

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Congruências de Retas e Superfícies Mínimas de Laguerre

por

Rafaela Fernandes do Prado

Orientador: Pedro Roitman

Brasília
2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Congruências de Retas e Superfícies Mínimas de Laguerre

por

Rafaela Fernandes do Prado*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2011.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Roitman - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Carlos Maber Carrión Riveros - MAT/UnB - Membro

Prof^a. Dr^a. Maria Fernanda Elbert - MAT/UFRJ - Membro

*A autora foi bolsista da CNPQ durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais

Agradecimentos

À minha família, em especial aos meus pais, Maria Goretti Fernandes de Alencar e Elias Araújo do Prado, por todo o apoio e carinho que sempre me deram.

Ao Matheus, por ter me acompanhado em todas as noites mal dormidas e por me ter me dado forças em todos os momentos de dificuldade.

Ao professor Pedro Roitman, por ter me dado a oportunidade de tê-lo como orientador e por ter compartilhado comigo tanto conhecimento. Agradeço pela disponibilidade, pela paciência, pela dedicação e pelo aprendizado.

Aos professores e membros da banca examinadora, Carlos Maber Carrión Riveros e Maria Fernanda Elbert, por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora e pelas sugestões.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB.

À professora Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues, que por meio de suas aulas me mostrou a beleza da Geometria Diferencial e despertou em mim um amor tão grande por essa área.

Aos meus amigos e às minhas amigas, por acreditarem em mim. Aos amigos que fiz na UnB, por toda a ajuda que me deram durante seminários, exames de qualificação e provas. Agradeço por todas as risadas compartilhadas, bem como as tristezas e agradeço a todos que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para esta conquista na minha vida.

Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, mostraremos uma generalização para um Teorema de Ribaucour que diz que a envoltória dos planos médios de uma congruência de retas isotrópica é uma superfície mínima. Para isso, usaremos coordenadas locais introduzidas em um trabalho de Guilfoyle e Klingenberg, obtendo condições para que tais coordenadas caracterizem congruências de retas isotrópicas e generalizando essas condições. Obteremos também invariantes naturais induzidos pela métrica de Kähler no espaço das retas orientadas em \mathbb{R}^3 .

Palavras-chave: congruências de retas, Teorema de Ribaucour, superfícies Laguerre Mínimas

Abstract

In this work we'll generalize a Theorem of Ribaucour, wich says that the middle envelope of an isotropic congruence is a minimal surface. In order to do that, we'll use local coordinates first introduced by Guilfoyle and Klingenber, obtaining conditions so that such coordinates characterize isotropic congruences and then generalizing these conditions. We'll also obtain natural invariants induced by a Kähler metric on the space of oriented lines in \mathbb{R}^3 .

Keywords: line congruences, Ribaucour's Theorem, Laguerre minimal surfaces

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Função Suporte	4
1.2 Pontos Limites e Pontos Focais	6
1.3 A equação biharmônica	12
2 O Espaço das Retas Orientadas	13
2.1 Correspondência entre \mathcal{L} e TS^2	13
2.2 Alguns Resultados Sobre Congruências de Retas	15
2.3 Geometria local das congruências	19
3 Métrica de Kähler em \mathcal{L}	24
3.1 Métrica Canônica de Kähler em Fibrados Tangentes	24
3.2 Invariante natural induzido pela métrica \mathbb{G}	29
4 Uma generalização para um Teorema de Ribaucour	33
4.1 Exemplos	40
Referências Bibliográficas	46

Introdução

O estudo de congruência de retas em geometria diferencial começou com os trabalhos de G. Monge [14], motivado por problemas de engenharia, e por E. L. Malus [13], motivado por problemas de óptica. O primeiro tratamento puramente matemático sobre esse assunto foi dado por E. E. Kummer [12].

Ao longo do século XIX, vários geômetras estudaram congruências de retas, relacionando-as com problemas envolvendo superfícies isométricas e superfícies com curvatura constante [6]. Podemos medir a importância desse tópico nesse século pelo espaço reservado a ele em tratados clássicos como os de Darboux [3] e Bianchi [2]. Nos livros recentes que tratam de geometria diferencial, entretanto, é raro sequer ver uma menção às congruências de retas. No entanto, o estudo dessas congruências está intimamente relacionado com tópicos clássicos que ainda são atuais, como as superfícies mínimas.

Em nosso trabalho, abordaremos como tema central as congruências de retas, propondo uma fusão entre o ponto de vista clássico e um formalismo moderno introduzido recentemente por Guilfoyle e Klingenberg [7]. Em uma série de artigos [7, 8, 9, 10], eles identificaram o espaço das retas orientadas em \mathbb{R}^3 , \mathcal{L} , com o fibrado tangente da esfera unitária em \mathbb{R}^3 , TS^2 , e mostraram como introduzir uma métrica \mathbb{G} e estruturas complexa e simplética em TS^2 de forma que TS^2 possa ser visto como uma variedade de Kähler. A identificação é feita de tal forma que as congruências de retas correspondem a superfícies em TS^2 . Em particular, as congruências de retas que não são degeneradas em um certo sentido, são identificadas com seções locais de TS^2 . Observamos que a introdução das estruturas mencionadas acima nos permite falar em seções locais holomorfas, anti-holomorfas e harmônicas (para a estrutura complexa considerada), e seções locais Lagrangianas (para a estrutura simplética considerada).

A nossa estratégia de unir os formalismos clássico e moderno nos levou a considerar um antigo resultado de A. Ribaucour [15]:

Se uma congruência de retas é isotrópica, então a envoltória dos planos médios dessa congruência é uma superfície mínima.

Usando o formalismo de Guilfoyle e Klingenberg, identificamos as congruências isotrópicas com seções locais holomorfas do fibrado tangente da esfera unitária, TS^2 . O resultado de Ribaucour oferece, assim, um método geométrico interessante de gerar superfícies mínimas a partir de seções locais holomorfas de TS^2 .

Dentro desse contexto, uma pergunta natural que surgiu foi o que acontece com o procedimento de Ribaucour quando as seções locais consideradas são harmônicas ao invés de holomorfas. Obtivemos uma resposta satisfatória para essa questão, mostrando o seguinte resultado:

Se uma congruência de retas é dada por uma seção local harmônica, então a envoltória dos planos médios é uma superfície Laguerre mínima.

As superfícies Laguerre mínimas são pontos críticos do chamado funcional de Laguerre

$$\int_S \frac{H^2 - K}{K},$$

em que S é uma superfície em \mathbb{R}^3 e H e K são as curvaturas média e gaussiana de S , respectivamente. Para maiores detalhes, vide [11].

A decomposição canônica das seções harmônicas em partes holomorfa e anti-holomorfa nos levou a indagar se, a exemplo do que acontece com as seções holomorfas, as seções anti-holomorfas estão associadas a algum tipo de superfície. A resposta a esta questão também foi satisfatória e obtivemos o seguinte resultado:

Se uma congruência de retas é dada por uma seção local anti-holomorfa, então a envoltória dos planos médios é uma superfície Laguerre mínima do tipo esférico.

Além disso, a métrica de Kähler \mathbb{G} nos levou a introduzir alguns invariantes associados a \mathbb{G} e à métrica canônica de \mathbb{S}^2 . Como resultado, mostramos ainda como esses invariantes se relacionam de maneira simples com quantidades clássicas, como a distância entre pontos limites e a distância entre pontos focais.

Os três resultados acima constituem a nossa contribuição original dentro do estudo de congruência de retas. As contribuições de Guilfoyle de Klingenberg foram a motivação inicial para este trabalho. Abaixo, segue a sequência cronológica dessa contribuição.

Em 2002, B. Guilfoyle e W. Klingenberg [7] descreveram coordenadas locais para a correspondência entre \mathcal{L} e $T\mathbb{S}^2$. Ainda em 2002 [8], mostraram sob quais condições uma congruência de retas é integrável no sentido de Fröbenius, ou seja, sob quais condições existe uma superfície em \mathbb{R}^3 ortogonal a uma congruência de retas. Em 2004 [9], uma métrica de Kähler foi induzida em \mathcal{L} e então foi possível mostrar que uma congruência de retas é Lagrangiana com respeito à estrutura simplética se, e somente se, a congruência é integrável. Em 2006 [10] eles caracterizaram uma congruência de retas Lagrangiana ortogonal a uma superfície mínima. Essa caracterização foi a principal motivação para o nosso trabalho, pois era uma equação diferencial parcial para a seção local do fibrado canônico $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{S}^2$. Embora as soluções desta equação sejam dadas em termos holomorfos, a determinação de superfícies mínimas via este

processo é um tanto complicada. Essa dificuldade técnica nos levou a pensar uma maneira mais simples de construir superfícies mínimas e a redescobrir e posteriormente generalizar o antigo teorema de Ribaucour.

Dividimos o nosso trabalho em quatro capítulos, a saber:

- **Capítulo 1: Preliminares.** Nesse capítulo, fixaremos notações e veremos alguns conceitos que serão usados no decorrer dessa dissertação. Trataremos do conceito de *função suporte*, *pontos limites*, *pontos focais* e *equações biharmônicas*, estabelecendo alguns resultados que nos serão úteis.
- **Capítulo 2: O Espaço das Retas Orientadas.** Definiremos o nosso ambiente de trabalho, a saber, o espaço das retas orientadas em \mathbb{R}^3 , \mathcal{L} e estabeleceremos uma correspondência entre esse espaço e o fibrado tangente da esfera unitária em \mathbb{R}^3 , o TS^2 . Definiremos, assim, um sistema de coordenadas locais no espaço das retas orientadas. Definiremos uma congruência de retas e mostraremos sob quais condições uma congruência de retas é integrável.
- **Capítulo 3: Métrica de Kähler em \mathcal{L} .** Mostraremos que TS^2 é uma variedade de Kähler e definiremos uma métrica de Kähler em \mathcal{L} . Definiremos também uma congruência de retas Lagrangiana e mostraremos uma condição necessária e suficiente para que uma congruência seja desse tipo. Caracterizaremos congruências de retas Lagrangianas ortogonais a superfícies mínimas e encerramos o capítulo definindo um invariante induzido pela métrica de Kähler de \mathcal{L} , dando uma interpretação geométrica para esse invariante.
- **Capítulo 4: Uma Generalização para um Teorema de Ribaucour.** Generalizaremos o Teorema de Ribaucour fazendo algumas suposições sobre o as coordenadas locais de uma congruência de retas. Definiremos o conceito de superfície Laguerre mínima e mostraremos que toda superfície desse tipo pode ser vista como a envoltória dos planos médios de um determinado tipo de congruências. Encerraremos nosso trabalho construindo exemplos acerca do que foi tratado ao longo da dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo, faremos uma breve apresentação de alguns tópicos que nos auxiliarão ao longo dessa dissertação. Na seção 1.1, definiremos o conceito de *função suporte*, assim como uma representação local para uma superfície S e suas curvaturas média e gaussiana em termos da função suporte associada à S . Na seção 1.2, definiremos *pontos limites* e *pontos focais* de uma superfície regrada e suas representações em termos de uma parametrização local da superfície. Na seção 1.3, falaremos um pouco sobre a equação biharmônica. O conteúdo das seções 1.2 e 1.3 foi baseado principalmente [4, 5] e [1], respectivamente.

1.1 Função Suporte

Seja S uma superfície orientada em \mathbb{R}^3 e considere \mathbb{S}^2 como sendo a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . A *aplicação de Gauss* da superfície S é a aplicação diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ que, para cada $p \in S$, associa um vetor $N(p)$ normal à S em p . A diferencial da aplicação de Gauss em um ponto $p \in S$ é a aplicação linear

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2 \cong T_p S.$$

Se a curvatura Gaussiana $K = \det(dN_p) \neq 0$, então o teorema da função inversa nos garante que a aplicação de Gauss é localmente inversível. Logo, qualquer superfície que tenha $K \neq 0$ é, localmente, a imagem da inversa da aplicação de Gauss.

A *função suporte* h é uma função que nos dá a distância do plano tangente a S em p à origem de \mathbb{R}^3 e ela pode ser dada em termos da normal por

$$h = \langle q, l(q) \rangle, \tag{1.1}$$

em que l é a inversa da aplicação de Gauss, $q \in \mathbb{S}^2$ é normal a S em $l(q)$, e ' \langle, \rangle ' denota o produto interno usual.

Se (u, v) são coordenadas locais em \mathbb{S}^2 , então

$$h_u = \langle q_u, l(q) \rangle + \langle q, dl_q(q_u) \rangle = \langle q_u, l(q) \rangle \tag{1.2}$$

e

$$h_v = \langle q_v, l(q) \rangle + \langle q, dl_q(q_v) \rangle = \langle q_v, l(q) \rangle, \quad (1.3)$$

pois $dl_q(q_u)$ e $dl_q(q_v)$ estão no plano tangente à S em $l(q)$. Como h_u e h_v são as derivadas direcionais de h nas direções q_u e q_v , respectivamente, então as equações (1.2) e (1.3) nos mostram que o gradiente de h em relação à métrica canônica de \mathbb{S}^2 , denotado por $\nabla_{\mathbb{S}^2}h$, é a projeção de l no plano tangente. Pela equação (1.1) essa projeção é $l - hq$ e obtemos

$$l(q) = h(q)q + \nabla_{\mathbb{S}^2}h(q). \quad (1.4)$$

Portanto, se a inversa da aplicação de Gauss existe, temos uma expressão explícita para ela em termos da função suporte.

Proposição 1.1 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientável e N a aplicação de Gauss de S . Suponha que para $p_0 \in S$, $K(p_0) \neq 0$. Seja $U \subset S$ uma vizinhança de p_0 tal que $N|_U : U \rightarrow N(U)$ é inversível. Então a curvatura Gaussiana K e a curvatura média H de S em U serão dadas por*

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\det(hId + Hess(h))}, \\ H &= \frac{\text{traço}(-hId - Hess(h))}{2\det(hId + Hess(h))}, \end{aligned}$$

em que Id é a matriz identidade 2×2 , h é a função suporte associada à S em $N(U)$ e $Hess(h) = [h_{ij}]$ é a matriz Hessiana de h relativa a um referencial ortonormal local de S .

Demonstração: Sejam $l : N(U) \rightarrow U$ a inversa local da aplicação de Gauss, $q \in N(U)$ e $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal local de S . Segue da equação (1.4) que $l(q) = h(q)q + \nabla_{\mathbb{S}^2}h(q)$. Logo,

$$\begin{aligned} dl_q(e_i) &= dh_q(e_i)q + h(q)e_i(q) + d(\nabla_{\mathbb{S}^2}h)_q(e_i) \\ &= dh_q(e_i) + h(q)e_i(q) + D_{e_i}\nabla_{\mathbb{S}^2}h(q) + \langle d(\nabla_{\mathbb{S}^2}h)_q(e_i), q \rangle \\ &= dh_q(e_i) + h(q)e_i(q) + D_{e_i}\nabla_{\mathbb{S}^2}h(q) - \langle \nabla_{\mathbb{S}^2}h(q), e_i(q) \rangle \\ &= h(q)e_i(q) + D_{e_i}\nabla_{\mathbb{S}^2}h(q), \end{aligned}$$

em que D denota a conexão Riemanniana.

As matrizes da primeira e da segunda formas fundamentais a l associadas ao referencial $\{e_1, e_2\}$, $I = [g_{ij}]$ e $II = [l_{ij}]$, são

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle dl(e_i), dl(e_j) \rangle \\ &= h^2\delta_{ij} + h\langle D_{e_i}\nabla_{\mathbb{S}^2}h, e_j \rangle + \langle D_{e_i}\nabla_{\mathbb{S}^2}h, D_{e_j}\nabla_{\mathbb{S}^2}h \rangle, \\ l_{ij} &= -\langle dl(e_i), e_j \rangle \\ &= -h\delta_{ij} - \langle D_{e_i}\nabla_{\mathbb{S}^2}h, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Pelas equações acima obtemos que

$$\begin{aligned} I &= (-hId - Hess(h))^2, \\ II &= -hId - Hess(h). \end{aligned}$$

Seja $A : T(N(U)) \rightarrow T(N(U))$ o operador linear auto-adjunto associado à segunda forma fundamental de l . Segue das equações anteriores que a matriz de A no referencial $\{e_1, e_2\}$ é dada por

$$A = I^{-1}II = (-hId - Hess(h))^{-1}.$$

Então a curvatura Gaussiana K e a curvatura média H de S em U são dadas por

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\det(hId + Hess(h))}, \\ H &= \frac{\text{traço}(-hId - Hess(h))}{2\det(hId + Hess(h))}. \end{aligned}$$

■

1.2 Pontos Limites e Pontos Focais

Afim de introduzir o conceito de *ponto limite*, precisaremos da definição de *congruência de retas*. Grosso modo, uma congruência de retas é uma superfície no espaço das retas orientadas em \mathbb{R}^3 . Não trataremos desse espaço com detalhes agora pois o faremos no próximo capítulo. Nesta seção, nos restringiremos a uma descrição local dessas congruências. Em outras palavras, consideraremos uma família a dois-parâmetros de retas dadas em coordenadas locais (u, v, w) pela expressão

$$Y(u, v, w) = X(u, v) + wN(u, v),$$

em que $w \in \mathbb{R}$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $N : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são imersões diferenciáveis definidas em um aberto U e $|N(u, v)| = 1, \forall (u, v) \in U$.

Para cada curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ em U , temos então definida uma superfície regrada dada por

$$Y(t, w) = X(t) + wN(t),$$

em que $X(t) = X(u(t), v(t))$ e $N(t) = N(u(t), v(t))$.

As Proposições abaixo nos servirão de apoio para que possamos definir o que são pontos limites.

Proposição 1.2 *Seja S uma superfície regrada dada por*

$$Y(t, w) = X(t) + wN(t), \quad |N(t)| = 1, \quad |N'(t)| \neq 0, \quad \forall t. \quad (1.5)$$

Sejam $N(t_1)$ e $N(t_2)$ direções de duas geratrizes de Y e sejam $Y(t_1, w_1(t_2))$, $Y(t_2, w_2(t_2))$ os pés da perpendicular comum a essas duas geratrizes. Quando $t_2 \rightarrow t_1$, esses pontos tendem a um ponto $Y(t_1, \bar{w})$, em que \bar{w} é dado por

$$\bar{w} = -\frac{\langle N', X' \rangle}{\langle N', N' \rangle}.$$

Demonstração: Afim de determinar \bar{w} , observe o seguinte. A direção da perpendicular comum vai ser dada por

$$Y(t_1, w_1(t_2)) - Y(t_2, w_2(t_2)) = X(t_1) + w_1(t_2)N(t_1) - X(t_2) - w_2(t_2)N(t_2).$$

Por outro lado, essa direção também é dada por

$$N(t_1) \wedge N(t_2).$$

Portanto,

$$X(t_1) + w_1(t_2)N(t_1) - X(t_2) - w_2(t_2)N(t_2) = N(t_1) \wedge N(t_2). \quad (1.6)$$

Tomando o produto interno de (1.6) com $N(t_2) - N(t_1)$, teremos que

$$\langle X(t_1) + w_1(t_2)N(t_1) - X(t_2) - w_2(t_2)N(t_2), N(t_2) - N(t_1) \rangle = 0.$$

Como $|N(t)| = 1$, podemos deduzir da equação acima que

$$\langle X(t_2) - X(t_1), N(t_2) - N(t_1) \rangle + (w_2(t_2) + w_1(t_2))(1 - \langle N(t_2), N(t_1) \rangle) = 0.$$

Consideremos agora a expansão de Taylor para N ,

$$N(t_2) = N(t_1) + N'(t_1)\Delta t + N''(t_1)\frac{(\Delta t)^2}{2} + R(t_2),$$

em que $\Delta t = t_2 - t_1$, e $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{R(t_2)}{(\Delta t)^2} = 0$.

Após substituição, obtemos que

$$\langle X(t_2) - X(t_1), N(t_2) - N(t_1) \rangle - (w_2(t_2) + w_1(t_2)) \left\langle N(t_1), N''(t_1)\frac{(\Delta t)^2}{2} + R(t_2) \right\rangle = 0. \quad (1.7)$$

Finalmente, dividindo a equação (1.7) por $(\Delta t)^2$, notando que $\langle N(t_1), N''(t_1) \rangle = -\langle N'(t_1), N'(t_1) \rangle$ e tomando o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, teremos que

$$\bar{w} = -\frac{\langle X'(t_1), N'(t_1) \rangle}{\langle N'(t_1), N'(t_1) \rangle}.$$



Definição 1.1 O ponto $Y(t_1, \bar{w})$ é o **ponto central** da geratriz $Y(t_1, w)$.

Observe que o ponto central pode ser definido como o ponto da geratriz que pertence à linha de estrição.

Observação 1.1 A expressão obtida para o ponto central associado à curva $\gamma(t)$ só depende da direção de $\gamma(t_1) = p$ e de $\gamma'(t_1)$. Sendo assim, é natural considerar a forma quadrática $Q_p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q_p(\mathbf{v}) = \frac{\langle dN_p(\mathbf{v}), dX_p(\mathbf{v}) \rangle}{\langle dN_p(\mathbf{v}), dN_p(\mathbf{v}) \rangle},$$

em que \mathbb{S}^1 é o círculo unitário em \mathbb{R}^2 , e considerar os valores de máximo e mínimo de Q_p .

Proposição 1.3 Os valores de máximo \bar{w}_M e mínimo \bar{w}_m de Q_p são dados por

$$\begin{cases} \bar{w}_M + \bar{w}_m &= \frac{(f + f')g_{12} - g_{11}g - g_{22}e}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ \bar{w}_M \bar{w}_m &= \frac{4eg - (f + f')^2}{4(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}. \end{cases} \quad (1.8)$$

em que $e = \langle N_u, X_u \rangle$, $f = \langle N_u, X_v \rangle$, $f' = \langle N_v, X_u \rangle$, $g = \langle N_v, X_v \rangle$, $g_{11} = \langle N_u, N_u \rangle$, $g_{12} = \langle N_u, N_v \rangle$ e $g_{22} = \langle N_v, N_v \rangle$.

Demonstração: Temos que a forma quadrática Q_p é dada por

$$\begin{aligned} Q_p &= -\frac{\langle N_u du + N_v dv, X_u du + X_v dv \rangle}{\langle N_u du + N_v dv, N_u du + N_v dv \rangle} \\ &= -\frac{edu^2 + (f + f')dudv + gdv^2}{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se tomarmos $s = \frac{dv}{du}$, a equação (1.9) se torna

$$Q_p = -\frac{e + (f + f')s + gs^2}{g_{11} + 2g_{12}s + g_{22}s^2}. \quad (1.10)$$

Então, Q_p varia continuamente com o valor de s e estamos interessados em procurar valores de s para os quais Q_p assume máximo e mínimo. Para isso, diferenciamos a expressão (1.10) com relação a s e igualamos o resultado a 0, obtendo

$$(g_{11} + g_{12}s) \left[\frac{1}{2}(f + f') + gs \right] - (g_{12} + g_{22}s) \left[e + \frac{1}{2}(f + f')s \right] = 0, \quad (1.11)$$

ou seja,

$$\left(g_{12}g - \frac{g_{22}(f+f')}{2}\right)s^2 + (g_{11}g - g_{22}e)s + \left(\frac{g_{11}(f+f')}{2} - g_{12}e\right) = 0, \quad (1.12)$$

um polinômio quadrático em s . O discriminante desse polinômio vai ser dado por

$$(g_{11}g - g_{22}e)^2 - 4\left(g_{12}g - \frac{g_{22}(f+f')}{2}\right)\left(\frac{g_{11}(f+f')}{2}\right),$$

que equivale a

$$4\frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{11}^2}\left(\frac{g_{11}(f+f')}{2} - g_{12}e\right)^2 + \left[g_{11}g - eg_{22} - \frac{2g_{12}}{g_{11}}\left(\frac{g_{11}(f+f')}{2} - g_{12}e\right)\right]^2,$$

que é não negativo, pois $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$. Logo, o polinômio vai ter duas raízes reais. Seja \bar{s} uma raiz desse polinômio e seja \bar{w} o valor de Q_p obtido ao substituirmos s por \bar{s} em (1.10). Por (1.11), temos que

$$\bar{w} = -\frac{e + \frac{1}{2}(f+f')\bar{s}}{g_{11} + g_{12}\bar{s}} = -\frac{\frac{1}{2}(f+f') + g\bar{s}}{g_{12} + g_{22}\bar{s}}.$$

Ao escrevermos essas equações na forma

$$\begin{aligned} [g_{11}\bar{w} + e] + \left[g_{12}\bar{w} + \frac{1}{2}(f+f')\bar{s}\right] &= 0 \\ \left[g_{12}\bar{w} + \frac{1}{2}(f+f')\right] + [g_{22}\bar{w} + g]\bar{s} &= 0 \end{aligned}$$

e eliminarmos \bar{s} , obtemos o seguinte polinômio quadrático em \bar{w}

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\bar{w}^2 + [g_{11}g - (f+f')g_{12} + g_{22}e]\bar{w} + eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0. \quad (1.13)$$

Denotando por \bar{w}_M e \bar{w}_m as raízes dessa equação, teremos

$$\begin{cases} \bar{w}_M + \bar{w}_m &= \frac{(f+f')g_{12} - g_{11}g - g_{22}e}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ \bar{w}_M\bar{w}_m &= \frac{4eg - (f+f')^2}{4(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}. \end{cases}$$

■

Definição 1.2 Os pontos $Y(p, \bar{w}_M)$ e $Y(p, \bar{w}_m)$ são chamados **pontos limites** associados à geratriz $Y(p, w)$.

Observação 1.2 Para o caso particular de congruências de retas em que N é a aplicação de Gauss da superfície parametrizada X , temos

$$\bar{w}_M + \bar{w}_m = \frac{2H}{K}, \quad (1.14)$$

em que H e K são as curvaturas média e gaussiana de X , respectivamente. Para justificar essa afirmação, lembramos que a terceira forma fundamental III de uma superfície S (ou seja, $\langle dN_p, dN_p \rangle$, com $p \in S$ e N sendo a aplicação de Gauss) se relaciona com a primeira I e segunda II formas fundamentais da seguinte maneira

$$III = -KI + 2HII.$$

Basta então utilizar a relação acima e (1.8) para obter (1.14).

Vamos agora analisar sob quais condições uma superfície regradada S dada por

$$Y(t, w) = X(t) + wN(t), \quad |N(t)| = 1, |N'(t)| \neq 0, \quad \forall t. \quad (1.15)$$

é desenvolvível.

Sabemos que S é desenvolvível se

$$\langle N' \wedge N, X' \rangle = 0.$$

A forma diferencial dessa condição é

$$\langle (N_u du + N_v dv) \wedge N, X_u du + X_v dv \rangle = 0, \quad (1.16)$$

que equivale a

$$\langle N_u \wedge N, X_u \rangle du^2 + (\langle N_u \wedge N, X_v \rangle + \langle N_v \wedge N, X_u \rangle) dudv + \langle N_v \wedge N, X_v \rangle dv^2 = 0.$$

Observe que N_u e N_v formam uma base para $T_p\mathbb{S}^2$, $p \in \mathbb{S}^2$. Podemos então escrever N como sendo

$$N = \frac{N_u \wedge N_v}{|N_u \wedge N_v|}.$$

Calculando $\langle N_u \wedge N, X_u \rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \langle N_u \wedge N, X_u \rangle &= \frac{1}{|N_u \wedge N_v|} \langle N_u \wedge (N_u \wedge N_v), X_u \rangle \\ &= \frac{1}{|N_u \wedge N_v|} \langle \langle N_u \wedge N_v \rangle N_u - \langle N_u, N_u \rangle N_v, X_u \rangle \\ &= \frac{1}{|N_u \wedge N_v|} (\langle N_u, N_v \rangle \langle N_u, X_u \rangle - \langle N_u, N_u \rangle \langle N_v, X_u \rangle) \\ &= \frac{1}{|N_u \wedge N_v|} (g_{12}e - g_{11}f). \end{aligned}$$

Analogamente, encontramos que

$$\langle N_u \wedge N, X_v \rangle + \langle N_v \wedge N, X_u \rangle = \frac{1}{|N_u \wedge N_v|} (g_{12}f - g_{11}g + g_{22}e - g_{12}f')$$

e

$$\langle N_v \wedge N, X_v \rangle = \frac{1}{|N_u \wedge N_v|} (g_{22}f' - g_{12}g).$$

Então S é desenvolvível se, e somente se, a forma quadrática

$$(g_{12}e - g_{11}f')du^2 + (g_{12}f - g_{11}g + g_{22}e - g_{12}f')dudv + (g_{22}f' - g_{12}g)dv^2 \quad (1.17)$$

se anula. Portanto, para cada reta da congruência de retas podem passar duas superfícies regradas desenvolvíveis formadas por retas da congruência.

Sabemos que uma superfície regradada desenvolvível é a superfície tangente da sua linha de estrição. Logo, cada reta da congruência pode ser tangente a duas linhas de estrição. Temos, então, a seguinte definição.

Definição 1.3 *Os pontos de contato entre uma reta da congruência e as duas linhas de estrição associadas às duas superfícies regradas desenvolvíveis, caso existam, são chamados **pontos focais**.*

Proposição 1.4 *Os pontos focais da congruência de retas associados à reta $Y(p, w)$, caso existam, serão dados por $Y(p, \bar{w}_{f_1})$ e $Y(p, \bar{w}_{f_2})$, em que \bar{w}_{f_1} e \bar{w}_{f_2} são dados por*

$$\begin{cases} \bar{w}_{f_1} + \bar{w}_{f_2} &= \frac{(f + f')g_{12} - g_{11}g - g_{22}e}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ \bar{w}_{f_1}\bar{w}_{f_2} &= \frac{eg - ff'}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Demonstração: Como os pontos focais são os pontos de contato entre uma reta da congruência e duas linhas de estrição associadas às duas superfícies regradas desenvolvíveis que satisfazem (1.17), queremos encontrar os valores de \bar{w} para esses pontos, ou seja, queremos encontrar os valores da forma quadrática Q_p vista na observação 1.1 aplicada a vetores que anulam (1.17). Vimos em (1.9) que

$$Q_p = -\frac{edu^2 + (f + f')dudv + gdv^2}{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}.$$

Seja $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{S}^1$ tal que \mathbf{v} anula (1.17) e seja $\omega = Q_p(\mathbf{v})$. Então,

$$\omega = -\frac{ev_1 + fv_2}{g_{11}v_1 + g_{12}v_2} = -\frac{f'v_1 + gv_2}{g_{12}v_1 + g_{22}v_2}.$$

Escrevendo essas equações na forma

$$\begin{cases} (g_{11}\omega + e)v_1 + (g_{12}\omega + f)v_2 &= 0 \\ (g_{12}\omega + f')v_1 + (g_{22}\omega + g)v_2 &= 0 \end{cases}$$

e eliminando v_1 e v_2 , temos

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\omega^2 + [gg_{11} - (f + f')g_{12} + eg_{11}]\omega + eg - ff' = 0.$$

Denotando por \bar{w}_{f_1} e \bar{w}_{f_2} as raízes dessa equação, temos

$$\begin{cases} \bar{w}_{f_1} + \bar{w}_{f_2} &= \frac{(f + f')g_{12} - g_{11}g - g_{22}e}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ \bar{w}_{f_1}\bar{w}_{f_2} &= \frac{eg - ff'}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{cases}$$

■

1.3 A equação biharmônica

Uma função real $u(x, y)$ é dita biharmônica em um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo se ela satisfaz a equação biharmônica

$$\Delta^2 u \equiv u_{xxxx} + 2u_{xyyy} + u_{yyyy} = 0 \quad \text{em } D. \quad (1.19)$$

Qualquer função biharmônica possui representação de Goursat

$$u = \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \quad (1.20)$$

em que ϕ e χ são funções holomorfas de $z = x + iy$.

Afim de provar esse resultado, observe que Δu é harmônica em D , e então

$$\Delta u = \operatorname{Re} h(z)$$

em que $h(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ é uma função holomorfa em D . Então a função

$$\phi(z) \equiv p + iq = \frac{1}{4} \int h(z) dz$$

é também holomorfa e

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}P \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{4}Q.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Delta(u - xp - yq) &= \Delta u - p\Delta x - x\Delta p - 2\langle \nabla x, \nabla p \rangle - q\Delta y - y\Delta q - 2\langle \nabla y, \nabla q \rangle \\ &= P - 2\left\langle (1, 0), \left(\frac{1}{4}P, \frac{1}{4}Q\right) \right\rangle - 2\left\langle (0, 1), \left(-\frac{1}{4}Q, \frac{1}{4}P\right) \right\rangle \\ &= P - P \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $u - xp - yq = u - \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z)]$ é harmônica e então $u - \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z)] = \operatorname{Re} \chi(z)$ para alguma função holomorfa $\chi(z)$. Logo,

$$u = \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)].$$

■

Capítulo 2

O Espaço das Retas Orientadas

Nesse capítulo trataremos do espaço das retas orientadas, \mathcal{L} , definindo uma congruência de retas e mostrando alguns resultados relacionados a esse assunto. O conteúdo do capítulo foi baseado principalmente nos artigos [7] e [8].

2.1 Correspondência entre \mathcal{L} e TS^2

Seja \mathcal{L} o conjunto das retas orientadas em \mathbb{R}^3 e seja TS^2 o fibrado tangente da esfera unitária em \mathbb{R}^3 . Sejam (ξ, η) coordenadas holomorfas em TS^2 , em que $\xi = u + iv$ é obtido pela projeção estereográfica pelo pólo sul, (ξ, η) é identificado com o vetor

$$\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} = \operatorname{Re}(\eta) \frac{\partial}{\partial u} + \operatorname{Im}(\eta) \frac{\partial}{\partial v} \in T_{\xi}S^2$$

e estamos identificando o ponto $\xi \in \mathbb{C}$ com o ponto correspondente na esfera.

Seja $\Phi : TS^2 \rightarrow \mathcal{L}$ a aplicação que identifica \mathcal{L} com TS^2 . Geometricamente, essa aplicação funciona da seguinte maneira: considere uma reta em \mathcal{L} e o vetor direção unitária dessa reta. Considere também um vetor em \mathbb{R}^3 que seja ortogonal à direção da reta. Podemos então identificar o vetor direção da reta com um ponto em S^2 e identificar o vetor ortogonal à direção da reta com um vetor no plano tangente à S^2 nesse ponto. Temos, assim, um ponto em TS^2 .

Os detalhes dessa aplicação serão dados pelo Teorema a seguir.

Teorema 2.1 *A aplicação Φ leva o ponto $(\xi, \eta) \in TS^2$ na reta orientada dada por*

$$z = \frac{2(\eta - \bar{\eta}\xi^2) + 2\xi(1 + \xi\bar{\xi})r}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \quad (2.1)$$

$$t = \frac{-2(\eta\bar{\xi} + \bar{\eta}\xi) + (1 - \xi^2\bar{\xi}^2)r}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \quad (2.2)$$

em que $z = x^1 + ix^2$, $t = x^3$, (x^1, x^2, x^3) são coordenadas euclidianas em \mathbb{R}^3 e r é um parâmetro afim tal que $r = 0$ nos dá o ponto da reta que está mais próximo da origem.

Demonstração: A projeção estereográfica pelo pólo sul define uma aplicação que leva cada $\xi \in \mathbb{C}$ nas coordenadas em \mathbb{R}^3

$$z = \frac{2\xi}{1 + \xi\bar{\xi}} \quad t = \frac{1 - \xi\bar{\xi}}{1 + \xi\bar{\xi}}. \quad (2.3)$$

A derivada dessa aplicação nos dá

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{2}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2\bar{\xi}^2}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{2\bar{\xi}}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} = -\frac{2\xi^2}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{2\xi}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Então,

$$\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} = \frac{2(\eta - \bar{\eta}\xi^2)}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2(\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}^2)}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{2(\eta\bar{\xi} + \bar{\eta}\xi)}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Considere a reta dada pelas equações (2.1) e (2.2). Temos que a direção dessa reta é dada por

$$\frac{2\xi}{1 + \xi\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\bar{\xi}}{1 + \xi\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1 - \xi\bar{\xi}}{1 + \xi\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.4)$$

que nos dá o ponto $\xi \in \mathbb{S}^2$ quando o vetor é transladado para a origem.

Observe que, como $z = x^1 + ix^2$, (x^1, x^2, x^3) coordenadas euclidianas, temos que $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} \right)$. Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle &= \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1, \end{aligned}$$

pois $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle = 1$ e $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle = 0$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclidiano. Portanto, tomando o produto interno de (2.2) com (2.4), chegamos ao resultado que os dois vetores são ortogonais, ou seja, o vetor que nos dá o ponto quando $r = 0$ é, de fato, ortogonal à reta, concluindo a demonstração. ■

Nesse trabalho, investigaremos congruências de retas, ou seja, superfícies $\Sigma \subset \mathcal{L}$. Toda superfície orientada $S \subset \mathbb{R}^3$ dá origem a uma congruência por meio de sua normal, mas nem toda congruência é dada dessa forma. No próximo capítulos veremos alguns exemplos de congruências não normais.

2.2 Alguns Resultados Sobre Congruências de Retas

Definição 2.1 Considere a transformação $\Phi : (u, v, r) \rightarrow (z, \bar{z}, t)$ definida em um aberto de \mathbb{R}^3 dada por

$$z = \frac{2(F - \bar{F}\xi^2) + 2\xi(1 + \xi\bar{\xi})r}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}$$

$$t = \frac{-2(F\bar{\xi} + \bar{F}\xi) + (1 - \xi^2\bar{\xi}^2)r}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}$$

em que $F(u, v)$ e $\xi(u, v)$ são funções complexas suaves de dois parâmetros reais u e v . As coordenadas (u, v, r) são chamadas **coordenadas da congruência**.

Observe que se transladarmos a origem $(0, 0, 0)$ para (x_0^1, x_0^2, x_0^3) , então

$$F \rightarrow F + \frac{1}{2}(\alpha_0 - 2t_0\xi - \bar{\alpha}_0\xi^2), \quad (2.5)$$

em que $\alpha_0 = x_0^1 + ix_0^2$ e $t_0 = x_0^3$. As coordenadas então ficarão

$$(u, v, r) \rightarrow \left(u, v, r + \frac{\bar{\alpha}_0\xi - \alpha_0\bar{\xi} + t_0(1 - \xi\bar{\xi})}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \quad (2.6)$$

$$(z, t) \rightarrow (z + \alpha_0, t + t_0).$$

Proposição 2.1 Sejam $\nu = u + iv$, $\bar{\nu} = u - iv$, $\partial = \frac{\partial}{\partial \nu}$ e $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}}$. Então

$$\partial^+ F \equiv \partial F + r\partial\xi - \frac{2F\bar{\xi}\partial\xi}{1 + \xi\bar{\xi}}$$

e

$$\partial^- F \equiv \bar{\partial} F + r\bar{\partial}\xi - \frac{2F\xi\bar{\partial}\xi}{1 + \xi\bar{\xi}}$$

são invariantes pelas transformações (2.5) e (2.6).

Demonstração: Ao transladarmos a origem $(0, 0, 0)$ para (x_0^1, x_0^2, x_0^3) , teremos que

$$\begin{aligned} \partial^+ \left(F + \frac{1}{2}(\alpha_0 - 2t_0\xi - \bar{\alpha}_0\xi^2) \right) &= \partial F + \frac{1}{2}(-2t_0\partial\xi - 2\bar{\alpha}_0\partial\xi) + r\partial\xi - \frac{2F\bar{\xi}\partial\xi}{1 + \xi\bar{\xi}} + \\ &\quad \left(\frac{\bar{\alpha}_0\xi - \alpha_0\bar{\xi} + t_0(1 - \xi\bar{\xi}) - (\alpha_0 - 2t_0\xi - \bar{\alpha}_0\xi^2)\bar{\xi}}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \partial\xi \\ &= \partial F + r\partial\xi - \frac{2F\bar{\xi}\partial\xi}{1 + \xi\bar{\xi}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \partial^- \left(F + \frac{1}{2}(\alpha_0 - 2t_0\xi - \bar{\alpha}_0\xi^2) \right) &= \bar{\partial}F + \frac{1}{2}(-2t_0\bar{\partial}\xi - 2\bar{\alpha}_0\bar{\partial}\xi) + r\bar{\partial}\xi - \frac{2F\xi\bar{\partial}\xi}{1 + \xi\bar{\xi}} + \\ &\quad \left(\frac{\bar{\alpha}_0\xi - \alpha_0\bar{\xi} + t_0(1 - \xi\bar{\xi}) - (\alpha_0 - 2t_0\xi - \bar{\alpha}_0\xi^2)\bar{\xi}}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \bar{\partial}\xi \\ &= \bar{\partial}F + r\bar{\partial}\xi - \frac{2F\xi\bar{\partial}\xi}{1 + \xi\bar{\xi}}. \end{aligned}$$

■

Observação 2.1 *O Jacobiano da transformação Φ é*

$$J = \frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^3} (\partial^+ F \bar{\partial}^+ \bar{F} - \partial^- F \bar{\partial}^- \bar{F}).$$

Um *referencial nulo* é um trio de vetores complexos em $\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^3$, $\{e_0, e_+, e_-\}$, em que e_0 é real, e_+ é o conjugado de e_- e e_0, e_+ e e_- satisfazem as seguintes propriedades

$$\langle e_0, e_0 \rangle = 1, \langle e_0, e_+ \rangle = 0, \langle e_+, e_+ \rangle = 0, \langle e_+, e_- \rangle = 1,$$

em que o produto interno euclidiano de \mathbb{R}^3 foi estendido bilinearmente sobre \mathbb{C} . Os referenciais ortonormais $\{e_0, e_1, e_2\}$ de $T\mathbb{R}^3$ e os referenciais nulos são relacionados por

$$e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) \quad , \quad e_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2).$$

Definição 2.2 *Um referencial nulo da congruência $\Sigma \subset \mathcal{L}$ é um referencial nulo $\{e_0, e_+, e_-\}$ se, para cada $\gamma \in \Sigma$, tivermos e_0 tangente à γ em \mathbb{R}^3 e a orientação de $\{e_0, e_1, e_2\}$ sendo a orientação padrão para \mathbb{R}^3 .*

Proposição 2.2 *Sejam $\nu = u + iv, \bar{\nu} = u - iv, \partial = \frac{\partial}{\partial\nu}$ e $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial\bar{\nu}}$. Seja Σ uma congruência de retas e considere um aberto $U \subset \Sigma$ tal que o Jacobiano da transformação Φ seja diferente de zero. Seja F a função que descreve Σ em U . Se um referencial nulo é um referencial nulo da congruência Σ , então ele tem a seguinte expressão em termos de coordenadas canônicas*

$$e_0 = \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad e_+ = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial\nu} + \beta \frac{\partial}{\partial\bar{\nu}} + \Omega \frac{\partial}{\partial r} \right) e^{i\theta} \quad , \quad e_- = e_+$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\sqrt{2} [\bar{\partial}^- \bar{F} (F \bar{\partial} \bar{\xi} + \bar{F} \bar{\partial} \xi) - \bar{\partial}^+ \bar{F} (F \partial \bar{\xi} + \bar{F} \partial \xi)]}{(1 + \xi\bar{\xi})(\partial^- F \bar{\partial}^- \bar{F} - \partial^+ F \bar{\partial}^+ \bar{F})}, \\ \alpha &= \frac{\bar{\partial}^+ \bar{F} (1 + \xi\bar{\xi})}{\sqrt{2}(\partial^- F \bar{\partial}^- \bar{F} - \partial^+ F \bar{\partial}^+ \bar{F})} \quad , \quad \beta = -\frac{\bar{\partial}^- \bar{F} (1 + \xi\bar{\xi})}{\sqrt{2}(\partial^- F \bar{\partial}^- \bar{F} - \partial^+ F \bar{\partial}^+ \bar{F})}, \end{aligned}$$

e θ é uma função de $\nu, \bar{\nu}$ e r .

Demonstração: Seja $\{e_0, e_+, e_-\}$ um referencial nulo que é um referencial nulo da congruência. Como visto na definição 2.2, $e_0 = \frac{\partial}{\partial r}$. Além disso, o vetor e_+ pode ser escrito em termos da base $\left\{ \frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}}, \frac{\partial}{\partial r} \right\}$ de \mathbb{R}^3 como sendo

$$e_+ = \alpha \frac{\partial}{\partial \nu} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} + \Omega \frac{\partial}{\partial r}$$

para funções α, β, Ω . Como $\{e_0, e_+, e_-\}$ é um referencial nulo, ele deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $\langle e_0, e_+ \rangle = 0$;
2. $\langle e_+, e_+ \rangle = 0$;
3. $\langle e_+, e_- \rangle = 1$;
4. $\langle e_0, e_0 \rangle = 1$.

A propriedade 1 implica que

$$\Omega = -\alpha \left\langle e_0, \frac{\partial}{\partial \nu} \right\rangle - \beta \left\langle e_0, \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} \right\rangle.$$

Logo, $e_+ = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \left\langle e_0, \frac{\partial}{\partial \nu} \right\rangle e_0 \right) + \beta \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} - \left\langle e_0, \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} \right\rangle e_0 \right) = \alpha Z_+ + \beta Z_-$.

A propriedade 2 implica que

$$\alpha^2 \langle Z_+, Z_+ \rangle + \alpha\beta \langle Z_+, Z_- \rangle + \beta^2 \langle Z_-, Z_- \rangle = 0. \quad (2.7)$$

Fazendo uma mudança para coordenadas Euclidianas pela Φ , teremos que

$$\begin{aligned} \langle Z_+, Z_+ \rangle &= \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}, \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right\rangle^2 \\ \langle Z_+, Z_- \rangle &= \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\nu}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\nu}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Observe que, tomando $(F\partial\bar{\xi} + \bar{F}\partial\xi) = \tau$, teremos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}, \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right\rangle &= \frac{\partial z}{\partial\nu} \frac{\partial\bar{z}}{\partial\nu} + \left(\frac{\partial t}{\partial\nu} \right)^2 \\
&= \frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^4} \left\{ \left(\partial^+ F - \xi^2 \bar{\partial}^- F - \frac{2\xi\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \left(\bar{\partial}^- F - \bar{\xi}^2 \partial^+ F - \frac{2\bar{\xi}\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\bar{\xi} \partial^+ F + \xi \bar{\partial}^- F + \frac{(1 - \xi\bar{\xi})\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^4} \{ (1 + \xi\bar{\xi})^2 \partial^+ F \bar{\partial}^- F + \tau^2 \} \\
&= \frac{4(\partial^+ F \bar{\partial}^- F)}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} + \frac{4\tau^2}{(1 + \xi\bar{\xi})^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right\rangle &= \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial\bar{z}}{\partial\nu} + \frac{\partial\bar{z}}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial\nu} + 2 \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial t}{\partial\nu} \\
&= \frac{4\xi}{(1 + \xi\bar{\xi})^3} \left\{ \bar{\partial}^- F - \bar{\xi}^2 \partial^+ F - \frac{2\bar{\xi}\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right\} \\
&\quad + \frac{4\bar{\xi}}{(1 + \xi\bar{\xi})^3} \left\{ \partial^+ F - \xi^2 \bar{\partial}^- F - \frac{2\xi\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right\} \\
&\quad - \frac{4(1 - \xi\bar{\xi})}{(1 + \xi\bar{\xi})^3} \left\{ \bar{\xi} \partial^+ F + \xi \bar{\partial}^- F + \frac{(1 - \xi\bar{\xi})\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right\} \\
&= -\frac{4\tau}{(1 + \xi\bar{\xi})^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\nu}} \right\rangle &= \frac{\partial z}{\partial\nu} \frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{\nu}} + \frac{\partial\bar{z}}{\partial\nu} \frac{\partial z}{\partial\bar{\nu}} + 2 \frac{\partial t}{\partial\nu} \frac{\partial t}{\partial\bar{\nu}} \\
&= \frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^4} \left\{ \left(\partial^+ F - \xi^2 \bar{\partial}^- F - \frac{2\xi\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \left(\bar{\partial}^+ F - \bar{\xi}^2 \partial^- F - \frac{2\bar{\xi}\bar{\tau}}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \right. \\
&\quad + \left(\bar{\partial}^- F - \bar{\xi}^2 \partial^+ F - \frac{2\bar{\xi}\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \left(\partial^- F - \xi^2 \bar{\partial}^+ F - \frac{2\xi\bar{\tau}}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \\
&\quad \left. + 2 \left(\bar{\xi} \partial^+ F + \xi \bar{\partial}^- F + \frac{(1 - \xi\bar{\xi})\tau}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \left(\bar{\xi} \partial^- F + \xi \bar{\partial}^+ F + \frac{(1 - \xi\bar{\xi})\bar{\tau}}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \right\} \\
&= \frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^4} \{ (1 + \xi\bar{\xi})^2 (\partial^+ F \bar{\partial}^+ F + \partial^- F \bar{\partial}^- F) + 2\tau\bar{\tau} \} \\
&= \frac{4(\partial^+ F \bar{\partial}^+ F + \partial^- F \bar{\partial}^- F)}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} + \frac{8\tau\bar{\tau}}{(1 + \xi\bar{\xi})^4}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle Z_+, Z_+ \rangle &= \frac{4(\partial^+ F \overline{\partial^- F})}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} + \frac{4\tau^2}{(1 + \xi \bar{\xi})^4} - \left(\frac{-2\tau}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} \right)^2 \\ &= \frac{4(\partial^+ F \overline{\partial^- F})}{(1 + \xi \bar{\xi})^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle Z_+, Z_- \rangle &= \frac{2(\partial^+ F \overline{\partial^+ F} + \partial^- F \overline{\partial^- F})}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} + \frac{4\tau \bar{\tau}}{(1 + \xi \bar{\xi})^4} \\ &\quad - \frac{4\tau \bar{\tau}}{(1 + \xi \bar{\xi})^4} \\ &= \frac{2(\partial^+ F \overline{\partial^+ F} + \partial^- F \overline{\partial^- F})}{(1 + \xi \bar{\xi})^2}.\end{aligned}$$

Assim, resolvendo a equação 2.7 para α e β , obtemos que

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\overline{\partial^+ F}}{\overline{\partial^- F}} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\partial^- F}{\partial^+ F}.$$

Dependendo da orientação escolhida para o referencial nulo, teremos uma das duas soluções. Como queremos a orientação padrão para \mathbb{R}^3 , escolheremos a primeira solução.

Finalmente, a propriedade 3 implica que

$$\beta \bar{\beta} = \frac{(1 + \xi \bar{\xi})^2 (\partial^- F \overline{\partial^- F})}{2(\partial^- F \overline{\partial^- F} - \partial^+ F \overline{\partial^+ F})}.$$

Seja ϕ o argumento de β e seja ϑ o argumento de $-\overline{\partial^- F}$. Se $\phi \neq \vartheta$, então podemos rotacionar o referencial em $\phi - \vartheta$, fazendo com que o argumento de β coincida com o argumento de $-\overline{\partial^- F}$. Logo,

$$\beta = -\frac{\overline{\partial^- F}(1 + \xi \bar{\xi})}{\sqrt{2}(\partial^- F \overline{\partial^- F} - \partial^+ F \overline{\partial^+ F})}, \quad \alpha = \frac{\overline{\partial^+ F}(1 + \xi \bar{\xi})}{\sqrt{2}(\partial^- F \overline{\partial^- F} - \partial^+ F \overline{\partial^+ F})}$$

e $\theta = \phi - \vartheta$.

■

2.3 Geometria local das congruências

Proposição 2.3 *Seja $\{e_0, e_+, e_-\}$ um referencial nulo. A derivada de Lie de e_+ na direção de e_0 é dada por*

$$L_{e_0} e_+ = \bar{\rho} e_+ + \sigma e_-,$$

com

$$\rho = \frac{\partial^+ F \bar{\partial} \bar{\xi} - \partial^- F \bar{\partial} \bar{\xi}}{\partial^- F \bar{\partial}^- F - \partial^+ F \bar{\partial}^+ F} \quad (2.8)$$

e

$$\sigma = \frac{\bar{\partial}^+ F \partial \bar{\xi} - \bar{\partial}^- F \partial \bar{\xi}}{\partial^- F \bar{\partial}^- F - \partial^+ F \bar{\partial}^+ F}. \quad (2.9)$$

Demonstração: Temos que, se X e Y são campos vetoriais C^∞ , então

$$L_X Y = [X, Y] = XY - YX.$$

Portanto,

$$L_{e_0} e_+ = e_0 e_+ - e_+ e_0.$$

Como vimos na Proposição 2.2, $e_+ = \alpha Z_+ + \beta Z_-$, $e_- = \bar{e}_+$, em que $Z_+ = \frac{\partial}{\partial \nu} - \langle e_0, \frac{\partial}{\partial \nu} \rangle \frac{\partial}{\partial r}$, $Z_- = \bar{Z}_+$.

Observe que

$$\begin{aligned} e_0 e_+ &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} Z_+ + \alpha \frac{\partial Z_+}{\partial r} + \frac{\partial \beta}{\partial r} Z_- + \beta \frac{\partial Z_-}{\partial r}, \\ e_+ e_0 &= \alpha Z_+ \frac{\partial}{\partial r} + \beta Z_- \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

Como as derivadas parciais comutam,

$$Z_+ \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial Z_+}{\partial r} \quad \text{e} \quad Z_- \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial Z_-}{\partial r}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_{e_0} e_+ &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} Z_+ + \alpha \frac{\partial Z_+}{\partial r} + \frac{\partial \beta}{\partial r} Z_- + \beta \frac{\partial Z_-}{\partial r} - \alpha \frac{\partial Z_+}{\partial r} - \beta \frac{\partial Z_-}{\partial r} \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} Z_+ + \frac{\partial \beta}{\partial r} Z_- \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \langle L_{e_0} e_+, e_- \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial r} Z_+ + \frac{\partial \beta}{\partial r} Z_-, \bar{\alpha} Z_- + \bar{\beta} Z_+ \right\rangle \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} \left[\frac{2\partial^+ F (\partial^- F \bar{\partial}^- F + \partial^+ F \bar{\partial}^+ F) - 4\partial^- F \partial^+ F \bar{\partial}^- F}{\sqrt{2}(\partial^- F \bar{\partial}^- F - \partial^+ F \bar{\partial}^+ F)} \right] \\ &\quad + \frac{\partial \beta}{\partial r} \left[\frac{-2\partial^- F (\partial^- F \bar{\partial}^- F + \partial^+ F \bar{\partial}^+ F) + 4\partial^+ F \bar{\partial}^+ F \partial^- F}{\sqrt{2}(\partial^- F \bar{\partial}^- F - \partial^+ F \bar{\partial}^+ F)} \right] \\ &= -\sqrt{2} \left(\partial^+ F \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \partial^- F \frac{\partial \beta}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Temos que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial r} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\bar{\partial}\bar{\xi}(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F) - \bar{\partial}^+F(\bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F + \partial\bar{\xi}\bar{\partial}^-F - \partial\xi\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}\bar{\xi}\partial^+F)}{(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\bar{\partial}\bar{\xi}\partial^-F\bar{\partial}^-F - \bar{\partial}^+F(\bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F + \partial\bar{\xi}\bar{\partial}^-F - \partial\xi\bar{\partial}^+F)}{(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)^2} \right]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta}{\partial r} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial\bar{\xi}(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F) - \bar{\partial}^-F(\bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F + \partial\bar{\xi}\bar{\partial}^-F - \partial\xi\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}\bar{\xi}\partial^+F)}{(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial\bar{\xi}\partial^+F\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}^-F(\bar{\partial}\bar{\xi}\partial^+F + \partial\bar{\xi}\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F)}{(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)^2} \right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= -\partial^+F \left[\frac{\bar{\partial}\bar{\xi}\partial^-F\bar{\partial}^-F - \bar{\partial}^+F(\bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F + \partial\bar{\xi}\bar{\partial}^-F - \partial\xi\bar{\partial}^+F)}{(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)^2} \right] \\ &\quad -\partial^-F \left[\frac{\partial\bar{\xi}\partial^+F\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}^-F(\bar{\partial}\bar{\xi}\partial^+F + \partial\bar{\xi}\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F)}{(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)^2} \right] \\ &= \frac{(\partial\xi\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F)}{\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sigma &= \langle L_{e_0}e_+, e_+ \rangle \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial r} \left[\frac{4\bar{\partial}^+F\partial^+F\bar{\partial}^-F - 2\bar{\partial}^-F(\partial^-F\bar{\partial}^-F + \partial^+F\bar{\partial}^+F)}{\sqrt{2}(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)} \right] \\ &\quad + \frac{\partial\beta}{\partial r} \left[\frac{2\bar{\partial}^+F(\partial^-F\bar{\partial}^-F + \partial^+F\bar{\partial}^+F) - 4\bar{\partial}^-F\partial^-F\bar{\partial}^+F}{\sqrt{2}(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)} \right] \\ &= \sqrt{2} \left(\bar{\partial}^-F \frac{\partial\alpha}{\partial r} + \bar{\partial}^+F \frac{\partial\beta}{\partial r} \right) \\ &= -\bar{\partial}^-F \left[\frac{\bar{\partial}\bar{\xi}\partial^-F\bar{\partial}^-F - \bar{\partial}^+F(\bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F + \partial\bar{\xi}\bar{\partial}^-F - \partial\xi\bar{\partial}^+F)}{(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)^2} \right] \\ &\quad -\bar{\partial}^+F \left[\frac{\partial\bar{\xi}\partial^+F\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}^-F(\bar{\partial}\bar{\xi}\partial^+F + \partial\bar{\xi}\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F)}{(\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F)^2} \right] \\ &= \frac{(\partial\xi\bar{\partial}^+F - \bar{\partial}\bar{\xi}\bar{\partial}^-F)}{\partial^-F\bar{\partial}^-F - \partial^+F\bar{\partial}^+F}.\end{aligned}$$

Observe que $L_{e_0}e_+$ não tem componente na direção de e_0 , pois $\langle L_{e_0}e_+, e_0 \rangle = 0$.

■

Definição 2.3 *Uma congruência de retas é integrável se, localmente, existe uma superfície mergulhada S em \mathbb{R}^3 tal que S é ortogonal às retas da congruência.*

Proposição 2.4 *Uma congruência de retas é integrável se, e somente se, ρ é real.*

Demonstração: Seja $S \in \mathbb{R}^3$ uma superfície ortogonal às retas da congruência. Seja Y uma parametrização local de S . Então

$$Y(u, v) = X(u, v) + rN(u, v),$$

em que

$$X(u, v) = \left(\frac{2(F - \bar{F}\xi^2)}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}, -\frac{2(F\xi + \bar{F}\bar{\xi})}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \right), \quad N(u, v) = \left(\frac{2\xi}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}, \frac{1 - \xi\bar{\xi}}{1 + \xi\bar{\xi}} \right).$$

Como $Y_u = X_u + r_u N + rN_u$ e $Y_v = X_v + r_v N + rN_v$, temos que, ao tomar o produto interno de Y_u e Y_v por N ,

$$\begin{cases} r_u &= -\langle X_u, N \rangle \\ r_v &= -\langle X_v, N \rangle \end{cases} \quad (2.10)$$

Esse sistema possui solução quando $r_{uv} = r_{vu}$, ou seja, quando

$$\langle X_u, N_v \rangle = \langle X_v, N_u \rangle. \quad (2.11)$$

Mas $\frac{\partial}{\partial u} = \partial + \bar{\partial}$ e $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{i}(\bar{\partial} - \partial)$, em que $\partial = \frac{\partial}{\partial \xi}$ e $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}$. Logo, a equação (2.11) ser satisfeita equivale à equação

$$\langle \partial X, \bar{\partial} N \rangle = \langle \bar{\partial} X, \partial N \rangle$$

ser satisfeita.

Calculando ∂X e ∂N , temos que

$$\begin{aligned} \partial X &= \frac{2}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \left(\partial^+ F - r\partial\xi - \xi^2(\bar{\partial}^- \bar{F} - r\partial\bar{\xi}) - \frac{2(\xi\bar{F}\partial\xi + \xi F\partial\bar{\xi})}{1 + \xi\bar{\xi}} \right. \\ &\quad \left. - \bar{\xi}(\partial^+ F - r\partial\xi) - \xi(\bar{\partial}^- \bar{F} - r\partial\bar{\xi}) - \frac{(1 - \xi\bar{\xi})(F\partial\bar{\xi} + \bar{F}\partial\xi)}{1 + \xi\bar{\xi}} \right), \\ \partial N &= \frac{2}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} (\partial\xi - \xi^2\partial\bar{\xi}, -(\xi\partial\bar{\xi} + \bar{\xi}\partial\xi)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \partial X, \bar{\partial} N \rangle = \frac{2}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} [(\partial^+ F - r\partial\xi)\bar{\partial}\bar{\xi} + (\bar{\partial}^- \bar{F} - r\partial\bar{\xi})\bar{\partial}\bar{\xi}]$$

e

$$\langle \bar{\partial} X, \partial N \rangle = \frac{2}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} [(\bar{\partial}^+ \bar{F} - r\bar{\partial}\bar{\xi})\partial\xi + (\partial^- F - r\bar{\partial}\xi)\partial\bar{\xi}].$$

Logo, (2.10) possui solução se, e somente se,

$$\bar{\partial}^+ \bar{F}\partial\xi - \bar{\partial}^- \bar{F}\bar{\partial}\xi = \partial^+ F\bar{\partial}\bar{\xi} - \partial^- F\partial\bar{\xi},$$

o que equivale a ρ ser real.



Proposição 2.5 *Seja S uma superfície ortogonal a uma congruência de retas. Então S é parametrizada localmente por*

$$X(u, v) + rN(u, v)$$

com r satisfazendo

$$\bar{\partial}r = \frac{2F\bar{\partial}\bar{\xi} + 2\bar{F}\bar{\partial}\xi}{1 + \xi\bar{\xi}^2}.$$

Demonstração: Temos que

$$\bar{\partial}r = \frac{r_u + ir_v}{2}.$$

Vimos na proposição anterior que $r_u = -\langle X_u, N \rangle$ e $r_v = -\langle X_v, N \rangle$. Logo, $\bar{\partial}r = -\langle \bar{\partial}X, N \rangle$. Mas

$$\langle \bar{\partial}X, N \rangle = -\frac{2(\bar{F}\bar{\partial}\xi + F\bar{\partial}\bar{\xi})}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}.$$

Portanto,

$$\bar{\partial}r = \frac{2(\bar{F}\bar{\partial}\xi + F\bar{\partial}\bar{\xi})}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}.$$



Capítulo 3

Métrica de Kähler em \mathcal{L}

Nesse capítulo faremos um estudo sobre o fibrado tangente de uma variedade, tendo como interesse o $T\mathbb{S}^2$, que nos serve como ambiente de estudo. Na seção 3.1, definiremos uma métrica de Kähler em $T\mathbb{S}^2$. Também caracterizaremos uma congruência de retas Lagrangiana ortogonal a uma superfície mínima. Como contribuição original, definiremos na seção 3.2 invariantes induzidos pela métrica de Kähler e daremos uma interpretação geométrica para esses invariantes em termos de pontos focais e pontos limites. O conteúdo da seção 3.1 foi baseado principalmente em [9] e [10].

3.1 Métrica Canônica de Kähler em Fibrados Tangentes

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão par.

Definição 3.1 *Uma estrutura quase complexa em M é uma aplicação linear $\mathbb{J} : T_p M \rightarrow T_p M$ para todo $p \in M$ satisfazendo $\mathbb{J} \circ \mathbb{J} = -Id$.*

Definição 3.2 *Uma estrutura simplética em M é uma 2-forma fechada não degenerada Ω . Ela é compatível com a estrutura quase complexa se $\Omega(\mathbb{J}\cdot, \mathbb{J}\cdot) = \Omega(\cdot, \cdot)$.*

Dada uma estrutura quase complexa e uma estrutura simplética compatível, definiremos um 2-tensor simplético não degenerado $\mathbb{G} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mathbb{G}(\cdot, \cdot) = \Omega(\mathbb{J}\cdot, \cdot)$. Uma variedade M com essa tripla de estruturas é chamada *variedade de Kähler*.

Nosso objetivo nessa seção é mostrar que $T\mathbb{S}^2$ é uma variedade de Kähler e, assim, definir uma métrica em \mathcal{L} . Para tal, considere ξ coordenada holomorfa em um aberto de \mathbb{S}^2 dada pela projeção estereográfica pelo pólo sul. Temos então que a métrica nesse aberto de \mathbb{S}^2 é dada por

$$\frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} d\xi d\bar{\xi}.$$

Agora considere (ξ, η) e (ξ, x) coordenadas em TS^2 e T^*S^2 , respectivamente. Aqui estamos identificando (ξ, η) com $\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}$ e (ξ, x) com $x d\xi + \bar{x} d\bar{\xi}$. Afim de definir uma estrutura simplética Ω em TS^2 , iremos considerar g como uma aplicação de TS^2 em T^*S^2 e faremos o *pull back* da forma simplética canônica de T^*S^2 .

Temos que a forma simplética canônica de T^*S^2 é dada por

$$\Omega^* = dx \wedge d\xi + d\bar{x} \wedge d\bar{\xi}$$

e g leva (ξ, η) em $\left(\xi, \frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \bar{\eta}\right)$. Logo, fazendo o *pull back* da forma simplética canônica de T^*S^2 , teremos

$$\begin{aligned} \Omega &= g^* \Omega^* \\ &= \frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} (d\bar{\eta} \wedge d\xi + d\eta \wedge d\bar{\xi}) - \frac{8\xi\bar{\eta}}{(1 + \xi\bar{\xi})^3} d\bar{\xi} \wedge d\xi - \frac{8\bar{\xi}\eta}{(1 + \xi\bar{\xi})^3} d\xi \wedge d\bar{\xi} \\ &= 2\text{Re} \left(\frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} d\eta \wedge d\bar{\xi} - \frac{8\bar{\xi}\eta}{(1 + \xi\bar{\xi})^3} d\xi \wedge d\bar{\xi} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Considere agora uma aplicação linear $\mathbb{J} : T_p TS^2 \rightarrow T_p TS^2$, $p \in TS^2$, tal que

$$\mathbb{J} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathbb{J} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = -\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbb{J} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbb{J} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x},$$

em que $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ é uma base de $T_p TS^2$.

Temos que $\mathbb{J} \circ \mathbb{J} = -Id$. Logo, \mathbb{J} é uma estrutura quase complexa em TS^2 . Afim de mostrar que \mathbb{J} é compatível com a estrutura simplética Ω , temos que mostrar que

$$\Omega(.,.) = \Omega(\mathbb{J}., \mathbb{J}.). \quad (3.2)$$

Para isso, é suficiente mostrar que a equação (3.2) vale para pares de vetores distintos da base $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ de $T_p TS^2$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \Omega \left(\mathbb{J} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \mathbb{J} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right) &= \Omega \left(\frac{\partial}{\partial v}, -\frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= -\Omega \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= \Omega \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right), \\ \Omega \left(\mathbb{J} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right), \mathbb{J} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \right) &= \Omega \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= -\Omega \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= \Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Omega\left(\mathbb{J}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \mathbb{J}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) &= \Omega\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= -\frac{8}{(1+\xi\bar{\xi})^2} \\
&= \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x}\right), \\
\Omega\left(\mathbb{J}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \mathbb{J}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) &= \Omega\left(\frac{\partial}{\partial v}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= 0 = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Logo, \mathbb{J} é uma estrutura quase complexa compatível com a estrutura simplética Ω . Definimos agora um 2-tensor simplético não degenerado $\mathbb{G} : T_p TS^2 \rightarrow T_p TS^2$ por

$$\mathbb{G}(\cdot, \cdot) = \Omega(\mathbb{J}\cdot, \cdot).$$

Pela equação (3.1), temos então que

$$\mathbb{G} = 2Im\left(\frac{4}{(1+\xi\bar{\xi})^2}d\eta d\bar{\xi} - \frac{8\bar{\xi}\eta}{(1+\xi\bar{\xi})^3}d\xi d\bar{\xi}\right). \quad (3.3)$$

Daí, TS^2 com as estruturas Ω , \mathbb{J} e \mathbb{G} é uma estrutura de Kähler com métrica de Kähler dada pela equação (3.3).

Agora iremos demonstrar um resultado de [9] que nos dá uma condição para que uma congruência de retas seja Lagrangiana, cuja definição está abaixo.

Definição 3.3 *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Seja Y uma subvariedade de M e considere a aplicação de inclusão $i : Y \hookrightarrow M$. Então Y é **Lagrangiana** se, e somente se, $i^*\omega = 0$ e $\dim Y = \frac{1}{2}\dim M$.*

Proposição 3.1 *Uma congruência de retas $\Sigma \subset \mathcal{L}$ é Lagrangiana com respeito a estrutura simplética Ω se, e somente se, a congruência associada é integrável.*

Demonstração: Suponha que Σ seja dada parametricamente por $f : \Sigma \rightarrow \mathcal{L}, \nu \mapsto (\xi(\nu, \bar{\nu}), \mathcal{F}(\nu, \bar{\nu}))$. Então, fazendo o *pull-back* da estrutura simplética canônica Ω de \mathcal{L} para Σ , teremos, usando a expressão (3.1)

$$f^*\Omega = 4Re\left(\left(\partial F \bar{\partial} \bar{\xi} + \partial \bar{F} \bar{\partial} \xi - \frac{2\bar{\xi}F}{1+\xi\bar{\xi}}(\partial\xi \bar{\partial}\bar{\xi} - \bar{\partial}\xi \partial\bar{\xi})\right) \frac{d\nu \wedge d\bar{\nu}}{(1+\xi\bar{\xi})^2}\right),$$

em que $\partial = \frac{\partial}{\partial \nu}$.

Por outro lado, segue da Proposição 2.3 que

$$\rho = \frac{\partial^+ F \bar{\partial} \bar{\xi} - \partial^- F \partial \bar{\xi}}{\partial^- F \bar{\partial} \bar{F} - \partial^+ F \bar{\partial}^+ F}$$

e, como visto na Proposição 2.4, uma congruência é integrável se, e somente se, ρ for real. Observe que ρ é real se, e somente se,

$$\text{Im}(\partial^+ F \bar{\partial} \bar{\xi} - \partial^- F \partial \bar{\xi}) = 0$$

que equivale a,

$$\partial F \bar{\partial} \bar{\xi} + \partial \bar{F} \bar{\partial} \xi - \bar{\partial} \bar{F} \partial \xi - \bar{\partial} F \partial \bar{\xi} + (\bar{\partial} \bar{\xi} \partial \xi - \bar{\partial} \xi \partial \bar{\xi}) \left(\frac{2\xi \bar{F} - 2\bar{\xi} F}{1 + \xi \bar{\xi}} \right) = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} & 4\text{Re} \left(\left(\partial F \bar{\partial} \bar{\xi} + \partial \bar{F} \bar{\partial} \xi - \frac{2\xi \bar{F}}{1 + \xi \bar{\xi}} (\partial \xi \bar{\partial} \bar{\xi} - \bar{\partial} \xi \partial \bar{\xi}) \right) \frac{d\nu \wedge d\bar{\nu}}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} \right) \\ &= 2 \left(\partial F \bar{\partial} \bar{\xi} + \partial \bar{F} \bar{\partial} \xi - \bar{\partial} \bar{F} \partial \xi - \bar{\partial} F \partial \bar{\xi} + (\bar{\partial} \bar{\xi} \partial \xi - \bar{\partial} \xi \partial \bar{\xi}) \left(\frac{2\xi \bar{F} - 2\bar{\xi} F}{1 + \xi \bar{\xi}} \right) \right) \frac{d\nu \wedge d\bar{\nu}}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} \end{aligned}$$

que vai se anular se, e somente se, ρ for real. ■

Abaixo, iremos demonstrar um resultado de [10] que caracteriza congruências de retas Lagrangianas ortogonais a superfícies mínimas. Para isso, precisaremos da seguinte definição.

Definição 3.4 *Seja $\Sigma \subset \mathcal{L}$ uma congruência de retas parametrizada localmente por $(u, v) \in U$, U aberto de \mathbb{R}^2 . Para cada reta dessa congruência, temos definidos dois pontos limites. O ponto médio do segmento que liga os pontos limites é chamado **ponto médio** e o plano que passa por esse ponto e é perpendicular à direção da reta é chamado **plano médio**. Além disso, o lugar geométrico dos pontos médios é a **superfície média**.*

Teorema 3.1 *Uma congruência de retas Lagrangiana $\Sigma \subset \mathcal{L}$ é ortogonal a uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 sem pontos planares se, e somente se, a congruência é o gráfico $\xi \mapsto (\xi, \eta = F(\xi, \bar{\xi}))$ de uma seção local do fibrado canônico com*

$$\bar{\partial} \left(\frac{\partial \bar{F}}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} \right) = 0, \quad (3.4)$$

em que (ξ, η) são as coordenadas canônicas em \mathcal{L} , tirando o pólo sul, e ∂ representa diferenciação com respeito a ξ .

Demonstração: Seja S uma superfície mínima sem pontos planares e Σ sua congruência normal. Seja $\nu = u + iv$, $(u, v) \in U$, U aberto de \mathbb{R}^2 , e seja F a função que determina Σ em U . Então Σ é dada por $\nu \mapsto (\xi(\nu, \bar{\nu}), F(\nu, \bar{\nu}))$. Como a congruência é normal, temos que $\xi(\nu, \bar{\nu})$ pode ser vista como a aplicação de Gauss de S . Como S não

possui pontos planares e é mínima, $K = \det(d\xi) \neq 0$. Logo, existe um aberto de \mathbb{R}^2 tal que podemos identificar ξ com ν nesse aberto. Portanto, Σ é o gráfico $\xi \mapsto (\xi, F(\xi, \bar{\xi}))$ de uma seção do fibrado canônico. Então, os coeficientes ρ e σ vistos na Proposição 2.3 são dados por

$$\rho = \frac{\kappa}{\partial F \partial \bar{F} - \kappa \bar{\kappa}} \quad \sigma = \frac{\partial \bar{F}}{\partial F \partial \bar{F} - \kappa \bar{\kappa}},$$

em que

$$\kappa = \partial F + r - \frac{2\xi F}{1 + \xi \bar{\xi}}.$$

Como a congruência de retas é normal a S , pela Proposição 2.4, ρ é real e, consequentemente, κ é real. Observe que os conceitos de ponto médio e superfície média independem da nossa superfície de referência, então iremos considerar, aqui, S como sendo a superfície de referência.

Como vimos na observação 1.2, $\frac{\bar{w}_M + \bar{w}_m}{2} = \frac{H}{K} = 0$, pois S é mínima. Logo, nossa superfície média irá coincidir com S . O cálculo da função suporte h da superfície média nos dá que

$$h = -\frac{(\phi_u + \psi_v)}{2} + 2\frac{(u\phi + v\psi)}{1 + u^2 + v^2},$$

em que ϕ e ψ são tais que $F = \phi + i\psi$. Omitiremos os detalhes desse cálculo agora pois o faremos no próximo capítulo.

Por outro lado, a função suporte da S é r e então devemos ter

$$r = -\frac{(\phi_u + \psi_v)}{2} + 2\frac{(u\phi + v\psi)}{1 + u^2 + v^2}. \quad (3.5)$$

Mas $\kappa = \frac{(\phi_u + \psi_v)}{2} + r - 2\frac{(u\phi + v\psi)}{1 + u^2 + v^2}$. Logo, $\kappa = 0$ em S , e então $\rho = 0$ em S .

Agora observe que

$$\begin{aligned} -\partial \bar{\kappa} &= -\partial \kappa \\ &= -\partial \bar{\partial} \bar{F} - \partial r + \frac{2(\bar{F} + \xi \partial \bar{F})}{1 + \xi \bar{\xi}} - \frac{2\xi \bar{\xi} \bar{F}}{(1 + \xi \bar{\xi})^2}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.5, $\partial r = \frac{2\bar{F}}{(1 + \xi \bar{\xi})^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} -\partial \kappa &= -\partial \bar{\partial} \bar{F} - \frac{2\bar{F}}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} + \frac{2(\bar{F} + \xi \partial \bar{F})}{1 + \xi \bar{\xi}} - \frac{2\xi \bar{\xi} \bar{F}}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} \\ &= -\partial \bar{\partial} \bar{F} + \frac{2\xi \partial \bar{F}}{1 + \xi \bar{\xi}} \\ &= -\bar{\partial} \partial \bar{F} + \frac{2\xi \partial \bar{F}}{1 + \xi \bar{\xi}}, \end{aligned}$$

pois as derivadas parciais comutam. Por outro lado,

$$(1 + \xi \bar{\xi})^2 \bar{\partial} \left(\frac{-\partial \bar{F}}{(1 + \xi \bar{\xi})^2} \right) = -\bar{\partial} \partial \bar{F} + \frac{2\xi \partial \bar{F}}{1 + \xi \bar{\xi}}.$$

Logo,

$$-\partial\kappa = (1 + \xi\bar{\xi})^2 \bar{\partial} \left(\frac{-\partial\bar{F}}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \right). \quad (3.6)$$

Como $\rho = 0$, $\kappa = 0$ e então a condição holomorfa 3.4 é satisfeita.

Reciprocamente, suponha que (3.4) seja satisfeita para uma congruência de retas Lagrangiana Σ dada como o gráfico de uma seção local. Então, pela identidade (3.6), $\kappa = C$ para alguma constante real C . Como as superfícies ortogonais se movem ao longo da congruência de retas em \mathbb{R}^3 , κ vai mudando para $\kappa + \text{constante}$. Logo, quando essa constante for igual a $-C$, teremos $\kappa = 0$ e então $\rho = 0$, isto é, uma superfície mínima ortogonal a Σ . ■

3.2 Invariante natural induzido pela métrica \mathbb{G}

Seja $\Sigma \subset \mathcal{L}$ uma congruência de retas dada por $(\xi, F(\xi))$ e considere a métrica \mathbb{G} restrita a Σ . Em coordenadas $\xi = u + iv$, escrevemos

$$\mathbb{G}|_{\Sigma} = \bar{g}_{11} du^2 + 2\bar{g}_{12} dudv + \bar{g}_{22} dv^2.$$

Definimos \bar{K} como sendo a razão entre os elementos de área definidos por \mathbb{G} em $(\xi, F(\xi))$ e pela métrica esférica em ξ , ou seja,

$$\bar{K}(\xi) = \frac{\sqrt{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}^2}}{4(1 + \xi\bar{\xi})^2}. \quad (3.7)$$

Vamos agora obter uma expressão para \bar{K} e interpretar esse invariante em termos dos pontos focais da congruência Σ .

Proposição 3.2 *Seja $\Sigma \subset \mathcal{L}$ uma congruência de retas dada por $(\xi, F(\xi))$. Então*

$$\bar{K}^2 = -d_1^2,$$

em que $d_1 = w_{f_2} - w_{f_1}$ e w_{f_1}, w_{f_2} são dados por (1.18).

Demonstração: Vimos na equação (3.3) que \mathbb{G} é dada por

$$\mathbb{G} = 2Im \left(\frac{4}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} d\eta d\bar{\xi} - \frac{8\bar{\xi}\eta}{(1 + \xi\bar{\xi})^3} d\xi d\bar{\xi} \right).$$

Em termos de (u, v) , temos que

$$\begin{aligned} \eta &= F(u, v) = \phi + i\psi, \\ d\bar{\xi} &= du - idv. \end{aligned}$$

em que ϕ e ψ são funções de (u, v) harmônicas. Portanto, $d\eta = d\phi + id\psi$ e então

$$\text{Im}(d\eta d\bar{\xi}) = \psi_u du^2 + (\psi_v - \phi_u) dudv - \phi_v dv^2 \quad (3.8)$$

e

$$\text{Im}\left(-\frac{8\bar{\xi}\eta}{(1+\xi\bar{\xi})^3}\right) = -\frac{8(u\psi - v\phi)}{(1+\xi\bar{\xi})^3}. \quad (3.9)$$

Substituindo as expressões (3.8) e (3.9) na expressão da métrica \mathbb{G} , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{G}|_{\Sigma} = & \frac{8}{(1+\xi\bar{\xi})^2} \left[\left(\psi_u - \frac{2}{1+\xi\bar{\xi}}(u\psi - v\phi) \right) du^2 + (\psi_v - \phi_u) dudv \right. \\ & \left. - \left(\phi_v + \frac{2}{1+\xi\bar{\xi}}(u\psi - v\phi) dv^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} \bar{g}_{11} = \frac{8}{(1+\xi\bar{\xi})^2} \left(\psi_u - \frac{2(u\psi - v\phi)}{1+\xi\bar{\xi}} \right) \\ \bar{g}_{12} = \frac{4}{(1+\xi\bar{\xi})^2} (\psi_v - \phi_u) \\ \bar{g}_{22} = \frac{-8}{(1+\xi\bar{\xi})^2} \left(\phi_v + \frac{2(u\psi - v\phi)}{1+\xi\bar{\xi}} \right) \end{cases}$$

O cálculo direto de \bar{K} nos mostra que

$$\bar{K}^2 + d_1^2 = 0.$$

■

No caso em que \bar{w}_{f_1} e \bar{w}_{f_2} são reais, d_1 é a distância entre os pontos focais e então quando a distância entre os pontos focais for constante, \bar{K} também o será.

Proposição 3.3 *Sejam $\Sigma \subset \mathcal{L}$ uma congruência de retas Lagrangiana dada por $(\xi, F(\xi))$ e S superfície ortogonal à congruência de retas associada a Σ com curvatura Gaussiana $K \neq 0$. Então*

$$|\bar{K}| = \frac{\sqrt{H^2 - K}}{|K|},$$

em que H é a curvatura média de S .

Demonstração: No caso em que Σ é Lagrangiana, a congruência de retas é normal e os pontos limites coincidem com os focais. Além disso, neste caso a distância entre os pontos limites é dada como a diferença entre as raios de curvatura $\frac{1}{k_1}$ e $\frac{1}{k_2}$, k_1 e k_2 curvaturas principais, das superfícies ortogonais à congruência de retas, ou seja,

$$|\bar{w}_m - \bar{w}_M| = \left| \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2} \right| = \frac{\sqrt{H^2 - K}}{|K|}.$$

Então,

$$|\bar{K}| = \frac{\sqrt{H^2 - K}}{|K|}.$$



Para uma superfície com elemento de área dA , temos que $dA_s = KdA$, em que dA_s é o elemento de área esférico associado à superfície pela aplicação de Gauss. Logo, se $d\bar{A}$ é o elemento de área de Σ em relação à métrica \mathbb{G} , temos

$$d\bar{A} = \bar{K}dA_s = \pm i \frac{\sqrt{H^2 - \bar{K}}}{K} dA_s = \pm i \frac{\sqrt{H^2 - \bar{K}}}{K} KdA = \pm i \sqrt{H^2 - \bar{K}} dA.$$

Assim, o problema variacional para o funcional

$$S \mapsto \int_S \frac{H^2 - K}{K} dA$$

para superfícies de \mathbb{R}^3 equivale ao problema variacional para o funcional

$$\Sigma \mapsto - \int_{\Sigma} \bar{K} d\bar{A},$$

com $\Sigma \in \mathcal{L}$ Lagrangiana e assumindo variações Hamiltonianas, ou seja, variações que conservem a propriedade Lagrangiana. Observe também que entre as congruências em \mathcal{L} com $\bar{K} = \text{constante}$ estão as congruências pseudoesféricas, que são congruências caracterizadas como tendo as distâncias entre os pontos focais e entre os pontos limites constantes.

Observação 3.1 *Tirando o traço de \mathbb{G} pela métrica esférica e escrevendo \bar{H} como sendo $-\frac{1}{2}$ desse traço, temos que $\bar{H} = 0$ se, e somente se,*

$$\psi_u - \phi_v - \frac{4}{1 + \xi\xi}(u\phi - v\psi) = 0.$$

Mas analisando a equação (2.8), podemos ver que, nessa parametrização,

$$Im(\rho) = \frac{1}{2}(\psi_u - \phi_v) - \frac{1}{1 + \xi\xi}(u\psi - v\phi).$$

Logo, $\bar{H} = 0$ equivale a ρ ser real, ou seja, equivale à congruência ser Lagrangiana.

Para encerrar essa seção, obteremos uma expressão para \bar{H} e interpretaremos esse invariante em termos da distância entre os pontos focais e a distância entre os pontos limites.

Proposição 3.4 *Seja $\Sigma \subset \mathcal{L}$ uma congruência de retas dada por $(\xi, F(\xi))$. Então*

$$\bar{H}^2 = d^2 - d_1^2, \tag{3.10}$$

em que $d = \bar{w}_M - \bar{w}_m$, w_M e w_m dados por (1.8), é a distância entre os pontos limites e d_1 é como visto na Proposição 3.2.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}\bar{H} &= -\frac{8}{(1 + \xi\bar{\xi})^2} \left(\psi_u - \phi_v - \frac{4(u\psi - v\phi)}{1 + \xi\bar{\xi}} \right) \frac{(1 + \xi\bar{\xi})^2}{8} \\ &= -\psi_u + \phi_v - \frac{4(u\psi - v\phi)}{1 + \xi\bar{\xi}} e \\ d &= \sqrt{(\psi_u + \phi_v)^2 + (\psi_v - \phi_u)^2}.\end{aligned}$$

O cálculo direto nos dá que

$$\bar{H}^2 + d_1^2 = d^2.$$

■

Logo, no caso em que d_1 é real, \bar{H} vai ser dado com a diferença entre os quadrados das distâncias entre os pontos limites e entre os pontos focais. Observe que quando a congruência de retas for Lagrangiana, teremos que a distância entre os pontos limites e entre os pontos focais vai ser igual, e então obtemos uma nova forma de mostrar que, nesse caso, $\bar{H} = 0$. Além disso observe que, pela Proposição 3.2, a equação (3.10) pode ser reescrita como

$$\bar{H}^2 - \bar{K}^2 = d^2.$$

Capítulo 4

Uma generalização para um Teorema de Ribaucour

Neste capítulo, vamos primeiramente utilizar o formalismo introduzido nos capítulos anteriores para fornecer uma demonstração do Teorema de Ribaucour que fornece um método para gerar superfícies mínimas a partir das chamadas congruências isotrópicas. Iremos também demonstrar uma generalização desse Teorema, que nos permitirá gerar as chamadas superfícies Laguerre mínimas a partir de congruências de retas. No final, ilustraremos nossos resultados com alguns exemplos. Ao longo desse capítulo, estaremos trabalhando com congruências de retas $\Sigma \subset \mathcal{L}$ que são gráficos $\xi \mapsto (\xi, F(\xi))$ de uma seção local no fibrado canônico.

Definição 4.1 *Uma congruência é dita isotrópica se a distância entre os pontos limites é zero.*

Vamos agora estudar o comportamento da envoltória dos planos médios em determinadas situações. Primeiramente, vamos ver sob quais condições uma congruência de retas é isotrópica.

Vimos no capítulo 2 que a congruência $\Sigma \in \mathcal{L}$ pode ser parametrizada localmente por

$$X(u, v) + rN(u, v)$$

em que

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \frac{2(F - \bar{F}\xi^2)}{1 + \xi\bar{\xi}^2} - \frac{2(F\bar{\xi} + \bar{F}\xi)}{1 + \xi\bar{\xi}^2}, \\ N(u, v) &= \frac{2\xi}{1 + \xi\bar{\xi}} + \frac{(1 - \xi\bar{\xi})}{1 + \xi\bar{\xi}}. \end{aligned}$$

Observe que podemos escrever F como sendo $F(u, v) = \phi(u, v) + i\psi(u, v)$, em que $\phi(u, v)$ e $\psi(u, v)$ são funções suaves. Como visto na Proposição 1.3, os coeficientes da

primeira e da segunda formas fundamentais de Kummer são dados por

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle N_u, N_u \rangle = \frac{4}{1 + u^2 + v^2}, \\ g_{12} &= \langle N_u, N_v \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle N_v, N_v \rangle = \frac{4}{1 + u^2 + v^2}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e &= \langle X_u, N_u \rangle = \frac{4\phi_u}{(1 + u^2 + v^2)^2} - \frac{8(u\phi + v\psi)}{(1 + u^2 + v^2)^3}, \\ f &= \langle X_v, N_u \rangle = \frac{4\phi_v}{(1 + u^2 + v^2)^2} + \frac{8(u\psi - v\phi)}{(1 + u^2 + v^2)^3}, \\ f' &= \langle X_u, N_v \rangle = \frac{4\psi_u}{(1 + u^2 + v^2)^2} + \frac{8(v\phi - u\psi)}{(1 + u^2 + v^2)^3}, \\ g &= \langle X_v, N_v \rangle = \frac{4\psi_v}{(1 + u^2 + v^2)^2} - \frac{8(u\phi + v\psi)}{(1 + u^2 + v^2)^3}. \end{aligned}$$

A envoltória dos planos médios E associada a uma congruência Σ terá N como aplicação de Gauss e a distância algébrica do plano médio à origem será sua função suporte h , em que $h(p) = \frac{\bar{w}_M(p) + \bar{w}_m(p)}{2}$, $p \in E$, $\bar{w}_M(p)$ e $\bar{w}_m(p)$ como visto na Proposição 1.3. Então,

$$h = -\frac{g + e}{g_{11}} = -\frac{(\phi_u + \psi_v)}{2} + 2\frac{(u\phi + v\psi)}{1 + u^2 + v^2}. \quad (4.1)$$

Podemos, ainda, calcular a distância entre os pontos limites, que vai ser dada por

$$d = \bar{w}_M - \bar{w}_m = \sqrt{(\psi_u + \phi_v)^2 + (\psi_v - \phi_u)^2}. \quad (4.2)$$

É imediato verificar que a congruência é isotrópica se, e somente se, F é holomorfa. Podemos então obter o resultado de Ribaucour, pois se F é holomorfa, a distância entre os pontos limites dada pela equação (4.2) se anula.

Teorema 4.1 *Seja $\Sigma \subset \mathcal{L}$ uma congruência de retas dada em termos de coordenadas $(\xi, F(\xi))$. Se F é holomorfa, então a envoltória dos planos médios de Σ é uma superfície mínima.*

Demonstração: Pela Proposição 1.1,

$$H = \frac{\text{traço}(-hId - Hess(h))}{2\det(hId + Hess(h))},$$

em que h é a função suporte associada à envoltória dos planos médios, $Hess(h)$ é a matriz Hessiana de h e Id é a matriz identidade.

Temos que $H = 0$ equivale a $\text{traço}(-hId - Hess(h)) = 0$. Mas

$$\begin{aligned}
\text{traço}(-hId - \text{Hess}(h)) &= (-2h - \Delta h) \\
&= \left(-2h - \frac{1}{g_{11}}(h_{uu} + h_{vv}) \right) \\
&= (\psi_v + \phi_u) - 4 \frac{(u\phi + v\psi)}{1 + u^2 + v^2} + 2uv(\phi_v + \psi_u) \\
&\quad - \frac{\phi_u((1 + v^2)^2 - u^4) + \psi_v((1 + u^2)^2 - v^4) - 4(u\phi + v\psi)}{(1 + u^2 + v^2)} \\
&= -(\psi_v + \phi_u) + 2uv(\phi_v + \psi_u) - (\phi_u(1 + v^2 - u^2) \\
&\quad + \psi_v(1 + u^2 - v^2)) \\
&= 2uv(\phi_v + \psi_u) + (u^2 - v^2)(\phi_u - \psi_v) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois, como F é holomorfa, $\phi_u = \psi_v$ e $\phi_v = -\psi_u$. Logo, a envoltória dos planos médios é, de fato, uma superfície mínima. ■

A demonstração dada por Ribaucour pode ser encontrada em [15].

Ao estudar o Teorema de Ribaucour, um dos questionamentos que surgiram foi se poderíamos generalizá-lo em algum sentido. Como no Teorema acima usamos o fato de F ser holomorfa, o mais natural foi ver se algum resultado surgia ao generalizarmos F a uma função harmônica. Obtivemos um resultado satisfatório que envolve superfícies Laguerre mínimas. A definição desse tipo de superfícies será dada abaixo.

Definição 4.2 *Seja S uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana K não nula. S é dita Laguerre Mínima se*

$$\Delta_{S^2} \left(\frac{H}{K} \right) = 0,$$

em que Δ é o Laplaciano com respeito à métrica canônica esférica e H é a curvatura média da superfície.

Essas superfícies são chamadas mínimas pois elas são o ponto crítico do funcional energia

$$S \mapsto \int_S \frac{(H^2 - K)}{K} dA.$$

Observe que toda superfície mínima sem pontos planares é uma superfície Laguerre Mínima, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

O resultado que obtivemos foi, então, o seguinte:

Teorema 4.2 *Seja $\Sigma \subset \mathcal{L}$ uma congruência de retas dada em termos de coordenadas $(\xi, F(\xi))$. Se F é harmônica, então a envoltória dos planos médios de Σ é uma superfície Laguerre mínima.*

Demonstração: A demonstração consiste basicamente em calcular o Laplaciano de $\frac{H}{K}$. Como a projeção estereográfica é conforme, basta calcular o Laplaciano nas coordenadas (u, v) , obtendo

$$\Delta Q = \frac{1}{g_{11}}(Q_{uu} + Q_{vv})$$

em que $Q = \frac{H}{K}$.

Pela Proposição 1.1, temos que

$$\begin{aligned} Q &= \frac{H}{K} = \frac{1}{2} \text{traço}(-hId - \text{Hess}(h)) \\ &= \frac{1}{2}(-2h - \Delta h) \\ &= \frac{1}{2} \left(-2h - \frac{1}{g_{11}}(h_{uu} + h_{vv}) \right) \\ &= -\frac{1}{2}(\psi_v + \phi_u) - 2 \frac{(u\phi + v\psi)}{1 + u^2 + v^2} + uv(\phi_v + \psi_u) \\ &\quad - \frac{\phi_u((1 + v^2)^2 - u^4) + \psi_v((1 + u^2)^2 - v^4) - 4(u\phi + v\psi)}{2(1 + u^2 + v^2)} \\ &= -\frac{1}{2}(\psi_v + \phi_u) + uv(\phi_v + \psi_u) - \frac{\phi_u(1 + v^2 - u^2) + \psi_v(1 + u^2 - v^2)}{2} \\ &= uv(\phi_v + \psi_u) + \frac{(u^2 - v^2)(\phi_u - \psi_v)}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Q_u &= v(\phi_v + \psi_u) + uv(\phi_{vu} + \psi_{uu}) + u(\phi_u - \psi_v) + \frac{(u^2 - v^2)(\phi_{uu} - \psi_{vu})}{2}, \\ Q_v &= u(\phi_v + \psi_u) + uv(\phi_{vv} + \psi_{uv}) - v(\phi_u - \psi_v) + \frac{(u^2 - v^2)(\phi_{uv} - \psi_{vv})}{2} \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} Q_{uu} &= v(\phi_{vu} + \psi_{uu}) + v(\phi_{vu} + \psi_{uu}) + uv(\phi_{vuu} + \psi_{uuu}) + (\psi_u - \psi_v) \\ &\quad + u(\phi_{uu} - \psi_{vu}) + \frac{(\phi_{uuu} - \psi_{vuu})(u^2 - v^2)}{2} + u(\phi_{uu} - \psi_{vu}) \\ Q_{vv} &= u(\phi_{vv} + \psi_{uv}) + u(\phi_{vv} + \psi_{uv}) + uv(\phi_{vvv} + \psi_{uvv}) - (\phi_u - \psi_v) \\ &\quad - v(\phi_{uv} - \psi_{vv}) + \frac{(u^2 - v^2)(\phi_{uvv} - \psi_{vvv})}{2} - v(\phi_{uv} - \psi_{vv}). \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} Q_{uu} + Q_{vv} &= 2uv(\psi_{uu} + \psi_{vv}) + uv(\phi_{uuv} + \phi_{vvv} + \psi_{uuu} + \psi_{vvv}) + 2u(\phi_{vv} + \phi_{uu}) \\ &\quad + \frac{(u^2 - v^2)(\phi_{uuu} + \phi_{uuv} - \psi_{uuv} - \psi_{vvv})}{2} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

pois, como F é harmônica, $\phi_{uu} = -\phi_{vv}$ e $\psi_{uu} = -\psi_{vv}$.

Portanto,

$$\Delta Q = \frac{1}{g_{11}}(Q_{uu} + Q_{vv}) = 0$$

e a envoltória dos planos médios é, de fato, uma superfície Laguerre mínima. ■

Outra questão que surgiu foi se conseguiríamos uma recíproca do resultado acima, ou seja, se toda superfície Laguerre Mínima pode ser descrita como a envoltória dos planos médios de uma congruência descrita por F harmônica. A resposta foi positiva e demonstraremos esse fato no resultado abaixo.

Teorema 4.3 *Seja S uma superfície Laguerre mínima. Então S pode ser descrita localmente como a envoltória dos planos médios de uma congruência de retas $\Sigma \subset \mathcal{L}$ dada em termos de coordenadas $(\xi, F(\xi))$ com F harmônica.*

Demonstração: A idéia da demonstração consiste em mostrar que podemos determinar F em termos da função suporte de S . Primeiramente, vamos determinar a função suporte h de S .

Vimos na Proposição 1.1 que

$$\frac{H}{K} = -h - \frac{\Delta h}{2}.$$

Como E é Laguerre mínima, segue que $\Delta \left(\frac{H}{K} \right) = 0$, ou seja,

$$2\Delta h + \Delta^2 h = 0. \tag{4.4}$$

Tome $f(\xi) = (1 + \xi\bar{\xi})h(\xi)$. Substituindo h por $\frac{f}{1 + \xi\bar{\xi}}$ na equação (4.4), chegamos à equação $\Delta^2 f = 0$. Como visto na seção 1.3, essa equação biharmônica possui solução

$$f = Re[\bar{\xi}\Phi(\xi) + \chi(\xi)],$$

em que Φ e χ são funções holomorfas.

Logo,

$$h(\xi) = \frac{Re[\bar{\xi}\Phi(\xi) + \chi(\xi)]}{1 + \xi\bar{\xi}}. \tag{4.5}$$

Agora observe o seguinte. Localmente, uma função harmônica F pode ser vista como a soma de uma função holomorfa com uma função anti-holomorfa, digamos $F(\xi) = A(\xi) + \bar{B}(\xi)$, com A e B holomorfas e $\xi \in U$, U domínio simplesmente conexo. Logo, $F = Re(A) + Re(B) + i(Im(A) - Im(B))$. Pela equação (4.1), temos que

a função suporte da envoltória dos planos médios de uma congruência de retas com tal F é dada por

$$\begin{aligned}
h &= -\frac{1}{2}(Re(A_u) + Re(B_u) + Im(A_v) - Im(B_v)) \\
&\quad + \frac{2}{1+u^2+v^2}(u(Re A + Re B) + v(Im A - Im B)) \\
&= -\frac{1}{2}Re[A_u - iA_v + B_u + iB_v] + \frac{2}{1+u^2+v^2}Re[(u-iv)A + (u+iv)B] \\
&= -Re(A_\xi) - Re(B_{\bar{\xi}}) + \frac{2}{1+u^2+v^2}Re(\bar{\xi}A + \xi B)
\end{aligned}$$

e, após manipulações algébricas,

$$h = \frac{Re[2\xi B - A_\xi + \bar{\xi}(2A - \xi A_\xi)]}{1 + \xi\bar{\xi}} \quad (4.6)$$

Logo, nosso problema consiste em determinar A e B tais que $2A - \xi A_\xi = \Phi$ e $2\xi B - A_\xi = \chi$. Mas esse sistema de equações diferenciais pode ser resolvido de maneira simples. De fato, temos que

$$\Phi = 2A - \xi A_\xi = \xi^3 \left(\frac{-A}{\xi^2} \right)_\xi.$$

Logo, $\left(\frac{-A}{\xi^2} \right) = \int \frac{\Phi}{\xi^3} d\xi$ e temos, assim, uma solução para A . Para achar uma solução para B , basta substituir o valor de A na equação $\chi = 2\xi B - A_\xi$.

■

Como vimos, se F é harmônica, então a envoltória dos planos médios S da congruência associada é uma superfície Laguerre mínima. No caso em que F é holomorfa, E é simplesmente uma superfície mínima. Uma pergunta natural é se também é possível obter algum resultado para F anti-holomorfa, que é o que trataremos a seguir.

Definição 4.3 *Uma congruência de esferas em \mathbb{R}^3 é uma família a 2-parâmetros de esferas com função raio diferenciável e cujo centros estão contidos em uma superfície $S_0 \subset \mathbb{R}^3$.*

Definição 4.4 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com parametrização local X , aplicação de Gauss N e curvaturas média H e Gaussiana K . As esferas centradas em $X + \frac{H}{K}N$ e com raio $\left| \frac{H}{K} \right|$ são chamadas as **esferas médias** de S .*

Definição 4.5 *Uma superfície Laguerre mínima $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que todas as suas esferas médias sejam tangentes a um plano fixo é chamada de **Laguerre mínima do tipo esférico**.*

Essa nomenclatura foi primeiramente usada em [11].

Teorema 4.4 *Seja $\Sigma \subset \mathcal{L}$ uma congruência de retas dada em termos de coordenadas $(\xi, F(\xi))$. Se F é anti-holomorfa, então a envoltória dos planos médios de Σ é uma Laguerre mínima do tipo esférico.*

Demonstração: Já vimos na seção 1.1, equação (1.4), que a envoltórias dos planos médios, E , pode ser parametrizada localmente em termos da função suporte h . Sendo $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ parametrização local dada em termos da função suporte, temos que

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= \frac{h_u N_u + h_v N_v}{g_{11}} + hN \\ &= (\phi, \psi, 0) + \frac{-u\psi_v + v\psi_u}{1 + u^2 + v^2} (1 - u^2 + v^2, -2uv, -2u) \\ &\quad + \frac{u\psi_u + v\psi_v}{1 + u^2 + v^2} (-2uv, 1 + u^2 + v^2, -2v). \end{aligned}$$

Sejam C a superfície dos centros das esferas e $W : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ parametrização local de C . Então

$$\begin{aligned} W(u, v) &= Y(u, v) + \frac{H}{K} N(u, v) \\ &= (\phi - u\psi_v + v\psi_u, u\psi_u + \psi + v\psi_v, -2uv\psi_u + u^2\psi_v - v^2\psi_v) \end{aligned}$$

A aplicação normal de Gauss de W $n : W(U) \rightarrow S^2$ é dada por

$$\begin{aligned} n &= \frac{W_u \wedge W_v}{|W_u \wedge W_v|} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} (u, v, 1). \end{aligned}$$

Tome

$$\begin{aligned} B_1 &= (1, 0, -u) \\ B_2 &= (0, 1, -v). \end{aligned}$$

Como $\langle B_1, n \rangle = \langle B_2, n \rangle = 0$ e B_1 e B_2 são linearmente independentes, segue que $\{B_1, B_2\}$ é uma base do plano tangente de $W(u, v)$. Observe que

$$\begin{aligned} \langle B_1, B_1 \rangle &= 1 + u^2 \\ \langle B_1, B_2 \rangle &= uv \\ \langle B_2, B_2 \rangle &= 1 + v^2 \\ \langle N, n \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \\ \langle N, B_1 \rangle &= u \\ \langle N, B_2 \rangle &= v \\ \langle B_1, n \rangle &= \langle B_2, n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Para encontrar a parametrização da outra envoltória da congruência de esferas médias, lembramos que ela é obtida fazendo a reflexão de $Y(u, v)$ em relação ao plano tangente de $W(u, v)$.

Seja N_2 a reflexão de N em relação ao plano tangente de $W(u, v)$. Então

$$N_2 = \frac{u}{1+u^2+v^2}B_1 + \frac{v}{1+u^2+v^2}B_2 + \frac{1}{1+u^2+v^2}n$$

e a outra envoltória vai ser dada por

$$W + \frac{H}{K}N_2 = (-u\psi_v + \phi + v\psi_u, u\psi_u + \psi + v\psi_v, 0),$$

que está contida em um plano. ■

4.1 Exemplos

Nessa seção, mostraremos alguns exemplos para ilustrar os nossos resultados.

Exemplo 4.1 Neste primeiro exemplo, iremos obter a superfície de Enneper como a envoltória dos planos médios de uma congruência de retas com F holomorfa. Nesse caso, iremos considerar $F = z^3$, $z = u + iv$, $(u, v) \in U$, U sendo um aberto de \mathbb{R}^2 . A envoltória S (ver Fig. (4.1)) obtida será dada parametricamente por

$$3 \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

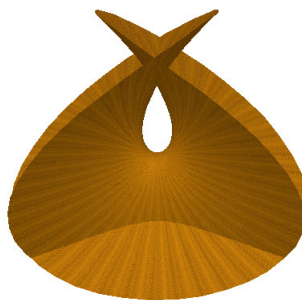


Figura 4.1: *Envoltória dos planos médios para $F = z^3$.*

Nesse caso, temos a superfície de Enneper.

Exemplo 4.2 *O nosso segundo exemplo é de uma superfície obtida como a envoltória dos planos médios de uma congruência de retas com F harmônica. Neste exemplo, a superfície encontrada será uma superfície de Bonnet, que são aquelas cuja superfície média está contida em um plano. Iremos considerar $F = A + \bar{B}$, com $A = z^3$ e $B = 3z$. A envoltória S (ver Fig. (4.2)) obtida será dada parametricamente por*

$$\left(\frac{u(u^4 - 2u^2 - 2u^2v^2 + 3 - 3v^4 + 6v^2)}{(1 + u^2 + v^2)}, \frac{v(3u^4 - 6u^2 + 2u^2v^2 - 3 + 2v^2 - v^4)}{(1 + u^2 + v^2)}, \frac{(3(-v + u))(u + v)(-1 + u^2 + v^2)}{(1 + u^2 + v^2)} \right).$$

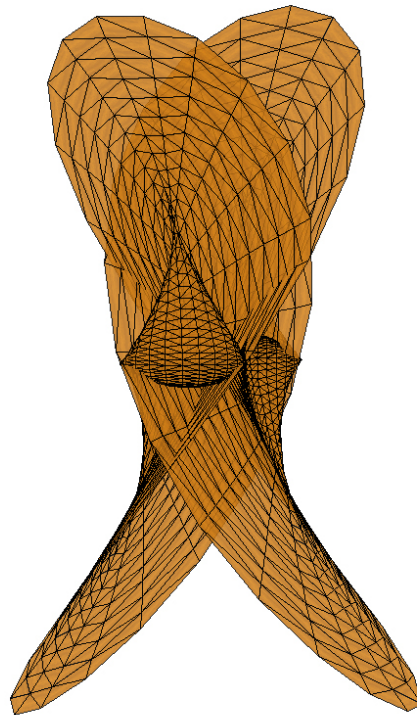


Figura 4.2: *Envoltória dos planos médios para $F = z^3 + 3\bar{z}$.*

Observe que a terceira coordenada da parametrização irá se anular quando $u = v$, $u = -v$ ou $u^2 + v^2 = 1$. A interseção do plano horizontal coordenado com a superfície está ilustrada na Fig. (4.3). Podemos observar que quando $u^2 + v^2 = 1$, a curva correspondente na superfície será um astróide, enquanto para $u = v$ e $u = -v$ teremos duas retas passando pelas cúspides dessa astróide.

Ao considerarmos $u^2 + v^2 = 1$, teremos que os pontos equivalentes na superfície serão pontos umbílicos, exceto para os pontos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, em que as curvaturas principais não estarão bem definidas. Este fato é interessante, pois temos um exemplo de superfície em que temos uma curva de pontos umbílicos, e não apenas pontos umbílicos isolados, como estamos acostumados a ver.

Se considerarmos $u = v$ ou $u = -v$, teremos que os pontos correspondentes na superfície serão pontos em que a curvatura média H se anula, exceto, também, nos pontos em que as curvaturas principais não estão bem definidas.

Vamos agora analisar agora o que acontece com a superfície média M de S , ou seja, a superfície definida pelos pontos médios da congruência. Observe que M vai ser dada parametricamente por

$$(u(u^2 + 3 - 3v^2), v(3u^2 - v^2 - 3)v, 0).$$

Logo, M está contida em um plano e S é, de fato, uma superfície de Bonnet.



Figura 4.3: Em laranja, temos a interseção de S com o plano horizontal coordenado vista na superfície.

Exemplo 4.3 O nosso terceiro exemplo é, também, de uma superfície de Bonnet dada como a envoltória dos planos médios de uma congruência com F harmônica. Nesse caso, iremos considerar $F = A + \bar{B}$, com $A = \ln(z)$ e $B = \frac{1}{z^2}$. Em coordenadas polares

($u = r\cos(t), v = r\sin(t)$), a envoltória S (ver Fig. (4.4) e Fig. (4.5)) obtida será dada parametricamente por

$$\left(\frac{1 - 2r^2 - 3r^4 + (6r^2 - 2)\cos(t)^2}{(1 + r^2)} r^2 + \ln(r^2), \frac{(3r^2 - 1)\cos(t)\sin(t)}{(1 + r^2)r^2} + t, -\frac{2\cos(t)(r^2 - 1)}{(1 + r^2)r^2} \right).$$

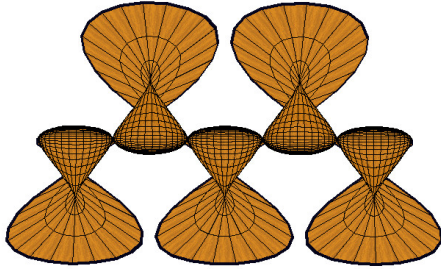


Figura 4.4: Envoltória dos planos médios para $F = \ln(z) + \frac{1}{z^2}$, vista 1.

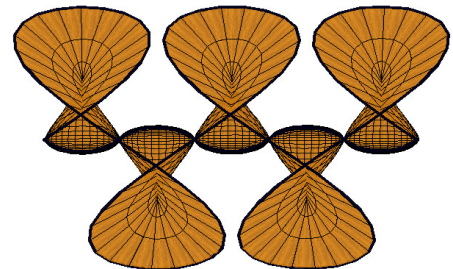


Figura 4.5: Envoltória dos planos médios para $F = \ln(z) + \frac{1}{z^2}$, vista 2.

Observe que a terceira coordenada da parametrização irá se anular quando $\cos(t) = 0$ ou $u^2 + v^2 = r = 1$. Para $r = 1$, temos que a curva correspondente em S vai ser uma ciclóide. Para $\cos(t) = 0$, teremos retas passando pelas cúspides dessa ciclóide e ortogonais ao eixo vertical. (Ver Fig. (4.6))

Assim como no exemplo anterior, ao considerarmos $r = 1$ teremos que os pontos correspondentes na superfície serão pontos umbílicos. Se considerarmos $\cos(t) = 0$, teremos que os pontos equivalentes na superfície serão pontos em que a curvatura média H se anula.

Nesse caso, temos que $\frac{H}{K} = -2r\cos(t)$. Logo, a terceira coordenada da superfície média M de S será dada por

$$\frac{2\cos(t)(1 - r^2)}{(1 + r^2)r} - \frac{2r\cos(t)(1 - r^2)}{r^2(1 + r^2)},$$

que é igual a zero. Logo, M está contida em um plano e S é, de fato, uma superfície de Bonnet.

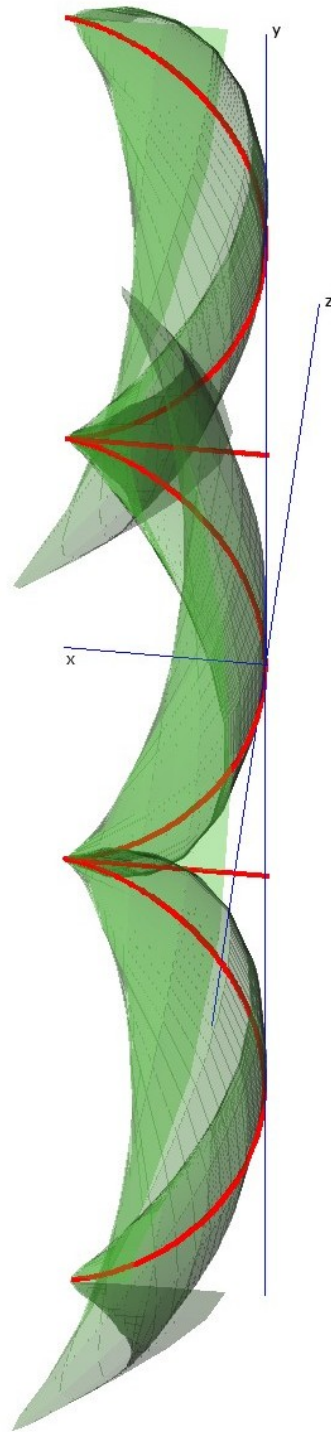


Figura 4.6: *Em vermelho, temos a interseção de S com o plano horizontal coordenado vista na superfície.*

Exemplo 4.4 *O nosso quarto exemplo é de uma superfície de Dupin obtida como envoltória dos planos médios de uma congruência com F anti-holomorfa. Aqui, tomaremos $F = \bar{z}$ e então nossa envoltória S (ver Fig. (4.7) e Fig. (4.8)) será dada parametricamente por*

$$\left(\frac{2u(1+2v^2)}{1+u^2+v^2}, -\frac{2v(2u^2+1)}{1+u^2+v^2}, -\frac{2(-v^2+u^2)}{1+u^2+v^2} \right).$$

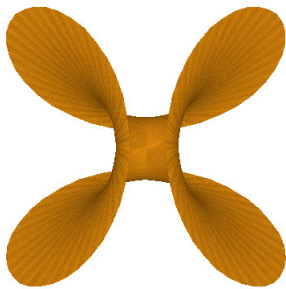


Figura 4.7: *Envoltória dos planos médios para $F = \bar{z}$, vista 1.*

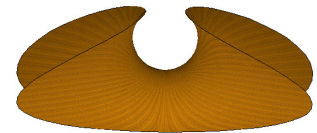


Figura 4.8: *Envoltória dos planos médios para $F = \bar{z}$, vista 2.*

Afim de verificar que essa é realmente uma superfície de Dupin, basta ver que a parametrização é dada por linhas de curvatura e que as curvas coordenadas serão círculos, o que caracteriza uma superfície de Dupin.

Referências Bibliográficas

- [1] CARRIER, G. F., KROOK, M. and PEARSON, C.E., *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique*. SIAM (2005), 180-181.
- [2] BIANCHI, L., *Lezioni di Geometria Differenziale*. Pisa: E. Spoerri (1894).
- [3] DARBOUX, G., *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*. Chelsea Publishing Company (1972).
- [4] EISENHART, L. P., *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Courier Dover Publications (2004).
- [5] FERREIRA, W., ROITMAN, P., *Area preserving transformations in two dimensional space forms and classical differential geometry*, Israel Journal of Mathematics (a publicar).
- [6] GOURSAT, E., *Sur la méthode de Weingarten pour le problème de la déformation des surfaces*, Bulletin de la S.M.F. 55 (1927) 5-38.
- [7] GUILFOYLE, B., KLINGENBERG, W., *On the space of oriented affine lines in \mathbb{R}^3* , Archiv der Math. 82 (2004), 81-84.
- [8] GUILFOYLE, B., KLINGENBERG, W., *Generalised surfaces in \mathbb{R}^3* , Math. Proc. of the R.I.A. 104A(2) (2004) 199-209.
- [9] GUILFOYLE, B., KLINGENBERG, W., *An indefinite Kähler metric on the space of oriented lines*, J. London Math. Soc. 72 (2005) 497-509.
- [10] GUILFOYLE, B., KLINGENBERG, W., *Geodesic flow on the normal congruence of a minimal surface*, Progr. Math. 265 (2007) 427-436.
- [11] GROHS, P., MITRA, N. J., POTTMANN, H., *Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity*, Adv. Comput. Math. 31 (2009), 391-419.
- [12] KUMMER, E. E., *Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme*, J. Reine. Angew. Math. 57 (1860), 189-230.

-
- [13] MALUS, E. L., *Traité d'Optique*, Mémoires présentés à l'Institut 2 (1811).
- [14] MONGE, G., *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, De l'Imprimerie Royale (1781).
- [15] RIBAUCCOUR, A., *Étude des Élassoïdes ou Surfaces à Courbure Moyenne Nulle*, Mémoires Couronnés par l'Académie de Belgique, Vol. XLIV (1881), p. 63.