podemos resolver (4.2.3) e (4.2.4),

$$(p_{\mu}\gamma^{\mu} + m)u(\vec{p}) = (-m\gamma^0 + m)u(0) \quad (4.2.8)$$

$$= m \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} u(0) = 0,$$

$$(-p_{\mu}\gamma^{\mu} + m)v(\vec{p}) = (m\gamma^0 + m)v(0) \quad (4.2.9)$$

$$= m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} v(0) = 0,$$

cujas soluções, a menos de uma constante multiplicativa, são

$$\begin{aligned}
u_+(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u_-(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
v_+(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & v_-(0) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Os rótulos  $\pm$  foram dados observando (4.2.5). Tomando o hermitiano de cada solução, e multiplicando pela matriz  $\beta$  (4.1.23), temos

$$\begin{aligned}
\bar{u}_+(0) &= (1, 0, 1, 0), \\
\bar{u}_-(0) &= (0, 1, 0, 1), \\
\bar{v}_+(0) &= (0, -1, 0, 1), \\
\bar{v}_-(0) &= (1, 0, -1, 0).
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Como mencionado antes, para obtermos espinores em qualquer referencial precisamos apenas aplicar um boost às soluções que temos. Assim

$$u_{\pm}(\vec{p}) = \exp(i\zeta\hat{\vec{p}} \cdot \vec{K})u_{\pm}(0), \tag{4.2.12}$$

analogamente para  $v_{\pm}(\vec{p})$ . Aqui,  $\hat{\vec{p}}$  é um vetor unitário na direção de  $\vec{p}$ ,  $\zeta$  é um parâmetro e  $K^j = S^{j0} = \frac{i}{4}[\gamma^j, \gamma^0] = \frac{i}{2}\gamma^j\gamma^0$ . Para os espinores barrados, temos

$$\bar{u}_{\pm}(\vec{p}) = \bar{u}_{\pm}(0) \exp(-i\hat{\zeta}\vec{p} \cdot \vec{K}). \quad (4.2.13)$$

Multiplicando (4.2.12) e (4.2.13), e usando (4.2.10) e (4.2.11), temos

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p})u_s(\vec{p}) = \bar{u}_{s'}(0)u_s(0) = 2m\delta_{s's}, \quad (4.2.14)$$

$$\bar{v}_{s'}(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \bar{u}_{s'}(0)u_s(0) = -2m\delta_{s's},$$

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \bar{u}_{s'}(0)u_s(0) = 0,$$

$$\bar{v}_{s'}(\vec{p})u_s(\vec{p}) = \bar{u}_{s'}(0)u_s(0) = 0.$$

Aqui, usou-se os índices  $s$  e  $s'$ , que podem ser  $\pm$ . Agora, se por outro lado, calcularmos  $\sum_{s=\pm} u_s(\vec{p})\bar{u}_{s'}(\vec{p})$  e  $\sum_{s=\pm} v_s(\vec{p})\bar{v}_{s'}(\vec{p})$ , obteremos matrizes; a soma sobre os autovalores de  $S_z$  retira o caráter preferencial do eixo  $z$ . O resultado deve ser independente de direção, algo contendo  $p^\mu$  e matrizes  $\gamma$ .

Inspecionando (4.2.10) e (4.2.11), vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{s=\pm} u_s(0)\bar{u}_{s'}(0) &= m\gamma^0 + m, \\ \sum_{s=\pm} v_s(0)\bar{v}_{s'}(0) &= m\gamma^0 - m, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

o que nos leva a generalizar, para qualquer referencial,

$$\sum_{s=\pm} u_s(\vec{p}) \bar{u}_{s'}(\vec{p}) = -\not{p} + m, \quad (4.2.16)$$

$$\sum_{s=\pm} v_s(\vec{p}) \bar{v}_{s'}(\vec{p}) = -\not{p} - m.$$

A partir desse resultado podemos recuperar os produtos de espinores com um autovvalor em determinada direção, bastando apenas projetar a solução obtida na direção desejada. Os projetores devem então depender da direção escolhida - i.e.  $z$  - e de  $s = \pm$ . Para os espinores no referencial do repouso, vê-se imediatamente que os projetores são da forma

$$\frac{1}{2}(1 + 2sS_z)u_{s'}(0) = \delta_{ss'}u_{s'}(0), \quad (4.2.17)$$

$$\frac{1}{2}(1 - 2sS_z)v_{s'}(0) = \delta_{ss'}v_{s'}(0).$$

Para generalizar (4.2.17) para qualquer referencial, lembremos que  $S_z = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2 = -\frac{1}{2}\gamma_5\gamma^3\gamma^0$ , usando (4.1.34). No referencial de repouso, identificamos  $\gamma^0 = -\not{p}/m$  e  $\gamma^3 = \not{z}$ , onde  $z^\mu = (0, 0, 0, \hat{z})$  é a direção escolhida. Assim, se  $S_z = \frac{1}{2m}\gamma_5\not{z}\not{p}$ , temos o projetor para um referencial qualquer

$$\frac{1}{2}\left(1 + s\frac{1}{m}\gamma_5\not{z}\not{p}\right)u_{s'}(\vec{p}) = \delta_{ss'}u_{s'}(\vec{p}), \quad (4.2.18)$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - s\frac{1}{m}\gamma_5\not{z}\not{p}\right)v_{s'}(\vec{p}) = \delta_{ss'}v_{s'}(\vec{p}).$$

Ainda, lembrando da equação de Dirac que  $\not{p}u(\vec{p}) = -mu(\vec{p})$  e  $\not{p}v(\vec{p}) = mv(\vec{p})$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1 - s\gamma_5\not{p})u_{s'}(\vec{p}) &= \delta_{ss'}u_{s'}(\vec{p}), \\ \frac{1}{2}(1 - s\gamma_5\not{p})v_{s'}(\vec{p}) &= \delta_{ss'}v_{s'}(\vec{p}).\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

Finalmente, aplicando os projetores em (4.2.16), obtemos

$$\begin{aligned}u_s(\vec{p})\bar{u}_{s'}(\vec{p}) &= \frac{1}{2}(1 - s\gamma_5\not{p})(-\not{p} + m), \\ v_s(\vec{p})\bar{v}_{s'}(\vec{p}) &= \frac{1}{2}(1 - s\gamma_5\not{p})(-\not{p} - m).\end{aligned}\tag{4.2.20}$$

### 4.3 Férmions sem massa e helicidade.

Um caminho alternativo para iniciar um estudo do grupo de Lorentz é através da classificação de Wigner. Esta se propõe a encontrar as representações irredutíveis com energia não negativa, usando os invariantes Casimir. Para partículas massivas, o grupo de spin é o grupo  $SU(2)$  como utilizado até agora. Para partículas sem massa, contudo, não se pode falar de spin da mesma maneira. O conceito chave é a helicidade, que definimos como a componente do spin da partícula na direção do momento linear; e esta assume dois valores  $s = \pm$ .

Podemos ainda aproveitar toda a discussão feita na seção (4.2) e estudar soluções sem massa para a equação de Dirac. Veremos que estas tem características muito úteis para a discussão do próximo capítulo, e para aproveitar a discussão ao máximo, maior atenção será dada nesta seção às demonstrações e identidades. Os férmions com helicidade  $\frac{1}{2}$  são chamados destros, e os férmions com helicidade  $-\frac{1}{2}$  são chamados canhotos.

Analisemos primeiramente o caso de uma partícula relativística, para podermos modelar as ultra-relativísticas - as que estão à velocidade da luz. Partindo da expressão

(4.2.20) e assumindo que o boost usado para se chegar a esse referencial foi feito com  $\zeta \gg 1$ , temos

$$\frac{1}{m}p^\mu = (\cosh \zeta, 0, 0, \sinh \zeta); \quad (4.3.1)$$

que é uma relação advinda da relatividade especial. Uma vez que  $z^\mu$  satisfaz  $z \cdot z = 1$  e  $z \cdot p = 0$ , temos

$$z^\mu = (\sinh \zeta, 0, 0, \cosh \zeta). \quad (4.3.2)$$

Se agora usarmos  $\zeta \gg 1$ , temos

$$\begin{aligned} \cosh \zeta &= \frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{2} \rightarrow \frac{e^\zeta}{2}, \\ \sinh \zeta &= \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{2} \rightarrow \frac{e^\zeta}{2}, \\ z^\mu &\rightarrow \frac{1}{m}p^\mu. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Substituindo  $\not{z}$  por  $\frac{1}{m}\not{p}$  em (4.2.20)

$$\begin{aligned} u_s(\vec{p})\bar{u}_{s'}(\vec{p}) &= \frac{1}{2}(1 - s\gamma_5 \frac{1}{m}\not{p})(-\not{p} + m), \\ v_s(\vec{p})\bar{v}_{s'}(\vec{p}) &= \frac{1}{2}(1 - s\gamma_5 \frac{1}{m}\not{p})(-\not{p} - m). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\not{p}(-\not{p} \pm m) &= \frac{1}{m}(p^2 \pm \not{p}m) & (4.3.5) \\
&= \frac{1}{m}(-m^2 \pm \not{p}m) \\
&= (-m \pm \not{p}) \\
&= \mp(\not{p} \pm m),
\end{aligned}$$

portanto,

$$u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \frac{1}{2}(1 + s\gamma_5)(-\not{p}), \quad (4.3.6)$$

$$v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = \frac{1}{2}(1 - s\gamma_5)(-\not{p}). \quad (4.3.7)$$

Note que não precisamos mais tratar  $u_s(\vec{p})$  e  $v_s(\vec{p})$  separadamente, pois  $u_s = v_{-s}$ . É conveniente definir o produto,

$$\begin{aligned}
p_\mu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu &:= p_{\alpha\dot{\alpha}} & (4.3.8) \\
p_\mu \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} &:= p^{\dot{\alpha}\alpha}.
\end{aligned}$$

E tomando como exemplo os espinores de helicidade negativa, escrevemos



$$\begin{aligned}
u_-(\vec{p})\bar{u}_-(\vec{p}) &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)(-\not{p}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} (-p_\mu) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -p_{\alpha\dot{\alpha}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Sabemos que as duas componentes de baixo de  $u_-(\vec{p})$  são nulas, logo

$$u_-(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \pi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.10}$$

O espinor adjunto  $\bar{u}_-(\vec{p})$  então é escrito

$$\bar{u}_-(\vec{p}) = (0, \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}), \tag{4.3.11}$$

de modo que escrevemos

$$u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\alpha \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.12}$$

Fica claro então que

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = -\pi_\alpha \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}. \tag{4.3.13}$$

Usando (4.3.8) pode-se mostrar, por substituição, que

$$\pi_\alpha = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{2}\theta)e^{-i\phi} \\ \cos(\frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.3.14)$$

A saber,

$$\bar{\pi}_{\dot{\alpha}} = (2\omega)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{2}\theta)e^{i\phi} & \cos(\frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix} \quad (4.3.15)$$

Então o produto é escrito

$$-\pi_\alpha \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} = -2\omega \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{2}\theta)e^{-i\phi} \\ \cos(\frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{2}\theta)e^{i\phi} & \cos(\frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix} \quad (4.3.16)$$

$$= -2\omega \begin{pmatrix} \sin^2(\frac{1}{2}\theta) & -\sin(\frac{1}{2}\theta)e^{-i\phi} \cos(\frac{1}{2}\theta) \\ -\sin(\frac{1}{2}\theta)e^{i\phi} \cos(\frac{1}{2}\theta) & \cos^2(\frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix}$$

$$= 2\omega \begin{pmatrix} -\sin^2(\frac{1}{2}\theta) & \frac{1}{2} \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \frac{1}{2} \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos^2(\frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix}$$

$$= p_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (4.3.17)$$

Para termos a equivalência, basta escrever

$$p^0 = 2\omega, \quad (4.3.18)$$

$$p^1 = -2\omega \sin(\theta) \cos(\phi),$$

$$p^2 = -2\omega \sin(\theta) \sin(\phi),$$

$$p^3 = 2\omega \cos(\theta).$$

Ou seja,  $\theta$  e  $\phi$  são os ângulos que definem a direção de  $\vec{p}$ , e  $\omega$  é o seu módulo. A decomposição (4.3.13) é o cerne do que vamos fazer em seguida, uma vez que agora os objetos fundamentais são  $\pi_\alpha$  e  $\bar{\pi}_{\dot{\alpha}}$ , chamados twistors. Os espinores de helicidade positiva recebem um tratamento análogo, resultando em

$$u_+(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (4.3.19)$$

$$\bar{u}_+(\vec{p}) = (\pi^\alpha, 0). \quad (4.3.20)$$

Essa decomposição é possível em razão dos momentos serem tipo luz. Podemos tomar o determinante de (4.3.8), e escrever

$$\begin{aligned} \det(p_{\alpha\dot{\alpha}}) &= \det \begin{pmatrix} -p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^0 - p^3 \end{pmatrix} \\ &= -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

O que significa que a matriz  $p_{\alpha\dot{\alpha}}$  tem um autovalor nulo, e por isso pode ser escrita como uma projeção sobre o autovetor associado ao autovalor não nulo.

Agora, vamos definir uma nova e eficiente notação. Se  $p$  e  $q$  são dois momentos tipo luz, e os twistors associados são  $\pi_\alpha$  e  $\chi_\alpha$ . Escrevemos o produto de twistors como

$$[pq] := \varepsilon^{\alpha\beta} \pi_\beta \chi_\alpha = \pi^\alpha \chi_\alpha. \quad (4.3.22)$$

Devido à presença da métrica espinorial  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  o produto é antissimétrico nos argumentos,

isto é,  $[pq] = -[qp]$ . Essa notação se mostra extremamente sucinta quando escrevemos produtos de espinores

$$\begin{aligned}\bar{u}_+(\vec{p})u_-(\vec{q}) &= (\pi^\alpha, 0) \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \pi^\alpha \chi_\alpha \\ &= [pq].\end{aligned}\tag{4.3.23}$$

Definimos também o produto de helicidade positiva

$$\langle pq \rangle := \varepsilon^{\beta\dot{\alpha}} \bar{\pi}_{\dot{\beta}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}},\tag{4.3.24}$$

tal que

$$\begin{aligned}\bar{u}_-(\vec{p})u_+(\vec{q}) &= (0, \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\ &= \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ &= \langle pq \rangle.\end{aligned}\tag{4.3.25}$$

Uma consequência imediata é  $\langle pq \rangle = [pq]^*$ , onde a conjugação complexa leva  $\pi_\alpha$  em  $\bar{\pi}_{\dot{\alpha}}$ . Além disso, vale notar que os outros produtos de espinores são nulos

$$\begin{aligned}\bar{u}_+(\vec{p})u_+(\vec{q}) &= (\pi^\alpha, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = 0, \\ \bar{u}_-(\vec{p})u_-(\vec{q}) &= (0, \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}\tag{4.3.26}$$

Se tomarmos ambos os produtos de helicidade esquerda e direita, e multiplicarmos, obtemos um produto interno nos índices do espaço-tempo:

$$\begin{aligned}\langle pq \rangle [qp] &= (\bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}})(\chi^\alpha \pi_\alpha) \\ &= (\bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \pi_\alpha)(\chi^\alpha \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}) \\ &= p_{\dot{\alpha}\alpha} q^{\alpha\dot{\alpha}} \\ &= p_\mu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu q_\nu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha} \\ &= -2\eta^{\mu\nu} p_\mu q_\nu \\ &= -2p^\nu q_\nu.\end{aligned}\tag{4.3.27}$$

É interessante fazer uma tabela que sirva de guia para as derivações com twistors:

$$\boxed{\begin{aligned}|p] &= u_-(p) = \begin{pmatrix} \pi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ |p\rangle &= u_+(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\ [p| &= \bar{u}_+(p) = (\pi^\alpha \ 0) \\ \langle p| &= \bar{u}_-(p) = (0 \ \bar{\pi}_{\dot{\alpha}})\end{aligned}}$$

A partir dela, podemos por exemplo escrever a contração  $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$  de maneira bem sucinta escrevendo

$$\begin{aligned}
-\not{p} &= -\gamma^\mu p_\mu = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} p_\mu & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 0 & p_{\alpha\dot{\alpha}} \\ p^{\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\alpha \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \pi^\alpha & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \pi^\alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \pi_\alpha \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} (\pi^\alpha \ 0) + \begin{pmatrix} \pi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}) \\
&= |p\rangle [p] + |p\rangle \langle p|.
\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

Além disso, podemos mostrar outras relações úteis no cálculo de amplitudes de espalhamento do próximo capítulo. Para partículas de helicidade positiva, temos

$$\begin{aligned}
\bar{u}_+(p') (-\not{q}) u_+(p) &= (\pi'^\alpha \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \chi_\alpha \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \chi^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\
&= \pi'^\alpha \chi_\alpha \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \\
&= \langle p' q \rangle [q p].
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Se a helicidade for negativa, temos uma expressão similar,

$$\begin{aligned}
\bar{u}_-(p')(-\not{q})u_-(p) &= (0 \ \bar{\pi}'_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & \chi_{\alpha}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\chi^{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \bar{\pi}'_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\chi^{\alpha}\pi_{\alpha} \\
&= \langle p'q \rangle [qp].
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

Por fim, helicidades diferentes geram amplitudes nulas,

$$\bar{u}_-(p')(-\not{q})u_+(p) = (0 \ \bar{\pi}'_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & \chi_{\alpha}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\chi^{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = 0, \tag{4.3.31}$$

$$\bar{u}_+(p')(-\not{q})u_-(p) = (\pi'^{\alpha} \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \chi_{\alpha}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\chi^{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.3.32}$$

Uma identidade conveniente na manipulação algébrica dos produtos de twistors é a Identidade de Schouten,

$$\langle pq \rangle \langle rs \rangle + \langle pr \rangle \langle sq \rangle + \langle ps \rangle \langle qr \rangle = 0, \tag{4.3.33}$$

que é análoga à versão com colchetes, para os espinores de helicidade negativa. Para demonstrá-la, lembremos que cada produto de twistors é antissimétrico nos argumentos.

Assim,

$$\begin{aligned}
& \langle pq \rangle \langle rs \rangle + \langle pr \rangle \langle sq \rangle + \langle ps \rangle \langle qr \rangle \longrightarrow (q \leftrightarrow r) \\
& \longrightarrow \langle pr \rangle \langle qs \rangle + \langle pq \rangle \langle sr \rangle + \langle ps \rangle \langle rq \rangle \\
& = -\langle pr \rangle \langle sq \rangle - \langle pq \rangle \langle rs \rangle - \langle ps \rangle \langle qr \rangle.
\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

Se fizermos permutações entre quaisquer dois índices  $q, r, s$ , temos uma troca de sinal global. Temos então um objeto  $T_{pqrs} = T_{p[qrs]}$  que pode portanto ser escrito  $A_p \varepsilon_{qrs}$ . Vale lembrar aqui que a antissimetria é advinda da métrica espinorial contida em cada produto. Cada índice no símbolo de Levi-Civita é então associado a um índice de Weyl de uma métrica espinorial, que assume dois valores. O símbolo, contudo, contém três índices, o que implica na repetição de pelo menos um valor dos índices em todos os casos. Pela definição de  $\varepsilon_{qrs}$  isso é zero.

Vamos agora mostrar a identidade

$$\langle pq \rangle [qr] \langle rs \rangle [sp] = \text{Tr} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \not{p} \not{q} \not{r} \not{s}. \tag{4.3.35}$$

Usando a identidade (4.3.28), fazemos os produtos,

$$\begin{aligned}
\not{p} \not{q} &= (|p\rangle [p] + |p\rangle \langle p|) (|q\rangle [q] + |q\rangle \langle q|) \\
&= |p\rangle [pq] [q] + |p\rangle [pq] \langle q| + |p\rangle \langle pq\rangle [q] + |p\rangle \langle pq\rangle \langle q| \\
&= |p\rangle [pq] \langle q| + |p\rangle \langle pq\rangle [q],
\end{aligned} \tag{4.3.36}$$



e

$$\begin{aligned}
pqrs &= (|p\rangle[pq]\langle q| + |p\rangle\langle pq|q\rangle)(|r\rangle[rs]\langle s| + |r\rangle\langle rs|s\rangle) \\
&= |p\rangle[pq]\langle qr\rangle[rs]\langle s| + |p\rangle\langle pq|qr\rangle[rs]\langle s| + |p\rangle[pq]\langle qr\rangle\langle rs|s\rangle + |p\rangle\langle pq|qr\rangle\langle rs|s\rangle \\
&= |p\rangle[pq]\langle qr\rangle[rs]\langle s| + |p\rangle\langle pq|qr\rangle\langle rs|s\rangle.
\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Além disso,

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3.38}$$

e ambos os termos da última expressão de (4.3.36) são matrizes. Os produtos de twistors são escalares, então estamos interessados apenas em

$$\begin{aligned}
|p\rangle\langle s| &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} (0 \quad \bar{\sigma}_{\dot{\beta}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\pi}^{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\
|p\rangle[s] &= \begin{pmatrix} \pi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} (\sigma^{\beta} \quad 0) = \begin{pmatrix} \pi_{\alpha}\sigma^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.39}$$

O projetor  $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  seleciona o termo  $|p\rangle\langle pq|qr\rangle\langle rs|s\rangle$ , e o traço faz

$$Tr(|p\rangle[s]) = Tr \begin{pmatrix} \pi_{\alpha}\sigma^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \pi_{\alpha}\sigma^{\alpha} = [ps] \tag{4.3.40}$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle pq \rangle [qr] \langle rs \rangle [sp] &= \text{Tr} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \not{p} \not{q} \not{r} \not{s} \\
&= \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \chi^{\beta} \rho_{\beta} \bar{\rho}_{\dot{\gamma}} \bar{\sigma}^{\dot{\gamma}} \sigma^{\delta} \pi_{\delta}
\end{aligned} \tag{4.3.41}$$

Podemos construir objetos como  $\langle p | \gamma^{\mu} | q \rangle$ , que mostram características interessantes:

$$\begin{aligned}
\langle p | \gamma^{\mu} | q \rangle &= (0 \ \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \chi_{\alpha} = \chi^{\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \\
&= (\chi^{\alpha} \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\pi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\
&= [p | \gamma^{\mu} | q].
\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

De maneira similar,

$$\begin{aligned}
\langle p | \gamma^{\mu} | q \rangle^* &= (0 \ \pi_{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \pi_{\alpha} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \pi_{\alpha} \\
&= (0 \ \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \langle q | \gamma^{\mu} | p \rangle.
\end{aligned} \tag{4.3.43}$$

Assim como,

$$\begin{aligned}
\langle p|\gamma^\mu|p\rangle^* &= (0 \ \pi_\alpha) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \pi_\alpha \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} = -p_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \\
&= -p_\nu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = 2\eta^{\mu\nu} p_\nu \\
&= 2p^\mu.
\end{aligned} \tag{4.3.44}$$

Vale ressaltar a nulidade das correntes com twistors de mesma helicidade,

$$\langle p|\gamma^\mu|q\rangle = (0 \ \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = 0, \tag{4.3.45}$$

$$[p|\gamma^\mu|q] = (\pi^\alpha \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.3.46}$$

As relações (4.3.42) a (4.3.46) podem ser estendidas para um número ímpar qualquer de matrizes  $\gamma^\mu$ . É fácil ver isso se representarmos as matrizes na forma de blocos como de costume, e notar que as entradas não nulas estão nos blocos da diagonal secundária. Um produto de um número ímpar dessas matrizes também terá blocos não nulos na diagonal secundária, satisfazendo as mesmas relações. Similarmente, se usarmos um número par de matrizes, obteremos as três primeiras correntes iguais a zero e as duas últimas diferentes de zero.

Para finalizar mostremos as identidades de Fierz:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\langle p|\gamma_\mu|q\rangle\gamma^\mu &= -\frac{1}{2}(0 \ \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}} \\ \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.47) \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \\ \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta} & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \\ \chi^\alpha\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}\chi_\alpha\delta_\beta^\alpha\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \\ \chi^\alpha\bar{\pi}^{\dot{\alpha}}\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \chi_\beta\bar{\pi}_{\dot{\beta}} \\ \bar{\pi}_{\dot{\beta}}\chi^\beta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\pi}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} (\chi^\beta \ 0) + \begin{pmatrix} \chi_\beta \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ \bar{\chi}_{\dot{\beta}}) \\
&= |p\rangle[q] + |q\rangle[p].
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$-\frac{1}{2}[p|\gamma_\mu|q]\gamma^\mu = |p\rangle[q] + |q\rangle[p]. \quad (4.3.48)$$

Quando se toma (4.3.48) entre dois twistors  $|j\rangle$  e  $|k\rangle$ , temos

$$\begin{aligned}
[p|\gamma_\mu|q]\langle j|\gamma^\mu|k\rangle &= (-2)\langle j|(|p\rangle[q] + |q\rangle[p])|k\rangle \quad (4.3.49) \\
&= 2\langle qj\rangle[pk].
\end{aligned}$$

Encerramos o capítulo com uma tabela que reúne as identidades mostradas aqui.

Identidade	Referência
$[pq] = \pi^\alpha \chi_\alpha$	4.3.22
$\langle pq \rangle = \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$	4.3.24
$\langle pq \rangle [qp] = -2p^\nu q_\nu$	4.3.27
$-\not{p} =  p\rangle [p] +  p\rangle \langle p $	4.3.28
$\bar{u}_+(p')(-\not{q})u_+(p) = \langle p'q \rangle [qp]$	4.3.29
$\bar{u}_-(p')(-\not{q})u_-(p) = \langle p'q \rangle [qp]$	4.3.30
$\bar{u}_\mp(p')(-\not{q})u_\pm(p) = 0$	4.3.31
$\langle pq \rangle \langle rs \rangle + \langle pr \rangle \langle sq \rangle + \langle ps \rangle \langle qr \rangle = 0$	4.3.33
$\langle pq \rangle [qr] \langle rs \rangle [sp] = \text{Tr} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \not{p} \not{q} \not{r} \not{s}$	4.3.35
$\langle p   \gamma^\mu   q \rangle = [p   \gamma^\mu   q \rangle$	4.3.42
$\langle p   \gamma^\mu   q \rangle^* = \langle q   \gamma^\mu   p \rangle$	4.3.43
$\langle p   \gamma^\mu   p \rangle^* = 2p^\mu$	4.3.44
$\langle p   \gamma^\mu   q \rangle = 0$	4.3.45
$[p   \gamma^\mu   q \rangle = 0$	4.3.46
$-\frac{1}{2} \langle p   \gamma_\mu   q \rangle \gamma^\mu =  p\rangle [q] +  q\rangle \langle p $	4.3.47
$-\frac{1}{2} [p   \gamma_\mu   q \rangle \gamma^\mu =  p\rangle \langle q  +  q\rangle [p]$	4.3.48
$[p   \gamma_\mu   q \rangle \langle j   \gamma^\mu   k \rangle = 2 \langle qj \rangle [pk]$	4.3.49

## Capítulo 5

# Amplitudes de Máxima Violação de Helicidade e o Algoritmo BCFW

### 5.1 Regras de Feynman para QCD

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria que descreve as interações fortes, regente da interação entre quarks e gluons. Trata-se de uma descrição de férmions numa teoria de Yang-Mills simétrica sob o  $SU(3)$ ; então escrevemos a Lagrangiana clássica de QCD como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{CD Clássica}} &= \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \\ &= \frac{-1}{4} \text{Tr}(F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a) + \sum_{b,k} \bar{\Psi}_{bk}(i\not{D} + m_k)\Psi^{bk}.\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

O índice  $b$  indica a cor do quark, e o índice  $k$  o sabor. Não vamos entrar em detalhes quanto à fenomenologia das partículas elementares, e por enquanto já temos o suficiente.

A derivada covariante é dada por

$$D_\mu \Psi^j = \partial_\mu \Psi^j + ig(A_\mu^a)^j_i \Psi^i, \quad (5.1.2)$$

onde os geradores do  $SU(3)$ ,  $t^a$ , são  $t^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ ; onde  $\lambda^a$  são as matrizes de Gell-Mann. A quantização, nos levando à QCD, é um processo mais complicado; o leitor é aconselhado a olhar em [1], [4] e [3], uma vez que queremos apenas listar as regras de Feynman. A forma final da Lagrangiana de QCD é

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}Tr(F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a) - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \partial^\mu \bar{c}^a D_\mu c^a + \sum_{b,k} \bar{\Psi}_{bk}(i\not{D} + m_k)\Psi^{bk} \quad (5.1.3)$$

Assim, as regras de Feynman para QCD, obtidas expandindo a Lagrangiana acima são as contidas na Figura 5.1 Aqui escrevemos as regras de Feynman seguindo [10], também omitindo as regras relativas aos fantasmas de Faddeev-Popov, oriundos da fixação do calibre, uma vez que essas não serão necessárias na nossa discussão. Aqui,  $c^a$  e  $\bar{c}^a$  são os fantasmas. A segunda coluna contém as regras usuais, e a terceira coluna contém as regras ordenadas de cor, a serem discutidas e usadas mais à frente.

## 5.2 Calculando diagramas com a notação dos Twistors

Queremos mostrar a eficácia da notação dos twistors no cálculo de amplitudes de espalhamento; para isso usaremos as relações demonstradas no capítulo anterior. Começamos com um espalhamento de QED, por simplicidade, já que esta não tem estrutura de cor. Depois estudaremos espalhamentos em QCD. Analisemos o processo através do qual um elétron e um pósitron resultam num múon e num antimúon,  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$ , Figura 5.2. Note que aqui estamos trabalhando com férmions sem massa, já que os twistors só podem ser definidos para momentos tipo luz. A amplitude associada é

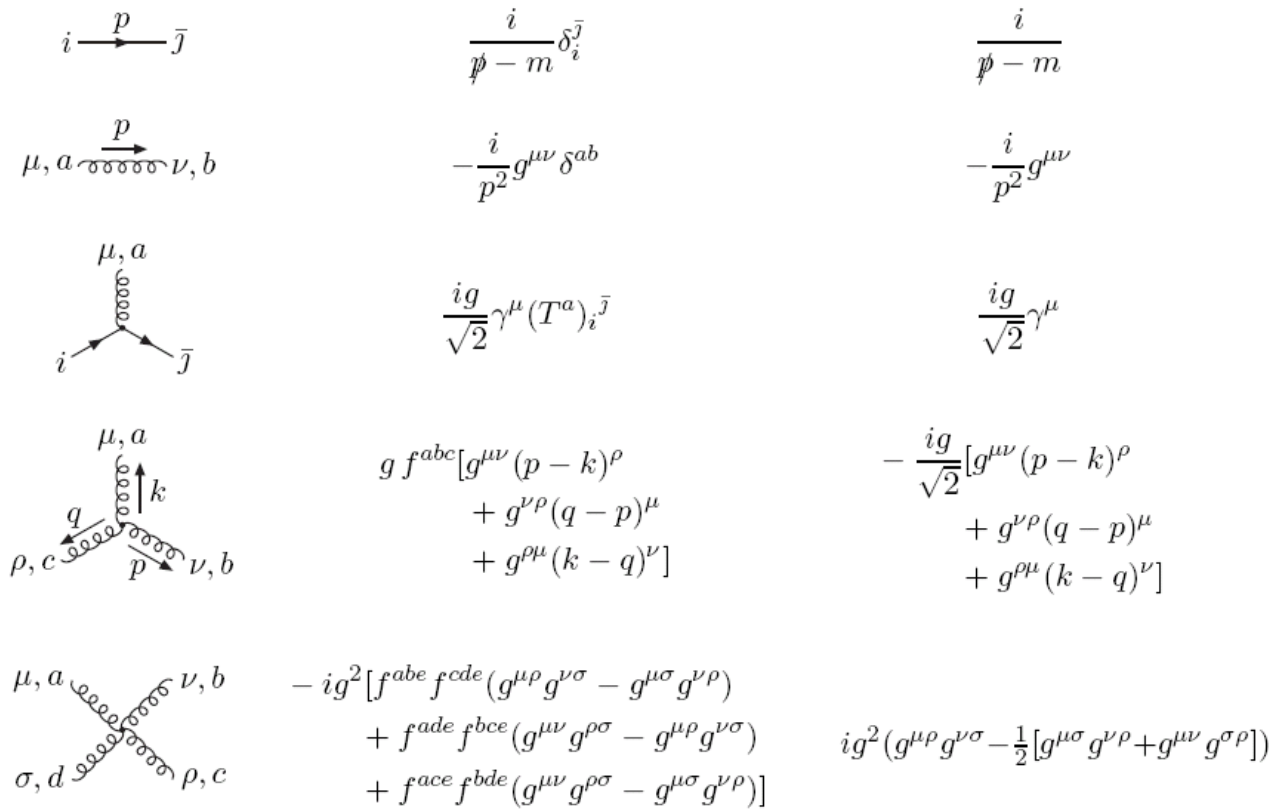


Figura 5.1: Regras de Feynman para QCD. Fonte: [10].

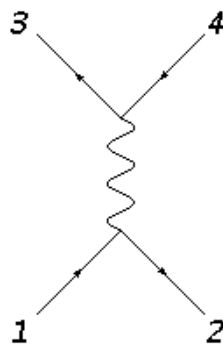


Figura 5.2:  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$



$$i\mathcal{T} = -\frac{i}{q^2}(-ie)^2\bar{u}_-(3)\gamma^\mu u_-(4)\bar{u}_-(2)\gamma_\mu u_-(1), \quad (5.2.1)$$

onde se representou os momentos das partículas 1, 2, 3 e 4 pelos seus respectivos rótulos numéricos, e o momento da perna interna por  $q$ . A conservação do momento linear exige que  $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1p_2 = -\langle 12\rangle[21]$ , já que  $p_1^2 = p_2^2 = 0$ . Assim, escrevendo os espiniores na notação de twistors,

$$\begin{aligned} i\mathcal{T} &= ie^2 \frac{\langle 3\gamma^\mu 4\rangle \langle 2\gamma_\mu 1\rangle}{\langle 12\rangle[12]} \\ &= 2ie^2 \frac{\langle 32\rangle[14]}{\langle 12\rangle[12]}. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

No último passo se usou a identidade de Fierz, (4.3.49), na forma de (4.3.47), além de escrever  $\bar{u}_-(j)\gamma^\mu u_-(k) = \langle j\gamma^\mu k\rangle$ . O resultado que obtivemos é bastante simples, e a computação dele mais ainda. Contudo, ele não é quiral, i.e., não depende de apenas de um tipo de férmion quiral; para escrevermos uma amplitude quiral, multipliquemos nossa amplitude por  $\frac{\langle 23\rangle}{[23]}$ ,

$$i\mathcal{T} = 2ie^2 \frac{\langle 32\rangle[14]\langle 23\rangle}{\langle 12\rangle[12]\langle 23\rangle}. \quad (5.2.3)$$

Agora, sabemos que  $[12]\langle 23\rangle = [1\cancel{2}3]$ , no denominador, devido a (4.3.28). Podemos usar a conservação do momento linear total,  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ , para escrever

$$[1\cancel{2}3] = [1(-\cancel{1} + \cancel{2} + \cancel{4})3] = [1\cancel{4}3] = [14]\langle 43\rangle, \quad (5.2.4)$$

onde  $[1(-\cancel{1})] = 0$  e  $\cancel{3}3\rangle = 0$  da equação de Dirac. Com o fator  $[14]$  no denominador podemos escrever a amplitude quirial

$$i\mathcal{T} = 2ie^2 \frac{\langle 32 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}. \quad (5.2.5)$$

A idéia geral é identificar o fator indesejado no numerador e no denominador e, com a intenção de cancelá-los, multiplicar a amplitude por fatores da quiralidade desejada, escolhidos de tal modo que usando a conservação total do momento linear e a equação de Dirac se possa escrever ambos os fatores com a mesma dependência. Como exemplo, calculemos a amplitude de quiralidade positiva,

$$\begin{aligned} i\mathcal{T} &= 2ie^2 \frac{\langle 32 \rangle [14]}{\langle 12 \rangle [12]} = 2ie^2 \frac{[41] \langle 32 \rangle [14]}{[41] \langle 12 \rangle [12]} \\ &= 2ie^2 \frac{[41] \langle 32 \rangle [14]}{[4\cancel{1}2] [12]} = 2ie^2 \frac{[41] \langle 32 \rangle [14]}{[4(-\cancel{1} + \cancel{3} + \cancel{4})2] [12]} \\ &= 2ie^2 \frac{[41] \langle 32 \rangle [14]}{[4\cancel{3}2] [12]} = 2ie^2 \frac{[41] \langle 32 \rangle [14]}{[43] \langle 32 \rangle [12]} \\ &= 2ie^2 \frac{[14]^2}{[34] [12]}. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Antes de passarmos a espalhamentos em QCD, precisamos definir algumas características da nossa notação quando aplicada a bósons vetoriais. Uma propriedade destes é o desacoplamento dos modos longitudinais,

$$p_\mu \epsilon^\mu = 0, \quad (5.2.7)$$

onde  $\epsilon^\mu$  é um vetor de polarização. Note que devido à sua natureza tipo luz, podemos adicionar qualquer múltiplo de  $p_\mu$  a  $\epsilon^\mu$  e a condição continua satisfeita. Trata-se de uma

simetria de calibre, que nos será útil no futuro. A expressão dos vetores de polarização na notação dos twistors é

$$\epsilon_{-}^{\mu}(p) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[k\gamma^{\mu}p]}{[kp]}, \quad (5.2.8)$$

$$\epsilon_{+}^{\mu}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle k\gamma^{\mu}p \rangle}{\langle kp \rangle}. \quad (5.2.9)$$

A condição (5.2.7) é imediatamente satisfeita, pois temos  $\not{p}|p\rangle$  e  $\not{p}|p\rangle$ , ambos nulos. Além disso,  $(\epsilon_{+}^{\mu}(p))^* = \epsilon_{-}^{\mu}(p)$ . Além disso, os vetores de polarização satisfazem

$$\epsilon_{\pm}^{\mu}(p)\epsilon_{\pm}^{\mu}(p) = 0, \quad \text{e} \quad (5.2.10)$$

$$\begin{aligned} |\epsilon_{+}^{\mu}(p)|^2 &= |\epsilon_{-}^{\mu}(p)|^2 = \epsilon_{-}^{\mu}(p)\epsilon_{+}^{\mu}(p) & (5.2.11) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{[k\gamma^{\mu}p]}{[kp]} \frac{\langle k\gamma^{\mu}p \rangle}{\langle kp \rangle} = -\frac{1}{2} \frac{\langle p\gamma^{\mu}k \rangle}{[kp]} \frac{\langle k\gamma^{\mu}p \rangle}{\langle kp \rangle} \\ &= -\frac{\langle pk \rangle}{[kp]} \frac{[pk]}{\langle kp \rangle} = -1. \end{aligned}$$

O quadrivetor tipo luz  $k_{\mu}$  que aparece no argumento do vetor de polarização é chamado vetor de referência. A liberdade de escolha desse vetor de referência é devido à simetria de calibre citada acima. Se fizermos uma mudança no vetor de referência, de  $k$  para  $j$  por exemplo, temos

$$\begin{aligned}
\epsilon_+^\mu(p; k) - \epsilon_+^\mu(p; j) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle k\gamma^\mu p \rangle}{\langle kp \rangle} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle j\gamma^\mu p \rangle}{\langle jp \rangle} \\
&= \frac{\langle k\gamma^\mu p \rangle \langle jp \rangle + \langle j\gamma^\mu p \rangle \langle kp \rangle}{\sqrt{2} \langle kp \rangle \langle jp \rangle} \\
&= \frac{\langle jp \rangle [p\gamma^\mu k] + \langle j\gamma^\mu p \rangle \langle pk \rangle}{\sqrt{2} \langle kp \rangle \langle jp \rangle} \\
&= \frac{\langle j\cancel{p}\gamma^\mu k \rangle + \langle j\gamma^\mu \cancel{p}k \rangle}{\sqrt{2} \langle kp \rangle \langle jp \rangle} \\
&= \frac{\langle j(\cancel{p}\gamma^\mu + \gamma^\mu \cancel{p})k \rangle}{\sqrt{2} \langle kp \rangle \langle jp \rangle} \\
&= \frac{-2p^\mu \langle jk \rangle}{\sqrt{2} \langle kp \rangle \langle jp \rangle} \\
&= \omega p^\mu,
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

onde  $\omega$  é um fator constante. De fato, uma mudança no vetor de referência acarreta numa mudança proporcional ao momento, que devido a (5.2.7), é nula.

Uma vez definidos e estudados os vetores de polarização, calculemos o processo  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \gamma\gamma$ ,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T} &= (-ie)^2 \langle 2 | \gamma^\mu \epsilon_\mu(4) \frac{i(\cancel{2} + \cancel{4})}{(p_2 + p_4)^2} \gamma^\nu \epsilon_\nu(3) | 1 \rangle \\
&\quad + (-ie)^2 \langle 2 | \gamma^\mu \epsilon_\mu(3) \frac{i(\cancel{2} + \cancel{3})}{(p_2 + p_3)^2} \gamma^\nu \epsilon_\nu(4) | 1 \rangle.
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Já podemos, de antemão, escrever  $(p_2 + p_3)^2 = 2p_2p_3$  e  $(p_2 + p_4)^2 = 2p_2p_4$ , dado que todos os momentos são tipo luz. Temos que considerar todas as possíveis helicidades para os vetores de polarização; podemos, contudo, simplificar o trabalho notando que se tivermos ambas helicidades positivas ou ambas negativas, cada termo da amplitude é nulo. Escolhendo helicidades positivas e o vetor de referência como o momento  $p_2$ ,

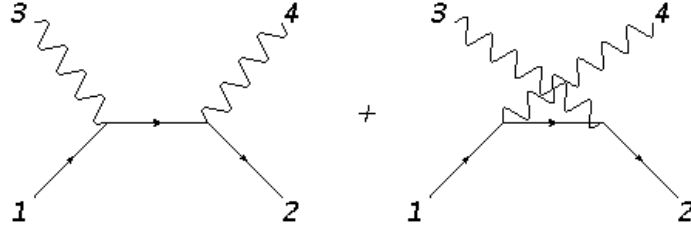


Figura 5.3:  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \gamma\gamma$

temos, no primeiro termo,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\mu(4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 2\gamma_\mu 4 \rangle}{\langle 24 \rangle}, & (5.2.14) \\
 i\mathcal{T}_{parcial} &= (-ie)^2 \langle 2 | \gamma^\mu \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 2\gamma_\mu 4 \rangle}{\langle 24 \rangle} \frac{i(\not{2} + \not{4})}{2p_2 p_4} \gamma^\nu \epsilon_\nu(3) | 1 \rangle \\
 &= (ie)^2 \sqrt{2} \frac{\langle 22 \rangle [4 i(\not{2} + \not{4})]}{\langle 24 \rangle 2p_2 p_4} \gamma^\nu \epsilon_\nu(3) | 1 \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Esse resultado é devido ao fator  $\langle 22 \rangle = 0$ , e esse fator aparece pelo uso de (4.3.49). Um cálculo similar pode mostrar que o outro termo que contribui para a amplitude também é nulo, e que se tivéssemos escolhido ambas as helicidades negativas também teríamos uma amplitude nula. Vale lembrar que a conveniente escolha do vetor de referência como  $p_2$  é possível graças à simetria de calibre que descrevemos anteriormente. Quando se trata o caso com uma helicidade positiva e uma negativa, nota-se que  $\epsilon_- \epsilon_+$  é levado em  $\epsilon_+ \epsilon_-$  por uma troca nos índices 3 e 4 dados aos momentos. Se nos concentrarmos, digamos, no caso  $\epsilon_+ \epsilon_-$ , podemos ainda escolher

$$\epsilon_\mu^+(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 2\gamma_\mu 3 \rangle}{\langle 23 \rangle}, \quad \epsilon_\mu^-(4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[1\gamma_\mu 4]}{[14]}, \quad (5.2.15)$$

e, aproveitando que  $p_1$  é o vetor de referência do segundo vetor de polarização, usamos

um argumento igual ao anterior para cancelar a contribuição do segundo diagrama.

Finalmente, resta-nos o primeiro diagrama,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T} &= -(-ie)^2 \langle 2 | \gamma^\mu \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[1\gamma_\mu 4]}{[24]} i(\not{2} + \not{4}) \gamma^\nu \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 2\gamma_\nu 3 \rangle}{\langle 23 \rangle} | 1 \rangle \quad (5.2.16) \\
&= ie^2 \frac{2}{\sqrt{2}[14]} \langle 24 \rangle [1 | \not{2} + \not{4} | 2 \rangle [31] \frac{2}{\sqrt{2}\langle 23 \rangle} \\
&= \frac{2ie^2}{[14]\langle 23 \rangle} \frac{\langle 24 \rangle [14] \langle 42 \rangle [31]}{2p_1 p_3} \\
&= \frac{2ie^2}{[14]\langle 23 \rangle} \frac{\langle 24 \rangle [14] \langle 42 \rangle [31]}{\langle 13 \rangle [31]} \\
&= 2ie^2 \frac{\langle 24 \rangle^2}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}.
\end{aligned}$$

No segundo passo usamos (4.3.49) novamente; no terceiro escrevemos  $\not{2}$  e  $\not{4}$  na notação de twistors, notando que  $\not{2}|2\rangle = 0$ . Também usamos, no terceiro passo, a conservação total do momento linear para escrever  $2p_2 p_4 = (p_2 + p_4)^2 = (p_1 + p_3)^2 = 2p_1 p_3$ . Nota-se que, uma vez bem conhecidas as propriedades dos twistors, o cálculo de amplitudes é bem conciso.

### 5.3 Ordenação de Cor

O primeiro detalhe a ser observado quando se estende o formalismo descrito aqui para QCD é a estrutura de cor, ausente em QED. A ordenação de cor tem como intuito separar a informação de cor da informação cinética na amplitude, simplificando-a. Mostraremos primeiro um exemplo, e depois discutiremos o procedimento geral. Aqui rotulamos as pernas externas no sentido horário por razões estéticas a serem explicadas na próxima seção. O processo cuja amplitude queremos calcular é o espalhamento de um quark e seu antiquark resultando em gluons,  $q\bar{q} \rightarrow gg$ . Esse processo é diferente de  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \gamma\gamma$ , visto anteriormente, pela presença do terceiro diagrama, que contém um vértice de interação

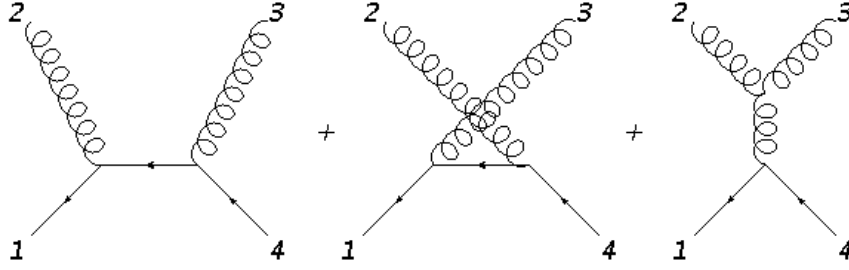


Figura 5.4:  $q_L \bar{q}_R \rightarrow gg$

entre gluons. A amplitude correspondente a todo o processo é

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T} = & (ig)^2 \langle 1 | \gamma^\mu \epsilon_\mu(2) \frac{i(\not{1} + \not{2})}{(p_1 + p_2)^2} t^a t^b \gamma^\nu \epsilon_\nu(3) | 4 \rangle \\
& + (ig)^2 \langle 1 | \gamma^\mu \epsilon_\mu(3) \frac{i(\not{1} + \not{3})}{(p_1 + p_3)^2} t^b t^a \gamma^\nu \epsilon_\nu(2) | 4 \rangle \\
& + (ig)(-gf^{abc}t^c) \frac{-i}{(p_1 + p_4)^2} \langle 1 | \gamma^\rho | 4 \rangle \left\{ \epsilon^\lambda(2) \epsilon_\lambda(3) (p_2 - p_3)_\rho \right. \\
& \left. + \epsilon_\rho(3) \epsilon^\lambda(2) (2p_3 + p_2)_\lambda + \epsilon_\rho(2) \epsilon^\lambda(3) (-2p_2 - p_3)_\lambda \right\}.
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Através de uma inspeção pode-se notar a diferença entre essa amplitude e a de  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \gamma\gamma$ , que além de conter a contribuição do terceiro diagrama, contém também os geradores da álgebra de Lie do  $SU(3)$ ,  $t^i$ . As constantes de estrutura  $C^{ijk}$  mencionadas no capítulo 2 são representadas aqui, no caso do  $SU(3)$ , por  $if^{abc}$ . Usando (2.3.4), temos  $f^{abc}t^c = t^a t^b - t^b t^a$ ; podemos então separar a amplitude em dois pedaços: um cuja estrutura de cor contém  $t^a t^b$  e outro cuja estrutura contém  $t^b t^a$ . Isso é possível uma vez que as contribuições dos primeiros dois diagramas têm essas estruturas. Dessa maneira, temos

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T} = & \left( (ig)^2 \langle 1 | \gamma^\mu \epsilon_\mu(2) \frac{i(\mathbf{1} + \mathbf{2})}{(p_1 + p_2)^2} \gamma^\nu \epsilon_\nu(3) | 4 \rangle \right. \\
& + \frac{-i(ig)^2}{(p_1 + p_4)^2} \langle 1 | \gamma^\rho | 4 \rangle \left\{ \epsilon^\lambda(2) \epsilon_\lambda(3) (p_2 - p_3)_\rho \right. \\
& + \left. \left. \epsilon_\rho(3) \epsilon^\lambda(2) (-p_1 - p_4 + p_3)_\lambda + \epsilon_\rho(2) \epsilon^\lambda(3) (p_1 + p_4 - p_2)_\lambda \right\} \right) t^a t^b \\
& + \left( (ig)^2 \langle 1 | \gamma^\mu \epsilon_\mu(3) \frac{i(\mathbf{1} + \mathbf{3})}{(p_1 + p_3)^2} \gamma^\nu \epsilon_\nu(2) | 4 \rangle \right. \\
& + \frac{-i(ig)^2}{(p_1 + p_4)^2} \langle 1 | \gamma^\rho | 4 \rangle \left\{ \epsilon^\lambda(2) \epsilon_\lambda(3) (p_2 - p_3)_\rho \right. \\
& + \left. \left. \epsilon_\rho(3) \epsilon^\lambda(2) (2p_3 + p_2)_\lambda + \epsilon_\rho(2) \epsilon^\lambda(3) (-2p_2 - p_3)_\lambda \right\} \right) t^b t^a.
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Nossos cálculos se simplificam pois os dois primeiros diagramas são iguais a menos de uma mudança nos índices 3 e 4, e o terceiro diagrama é simétrico sob essa mudança. Nossa amplitude é da forma

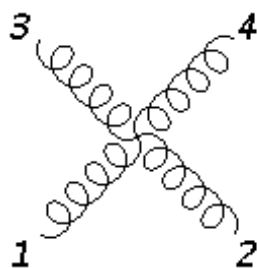
$$i\mathcal{T} = i\mathcal{T}(1234)t^a t^b + i\mathcal{T}(1243)t^b t^a. \tag{5.3.3}$$

Podemos calcular  $i\mathcal{T}(1234)$  e depois apenas permutar os índices 3 e 4 para obter  $i\mathcal{T}(1243)$ . As amplitudes parciais  $i\mathcal{T}(1234)$  e  $i\mathcal{T}(1243)$  são independentes da estrutura da álgebra, e por isso podem ser tratadas como as amplitudes da seção anterior. Estas são chamadas amplitudes de cor ordenada.

Se quisermos calcular, por exemplo, algum processo com um vértice de quatro pontos, teremos o fator  $f^{abc} f^{cde}$ . Aqui é mais interessante usar  $T^i = \sqrt{2}t^i$ , tal que

$$Tr(T^a T^b) = \delta^{ab}, \tag{5.3.4}$$





$$\begin{aligned}
&= -ig^2 [f^{abc} f^{dec} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \\
&\quad + f^{adc} f^{bec} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu}) \\
&\quad + f^{aec} f^{dbc} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\sigma\nu})]
\end{aligned}$$

Figura 5.5: Diagrama de quatro pontos.

e escrever

$$if^{abc} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr}(T^a T^b T^c - T^a T^c T^b). \quad (5.3.5)$$

Fazendo essa decomposição duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}
-f^{abc} f^{cde} &= \frac{1}{2} \text{Tr}([T^a, T^b][T^d, T^e]) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}(T^a T^b T^d T^e - T^b T^a T^d T^e - T^a T^b T^e T^d + T^b T^a T^e T^d),
\end{aligned} \quad (5.3.6)$$

de tal modo que o vértice de quatro pontos vai ser decomposto em seis termos, vide Figura 5.5,  $\text{Tr}(T^a T^b T^d T^e)$  e as outras cinco permutações dos três últimos índices. Note que permuta-se os últimos índices pois o traço é cíclico, e portanto podemos fixar o primeiro gerador.

Em geral, para um número  $M$  qualquer de constantes de estrutura  $f^{abc}$  num determinado diagrama, tem-se  $M + 2$  geradores da álgebra dentro do sinal do traço, onde a ciclicidade deste e a todas as outras possíveis configurações dos índices resultam em  $(M + 1)!$  termos de cor ordenada. Apesar de aumentar-se o número de termos significativamente para  $M$  grande, a computação é conveniente já que *basta encontrar uma das amplitudes de cor ordenada e a partir dela permutar índices; além de fazer somas.*

Ainda, pode-se colocar uma identidade das álgebras  $SU(N)$ , que auxilia na contração dos geradores

$$\text{Tr}(T_{ij}^a T_{kl}^b) = \delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (5.3.7)$$

onde os índices subscritos são as entradas da matriz da representação.

## 5.4 Amplitudes de Máxima Violação de Helicidade (MHV)

Para podermos apresentar as amplitudes de máxima violação de helicidade, calculemos o processo  $q_L \bar{q}_R \rightarrow gg$  da seção anterior. Inspecionando a amplitude de cor ordenada  $i\mathcal{T}(1234)$  de (5.3.2), notamos que ao se tratar o caso com ambos os gluons de helicidade positiva podemos escolher o vetor de referência como sendo  $p_1$  e assim ter

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}(1234) &= \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \langle 1|\gamma^\mu \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_\mu 2\rangle}{\langle 12\rangle} \frac{i(\not{1} + \not{2})}{(p_1 + p_2)^2} \gamma^\nu \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_\nu 3\rangle}{\langle 13\rangle} |4\rangle \\ &+ \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{-i}{(p_1 + p_4)^2} \langle 1|\gamma^\rho |4\rangle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma^\lambda 2\rangle}{\langle 12\rangle} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_\lambda 3\rangle}{\langle 13\rangle} (p_2 - p_3)_\rho \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_\rho 3\rangle}{\langle 13\rangle} \epsilon^\lambda(2)(2p_3 + p_2)_\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_\rho 2\rangle}{\langle 12\rangle} \epsilon^\lambda(3)(2p_2 - p_3)_\lambda \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

A nulidade é clara quando se nota que todos os termos contém, devido às contrações e a identidade de Fierz (4.3.49), um fator  $\langle 11\rangle = 0$ . Analogamente, se tivéssemos tratado o caso com ambas as helicidades negativas, poderíamos ter escolhido o vetor de referência como o momento  $p_1$  e obter fatores  $[44] = 0$  em todos os termos. Para o caso de  $\epsilon_+(2)$  e  $\epsilon_-(3)$ , escolhemos

$$\epsilon_{\mu}^{+}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_{\mu}2 \rangle}{\langle 12 \rangle}, \quad \epsilon_{\mu}(3) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[4\gamma_{\mu}3]}{[43]} \quad (5.4.2)$$

e assim

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}(1234) &= -\left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \langle 1|\gamma^{\mu} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_{\mu}2 \rangle}{\langle 12 \rangle} \frac{i(\not{1} + \not{2})}{(p_1 + p_2)^2} \gamma^{\nu} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[4\gamma_{\nu}3]}{[43]} |1 \rangle \quad (5.4.3) \\ &+ \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{i}{(p_1 + p_4)^2} \langle 1|\gamma^{\rho}|4 \rangle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma^{\lambda}2 \rangle}{[12]} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[4\gamma_{\lambda}3]}{\langle 43 \rangle} (p_2 - p_3)_{\rho} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[4\gamma_{\lambda}3]}{\langle 43 \rangle} \epsilon^{\lambda}(2)(3p_3 + p_2)_{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma^{\lambda}2 \rangle}{[12]} \epsilon^{\lambda}(3)(2p_2 - p_3)_{\lambda} \right\} \\ &= \frac{-ig^2}{2} \frac{1}{(p_1 + p_4)^2} \langle 1|\gamma^{\rho}|4 \rangle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma^{\lambda}2 \rangle}{[12]} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[4\gamma_{\lambda}3]}{\langle 43 \rangle} (p_2 - p_3)_{\rho} \right\} \\ &= \frac{-ig^2}{2} \frac{1}{\langle 14 \rangle [41]} \langle 1|(\not{2} - \not{3})|4 \rangle \frac{\langle 13 \rangle [42]}{\langle 12 \rangle [43]} \\ &= \frac{-ig^2}{2\langle 23 \rangle [32]} \langle 1|(\not{1} + \not{4} - \not{3} - \not{3})|4 \rangle \frac{\langle 13 \rangle [42]}{\langle 12 \rangle [43]} \\ &= ig^2 \frac{\langle 13 \rangle [34]}{\langle 23 \rangle [32]} \frac{\langle 13 \rangle [42]}{\langle 12 \rangle [43]} = -ig^2 \frac{\langle 13 \rangle^2 [42]}{\langle 23 \rangle [32] \langle 12 \rangle} \\ &= -ig^2 \frac{\langle 13 \rangle^3 [42] \langle 43 \rangle}{\langle 23 \rangle \langle 13 \rangle [32] \langle 12 \rangle \langle 43 \rangle} = ig^2 \frac{\langle 13 \rangle^3 [42] \langle 43 \rangle}{\langle 23 \rangle \langle 14 \rangle [42] \langle 12 \rangle \langle 43 \rangle} \\ &= ig^2 \frac{\langle 13 \rangle^3 \langle 43 \rangle}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \end{aligned}$$

No primeiro passo usamos (4.3.49) para contrair os vetores de polarização, e cancelamos os termos que continham  $\langle 11 \rangle$ . No segundo usamos a identidade de Fierz novamente, além de escrever  $(p_1 + p_4)^2$  na forma de twistors. No terceiro usamos a conservação total do momento linear para escrever  $\not{2} = \not{1} + \not{4} - \not{3}$  e  $\langle 14 \rangle [41] = -\langle 23 \rangle [32]$ . No quinto multiplicamos o numerador e o denominador por  $\langle 13 \rangle$  e  $\langle 43 \rangle$ , com o intuito de obter um objeto quiral e de um formato conveniente. O cálculo da amplitude com  $\epsilon_{-}(2)$  e  $\epsilon_{+}(3)$  é similar e o resultado análogo.

É importante notar que a amplitude é nula se os gluons tiverem a mesma helicidade. Ainda, esse procedimento pode ser estendido para qualquer número de gluons, e o resultado será o mesmo, já que a nulidade da amplitude decorre diretamente da escolha do vetor de referência dos vetores de polarização. A segunda amplitude calculada também pode ser estendida: no espalhamento de um quark e um antiquark, com qualquer número de gluons, *a primeira amplitude não nula é aquela onde um gluon tem helicidade diferente dos demais. Esta é chamada de amplitude de máxima violação de helicidade para o espalhamento quark-antiquark.* A expressão matemática destas amplitudes, chamadas na literatura amplitudes MHV (*Maximal Helicity Violation*), é dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}(q_-(1), g_+(2), \dots, g_-(j), \dots, g_+(n-1), \bar{q}_+(n)) \\ = ig^{n-2} \frac{\langle 1j \rangle^3 \langle nj \rangle}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle (n-1)n \rangle \langle n1 \rangle}, \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

quando todas as helicidades dos gluons são positivas à exceção de uma, e

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}(q_-(1), g_-(2), \dots, g_+(j), \dots, g_-(n-1), \bar{q}_+(n)) \\ = (-1)^{n-1} ig^{n-2} \frac{[1j][nj]^3}{[12][23] \dots [(n-1)n][n1]}, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

onde  $q(i)$  representa um quark e  $g(i)$  um gluon; quando todas elas são negativas, à exceção de uma.

Queremos agora analisar o espalhamento entre gluons exclusivamente. Para isso analisemos o processo de espalhamento  $gg \rightarrow gg$ ,

cuja amplitude de cor ordenada é dada por

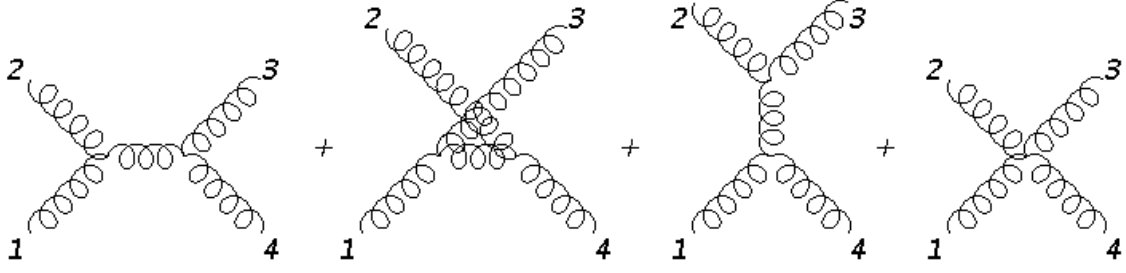


Figura 5.6:  $gg \rightarrow gg$

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T}(1234) = & \left( \frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{-i}{(p_1 + p_4)^2} \left( \epsilon^\rho(4)\epsilon_\rho(1)(p_4 - p_1)^\lambda \right. \right. & (5.4.6) \\
& + \epsilon^\lambda(1)(2p_1 + p_4)^\rho \epsilon_\rho(4) + \epsilon^\lambda(4)(-2p_4 - p_1)^\rho \epsilon_\rho(1) \Big) \\
& \left( \epsilon^\rho(2)\epsilon_\rho(3)(p_2 - p_3)_\lambda + \epsilon_\lambda(3)(2p_3 + p_2)^\rho \epsilon_\rho(2) + \epsilon_\lambda(2)(-2p_2 - p_3)^\rho \epsilon_\rho(3) \right) \\
& + \frac{-i}{(p_1 + p_2)^2} \left( \epsilon^\rho(1)\epsilon_\rho(2)(p_1 - p_2)^\lambda + \epsilon^\lambda(2)(2p_2 + p_1)^\rho \epsilon_\rho(1) + \epsilon^\lambda(1)(-2p_1 - p_2)^\rho \epsilon_\rho(2) \right) \\
& \left( \epsilon^\rho(3)\epsilon_\rho(4)(p_3 - p_4)_\lambda + \epsilon_\lambda(4)(2p_4 + p_3)^\rho \epsilon_\rho(3) + \epsilon_\lambda(3)(-2p_3 - p_4)^\rho \epsilon_\rho(4) \right) \\
& \left. + (-i) \left( 2\epsilon^\rho(1)\epsilon_\rho(3)\epsilon^\sigma(2)\epsilon_\sigma(4) - \epsilon^\rho(1)\epsilon_\rho(2)\epsilon^\sigma(3)\epsilon_\sigma(4) - \epsilon^\rho(1)\epsilon_\rho(4)\epsilon^\sigma(2)\epsilon_\sigma(3) \right) \right).
\end{aligned}$$

Nota-se imediatamente que cada um dos termos da amplitude tem pelo menos dois vetores de polarização contrados. Se todos os gluons tiverem a mesma helicidade, basta então escolher todos os vetores de referência iguais para que a amplitude toda seja nula. Tomando como exemplo o caso onde todas as helicidades são positivas, temos

$$\epsilon_\mu^+(j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle k\gamma\mu j \rangle}{\langle kj \rangle}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad (5.4.7)$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^{+\mu}(i)\epsilon_\mu^+(j) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle k\gamma^\mu i \rangle}{\langle ki \rangle} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle k\gamma\mu j \rangle}{\langle kj \rangle} & (5.4.8) \\
&= \frac{\langle kk \rangle [ji]}{\langle ki \rangle \langle kj \rangle} = 0.
\end{aligned}$$

O que mostra que para espalhamento de gluons, a amplitude com todas as helicidades iguais também é nula.

Agora, se uma das helicidades for diferente, temos a possibilidade de uma contração entre os vetores de polarização não ser nula. Para isso, fixamos o valor do vetor de referência como sendo o momento do gluon de helicidade diferente, por exemplo,

$$\epsilon_\mu(j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle l\gamma_\mu j \rangle}{\langle lj \rangle}, \quad \epsilon_\mu(l) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[k\gamma_\mu l]}{[kl]}, \quad (5.4.9)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(l)\epsilon_\mu(j) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[k\gamma_\mu l]}{[kl]} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle l\gamma_\mu j \rangle}{\langle lj \rangle} \\ &= \frac{\langle ll \rangle [kj]}{[kl] \langle lj \rangle} = 0. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

De modo que a amplitude também é nula.

Note que a simetria de calibre que nos permite escolher um vetor de referência qualquer tem um papel chave. No caso com todas as helicidades iguais escolhemos todos os vetores de referência como sendo o mesmo, não importando a escolha. No caso com uma helicidade diferente escolhemos novamente os vetores de referência como sendo o mesmo, para os gluons que constituíam a maioria, e apenas fixamos esse valor como sendo o momento do gluon de helicidade diferente.

Uma consequência imediata desse raciocínio é que já esgotamos nossa simetria, não havendo a possibilidade de tornar nulas as amplitudes onde dois gluons tem helicidade diferente dos demais. Calculando, a critério de ilustração, a amplitude  $i\mathcal{T}(1_-2_-3_+4_+)$ , escolhendo os vetores de polarização como

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^-(1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[4\gamma_\mu 1]}{[41]}, & \epsilon_\mu^-(2) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[4\gamma_\mu 2]}{[42]}, \\ \epsilon_\mu^+(3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_\mu 3 \rangle}{\langle 13 \rangle}, & \epsilon_\mu^+(4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_\mu 4 \rangle}{\langle 14 \rangle}. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

notamos que as contrações  $\epsilon^{-\mu}(1)\epsilon_{\mu}^{+}(4)$ ,  $\epsilon^{-\mu}(1)\epsilon_{\mu}^{+}(3)$  e  $\epsilon^{-\mu}(2)\epsilon_{\mu}^{+}(4)$  são nulas, restando apenas

$$\begin{aligned}\epsilon^{-\mu}(2)\epsilon_{\mu}^{+}(3) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[4\gamma_{\mu}2]}{[42]} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 1\gamma_{\mu}3 \rangle}{\langle 13 \rangle} \\ &= -\frac{[43]\langle 12 \rangle}{[42]\langle 13 \rangle}.\end{aligned}\tag{5.4.12}$$

Assim, substituindo em (5.4.6),

$$\begin{aligned}i\mathcal{T}(1-2-3+4+) &= \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \left( \frac{-i}{(p_1+p_4)^2} \left( \epsilon^{\lambda}(1)(2p_1)^{\rho}\epsilon_{\rho}(4) + \epsilon^{\lambda}(4)(-2p_4)^{\rho}\epsilon_{\rho}(1) \right) \right. \\ &\quad \left( \epsilon^{\rho}(2)\epsilon_{\rho}(3)(p_2-p_3)_{\lambda} + \epsilon_{\lambda}(3)(2p_3)^{\rho}\epsilon_{\rho}(2) + \epsilon_{\lambda}(2)(-2p_2)^{\rho}\epsilon_{\rho}(3) \right) \\ &\quad + \frac{-i}{(p_1+p_2)^2} \left( \epsilon^{\lambda}(2)(2p_2)^{\rho}\epsilon_{\rho}(1) + \epsilon^{\lambda}(1)(-2p_1)^{\rho}\epsilon_{\rho}(2) \right) \\ &\quad \left. \left( \epsilon_{\lambda}(4)(2p_4)^{\rho}\epsilon_{\rho}(3) + \epsilon_{\lambda}(3)(-2p_3)^{\rho}\epsilon_{\rho}(4) \right) \right).\end{aligned}\tag{5.4.13}$$

Fazendo as contrações,

$$\begin{aligned}i\mathcal{T}(1-2-3+4+) &= \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \left( \frac{-i}{(p_1+p_4)^2} \left( \epsilon^{\lambda}(1)(p_2-p_3)_{\lambda}\epsilon^{\rho}(2)\epsilon_{\rho}(3)(2p_1)^{\sigma}\epsilon_{\sigma}(4) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \epsilon^{\lambda}(4)(p_2-p_3)_{\lambda}\epsilon^{\rho}(2)\epsilon_{\rho}(3)(-2p_4)^{\sigma}\epsilon_{\sigma}(1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{-i}{(p_1+p_2)^2} \left( \epsilon^{\lambda}(2)(2p_2)^{\rho}\epsilon_{\rho}(1)\epsilon_{\lambda}(3)(-2p_3)^{\sigma}\epsilon_{\sigma}(4) \right) \right),\end{aligned}\tag{5.4.14}$$

lembrando, também, que  $p_4^{\sigma}\epsilon_{\sigma}(1) = p_1^{\sigma}\epsilon_{\sigma}(4) = 0$ , devido à nossa escolha dos vetores de referência. Assim,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T}(1_-2_-3_+4_+) &= \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{4i}{(p_1+p_2)^2} \epsilon^\lambda(2)p_2^\rho \epsilon_\rho(1)\epsilon_\lambda(3)p_3^\sigma \epsilon_\sigma(4)\right) \\
&= \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{4i}{(p_3+p_4)^2} \frac{[43]\langle 12\rangle}{[42]\langle 13\rangle} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[42]\langle 21\rangle}{[41]} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 13\rangle[34]}{\langle 14\rangle}\right) \\
&= -ig^2 \left(\frac{[43]\langle 12\rangle[42]\langle 21\rangle\langle 13\rangle[34]}{\langle 34\rangle[43][42]\langle 13\rangle[41]\langle 14\rangle}\right) \\
&= -ig^2 \frac{\langle 12\rangle^2[34]}{\langle 34\rangle[41]\langle 41\rangle}
\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

Se quisermos tornar a amplitude quiral, basta multiplicar por  $\langle 12\rangle\langle 23\rangle$  e usar a conservação do momento linear e a equação de Dirac,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T}(1_-2_-3_+4_+) &= -ig^2 \frac{\langle 12\rangle^2\langle 12\rangle\langle 23\rangle[34]}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle[41]\langle 41\rangle} \\
&= ig^2 \frac{\langle 12\rangle^3\langle 21\rangle[14]}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle[41]\langle 41\rangle} \\
&= ig^2 \frac{\langle 12\rangle^4}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 41\rangle}.
\end{aligned} \tag{5.4.16}$$

O cálculo de  $i\mathcal{T}(1_-2_+3_-4_+)$  é feito de maneira análoga. É importante, contudo, notar que as amplitudes de máxima violação de helicidade para espalhamento de gluons tem a forma

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T}(g_+(1), g_+(2), \dots, g_-(j), \dots, g_-(k), \dots, g_+(n-1), g_+(n)) \\
= ig^{n-2} \frac{\langle jk\rangle^4}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle \dots \langle (n-1)n\rangle\langle n1\rangle},
\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

quando todos os gluons tem helicidade positivas, com a exceção de dois; e



$$i\mathcal{T}(g_-(1), g_-(2), \dots, g_+(j), \dots, g_+(k), \dots, g_-(n-1), g_-(n)) = \quad (5.4.18)$$

$$(-1)^n i g^{n-2} \frac{[jk]^4}{[12][23] \dots [(n-1)n][n1]},$$

quando a maioria dos gluons tem helicidade negativa.

Essa expressão foi encontrada primeiramente por Parke e Taylor [14], sendo então conhecida como a fórmula de Parke-Taylor. A demonstração formal foi feita por Berends e Giele [12]. Pode-se encontrar também uma demonstração formal em [20]. Em nenhuma dessas demonstrações foi utilizada a notação de twistors como feito aqui. A comparação entre ambas revela a simplicidade e o poder computacional da notação de twistors. Na próxima seção usaremos o algoritmo BCFW para chegar à expressão de Parke e Taylor, mas uma demonstração formal se vale de supersimetria.

## 5.5 O algoritmo BCFW

A idéia desta seção é desenvolver um método que nos permita calcular amplitudes de espalhamento que não são amplitudes MHV. Isso implica necessariamente em processos com um número maior de pernas, já que espalhamentos com cinco pernas externas ou menos necessariamente podem ser tratados com o que foi desenvolvido na seção anterior.

A proposta então é construir espalhamentos com várias pernas a partir de um bloco fundamental, os espalhamentos de três pernas. Primeiro, calculemos as amplitudes associadas à esses blocos, e depois prosseguiremos para fazer a construção.

Antes, é importante notar que a conservação do momento linear para os diagramas de três pontos exige

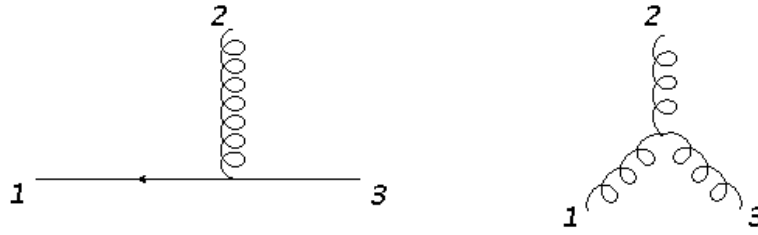


Figura 5.7: Diagramas de três pontos.

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0, \quad (5.5.1)$$

e dado que todos os momentos são tipo luz, temos

$$p_1^2 = 0 = (p_2 + p_3)^2 = 2p_2p_3, \quad (5.5.2)$$

e permutações cíclicas dos índices. Como não temos produtos escalares entre os momentos disponíveis, a priori não podemos construir amplitudes, já que essas dependem de invariantes, e não temos nenhum. Uma grande vantagem da notação dos twistors aparece quando reescrevemos a condição (5.5.2) como

$$2p_2p_3 = \langle 23 \rangle [32] = 0. \quad (5.5.3)$$

Se trabalharmos com momentos complexos, podemos tomar  $[32] = 0$ , por exemplo, e trabalhar com  $\langle 23 \rangle$ .

Assim, a amplitude associada ao vértice entre quarks e gluon é dada por

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T}(g_-(1)g_-(2)\bar{q}_+(3)) &= \frac{ig}{\sqrt{2}}\bar{u}_-(1)\gamma^\mu u_-(3)\epsilon_\mu^-(2) & (5.5.4) \\
&= \frac{ig}{\sqrt{2}}\langle 1\gamma^\mu 3 \rangle \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[s\gamma_\mu 2]}{[s2]} \right) \\
&= -ig \frac{[s3]\langle 12 \rangle}{[s2]} = -ig \frac{[s3]\langle 12 \rangle \langle 21 \rangle}{[s2]\langle 21 \rangle} \\
&= -ig \frac{[s3]\langle 12 \rangle \langle 21 \rangle}{[s3]\langle 31 \rangle} = ig \frac{\langle 12 \rangle^2}{\langle 31 \rangle} \\
&= ig \frac{\langle 12 \rangle^2 \langle 23 \rangle}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle},
\end{aligned}$$

que é a fórmula de Parke-Taylor, para amplitudes MHV, só que com três constituintes apenas. Note que nenhuma escolha do vetor de referência foi necessária.

A amplitude associada ao espalhamento  $ggg$  é dada por

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T}(g_-(1)g_-(2)g_+(3)) &= \frac{ig}{\sqrt{2}} \left( \epsilon^\lambda(1)\epsilon_\lambda(2)(p_1 - p_2)^\rho \epsilon_\rho(3) + \epsilon^\lambda(2)\epsilon_\lambda(3)(p_2 - p_3)^\rho \epsilon_\rho(1) \right. \\
& \quad \left. + \epsilon^\lambda(3)\epsilon_\lambda(1)(p_3 - p_1)^\rho \epsilon_\rho(2) \right). & (5.5.5)
\end{aligned}$$

Os vetores de polarização são dados por

$$\begin{aligned}
\epsilon_\mu^-(1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[s\gamma_\mu 1]}{[s1]}, & (5.5.6) \\
\epsilon_\mu^-(2) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[s\gamma_\mu 2]}{[s2]}, \\
\epsilon_\mu^+(3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle r\gamma_\mu 3 \rangle}{\langle s3 \rangle}.
\end{aligned}$$

Escolhemos o vetor de referência  $s$  para  $\epsilon_\mu(1)$  e  $\epsilon_\mu(2)$  para que  $\epsilon^\mu(1)\epsilon_\mu(2) = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T}(g_-(1)g_-(2)g_+(3)) &= \frac{ig}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[s\gamma^\lambda 2]}{[s2]} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle r\gamma_\lambda 3 \rangle}{\langle s3 \rangle} (p_2 - p_3)^\rho \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[s\gamma_\rho 1]}{[s1]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle r\gamma^\lambda 3 \rangle}{\langle s3 \rangle} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[s\gamma_\lambda 1]}{[s1]} (p_3 - p_1)^\rho \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[s\gamma_\rho 2]}{[s2]} \right) \\
&= \frac{ig}{2} \frac{[s3]\langle r2 \rangle [s(\not{2} - \not{3})1] + [s3]\langle r1 \rangle [s(\not{3} - \not{1})2]}{[s1][s2]\langle r3 \rangle} \\
&= \frac{ig}{2} \frac{[s3]\langle r2 \rangle [s(\not{1} - \not{3} - \not{3})1] + [s3]\langle r1 \rangle [s(\not{3} - \not{2} + \not{3})2]}{[s1][s2]\langle r3 \rangle} \\
&= ig \frac{[s3]^2 \langle 31 \rangle \langle 2r \rangle - [s3]^2 \langle 32 \rangle \langle 1r \rangle}{[s1][s2]\langle r3 \rangle} = ig \frac{[s3]^2 \langle r3 \rangle \langle 12 \rangle}{[s1][s2]\langle r3 \rangle} \\
&= ig \frac{[s3]^2 \langle 12 \rangle}{[s1][s2]}.
\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

Para obtermos a expressão de Parke e Taylor, basta multiplicar numerador e denominador por  $\langle 12 \rangle^3$ ,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T}(g_-(1)g_-(2)g_+(3)) &= -ig \frac{[s3]^2 \langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle [s1] \langle 12 \rangle [s2] \langle 21 \rangle} = -ig \frac{[s3]^2 \langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle [s3] \langle 32 \rangle [s3] \langle 31 \rangle} \\
&= ig \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}.
\end{aligned} \tag{5.5.8}$$

Se trocarmos os sinais das helicidades, encontraremos expressões análogas, com colchetes no lugar dos parênteses angulares.

Uma vez que temos as amplitudes de três pontos calculadas, queremos costurá-las para obter amplitudes mais complexas. A primeira idéia que surgiu foi usar amplitudes de três pontos *off shell*, mas tal procedimento não funcionou. A solução proposta por Britto, Cachazo, Feng e Witten [20] é a seguinte: tendo em mãos uma amplitude de cor ordenada  $i\mathcal{T}(1\dots n)$ , escolhemos duas pernas  $i$  e  $j$ , com helicidades  $-$  e  $+$ , respectivamente, e uma variável complexa  $z$ . Fazemos uma continuação analítica em  $i$  e  $j$ , de modo que

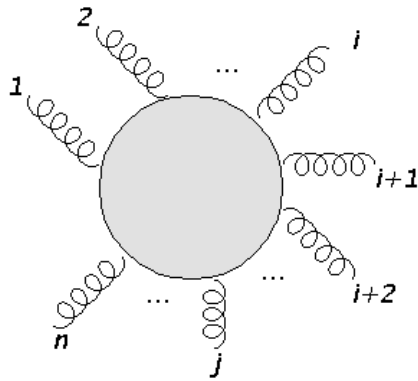


Figura 5.8: Espalhamento de  $n$  gluons.

$$\begin{aligned}
 |\hat{i}\rangle &= |i\rangle, & |\hat{i}\rangle &= |i\rangle + z|j\rangle, & (5.5.9) \\
 |\hat{j}\rangle &= |j\rangle - z|i\rangle, & |\hat{j}\rangle &= |j\rangle.
 \end{aligned}$$

Note que trasladamos no plano complexo o colchete de  $i$ , e o parêntese angular de  $j$ ; assim, os momentos transformados são

$$\begin{aligned}
 p_i &:= \hat{i} = |i\rangle[i] + z|i\rangle[j], & (5.5.10) \\
 p_j &:= \hat{j} = |j\rangle[j] - z|i\rangle[j].
 \end{aligned}$$

O interessante do procedimento é que apesar de trabalharmos com momentos com valores complexos, e por isso não físicos, temos

$$\begin{aligned}
 \hat{i} + \hat{j} &= i + j, & (5.5.11) \\
 \hat{i}^2 &\propto \langle ii \rangle = 0, \\
 \hat{j}^2 &\propto \langle jj \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Isto é, a conservação do momento linear é satisfeita, além dos momentos transformados continuarem *on shell*. Note que após a a continuação analítica nossa amplitude é função da variável complexa  $z$ ,  $i\mathcal{T}(z)$ . Pelo teorema dos resíduos, ela deve satisfazer

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} i\mathcal{T}(z) = \sum_{\alpha} \lim_{z \rightarrow z_{\alpha}} (z - z_{\alpha})^{n_{\alpha}} i\mathcal{T}(z_{\alpha}) \quad (5.5.12)$$

onde os  $z_{\alpha}$  são os polos da amplitude envolvidos pelo caminho de integração, e  $n_{\alpha}$  a ordem de cada polo. Uma escolha conveniente é  $\gamma(t) = re^{i\theta}$ , pois podemos fazer  $r \rightarrow \infty$  e cobrir todo o plano. Dentre os polos, temos de início  $z = 0$ . O resíduo devido a esse polo é  $i\mathcal{T}(z = 0)$ , a amplitude que queremos calcular.

Os outros polos, se existirem, devem vir de um propagador; afinal, só as regras de Feynman dos propagadores tem variáveis no denominador. Se há um propagador, então temos uma amplitude fatorada em duas menores, como na Figura 5.9.

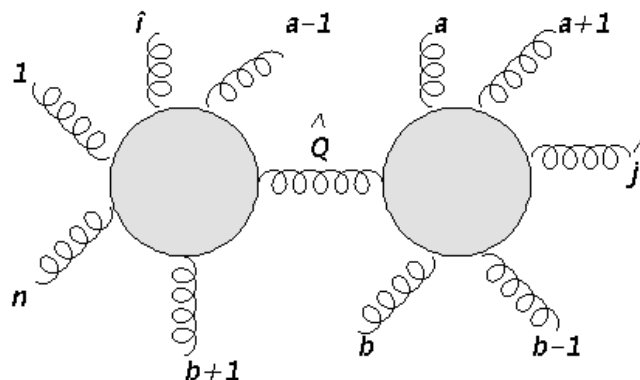


Figura 5.9: A presença do propagador fatora a amplitude.

O denominador do propagador de glúon de momento  $\hat{Q}$  é,

$$\hat{Q}^2 = \left( \sum_{m=a}^b p_m \right)^2 := s_{a\dots b}(z). \quad (5.5.13)$$

Note que o momento da perna interna  $\hat{Q}$  foi representado com chapéu pois ele contém a translação no plano complexo, desde que algum dos momentos presentes na soma a contenha. Se os momentos  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  estiverem na mesma amplitude fatorada, isto é, ambos à esquerda ou à direita do propagador, então os termos com  $z$  se cancelam e  $\hat{Q}^2$  é independente de  $z$ . Se esse for o caso, não há polo.

Se, contudo,  $\hat{i}$  estiver na amplitude fatorada da esquerda e  $\hat{j}$  estiver na da direita, como na Figura 5.9, temos

$$\begin{aligned} s_{a\dots b}(z) &= \left( \sum_{m=a}^b p_m - z|i\rangle\langle j| \right)^2 \\ &= s_{a\dots b}(0) - z\langle i | \left( \sum_{m=a}^b p_m \right) | j \rangle + z^2 \langle ii \rangle \langle jj \rangle. \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

O terceiro termo é obviamente nulo, então, para termos um polo, é necessário que

$$\begin{aligned} s_{a\dots b}(z_*) &= 0, \\ z_* &= \frac{s_{a\dots b}(0)}{\langle i | \left( \sum_{m=a}^b p_m \right) | j \rangle}. \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

O resíduo deste polo simples é dado por

$$\begin{aligned} &\lim_{z \rightarrow z_*} (z - z_*) \frac{1}{z} i\mathcal{T}(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{1}{z} i\mathcal{T}((b+1), \dots, \hat{i}, \dots, (a-1), -\hat{Q}) \left( \frac{i(z - \frac{s_{a\dots b}(0)}{\langle i | \left( \sum_{m=a}^b p_m \right)^2 | j \rangle})}{s_{a\dots b}(0) - z\langle i | \left( \sum_{m=a}^b p_m \right)^2 | j \rangle} \right) i\mathcal{T}(\hat{Q}, a, \dots, \hat{j}, \dots, b) \\ &= \frac{1}{z_*} i\mathcal{T}((b+1), \dots, \hat{i}, \dots, (a-1), -\hat{Q}) \left( \frac{i}{-\langle i | \left( \sum_{m=a}^b p_m \right)^2 | j \rangle} \right) i\mathcal{T}(\hat{Q}, a, \dots, \hat{j}, \dots, b) \\ &= -i\mathcal{T}((b+1), \dots, \hat{i}, \dots, (a-1), -\hat{Q}) \left( \frac{i}{s_{a\dots b}(0)} \right) i\mathcal{T}(\hat{Q}, a, \dots, \hat{j}, \dots, b). \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Se tivermos vários polos, teremos várias construções onde o propagador fatora a amplitude original, e a soma dos resíduos é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{a_j} \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^{n_j} i\mathcal{T}(z_j) & \quad (5.5.17) \\ & = i\mathcal{T}(z = 0) - \sum_{a,b} i\mathcal{T}((b+1), \dots, \hat{i}, \dots, (a-1), -\hat{Q}) \left( \frac{i}{s_{a\dots b}} \right) i\mathcal{T}(\hat{Q}, a, \dots, \hat{j}, \dots, b). \end{aligned}$$

O somatório  $\sum_{a,b}$  indica que estamos somando todas as possíveis configurações de duas amplitudes fatoradas por uma propagador. O primeiro resíduo é a amplitude que nos interessa, e os outros resíduos são amplitudes menores, e portanto mais fáceis de calcular, multiplicadas. Lembrando a escolha do caminho de integração  $\gamma(t) = re^{i\theta}$  para depois tomar o limite  $r \rightarrow \infty$ , podemos majorar a integral do lado esquerdo de (5.5.12)

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} i\mathcal{T}(z) \right| & = \left| \int_0^{\pi} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{2\pi i} \frac{1}{re^{i\theta}} i\mathcal{T}(re^{i\theta}) \right| & (5.5.18) \\ & \leq \left| \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{M}{r} \right| = \frac{M}{r}, \end{aligned}$$

onde  $\frac{M}{r}$  é um limite superior para  $|i\mathcal{T}(re^{i\theta})|$  para um  $r$  suficientemente grande. A idéia é que se  $i\mathcal{T}(z)$  satisfizer essa condição, então no limite  $r \rightarrow \infty$  temos que a integral (5.5.12) é nula. Igualando o lado direito de (5.5.17) a zero, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}(1\dots n) & \equiv i\mathcal{T}(z = 0) & (5.5.19) \\ & = \sum_{a,b} i\mathcal{T}((b+1), \dots, \hat{i}, \dots, (a-1), -\hat{Q}) \left( \frac{i}{s_{a\dots b}} \right) i\mathcal{T}(\hat{Q}, a, \dots, \hat{j}, \dots, b). \end{aligned}$$

Essa é a fórmula de recursão BCFW. Esclareçamos o algoritmo. Quando lidamos com



uma amplitude com  $n$  pernas externas, escolhemos uma perna de helicidade negativa e uma de helicidade positiva e fazemos a continuação analítica (5.5.10). Separamos a amplitude em duas, com cada perna em uma das subamplitudes. Calculamos as amplitudes menores, aplicando novamente o procedimento de decomposição ou usando a fórmula de Parke-Taylor, e fazemos o produto destas com o propagador de Feynman usual - não transformado. Depois, repetimos o processo até que todas as configurações de pernas externas sejam contempladas, lembrando que as pernas  $i$  e  $j$  devem sempre estar em subamplitudes diferentes, além do fato que o número mínimo de pernas para um vértice é três. Calculadas todas as configurações, a soma total é a amplitude original.

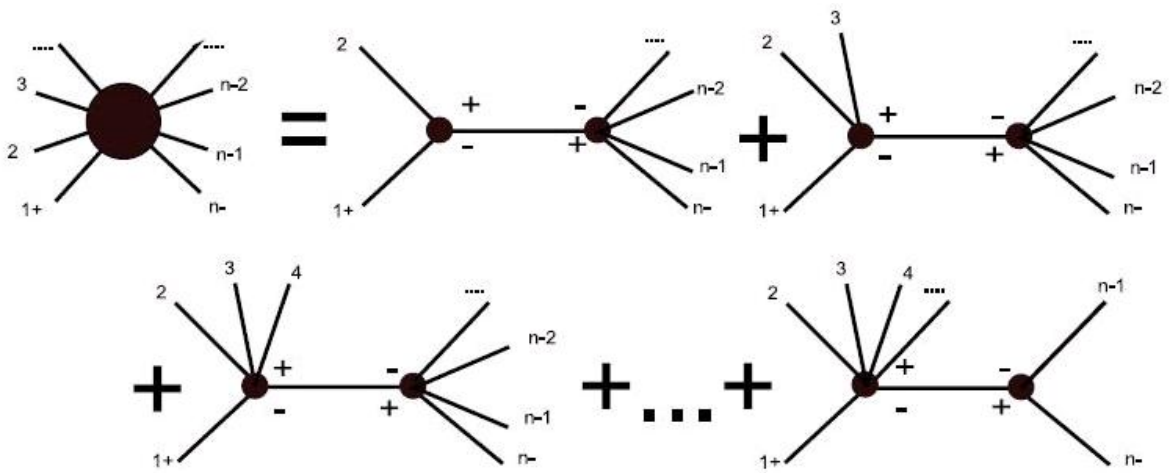


Figura 5.10: Esquema do algoritmo BCFW. Fonte: [21].

Antes de prosseguir, vale lembrar que o propósito do algoritmo é quebrar amplitudes com muitas pernas em amplitudes menores. Caso as amplitudes fatoradas ainda sejam grandes, deve-se fazer a decomposição novamente. Contudo, a fórmula de Parke e Taylor cobre todos os casos dos diagramas com até cinco pernas, o que nos permite reduzir amplitudes até esse ponto apenas.

Alguns pontos ainda precisam ser esclarecidos: primeiro, escrevemos na amplitude fatorada da esquerda o momento da perna interna como  $(-\hat{Q})$ . Uma maneira consistente

de relacionar os twistors de  $(-\hat{Q})$  com  $(\hat{Q})$  é  $|(-\hat{Q})\rangle = i|\hat{Q}\rangle$  e  $|(-\hat{Q})] = i|\hat{Q}]$ . Segundo, assumimos que o propagador em questão era um propagador de gluon. Caso este fosse um propagador fermiônico, teríamos

$$i\frac{|Q]\langle Q|}{Q^2} \quad \text{ou} \quad i\frac{|Q\rangle[Q|}{Q^2}. \quad (5.5.20)$$

nesse caso, teremos na amplitude fatorada da esquerda um twistor  $|Q]$  ao invés de  $|(-Q)]$ . Nesse caso introduzimos um fator  $-i$  para compensar. Terceiro, temos que discutir as condições nas quais a majoração feita em (5.5.18) é verdadeira, e assim chegar ao resultado obtido. Um tratamento detalhado deste problema foi feito por Arkani-Hamed e Kaplan, [23].

A idéia é analisar o limite  $z \rightarrow \infty$ . Nesse caso, a maior parte do momento é a induzida pela continuação analítica. Se chamarmos  $q = |i\rangle[j]$ , ou  $q^\mu = \langle i\gamma^\mu j\rangle$ , temos que o momento dominante é  $zq$ . Assim, o denominador do propagador é escrito como

$$(zq + p)^2 = 2zq^\mu p_\mu + p^\mu p_\mu = \mathcal{O}(z), \quad (5.5.21)$$

onde  $p_\mu$  é a contribuição dos outros momentos, muito menor que  $zq$ . Note que usamos  $q^\mu q_\mu = 0$ . Agora, se o propagador da ordem de  $\mathcal{O}(z^{-1})$ , e os vértices da ordem de  $\mathcal{O}(z)$ , temos que o conjunto vértice-propagador-vértice é da ordem de  $\mathcal{O}(z)$ .

Quanto aos vetores de polarização, escolhemos  $i$  ou  $j$ , de modo a ter dependência em  $z$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\epsilon_+(\hat{i}) &= \frac{z\langle j\gamma^\mu j \rangle + \langle j\gamma^\mu i \rangle}{\langle ji \rangle} + \dots \\
\epsilon_+(\hat{j}) &= -\frac{1}{z} \frac{\langle j\gamma^\mu j \rangle}{\langle ji \rangle} \\
\epsilon_-(\hat{i}) &= -\frac{1}{z} \frac{[i\gamma^\mu i]}{[ij]} \\
\epsilon_-(\hat{j}) &= -\frac{z\langle i\gamma^\mu i \rangle - \langle i\gamma^\mu j \rangle}{[ij]} + \dots
\end{aligned} \tag{5.5.22}$$

Com esses vetores de polarização, se escolhermos os vetores  $i$  e  $j$  com as helicidades  $(i, j) = (-, -)$ , a amplitude é nula, pois  $\epsilon_-(\hat{i}) \cdot \epsilon_-(\hat{j}) = 0$  e  $q \cdot \epsilon_-(\hat{i}) = q \cdot \epsilon_-(\hat{j}) = 0$ . O mesmo ocorre para  $(i, j) = (+, +)$ . Se escolhermos  $(i, j) = (-, +)$ , a amplitude é no máximo da ordem de  $\mathcal{O}(z^{-1})$ , que satisfaz a condição de  $i\mathcal{T}(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ .

A escolha  $(i, j) = (+, -)$  é da ordem de  $\mathcal{O}(z^3)$ , e por isso não nos permite usar o algoritmo BCFW, pela presença de termos extras.

Para fechar a discussão do algoritmo BCFW, vamos usá-lo para mostrar, por indução, a fórmula de Parke e Taylor para um espalhamento de  $N$  gluons. Já mostramos as expressões para  $N = 4$  e  $N = 3$ , então vamos assumir que a expressão vale para  $N - 1$ , e precisamos mostrar para um  $N$ .

A amplitude de espalhamento puramente gluônica é ciclicamente invariante, isto é, podemos fazer permutações cíclicas com os índices sem alterar o resultado. Assim, escolhemos o gluon 1 para ser um dos gluons de helicidade negativa, o outro sendo um gluon  $j$  qualquer. Fazendo então a continuação analítica, temos

$$\begin{aligned}
|\hat{1}\rangle &= |1\rangle + z|2\rangle, \\
|\hat{2}\rangle &= |2\rangle - z|1\rangle.
\end{aligned} \tag{5.5.23}$$

Seguindo o algoritmo proposto, vamos calcular amplitudes com a perna  $\hat{1}$  em um lado, e a  $\hat{2}$  no outro, separados por um propagador. A helicidade do gluon do propagador pode ser positiva ou negativa, como a Figura 5.10 mostra; temos duas com um sinal num extremo, e o outro sinal no outro extremo. Em geral ambas as escolhas de helicidade correspondem a amplitudes nulas. Isso acontece pois pelo menos um dos lados será uma amplitude com  $n < 3$  gluons, e com uma ou nenhuma perna com helicidade negativa; assim, temos a nulidade, devido aos argumentos dados na seção anterior com os vetores de polarização.

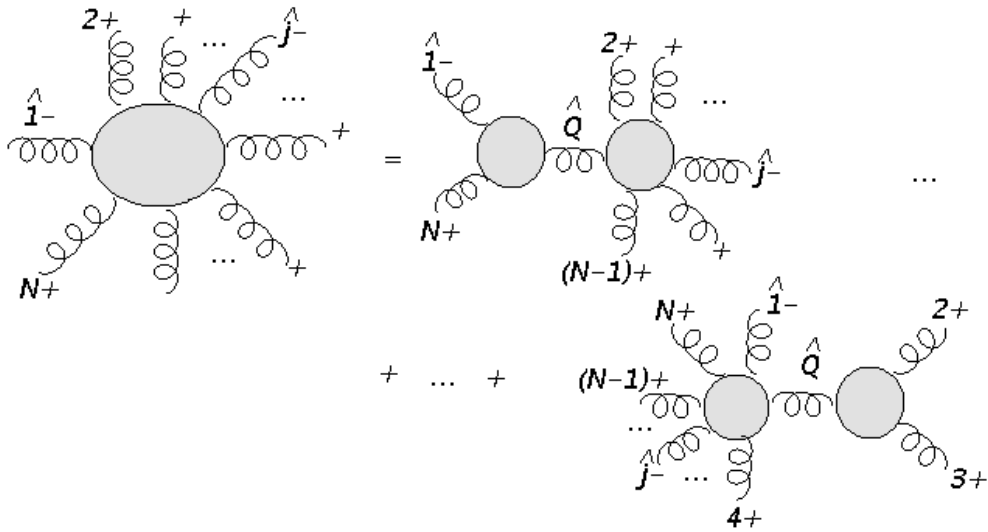


Figura 5.11: Decomposição feita numa amplitude com N gluons.

As amplitudes da decomposição que não necessariamente são nulas são aquelas que contém uma amplitude fatorada com três pernas, representados na Figura 5.11 como o primeiro e o último. O propagador do primeiro diagrama tem

$$\hat{Q}^2 = \langle 1N \rangle [N(1+z_2)], \quad (5.5.24)$$

enquanto o lado direito é da forma

$$-ig \frac{[N\hat{Q}]^4}{[\hat{Q}\hat{1}][\hat{1}N][N\hat{Q}]} = ig[N(1+z2)], \quad (5.5.25)$$

cancelando a dependência em  $z$ . Assim, não há polo nesse diagrama, e a contribuição dele é nula. O último diagrama tem o valor

$$ig^{N-3} \frac{\langle 1j \rangle^4 (-1)}{\langle 1\hat{Q} \rangle \langle \hat{Q}4 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle N1 \rangle} \frac{i}{\langle 23 \rangle [32]} (-ig) \frac{[23]^4}{[\hat{Q}2][23][3\hat{Q}]}, \quad (5.5.26)$$

com

$$\hat{Q} = -|2\rangle[2] - |3\rangle[3] + z|1\rangle[2]. \quad (5.5.27)$$

Assim, os produtos que envolvem  $\hat{Q}$  ficam

$$\langle 1\hat{Q} \rangle [\hat{Q}3] = -\langle 12 \rangle [23], \quad (5.5.28)$$

$$\langle 4\hat{Q} \rangle [\hat{Q}2] = -\langle 43 \rangle [32].$$

Note que temos  $\langle 1\hat{Q} \rangle$  e não  $\langle \hat{1}\hat{Q} \rangle$  pois só os colchetes de 1 foram transformados. Assim, substituindo na expressão (5.5.26)

$$\begin{aligned}
& -ig^{N-2} \frac{\langle 1j \rangle^4 [23]^4}{\langle 1\hat{Q} \rangle \langle \hat{Q}4 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle N1 \rangle \langle 23 \rangle [32] [\hat{Q}2] [23] [3\hat{Q}]} \quad (5.5.29) \\
= & -ig^{N-2} \frac{\langle 1j \rangle^4 [23]^4}{\langle 12 \rangle \langle 43 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle N1 \rangle \langle 23 \rangle [32] [32] [23] [23]} \\
& = ig^{N-2} \frac{\langle 1j \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle N1 \rangle}.
\end{aligned}$$

Temos a amplitude MHV de  $N$  gluons. O procedimento para a amplitude com  $N - 2$  gluons de helicidade negativa, e dois de helicidade positiva é o mesmo.

## Capítulo 6

# Conclusões e Perspectivas

Nesse trabalho se construiu a base teórica necessária para estudantes e iniciantes no campo das amplitudes de espalhamento de bósons de calibre não abeliano. Esses métodos são alvo de grande interesse por parte da comunidade científica, gerando muita pesquisa e questões em aberto.

No Capítulo 2 definiu-se a noção de campo de calibre, usando como ponto de partida o campo escalar complexo, em seguida descrevendo o campo de Yang-Mills simétrico sob o  $SU(2)$ . Discutiram-se os aspectos cinemáticos do campo de Yang-Mills, e depois construiu-se uma visão geométrica; visão essa que não apenas facilita o entendimento da simetria de calibre, como também possibilita a generalização da discussão feita para qualquer grupo de Lie. O objetivo principal era mais à frente tratar o  $SU(3)$ , focando em QCD.

No Capítulo 3 classificaram-se as representações do grupo de Lorentz, partindo das noções mais intuitivas, com os escalares e os vetores, até que a necessidade de trabalhar com objetos fundamentais surgisse naturalmente. Daí foram definidas as representações espinoriais do grupo de Lorentz, representações essas irredutíveis, que além de nos permitir reconstruir os vetores e os escalares, também exibem uma série de propriedades interessantes. Os espinores são dotados de quiralidade, com todo o tratamento depen-

dente da separação entre as componentes esquerda e direita.

O Capítulo 4 começa com a construção de uma equação de movimento para os campos espinoriais, e a obtenção da Lagrangiana desta. A estrutura dos cálculos envolvendo a equação de Dirac e os campos espinoriais é essencialmente diferente da usada para os campos escalares, e atenção foi dada à propriedades das matrizes gama e às suas identidades. Com o intuito de estudar as soluções da equação de Dirac analisaram-se as soluções tipo onda plana; as relações de ortogonalidade entre tais soluções foram descritas com o intuito de aplicá-las ao caso das partículas sem massa. Toda partícula no cone de luz pode ter seu quadrivetor momento decomposto em dois objetos mais fundamentais, dotados de quiralidade, chamados twistors. Aqui toda a discussão do Capítulo 3 se mostrou útil, e derivou-se uma série de identidades satisfeitas pelos twistors, para que o leitor possa ter familiaridade com esses objetos.

No Capítulo 5 utilizou-se toda a base construída até então para, a partir dos diagramas de Feynman de alguns processos de espalhamento, encontrar amplitudes para esses processos de maneira eficiente com o auxílio da notação dos twistors. Alguns processos de QED foram calculados como teste do formalismo, para depois introduzir-se a ordenação de cor, permitindo simplificar o trabalho tratando apenas a parte cinética das amplitudes de QCD. As amplitudes de máxima violação de helicidade foram apresentadas, dando uma forma simples para os processos onde a maior parte dos constituintes tem a mesma helicidade, e anulando aqueles processos onde todas as partículas tem a mesma helicidade. O algoritmo BCFW veio por fim para podermos reduzir amplitudes que não estão na forma das amplitudes MHV a produtos de amplitudes MHV, permitindo-nos calcular processos mais complexos e assim estender o formalismo. Utilizamos o algoritmo BCFW para deduzir a fórmula de Parke-Taylor, das amplitudes MHV.

As perspectivas futuras desse trabalho são descrever a estrutura supersimétrica do que foi discutido, isto é, analisar as amplitudes de espalhamento de  $N=4$  SYM. Há vários problemas em aberto, como a extensão do formalismo para  $N=8$  SuGra, para diagramas



não planares, para processos off-shell, etc. Há ainda a geometria do espaço dos twistors, que permite um trabalho ainda mais eficiente com as amplitudes MHV. A partir daí pode-se aplicar o que foi aqui estudado para teoria de cordas, integrabilidade, teoria quântica de campos e áreas afins.

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Srednicki *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [2] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Vol. I (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [3] C. Itzykson, J. Zuber *Quantum Field Theory* (McGraw - Hill, New York, 1980).
- [4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995).
- [5] L. H. Ryder *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1996).
- [6] P. G. O. Freund *Introduction to Supersymmetry* (Cambridge University Press, 1988).
- [7] R. M. Wald *General Relativity* (University Of Chicago Press, 1984).
- [8] M. G. Soares *Cálculo em uma Variável Complexa* (Coleção Matemática Univer-sitária, IMPA, 2006).
- [9] M. E. Peskin *Simplifying Multi-Jet QCD Computation* (arXiv:1101.2414v1 [hep-th] 12 Jan 2011).
- [10] J. Etle *MHV Lagrangians for Yang-Mills and QCD* (arXiv:0808.1973v1 [hep-th] 14 Aug 2008).

- [11] M. Wolf, *A First Course on Twistors, Integrability and Gluon Scattering Amplitudes* (arXiv:1001.3871v1 [hep-th] 21 Jan 2010).
- [12] F. A. Berends, W. T. Giele *Recursive Calculations for Processes with N Gluons* (Nucl. Phys. B 306, 759; 1988).
- [13] F. Cachazo, P. Svrček *Lectures on Twistor Strings and Perturbative Yang-Mills Theory* (arXiv:hep-th/0504194v1 25 Apr 2005).
- [14] S. J. Parke, T. R. Taylor *An Amplitude for n Gluon Scattering* (Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2459).
- [15] R. Kleiss, H. Kuijf *Multi-gluon cross-sections and five jet production at hadron colliders* (Nucl. Phys. B312 (1989) 616).
- [16] E. Witten *Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space* (Commun. Math. Phys. 252 (2004) 189-258, arXiv:hep-th/0312171).
- [17] F. Cachazo, P. Svrček, E. Witten *MHV Vertices And Tree Amplitudes In Gauge Theory* (JHEP, 0409, 006, (2004) arXiv:hep-th/0403047).
- [18] M. L. Mangano, S. J. Parke *Multiparton amplitudes in gauge theories* (Phys. Rept. 200 (1991) 301-367, arXiv:hep-th/0509223).
- [19] J.-B. Wu, C.-J. Zhu *MHV vertices and fermionic scattering amplitudes in gauge theory with quarks and gluinos* (JHEP 09 (2004) 063, arXiv:hep-th/0406146).
- [20] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng *New recursion relations for tree amplitudes of gluons* (Nucl. Phys. B715 (2005) 499-522, arXiv:hep-th/0412308).
- [21] A. Lazopoulos *QCD and QMC* (PhD thesis).
- [22] D. A. Kosower *N=4 Supersymmetric Gauge Theory, Twistor Space, and Dualities* (Saclay Lectures, I,II, 2004).

- [23] N. Arkani-Hamed, J. Kaplan *On Tree Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*  
(JHEP 0804, 076 (2008), arXiv:hep-th/0801.2385).