Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações de Schrödinger com potenciais indefinidos

por

Henrique Rennó Zanata

Brasília

2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações de Schrödinger com potenciais indefinidos

por

Henrique Rennó Zanata *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

25 de fevereiro de 2011

Comissão Examinadora:

Prof. Marcelo Fernandes Furtado - MAT/UnB (Orientador)

Profa. Liliane de Almeida Maia - MAT/UnB - Membro

Prof. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA - Membro

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Roberto e Sonia, e ao meu irmão, Eduardo, por todo o carinho e apoio que sempre me deram.

A todos os meus colegas de graduação e de mestrado, que me acompanharam nesta jornada e sempre estiveram ao meu lado.

Ao professor Marcelo, por ter sido um ótimo orientador, sempre disposto a me ajudar. Aos professores Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Liliane de Almeida Maia e Elves Alves de Barros e Silva, por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora e pelos valiosos conselhos. Ao professor João Carlos Nascimento de Pádua, que durante a graduação foi meu tutor no Programa de Educação Tutorial e foi quem despertou meu interesse pela Análise.

Resumo

Neste trabalho utilizamos técnicas variacionais e o Teorema do Passo da Montanha na obtenção de soluções para equações de Schrödinger não lineares. O ponto principal dos resultados apresentados é que o potencial pode se anular e, em um dos casos, ser inclusive negativo.

Na primeira parte, obtemos uma solução positiva para o problema

$$(P2) \qquad -\Delta u + b(x)u = f(x,u) \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

onde f é superlinear e o potencial b pode assumir valores negativos. Na segunda parte consideramos o problema

$$(P3) \qquad -\Delta u + b_h(hx)u = g(hx,u) \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

onde $h > 0$ é um parâmetro, g é superlinear e os potenciais b_h podem se anular, mas permanecem não negativos. Provamos a existência de uma solução positiva para valores pequenos de h.

Abstract

In this work we use variational techniques and the Mountain Pass Theorem in order to obtain solutions to nonlinear Schrödinger equations. The main point of the results is that the potential can vanish and, in one of the cases, be even negative.

In the first part, we obtain a positive solution to the problem

$$(P2) \qquad -\Delta u + b(x)u = f(x,u) \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

where f is superlinear and the potential b can take negative values. In the second part we consider the problem

$$(P3) \qquad -\Delta u + b_h(hx)u = g(hx,u) \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

where $h > 0$ is a parameter, g is superlinear and the potentials b_h can vanish, but do not take negative values. We prove the existence of a positive solution for sufficiently small h.

Índice

Introdução

Esta dissertação está baseada nos artigos de Sirakov [12] e [13]. Na primeira parte, estudaremos o problema

$$(P1) \qquad -\Delta u + b(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

e sua versão mais geral

$$(P2) \qquad -\Delta u + b(x)u = f(x,u) \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

onde $N \geq 3$, $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $b \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e

$$(2.1) \qquad 1 < p < p^{\#} \leq \frac{N+2}{N-2} \ .$$

A definição de $p^{\#}$ será dada adiante. Vamos procurar soluções de $(P1)$ e $(P2)$ no espaço

$$H = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u^2 dx < \infty \right\} \ .$$

Agora vamos introduzir as hipóteses sobre f. Iremos supor que existem uma função $A \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $A(x) \geq 1$, e constantes $\alpha > 1$, $C_0 > 0$, $R_0 > 0$, $\mu_0 > 2$ tais que

$(f1)$ $A(x) \leq C_0 \left(1 + (\max\{0, b(x)\})^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, se $|x| \geq R_0$;

$(f2)$ $|f_u(x,u)| \leq C_0 A(x)(1 + |u|^{p-1})$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{R}$;

$(f3)$ $\dfrac{f(x,u)}{A(x)} = o(|u|)$ quando $u \to 0$ uniformemente em x;

$(f4)$ $0 < \mu_0 F(x,u) = \mu_0 \displaystyle\int_0^u f(x,t)dt \leq uf(x,u)$, se $u \neq 0$.

A constante $p^{\#}$ será dada por

$$p^{\#} = \frac{N+2}{N-2} - \frac{4}{\alpha(N-2)} \ .$$

No caso de $(P1)$, tomamos $A(x) = \max\{1, |a(x)|\}$. Neste caso, claramente $A \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Mas também vamos supor que $A(x) = \max\{1, |a(x)|\}$ satisfaz $(f1)$. É fácil ver que a função $f(x,u) = a(x)|u|^{p-1}u$ satisfaz as hipóteses $(f2)$ e $(f3)$. Mas como $a(x)$ pode assumir valores negativos, não podemos garantir que ela satisfaz $(f4)$.

Entretanto, satisfaz

$(f4)'$ $(p+1)F(x,u) = a(x)|u|^{p+1} = uf(x,u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Agora, seja $G \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $2 \leq s < 2^*$. Então, nós definimos

$$\nu_s(G) = \inf_{u \in M_s(G)} \int_G \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx \ ,$$

onde

$$M_s(G) = \left\{ u \in H_0^1(G) : \|u\|_{L^s(G)} = 1 \right\} \ .$$

Tomaremos $\nu_s(\emptyset) = \infty$.

As hipóteses que usaremos sobre o potencial b são as seguintes:

$(b1)$ existe uma constante $B \geq 0$ tal que

$$b(x) \geq -B \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

$(b2)_s$ para todo $r > 0$ e toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|x_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, tem-se

$$\lim_{n \to \infty} \nu_s(B_n) = \infty \ ,$$

onde $B_n = B(x_n, r)$ é a bola de centro x_n e raio r.

Também vamos considerar a seguinte condição:

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|_{L_2} = 1}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx > 0 \ . \tag{2.2}$$

Os teoremas de existência para $(P2)$ e $(P1)$ que iremos demonstrar são os seguintes:

Teorema 2.3. *Suponha que valem* (2.1), (2.2), $(f1) - (f4)$ *e* $(b2)_{p+1}$. *Então* $(P2)$ *tem uma solução positiva. Mais ainda, se supormos* $(b2)_2$ *ao invés de* $(b2)_{p+1}$, *então* (2.2) *é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução positiva de* $(P2)$.

Teorema 2.4. *Suponha que valem* (2.1), (2.2), $(f1)$ *e* $(b2)_{p+1}$. *Então uma condição suficiente para a existência de uma solução positiva de* $(P1)$ *é que* $a(x)$ *seja positivo em algum conjunto de medida positiva. Esta condição será também necessária se supormos* $(b2)_2$ *ao invés de* $(b2)_{p+1}$. *Mais ainda, supondo* $(b2)_2$, *se* $a(x) \geq 0$ *e* $a(x)$ *não é identicamente nula, então* (2.2) *é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução positiva de* $(P1)$.

Ainda na primeira parte, usando a Identidade de Pohozaev nós mostramos, para um caso particular de $(P1)$, que só há a solução trivial para $p \in [\hat{p}, \infty)$, para um determinado $\hat{p} \geq \frac{N+2}{N-2}$. Por outro lado, métodos variacionais asseguram que $(P1)$ tem solução não trivial para $p \in [1, p^{\#})$, onde $p^{\#} \leq \frac{N+2}{N-2}$. Ou seja, não-linearidades ilimitadas geram uma lacuna entre o intervalo de "existência" para p, dado por métodos variacionais, e o intervalo de "não-existência", dado pela Identidade de Pohozaev (ver seção 2.3).

Na segunda parte desta dissertação, faremos o estudo do problema

$$(P3) \qquad -\Delta u + b_h(hx)u = g(hx, u) \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

onde novamente $N \geq 3$, h é um parâmetro variando no intervalo $(0, 1]$, $b_h \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, para cada $h \in (0, 1]$, e $g \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma não-linearidade satisfazendo as hipóteses

$(g1)$ $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{g(x, u)}{u} = 0$, uniformemente para $x \in \mathbb{R}^N$;

$(g2)$ existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|g_u(x, u)| \leq C_1(1 + |u|^{p-1}) \ ,$$

para algum $p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ e para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$;

$(g3)$ existe uma constante $\mu > 2$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, vale

$$0 < \mu G(x, u) \leq u g(x, u) \ ,$$

onde $G(x, u) = \int_0^u g(x, t) \ dt$;

$(g4)$ existe uma função positiva $d \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que

$$G(x, u) \geq d(x)|u|^{\mu} \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$.

Vamos supor também que as funções b_h satisfazem as hipóteses

$(bh1)$ $b_h(y) \geq 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$;

$(bh2)$ $b_h(hx) \to 0$ quando $h \to 0$, uniformemente em compactos do $\mathbb{R}^N$;

$(bh3)$ existe uma constante $A > 0$ tal que $|\Omega_{A,h}| < \infty$ para todo $h > 0$, onde

$$\Omega_{A,h} = \left\{y \in \mathbb{R}^N : b_h(y) < A\right\} \ .$$

Procuraremos soluções de $(P3)$ no espaço

$$E_h = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} b_h(hx)u^2 dx < \infty\right\} \ .$$

Provaremos o seguinte teorema de existência:

Teorema 3.1. *Se valem $(bh1) - (bh3)$ e $(g1) - (g4)$, então o problema $(P3)$ possui solução não trivial para h suficientemente pequeno.*

A existência de solução para os três problemas acima, $(P1)$, $(P2)$ e $(P3)$, será demonstrada a partir do Teorema do Passo da Montanha, cuja prova é feita no capítulo 1, e a partir de métodos variacionais.

Equações como $(P1)$, $(P2)$ e $(P3)$ aparecem em problemas físicos tais como a existência de estados estacionários (ondas estacionárias, por exemplo) de equações de Schrödinger ou de Klein-Gordon não lineares.

No clássico artigo do Teorema do Passo da Montanha, Ambrosetti e Rabinowitz tratam o problema $(P2)$ em um domínio limitado. Porém há uma grande variedade de publicações que estudam esse problema em domínios ilimitados, como, por exemplo, o artigo [8], de Lions, que apresenta um caminho para contornar o problema da "falta de compacidade", típico de problemas elípticos em domínios ilimitados. Nosso objetivo aqui é analisar a situação em que o potencial $b(x)$ é "grande"no infinito. No artigo [11], Rabinowitz tratou essa questão usando as seguintes hipóteses:

(i) $b_0 = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} b(x) > 0$;

(ii) $\lim_{|x|\to\infty} b(x) = \infty$.

Ele mostrou que a equação $(P2)$ tem uma solução positiva, considerando algumas condições do tipo "passo da montanha"sobre f. Observe agora que a condição (ii) acima é equivalente à hipótese

(ii) Para todo $M > 0$, $\Omega_M = \{x \in \mathbb{R}^N : b(x) < M\}$ é um conjunto limitado.

No artigo [2], Bartsch e Wang mostraram que, mantendo as hipóteses de Rabinowitz sobre f e a hipótese (i), basta que o conjunto Ω_M tenha medida de Lebesgue finita para que a equação $(P2)$ tenha uma solução positiva. Aqui neste trabalho, vamos mostrar que é possível enfraquecer as hipóteses sobre b e f de forma que $(P2)$ continue tendo uma solução positiva.

Para o problema $(P3)$, observe que se u é uma solução, então $v(x) = u\left(\frac{x}{h}\right)$ é uma solução de

$$-h^2\Delta v + b_h(x)v = g(x,v)\ . \tag{0.1}$$

No caso particular $b_h(x) = V(x) - E$, onde E é uma constante real e $V \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ satisfaz $V(x) \geq E$, uma solução de (0.1) fornece uma solução para a equação de Schrödinger não linear

$$ih\Psi_t = -h^2\Delta_x\Psi + V(x)\Psi - \overline{g}(x,\Psi)\ , \tag{0.2}$$

onde $\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, Δ_x é o Laplaciano na variável $x \in \mathbb{R}^N$ e $\overline{g} \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{C},\mathbb{C})$ satisfaz

$$\overline{g}(x,s\xi) = g(x,s)\xi\ ,$$

para $s \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{C}$ com $|\xi| = 1$. De fato, se v é uma solução de (0.1) para o caso particular citado acima, então é fácil verificar que

$$\Psi(t,x) = e^{-\frac{iEt}{h}}v(x)$$

é uma solução de (0.2). Esta solução é denominada uma onda estacionária. Em geral, uma solução da equação (0.2) é chamada função de onda. No caso tridimensional, uma função de onda pode descrever o estado, em um instante de tempo t, de uma partícula microscópica em movimento (um elétron, por exemplo) e sobre a influência de uma energia potencial V.

Um dos problemas clássicos para as equações (0.1) e (0.2) é investigar a existência de solução para valores pequenos de h, a exemplo do artigo [11], de Rabinowitz. Ele desenvolveu um método variacional para mostrar a existência de solução de (0.1), com $b_h(x) = V(x) - E$. Sobre o potencial V, Rabinowitz fez as seguinte hipóteses:

$$E < \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x| \to \infty} V(x) \; .$$

Além disso, ele supôs que a não-linearidade g satisfaz algumas hipóteses do tipo "passo da montanha", não depende de x e que $s^{-1}zg(sz)$ é uma função crescente em $s > 0$, para todo $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Alguns artigos mais recentes fazem o estudo do mesmo problema trocando a hipótese

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x| \to \infty} V(x)$$

por hipóteses sobre o comportamento local de V, ou, mais especificamente, sobre a existência de diferentes tipos de pontos críticos para o potencial. Contudo, a hipótese de que g não depende de x é mantida. Nestes mesmos artigos, além das hipóteses do tipo "passo da montanha", supõe-se que $g(s) = |s|^{p-1}s$, ou que a equação

$$-\Delta u + u = g(u)$$

tem uma única solução positiva em $H^1(\mathbb{R}^N)$, ou que $s^{-1}g(s)$ é crescente em $s > 0$. Nesta dissertação, nenhuma dessas condições é imposta em g.

Capítulo 1

Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo vamos enunciar e provar o Teorema do Passo da Montanha, de Ambrosetti e Rabinowitz. Este teorema é uma importante ferramenta para garantir a existência de pontos críticos de funcionais definidos em espaços de Banach e é com o auxílio dele que provaremos a existência de solução para o problema com o qual vamos trabalhar no capítulo 2.

Ao longo deste capítulo, X será um espaço de Banach e X' será o seu dual, com normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{X'}$, respectivamente. Considere então um funcional $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de I se $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$ para algum $u \in X$. O conjunto dos pontos que satisfazem essa condição será denotado por

$$K_c = \{u \in X : I'(u) = 0 \text{ e } I(u) = c\} .$$

O conjunto dos pontos em níveis menores ou iguais a c será denotado por

$$I^c = \{u \in X : I(u) \leq c\} .$$

Definição 1.1. *Um funcional $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale, denotada por (PS), se toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

$$\sup |I(u_n)| < \infty \quad e \quad I'(u_n) \to 0$$

possui subsequência convergente. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, denotada por $(PS)_c$, se toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c \quad e \quad I'(u_n) \to 0$$

possui subsequência convergente.

Observações:

1) Uma sequência satisfazendo

$$\sup |I(u_n)| < \infty \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0$$

será chamada sequência de Palais-Smale. Do mesmo modo, define-se sequência de Palais-Smale no nível c.

2) Todo funcional que satisfaz (PS) também satisfaz $(PS)_c$, em qualquer nível c, pois se $I(u_n) \to c$, então $\sup |I(u_n)| < \infty$.

3) A condição de compacidade $(PS)_c$ aparece como uma das hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, para um determinado nível c. Ela é uma condição de compacidade no sentido de que se I satisfaz $(PS)_c$, então o conjunto K_c é compacto. De fato, qualquer sequência $(u_n) \subset K_c$ é tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$. Se I satisfaz $(PS)_c$, então (u_n) possui subsequência convergente, digamos (u_{n_j}), com limite $u \in X$. Mas como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, então $I(u_{n_j}) \to I(u)$ e $I'(u_{n_j}) \to I'(u)$. Assim, $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, isto é, $u \in K_c$.

Para provarmos o Teorema do Passo da Montanha, iremos precisar de um lema de deformação e de uma proposição, os quais provaremos a seguir.

Lema 1.1 (Lema de Deformação Quantitativo)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$\|I'(u)\|_{X'} \geq 4\epsilon, \ \forall \ u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \ .$$

Então existe uma função $\eta : [0, 1] \times X \to X$ contínua que satisfaz

(i) $\eta(0, u) = u, \ \forall \ u \in X$;

(ii) $\eta(t, u) = u, \ \forall \ u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]), \ \forall \ t \in [0, 1]$;

(iii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Demonstração. Defina

$$A = I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \ ,$$
$$B = I^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \ ,$$

e considere $\psi : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) = \frac{d(u, X \backslash A)}{d(u, X \backslash A) + d(u, B)} \ ,$$

onde d é a função distância. Para que ψ esteja bem definida, o denominador $d(u, X \backslash A)$ + $d(u, B)$ deve ser positivo para todo $u \in X$. Para verificar que isto ocorre, observe que $d(u, X \backslash A) = 0$ se, e somente se, $I(u) \leq c - 2\epsilon$ ou $I(u) \geq c + 2\epsilon$ e $d(u, B) = 0$ se, e somente se, $c - \epsilon \leq I(u) \leq c + \epsilon$. Portanto, $d(u, X \backslash A)$ e $d(u, B)$ não podem ser simultaneamente nulos. Assim, ψ está bem definida. Além disso, temos claramente que $0 \leq \psi(u) \leq 1$ para todo $u \in X$ e

$$\psi(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in B \\ 0, & \text{se } u \in X \backslash A. \end{cases}$$

Afirmação 1: ψ é localmente lipschitziana.

Antes de demonstrarmos essa afirmação, observe primeiramente que, dado um conjunto $C \subset X$, a função distância $v \mapsto d(v, C)$, com $v \in X$, é lipschitziana. De fato, sejam $v, w \in X$. Pela desigualdade triangular, temos que, para todo $y \in C$,

$$||v - y|| \leq ||v - w|| + ||w - y|| \ .$$

Tomando o ínfimo em $y \in C$ dos dois lados da desigualdade, obtemos

$$d(v, C) \leq ||v - w|| + d(w, C) \ ,$$

ou seja,

$$d(v, C) - d(w, C) \leq ||v - w|| \ .$$

Analogamente, obtemos

$$d(w, C) - d(v, C) \leq ||v - w|| \ .$$

Logo,

$$|d(v, C) - d(w, C)| \leq ||v - w|| \ .$$

Isto mostra que a função distância é lipschitziana.

Agora, fixe $u \in X$. Como $d(u, X \backslash A) + d(u, B) > 0$ e a função distância é contínua, pois é lipschitziana, então existe uma vizinhança V_u de u tal que $d(v, X \backslash A) + d(v, B) \geq \frac{1}{K_u} > 0$, para todo $v \in V_u$ e para alguma constante $K_u > 0$. Sendo assim, para quaisquer $v, w \in V_u$, temos que

$$\begin{aligned}
|\psi(v) - \psi(w)| &= \left| \frac{d(v, X \backslash A)}{d(v, X \backslash A) + d(v, B)} - \frac{d(w, X \backslash A)}{d(w, X \backslash A) + d(w, B)} \right| \\
&= \left| \frac{d(v, X \backslash A) d(w, B) - d(w, X \backslash A) d(v, B)}{[d(v, X \backslash A) + d(v, B)][d(w, X \backslash A) + d(w, B)]} \right| \\
&= \left| \frac{d(w, B)[d(v, X \backslash A) - d(w, X \backslash A)] + d(w, X \backslash A)[d(w, B) - d(v, B)]}{[d(v, X \backslash A) + d(v, B)][d(w, X \backslash A) + d(w, B)]} \right| \\
&\leq \frac{d(w, B)|d(v, X \backslash A) - d(w, X \backslash A)| + d(w, X \backslash A)|d(w, B) - d(v, B)|}{[d(v, X \backslash A) + d(v, B)][d(w, X \backslash A) + d(w, B)]} \\
&\leq \frac{\|v - w\| \, [d(w, B) + d(w, X \backslash A)]}{[d(v, X \backslash A) + d(v, B)][d(w, X \backslash A) + d(w, B)]} \\
&= \frac{\|v - w\|}{d(v, X \backslash A) + d(v, B)} \\
&\leq K_u ||v - w|| \ .
\end{aligned}$$

Portanto, ψ é localmente lipschitziana.

Seja $\tilde{X} = \{u \in X : I'(u) \neq 0\}$. Como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, existe um campo pseudo-gradiente para I (cf. Apêndice A), isto é, uma aplicação localmente lipschitiziana $V : \tilde{X} \to X$ tal que, para todo $u \in \tilde{X}$, valem

(PG1) $\|V(u)\| \leq 2 \, \|I'(u)\|_{X'}$;

(PG2) $I'(u)V(u) \geq \|I'(u)\|_{X'}^2$.

Considere a aplicação $h : X \to X$ dada por

$$h(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{V(u)}{\|V(u)\|} \ , & \text{se } u \in A \\ 0 \ , & \text{se } u \in X \backslash A \end{cases} .$$

Observe que h está bem definida, pois se $u \in A$, então $\|I'(u)\|_{X'} \geq 4\epsilon$, ou seja, $I'(u) \neq 0$ e, por (PG2), $V(u) \neq 0$. Além disso,

$$\|h(u)\| = |\psi(u)| \left\| \frac{V(u)}{\|V(u)\|} \right\| = |\psi(u)| \leq 1.$$

Se $u \in X\backslash A$, também vale essa desigualdade, pois $h(u) = 0$. E no caso em que $u \in A$, temos, novamente por (PG2), que

$$\|I'(u)\|_{X'}^2 \leq I'(u)V(u) \leq \|I'(u)\|_{X'} \|V(u)\| \ ,$$

isto é,

$$\|I'(u)\|_{X'} \leq \|V(u)\|$$

e, consequentemente,

$$\frac{1}{\|V(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|_{X'}} \leq \frac{1}{4\epsilon} \ . \tag{1.1}$$

Afirmação 2: h é localmente lipschitziana.

Fixe $u \in X$. Existe uma vizinhança W_u de u tal que ψ e V são lipschitzianas em $W_u \subset X$, com constantes de Lipschitz $K_\psi > 0$ e $K_V > 0$, respectivamente. Assim, dados $u_1, u_2 \in W_u$, temos 3 casos:

1) se $u_1, u_2 \in X\backslash A$, segue que

$$||h(u_1) - h(u_2)|| = 0 \leq ||u_1 - u_2|| \ .$$

2) se $u_1 \in X\backslash A$ e $u_2 \in A$, então

$$\begin{aligned} ||h(u_1) - h(u_2)|| &= \left\| -\psi(u_2)\frac{V(u_2)}{||V(u_2)||} \right\| \\ &= |-\psi(u_2)| = |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\ &\leq K_\psi \|u_1 - u_2\| \, . \end{aligned}$$

3) se $u_1, u_2 \in A$, então

$$\begin{aligned} \|h(u_1) - h(u_2)\| &= \left\| -\psi(u_1)\frac{V(u_1)}{\|V(u_1)\|} + \psi(u_2)\frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|} \right\| \\ &= \left\| -\psi(u_1)\frac{V(u_1)}{\|V(u_1)\|} \pm \psi(u_1)\frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|} + \psi(u_2)\frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|} \right\| \\ &\leq |\psi(u_1)| \left\| \frac{V(u_1)}{\|V(u_1)\|} - \frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|} \right\| + \left\| \frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|} \right\| |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\ &\leq \left\| \frac{V(u_1)}{\|V(u_1)\|} - \frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|} \right\| + |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Agora, por V ser lipschitziana em W_u e pela desigualdade (1.1), temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{V(u_1)}{\|V(u_1)\|} - \frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|} \right\| &= \left\| \frac{V(u_1)}{\|V(u_1)\|} - \frac{V(u_1)}{\|V(u_2)\|} + \frac{V(u_1)}{\|V(u_2)\|} - \frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|} \right\| \\
&\leq \|V(u_1)\| \left| \frac{1}{\|V(u_1)\|} - \frac{1}{\|V(u_2)\|} \right| + \frac{\|V(u_1) - V(u_2)\|}{\|V(u_2)\|} \\
&\leq \|V(u_1)\| \left| \frac{\|V(u_2)\| - \|V(u_1)\|}{\|V(u_1)\| \, \|V(u_2)\|} \right| + \frac{1}{4\epsilon} \|V(u_1) - V(u_2)\| \\
&\leq \frac{1}{\|V(u_2)\|} \Big| \|V(u_2)\| - \|V(u_1)\| \Big| + \frac{1}{4\epsilon} \|V(u_1) - V(u_2)\| \\
&\leq \frac{1}{4\epsilon} \|V(u_2) - V(u_1)\| + \frac{1}{4\epsilon} \|V(u_1) - V(u_2)\| \\
&= \frac{1}{2\epsilon} \|V(u_1) - V(u_2)\| \\
&\leq \frac{K_V}{2\epsilon} \|u_1 - u_2\| .
\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade (1.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\|h(u_1) - h(u_2)\| &\leq \frac{K_V}{2\epsilon} \|u_1 - u_2\| + K_\psi \|u_1 - u_2\| \\
&\leq C \|u_1 - u_2\| \ .
\end{aligned}$$

Como em todos os 3 casos h satisfaz uma desigualdade desse tipo, então h é lipschitziana em W_u. Sendo $u \in X$ arbitrário, concluímos que h é localmente lipschitziana.

Agora, fixe $u \in X$ e considere o problema de Cauchy

$$(PC)_u \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) = h(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) = u \ . \end{array} \right.$$

Como h é limitada e localmente lipschitziana, então $(PC)_u$ tem uma única solução contínua $\sigma(\cdot, u)$ definida em um intervalo maximal $(t^-(u), t^+(u))$.

Afirmação 3: $t^+(u) = +\infty$ e $t^-(u) = -\infty$.

De fato, suponha por contradição que $t^+(u) < +\infty$. Seja $(t_n) \subset (t^-(u), t^+(u))$ uma sequência tal que $t_n \to t^+(u)$. Como $||h(v)|| \leq 1$, para todo $v \in X$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\sigma(t_m,u)-\sigma(t_n,u)\| &= \left\| \int_{t_n}^{t_m} \frac{d}{ds}(\sigma(s,u))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_n}^{t_m} h(\sigma(s,u))ds \right\| \\
&\leq \int_{t_n}^{t_m} \|h(\sigma(s,u))\|\, ds \\
&\leq \|t_m - t_n\| \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ m,n \to \infty \ ,
\end{aligned}$$

pois $(t_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy. Então $(\sigma(t_n,u))$ também é uma sequência de Cauchy em X, que é um espaço de Banach. Portanto, $\sigma(t_n,u)$ converge para algum $\tilde{u} \in X$ quando $t_n \to t^+(u)$. Considerando agora o problema de Cauchy

$$(PC)_{\tilde{u}} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) = h(\sigma(t,u)) \\ \sigma(t^+(u),u) = \tilde{u} \ , \end{cases}$$

obtemos uma solução contínua $\tilde{\sigma}(\cdot,u)$ no intervalo $(t^+(u)-\delta, t^+(u)+\delta)$, para algum $\delta > 0$. Pela unicidade de $\sigma(\cdot,u)$ no intervalo $(t^-(u),t^+(u))$, $\tilde{\sigma}$ deve coincidir com σ no intervalo $(t^+(u)-\delta, t^+(u))$. Ou seja, podemos estender $\sigma(\cdot,u)$ continuamente no intervalo $(t^-(u),t^+(u)+\delta)$ de forma que essa extensão seja solução da EDO em $(PC)_u$. Mas isto é absurdo, pois o intervalo $(t^-(u),t^+(u))$ é maximal. Portanto, $t^+(u) = +\infty$. Analogamente, mostra-se que $t^-(u) = -\infty$.

A dependência contínua de soluções do problema $(PC)_u$ com relação ao dado inicial implica que $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X, X)$. Sendo assim, defina

$$\begin{aligned}
\eta : [0,1] \times X &\longrightarrow X \\
(t,u) &\longmapsto \eta(t,u) := \sigma(t,u) \ .
\end{aligned}$$

Então, $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ e $\eta(0,u) = \sigma(0,u) = u$, para todo $u \in X$, isto é, η satisfaz a propriedade (i) do lema.

Além disso, se $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$, isto é, se $u \in X \backslash A$, então $h(u) = 0$. Daí, $\sigma(t,u) = u$ é solução única de $(PC)_u$. Portanto,

$$\eta(t,u) = \sigma(t,u) = u, \ \forall \ u \in X \backslash A, \ \forall \ t \in [0,1] \ ,$$

ou seja, também vale a propriedade (ii).

Para verificar que vale (iii), devemos mostrar que

$$\sigma(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon} \ .$$

Para isso, observe primeiramente que, se $\sigma(t,u) \in A$, então, usando (PG2), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) \\
&= I'(\sigma(t,u))h(\sigma(t,u)) \\
&= \frac{-\psi(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|} I'(\sigma(t,u))V(\sigma(t,u)) \leq 0 \ .
\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $\sigma(t,u) \in X\backslash A$, temos $h(\sigma(t,u)) = 0$. Neste caso

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) \\ &= I'(\sigma(t,u))h(\sigma(t,u)) \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Ou seja, $I(\sigma(\cdot,u))$ é não-crescente. Assim, para todo $t \in [0,1]$, vale

$$I(\sigma(1,u)) \leq I(\sigma(t,u)) \leq I(\sigma(0,u))\ .$$

Tome $u \in I^{c+\epsilon}$. Se existir $t \in [0,1]$ tal que $I(\sigma(t,u)) < c-\epsilon$, então $I(\sigma(1,u)) < c-\epsilon$ e, neste caso, $\sigma(1,u) \in I^{c-\epsilon}$. Podemos então supor que, para todo $t \in [0,1]$,

$$c - \epsilon \leq I(\sigma(t,u)) \leq I(\sigma(0,u)) = I(u) \leq c + \epsilon\ ,$$

isto é, $\sigma(t,u) \in B = I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$. Logo, $\psi(\sigma(t,u)) = 1$, $t \in [0,1]$, pois $\psi \equiv 1$ em B. Então, usando (PG2) e depois (PG1), segue que

$$\begin{aligned}I(\sigma(1,u)) &= I(u) + \int_0^1 \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u))dt \ = \ I(u) + \int_0^1 I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u)dt \\ &= I(u) + \int_0^1 I'(\sigma(t,u))h(\sigma(t,u))dt \ = \ I(u) - \int_0^1 \frac{I'(\sigma(t,u))V(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|}dt \\ &\leq I(u) - \int_0^1 \frac{\|I'(\sigma(t,u))\|^2}{\|V(\sigma(t,u))\|}dt \ \leq \ I(u) - \frac{1}{2}\int_0^1 \|I'(\sigma(t,u))\|\,dt \\ &\leq c + \epsilon - \frac{1}{2}\int_0^1 4\epsilon\ dt \ = \ c - \epsilon\ .\end{aligned}$$

Portanto, $\sigma(1,u) \in I^{c-\epsilon}$. Isto conclui a demonstração do item (iii) e do lema.

□

Proposição 1.1. *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e I satisfaz*

(I_1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I\big|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;

(I_2) existe $e \in X$ tal que $||e|| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.

Seja

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))\ ,$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}\ .$$

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

(i) *$c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$;*

(ii) *$\|I'(u)\|_{X'} < 4\epsilon$.*

Demonstração. Observe inicialmente que $c \geq \alpha$. De fato, se $\gamma \in \Gamma$, então, como $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = e$, $0 \in B_\rho(0)$ e $e \notin B_\rho(0)$, temos que

$$\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset \ .$$

Logo, usando (I_1),

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha$$

e, portanto, se tomarmos o ínfimo para $\gamma \in \Gamma$ na desigualdade acima, concluímos que $c \geq \alpha > 0$.

Faremos a demonstração por absurdo. Mas antes observe que, para qualquer $\epsilon > 0$, sempre existe $u \in X$ satisfazendo a propriedade (i) da proposição. De fato, se $\epsilon > 0$, então, pela definição de ínfimo, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$c - 2\epsilon < c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + 2\epsilon \ .$$

Além disso, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = I(\gamma(t_0)) \ ,$$

ou seja, $u = \gamma(t_0)$ satisfaz a propriedade (i).

Agora suponha, por contradição, que o resultado é falso. Então existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $u \in I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$, tem-se $\|I'(u)\|_{X'} \geq 4\epsilon$. Veja que, se $\epsilon_0 < \epsilon$, então $I^{-1}([c-2\epsilon_0, c+2\epsilon_0]) \subset I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$. Portanto, se $u \in I^{-1}([c-2\epsilon_0, c+2\epsilon_0])$, temos que $\|I'(u)\|_{X'} \geq 4\epsilon \geq 4\epsilon_0$. Ou seja, podemos diminuir $\epsilon > 0$, se necessário. Por isso, podemos assumir que

$$I(e) \leq I(0) = 0 < c - 2\epsilon \ . \tag{1.3}$$

Pelo Lema de Deformação, existe uma função $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(a) $\eta(1,u) = u$, para todo $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

(b) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Pela definição de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon \ . \tag{1.4}$$

Defina agora $\beta : [0,1] \to X$ por $\beta(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Como $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, então $\beta \in C([0,1], X)$. Além disso, pela desigualdade (1.3), temos que $0, e \notin I^{-1}[c-2\epsilon, c+2\epsilon]$ e, portanto, segue do item (a) que

$$\beta(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$\beta(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e) = e \ .$$

Logo, $\beta \in \Gamma$. Temos também, por (1.4), que $\gamma(t) \in I^{c+\epsilon}$, $\forall\ t \in [0,1]$. Assim, usando o item (b), temos que $\beta(t) = \eta(1, \gamma(t)) \ \in \ I^{c-\epsilon}$, $\forall\ t \in [0,1]$. Daí, segue que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\beta(t)) \leq c - \epsilon \ ,$$

o que é um absurdo. Isto conclui a demonstração.

$\square$

Teorema 1.1 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e I satisfaz*

(I_1) *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I\big|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *existe $e \in X$ tal que $||e|| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Seja

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \ ,$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\} \ .$$

Então, se I satisfaz $(PS)_c$, o nível c é um nível crítico de I, isto é, existe $u \in X$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Demonstração. Pela Proposição 1.1, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in X$ tal que

$$c - \frac{2}{n} \leq I(u_n) \leq c + \frac{2}{n}$$

e

$$\|I(u_n)\|_{X'} < \frac{4}{n} \ .$$

Portanto, a sequência $(u_n) \subset X$ é tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, ou seja, é uma sequência $(PS)_c$. Logo, se I satisfaz a condição $(PS)_c$, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \to u \in X$. Usando o fato de que $I \in C^1(X,\mathbb{R})$, concluímos que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, ou seja, c é um nível crítico de I.

$\square$

Capítulo 2

Existência de Solução para os Problemas P1 e P2

Neste capítulo, vamos estudar a existência de solução fraca para o problema

$$(P1) \qquad -\Delta u + b(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

e para sua versão mais geral

$$(P2) \qquad -\Delta u + b(x)u = f(x,u) \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

onde $N \geq 3$, $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $b \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e

$$1 < p < p^{\#} \leq \frac{N+2}{N-2} \ . \tag{2.1}$$

A definição de $p^{\#}$ será dada adiante. Vamos procurar soluções de $(P1)$ e $(P2)$ no espaço

$$H = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u^2 dx < \infty \right\} \ .$$

Agora vamos introduzir as hipóteses sobre f. Iremos supor que existe uma função $A \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $A(x) \geq 1$, e constantes $\alpha > 1$, $C_0 > 0$, $R_0 > 0$, $\mu_0 > 2$ tais que

- $(f1)$ $A(x) \leq C_0 \left(1 + (\max\{0, b(x)\})^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, se $|x| \geq R_0$;
- $(f2)$ $|f_u(x,u)| \leq C_0 A(x)(1 + |u|^{p-1})$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{R}$;
- $(f3)$ $\dfrac{f(x,u)}{A(x)} = o(|u|)$ quando $u \to 0$ uniformemente em x;
- $(f4)$ $0 < \mu_0 F(x,u) = \mu_0 \displaystyle\int_0^u f(x,t)dt \leq uf(x,u)$, se $u \neq 0$.

A constante $p^{\#}$ será dada por

$$p^{\#} = \frac{N+2}{N-2} - \frac{4}{\alpha(N-2)} \ .$$

No caso de $(P1)$, tomamos $A(x) = \max\{1, |a(x)|\}$. Neste caso, claramente $A \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Mas também vamos supor que $A(x) = \max\{1, |a(x)|\}$ satisfaz $(f1)$. É fácil ver que a função $f(x,u) = a(x)|u|^{p-1}u$ satisfaz as hipóteses $(f2)$ e $(f3)$. Mas como $a(x)$ pode assumir valores negativos, não podemos garantir que ela satisfaz $(f4)$. Entretanto, satisfaz

$(f4)'$ $\quad (p+1)F(x,u) = a(x)|u|^{p+1} = uf(x,u) \quad , \quad$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

Agora, seja $G \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $2 \leq s < 2^*$. Então, nós definimos

$$\nu_s(G) = \inf_{u \in M_s(G)} \int_G \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx \ ,$$

onde

$$M_s(G) = \left\{ u \in H^1_0(G) : \|u\|_{L^s(G)} = 1 \right\} \ .$$

Tomaremos $\nu_s(\emptyset) = \infty$.

As hipóteses que usaremos sobre o potencial b são as seguintes:

$(b1)$ Existe uma constante $B \geq 0$ tal que

$$b(x) \geq -B \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

$(b2)_s$ Para todo $r > 0$ e toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|x_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, tem-se

$$\lim_{n \to \infty} \nu_s(B_n) = \infty \ ,$$

onde $B_n = B(x_n, r)$ é a bola de centro x_n e raio r.

Também vamos considerar a seguinte condição:

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|_{L_2}=1}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx > 0 \ . \tag{2.2}$$

A hipótese $(b1)$ será assumida ao longo deste capítulo. A hipótese $(b2)_s$, com $2 \leq s < 2^*$, é consequência de uma condição geométrica sobre b. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Suponha que para todo $M > 0$, para todo $r > 0$ e para toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|x_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, tem-se*

$$\lim_{n \to \infty} |\Omega_M \cap B_n| = 0 \ , \tag{2.3}$$

onde $\Omega_M = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : b(x) < M \right\}$ e $B_n = B(x_n, r) \subset \mathbb{R}^N$ é a bola de raio r e centro x_n. Então vale $(b2)_2$. Se, adicionalmente, tivermos a condição (2.2), então também vale $(b2)_s$, para todo $s \in (2, 2^*)$.

Faremos a demonstração deste teorema mais tarde. A grosso modo, ele diz que a condição $(b2)_s$ vale se, para todo $M > 0$, o conjunto $\Omega_M \backslash \overline{B_R}$ se torna cada vez mais "estreito" quando R tende ao infinito. Observe que, se um conjunto tem medida finita, então ele satisfaz a condição (2.3). De fato, seja Ω um conjunto de medida finita, digamos $|\Omega| = A$. Suponha, por absurdo, que Ω não satisfaz (2.3). Então existem $r > 0$ e uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, com $|x_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, tais que

$$|\Omega \cap B_n| \geq c > 0, \ \forall \ n \in \mathbb{N} .$$

Seja k um número natural tal que $kc > A$ e seja $I = \{n_1, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que $B_{n_i} \cap B_{n_j} = \emptyset$ se $n_i, n_j \in I$, com $n_i \neq n_j$. Essa escolha de I é possível porque $|x_n| \to \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} A = |\Omega| &\geq \left| \bigcup_{n_i \in I} (\Omega \cap B_{n_i}) \right| \\ &= \sum_{n_i \in I} |\Omega \cap B_{n_i}| \\ &\geq \sum_{n_i \in I} c \\ &= kc \\ &> A , \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Agora observe também que um conjunto não precisa ter medida finita para satisfazer (2.3). O conjunto $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \ y > 0 \text{ e } y < \frac{1}{x}\right\}$ claramente satisfaz (2.3) e não tem medida finita, pois sua medida é a integral de zero a infinito da função $g(x) = \frac{1}{x}$.

Como já foi dito, o espaço em que vamos procurar as soluções dos problemas $(P1)$ e $(P2)$ é o espaço

$$H = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} b(x) u^2 dx < \infty \right\} .$$

Trabalharemos neste espaço para garantir que o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b(x) u^2 \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx$$

esteja bem definido. As soluções de $(P2)$ (e de $(P1)$, no caso em que $F(x, u) = \frac{a(x)|u|^{p+1}}{p+1}$) são os pontos críticos deste funcional, se ele estiver bem definido e for de classe C^1 em H. Iremos verificar mais adiante que este é o caso. Mas para isso e para a demonstração da existência de solução precisamos de alguns resultados preliminares.

2.1 Alguns resultados preliminares e demonstração do Teorema 2.1

Lema 2.1. *Suponha que vale (2.2), isto é, $\lambda_1 > 0$. Então o espaço H é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por*

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + b(x)uv)\, dx \ .$$

Além disso, H está imerso continuamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. H é completo por ser subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$, que é completo. Vamos mostrar que existe uma constante positiva a tal que, para todo $u \in H$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx \geq a\, \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \ . \tag{2.4}$$

Com isso, temos que $\langle u, u\rangle = 0$ implica $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0$, o que, por sua vez, implica $u = 0$. As outras propriedades de produto interno são evidentes. Assim, H é um espaço de Hilbert. Além disso, a desigualdade (2.4) também nos diz que H está imerso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois a quantidade do lado esquerdo da desigualdade é o quadrado da norma de u em H.

Suponha então, por contradição, que não vale (2.4). Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in H$ tal que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2\right) dx = 1$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2\right) dx < \frac{1}{n} \ .$$

Então, como $\dfrac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}}$ está em H, temos, pela definição de λ_1, que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq \|u_n\|^2_{L^2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left| \nabla \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}} \right) \right|^2 + b(x) \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}} \right)^2 \right] dx \right\} \\
&< \frac{1}{n} \ .
\end{aligned}$$

Portanto, como $\lambda_1 > 0$, esta última desigualdade implica que $u_n \to 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned}
o(1) &= -B \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} b(x) u_n^2 dx \\
&< \frac{1}{n} - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\
&= \frac{1}{n} + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx - 1 \ ,
\end{aligned}$$

o que é absurdo, pois esta última expressão converge para -1 quando $n \to \infty$.

$\square$

O lema a seguir mostra a relação entre as condições $(b2)_s$, com s variando em $[2, 2^*)$.

Lema 2.2. *Suponha que vale* (2.2). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $2 \leq p < q < 2^*$. *Então existem constantes positivas* $C_1 = C_1(p, q, N, \lambda_1)$ *e* $\alpha_1 = \alpha_1(p, q, N)$, *com* $\alpha_1 < 1$, *tais que*

$$\nu_q(\Omega) \geq C_1(\nu_p(\Omega))^{\alpha_1} .$$

E se $2 < q < p < 2^*$, *então também existem constantes positivas* $C_2 = C_2(p, q, N, \lambda_1)$ *e* $\alpha_2 = \alpha_2(p, q, N)$, *com* $\alpha_2 < 1$, *tais que*

$$\nu_q(\Omega) \geq C_2(\nu_p(\Omega))^{\alpha_2} .$$

Portanto, $(b2)_p$ *implica* $(b2)_q$, *para* $2 \leq p \leq q$ *e para* $2 < q \leq p$.

Demonstração. Vamos demonstrar o caso em que $2 \leq p < q < 2^*$. Observe que, neste caso, temos

$$\frac{1}{2^*} < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} .$$

Assim, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{q} = \alpha\frac{1}{p} + (1-\alpha)\frac{1}{2^*} .$$

Segue então da desigualdade de Hölder que, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\alpha q}|u|^{(1-\alpha)q} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\alpha q \frac{p}{\alpha q}}\right)^{\frac{\alpha q}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(1-\alpha)q\frac{2^*}{(1-\alpha)q}}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{2^*}} ,$$

isto é,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} .$$

Esta desigualdade é conhecida como Desigualdade de Interpolação. Agora observe que, como vale a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, também temos a desiguladade

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{H^1(\mathbb{R}^N)} .$$

Sendo assim, usando (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\nu_q(\Omega) &= \inf_{u \in H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\,dx}{\|u\|^2_{L^q(\mathbb{R}^N)}} \\
&\geq \frac{1}{C^2} \inf_{u \in H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\,dx}{\|u\|^{2\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{2(1-\alpha)}_{H^1(\mathbb{R}^N)}} \\
&\geq \frac{a^{1-\alpha}}{C^2} \inf_{u \in H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\,dx}{\|u\|^{2\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\,dx\right)^{1-\alpha}} \\
&= C_1 \inf_{u \in H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\,dx}{\|u\|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\right)^{\alpha} \\
&= C_1(\nu_p(\Omega))^{\alpha} .
\end{aligned}$$

Para o segundo caso, o argumento é análogo, bastando observar que agora a desigualdade de interpolação a ser usada é

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

e que também vale a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

No próximo resultado, nós estabelecemos uma forma equivalente e mais simples de enunciar a condição $(b2)_s$.

Proposição 2.1. *Seja* $s \in [2, 2^*)$ *e suponha que vale* (2.2). *Então* $(b2)_s$ *vale se, e somente se,*

$$\lim_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R}) = \infty \ , \tag{2.5}$$

onde $B_R \subset \mathbb{R}^N$ *é a bola de raio* R *e centro* 0.

Observação. A hipótese (2.2) só é usada para mostrar que $(b2)_s$ implica a condição (2.5) para $s \in (2, 2^*)$. Para mostrar que $(b2)_2$ implica (2.5), a hipótese (2.2) não é necessária, como veremos a seguir na prova da proposição 2.1.

Demonstração. Suponha que vale (2.5). Observe, inicialmente, que $\nu_s(\Omega_2) \leq \nu_s(\Omega_1)$ para quaisquer abertos $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$. De fato, temos que $H^1_0(\Omega_1) \subset H^1_0(\Omega_2)$, pois podemos estender $u \in H^1_0(\Omega_1)$ para todo o Ω_2 fazendo $u(x) = 0$ se $x \in \Omega_2 \backslash \Omega_1$. Se $u \in H^1_0(\Omega_1)$ e $\|u\|_{L^s(\Omega_1)} = 1$, então a extensão em Ω_2, que denotaremos ainda por u, satisfaz $\|u\|_{L^s(\Omega_2)} = 1$, já que a integral de $|u|^s$ em $\Omega_2 \backslash \Omega_1$ é igual a zero. Logo,

$$M_s(\Omega_1) = \left\{ u \in H^1_0(\Omega_1) : \|u\|_{L_s(\Omega_1)} = 1 \right\} \subset M_s(\Omega_2) = \left\{ u \in H^1_0(\Omega_2) : \|u\|_{L_s(\Omega_2)} = 1 \right\}$$

e, portanto,

$$\nu_s(\Omega_2) = \inf_{u \in M_s(\Omega_2)} \int_{\Omega_2} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2 \right) dx \leq \inf_{u \in M_s(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2 \right) dx = \nu_s(\Omega_1).$$

Agora, sejam $r > 0$ e $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência que tende ao infinito. Como vale (2.5), então, dado $M > 0$, existe $R_0 > 0$ tal que $\nu_s(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_{R_0}}) > M$. E, como $|x_n| \to \infty$, temos que $B_n \subset \mathbb{R}^N \backslash \overline{B_{R_0}}$, para n suficientemente grande. Ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \quad &\Rightarrow \quad B_n \subset \mathbb{R}^N \backslash \overline{B_{R_0}} \\ &\Rightarrow \quad M \ < \ \nu_s(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_{R_0}}) \ \leq \ \nu_s(B_n) \ . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \nu_s(B_n) = \infty \ .$$

Ou seja, vale $(b2)_s$, $s \in [2, 2^*)$.

Vamos provar agora que $(b2)_s$ implica a condição (2.5). Primeiramente, vamos fazer isto para $s \in (2, 2^*)$. Suponha então que não vale (2.5). Sendo assim, nós podemos encontrar uma sequência $R_n \to \infty$ tal que $\nu_s(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_{R_n}}) < C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, por esta desigualdade e pela definição de $\nu_s(\mathbb{R}^N\backslash\overline{B_{R_n}})$, podemos encontrar, para cada n, uma função $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que supp $u_n \subset \mathbb{R}^N\backslash B_{R_n}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^s dx = 1$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2\right) dx \leq C \ .$$

O conjunto supp u_n é o fecho do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : u_n(x) \neq 0\}$. Note que a desigualdade acima implica que a sequência (u_n) está em H e é limitada nesse espaço. Logo, pelo Lema 2.1 ($H \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$), ela é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, não converge para zero em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Então podemos usar um resultado de Lions (cf. Lema 1.21 em [14] ou Lema B.1 no Apêndice B) para garantir que existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ e um número $r_0 > 0$ tais que

$$\int_{B(x_n,r_0)} |u_n|^s dx \geq c_0 > 0 \ ,$$

a menos de uma subsequência de (u_n). Como a integral acima é não nula, a bola $B(x_n, r_0)$ intersecta o suporte de u_n, para cada n. Mas supp $u_n \subset \mathbb{R}^N\backslash B_{R_n}$, ou seja, $B(x_n, r_0)$ intersecta $\mathbb{R}^N\backslash B_{R_n}$, para cada n. Como $R_n \to \infty$, então $|x_n| \to \infty$. Agora considere uma sequência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\backslash B(x_n, 2r_0)$ e $\varphi_n \equiv 1$ em $B(x_n, r_0)$. Seja $v_n = \varphi_n u_n$, $n \in \mathbb{N}$. Então é fácil verificar que (v_n) é uma sequência limitada em H. Além disso, como o suporte de φ_n está compactamente contido em $B(x_n, 3r_0)$, então o de v_n também está. Assim, $v_n \in H_0^1(B(x_n, 3r_0))$. Temos também que

$$\begin{aligned}
\|v_n\|^s_{L^s(B(x_n,3r_0))} &\geq \|v_n\|^s_{L^s(B(x_n,r_0))} \\
&= \int_{B(x_n,r_0)} |\varphi_n u_n|^s dx \\
&= \int_{B(x_n,r_0)} |u_n|^s dx \\
&\geq c_0 \ .
\end{aligned}$$

Podemos então normalizar v_n em $L^s(B(x_n, 3r_0))$ de forma a obter uma função em $M_s(B(x_n, 3r_0))$. Assim, para cada n, temos

$$\nu_s(B(x_n, 3r_0)) \leq \|v_n\|_H^2 \ .$$

Como a sequência (v_n) é limitada em H, então a sequência $(\nu_s(B(x_n, 3r_0))) \subset \mathbb{R}$ também é limitada. Portanto, não vale $(b2)_s$.

Agora vamos mostrar que $(b2)_s$ implica (2.5) também para $s = 2$. Denote, para qualquer aberto $G \subset \mathbb{R}^N$,

$$\mu_1(G) = \inf_{u \in H^1(G)\backslash\{0\}} \frac{\int_G \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx}{\|u\|^2_{L^2(G)}} \ .$$

Assim, se B_r é uma bola de raio r, temos que

$$\mu_1(B_r) \leq \nu_2(B_r) \leq C(N)\left(\mu_1(B_r) + B + \frac{1}{r^2}\right) \tag{2.6}$$

(cf. Lema B.2 no Apêndice B). Suponha agora que não vale (2.5). Então existem sequências $R_n \to \infty$ e $(u_n) \subset H$ tais que supp $u_n \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{R_n}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx = 1 \tag{2.7}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2\right) dx < C \ . \tag{2.8}$$

Fixe $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$. Vamos cobrir $\mathbb{R}^N \backslash B_{R_n}$ com uma quantidade enumerável de bolas de raio r, denotadas por $B^i = B^i_r$, $i = 1, 2, \ldots$. Então,

$$\left(\inf_i \mu_1(B^i)\right) \|u_n\|^2_{L^2(B^i)} \leq \mu_1(B^i) \|u_n\|^2_{L^2(B^i)} \leq \int_{B^i} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2\right) dx \ .$$

Somando essa desigualdade sobre todos os i's, obtemos, por (2.7) e (2.8),

$$\inf_i \mu_1(B^i) < C \ .$$

Então existe algum $i = i(n)$ tal que

$$\mu_1(B^{i(n)}) \leq C \ . \tag{2.9}$$

Seja x_n o centro da bola $B^{i(n)}$, isto é, $B^{i(n)} = B_r(x_n)$. De (2.6) e (2.9), obtemos

$$\nu_2(B_r(x_n)) \leq \hat{C} \ . \tag{2.10}$$

Agora observe que, para cada n, a bola $B_r(x_n)$ intersecta o conjunto $\mathbb{R}^N \backslash B_{R_n}$. Como $R_n \to \infty$, então $|x_n| \to \infty$. Portanto, (2.10) implica que não vale $(b2)_2$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Prova do Teorema 2.1. Vamos provar que (2.3) implica $(b2)_2$. No caso em que vale (2.2), para provar que (2.3) implica $(b2)_s$, com $s \in (2, 2^*)$, basta usar o Lema 2.2, que garante que $(b2)_2$ implica $(b2)_s$, $s \in (2, 2^*)$.

Suponha então, por contradição, que (2.3) não implica $(b2)_2$. Ou seja, suponha que vale (2.3) e não vale $(b2)_2$. Assim, existem um número $r > 0$ e uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, com $|x_n| \to \infty$, tais que

$$\nu_2(B_n) < C \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

em que $B_n = B(x_n, r)$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $u_n \in H^1_0(B_n)$ tal que

$$\int_{B_n} u_n^2 \ dx = 1$$

e

$$\int_{B_n} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2\right) dx \leq C \ .$$

Agora, fixe $M > 0$ e denote $\Omega_{M,n} = \Omega_M \cap B_n = \{x \in B_n : b(x) < M\}$. Então, como vale a condição (2.3), temos que

$$\lim_{n\to\infty} |\Omega_{M,n}| = 0 \ .$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, onde $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$, temos também que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx &\leq |\Omega_{M,n}|^{1-\frac{2}{2^*}} \, \|u_n\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \hat{C}|\Omega_{M,n}|^{1-\frac{2}{2^*}} \, \|u_n\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \\
&= \hat{C}|\Omega_{M,n}|^{1-\frac{2}{2^*}} \, \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \hat{C}C|\Omega_{M,n}|^{1-\frac{2}{2^*}} \ .
\end{aligned}$$

Como esta última expressão tende a zero quando $n \to \infty$, podemos então escolher n suficientemente grande de tal forma que

$$\int_{\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx \leq \frac{M}{2(B+M)} \ .$$

Assim, para tal n, temos

$$\begin{aligned}
C &\geq \int_{B_n\setminus\Omega_{M,n}} b(x)u_n^2 \ dx + \int_{\Omega_{M,n}} b(x)u_n^2 \ dx \\
&\geq M\int_{B_n\setminus\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx - B\int_{\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx \\
&= M\int_{B_n\setminus\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx + M\int_{\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx - M\int_{\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx - B\int_{\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx \\
&= M\int_{B_n} u_n^2 \ dx - (B+M)\int_{\Omega_{M,n}} u_n^2 \ dx \\
&\geq M - \frac{M}{2} \\
&= \frac{M}{2} \ .
\end{aligned}$$

Mas isto é absurdo, pois M é arbitrário. Portanto, (2.3) implica $(b2)_2$.

$\square$

A proposição a seguir será usada mais adiante para provar as condições necessárias dos teoremas de existência.

Proposição 2.2. *Suponha que vale* $(b2)_2$*. Então* λ_1 *é o menor autovalor do operador* $-\Delta + b(\cdot)$ *em* $\mathbb{R}^N$*, correspondendo a uma autofunção principal positiva. Em outras palavras, o problema*

$$(P)_{\lambda_1} \qquad \begin{cases} -\Delta\varphi_1 + b(x)\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \ , \\ \varphi_1 \in H \cap C^2(\mathbb{R}^N) \ , \\ \varphi_1 > 0 \ , \end{cases}$$

tem uma solução que, normalizada em $L^2(\mathbb{R}^N)$*, é um minimizante para o ínfimo que define* λ_1*.*

Demonstração. Vamos provar que o ínfimo que define λ_1 é atingido. Note primeiramente que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \inf_{u\in H,\ \|u\|_{L_2}=1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \ dx - B \right) \\ &\geq -B > -\infty \ . \end{aligned}$$

Seja (u_n) uma sequência de funções em H tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2 \right) \ dx \longrightarrow \lambda_1 \ \text{ quando } \ n \to \infty \tag{2.11}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \ dx = 1 \ . \tag{2.12}$$

Observe que $|u_n|$ também está em H. Além disso, temos que

$$\nabla|u_n| = \begin{cases} \nabla u_n & \text{se} \quad u_n > 0 \\ 0 & \text{se} \quad u_n = 0 \\ -\nabla u_n & \text{se} \quad u_n < 0 \end{cases}$$

(cf. Lema 7.6 em [6]). Então, $|\nabla|u_n|| = |\nabla u_n|$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla|u_n||^2 + b(x)|u_n|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2 \right) dx \longrightarrow \lambda_1 \ \text{ quando } \ n \to \infty \ .$$

Ou seja, poderíamos trocar u_n por $|u_n|$. Sendo assim, podemos supor que as funções u_n são não-negativas. Agora, usando (2.11) e (2.12), obtemos, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \ dx - B &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \ dx - B \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2 \right) dx \\ &\leq \lambda_1 + 1 \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx \leq \lambda_1 + 1 + B \ .$$

De (2.12) e da desigualdade anterior, concluímos que a sequência (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, a menos de subsequência, converge fracamente para uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e converge fortemente para a mesma função em $L^2(B_R)$, para todo $R > 0$, pois $H^1(B_R) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^2(B_R)$, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov. Como consequência da convergência em $L^2(B_R)$ para todo $R > 0$, (u_n) também converge q.t.p. para u em $\mathbb{R}^N$. Isto implica $u \geq 0$.

Agora observe que, como vale $(b2)_2$, então, pela Proposição 2.1 e pela observação que a segue, $\nu_2(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R})$ tende ao infinito quando $R \to \infty$. Sendo assim, podemos escolher $R > 0$ tal que $\nu_2(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R}) > 0$. Considere, para tal R, uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 0$ em B_{R+1} e $\varphi \equiv 1$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_{R+2}$. Então $\varphi(u_n - u)$ está em $H_0^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R})$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq C\Big(\|(1-\varphi)(u_n - u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi(u_n - u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\Big) \\
&= C\int_{B_{R+2}} (1-\varphi)^2 (u_n - u)^2 \, dx + C\int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R}} \varphi^2 (u_n - u)^2 \, dx \\
&\leq C\int_{B_{R+2}} (u_n - u)^2 \, dx + \frac{C}{\nu_2(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R})}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi(u_n - u))|^2 dx \\
&\quad + \frac{C}{\nu_2(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R})}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)\varphi^2 (u_n - u)^2 \, dx \ . \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Na expressão acima, a primeira integral converge para zero quando $n \to \infty$, pelo que já foi observado anteriormente. A segunda integral é limitada. Com efeito, usando o fato de que a sequência $(u_n - u)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois converge fracamente para zero nesse espaço, e que $|\nabla \varphi|$, assim como φ, é uma função limitada, pois é contínua em $\mathbb{R}^N$ e tem suporte compacto, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi(u_n - u))|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi \nabla(u_n - u) + (u_n - u)\nabla\varphi|^2 \, dx \\
&\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varphi^2 |\nabla(u_n - u)|^2 + (u_n - u)^2 |\nabla\varphi|^2\right) dx \\
&\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(u_n - u)|^2 + (u_n - u)^2\right) dx \\
&\leq \hat{C} \ .
\end{aligned}$$

Além disso, usando o fato de que $\int_{\mathbb{R}^N} b(x) u_n^2 \, dx$ é limitada, pois $\|u_n\|_H^2$ converge para

λ_1, e o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} b(x)\varphi^2(u_n-u)^2\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (b(x)+B)\varphi^2(u_n-u)^2\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (b(x)+B)(u_n-u)^2\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (b(x)+B)u_n^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (b(x)+B)u^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (b(x)+B)u_n^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to\infty}(b(x)+B)u_n^2\,dx \\
&\leq C + \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} (b(x)+B)u_n^2\,dx \\
&\leq \hat{C}\ .
\end{aligned}$$

Portanto, de (2.13), concluímos que

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n-u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\hat{C}}{\nu_2(\mathbb{R}^N\backslash\overline{B_R})}\ .$$

Na desigualdade acima, a expressão do lado direito tende a zero quando $R\to\infty$, pois $\nu_2(\mathbb{R}^N\backslash\overline{B_R})\to\infty$. Logo,

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n-u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0\ .$$

Pelos mesmos argumentos, concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n-u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0\ .$$

Portanto, $u_n\to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx = 1 \tag{2.14}$$

Agora, pela convergência fraca de u_n para u em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2+u^2\right)dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2+u_n^2\right)dx\ .$$

Logo, por (2.12) e (2.14), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\,dx\ . \tag{2.15}$$

Considere agora o conjunto $G=\{x\in\mathbb{R}^N : b(x)>1\}$. Usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\backslash G} b(x)u_n^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N\backslash G} b(x)u^2\,dx\ . \tag{2.16}$$

De fato, $b(x)$ é limitada em $\mathbb{R}^N \backslash G$. Como $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, existe $\sigma \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_n| \leq \sigma$ em $\mathbb{R}^N$ e, portanto, $|b(x)u_n^2| \leq \sigma^2 \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\backslash G)}$ em $\mathbb{R}^N\backslash G$, sendo que $\sigma^2 \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\backslash G)}$ está em $L^1(\mathbb{R}^N\backslash G)$. Além disso, $b(x)u_n^2(x) \to b(x)u^2(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N\backslash G$.

Observe também que $b^{\frac{1}{2}}(x)u_n$ é limitada em $L^2(G)$ e $b^{\frac{1}{2}}(x)u_n(x) \to b^{\frac{1}{2}}(x)u(x)$ q.t.p. em G. Portanto, $b^{\frac{1}{2}}(x)u_n \rightharpoonup b^{\frac{1}{2}}(x)u$ em $L^2(G)$ (cf. [7], cap. 1, Lema 4.8). Assim, temos que

$$\int_G b(x)u^2 \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_G b(x)u_n^2 \, dx \ . \tag{2.17}$$

Logo, por (2.16) e (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u_n^2 \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\backslash G} b(x)u_n^2 \, dx + \liminf_{n\to\infty} \int_G b(x)u_n^2 \, dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u^2 \, dx \ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Esta desigualdade mostra que $u \in H$. Além disso, combinando ela com a desigualdade (2.15), concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx + \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u_n^2 \, dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2\right) dx \\ &= \lambda_1 \ . \end{aligned}$$

Mas como $u \in H$ e $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx = \lambda_1 \ .$$

Ou seja, u é um minimizante para o ínfimo que define λ_1.

Vamos provar agora que u é uma solução fraca em H da EDP do problema $(P)_{\lambda_1}$. Fixe $v \in H$. Então, para $t > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^N}(u + tv)^2 \, dx > 0$, vale

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(u+tv)|^2 + b(x)(u+tv)^2\right) dx}{\int_{\mathbb{R}^N}(u+tv)^2 \, dx} \ .$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + 2t\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} uv\ dx + \lambda_1 t^2 \int_{\mathbb{R}^N} v^2\ dx &= \lambda_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^2 + 2tuv + t^2 v^2\right) dx \right) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + 2t \nabla u \cdot \nabla v + t^2 |\nabla v|^2\right) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left(b(x) u^2 + 2t b(x) uv + t^2 b(x) v^2\right) dx \\
&= \lambda_1 + 2t \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + b(x)uv)\, dx \\
&\quad + t^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + b(x) v^2\right) dx\ .
\end{aligned}$$

Simplificando e dividindo a desigualdade acima por $2t$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_1 uv\ dx + \lambda_1 \frac{t}{2} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + b(x)uv)\, dx + \frac{t}{2} \|v\|_H\ .$$

Passando ao limite quando $t \to 0$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_1 uv\ dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + b(x)uv)\, dx\ .$$

Se usarmos o mesmo raciocínio para $t < 0$, veremos também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_1 uv\ dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + b(x)uv)\, dx\ .$$

Portanto, as expressões dos lados esquerdo e direito na desigualdade acima são na verdade iguais. Isto mostra que u é solução fraca da EDP em $(P)_{\lambda_1}$.

Como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, por teoria elíptica padrão, pode-se mostrar que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. E para mostrar que $u > 0$, observe que

$$\Delta u - (b(x) + B)u = -(\lambda_1 + B)u \leq 0\ .$$

Então basta usar o Princípio do Máximo Forte (cf. Apêndice B, Teorema B.1) aplicado ao operador $\Delta - (b(x) + B)$. Isto conclui a demonstração.

$\square$

Na próxima seção, vamos demonstrar que o funcional Φ cujos pontos críticos são soluções fracas de $(P2)$ (e de $(P1)$, no caso em que $F(x,u) = \frac{a(x)|u|^{p+1}}{p+1}$) satisfaz a condição de Palais-Smale. Vamos demonstrar também, via Teorema do Passo da Montanha, a existência de solução para os problemas $(P1)$ e $(P2)$.

2.2 A condição de Palais-Smale e os resultados de existência

Vamos considerar o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \ .$$

No caso do problema $(P1)$, temos $F(x,u) = \frac{a(x)|u|^{p+1}}{p+1}$.

Lema 2.3. *Suponha que valem* (2.1), (2.2) *e* $(f1) - (f4)$. *Então o funcional* Φ *está bem definido e é de classe* C^1 *em* H. *Além disso, para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $C_\epsilon > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,u)|dx \leq \epsilon \|u\|_H^2 + C_\epsilon \|u\|_H^{p+1} \ . \tag{2.19}$$

Demonstração. Observe primeiramente que, pela hipótese $(f2)$, temos

$$f_t(x,t) \leq C_0 A(x)(1 + |t|^{p-1}) \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $u \geq 0$, integrando a desigualdade acima de 0 até u e observando que $f(x,0) = 0$, por $(f3)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x,u) &= \int_0^u f_t(x,t)\ dt \\ &\leq C_0 A(x) \int_0^u \left(1 + t^{p-1}\right) dt \\ &= C_0 A(x) \left(u + \frac{u^p}{p}\right) \\ &= CA(x)(|u| + |u|^p) \ . \end{aligned}$$

Analogamente, se $u < 0$, temos que

$$\begin{aligned} -f(x,u) &= \int_u^0 f_t(x,t)\ dt \\ &\leq C_0 \int_u^0 \left(1 + (-t)^{p-1}\right) dt \\ &= C_0 \left(-u + \frac{(-u)^p}{p}\right) \\ &= CA(x)(|u| + |u|^p) \ . \end{aligned}$$

Por $(f4)$, temos que $f(x,u) > 0$ se $u > 0$ e $f(x,u) < 0$ se $u < 0$. Sendo assim, pelas desigualdades acima, temos que

$$|f(x,u)| \leq CA(x)(|u| + |u|^p) \ , \tag{2.20}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{R}$. Para o caso do problema $(P1)$, em que $f(x,u) = a(x)|u|^{p-1}u$, a desigualdade acima é imediata. Agora note que, por $(f3)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|u| \le \delta \Rightarrow |f(x,u)| \le \epsilon A(x)|u| \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N \ .$$

E se $|u| \ge \delta$, então, por (2.20), temos que

$$\begin{aligned} |f(x,u)| &\le CA(x)|u|^p \left(\frac{1}{|u|^{p-1}} + 1 \right) \\ &\le CA(x)|u|^p \left(\frac{1}{\delta^{p-1}} + 1 \right) \\ &\le C_\epsilon A(x)|u|^p \ . \end{aligned}$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$|f(x,u)| \le \epsilon A(x)|u| + C_\epsilon A(x)|u|^p \ . \tag{2.21}$$

Consequentemente, obtemos, por integração em relação a u da desigualdade anterior,

$$|F(x,u)| \le CA(x) \left(\epsilon |u|^2 + C_\epsilon |u|^{p+1} \right) \ . \tag{2.22}$$

Agora, usando a hipótese $(f1)$ e a desigualdade de Hölder, temos que, para todo $u \in H$ e para $s \in \{2, p+1\}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u|^s dx &= \int_{\{|x| \le R_0\}} A(x)|u|^s dx \ + \int_{\{b(x) \le 0\} \cap \{|x| \ge R_0\}} A(x)|u|^s dx \\ &\quad + \int_{\{b(x) > 0\} \cap \{|x| \ge R_0\}} A(x)|u|^s dx \\ &\le \|A\|_{L^\infty(B_{R_0})} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \ + \ 2C_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \\ &\quad + C_0 \int_{\{b(x)>0\}} b(x)^{\frac{1}{\alpha}} |u|^s dx \\ &\le C \left(\|u\|^s_{L^s(\mathbb{R}^N)} + \int_{\{b(x)>0\}} b(x)^{\frac{1}{\alpha}} |u|^{\frac{2}{\alpha}} |u|^{s - \frac{2}{\alpha}} dx \right) \\ &\le C \left(\|u\|^s_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \left(\int_{\{b(x)>0\}} b(x) u^2 dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{\{b(x)>0\}} |u|^{\frac{\alpha s - 2}{\alpha - 1}} dx \right)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \right) \ , \end{aligned}$$

onde nesta última desigualdade também usamos o fato de que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$, já que $s = 2$ ou $s = p+1$ e, por (2.1), $2 < p+1 < 2^*$. No caso em que $s = 2$, temos $\frac{\alpha s-2}{\alpha-1} = 2$. E no caso em que $s = p+1$, temos, novamente por (2.1) e pela definição de $p^\#$, que $2 \leq \frac{\alpha s-2}{\alpha-1} < 2^*$. Então, usando o Lema 2.1, obtemos

$$H \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{\alpha s-2}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^N) \ .$$

Além disso, observe que, se $u \in H\backslash\{0\}$, então

$$\begin{aligned}
\int_{\{b(x)>0\}} b(x)u^2dx &= \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u^2dx \ - \int_{\{b(x)\leq 0\}} b(x)u^2dx \\
&\leq \|u\|_H^2 \ + \ B\int_{\{b(x)\leq 0\}} u^2dx \\
&\leq \|u\|_H^2 \left(1 + B\frac{\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx}{\|u\|_H^2}\right) \\
&\leq \|u\|_H^2 \left(1 + \frac{B}{\lambda_1}\right) \ .
\end{aligned}$$

Estas desigualdades obviamente também valem se $u = 0$. Sendo assim, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u|^s dx &\leq C\left(\|u\|_H^s \ + \ \|u\|_H^{\frac{2}{\alpha}}\left(1+\frac{B}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \|u\|_H^{\frac{\alpha s-2}{\alpha}}\right) \\
&= C\left(1 + \left(1+\frac{B}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\|u\|_H^s \ ,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

para todo $u \in H$. Portanto, integrando a desigualdade em (2.22), obtemos a desigualdade em (2.19). Assim, o funcional Φ está bem definido em H, pois dado $u \in H$, as integrais que definem $\Phi(u)$ são finitas.

Vamos mostrar agora que Φ é de classe C^1. Observe primeiramente que, se $u \in H$, a primeira integral que aparece na expressão de $\Phi(u)$ é o quadrado da norma de u em H e, portanto, define um funcional de classe C^1 em H (cf. Apêndice C). Basta mostrar então que a segunda integral na expressão de $\Phi(u)$ define um funcional de classe C^1. Isto é, denotando $J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx$, $u \in H$, devemos mostrar que J é um funcional de classe C^1.

Fixe $u \in H$. Vamos mostrar inicialmente que J possui derivada de Gateaux em u. O candidato a derivada de Gateaux de J em u é a aplicação T que, para cada $v \in H$, associa o valor

$$Tv = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}dx \ .$$

Se mostrarmos que T é uma aplicação linear e contínua em H, então T será a derivada de Gateaux de J em u. Para calcular o limite que define T, observe que F é uma função de classe C^1 em relação à segunda variável, pois f é contínua. Sendo assim, dados $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $v \in H$, o Teorema do Valor Médio nos garante que existe $\theta = \theta(t, x, v) \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u + \theta tv)v \ .$$

Usando agora a desigualdade (2.21) e a desigualdade de Young, temos que, para $|t| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|f(x, u + \theta tv)v| &\leq \epsilon A(x)|u + \theta tv||v| + C_\epsilon A(x)|u + \theta tv|^p|v| \\
&\leq \epsilon A(x)\left(|u| + |v|\right)|v| + CA(x)\left(|u|^p + |v|^p\right)|v| \\
&= \epsilon A(x)\left(|u||v| + |v|^2\right) + CA(x)\left(|u|^p|v| + |v|^{p+1}\right) \\
&\leq \epsilon A(x)\left(\frac{|u|^2 + |v|^2}{2} + |v|^2\right) \\
&\quad + CA(x)\left(\frac{|u|^{p+1}}{\frac{p+1}{p}} + \frac{|v|^{p+1}}{p+1} + |v|^{p+1}\right) .
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.23), esta última expressão é uma função de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, pela continuidade de f, temos que $f(x, u + \theta tv)v \to f(x, u)v$ quando $t \to 0$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned}
Tv &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} dx \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u + \theta tv)v dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)v dx \ .
\end{aligned}$$

Logo, T é claramente linear. Precisamos mostrar agora que também é contínua. Usando novamente a desigualdade (2.21), temos que, para todo $v \in H$,

$$\begin{aligned}
|Tv| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x, u)||v| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\epsilon A(x)|u||v| + C_\epsilon A(x)|u|^p|v|\right) dx \\
&= \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{A(x)}|u|\sqrt{A(x)}|v| dx \ + \ C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} A(x)^{\frac{p}{p+1}}|u|^p A(x)^{\frac{1}{p+1}}|v| dx \ .
\end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|Tv| &\leq \epsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_\epsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u|^{p+1} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|v|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq C \|u\|_H \|v\|_H + C \|u\|_H^p \|v\|_H \;=\; C \left(\|u\|_H + \|u\|_H^p\right) \|v\|_H \;,
\end{aligned}$$

onde esta última desigualdade é consequência da desigualdade (2.23) e mostra que T é limitada, sendo, portanto, contínua. Assim, como T é linear e contínua, então é a derivada de Gateaux do funcional J em u, isto é, $T = DJ(u)$.

Para concluir a demonstração de que J é um funcional de classe C^1 em H, resta mostrar que $u \mapsto DJ(u)$ é contínua em H, pois neste caso a derivada de Gateaux é igual à derivada de Frechet $J' : H \to H'$ (cf. Apêndice C), onde H' é o espaço dual de H. E se a derivada de Frechet J' é contínua, então, por definição, J é de classe C^1. Precisamos mostrar que, se $u_n \to u$ em H, então $DJ(u_n) \to DJ(u)$ em H' quando $n \to \infty$, isto é,

$$\|DJ(u_n) - DJ(u)\|_{H'} = \sup_{v \in H, \|v\| \leq 1} |(DJ(u_n) - DJ(u))v| \longrightarrow 0 \;.$$

Para isto, note que, pela hipótese $(f2)$,

$$\begin{aligned}
|(DJ(u_n) - DJ(u))v| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u_n) - f(x,u))v \; dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 f_t(x, u + t(u_n - u)) \; dt\right)(u_n - u)v \; dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 C_0 A(x)(1 + |u + t(u_n - u)|^{p-1}) dt\right) \\
&\quad \times |u_n - u||v| \; dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \left(1 + |u|^{p-1} + |u_n|^{p-1}\right) |u_n - u||v| \; dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{A(x)}|u_n - u| \sqrt{A(x)}|v| \; dx \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^N} A(x)^{\frac{p-1}{p+1}} |u|^{p-1} A(x)^{\frac{1}{p+1}} |u_n - u| A(x)^{\frac{1}{p+1}} |v| \; dx \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^N} A(x)^{\frac{p-1}{p+1}} |u_n|^{p-1} A(x)^{\frac{1}{p+1}} |u_n - u| A(x)^{\frac{1}{p+1}} |v| \; dx \;.
\end{aligned}$$

Então, usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade (2.23), obtemos

$$
\begin{aligned}
|(DJ(u_n) - DJ(u))v| &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u_n - u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u|^{p+1} dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u_n|^{p+1} dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\right\} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u_n - u|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|v|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq \hat{C}\, \|u_n - u\|_H \, \|v\|_H + \hat{C}\left(\|u\|_H^{p-1} + \|u_n\|_H^{p-1}\right) \\
&\quad \times \|u_n - u\|_H \, \|v\|_H \\
&\leq \hat{C}\left(1 + \|u\|_H^{p-1} + \|u_n\|_H^{p-1}\right) \|u_n - u\|_H \, \|v\|_H \ .
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\|DJ(u_n) - DJh(u)\|_{H'} \leq \hat{C}\left(1 + \|u\|_H^{p-1} + \|u_n\|_H^{p-1}\right) \|u_n - u\|_H \ .
$$

Isto implica que $DJ(u_n) \to DJ_h(u)$ em H' e, portanto, J é de classe C^1. Consequentemente, Φ é de classe C^1, como queríamos demonstrar.

□

Seguindo o procedimento do "Passo da Montanha", precisamos mostrar agora que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale. É esta condição que cria dificuldades para estudar problemas elípticos em domínios ilimitados como o que estamos estudando aqui. Para estabelecer sua validade em nosso caso, vamos mostrar que H está imerso compactamente em alguns espaços de Lebesgue com peso.

Denote por $L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$ o conjunto das funções mensuráveis u em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u|^s \, dx < \infty \ .
$$

A norma neste espaço será dada por

$$
\|u\|_{L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} A(x)|u|^s \, dx\right)^{\frac{1}{s}} \ .
$$

O resultado a seguir estabelece uma condição para H estar imerso compactamente em $L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq s < p^{\#} + 1$.

Proposição 2.3. *Suponha que vale* $(f1)$ *e* (2.2)*. Então* H *está imerso continuamente em* $L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$*, para* $2 \leq s < p^{\#} + 1$*. Além disso,* $(b2)_s$ *é uma condição necessária e suficiente para esta imersão ser compacta.*

Demonstração. A imersão contínua decorre da desigualdade (2.23). Vamos mostrar então que $(b2)_s$ é uma condição suficiente para a imersão $H \hookrightarrow L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$ ser compacta. Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência limitada. A menos de subsequência, u_n converge fracamente para uma função $u \in H$, ou seja, $u_n - u \rightharpoonup 0$ em H. Se mostrarmos que qualquer sequência que converge fracamente para zero em H possui subsequência convergente em $L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$, teremos mostrado que u_n possui subsequência convergente para u em $L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$. Para simplificar, podemos supor então que $u_n \rightharpoonup 0$ em H. Pelo Lema 2.1, sabemos que, a menos de subsequência, $u_n \to 0$ em $L^s(B_R)$, para todo $s \in [2, 2^*)$ e todo $R > 0$. Para um $R > 0$ dado, considere uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 0$ em B_{R+1} e $\varphi \equiv 1$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_{R+2}$. Então φu_n está em $H^1_0(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R})$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^s_{L^s(\mathbb{R}^N)} &\leq C\left(\|(1-\varphi)u_n\|^s_{L^s(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi u_n\|^s_{L^s(\mathbb{R}^N)}\right) \\ &= C\int_{B_{R+2}} (1-\varphi)^s u_n^s \, dx + C\int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R}} \varphi^s u_n^s \, dx \\ &\leq C\int_{B_{R+2}} u_n^s \, dx + \left(\frac{\hat{C}}{\nu_s(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R})}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(\varphi u_n)|^2 + b(x)\varphi^2 u_n^2\right) dx\right)^{s/2} . \end{aligned}$$

Procedendo como na Proposição 2.2, podemos mostrar que esta última expressão converge para zero se passarmos ao limite quando $n \to \infty$ e depois quando $R \to \infty$. Concluímos então que $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Agora, procedendo como no Lema 2.3, obtemos

$$\|u_n\|^s_{L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)} \leq C\left(\|u_n\|^s_{L^s(\mathbb{R}^N)} + \left(1 + \frac{B}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \|u_n\|_H^{\frac{2}{\alpha}} \|u_n\|^{\frac{\alpha s-2}{\alpha}}_{L^{\frac{\alpha s-2}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^N)}\right) .$$

Observe que, da mesma forma que mostramos que $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$, podemos mostrar que $u_n \to 0$ em $L^{\frac{\alpha s-2}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^N)$, pois $s \leq \frac{\alpha s-2}{\alpha-1} < 2^*$. Portanto, da desigualade acima inferimos que $u_n \to 0$ em $L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$. Logo, a imersão $H \hookrightarrow L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$ é compacta.

Vamos mostrar agora a necessidade de $(b2)_s$, isto é, se a imersão é compacta, então vale $(b2)_s$. Suponha, por contradição, que este resultado é falso, ou seja, temos que $H \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$, mas não vale $(b2)_s$. Então, pela Proposição 2.1, existe uma sequência $R_n \to \infty$ tal que $\nu_s(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_{R_n}}) < C$. Isto implica a existência de funções $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\text{supp } u_n \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{R_n} , \tag{2.24}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^s \, dx = 1 , \tag{2.25}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + b(x)u_n^2\right) dx \leq C . \tag{2.26}$$

De (2.26), nós inferimos que (u_n) é uma sequência limitada em H. Assim, pela imersão compacta de H em $L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$, existe uma subsequência (u_{n_j}) tal que $u_{n_j} \to u$ em

$L^s_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$, para alguma função u. Isto implica que $u_{n_j} \to u$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$, pois $A(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Mas, por (2.24), temos que $u_n(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Portanto, $u \equiv 0$. Por outro lado, nós inferimos de (2.25) que $\|u\|_{L^s(\mathbb{R}^N)} = 1$. Isto é absurdo.

□

O teorema a seguir apresenta uma condição suficiente para Φ satisfazer a condição de Palais-Smale.

Teorema 2.2. *Suponha que valem* (2.1), (2.2) *e* $(f1) - (f4)$. *Então* $(b2)_{p+1}$ *é uma condição suficiente para o funcional* Φ *satisfazer a condição de Palais-Smale em* H.

Demonstração. Suponha $(b2)_{p+1}$. Seja $(u_n) \subset H$ tal que

$$|\Phi(u_n)| \leq M \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \tag{2.27}$$

e

$$\Phi'(u_n) \to 0 \ \text{ em } H' \ . \tag{2.28}$$

Então, para n suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi(u_n) - \frac{1}{\mu_0}\Phi'(u_n)u_n &\leq M + \frac{1}{\mu_0}|\Phi'(u_n)u_n| \\
&\leq M + \frac{1}{\mu_0}\left\|\Phi'(u_n)\right\|_{H'}\left\|u_n\right\|_H \\
&\leq M + \frac{1}{\mu_0}\left\|u_n\right\|_H \ .
\end{aligned}$$

Além disso, por $(f4)$,

$$\begin{aligned}
\Phi(u_n) - \frac{1}{\mu_0}\Phi'(u_n)u_n &= \frac{1}{2}\left\|u_n\right\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)\ dx \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0}\left(\left\|u_n\right\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n\ dx\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_0}\right)\left\|u_n\right\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\mu_0}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_0}\right)\left\|u_n\right\|_H^2 \ .
\end{aligned}$$

Usando $(f4)'$, obtemos essa mesma desigualdade, com $\mu_0 = p+1$, para o caso em que $f(x,u) = a(x)|u|^{p-1}u$. Portanto, para n suficientemente grande, obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_0}\right)\left\|u_n\right\|_H^2 \leq M + \frac{1}{\mu_0}\left\|u_n\right\|_H \ .$$

Isto implica que a sequência (u_n) é limitada em H. Sendo assim, a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ em H e, pela Proposição 2.3, $u_n \to u$ em $L^{p+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema Inverso de Lebesgue, podemos encontrar uma subsequência de (u_n) e uma função $h \in L^{p+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$ tais que $|u_n(x)|, |u(x)| \leq h(x)$ e $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Observe agora que

$$\Phi'(u_n)(u_n - u) = \langle u_n, u_n - u\rangle_H - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)(u_n - u)\, dx\ .$$

Por hipótese, o lado esquerdo da igualdade acima converge para zero quando $n \to \infty$. Se mostrarmos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)(u_n - u)\, dx \longrightarrow 0\ ,$$

teremos mostrado que

$$\langle u_n, u_n - u\rangle_H = \|u_n\|_H^2 - \langle u_n, u\rangle_H \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$. Mas $\langle u_n, u\rangle_H \to \|u\|_H^2$, pois $u_n \rightharpoonup u$ em H. Assim, teríamos

$$\|u_n\|_H^2 \to \|u\|_H^2\ .$$

Isto implica, juntamente com a convergência fraca de u_n para u, que $u_n \to u$ em H, o que mostra que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale. Precisamos mostrar então que

$$v_n = |f(x, u_n)(u_n - u)|$$

converge para zero em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Temos que $v_n(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Agora, usando (2.21), temos também que

$$\begin{aligned}
v_n &\leq |f(x, u_n)||u_n| + |f(x, u_n)||u| \\
&\leq \epsilon A(x)u_n^2 + C_\epsilon A(x)|u_n|^{p+1} + \epsilon A(x)|u_n||u| + C_\epsilon A(x)|u_n|^p|u| \\
&\leq \epsilon A(x)u_n^2 + C_\epsilon A(x)|h|^{p+1} + \epsilon A(x)(u_n^2 + u^2) + C_\epsilon A(x)|h|^{p+1} \\
&\leq \epsilon(2A(x)u_n^2 + A(x)u^2) + C_\epsilon(2A(x)|h|^{p+1})\ .
\end{aligned}$$

Se denotarmos $\omega_n = 2A(x)u_n^2 + A(x)u^2$ e $g = 2A(x)|h|^{p+1}$, então $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e, por u_n ser limitada em H e $H \hookrightarrow L^2_{A(x)}(\mathbb{R}^N)$, ω_n também está em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$\|\omega_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\ ,$$

para todo n.

Note agora que, para todo $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} g\, dx < \delta\ .$$

De fato, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} g\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} g\chi_{\mathbb{R}^N\backslash B_R}\ dx\ ,$$

onde $\chi_{\mathbb{R}^N\backslash B_R}$ é igual a 1 em $\mathbb{R}^N\backslash B_R$ e igual a zero em B_R. Mas $g(x)\chi_{\mathbb{R}^N\backslash B_R}(x) \to 0$ quando $R \to \infty$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$. Também temos que $|g\chi_{\mathbb{R}^N\backslash B_R}| \leq |g|$. Então podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para ver que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} g\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{R\to\infty} g\chi_{\mathbb{R}^N\backslash B_R}\ dx = 0\ .$$

Sendo assim, dado $\delta > 0$, como a sequência (ω_n) é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$, podemos escolher $\epsilon > 0$ pequeno e $R > 0$ grande de tal forma que

$$\|v_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N\backslash B_R)} \leq \epsilon\, \|\omega_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + C_\epsilon\, \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N\backslash B_R)} < \delta\ ,\ \text{para todo } n. \tag{2.29}$$

Por outro lado, é fácil mostrar que, para todo $\delta > 0$, podemos encontrar $r > 0$ tal que para qualquer $E \subset \mathbb{R}^N$, com $|E| < r$, nós temos

$$\|g\|_{L^1(E)} < \delta$$

(cf. Lema B.3 do Apêndice B). Portanto, dado $\delta > 0$, podemos escolher $\epsilon > 0$ e $r > 0$ pequenos de tal forma que

$$\|v_n\|_{L^1(E)} < \delta\ ,\ \text{para todo } n. \tag{2.30}$$

Nós finalizamos esta demosntração observando que (2.29) e (2.30) são exatamente as condições do Teorema de Vitali (cf. [7], Teorema 4.13), que garante neste caso que $v_n \to 0$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Agora estamos prontos para enunciar e provar os teoremas de existência para os problemas $(P1)$ e $(P2)$.

Teorema 2.3. *Suponha que valem* (2.1), (2.2), $(f1)-(f4)$ *e* $(b2)_{p+1}$. *Então* $(P2)$ *tem uma solução positiva. Mais ainda, se supormos* $(b2)_2$ *ao invés de* $(b2)_{p+1}$, *então* (2.2) *é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução positiva de* $(P2)$.

Teorema 2.4. *Suponha que valem* (2.1), (2.2), $(f1)$ *e* $(b2)_{p+1}$. *Então uma condição suficiente para a existência de uma solução positiva de* $(P1)$ *é que* $a(x)$ *seja positivo em algum conjunto de medida positiva. Esta condição será também necessária se supormos* $(b2)_2$ *ao invés de* $(b2)_{p+1}$. *Mais ainda, supondo* $(b2)_2$, *se* $a(x) \geq 0$ *e* $a(x)$ *não é identicamente nula, então* (2.2) *é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução positiva de* $(P1)$.

Demonstração (dos Teoremas 2.3 e 2.4)**.** Para provar a existência de soluções não triviais para $(P1)$ e $(P2)$, basta aplicar o Teorema do Passo da Montanha. Já vimos que, sob as hipóteses que estamos assumindo, Φ é de classe C^1 e satisfaz a condição de Palais-Smale. Para ver que Φ possui a geometria do Passo da Montanha, note primeiramente que, usando (2.19) com $\epsilon = \frac{1}{4}$, obtemos

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{4} \|u\|_H^2 - C \|u\|_H^{p+1} \ , \tag{2.31}$$

para todo $u \in H$. Então, para $\|u\|_H$ pequena, temos $\Phi(u) \geq \alpha > 0$.

Agora fixe $u_0 \in H \backslash \{0\}$ com suporte K compacto e tal que $\|u_0\|_H = 1$. Note que $(f4)$ implica a existência de uma função contínua positiva d tal que $F(x,s) \geq d(x)|s|^{\mu_0}$, para $|s| \geq 1$ e $x \in K$. Então, podemos encontrar uma constante $\gamma > 0$ tal que

$$F(x,s) \geq d(x)|s|^{\mu_0} - \gamma \ , \tag{2.32}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in K$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(tu_0) &= \frac{1}{2} \|tu_0\|_H^2 - \int_K F(x, tu_0) \ dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} - |t|^{\mu_0} \int_K d(x)|u_0|^{\mu_0} \ dx + \int_K \gamma \ dx \\ &= \frac{t^2}{2} - C|t|^{\mu_0} + \overline{\gamma} \ . \end{aligned}$$

Como $\mu_0 > 2$, concluímos então que $\Phi(tu_0) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. No caso do Teorema 2.4, tome $K = supp(u_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$. Desse modo, em (2.32) basta tomar $d(x) = a(x)$ e γ igual a qualquer constante positiva.

Para obter soluções positivas de $(P1)$ e $(P2)$, basta trocar $f(x,s)$ por

$$f^+(x,s) = \begin{cases} f(x,s) & \text{se } s > 0 \ , \\ 0 & \text{se } s \leq 0 \ . \end{cases}$$

De fato, com os mesmos argumentos utilizados ao longo deste capítulo, mostramos que o problema

$$-\Delta u + b(x)u = f^+(x,u) \ , \ x \in \mathbb{R}^N,$$

também tem solução não trivial em H, digamos $\hat{u}$. Então, denotando

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F^+(x,u) \ dx \ , \ u \in H \ ,$$

onde $F^+(x,s) = \int_0^s f^+(x,t) \ dt$, temos que $I'(\hat{u})v = 0$, para todo $v \in H$. Portanto,

$$0 = I'(\hat{u})\hat{u}^- = \left\langle \hat{u}, \hat{u}^- \right\rangle_h - \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x,\hat{u})\hat{u}^- \ dx \ ,$$

onde $\hat{u}^- = \max\{0, -\hat{u}\}$. Mas

$$\left\langle \hat{u}, \hat{u}^- \right\rangle_h = \left\langle \hat{u}^+ - \hat{u}^-, \hat{u}^- \right\rangle_h = -\left\|\hat{u}^-\right\|_h^2 \ .$$

Além disso, o produto $f^+(x,\hat{u})\hat{u}^-$ é sempre igual a zero, pois as funções $f^+(x,\hat{u})$ e $\hat{u}^-$ nunca são não nulas simultaneamente. Logo,

$$0 = I'(\hat{u})\hat{u}^- = -\left\|\hat{u}^-\right\|_h^2 \ ,$$

ou seja, $\hat{u}^- = 0$ e, portanto, $\hat{u} \geq 0$. Daí, basta usar o Princípio do Máximo Forte (cf. Teorema B.1 no Apêndice B) para provar que, de fato, $\hat{u} > 0$. Então, $\hat{u}$ é uma solução positiva do problema $(P2)$ (ou $(P1)$, no caso em que $f(x,u) = a(x)|u|^{p-1}u$).

Vamos mostrar agora que $\lambda_1 > 0$ é uma condição necessária para a existência de uma solução positiva de $(P2)$ (e de $(P1)$, se $a(x) \geq 0$). Seja u uma solução positiva de $(P2)$. Então, por $(f4)$, temos $f(x,u) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Sendo assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla \varphi_1 + b(x) u \varphi_1)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi_1 \; dx > 0 \ ,$$

onde φ_1 é a autofunção positiva da Proposição 2.2. Mas, por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla \varphi_1 + b(x) u \varphi_1)\, dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1 u \; dx \ ,$$

Esta última integral é positiva. Portanto, λ_1 tem que ser positivo. Para o caso de $(P1)$, com $a(x) \geq 0$, o raciocínio é análogo. Pelo mesmo argumento, mostra-se que, se $(P1)$ tem uma solução positiva e vale $(b2)_2$, então $a(x)$ é positivo em algum conjunto de medida positiva.

□

2.3 A identidade de Pohozaev e a existência de solução

Considere o problema

$$-\Delta u + |x|^m u = |x|^n |u|^{p-1} u \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ , \tag{2.33}$$

onde $N \geq 3$, $0 \leq n < m$ e p satisfaz (2.1). Estamos procurando por soluções $u \in H = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u^2 \; dx\}$ tais que $u \in L^{p+1}_{|x|^n}(\mathbb{R}^N)$. Observe que o potencial $b(x) = |x|^m$ claramente satisfaz $(b1)$ e satisfaz $(f1)$ com $A(x) = \max\{1, |x|^n\}$, $C_0 = 1$ e $\alpha = \frac{m}{n}$. Então, neste caso, temos

$$p^{\#} = \frac{N+2}{N-2} - \frac{4n}{m(N-2)} \ .$$

Pelo Teorema 2.1, temos também que $b(x) = |x|^m$ satisfaz $(b2)_2$. De fato, o conjunto Ω_M, neste caso, é uma bola, para qualquer $M > 0$. Podemos então aplicar a Proposição 2.2 para ver que

$$\lambda_1 := \inf_{u \in H,\ \|u\|_{L_2} = 1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |x|^m u^2\right) dx$$

é o menor autovalor do operador $-\Delta + |\cdot|^m$ em $\mathbb{R}^N$, correspondendo a uma autofunção principal positiva, digamos φ_1. Neste caso, temos

$$\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \varphi_1|^2 + |x|^m \varphi_1^2\right) dx > 0 \ .$$

Portanto, $b(x) = |x|^m$ satisfaz (2.2). Usando novamente o Teorema 2.1, concluímos que também satisfaz $(b2)_{p+1}$.

Mostramos que valem todas as hipóteses do Teorema 2.4. Assim, como a função $a(x) = |x|^n$ é sempre positiva, o Teorema 2.4 nos garante que (2.33) possui uma solução fraca não trivial. Por teoria elíptica padrão, mostra-se que essa solução é de classe C^2 em $\mathbb{R}^N$, isto é, é uma solução forte.

Agora, pela Identidade de Pohozaev generalizada, estabelecida por Pucci e Serrin (cf. [10], Proposição 1), temos que, se u é uma solução de (2.33) e $R > 0$, então

$$\begin{aligned} -R \oint_{\partial B_R(0)} &\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|x|^m u^2 + \frac{1}{p+1}|x|^n|u|^{p+1}\right] dS_x = \\ &= \frac{N-2}{2}\int_{B_R(0)} |\nabla u|^2 dx + \frac{N+m}{2}\int_{B_R(0)} |x|^m u^2 dx - \frac{N+n}{p+1}\int_{B_R(0)} |x|^n|u|^{p+1} dx \ . \end{aligned} \tag{2.34}$$

O lado esquerdo da igualdade acima tende a zero quando $R \to \infty$, ao menos para uma sequência $R_k \to \infty$ escolhida adequadamente. De fato, como $u \in H$ e $u \in L^{p+1}_{|x|^n}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} &\left|\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|x|^m u^2 + \frac{1}{p+1}|x|^n|u|^{p+1}\right| dx = \\ &= \int_0^\infty \left\{\oint_{\partial B_R(0)} \left|\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|x|^m u^2 + \frac{1}{p+1}|x|^n|u|^{p+1}\right| dS_x\right\} dR \\ &< \infty \ . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Logo, existe uma sequência $R_k \to \infty$ tal que

$$R_k \oint_{\partial B_{R_k}(0)} \left|\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|x|^m u^2 + \frac{1}{p+1}|x|^n|u|^{p+1}\right| dS_x \longrightarrow 0$$

quando $k \to \infty$. Caso contrário, teríamos

$$\liminf_{R\to\infty} \ R \oint_{\partial B_R(0)} \left|\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|x|^m u^2 + \frac{1}{p+1}|x|^n|u|^{p+1}\right| dS_x = c > 0 \ .$$

Daí, para algum $r > 0$, teríamos

$$R \oint_{\partial B_R(0)} \left|\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|x|^m u^2 + \frac{1}{p+1}|x|^n|u|^{p+1}\right| dS_x \geq \frac{c}{2} \ ,$$

para todo $R \geq r$. Consequentemente,

$$\infty = \int_r^\infty \frac{c}{2R} dR \leq \int_r^\infty \left\{\oint_{\partial B_R(0)} \left|\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|x|^m u^2 + \frac{1}{p+1}|x|^n|u|^{p+1}\right| dS_x\right\} dR \ .$$

Mas isto contradiz (2.35). Portanto, tomando $R = R_k$ em (2.34) e passando ao limite quando $k \to \infty$, obtemos

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{N+m}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u^2 dx - \frac{N+n}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^n|u|^{p+1} dx = 0 \ . \tag{2.36}$$

Agora, multiplicando (2.33) por u e integrando, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^n |u|^{p+1} dx = 0 \ . \tag{2.37}$$

Multiplicando (2.37) por $\frac{N+n}{p+1}$ e combinando a igualdade resultante com a igualdade (2.36), obtemos

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N+n}{p+1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \left(\frac{N+m}{2} - \frac{N+n}{p+1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u^2 dx = 0 \ .$$

A igualdade acima implica que $u \equiv 0$, caso tenhamos

$$\frac{N-2}{2} - \frac{N+n}{p+1} \geq 0 \ ,$$

isto é, se

$$p \geq \hat{p} = \frac{N+2}{N-2} + \frac{2n}{N-2} \ .$$

Note que $p^{\#} < \frac{N+2}{N-2} < \hat{p}$ quando $n > 0$. Em outras palavras, uma não-linearidade ilimitada diminui tanto o intervalo dos p's onde métodos variacionais asseguram a existência de uma solução não trivial quanto o intervalo dos p's onde a Identidade de Pohozaev mostra que tal solução não existe. Não sabemos se existe solução não trivial para $p \in [p^{\#}, \hat{p})$.

Capítulo 3

Estudo da Existência de Solução para o Problema P3

Neste capítulo, vamos estudar a existência de solução fraca para o problema

$$(P3) \qquad -\Delta u + b_h(hx)u = g(hx, u) \ , \quad x \in \mathbb{R}^N \ ,$$

onde $N \geq 3$, h é um parâmetro variando no intervalo $(0, 1]$, $b_h \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, para cada $h \in (0, 1]$, e $g \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma não-linearidade satisfazendo as hipóteses

$(g1)$ $\lim_{u \to 0} \dfrac{g(x, u)}{u} = 0$, uniformemente para $x \in \mathbb{R}^N$;

$(g2)$ existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|g_u(x, u)| \leq C_1(1 + |u|^{p-1}) \ ,$$

para algum $p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ e para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$;

$(g3)$ existe uma constante $\mu > 2$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, vale

$$0 < \mu G(x, u) \leq u g(x, u) \ ,$$

onde $G(x, u) = \int_0^u g(x, t) \ dt$;

$(g4)$ existe uma função positiva $d \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que

$$G(x, u) \geq d(x)|u|^{\mu} \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$.

Em alguns trabalhos, diz-se que a hipótese $(g4)$ é consequência das hipóteses $(g1)$ e $(g3)$. Porém isto não é verdade. Considere a primitiva $G(x, u) = |u|^{\mu} \ln\left(\frac{2|u|+1}{|u|+1}\right)$, que não depende de x. Derivando com respeito a u, obtemos

$$g(x, u) = g(u) = \mu u|u|^{\mu-2} \ln\left(\frac{2|u| + 1}{|u| + 1}\right) + \frac{u|u|^{\mu-1}}{(2|u| + 1)(|u| + 1)} \ .$$

Fazendo alguns cálculos, podemos verificar que neste caso g satisfaz as hipóteses $(g1)$, $(g2)$ e $(g3)$ com $p = \mu - 1$. No entanto, se satisfizesse $(g4)$, existiria uma função positiva $d \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que

$$|u|^\mu \ln\left(\frac{2|u|+1}{|u|+1}\right) \geq d(x)|u|^\mu \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{R}$. Ou seja,

$$\ln\left(\frac{2|u|+1}{|u|+1}\right) \geq d(x) \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{R}$. Passando ao limite quando $u \to 0$ na desigualdade acima, obtemos $d(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Isto contraria o fato de d ser positiva. Portanto, a função g dada anteriormente não satisfaz $(g4)$.

Vamos supor também que as funções b_h satisfazem as hipóteses

$(bh1)$ $b_h(y) \geq 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$;

$(bh2)$ $b_h(hx) \to 0$ quando $h \to 0$, uniformemente em compactos do $\mathbb{R}^N$;

$(bh3)$ existe $A > 0$ tal que $|\Omega_{A,h}| < \infty$ para todo $h > 0$, onde

$$\Omega_{A,h} = \left\{y \in \mathbb{R}^N : b_h(y) < A\right\} \ .$$

Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Se valem $(bh1) - (bh3)$ e $(g1) - (g4)$, então o problema $(P3)$ possui solução não trivial para h suficientemente pequeno.*

Para demonstrar este teorema, precisamos de alguns resultados preliminares. Mas antes vamos introduzir, para cada $h > 0$, o espaço

$$E_h = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} b_h(hx)u^2 \, dx < \infty\right\}$$

e a quantidade

$$\|u\|_h^2 = \|u\|_{E_h}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + b_h(hx)u^2 \, dx \ .$$

Este espaço definido acima é o espaço onde vamos procurar as soluções de $(P3)$. Uma importante propriedade de E_h é dada pelo lema a seguir:

Lema 3.1. *Para cada $h > 0$, existe uma constante $\rho_h > 0$ tal que*

$$\|u\|_h^2 \geq \rho_h \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \ ,$$

para todo $u \in E_h$. Portanto, E_h está imerso continuamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Observe primeiramente que, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então pela desigualdade de Hölder e pela imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, onde $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{A,h}} u^2 \, dx &\leq |\Omega_{A,h}|^{\frac{2}{N}} \|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C|\Omega_{A,h}|^{\frac{2}{N}} \|u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \\ &= C_h \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \ . \end{aligned}$$

Assim, podemos mostrar que existe $\theta_h > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b_h(y)u^2\right) dy \geq \theta_h \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dy \ ,$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b_h(y)u^2\right) dy &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_{A,h}} b_h(y)u^2 dy \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dy + (2C_h)^{-1}\int_{\Omega_{A,h}} u^2 dy + A\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_{A,h}} u^2 dy \\ &\geq \min\left\{\frac{1}{2}, (2C_h)^{-1}, A\right\} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \ . \end{aligned}$$

Agora, tome $u \in E_h$ e denote $v(x) = u(\frac{x}{h})$. Então, usando duas substituições de variáveis (x por $\frac{x}{h}$ e depois x por hx), temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_h^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b_h(hx)u^2\right) dx \\ &= h^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \left(h^2|\nabla v|^2 + b_h(x)v^2\right) dx \\ &\geq h^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \left(h^2|\nabla v|^2 + h^2 b_h(x)v^2\right) dx \\ &\geq h^{2-N}\theta_h \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + v^2\right) dx \\ &= h^N h^{2-N}\theta_h \int_{\mathbb{R}^N} \left(h^{-2}|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \\ &\geq h^2\theta_h \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \ , \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração.

□

O Lema 3.1 garante que E_h é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_h = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + b_h(hx)uv \, dx \ , \ u, v \in E_h \ .$$

De fato, E_h é completo por ser subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$. E, pelo Lema 3.1, temos que $\langle u, u\rangle_h = \|u\|_h^2 = 0$ implica $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0$, o que, por sua vez, implica $u = 0$. As outras propriedades de produto interno são evidentes.

O próximo resultado que vamos demonstrar diz respeito ao funcional $\Phi_h : E_h \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_h(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b_h(hx)u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(hx, u) \, dx \ .$$

As soluções fracas de $(P3)$ são os pontos críticos deste funcional. Por isso nosso objetivo no que segue é mostrar que Φ_h possui pontos críticos. O lema a seguir é o primeiro resultado nesse sentido.

Lema 3.2. *Para cada $h > 0$, o funcional Φ_h dado acima está bem definido e é de classe C^1 em E_h.*

Demonstração. Observe primeiramente que, pela hipótese $(g2)$, temos

$$g_t(x, t) \leq C_1(1 + |t|^{p-1}) \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $u \geq 0$, integrando a desigualdade acima de 0 até u e observando que $g(x, 0) = 0$, por $(g1)$, obtemos

$$\begin{aligned} g(x, u) &= \int_0^u g_t(x, t) \, dt \\ &\leq C_1 \int_0^u \left(1 + t^{p-1}\right) dt \\ &= C_1 \left(u + \frac{u^p}{p}\right) \\ &= C_1|u| + C_2|u|^p \ . \end{aligned}$$

Analogamente, se $u < 0$, temos que

$$\begin{aligned} -g(x, u) &= \int_u^0 g_t(x, t) \, dt \\ &\leq C_1 \int_u^0 \left(1 + (-t)^{p-1}\right) dt \\ &= C_1 \left(-u + \frac{(-u)^p}{p}\right) \\ &= C_1|u| + C_2|u|^p \ . \end{aligned}$$

Por $(g3)$, temos que $g(x,u) > 0$ se $u > 0$ e $g(x,u) < 0$ se $u < 0$. Sendo assim, pelas desigualdades acima, temos que

$$|g(x,u)| \leq C_1|u| + C_2|u|^p \ , \tag{3.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{R}$. Agora note que, por $(g1)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|u| \leq \delta \Rightarrow |g(x,u)| \leq \epsilon|u| \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N \ .$$

E se $|u| \geq \delta$, então, por (3.1), temos que

$$\begin{aligned} |g(x,u)| &\leq |u|^p \left(\frac{C_1}{|u|^{p-1}} + C_2 \right) \\ &\leq |u|^p \left(\frac{C_1}{\delta^{p-1}} + C_2 \right) \\ &\leq A_\epsilon |u|^p \ . \end{aligned}$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$|g(x,u)| \leq \epsilon|u| + A_\epsilon|u|^p \ . \tag{3.2}$$

Consequentemente, obtemos, por integração em relação a u da desigualdade anterior,

$$|G(x,u)| \leq \epsilon|u|^2 + C_\epsilon|u|^{p+1} \ . \tag{3.3}$$

Desta última desigualdade, concluímos que, dado $u \in E_h$, a integral $\int_{\mathbb{R}^N} G(hx,u)dx$ é finita. Isto mostra Φ_h está bem definido.

Vamos mostrar agora que Φ_h é de classe C^1. Observe primeiramente que, se $u \in E_h$, a primeira integral que aparece na expressão de $\Phi_h(u)$ é o quadrado da norma de u em E_h e, portanto, define um funcional de classe C^1 em E_h (cf. Apêndice C). Basta mostrar então que a segunda integral na expressão de $\Phi_h(u)$ define um funcional de classe C^1. Isto é, denotando $J_h(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(hx,u)dx$, $u \in E_h$, devemos mostrar que J_h é um funcional de classe C^1.

Fixe $u \in E_h$. Vamos mostrar inicialmente que J_h possui derivada de Gateaux em u. O candidato a derivada de Gateaux de J_h em u é a aplicação T_h que, para cada $v \in E_h$, associa o valor

$$T_h v = \lim_{t \to 0} \frac{J_h(u+tv) - J_h(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{G(hx,u+tv) - G(hx,u)}{t} \right) dx \ .$$

Se mostrarmos que T_h é uma aplicação linear e contínua em E_h, então T_h será a derivada de Gateaux de J_h em u. Para calcular o limite que define T_h, observe que G é uma função de classe C^1 em relação à segunda variável, pois g é contínua. Sendo assim, dados $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $v \in E_h$, o Teorema do Valor Médio nos garante que existe $\theta_h = \theta_h(t,x,v) \in (0,1)$ tal que

$$\frac{G(hx,u+tv) - G(hx,u)}{t} = g(hx, u + \theta_h tv)v \ .$$

Usando agora a desigualdade (3.2) e a desigualdade de Young, temos que, para $|t| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|g(hx, u + \theta_h tv)v| &\leq \epsilon|u + \theta_h tv||v| + A_\epsilon|u + \theta_h tv|^p|v| \\
&\leq \epsilon\left(|u| + |v|\right)|v| + C\left(|u|^p + |v|^p\right)|v| \\
&= \epsilon\left(|u||v| + |v|^2\right) + C\left(|u|^p|v| + |v|^{p+1}\right) \\
&\leq \epsilon\left(\frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2} + |v|^2\right) + C\left(\frac{|u|^{p+1}}{\frac{p+1}{p}} + \frac{|v|^{p+1}}{p+1} + |v|^{p+1}\right) .
\end{aligned}$$

Como $u, v \in E_h \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, esta última expressão é uma função de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, pela continuidade de g, temos que $g(hx, u + \theta_h tv)v \longrightarrow g(hx, u)v$ quando $t \longrightarrow 0$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned}
T_h v &= \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{G(hx, u + tv) - G(hx, u)}{t}\right) dx \\
&= \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} g(hx, u + \theta_h tv)v \ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t \to 0} g(hx, u + \theta_h tv)v \ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(hx, u)v \ dx .
\end{aligned}$$

Logo, T_h é claramente linear. Precisamos mostrar agora que também é contínua. Usando novamente a desigualdade (3.2), temos que, para todo $v \in E_h$,

$$\begin{aligned}
|T_h v| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(hx, u)||v| \ dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon|u||v| + A_\epsilon|u|^p|v| \ dx
\end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|T_h v| \leq\ & \epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ A_\epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
\leq\ & C_h \|u\|_h \|v\|_h + C_h \|u\|_h^p \|v\|_h \ = \ C_h \left(\|u\|_h + \|u\|_h^p\right) \|v\|_h \ ,
\end{aligned}$$

onde esta última desigualdade é consequência das imersões contínuas de E_h em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Ela mostra que T_h é limitada, ou seja, é contínua.

Assim, como T_h é linear e contínua, então é a derivada de Gateaux do funcional J_h em u, isto é, $T_h = DJ_h(u)$.

Resta mostrar agora que a aplicação $u \mapsto DJ_h(u)$ é contínua em E_h, pois neste caso a derivada de Gateaux é igual à derivada de Frechet $J_h' : E_h \to E_h'$ (cf. Apêndice C), onde E_h' é o espaço dual de E_h. E se a derivada de Frechet J_h' é contínua, então, por definição, J_h é de classe C^1. Precisamos mostrar que, se $u_n \to u$ em E_h, então $DJ_h(u_n) \to DJ_h(u)$ em E_h' quando $n \to \infty$, isto é,

$$\|DJ_h(u_n) - DJ_h(u)\|_{E_h'} = \sup_{v\in E_h, \|v\|_h \leq 1} |(DJ_h(u_n) - DJ_h(u))v| \longrightarrow 0 \ .$$

Para isto, note que, pela hipótese $(g2)$, pela desigualdade de Hölder e pelo Lema 3.1,

$$\begin{aligned}
|(DJ_h(u_n) - DJ_h(u))v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(hx,u_n) - g(hx,u))v \ dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 g_s(hx, u + s(u_n - u)) \ ds \right) (u_n - u)v \ dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 C_1(1 + |u + s(u_n - u)|^{p-1}) \ ds \right) |u_n - u||v| \ dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + |u|^{p-1} + |u_n|^{p-1}\right) |u_n - u||v| \ dx \\
&\leq C \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + C \left(\|u\|^{p-1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|^{p-1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \right) \\
&\quad\quad \times \|u_n - u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_h \left(1 + \|u\|_h^{p-1} + \|u_n\|_h^{p-1}\right) \|u_n - u\|_h \|v\|_h \ .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|DJ_h(u_n) - DJ_h(u)\|_{E_h'} \leq C_h \left(1 + \|u\|_h^{p-1} + \|u_n\|_h^{p-1}\right) \|u_n - u\|_h \ .$$

Isto implica que $DJ_h(u_n) \to DJ_h(u)$ em E_h' e, portanto, J_h é de classe C^1. Consequentemente, Φ_h é de classe C^1, como queríamos demonstrar.

$\square$

Vamos provar agora que Φ_h possui a geometria do passo da montanha. Para cada $h > 0$, fixe $\epsilon_h < \frac{\rho_h}{4}$. Por (3.3), temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_h(u) &\geq \frac{1}{2} \|u\|_h^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon_h |u|^2 + C_{\epsilon_h} |u|^{p+1} \ dx \\
&= \frac{1}{2} \|u\|_h^2 - \epsilon_h \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - C_{\epsilon_h} \|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

Então, pelo Lema 3.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi_h(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_h^2 - \frac{\epsilon_h}{\rho_h}\|u\|_h^2 - \frac{CC_{\epsilon_h}}{\rho_h^{\frac{p+1}{2}}}\|u\|_h^{p+1} \\
&\geq \frac{1}{4}\|u\|_h^2 - \frac{CC_{\epsilon_h}}{\rho_h^{\frac{p+1}{2}}}\|u\|_h^{p+1} ,
\end{aligned}$$

para todo $u \in E_h$. Agora denote $\lambda_h = \frac{CC_{\epsilon_h}}{\rho_h^{\frac{p+1}{2}}}$ e escolha $r_h > 0$ tal que $\frac{1}{4} - \lambda_h r_h^{p-1} \geq \frac{1}{8}$. Assim, se $\|u\|_h \leq r_h$, então, pela desigualdade anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_h(u) &\geq \frac{1}{4}\|u\|_h^2 - \lambda_h\|u\|_h^2\|u\|_h^{p-1} \\
&\geq \frac{1}{8}\|u\|_h^2 .
\end{aligned}$$

Agora, pela hipótese $(g4)$, temos que, para todo $u \in E_h\backslash\{0\}$ e para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_h(tu) \leq \frac{t^2}{2}\|u\|_h^2 - |t|^\mu \int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u|^\mu \, dx .$$

Note que esta última integral é finita, pois por $(g4)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u|^\mu \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} G(hx, u) \, dx .$$

Além disso, ela também é não nula, pois d é positiva. Como $\mu > 2$, concluímos que $\Phi_h(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$.

Considere agora, para cada $h > 0$, o conjunto

$$\Gamma_h := \{\gamma \in C([0,1], E_h) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) \neq 0,\ \Phi_h(t\gamma(1)) \leq 0 \text{ para todo } t \geq 1\}$$

e o número

$$c_h := \inf_{\gamma\in\Gamma_h} \max_{t\in[0,1]} \Phi_h(\gamma(t)) .$$

Por uma demonstração análoga à da Proposição 1.1 do Capítulo 1, podemos mostrar que $c_h > 0$ e que existe uma sequência $(u_n^h) \subset E_h$ tal que

$$\Phi_h(u_n^h) \longrightarrow c_h \text{ , quando } n \to \infty \tag{3.4}$$

e

$$\Phi_h'(u_n^h) \longrightarrow 0 \text{ em } E_h' \text{ , quando } n \to \infty , \tag{3.5}$$

para todo $h > 0$.

Nosso objetivo agora é mostrar que, para valores suficientemente pequenos de h, a sequência (u_n^h) converge em E_h para uma solução não trivial do problema $(P3)$. Começamos com o seguinte lema:

Lema 3.3. *Existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| u_n^h \right\|_h^2 \leq \alpha c_h \ ,$$

para todo $h > 0$.

Demonstração. Observe que, por $(g3)$,

$$\begin{aligned}
\Phi_h(u_n^h) - \frac{1}{\mu}\Phi_h'(u_n^h)u_n^h &= \frac{1}{2}\left\| u_n^h \right\|_h^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(hx, u_n^h)\, dx \\
&\quad - \frac{1}{\mu}\left(\left\| u_n^h \right\|_h^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(hx, u_n^h)u_n^h\, dx \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \left\| u_n^h \right\|_h^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\mu} g(hx, u_n^h)u_n^h - G(hx, u_n^h)\, dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \left\| u_n^h \right\|_h^2 \ .
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\Phi_h(u_n^h) - \frac{1}{\mu}\Phi_h'(u_n^h)u_n^h \right) = c_h \ .$$

Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| u_n^h \right\|_h^2 \leq \left(\frac{2\mu}{\mu - 2} \right) c_h$$

□

O Lema 3.3 nos diz que $(u_n^h) \subset E_h$ é uma sequência limitada. Portanto, para cada $h > 0$, temos que, a menos de subsequência, (u_n^h) converge fracamente em E_h para uma função u_0^h. Segue do Lema 3.1 e do Teorema de Rellich-Kondrachov que, a menos de subsequência, (u_n^h) converge fracamente para u_0^h em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e converge fortemente em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq s < 2^*$. Desta convergência forte, concluímos também que $u_n^h(x) \to u_0^h(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e que, dada uma bola $B \subset \mathbb{R}^N$, existem funções $\sigma_1 \in L^2(B)$ e $\sigma_2 \in L^{p+1}(B)$ tais que

$$|u_n^h(x)| \leq \sigma_1(x) \quad \text{e} \quad |u_n^h(x)| \leq \sigma_2(x) \ ,$$

para todo n e todo $x \in B$. Então, dado $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\Phi_h'(u_n^h)v \to \Phi_h'(u_0^h)v \ , \tag{3.6}$$

isto é,

$$\left\langle u_n^h, v \right\rangle_h - \int_{\mathbb{R}^N} g(hx, u_n^h)v\, dx \longrightarrow \left\langle u_0^h, v \right\rangle_h - \int_{\mathbb{R}^N} g(hx, u_0^h)v\, dx \ ,$$

quando $n \to \infty$. De fato, como $u_n^h \rightharpoonup u_0^h$ em E_h, então

$$\left\langle u_n^h, v \right\rangle_h \longrightarrow \left\langle u_0^h, v \right\rangle_h \ . \tag{3.7}$$

Além disso, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(hx, u_n^h)v \; dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} g(hx, u_0^h)v \; dx \; . \tag{3.8}$$

Para verificar isso, note que as integrais acima sobrevivem apenas em uma bola $B \subset \mathbb{R}^N$, pois v tem suporte compacto. Então, por (3.2),

$$\begin{aligned} |g(hx, u_n^h)v| &\leq \epsilon|u_n^h||v| + A_\epsilon|u_n^h|^p|v| \\ &\leq \epsilon|\sigma_1||v| + A_\epsilon|\sigma_2|^p|v| \; . \end{aligned}$$

Esta última expressão é uma função de $L^1(B)$. Para mostrar isso, basta usar Hölder. Temos também que $g(hx, u_n^h(x))v(x) \to g(hx, u_0^h(x))v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, pois g é contínua. Agora, usando (3.7) e (3.8), concluímos (3.6).

Como $\Phi_h'(u_n^h) \to 0$ em E_h', concluímos então que $\Phi_h'(u_0^h)v = 0$ para todo $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Usando um argumento de densidade, obtemos que $\Phi_h'(u_0^h)v = 0$, para todo $v \in E_h$. Ou seja, u_0^h é um ponto crítico de Φ_h e, portanto, é solução fraca de $(P3)$. Usando teoria elíptica padrão, mostra-se que, de fato, u_0^h é uma solução forte de $(P3)$. Basta mostrar agora que u_0^h não é identicamente nulo. A seguir nós mostramos que isso é verdade para h suficientemente pequeno. Para isso, usaremos dois lemas:

Lema 3.4. *Existe uma constante $\beta > 0$ tal que, para todo $h > 0$, podemos encontrar $R(h) > 0$ para o qual*

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|u_n^h\right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N \setminus B_{R(h)})} \leq \beta c_h \; ,$$

onde $B_{R(h)} \subset \mathbb{R}^N$ denota a bola de raio $R(h)$ e centro zero.

Lema 3.5. *Temos que*

$$\lim_{h\to 0} c_h = 0 \; .$$

Antes de provar estes lemas, vamos ver como podemos usá-los para mostrar que u_0^h não é identicamente nulo para h suficientemente pequeno, o que demonstraria o Teorema 3.1. Primeiramente note que, pelo mesmo raciocínio usado para chegar na desigualdade (3.2), podemos encontrar uma constante $C > 0$ tal que

$$|g(x,s)| \leq \frac{1}{\beta}|s| + 2C|s|^p \; ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$. Então, usando (3.4), (3.5) e $(g3)$, obtemos

$$\begin{aligned} c_h &= \lim_{n\to\infty} \Phi_h(u_n^h) - \frac{1}{2}\Phi_h'(u_n^h)u_n^h \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}g(hx, u_n^h)u_n^h - G(hx, u_n^h)\right) dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}g(hx, u_n^h)u_n^h \; dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2\beta}|u_n^h|^2 + C|u_n^h|^{p+1}\right) dx \; . \end{aligned}$$

Lembrando que $u_n^h \to u_0^h$ em $L^2(B_{R(h)})$ e em $L^{p+1}(B_{R(h)})$, temos então que

$$\begin{aligned}
c_h &\leq \liminf_{n\to\infty} \left\{ \int_{B_{R(h)}} \left(\frac{1}{2\beta}|u_n^h|^2 + C|u_n^h|^{p+1} \right) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R(h)}} \left(\frac{1}{2\beta}|u_n^h|^2 + C|u_n^h|^{p+1} \right) dx \right\} \\
&\leq \frac{1}{2\beta} \left\| u_0^h \right\|^2_{L^2(B_{R(h)})} + C \left\| u_0^h \right\|^{p+1}_{L^{p+1}(B_{R(h)})} + \frac{1}{2\beta} \limsup_{n\to\infty} \left\| u_n^h \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_{R(h)})} \\
&\quad + C \limsup_{n\to\infty} \left\| u_n^h \right\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N \setminus B_{R(h)})} .
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 3.4, temos que

$$c_h \leq \frac{1}{2\beta} \left\| u_0^h \right\|^2_{L^2(B_{R(h)})} + C \left\| u_0^h \right\|^{p+1}_{L^{p+1}(B_{R(h)})} + \frac{c_h}{2} + C\beta^{\frac{p+1}{2}} c_h^{\frac{p+1}{2}} .$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\beta} \left\| u_0^h \right\|^2_{L^2(B_{R(h)})} + C \left\| u_0^h \right\|^{p+1}_{L^{p+1}(B_{R(h)})} \geq c_h \left(\frac{1}{2} - C\beta^{\frac{p+1}{2}} c_h^{\frac{p-1}{2}} \right) .$$

Podemos escolher $h_1 > 0$ tal que a expressão do lado direito na desigualdade acima seja positiva para todo $h < h_1$. Tal escolha é possível porque $c_h \to 0$ quando $h \to 0$, como afirma o Lema 3.5. Sendo assim, concluímos da desigualdade acima que u_0^h não é identicamente nulo para $h < h_1$.

Vamos agora provar os Lemas 3.4 e 3.5.

Prova do Lema 3.4. Vamos mostrar que, para cada $h > 0$, podemos escolher $R = R(h) > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u_n^h|^2 \, dx \leq A^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n^h|^2 + b_h(hx)|u_n^h|^2 \right) dx , \tag{3.9}$$

onde A é a constante da hipótese $(bh3)$. Daí, teríamos

$$\begin{aligned}
\left\| u_n^h \right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N \setminus B_R)} &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \left(|\nabla u_n^h|^2 + |u_n^h|^2 \right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n^h|^2 + b_h(hx)|u_n^h|^2 \right) dx \\
&\quad + A^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n^h|^2 + b_h(hx)|u_n^h|^2 \right) dx \\
&= (1 + A^{-1}) \left\| u_n^h \right\|^2_h .
\end{aligned}$$

Então, pelo Lema 3.3, teríamos

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| u_n^h \right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N \backslash B_R)} \leq \left(1 + A^{-1}\right) \limsup_{n\to\infty} \left\| u_n^h \right\|^2_h \leq \left(1 + A^{-1}\right) \alpha c_h \ .$$

Isto é, basta tomar $\beta = (1 + A^{-1})\, \alpha$. Para provar a desigualdade (3.9), vamos denotar $B_R^c = \mathbb{R}^N \backslash B_R$, $G_{A,h}^h = \frac{1}{h} G_{A,h} = \{x \in \mathbb{R}^N : hx \in G_{A,h}\}$ e $v_n^h(x) = u_n^h(\frac{x}{h})$. Note que

$$\int_{B_R^c \backslash G_{A,h}^h} |u_n^h|^2 \, dx \leq A^{-1} \int_{B_R^c \backslash G_{A,h}^h} b_h(hx) |u_n^h|^2 \, dx \ . \tag{3.10}$$

Além disso, usando substituição de variáveis, a desigualdade de Hölder e a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c \cap G_{A,h}^h} |u_n^h|^2 \, dx &= h^{-N} \int_{B_{hR}^c \cap G_{A,h}} |v_n^h|^2 \, dx \\
&\leq h^{-N} \left| B_{hR}^c \cap G_{A,h} \right|^{\frac{2}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^h|^{2^*} \, dx \\
&\leq h^{-N} \left| B_{hR}^c \cap G_{A,h} \right|^{\frac{2}{N}} C(N) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n^h|^2 \, dx \\
&= h^{-2} \left| B_{hR}^c \cap G_{A,h} \right|^{\frac{2}{N}} C(N) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^h|^2 \, dx \ .
\end{aligned}$$

Agora observe que $|G_{A,h}| < \infty$ implica

$$\lim_{R\to\infty} |G_{A,h} \backslash B_R| = \lim_{R\to\infty} |G_{A,h} \cap B_R^c| = 0 \ .$$

De fato, seja (R_k) uma sequência crescente de números positivos tais que $\lim_{k\to\infty} R_k = \infty$. Temos que

$$\lim_{R\to\infty} |G_{A,h} \backslash B_R| = \lim_{k\to\infty} |G_{A,h} \backslash B_{R_k}| \ .$$

Mas

$$\lim_{k\to\infty} |G_{A,h} \backslash B_{R_k}| = \left| \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{A,h} \backslash B_{R_k} \right| = |\emptyset| = 0 \ .$$

Sendo assim, podemos escolher $R = R(h)$ suficientemente grande de tal maneira que

$$|B_{hR}^c \cap G_{A,h}| < (AC(N))^{-\frac{N}{2}} h^N \ .$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c \cap G_{A,h}^h} |u_n^h|^2 \, dx &\leq h^{-2} \left| B_{hR}^c \cap G_{A,h} \right|^{\frac{2}{N}} C(N) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^h|^2 \, dx \\
&\leq A^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^h|^2 \, dx \ .
\end{aligned}$$

Combinando (3.10) com a desigualdade acima, deduzimos a desigualdade (3.9).

$\square$

Prova do Lema 3.5. Dado qualquer $u \in E_h \backslash \{0\}$, como $\Phi_h(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, o caminho $\eta(t) = tu$, $t \geq 0$, pode ser parametrizado de tal forma que um pedaço dele pertença a Γ_h. Portanto,

$$c_h \leq \max_{t \geq 0} \Phi_h(tu) \ ,$$

para todo $u \in E_h \backslash \{0\}$. Logo,

$$c_h \leq \inf_{u \in E_h \backslash \{0\}} \max_{t \geq 0} \Phi_h(tu) \ .$$

Como, por $(g4)$,

$$\Phi_h(u) \leq \Psi_h(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b_h(hx)|u|^2 \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u|^\mu \ dx \ ,$$

então

$$c_h \leq \inf_{u \in E_h \backslash \{0\}} \max_{t \geq 0} \Psi_h(tu) \ .$$

Fixado $u \in E_h \backslash \{0\}$, para calcular $\max_{t \geq 0} \Psi_h(tu)$, basta derivar $\Psi_h(tu)$ com relação a t e descobrir onde a derivada se anula. Fazendo isto, obtemos

$$\max_{t \geq 0} \Psi_h(tu) = \text{const.} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b_h(hx)|u|^2) \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u|^\mu \ dx \right)^{\frac{2}{\mu}}} \right)^{\frac{\mu}{\mu - 2}} \ .$$

Agora, denotando

$$\overline{c}_h := \inf_{u \in M_h} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + b_h(hx)|u|^2 \right) dx \ ,$$

onde $M_h = \left\{ u \in E_h : \int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u|^\mu \ dx = 1 \right\}$, nós provamos então que

$$c_h \leq \text{const.} \ \overline{c}_h^{\frac{\mu}{\mu - 2}} \ .$$

Para concluir a demonstração do Lema 3.5, basta provar agora a seguinte afirmação:

Afirmação. $\overline{c}_h$ tende a zero quando $h \to 0$.

Prova da afirmação. Suponha, por contradição, que existe uma sequência $(h_m) \subset (0, 1]$, com $h_m \to 0$, tal que $\overline{c}_{h_m} \geq \overline{c}_0 > 0$. Por simplicidade, nós omitiremos o subíndice m e escreveremos apenas h, ao invés de h_m. Ou seja, vamos escrever $\overline{c}_h$ no lugar de $\overline{c}_{h_m}$.

Sabemos que, para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale a desigualdade

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \ ,$$

para alguma constante $C = C(N) > 0$. Além disso, se $q \geq 1$ e $q \neq 2^*$, não existe constante $C > 0$ tal que vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto,

$$\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}{\|u\|^2_{L^\mu(\mathbb{R}^N)}} = \inf_{\substack{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{L^\mu(\mathbb{R}^N)}=1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx = 0 \ ,$$

pois $\mu < 2^*$. De fato, pela hipótese $(g4)$ e pela desigualdade (3.3), temos que $\mu \leq p+1$. Mas $p+1 < 2^*$. Logo, $\mu < 2^*$. Assim, podemos tomar uma sequência $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\mu \, dx = 1 \ . \tag{3.11}$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u_n|^\mu \, dx \longrightarrow d(0) \quad \text{quando } h \to 0 \ ,$$

para todo n. De fato, como u_n tem suporte compacto, o produto $d(hx)|u_n|^\mu$ é nulo fora de uma bola, digamos $B_n \subset \mathbb{R}^N$. Suponha que B_n é centrada na origem. Assim, se $x \in B_n$, então $hx \in B_n$, pois $h \leq 1$. Portanto, para $x \in B_n$, vale a desigualdade

$$|d(hx)u_n^\mu| \leq |u_n|^\mu \max_{y \in B_n} d(y) \ .$$

Ou seja, $d(hx)|u_n|^\mu$ é limitada em $\mathbb{R}^N$ por uma função de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, como d é contínua, então $d(hx)|u_n|^\mu \to d(0)|u_n|^\mu$, quando $h \to 0$, para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto, usando (3.11), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u_n|^\mu \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} d(0)|u_n|^\mu \, dx = d(0) \quad \text{quando } h \to 0 \ .$$

Denotando $d(0)$ por d_0, podemos então encontrar $h_n > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u_n|^\mu \, dx > \frac{d_0}{2} \ , \tag{3.12}$$

para $h < h_n$.

Agora considere

$$v_{n,h} = \frac{u_n}{(\int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u_n|^\mu \, dx)^{\frac{1}{\mu}}} \ .$$

Então $v_{n,h} \in M_h$, para todo n e todo h. Além disso, por (3.12), temos que, para $h < h_n$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{n,h}|^2 \, dx \leq \left(\frac{2}{d_0}\right)^{\frac{2}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx \ .$$

Segue de (3.11) que nós podemos encontrar n_0 tal que, para todo $h < h_{n_0}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{n_0,h}|^2 \, dx < \frac{\overline{c}_0}{2} \ .$$

Por outro lado, como $v_{n,h} \in M_h$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_{n,h}|^2 + b_h(hx)|v_{n,h}|^2\right) dx \geq \overline{c}_h \geq \overline{c}_0 \ ,$$

para todo n e todo h. Portanto, usando (3.12), temos que, para $h < h_{n_0}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} b_h(hx)|u_{n_0}|^2\, dx &\geq \left(\frac{d_0}{2}\right)^{\frac{2}{\mu}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} b_h(hx)|u_{n_0}|^2\, dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} d(hx)|u_{n_0}|^\mu\, dx)^{\frac{2}{\mu}}} \\
&= \left(\frac{d_0}{2}\right)^{\frac{2}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^N} b_h(hx)|v_{n_0,h}|^2\, dx \\
&\geq \left(\frac{d_0}{2}\right)^{\frac{2}{\mu}} \left(\overline{c}_0 - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{n_0,h}|^2\, dx\right) \\
&\geq \left(\frac{d_0}{2}\right)^{\frac{2}{\mu}} \frac{\overline{c}_0}{2}\ .
\end{aligned}$$

Mas isto é absurdo, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} b_h(hx)|u_{n_0}|^2\, dx \longrightarrow 0 \quad \text{quando } h \to 0\ .$$

De fato, a integral acima só sobrevive em uma bola, pois u_{n_0} tem suporte compacto em $\mathbb{R}^N$. Nessa bola, pela hipótese $(b2)$, temos que $b_h(hx)$ converge uniformemente para zero quando $h \to 0$. Assim,

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} b_h(hx)|u_{n_0}|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{h\to 0} b_h(hx)|u_{n_0}|^2\, dx = 0\ .$$

Isto conclui a demonstração do Lema 3.5 e, consequentemente, do Teorema 3.1.

□

Observação. Para obter uma solução positiva de $(P3)$, basta trocar $g(x,s)$ por

$$g^+(x,s) = \begin{cases} g(x,s) & \text{se } s > 0 \\ 0 & \text{se } s \leq 0. \end{cases}$$

De fato, com os mesmos argumentos utilizados ao longo deste capítulo, mostramos que o problema

$$-\Delta u + b_h(hx)u = g^+(hx,u)\ ,\ x \in \mathbb{R}^N,$$

também tem solução não trivial em E_h, digamos u_h, para h suficientemente pequeno. Então, denotando

$$I_h(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + b_h(hx)u^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G^+(hx,u)\, dx\ ,\ u \in E_h\ ,$$

onde $G^+(hx,s) = \int_0^s g^+(hx,t)\, dt$, temos que $I_h'(u_h)v = 0$, para todo $v \in E_h$. Portanto,

$$0 = I_h'(u_h)u_h^- = \left\langle u_h, u_h^- \right\rangle_h - \int_{\mathbb{R}^N} g^+(hx,u_h)u_h^-\, dx\ ,$$

onde $u_h^- = \max\{0, -u_h\}$. Mas

$$\left\langle u_h, u_h^- \right\rangle_h = \left\langle u_h^+ - u_h^-, u_h^- \right\rangle_h = -\left\| u_h^- \right\|_h^2 \ .$$

Além disso, o produto $g^+(hx, u_h)u_h^-$ é sempre igual a zero, pois as funções $g^+(hx, u_h)$ e u_h^- nunca são não nulas simultaneamente. Logo,

$$0 = I_h'(u_h)u_h^- = -\left\| u_h^- \right\|_h^2 \ ,$$

ou seja, $u_h^- = 0$ e, portanto, $u_h \geq 0$. Daí, basta usar o Princípio do Máximo Forte para provar que, de fato, $u_h > 0$.

Apêndice A

Campo pseudo-gradiente

Considere um espaço de Banach X e o seu dual X', com normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{X'}$, respectivamente. Seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional.

Definição A.1. *Um vetor pseudo-gradiente para I em $u \in X$ é um vetor $v_0 \in X$ tal que*

(PG1) $\|v_0\| \leq 2\,\|I'(u)\|_{X'}$

(PG2) $I'(u)v_0 \geq \|I'(u)\|_{X'}^2$

Observações:

1) Se X é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então $\nabla I(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I em $u \in X$. De fato, temos

   (i) $\|\nabla I(u)\| = \|I'(u)\|_{X'} \leq 2\,\|I'(u)\|_{X'}$
   (ii) $I'(u)\nabla I(u) = \langle \nabla I(u), \nabla I(u) \rangle = \|\nabla I(u)\|^2 = \|I'(u)\|_{X'}^2$

2) Para todo $u \in X$ tal que $I'(u) \neq 0$, existe um vetor pseudo-gradiente para I em u. De fato, lembrando que

$$\|I'(u)\|_{X'} = \sup_{\|v\|=1} |I'(u)v| \ ,$$

   temos que existe $v \in X$, com $\|v\| = 1$, tal que $I'(u)v > \frac{2}{3}\,\|I'(u)\|_{X'}$. Sendo assim, seja $w_u = \frac{3}{2}\,\|I'(u)\|_{X'}\,v$. Então, w_u é um vetor pseudo-gradiente para I em u, pois

$$\|w_u\| = \frac{3}{2}\,\|I'(u)\|_{X'}\,\|v\| = \frac{3}{2}\,\|I'(u)\|_{X'} < 2\,\|I'(u)\|_{X'}$$

   e

$$I'(u)w_u = I'(u)\frac{3}{2}\,\|I'(u)\|_{X'}\,v > \|I'(u)\|_{X'}^2 \ .$$

Agora vamos definir o que é um campo pseudo-gradiente.

Definição A.2. *Seja $\tilde{X} = \{u \in X : I'(u) \neq 0\}$. Um campo pseudo-gradiente para I é uma aplicação $V : \tilde{X} \to X$ tal que*

(i) *Para cada $u \in \tilde{X}$, $V(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u;*

(ii) *V é localmente lipschitziana.*

Lema A.1. *Se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, então existe um campo pseudo-gradiente para I.*

Para demonstrarmos a existência de um campo pseudo-gradiente para I, precisamos de algumas definições e de um resultado devido a A. H. Stone. No que segue, M denotará um espaço topológico de Hausdorff.

Definição A.3. *Seja $C = \{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos de M. Dizemos que C é localmente finita se, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança V_x de x tal que $V_x \cap C_\lambda \neq \emptyset$ apenas para um número finito de conjuntos C_λ. Quando a família C cobre M, dizemos que C é uma cobertura localmente finita.*

Definição A.4. *Sejam C e C' coberturas abertas de M. Dizemos que C refina C' se, para todo $U \in C$, existe $U' \in C'$ tal que $U \subset U'$.*

Definição A.5. *M é paracompacto quando toda cobertura aberta de M pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita.*

Todo espaço métrico é um espaço topológico de Hausdorff. Mas temos mais do que isso, pelo seguinte teorema.

Teorema A.1 (Stone)**.** *Todo espaço métrico é paracompacto.*

Agora observe que $\tilde{X}$ é um espaço métrico, pois a métrica de X também é uma métrica em $\tilde{X}$, já que $\tilde{X} \subset X$. Portanto, pelo teorema acima, $\tilde{X}$ é paracompacto. Além disso, como já foi observado, dado $u \in \tilde{X}$, temos que $w_u = \frac{3}{2} \|I'(u)\|_{X'} v$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u, onde $\|v\| = 1$, pois

$$\|w_u\| < 2 \|I'(u)\|_{X'}$$

e

$$I'(u)w_u > \|I'(u)\|_{X'}^2 \ .$$

Como I' é contínua, existe uma vizinhança N_u de u tal que

$$\|w_u\| \leq 2 \|I'(y)\|_{X'} \quad \text{e} \quad I'(y)w_u \geq \|I'(y)\|_{X'}^2 \ ,$$

para todo $y \in N_u$. Então, temos uma cobertura aberta de $\tilde{X}$, que é $\{N_u\}_{u \in \tilde{X}}$. Sendo $\tilde{X}$ paracompacto, esta cobertura aberta pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita, digamos $\{N_\lambda\}_{\lambda \in L}$. Assim, para todo $\lambda \in L$, existe $u_\lambda \in \tilde{X}$ tal que $N_\lambda \subset N_{u_\lambda}$. Para cada λ, denote $w_\lambda = w_{u_\lambda}$. Daí, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|w_\lambda\| \leq 2 \|I'(y)\|_{X'} \\ I'(y)w_\lambda \geq \|I'(y)\|_{X'}^2 \ , \end{array} \right. \tag{A.1}$$

para todo $y \in N_\lambda \subset N_{u_\lambda}$.

Novamente pela paracompacidade de $\tilde{X}$, existe uma partição da unidade $(\Phi_\lambda)_{\lambda \in L}$ subordinada à cobertura $\{N_\lambda\}_{\lambda \in L}$, onde as funções Φ_λ são localmente lipschitzianas. Então, temos que

1) $supp(\Phi_\lambda) \subset N_\lambda$;

2) $0 \leq \Phi_\lambda \leq 1$;

3) $\sum_{\lambda \in L} \Phi_\lambda(u) = 1, \; \forall \; u \in \tilde{X}$.

Agora considere a aplicação $V : \tilde{X} \to X$ dada por

$$V(u) = \sum_{\lambda \in L} \Phi_\lambda(u) w_\lambda \; .$$

Lembrando que a cobertura $\{N_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é localmente finita, então, fixado $u \in \tilde{X}$, existe uma bola $B_\delta(u)$ e um conjunto finito $L_u \subset L$ tal que $B_\delta(u) \cap N_\lambda \neq \emptyset$ implica $\lambda \in L_u$. Como para cada $\lambda \in L$ temos que $supp(\Phi_\lambda) \subset N_\lambda$, então, se $y \in B_\delta(u)$, $\Phi_\lambda(y) = 0$ para $\lambda \notin L_u$. Isto mostra que o somatório na terceira propriedade da partição da unidade e o somatório que define V são sempre finitos e, portanto, V está bem definida. Assim,

$$V(y) = \sum_{\lambda \in L_u} \Phi_\lambda(y) w_\lambda \; ,$$

para todo $y \in B_\delta(u)$. Além disso, para cada $\lambda \in L_u$, existe uma bola centrada em u onde a função Φ_λ é lipschitziana. Chamaremos de B a menor entre essas bolas e a bola $B_\delta(u)$. Então, se $y, z \in B$, temos que

$$\begin{aligned}
\|V(y) - V(z)\| &= \left\| \sum_{\lambda \in L_u} (\Phi_\lambda(y) - \Phi_\lambda(z)) w_\lambda \right\| \\
&\leq \sum_{\lambda \in L_u} |\Phi_\lambda(y) - \Phi_\lambda(z)| \, \|w_\lambda\| \\
&\leq \sum_{\lambda \in L_u} K_\lambda \|y - z\| \, \|w_\lambda\| \\
&= K_u \|y - z\| \; .
\end{aligned}$$

Ou seja, V é lipschitziana na bola B centrada em u. Como $u \in \tilde{X}$ é arbitrário, então V é localmente lipschitziana.

Vamos mostrar agora que $V(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u. Para isso, observe primeiramente que se $u \in N_\lambda$, com $\lambda \in L_u$, então valem as desigualdades em $(A.1)$. E se $u \notin N_\lambda$, então $\Phi_\lambda(u) = 0$. Portanto, vale a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
\|V(u)\| &\leq \sum_{\lambda \in L_u} \Phi_\lambda(u) \, \|w_\lambda\| \\
&\leq \sum_{\lambda \in L_u} 2\Phi_\lambda(u) \, \|I'(u)\|_{X'} \\
&= 2 \, \|I'(u)\|_{X'} \sum_{\lambda \in L_u} \Phi_\lambda(u) \\
&= 2 \, \|I'(u)\|_{X'} \sum_{\lambda \in L} \Phi_\lambda(u) \\
&= 2 \, \|I'(u)\|_{X'} \; .
\end{aligned}$$

Observe agora que, pela linearidade de $I'(u)$, temos que

$$\begin{aligned} I'(u)V(u) &= I'(u)\sum_{\lambda\in L_u}\Phi_\lambda(u)w_\lambda \\ &= \sum_{\lambda\in L_u}\Phi_\lambda(u)(I'(u)w_\lambda) \end{aligned}$$

Assim, usando $(A.1)$ novamente, obtemos

$$\begin{aligned} I'(u)V(u) &\geq \|I'(u)\|_{X'}^2\sum_{\lambda\in L_u}\Phi_\lambda(u) \\ &= \|I'(u)\|_{X'}^2\sum_{\lambda\in L}\Phi_\lambda(u) \\ &= \|I'(u)\|_{X'}^2 \ . \end{aligned}$$

Logo, $V(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u e, portanto, a aplicação $V:\tilde{X}\to X$ é um campo pseudo-gradiente para I. Isto demonstra o Lema 1.

Apêndice B

Resultados gerais

Lema B.1 (P.L. Lions, 1984)**.** *Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se (u_n) é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q dx \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to \infty \ ,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

A demonstração do lema acima encontra-se em [6].

Lema B.2. *Seja $r > 0$ e $B_r \subset \mathbb{R}^N$ a bola de centro 0 e raio r. Considere uma função $b \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $b(x) \geq -B$, $B \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então, denotando*

$$\mu_1 = \inf_{u \in H^1(B_r) \setminus \{0\}} \frac{\int_{B_r} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx}{\|u\|^2_{L^2(B_r)}}$$

e

$$\nu_2 = \inf_{u \in H^1_0(B_r) \setminus \{0\}} \frac{\int_{B_r} \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) dx}{\|u\|^2_{L^2(B_r)}} \ ,$$

temos que

$$\mu_1 \leq \nu_2 \leq C(N) \left(\mu_1 + B + \frac{1}{r^2} \right) \ .$$

Demonstração. A primeira desigualdade é óbvia. Vamos provar a segunda desigualdade. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de μ_1, podemos encontrar $\psi \in H^1(B_r)$ tal que

$$\int_{B_r} \psi^2 dx = 1 \tag{B.1}$$

e

$$\mu_1 \leq \int_{B_r} \left(|\nabla \psi|^2 + b(x)\psi^2 \right) dx < \mu_1 + \epsilon \ . \tag{B.2}$$

Portanto, $\int_{B_r} |\nabla \psi|^2 dx < \mu_1 + B + \epsilon$.

Note que

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \left(|\nabla \psi|^2 + b(x)\psi^2 \right) dx \ &\leq \ \|b\|_{L^\infty(B_r)} \int_{B_r} \left(|\nabla \psi|^2 + \psi^2 \right) dx \\ &= \ \|b\|_{L^\infty(B_r)} \|u\|^2_{H^1(B_r)} \ . \end{aligned}$$

Além disso, como B_r é um aberto de classe C^1, então $C^\infty(\overline{B_r})$ é denso em $H^1(B_r)$. Logo, podemos supor que ψ está em $C^\infty(\overline{B_r})$.

Agora tome $h < 1$ suficientemente próximo de 1 de tal forma que $\|\psi\|_{L^2(B_{hr})} > 0$. Então, nós temos a desigualdade de interpolação

$$\|\psi\|_{L^2(B_r)} \leq h^{-N/2} \|\psi\|_{L^2(B_{hr})} + r \left(\int_h^1 s^{-\frac{N+2}{2}} ds \right) \|\nabla\psi\|_{L^2(B_r)} \ . \tag{B.3}$$

Para provar esta desigualdade, considere a função $f(h) = \int_{B_r} \psi^2(h\xi)d\xi$, isto é, $f(h) = h^{-N} \|\psi\|^2_{L^2(B_{hr})}$. Observe que, para $\xi \in B_r$, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \psi^2(h\xi)}{\partial h}\right| &= |2\psi(h\xi)\nabla(\psi(h\xi))\xi| \\ &\leq 2r \|\psi\|_{L^\infty(B_r)} \|\nabla\psi\|_{L^\infty(B_r)} \ . \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \frac{df(h)}{dh} &= \int_{B_r} \frac{\partial \psi^2(h\xi)}{\partial h} \, d\xi \\ &= \int_{B_r} 2\psi(h\xi)\nabla(\psi(h\xi))\xi \, d\xi \ . \end{aligned}$$

(cf. [1], Corolário 5.9). Então, usando a desigualdade de Hölder e substituição de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{d\sqrt{f(h)}}{dh}\right| &\leq \frac{1}{2}(f(h))^{-1/2} \int_{B_r} 2|\psi(h\xi)||\nabla\psi(h\xi)||\xi| d\xi \\ &\leq r \left(\int_{B_r} \psi^2(h\xi)d\xi \right)^{-1/2} \left(\int_{B_r} \psi^2(h\xi)d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{B_r} |\nabla\psi(h\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq rh^{-\frac{N}{2}} \left(\int_{B_{hr}} \frac{1}{h^2} |\nabla\psi(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq rh^{-\frac{N+2}{2}} \|\nabla\psi\|_{L^2(B_r)} \ . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_h^1 \frac{d\sqrt{f(s)}}{ds} ds \right| &= \left| \sqrt{f(1)} - \sqrt{f(h)} \right| \\ &= \left| \|\psi\|_{L^2(B_r)} - h^{-N/2} \|\psi\|_{L^2(B_{hr})} \right| \\ &\leq r \left(\int_h^1 s^{-\frac{N+2}{2}} ds \right) \|\nabla\psi\|_{L^2(B_r)} \ , \end{aligned}$$

o que mostra a desigualdade $(B.3)$.

Observe agora que, como $h < 1$, temos que

$$h^{-\frac{N}{2}} < h^{-\frac{N+2}{2}}$$

e

$$\int_h^1 s^{-\frac{N+2}{2}} ds \leq \int_h^1 h^{-\frac{N+2}{2}} ds = h^{-\frac{N+2}{2}}(1-h) \ .$$

Portanto, usando $(B.1)$ e $(B.2)$, obtemos da desigualdade $(B.3)$ que

$$1 \leq h^{-\frac{N+2}{2}} \|\psi\|_{L^2(B_{hr})} + rh^{-\frac{N+2}{2}}(1-h)\sqrt{\mu_1 + B + \epsilon} \ .$$

Multiplicando esta desigualdade por $h^{\frac{N+2}{2}}$, obtemos

$$h^{\frac{N+2}{2}} + r(h-1)\sqrt{\mu_1 + B + \epsilon} \leq \|\psi\|_{L^2(B_{hr})} \ . \tag{B.4}$$

Tomando

$$h = \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2^{\frac{N+4}{2}} r\sqrt{\mu_1 + B + \epsilon}}\right\} \ , \tag{B.5}$$

obtemos

$$\begin{aligned} h^{\frac{N+2}{2}} + r(h-1)\sqrt{\mu_1 + B + \epsilon} &\geq \frac{1}{2^{\frac{N+2}{2}}} + r\left(-\frac{1}{2^{\frac{N+4}{2}} r\sqrt{\mu_1 + B + \epsilon}}\right)\sqrt{\mu_1 + B + \epsilon} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{N+2}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{N+4}{2}}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{N+4}{2}}} \ . \end{aligned}$$

Assim, da desigualdade $(B.4)$, concluímos que

$$\int_{B_{hr}} \psi^2 dx \geq \frac{1}{2^{N+4}} \ .$$

Agora considere uma função $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\chi \equiv 1$ em B_{hr}, $\chi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_r$ e $|\nabla \chi| < \frac{1}{r(1-h)}$. Denote $\varphi = \psi\chi$. Então $\varphi \in H_0^1(B_r)$ e, portanto,

$$\nu_2 \leq \frac{\int_{B_r} \left(|\nabla \varphi|^2 + b(x)\varphi^2\right) dx}{\int_{B_r} \varphi^2 dx} \ . \tag{B.6}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \left(|\nabla \varphi|^2 + b(x)\varphi^2\right) dx &\leq \int_{B_r} \left(|\nabla \varphi|^2 + (b(x) + B)\varphi^2\right) dx \\ &\leq 2\int_{B_r} \left(|\nabla \psi|^2 + b(x)\psi^2 + B\psi^2 + \psi^2|\nabla \chi|^2\right) dx \\ &\leq 2\left(\mu_1 + \epsilon + B + \frac{1}{r^2(1-h)^2}\right) \ , \end{aligned} \tag{B.7}$$

Agora, por $(B.5)$, nós temos que

$$h \leq 1 - \frac{1}{2^{\frac{N+6}{2}} r \sqrt{\mu_1 + B + \epsilon}} \ ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{(1-h)^2} \leq 2^{N+6} r^2 (\mu_1 + B + \epsilon) \ .$$

Então, de $(B.7)$, nós obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \left(|\nabla \varphi|^2 + b(x)\varphi^2 \right) dx &\leq 2 \left[\mu_1 + B + \epsilon + 2^{N+6}(\mu_1 + B + \epsilon) \right] \\ &\leq \hat{C}(N) \left(\mu_1 + B + \epsilon \right) \ . \end{aligned}$$

Note também que

$$\int_{B_r} \varphi^2 dx \geq \int_{B_{hr}} \psi^2 dx \geq \frac{1}{2^{N+4}} \ .$$

Portanto, de $(B.6)$ e destas duas últimas desigualdades, nós concluímos que

$$\nu_2 \leq C(N) \left(\mu_1 + B + \epsilon \right) \ .$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, podemos tomar $\epsilon = \frac{1}{r^2}$. Isto conclui a demonstração.

□

Teorema B.1 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto conexo e L um operador uniformemente elíptico em Ω da forma*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \ ,$$

onde os coeficientes a^{ij}, b^i e c estão em $L^\infty(\Omega)$. Suponha que $c \equiv 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Assim,

(i) se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge máximo em Ω, então u é constante em Ω.

(ii) se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo em Ω, então u é constante em Ω.

No caso em que $c \leq 0$, vale o seguinte:

(iii) se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge máximo não negativo em Ω, então u é constante em Ω.

(iv) se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo não positivo em Ω, então u é constante em Ω.

Lema B.3. *Seja f uma função mensurável a Lebesgue. Suponha que $f \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^N} f dx < \infty$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|A| < \delta \Rightarrow \int_A f dx < \epsilon \ .$$

Demonstração. Seja $g_n = f\chi_{[f<n]}$, $n \in \mathbb{N}$, onde $\chi_{[f<n]}$ é a função característica do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < n\}$. Então $g_n \geq 0$, para todo n, e $g_n(x) \uparrow f(x)$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int_{[f<n]} f dx = \int_{\mathbb{R}^N} g_n dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f dx \ .$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} f dx = \int_{[f<n]} f dx + \int_{[f\geq n]} f dx \ ,$$

então $\int_{[f\geq n]} f dx \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\int_{[f\geq n_0]} f dx < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Note que, para qualquer $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável,

$$\int_A f dx = \int_{A\cap[f<n_0]} f dx + \int_{A\cap[f\geq n_0]} f dx \leq n_0|A| + \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Assim, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2n_0}$, obtemos

$$|A| < \delta \Rightarrow \int_A f dx < \epsilon \ ,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Apêndice C

Funcionais diferenciáveis

Sejam X um espaço de Banach e U um subconjunto aberto de X.

Proposição C.1. *Considere o funcional $I : X \to \mathbb{R}$. Se I tem derivada de Gateaux contínua em U, então $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Sejam $u, v \in U$ tais que $u + v \in U$. Como I possui derivada de Gateaux sobre U, digamos I', então pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$I(u+v) - I(u) = I'(u+\theta v)v.$$

Note que

$$I(u+v) - I(u) - I'(u)v = I'(u+\theta v)v - I'(u)v,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v\|}(I(u+v) - I(u) - I'(u)v) &= \frac{1}{\|v\|}(I'(u+\theta v)v - I'(u)v) \\ &= (I'(u+\theta v) - I'(u))\frac{v}{\|v\|}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\left| \frac{1}{\|v\|}(I(u+v) - I(u) - I'(u)v) \right| \leq \| \, I'(u+\theta v) - I'(u) \, \| .$$

Como, por hipótese, a derivada de Gateaux é contínua, segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|v\| < \delta$, então

$$\| \, I'(u+\theta v) - I'(u) \, \| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\|v\|}(I(u+v) - I(u) - I'(u)v) = 0.$$

Deste modo, temos que a derivada de Fréchet existe e é igual a derivada de Gateaux que, por hipótese, é contínua. Logo, $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.

$\square$

Agora, seja H um espaço de Hibert. Considere o funcional $J_0 : H \to \mathbb{R}$ definido por $J_0(u) = \|u\|_H$, $u \in H$. Então, temos o seguinte resultado:

Proposição C.2. $J_0 \in C^1(H, \mathbb{R})$.

Demonstração. Vamos verificar a existência da derivada de Gateaux de J_0. Dado $u \in H$, para cada $v \in H$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\|u+tv\|_H^2 - \|u\|_H^2}{t} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}[2\langle u,v\rangle_H + t\|v\|_H^2] \\
&= \langle u,v\rangle_H
\end{aligned}$$

Logo, a derivada de Gateaux existe e é dada por

$$J_0'(u)v = \langle u,v\rangle_H .$$

Vamos mostrar que ela é contínua. Para tal, tome $(u_n) \subset H$ com $u_n \to u$ em H. Dado $\epsilon > 0$ e $v \in H$ tal que $\|v\|_H \leq 1$, temos que, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
|(J_0'(u_n) - J_0'(u))v| &= |J_0'(u_n - u)v| \\
&= |\langle u_n - u, v\rangle_H| \\
&\leq \|u_n - u\|_H \|v\|_H \\
&< \epsilon ,
\end{aligned}$$

implicando que

$$\|J_0'(u_n) - J_0'(u)\|_{H'} = \sup_{\substack{v\in H \\ \|v\|\leq 1}} |(J_0'(u_n) - J_0'(u))v| \leq \epsilon.$$

Portanto,

$$\|J_0'(u_n) - J_0'(u)\|_{H'} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo, $J_0' : H \to H'$ é contínuo. Pela Proposição $C.1$, $J_0 \in C^1(H, \mathbb{R})$.

□

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, R. G., *The Elements of Integration,* John Wiley and Sons, New York, 1966.

[2] BARTSCH, T., WANG, Z.-G., *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$*,* Comm. Part. Diff. Eq. 20(9&10) (1995), $1725 - 1741$.

[3] BERESTYCKI, H., LIONS, P.L., *Nonlinear scalar field equations,* Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 313-379.

[4] BRÉZIS, H., *Analyse fonctionelle.* MASSON, 1987.

[5] FERNANDEZ, P. J., *Medida e integração.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[6] GILBARG, D., TRUNDINGER, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, 1984.

[7] KAVIAN, O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques,* Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[8] LIONS, P.L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case.* Analyse Nonlin. 1 (1984), 223-283.

[9] LIPSCHUTZ, S., *Theory and problems of general topology.* McGraw-Hill, 1965.

[10] PUCCI, P., SERRIN, J., *A general variational identity*, Indiana Math J. 35 (1986), 681-703.

[11] RABINOWITZ, P.S., *On a class of nonlinear Schrödinger equations,* Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992) 270-291.

[12] SIRAKOV, B., *Existence and multiplicity of solutions of semi-linear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$*,* Calc. Var. 11 (2000), $119 - 142$.

[13] SIRAKOV, B., *Standing wave solutions of the nonlinear Schrödinger equation in* $\mathbb{R}^N$*,* Annali di Matematica 181 (2002), 73-83.

[14] WILLEM, M., *Minimax Theorems.* Birkhäuser, 1996.