Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos com crescimento crítico

por

João Pablo Pinheiro da Silva

Brasília

2011

Dedicado a Rosa Maria

"Isto dizendo, arrebatou-me ao alto de uma montanha. Inclinei os olhos a uma das vertentes, e contemplei, durante um tempo largo, ao longe, através de um nevoeiro, uma coisa única. Imagina tu, leitor, uma redução dos séculos, e um desfilar de todos eles, as raças todas, todas as paixões, o tumulto dos Impérios, a guerra dos apetites e dos ódios, a destruição recíproca dos seres e das coisas...Então o homem, flagelado e rebelde, corria diante da fatalidade das coisas, atrás de uma figura nebulosa e esquiva, feita de retalhos, um retalho de impalpável, outro de improvável, outro de invisível, cosidos todos a ponto precário, com a agulha da imaginação; e essa figura, - nada menos que a quimera da felicidade, - ou lhe fugia perpetuamente, ou deixava-se apanhar pela fralda, e o homem a cingia ao peito, e então ela ria, como um escárnio, e sumia-se, como uma ilusão...então disse comigo: - Bem, os séculos vão passando, chegará o meu, e passará também, até o último, que me dará a decifração da eternidade. E fixei os olhos, e continuei a ver as idades, que vinham chegando e passando, já então tranquilo e resoluto, não sei até se alegre. Talvez alegre. Cada século trazia a sua porção de sombra e de luz, de apatia e de combate, de verdade e de erro, e o seu cortejo de sistemas, de ideias novas, de novas ilusões; cada um deles rebentavam as verduras de uma primavera, e amareleciam depois, para remoçar mais tarde...Meu olhar, enfarado e distraído, viu enfim chegar o século presente, e atrás deles os futuros. Aquele vinha ágil, destro, vibrante, cheio de si, um pouco difuso, audaz, sabedor, mas ao cabo tão miserável como os primeiros, e assim passou e assim passaram os outros, com a mesma rapidez e igual monotonia. Redobrei de atenção; fitei a vista; ia enfim ver o último, - o último!; mas então já a rapidez da marcha era tal, que escapava a toda a compreensão; ao pé dela o relâmpago seria um século. Talvez por isso entraram os objetos a trocarem-se; uns cresceram, outros minguaram, outros perderam-se no ambiente; um nevoeiro cobriu tudo, - menos o hipopótamo que ali me trouxera, e que aliás começou a diminuir, a diminuir, a diminuir, até ficar do tamanho de um gato. Era efetivamente um gato. Encarei-o bem; era o meu gato Sultão, que brincava à porta da alcova, com uma bola de papel... "
Memórias Póstumas de Brás Cubas (Capítulo VII: O delírio)

"Toda a educação, no momento, não parece motivo de alegria, mas de tristeza. Depois, no entanto, produz naqueles que assim foram exercitados um fruto de paz e de justiça."
Epístola aos Hebreus 12: 11

Agradecimentos

Ao Senhor Deus criador do céu e da terra, que na sua infinita misericórdia me permitiu chegar até aqui.

À minha mãe Rosa Maria, pelo seu amor, carinho e dedicação na minha criação, que foi insistente na condução dos meus estudos, que nunca deixou faltar nada em termos materias e espirituais a mim e a meus irmãos. Muito obrigado por tudo mãe.

À minha esposa Flávia pelo amor e companheirismo tanto nos momentos bons como nos difíceis, nestes 8 anos de convivência.

Aos meus irmãos Julius Paulo e João Pedro, pela amizade e por tudo que passamos juntos.

Aos meus tios Nildon e Gal pelo acolhimento durante os estudos na Escola Técnica Federal do Pará (atual IFPA) e durante a graduação na UFPA.

À minha madrina Rosinha e seu esposo José Alves por tudo que fizeram por mim durante a estadia em Brasília, jamais esquecerei da ajuda nos momentos difíceis e da amizade que tiveram para comigo.

Ao meu Orientador e amigo Marcelo Furtado, pela determinação e disposição durante a orientação. Pelo exemplo de servidor público e pessoa que é para mim. Por toda atenção dispensada durante a elaboração deste trabalho, por saber conduzir a orientação de modo a me preparar para uma carreira direcionada para pesquisa. Sou eternamente grato ao seu entusiasmo e dedicação.

Ao meu amigo Ronaldo Lopes, 15 anos atrás ele foi o primeiro a me incentivar a obter uma bolsa de iniciação científica.

Ao professor Francisco Júlio, pela excelente orientação durante o período na iniciação científica.

Aos professores Elves, Claudianor, Magda e Giovany por aceitarem avaliar este trabalho.

Aos amigos Ricardo Ruviaro, Jorge, Lindenberg e Ismael pela boa convivência.

Este trabalho não é mais do que um tijolhinho na construção do saber, no qual este humilde operário da ciência espera ter dado alguma contribuição, e talvez angariar a simpatia de alguns, mesmo assim, para muitos, chegar até aqui é um esforço conjunto de muitas pessoas, (no meu caso, familia, vizinhos, parentes, amigos, amigos de amigos, etc) muitos até anônimos, alguns jamais serão recompensados nesta vida. Pois bem, agradeço a esses conhecidos e desconhecidos e agora me sinto compelido pela consciência, à retribuir este favor ao próximo, sem nada pedir.

Ao povo Brasileiro, o financiador deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é obter existência e multiplicidade de soluções para algumas classes de problemas elípticos com crescimento crítico. Nas demonstrações, utilizamos técnicas variacionais, a saber: Teorema do Passo da Montanha e suas variantes, e Teoria de Ljusternik-Schnirelmann.

Na primeira parte do trabalho estudamos soluções com decaimento rápido para a equação

$$-\mathrm{div}(K(x)\nabla u) = \lambda K(x)|x|^{\beta}|u|^{q-2}u + K(x)|u|^{2^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $N \geq 3$, $2 \leq q < 2^* := 2N/(N-2)$, $\lambda > 0$ é um parâmetro, $K(x) := \exp(|x|^{\alpha}/4)$, $\alpha \geq 2$ e o número β é dado por $\beta := (\alpha - 2)\frac{(2^*-q)}{(2^*-2)}$. Obtemos uma solução positiva se $2 < q < 2^*$ e uma solução que muda de sinal se $q = 2$. Os resultados depende da posição do parâmetro λ com relação ao primeiro autovalor do problema linear associado.

Na segunda parte do trabalho estudamos o número de soluções não negativas do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = Q_u(u,v) + \frac{1}{2^*}H_u(u,v), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = Q_v(u,v) + \frac{1}{2^*}H_v(u,v), & x \in \Omega, \\ u,\, v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 3$ e Q_u, H_u, Q_v, H_v são as derivadas parciais das funções homogêneas $Q,\, H \in C^1([0,\infty) \times [0,\infty), \mathbb{R})$. A função H possui crescimento crítico enquanto Q é uma perturbação subcrítica. No resultado principal relacionamos o número de soluções não negativas e diferentes de zero com a topologia do conjunto Ω.

Palavras Chave: Teorema do Passo da Montanha, Métodos variacionais, expoente crítico de Sobolev, teoria de Ljusternik Schnirelmann

Abstract

The objective of this work is to obtain existence and multiplicity of solutions for some classes of elliptic problems with critical growth. In demonstrations, we used techniques variational, namely: Mountain Pass Theorem and its variants, and Theory-Ljusternik Schnirelmann.

In the first part of the work, we study solutions with decay fast to the equation

$$-\mathrm{div}(K(x)\nabla u) = \lambda K(x)|x|^{\beta}|u|^{q-2}u + K(x)|u|^{2^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where $N \geq 3$, $2 \leq q < 2^* := 2N/(N-2)$, $\lambda > 0$ is a parameter, $K(x) := \exp(|x|^{\alpha}/4)$, $\alpha \geq 2$ and the number β is given by $\beta := (\alpha - 2)\frac{(2^*-q)}{(2^*-2)}$. We obtain a positive solution if $2 < q < 2^*$ and a solution which changes sign if $q = 2$. The results depend on the position of the parameter λ with for the first eigenvalue of the associated linear problem. In the second part, we studied the number of nonnegative solutions for system

$$\begin{cases} -\Delta u = Q_u(u,v) + \frac{1}{2^*}H_u(u,v), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = Q_v(u,v) + \frac{1}{2^*}H_v(u,v), & x \in \Omega, \\ u,\, v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a boundeb domain, $N \geq 3$ and Q_u, H_u, Q_v, H_v are the partial derivatives of homogeneous functions $Q,\, H \in C^1([0,\infty) \times [0,\infty), \mathbb{R})$. The function H has critical growth whereas Q is a subcritical pertubation. In the main result relate the number of nonnegative solutions of different zero for the topology of Ω.

keywords: Mountain Pass Theorem, variational methods, Sobolev critical exponent, Theory-Ljusternik Schnirelmann

Sumário

1 Introdução **1**

2 Soluções auto-similares para a equação do calor **11**

2.1 A estrutura variacional 12

2.2 Soluções positivas para $2 < q < 2^*$ 19

2.3 Soluções que mudam de sinal para $q = 2$ 26

2.4 Apêndice 36

3 Soluções para um sistema elíptico do tipo gradiente **41**

3.1 A condição PS e um resultado de existência 43

3.2 Um lema de concentração de compacidade 56

3.3 Demonstração dos Teoremas C e D 66

3.4 Sobre a positividade das soluções 74

3.5 Apêndice 78

Capítulo 1

Introdução

Muitos problemas físicos podem ser modelados através de uma equação diferencial parcial. Alguns desses fenômenos dispendem certa energia durante sua realização. Acreditava-se que a energia gasta para realização de um tal processo fosse mínima, principalmente devido ao princípio aristotélico de esforço minimal da natureza. Um dos vários métodos pelo qual podemos resolver uma equação diferencial, que modela um fenômeno desse tipo, é chamado Método Variacional, que consiste em localizar pontos críticos de certos funcionais que descrevem a energia envolvida no processo estudado. Este método tem sido importante no estudo de problemas não lineares. De um modo geral, esses problemas podem ser expressos na forma

$$Lu = 0,$$

onde o operador L, em geral não linear, é a derivada de um determinado funcional energia I. Simbolicamente escrevemos

$$L = I'.$$

Sabemos que uma das maneiras para se localizar os pontos críticos de uma função consiste em procurar seus máximos ou mínimos, ou mesmo provar sua existência. Entretanto alguns funcionais não são limitados inferiormente ou superiormente, de modo que a busca por pontos de máximo ou mínimo não faz sentido. Ainda assim, podemos buscar por pontos críticos de outra natureza. Neste trabalho, usaremos o Teorema do Passo da Montanha e um resultado abstrato do tipo Ljusternik-Schnirelmann que garantem que, sob certas condições geométricas e de compacidade, é possível obter pontos críticos de determinados funcionais.

Consideramos dois problemas elípticos, um escalar e um sistema. Descrevemos esses problemas nas duas seções a seguir.

Soluções auto-similares para a equação do calor

Na primeira parte do nosso trabalho, consideramos a seguinte equação

$$(\mathcal{P}_1) \qquad -\mathrm{div}(K(x)\nabla u) = \lambda K(x)|x|^{\beta}|u|^{q-2}u + K(x)|u|^{2^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\mathrm{div}(\cdot)$ é o operador divergente usual, $N \geq 3$, $2 \leq q < 2^* := 2N/(N-2)$, $\lambda > 0$ é um parâmetro, $K(x) := \exp(|x|^{\alpha}/4)$, $\alpha \geq 2$ e o número β é dado por

$$\beta := (\alpha - 2)\frac{(2^* - q)}{(2^* - 2)}.$$

Esta equação é equivalente a

$$(\widetilde{\mathcal{P}}_1) \qquad -\Delta u - \frac{\alpha}{4}|x|^{\alpha-2}x \cdot \nabla u = \lambda|x|^{\beta}|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u.$$

Conforme observado em [15], um dos motivos para o estudo da equação acima reside no fato de que, para $\alpha = q = 2$ e $\lambda = (N-2)/(N+2)$, ela aparece no estudo de soluções auto-similares da seguinte equação do calor

$$v_t - \Delta v = |v|^{\frac{4}{N-2}}v, \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

Por solução auto-similar entendemos uma solução na forma $v(x,t) = t^{\frac{2-N}{N+2}}u(xt^{\frac{-1}{2}})$. Substituindo essa expressão na equação acima vemos que v é solução da equação do calor se, e somente se, u é uma solução de $(\widetilde{\mathcal{P}}_1)$.

O caso radialmente simétrico com $\alpha = q = 2$ foi considerado por Atkinson e Peletier [3]. Até onde sabemos, a primeira abordagem variacional para este problema foi feita por Escobedo e Kavian em [10], onde os autores consideraram $\alpha = q = 2$ e $N \geq 3$, e provaram que a existência de soluções positivas está relacionada com a interação do parâmetro λ com o primeiro auto-valor positivo do problema linear associado

$$(\mathcal{LP}_1) \qquad -\mathrm{div}(K(x)\nabla u) = \lambda K(x)|x|^{\alpha-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

que é exatamente $\lambda_1(2) = \frac{N}{2}$. Entre outros resultados, eles notaram uma dicotomia para existência de solução, considerando o parâmetro λ, quando $N = 3$ e quando $N \geq 4$. Mais especificamente, para $N \geq 4$ existe solução positiva se, e somente se $\lambda \in (\lambda_1(2)/2, \lambda_1(2))$. Se $N = 3$, existe uma solução positiva para $\lambda \in (1, \lambda_1(2))$, e não existe solução positiva para $\lambda \leq \lambda_1(2)/2$ e $\lambda \geq \lambda_1(2)$.

No caso em que $\alpha = q = 2$, vários autores consideraram as questões de existência, simetria e comportamento assintótico das soluções de $(\mathcal{P}_1)$, bem como da equação parabólica associada e suas variantes (veja [16, 27, 29, 26] e suas referências).

Recentemente, Catrina, Furtado e Montenegro [7] obtiveram alguns resultados para $\alpha \geq 2$ e $q = 2$. Considerando a autofunção $\varphi_1(x) = e^{|x|^\alpha/4}$ do problema $(\mathcal{LP}_1)$ eles mostraram que a expressão do primeiro autovalor é

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha) := \frac{\alpha(N-2+\alpha)}{4}.$$

Eles provaram que, se $2 \leq \alpha \leq N-2$, então o problema $(\mathcal{P}_1)$ tem uma solução positiva se, e somente se, $\lambda \in (\lambda_1/2, \lambda_1)$. Se $\alpha > N-2$ e $\lambda \in (\alpha^2/4, \lambda_1)$ então o problema $(\mathcal{P}_1)$ tem uma solução positiva. Além do mais, neste último caso o problema não tem solução positiva se $\lambda \leq \lambda_1/2$ ou $\lambda \geq \lambda_1$. Portanto, se $\alpha > 2$, a dimensão crítica depende de α.

Devido à presença do expoente crítico de Sobolev em $(\mathcal{P}_1)$, é natural fazermos um paralelo com o problema de Brézis e Nirenberg

$$(\mathcal{BN}) \qquad -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $N \geq 3$. Os trabalhos de Escobedo e Kavian [10] , Catrina, Montenegro e Furtado [7] podem ser vistos como versões dos resultados apresentados por Brézis e Nirenberg para o problema acima quando $q = 2$.

O resultado de não existência para $\lambda \geq \lambda_1$ obtido em [7] é consequência de uma identidade do tipo Pohozaev. No caso em que $2 < q < 2^*$, esta identidade não fornece qualquer informação. Assim, podemos esperar por resultados de existência para $\lambda > 0$. O caso $2 < q < 2^*$ foi considerado para o problema $(\mathcal{BN})$ e foi tratado na Seção 2 de [5]. Em nosso primeiro resultado apresentamos uma resposta para essa questão quando lidamos com o problema $(\mathcal{P}_1)$. Mais especificamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema A. *O problema $(\mathcal{P}_1)$ tem uma solução positiva em cada um dos seguintes casos*

(i) $N \geq \alpha + 2$, $2 < q < 2^*$, $\lambda > 0$;

(ii) $2 < N < \alpha + 2$, $2^* - \dfrac{4}{\alpha} < q < 2^*$, $\lambda > 0$;

(iii) $2 < N < \alpha + 2$, $2 < q \leq 2^* - \dfrac{4}{\alpha}$, $\lambda > 0$ *suficientemente grande.*

A restrição sobre $\lambda > 0$ no último item acima é técnica e natural. De fato, se fizermos $\alpha = 2$ no item (iii) obtemos $N = 3$, $2 < q \leq 4$ e λ grande. Uma condição similar foi considera no trabalho de Brézis e Nirenberg (cf. [5, Exemplo 2.4]) para o problema

$(\mathcal{BN})$. Não sabemos sobre resultados de existência para o caso em que $2 < N < \alpha + 2$ e alternando as hipóteses em (iii) para $2^* - \dfrac{4}{\alpha} < q < 2^*$ e/ou $\lambda > 0$ qualquer.

A fim de apresentar nosso segundo resultado lembramos que, de acordo com Catrina, Furtado e Montenegro [7, Teorema 1.1], o problema $(\mathcal{P}_1)$ não tem solução positiva se $q = 2$ e $\lambda \geq \lambda_1$. Contudo, podemos perguntar sobre a existência de soluções que trocam de sinal. Na verdade, Capozzi, Fortunato e Palmieri [6, Teorema 0.1] provaram que $(\mathcal{BN})$ tem solução que muda de sinal quando $q = 2$, $N \geq 4$ e λ é maior do que ou igual ao primeiro auto-valor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ (veja também Cerami, Fortunato e Struwe [8] para um resultado mais fraco). Em nosso segundo teorema apresentamos uma versão desse resultado para o problema $(\mathcal{P}_1)$.

Teorema B. *Se $q = 2$ e $N \geq \alpha + 2$, então o problema $(\mathcal{P}_1)$ tem uma solução que muda de sinal para qualquer $\lambda \geq \lambda_1$.*

Faremos uma abordagem variacional do nosso problema. Para qualquer $\alpha \geq 2$, denotamos por $H(\alpha)$ o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma

$$\|u\|_K := \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

que é induzida pelo produto interno

$$(u, v)_K := \int_{\mathbb{R}^N} K(x)(\nabla u \cdot \nabla v)\, \mathrm{d}x.$$

Vamos procurar por soluções em $H(\alpha)$.

Em [10] os autores usam um argumento de minimização. Contudo, no caso em que $q > 2$, essa abordagem não funciona. Assim consideramos o funcional

$$I(u) := \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{q}|x|^\beta |u|^q - \frac{1}{2^*}|u|^{2^*}\right) \mathrm{d}x$$

que está bem definido e é de classe C^1 em $H(\alpha)$. Seus pontos críticos são soluções fracas do problema $(\mathcal{P}_1)$. Usando o decaimento das funções de $H(\alpha)$, obtemos imersões compactas deste espaço em espaços de Lebesgue com peso. Portanto, podemos argumentar como no trabalho de Brézis e Nirenberg [5] para provar um resultado de compacidade local para o funcional I.

Na prova do Teorema A, aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha. A principal dificuldade é localizar corretamente os níveis minimax para os quais temos compacidade. Atingimos este objetivo adaptando algumas estimativas de [10, 7]. Entretanto, como temos muitos graus de homogeneidade no problema $(\mathcal{P}_1)$, faremos as estimativa e cálculos, em vários casos, dependendo da relação entre α e a dimensão N. Para o Teorema B usaremos o Teorema do Passo da Montanha Generalizado e idéias adaptadas do artigo de Capozi, Fortunato e Palmieri [6]. Como no primeiro teorema, os cálculos são um tanto complicados. Além do mais, como o domínio é ilimitado, as estimativas presentes em [6] não se aplicam aqui. Contornamos esse problema obtendo estimativas para o cálculo da taxa de decaimento das soluções de $(\mathcal{LP}_1)$ (veja Lema 2.4). Os resultados apresentados nessa seção podem ser encontrado no artigo [11].

Soluções para um sistema elíptico do tipo gradiente

Na segunda parte do trabalho estudamos existência e multiplicidade de soluções para o seguinte sistema elíptico

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = Q_u(u,v) + \dfrac{1}{2^*} H_u(u,v), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = Q_v(u,v) + \dfrac{1}{2^*} H_v(u,v), & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave limitado e $N \geq 3$, Q_u, H_u e Q_v, H_v são as derivadas parciais das funções homogêneas Q, $H \in C^1(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, onde $\mathbb{R}^2_+ := [0, \infty) \times [0, \infty)$.

Estamos interessados no caso em que H tem crescimento crítico e Q tem crescimento subcrítico. Mais especificamente $H := H(s,t)$ satisfaz

(H_0) H é 2^*-homogênea, isto é

$$H(\theta s, \theta t) = \theta^{2^*} H(s,t) \;\text{ para cada }\; \theta > 0,\; (s,t) \in \mathbb{R}^2_+;$$

(H_1) $H_s(0,1) = 0$, $H_t(1,0) = 0$;

(H_2) $H(s,t) > 0$ para cada $s, t > 0$;

(H_3) $H_s(s,t) \geq 0$, $H_t(s,t) \geq 0$ para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$;

(H_4) a função 1-homogênea $(s,t) \mapsto H(s^{1/2^*}, t^{1/2^*})$ é côncava em $\mathbb{R}^2_+$.

A função $Q := Q(s,t)$ é uma pertubação subcrítica que satisfaz

(Q_0) Q é q-homogênea para algum $2 \leq q < 2^*$;

(Q_1) $Q_s(0,1) = 0$, $Q_t(1,0) = 0$.

A fim de apresentarmos nosso resultado, definimos os seguintes números

$$\mu := \min\{Q(s,t) \,:\, s^q + t^q = 1,\ s,\ t \geq 0\},$$

$$\lambda := \max\{Q(s,t) \,:\, s^q + t^q = 1,\ s,\ t \geq 0\}.$$

Se Y é um conjunto fechado do espaço topológico Z, denotamos por $\mathrm{cat}_Z(Y)$ a categoria de Ljusternik-Schnirelmann de Y em Z, definida como o menor número de conjuntos fechados e contráteis em Z que cobrem Y. Enunciamos abaixo nosso primeiro resultado de multiplicidade para o sistema $(\mathcal{P}_2)$.

Teorema C. *Suponha que H satisfaz $(H_0)-(H_4)$ e Q satisfaz $(Q_0)-(Q_1)$. Então existe $\Lambda > 0$ tal que o problema $(\mathcal{P}_2)$ tem pelo menos $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não negativas e não triviais se $\lambda,\ \mu \in (0,\Lambda)$.*

No enunciado acima uma solução fraca $z = (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ do problema $(\mathcal{P}_2)$ ser não negativa significa $u,\ v \geq 0$ em Ω. Além disso, quando falamos de solução trivial estamos nos referindo à solução nula $(0,0)$.

Para provar este resultado usamos Métodos Variacionais, Teoria de Ljusternik-Schnirelmann e uma técnica introduzida por Benci e Cerami [4], que consiste em comparar a categoria de certos conjuntos de nível associados ao funcional com a categoria do conjunto Ω. Para superarmos a falta de compacidade devido ao crescimento crítico de H usamos uma técnica devida a Brézis e Nirenberg [5], além do trabalho de Morais Filho e Souto [24], onde foi provado que o número

$$S_H := \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\mathrm{d}x \,:\, u,v \in H^1(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N} H(u^+,v^+)\mathrm{d}x = 1\right\} \tag{1.1}$$

desempenha um papel importante no estudo do sistema $(\mathcal{P}_2)$. Na verdade, usamos a constante acima e adaptamos algums cálculos contidos no artigo de Myiagaki [25] para localizar os níveis de energia onde a condição de Palais-Smale vale. Gostaríamos de mencionar que, como subproduto de nosso argumento, nós estendemos os resultado de existência de [24] para qualquer grau de homogeneidade da pertubação subcrítica Q (veja Teoremas 3.12 e 3.13).

A condição (Q_1) descarta exemplos do tipo $Q(s,t) = s^q + t^q + st^{q-1} + s^{q-1}t$ visto que, neste caso, $Q_s(0,1) = 1$ e $Q_t(1,0) = 1$. Contudo podemos considerar esta situação se a pertubação subcrítica for homogênea de grau $q > 2$ e tivermos uma estimativa nas derivadas de Q. Mais especificamente, temos o seguinte resultado

Teorema D. *Suponha que H satisfaz $(H_0) - (H_4)$, Q satisfaz (Q_0) com $q > 2$ e*

$(\widehat{Q_1})$ $Q_s(0,1) > 0$ *e* $Q_t(1,0) > 0$.

Então, definindo

$$\widehat{\lambda} = \max\{Q_s(0,1),\ Q_t(1,0)\},$$

existe $\Lambda > 0$ tal que o problema $(\mathcal{P}_2)$ tem pelo menos $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não negativas e não triviais se $\lambda,\ \mu,\ \widehat{\lambda} \in (0,\Lambda)$.

A diferença quando consideramos (Q_1) ou $(\widehat{Q_1})$ está no modo como estendemos a função Q para todo $\mathbb{R}^2$. Como queremos aplicar métodos de minimax esta extensão deve ser feita de maneira suave. Maiores detalhes sobre as possíveis extensões podem ser encontradas na Seção 3.4.

No que segue fazemos algumas considerações sobre exemplos de funções que satisfazem as hipóteses dos Teoremas C e D. Vamos considerar alguns exemplos de [24]. Seja $2 \leq q < 2^*$ e

$$P_q(s,t) := a_1 s^q + a_2 t^q + \sum_{i=1}^{k} b_i s_i^{\alpha} t_i^{\beta},$$

onde $\alpha_i, \beta_i > 1$, $\alpha_i + \beta_i = q$ e $a_1,\ a_2,\ b_i \in \mathbb{R}$. As seguintes funções e suas possíveis combinações, com uma escolha apropriada dos coeficientes a_1, a_2, b_i, satisfazem nossas hipóteses sobre Q

$$Q(s,t) = P_q(s,t), \quad Q(s,t) = \sqrt[r]{P_{rq}(s,t)} \ \text{ e } \ Q(s,t) = \frac{P_{r+l}(s,t)}{P_l(s,t)},$$

com $l > 0$. Portanto, os termos subcríticos considerados neste trabalho são mais gerais do que aqueles de [14, 19, 20].

No Teorema D, a hipótese extra envolvendo o número $\widehat{\lambda}$ é de natureza técnica. Destacamos que ela não é necessária para o resultado de existência de solução (cf. Teorema 3.13) e é utilizada apenas na demonstração do Lema 3.21. A razão pela qual um controle desse tipo nos parece natural é que, sob as hipóteses do Teorema D, a extensão da função Q depende dos números $Q_s(0,1)$ e $Q_t(1,0)$ (cf. equação (3.7)). No entanto, na maioria dos nossos modelos, o tamanho do novo parâmetro $\widehat{\lambda}$ é controlado pelo de λ, de modo que não estamos exigindo nada além de λ, μ estarem próximos de zero. De fato, considere por exemplo

$$Q(s,t) := a_1 s^q + a_2 t^q + a_3 s t^{q-1} + a_4 s^{q-1} t,$$

com $a_3 = Q_s(0,1) > 0$ e $a_4 = Q_t(1,0) > 0$. Temos, para escolhas apropriadas dos coeficientes a_1 e a_2, que

$$\widehat{\lambda} = \max\{a_3, a_4\} \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = Q(1,1) \leq 2\lambda,$$

de modo que $\widehat{\lambda} \to 0$ sempre que $\lambda \to 0$. Na última inequação acima estamos usando uma das propriedades da função Q (cf. Lema 3.2). Outros exemplos podem ser construídos se considerarmos

$$Q_\varepsilon(s,t) = \varepsilon \sqrt[r]{P_{rq}(s,t)} \quad \text{ou} \quad Q_\varepsilon(s,t) = \varepsilon \frac{P_{r+l}(s,t)}{P_l(s,t)}.$$

Em ambos os casos temos que $\lambda \to 0$ se, e somente se, $\varepsilon \to 0$. Não é difícil provar que isso implica que $\widehat{\lambda} \to 0$.

A forma de H é mais restrita devido a hipótese (H_4). Esta condição técnica é também usada em [24] e é importante para garantir que a constante S_H definida em (1.1) não dependa de Ω. Conforme citado em [24], a condição de concavidade em (H_4) é satisfeita se $H \in C^2(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$ é tal que $H_{st}(s,t) \geq 0$ para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$. Embora tenhamos mais restrições sobre a função H ela pode ter a forma polinomial

$$H(s,t) = P_{2^*}(s,t).$$

Assim, diferentemente de [14, 19, 20], podemos considerar funções H que possuem termos acoplados e não acoplados. Por exemplo, a função

$$H(s,t) = a_1 s^{2^*} + a_2 t^{2^*} + a_3 s^\alpha t^\beta,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 1$, $\alpha + \beta = 2^*$ satisfaz as hipóteses $(H_0) - (H_4)$ para escolhas apropriadas dos coeficientes a_i. Mencionamos ainda que a condição de positividade em (H_2) pode ser satisfeita mesmo que alguns termos a_i sejam negativos. Por exemplo, suponha que H é como acima, com a_1, $a_2 \geq 0$ e $a_3 < 0$. Desde que $s^\alpha t^\beta \leq s^{2^*} + t^{2^*}$, a condição (H_2) é satisfeita para $a_3 > \max\{-a_1, -a_2\}$.

Outra observação interessante é que podemos obter versões dos nossos teoremas com as condições (Q_1) e $(\widehat{Q_1})$ alternadas para Q e H. Mais especificamente, podemos considerar as seguintes hipóteses

$(\widehat{H_1})$ $H_s(0,1) > 0$ e $H_t(1,0) > 0$.

Uma verificação simples das provas mostram que o Teorema C é válido se supormos $(\widehat{H_1})$ e (Q_1). O mesmo é verdade para o Teorema D. Este último teorema também é verdadeiro se supormos $(\widehat{H_1})$ e $(\widehat{Q_1})$. A diferença entre estas várias hipóteses reside nas possíveis formas dos termos acoplados.

Uma inspeção simples, porém um pouco mais trabalhosa, mostra que podemos considerar em $(\mathcal{P}_2)$ um termo subcrítico da forma

$$\widetilde{Q}(s,t) = \sum_{i=1}^{k} Q_i(s,t),$$

com cada Q_i sendo q_i-homogênea, $2 \leq q_i < 2^*$, e satisfazendo as mesmas hipóteses de Q. Neste caso, para cada $i = 1, \ldots, k$, definimos os números μ_i, λ_i como em (3.1)-(3.2), e os teoremas C e D são verdadeiros se $\max\{\mu_i, \lambda_i \ : \ i = 1, \ldots, k\}$ é pequeno.

O Teorema do Passo da Montanha e a Teoria de Ljusternik-Schnirelmann, como aplicadas aqui, fornecem pontos críticos não triviais. Entretanto um par (u, v) pode ser não nulo com, por exemplo, $u \geq 0$ e $v \equiv 0$, de modo que se o Princípio do Máximo é aplicado, ele garante apenas que $u > 0$, ao contrário do afirmado nos trabalhos de Ding e Xiao [9], Hsu e Lin [18]. Apresentamos na Seção 3.4 algumas condições suficientes para se obter a positividade das soluções. Dentre essas condições, destacamos o Lema 3.26 onde um argumento de comparação entre a energia das soluções do sistema e de um problema escalar associado é utilizado. Cabe enfatizar que as idéias lá apresentadas podem ser usadas para mostrar a positividade (enunciada mas não provada) das soluções nos artigos [14, 9].

O ponto de partida para o estudo do sistema $(\mathcal{P}_2)$ é a sua versão escalar

$$-\Delta u = \theta |u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u \ \text{ em } \Omega, \ \ u \in H_0^1(\Omega), \tag{1.2}$$

com $2 \leq q < 2^*$. No trabalho pioneiro de Brézis e Nirenberg [5] foi mostrado que, para $q = 2$, a existência de solução positiva está relacionado com a interação entre o parâmetro θ com o primeiro auto-valor $\theta_1(\Omega)$ do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Entre outros resultados, eles mostraram que, se $q = 2$, o problema tem pelo menos uma solução positiva para $N \geq 4$ e $0 < \theta < \theta_1(\Omega)$. Eles também obtiveram resultados para o caso $2 < q < 2^*$.

Após o trabalho de Brézis e Nirenberg, vários trabalhos com não linearidades críticas foram considerados. Com respeito a multiplicidade, Rey [30] e Lazzo [21] provaram que, para $q = 2$, o problema (1.2) tem pelo menos $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções positivas (veja também o trabalho de Benci e Cerami [4] onde o caso subcrítico foi considerado) para $\theta > 0$ suficientemente pequeno. Este resultado foi estendido para o operador p-Laplaciano e $p \leq q < p^*$ por Alves e Ding [1]. O resultado aqui apresentado pode ser visto como versões dos trabalhos de [30, 21, 1] para o caso de sistemas.

Um dos primeiros resultado para um sistema homogêneo do tipo $(\mathcal{P}_2)$ é devido a Morais Filho e Souto [24] (veja também [2]). Após esse trabalho muitos resultados relacionados com o esse sistema foram considerados (veja [12, 13, 14, 32, 20, 17, 19] e suas referências). Dentre essas referências gostaríamos de destacar o trabalho de Han [14], onde o autor considerou o caso $Q(s,t) = \alpha_1 s^2 + \alpha_2 t^2$ e $H(s,t) = s^\alpha t^\beta$ com $\alpha + \beta = 2^*$. Seu resultado foi complementado por Ishiwata em [19, 20], com diferentes classes de não-linearidades homogêneas sendo consideradas. Nosso trabalho estende e/ou complementa os resultados encontrados em [24, 2, 14, 19, 20]. Embora existam alguns resultados de multiplicidade que utilizam Teoria de Ljusternik-Schnirelmann para um sistema do tipo $(\mathcal{P}_2)$, não conhecemos nenhum artigo que trate de não linearidades tão gerais quanto as aqui consideradas.

Gostaríamos também de enfatizar que um dos pontos chaves para obtenção do resultado de multiplicidade é a aplicação do Lema 3.15, que aqui é uma versão do Lema 1.40 de [33]. Para aplicarmos este último lema na versão escalar do problema precisamos usar o fato de que $\int |u|^{2^*} = 0$ implica $u \equiv 0$. Isso nos permite usar a última asserção do Lema 1.40 de [33]. O análogo desse fato é

$$\int H(u,v) = 0 \ \Leftrightarrow \ (u,v) \equiv (0,0),$$

que não é verdade sempre, visto que as funções u e v poder ter suporte disjunto. Essa observação tem sido negligenciada em alguns trabalhos que usam versões do lema de Concentração de Compacidade para sistemas. A solução apresentada aqui é simples e está baseada no fato de podermos usar a última asserção do Lema 3.15 (bem como no Lema 1.40 de [33]) mesmo quando o par de funções limite for não nulo (veja Observação 3.16).

Capítulo

2

Soluções auto-similares para a equação do calor

Neste capítulo, estudaremos o seguinte problema

$$(\mathcal{P}_1) \qquad -\mathrm{div}(K(x)\nabla u) = \lambda K(x)|x|^{\beta}|u|^{q-2}u + K(x)|u|^{2^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\mathrm{div}(\cdot)$ é o operador divergente usual, $N \geq 3$, $2 \leq q < 2^* := 2N/(N-2)$, $\lambda > 0$ é um parâmetro, $K(x) := \exp(|x|^{\alpha}/4)$, $\alpha \geq 2$ e o número β é dado por

$$\beta := (\alpha - 2)\frac{(2^* - q)}{(2^* - 2)}.$$

No nosso primeiro resultado obtemos uma solução positiva para todo $\lambda > 0$.

Teorema A. *O problema* $(\mathcal{P}_1)$ *tem uma solução positiva em cada um dos seguintes casos*

(i) $N \geq \alpha + 2$, $2 < q < 2^*$, $\lambda > 0$;

(ii) $2 < N < \alpha + 2$, $2^* - \dfrac{4}{\alpha} < q < 2^*$, $\lambda > 0$;

(iii) $2 < N < \alpha + 2$, $2 < q \leq 2^* - \dfrac{4}{\alpha}$, $\lambda > 0$ *suficientemente grande.*

No segundo resultado, denotando por

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha) := \frac{\alpha(N - 2 + \alpha)}{4},$$

obtemos uma solução nodal para o problema, conforme o resultado abaixo.

Teorema B. *Se $q = 2$ e $N \geq \alpha + 2$, então o problema $(\mathcal{P}_1)$ tem uma solução que muda de sinal para qualquer $\lambda \geq \lambda_1$.*

Este capítulo está dividido da seguinte maneira: na Seção 2.1 montamos a estrutura variacional para o problema $(\mathcal{P}_1)$, na Seção 2.2 usamos o Teorema do Passado da Montanha para provar o Teorema A, na Seção 2.3 usamos o Teorema do Passo da Montanha Generalizado para provar o Teorema B e na última seção deste capítulo apresentamos estimativas importantes que foram utilizadas do decorrer das seções anteriores. Com relação à notação, escreveremos somente $\int u$ ao invés de $\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\mathrm{d}x$.

2.1 A estrutura variacional

Para qualquer $\alpha \geq 2$, denotemos por $H(\alpha)$ o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma

$$\|u\|_K := \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

que é induzida pelo produto interno

$$(u, v)_K := \int_{\mathbb{R}^N} K(x)(\nabla u \cdot \nabla v)\, \mathrm{d}x.$$

Vamos procurar soluções de $(\mathcal{P}_1)$ em $H(\alpha)$. Para cada $q \in [2, 2^*]$ denotaremos por $L^q(\alpha)$ o seguinte espaço

$$L^q(\alpha) := \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}; \;\; \text{mensurável e } |u|_{q,K} := \left(\int K(x)|x|^\beta |u|^q\right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Sejam S a melhor constante para imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $\theta(x) := |x|^\alpha/4$. As duas proposições a seguir fornecem imersões $H^1(\alpha) \hookrightarrow L^q(\alpha)$ quando $q = 2$ ou $q = 2^*$. As demonstrações estão em [7] e serão apresentadas aqui para a conveniência do leitor.

Proposição 2.1. *O espaço $H(\alpha)$ está continuamente imerso em $L^2(\alpha)$ e $L^{2^*}(\alpha)$.*

Demonstração. Para qualquer $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ temos que

$$\begin{aligned}
\int \left|\nabla\left(K(x)^{\frac{1}{2}} u\right)\right|^2 &= \int \left|K(x)^{\frac{1}{2}} \nabla u + \nabla\left(K(x)^{\frac{1}{2}}\right) u\right|^2 \\
&= \int K(x)\left|\nabla u\right|^2 + \int \nabla\left(K(x)^{\frac{1}{2}} u^2\right) \cdot \nabla\left(K(x)^{\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int \left|\nabla\left(K(x)^{\frac{1}{2}}u\right)\right|^2 &= \int K(x)\,|\nabla u|^2 - \int K(x)^{\frac{1}{2}}u^2\Delta\left(K(x)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \int K(x)\,|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\int K(x)\left(\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right)u^2.\end{aligned}$$

Decorre da desigualdade de Sobolev que

$$\begin{aligned}\int \left|\nabla\left(K(x)^{\frac{1}{2}}u\right)\right|^2 &\geq S\left(\int\left(K(x)^{\frac{1}{2}}\,|u|\right)^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}\\ &\geq S\left(\int K(x)\,|u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int K(x)\,|\nabla u|^2 \geq &\frac{1}{2}\int K(x)\left(\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right)u^2\\ &+ S_0\left(\int K(x)\,|u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Segue então que

$$\int K(x)|\nabla u|^2 \geq \frac{1}{2}\int K(x)\left(\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right)u^2 \tag{2.2}$$

e assim

$$\begin{aligned}\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2 &= |x|^{\alpha-2}\left(\frac{\alpha(N-2+\alpha)}{4} + \frac{\alpha^2}{32}|x|^\alpha\right)\\ &\geq \frac{\alpha(N-2+\alpha)}{4}|x|^{\alpha-2}.\end{aligned}$$

Usando agora (2.1) concluímos que

$$\int K(x)|\nabla u|^2 \geq \frac{\alpha(N-2+\alpha)}{8}\int K(x)\,|x|^{\alpha-2}\,u^2, \tag{2.3}$$

o que implica na imersão contínua de $H(\alpha)$ em $L^2(\alpha)$. Além disso

$$\int K(x)|\nabla u|^2 \geq S\left(\int K(x)\,|u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \tag{2.4}$$

e portanto $H(\alpha)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(\alpha)$. □

Proposição 2.2. *Para qualquer $\alpha \geq 2$ o espaço $H(\alpha)$ está compactamente imerso em $L^2(\alpha)$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H(\alpha)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{fracamente em } H(\alpha) \quad \text{e} \quad \|u_n\| \leq 1.$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar a definição de θ para obter $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2 = |x|^{\alpha-2}\left(\frac{\alpha(N-2+\alpha)}{4} + \frac{\alpha^2}{32}|x|^\alpha\right) \geq \frac{2}{\varepsilon}|x|^{\alpha-2}$$

para qualquer $|x| \geq R$. Portanto, decorre de (2.2), que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} K(x)|x|^{\alpha-2}u_n^2 \leq \varepsilon \int K(x)|\nabla u_n|^2 \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Por outro lado, um argumento baseado no Teorema de Rellich-Kondrachov implica que $u_n \to 0$ em $L^2(B_R(0))$. Como $K(x)|x|^{\alpha-2} \in L^\infty(B_R(0))$, então

$$\int_{B_R(0)} K(x)|x|^{\alpha-2}u_n^2 \leq \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_\varepsilon.$$

A expressão acima e (2.5) implicam que $\int K(x)|x|^{\alpha-2}u_n^2 \leq 2\varepsilon$ para $n \geq n_\varepsilon$, i.e. $u_n \to 0$ fortemente em $L^2(\alpha)$. A proposição está provada. □

Aplicando interpolação obtemos um resultado similar para $2 < q < 2^*$, conforme provado a seguir

Proposição 2.3. *Seja $\alpha \geq 2$ fixado. Então a imersão $H(\alpha) \hookrightarrow L^q(\alpha)$ é contínua para todo $q \in [2, 2^*]$ e é compacta para todo $q \in [2, 2^*)$.*

Demonstração. Seja $q \in (2, 2^*)$ fixado e $\tau := 2(2^* - q)/q(2^* - 2) \in (0, 1)$. A desigualdade de Hölder com expoentes $p = (2^* - 2)/(2^* - q)$ e $p' = (2^* - 2)/(q - 2)$ fornece

$$\begin{aligned}
\int K(x)|x|^\beta|u|^q &= \int K(x)|x|^{(\alpha-2)(2^*-q)/(2^*-2)}|u|^q \\
&= \int K(x)^{1/p}|x|^{(\alpha-2)(2^*-q)/(2^*-2)}|u|^{q\tau}K(x)^{1/p'}|u|^{(1-\tau)q} \\
&\leq \left(\int K(x)|x|^{\alpha-2}|u|^2\right)^{1/p}\left(\int K(x)|u|^{2^*}\right)^{1/p'} \\
&\leq C_q\left(\int K(x)|\nabla u|^2\right)^{1/p+2^*/(2p')} = C_q\left(\int K(x)|\nabla u|^2\right)^{q/2},
\end{aligned}$$

onde $C_q = 8^{1/p}\left(\alpha(N-2+\alpha)\right)^{-1/p} S^{-2^*/(2p')}$ e usamos (2.3), (2.4) e a definição de p.

A primeira afirmação do lema segue da inequação acima. Provaremos agora a segunda parte. Seja $q \in (2, 2^*)$, $\sigma \in (0, 1)$ tal que $1/q = \sigma/2 + (1-\sigma)/2^*$. Argumentando como na inequação acima obtemos

$$|u|_{q,K} \le |u|_{2,K}^{\sigma} |u|_{2^*,K}^{1-\sigma}, \quad \text{para todo } u \in L^2(\alpha) \cap L^{2^*}(\alpha).$$

Como a imersão $H^1(\alpha) \hookrightarrow L^2(\alpha)$ é compacta, segue da inequação acima e (2.4) que $H^1(\alpha)$ está imerso compactamente em $L^q(\alpha)$. Isto finaliza a prova. $\square$

Consideremos o seguinte problema

$$(\mathcal{LP}) \qquad -\mathrm{div}(K(x)\nabla u) = \lambda K(x)|x|^{\alpha-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Se denotarmos por $(x, y) := \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ o produto escalar de x, $y \in \mathbb{R}^N$, podemos facilmente checar que o problema $(\mathcal{LP})$ é equivalente a

$$-\Delta u - \frac{\alpha}{4}(x, \nabla u)|x|^{\alpha-2} = \lambda u|x|^{\alpha-2}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

A compacidade da imersão $H^1(\alpha) \hookrightarrow L^2(\alpha)$ e a teoria espectral de operadores compactos, fornece uma sequência de auto-valores positivos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

No que segue provamos uma propriedade de decaimento para as autofunções do problema $(\mathcal{LP})$.

Lema 2.4. *Se $u \in H(\alpha)$ satisfaz $(\mathcal{LP})$, então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e existe $C > 0$ tal que*

$$|u(x)| \le Ce^{-\frac{1}{8}|x|^{\alpha}}, \quad \textit{para cada } x \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Seja $w := \exp(|x|^{\alpha}/8)u = K(x)^{1/2}u$. Como u é solução de $(\mathcal{LP})$ podemos usar o teorema de Brezis-Kato e um argumento do tipo boot-strap para concluir que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto, w é também regular e podemos verificar que

$$\Delta w = K(x)^{1/2}\Big(\frac{\alpha^2}{64}|x|^{2\alpha-2}u + \frac{\alpha}{4}|x|^{\alpha-2}(x, \nabla u) + \frac{\alpha}{8}N|x|^{\alpha-2}u + \frac{\alpha}{8}(\alpha-2)|x|^{\alpha-2}u + \Delta u\Big).$$

Lembrando que u satisfaz (2.6) e $\lambda_1 = \frac{\alpha}{4}(N + \alpha - 2)$ obtemos

$$\Delta w = \left(\frac{\alpha^2}{64}|x|^{\alpha} - \lambda + \frac{\lambda_1}{2}\right)|x|^{\alpha-2}w. \tag{2.7}$$

Como $u \in H(\alpha)$ temos que $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Além do mais,

$$\int |\nabla w|^2 \leq c_1 \int K(x)|x|^{2\alpha-2}u^2 + c_1 \int K(x)|\nabla u|^2. \tag{2.8}$$

Como $\theta(x) := \frac{1}{4}|x|^\alpha$, podemos proceder como na prova da Proposição 2.1 para obter

$$\int K(x)|\nabla u|^2 \quad \geq \quad \frac{1}{2}\int K(x)\left(\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right)u^2 \geq \frac{\alpha^2}{64}\int K(x)|x|^{2\alpha-2}u^2.$$

Isto, (2.8) e $u \in H(\alpha)$ implicam que $\int |\nabla w|^2$ é finito, de modo que $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja $R > 0$ tal que

$$\frac{\alpha^2}{64}|x|^\alpha - \lambda + \frac{\lambda_1}{2} > 0, \quad \text{para cada } |x| \geq R$$

e $M = M(R) := \sup\{w(x) : x \in B_R(0)\}$. Suponha que $M > 0$. Se tomarmos $\varphi = (w - M)^+$ como uma função teste na formulação variacional de (2.7) obtemos

$$\int_{B_R(0)^c} |\nabla\varphi|^2 = -\int_{B_R(0)^c}\left(\frac{\alpha^2}{64}|x|^\alpha - \lambda + \frac{\lambda_1}{2}\right)|x|^{\alpha-2}w\varphi \leq 0,$$

donde concluímos que $\varphi \equiv 0$, ou equivalentemente, $w(x) \leq M$ em $\mathbb{R}^N$. Se $M \leq 0$ para qualquer $R > 0$ então $w \leq 0$, e também obtemos um limite superior para w.

Como $-w$ também satisfaz (2.7) podemos proceder como acima para obter um limite superior para $-w$. Assim

$$|w(x)| \leq C := \sup_{x \in B_R(0)} |w(x)|,$$

para alguma bola $B_R(0)$ de raio grande. O resultado decorre da definição de w. $\square$

Como o problema $(\mathcal{P}_1)$ tem uma estrutura variacional podemos considerar o funcional $I : H(\alpha) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int K(x)|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{q}\int K(x)|x|^\beta(u^+)^q - \frac{1}{2^*}\int K(x)(u^+)^{2^*}.$$

Usando a Proposição 2.3 pode-se mostrar que $I \in C^1(H(\alpha), \mathbb{R})$ e a derivada de I no ponto u é dada por

$$I'(u)v = \int K(x)\nabla u \cdot \nabla v - \lambda\int K(x)|x|^\beta(u^+)^{q-1}v - \int K(x)(u^+)^{2^*-1}v, \tag{2.9}$$

para qualquer $v \in H(\alpha)$. Assim, os pontos críticos de I são precisamente as soluções fracas e não negativas da equação $(\mathcal{P}_1)$.

Seja E um espaço de Banach e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que $(z_n) \subset E$ é uma sequência de Palais-Smale no nível d (abreviadamente, uma sequência $(PS)_d$) se $J(z_n) \to d$ e $J'(z_n) \to 0$. Dizemos que J satisfaz $(PS)_d$, se toda sequência $(\mathrm{PS})_d$ possui uma subsequência convergente.

A seguir localizaremos os níveis para os quais temos a validade da condição de Palais-Smale.

Lema 2.5. *Suponha que $(u_n) \subset H(\alpha)$ satisfaz*

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = d < \frac{1}{N} S^{N/2} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} I'(u_n) = 0. \tag{2.10}$$

Então (u_n) é limitada e, a menos de uma subsequência, (u_n) converge fracamente para uma solução não trivial do problema $(\mathcal{P}_1)$.

Demonstração. Em vista de (2.10) temos que

$$\begin{aligned} d + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_K &\geq I(u_n) - \frac{1}{q} I'(u_n)u_n \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|_K^2 + c_1\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right)\|u_n^+\|_K^{2^*}. \end{aligned}$$

Assim (u_n) é limitada e, a menos de subsequência, temos que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H(\alpha)$. Como $H(\alpha) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ então $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. A convergência local implica em convergência pontual de $u_n(x)$ para $u(x)$, como

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\right)^+ = \lim_{n\to+\infty} u_n^+(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

então $u_n^+ \rightharpoonup u^+$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Segue da teoria da medida que

$$u_n^+ \to u^+ \ em \ L^{2^*-1}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ fixada, com suporte A, existe $f \in L^1(A)$ tal que $|\phi(u_n^+)^{2^*-1}| \leq f$. Logo

$$|K(u_n^+)^{2^*-1}\phi| \leq Kf \in L^1(A).$$

Segue então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int K(u_n)^{2^*-1}\phi = \int K(u^+)^{2^*-1}\phi + o_n(1).$$

Como a imersão $H(\alpha) \hookrightarrow L^q(\alpha)$ é compacta, então

$$\int K|x|^\beta (u_n^+)^{q-1}\phi = \int K|x|^\beta (u^+)^{q-1}\phi + o_n(1).$$

Segue de (2.9), das duas últimas equações e da convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em $H(\alpha)$ que $I'(u)\phi = 0$. Como ϕ é arbitrária, por densidade, concluímos que $I'(u) = 0$ em $H(\alpha)$.

Agora provaremos que $u \neq 0$. Suponhamos, por contradição, que $u = 0$. Como a imersão $H(\alpha) \hookrightarrow L^q(\alpha)$ é compacta, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int K(x)|x|^\beta (u_n^+)^q = 0. \tag{2.11}$$

Assim, lembrando que $I(u_n) \to d$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int K(x)|\nabla u_n|^2 - \frac{1}{2^*}\int K(x)(u_n^+)^{2^*} = d + o(1). \tag{2.12}$$

Além do mais, como (u_n) é limitada e $I'(u_n) \to 0$, temos que $I'(u_n)u_n \to 0$. Isto e (2.11) implicam que

$$\int K(x)|\nabla u_n|^2 - \int K(x)(u_n^+)^{2^*} = o(1).$$

Se $l \geq 0$ é tal que $\int K(x)|\nabla u_n|^2 \to l$, segue da equação acima que $\int K(x)(u_n^+)^{2^*} \to l$. Portanto, podemos concluir de (2.12) que

$$d = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) l = \frac{l}{N}. \tag{2.13}$$

Por outro lado, a inequação (2.4) implica que

$$S\left(\int K(x)(u_n^+)^{2^*}\right)^{2/2^*} \leq \int K(x)|\nabla u_n|^2.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos $Sl^{2/2^*} \leq l$. Combinando esta inequação com (2.13) concluímos que $d \geq \frac{1}{N}S^{N/2}$, o que contradiz nossa hipótese. Logo, $u \neq 0$ e o lema está provado. $\square$

2.2 Soluções positivas para $2 < q < 2^*$

Nesta seção usamos o Teorema do Passo da Montanha para obter uma solução positiva de $(\mathcal{P}_1)$ quando $2 < q < 2^*$. Começaremos apresentando uma consequência simples dos resultados de imersão da seção anterior.

Lema 2.6. *Existem $\rho, \sigma > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \sigma$. Além do mais, existe $e \in H(\alpha)$ tal que $\|e\|_K \geq \rho$ e $I(e) < 0$.*

Demonstração. Usando a Proposição 2.3 obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_K^2 - \frac{\lambda}{q}|u^+|_{q,K}^q - \frac{1}{2^*}|u^+|_{2^*,K}^{2^*} \\ &\geq \|u\|_K^2 \left(\frac{1}{2} - c_1\|u\|_K^{q-2} - c_2\|u\|_K^{2^*-2}\right) \geq \sigma > 0, \end{aligned}$$

para qualquer $u \in H(\alpha)$ tal que $\|u\|_K = \rho$, com $\rho > 0$ suficientemente pequeno. Além do mais, para qualquer $u \in H^1(\alpha) \setminus \{0\}$, temos $\lim_{t\to\infty} I(tu) = -\infty$. Portanto, basta considerar $e := tu$, para $t > 0$ suficientemente grande, de modo que obtemos $\|e\|_K \geq \rho$ e $I(e) < 0$. □

Definimos

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H(\alpha)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Decorre do Teorema do Passo da Montanha que existe uma sequência de Palais-Smale no nível c. Segue do Lema 2.5 que podemos obter uma solução não trivial de $(\mathcal{P}_1)$ desde que

$$c < \frac{1}{N}S^{N/2}.$$

Dedicaremos o restante desta seção para mostrar que, sob as hipóteses do Teorema A, a inequação acima é satisfeita. Inicialmente notamos que, argumentando como em [33, Teorema 4.2], podemos provar a seguinte caracterização do nível minimax do Teorema do Passo da Montanha.

$$c = \inf_{u\in H(\alpha)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I(tu). \tag{2.14}$$

Portanto, é suficiente provar que

Proposição 2.7. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema A, existe* $v \in H(\alpha)/\{0\}$ *tal que*

$$\sup_{t\geq 0} I(tv) < \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

Demonstração. Faremos uma adaptação dos argumentos e cálculos feitos em [7] (veja também [5]). Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\varphi \equiv 1$ sobre $B_1(0)$ e $\varphi \equiv 0$ fora de $B_2(0)$. Dado $\varepsilon > 0$, definimos

$$u_\varepsilon := K(x)^{-1/2}\varphi(x)\left(\frac{1}{\varepsilon + |x|^2}\right)^{(N-2)/2}$$

e

$$v_\varepsilon := \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|_{2^*,K}}.$$

A função $h(t) := I(tv_\varepsilon)$, $t \geq 0$, é da forma $At^2 - Bt^q - Ct^{2^*}$, com A, B e C positivos. Como $q > 2$ e

$$h'(t) = t(2A - qBt^{q-2} - 2^*Ct^{2^*-2}),$$

segue do fato da função $t \mapsto qBt^{q-2} + 2^*Ct^{2^*-2}$ para $t > 0$ ser estritamente crescente, que existe um único $t > 0$ tal que $h'(t) = 0$. Assim h tem um único ponto de máximo, que denotaremos por $t_\varepsilon > 0$. Como $h'(t_\varepsilon) = 0$ e $\lambda > 0$, obtemos

$$\|v_\varepsilon\|_K^2 = t_\varepsilon^{2^*-2} + \lambda t_\varepsilon^{q-2}|v_\varepsilon|_{q,K}^q \geq t_\varepsilon^{2^*-2},$$

ou equivalentemente,

$$\widehat{t} := \|v_\varepsilon\|_K^{2/(2^*-2)} \geq t_\varepsilon.$$

Seja $g(t) := (1/2)t^2\widehat{t}^{2^*-2} - (1/2^*)t^{2^*}$. Uma vez que $g'(t) = t(\widehat{t}^{2^*-2} - t^{2^*-2})$ segue que g é crescente em $[0, \widehat{t}]$. Como $|v_\varepsilon|_{2^*,K} = 1$ então

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) &= g(t_\varepsilon) - \frac{t_\varepsilon^q}{q}\lambda|v_\varepsilon|_{q,K}^q \\ &\leq g(\widehat{t}) - \frac{t_\varepsilon^q}{q}\lambda|v_\varepsilon|_{q,K}^q = \frac{1}{N}\left(\|v_\varepsilon\|_K^2\right)^{N/2} - \frac{t_\varepsilon^q}{q}\lambda|v_\varepsilon|_{q,K}^q. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Consideraremos vários casos, dependendo dos valores de N e α.

Caso 1. $N > \alpha + 2$

Neste caso, de acordo com as estimativas (2.46), (2.47) e (2.48) do Apêndice deste capítulo, temos que

$$Q_0(u_\varepsilon) = \|v_\varepsilon\|_K^2 = \begin{cases} S + O(\varepsilon^{\alpha/2}) + O(\varepsilon^{\alpha}) + O(\varepsilon^{N/2-1}), & \text{se } N > 2\alpha + 2, \\ S + O(\varepsilon^{\alpha/2}) + O(\varepsilon^{\alpha}|\log \varepsilon|) + O(\varepsilon^{N/2-1}), & \text{se } N = 2\alpha + 2, \\ S + O(\varepsilon^{\alpha/2}) + O(\varepsilon^{N/2-1}), & \text{se } \alpha + 2 < N < 2\alpha + 2, \end{cases}$$

onde $f(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\delta})$ significa que $\limsup_{\varepsilon \to 0^+} f(\varepsilon)/\varepsilon^{\delta}$ é finito. Como $N > \alpha + 2$ então $\alpha/2 < N/2 - 1$. Além do mais, lembrando que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{\alpha/2}|\log \varepsilon| = 0$, podemos inferir da estimativa acima que

$$\|v_\varepsilon\|_K^2 = S + O(\varepsilon^{\alpha/2}). \tag{2.16}$$

Afirmamos que $t_\varepsilon^q \geq qC_0 > 0$ para algum $C_0 > 0$ e qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno. De fato, suponha por contradição que para alguma sequência $\varepsilon_n \to 0^+$ tenhamos $t_{\varepsilon_n} \to 0$. Então decorre de (2.16) que $t_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n} \to 0$ em $H^1(\alpha)$. Assim, podemos usar (2.14) e a continuidade de I para obter

$$0 < c \leq \sup_{t \geq 0} I(tv_{\varepsilon_n}) = I(t_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}) \to I(0) = 0,$$

que é uma contradição.

Segue do Teorema do Valor Médio que existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \left(S + O(\varepsilon^{\alpha/2})\right)^{N/2} &= S^{N/2} + \tfrac{N}{2}(S + \delta O(\varepsilon^{\alpha/2}))^{N/2-1} O(\varepsilon^{\alpha/2}) \\ &= S^{N/2} + O(\varepsilon^{\alpha/2}). \end{aligned}$$

Assim podemos usar (2.15), (2.16), a igualdade acima e a última afirmação para obter

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N}\left(S + O(\varepsilon^{\alpha/2})\right)^{N/2} - \frac{t_\varepsilon^q}{q}\lambda |v_\varepsilon|_{q,K}^q \\ &\leq \frac{1}{N} S^{N/2} + O(\varepsilon^{\alpha/2}) - C_0 \lambda |v_\varepsilon|_{q,K}^q \\ &= \frac{1}{N} S^{N/2} + \varepsilon^{\alpha/2}\left(O(1) - \lambda C_0 \frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2}} |v_\varepsilon|_{q,K}^q\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Logo, para provarmos o lema nesse primeiro caso, basta mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2}} |v_\varepsilon|_{q,K}^q = +\infty.$$

Primeiramente estimaremos $|v_\varepsilon|_{q,K}$. Lembremos que

$$\begin{aligned}\int \frac{|x|^\beta}{(1+|x|^2)^{q(N-2)/2}} &= \left(\int_{B_1(0)} + \int_{B_1(0)^c}\right) \\ &\leq c_1 + \int_{B_1(0)^c} |x|^{\beta-q(N-2)}\mathrm{d}x < \infty\end{aligned} \tag{2.18}$$

sempre que $\beta - q(N-2) - N < 0$. Consideraremos a seguinte função linear

$$r(q) := q(N-2) - \beta - N.$$

Como $N - 2 - \alpha = r(2) < r(2^*)$ segue que

$$\int \frac{|x|^\beta}{(1+|x|^2)^{q(N-2)/2}} < \infty \qquad (\text{para } N \geq \alpha + 2). \tag{2.19}$$

Sendo $q > 2$, temos que $0 < c_2 < K(x)^{1-q/2}$ quando $|x| \leq 2$. Assim , como $\varphi \equiv 0$ em $B_2(0)^c$, obtemos

$$|u_\varepsilon|_{q,K}^q = \int \frac{\left(K(x)^{1-q/2}\varphi^q\right)|x|^\beta}{(\varepsilon+|x|^2)^{q(N-2)/2}} \geq c_2 \int \frac{\varphi^q|x|^\beta}{(\varepsilon+|x|^2)^{q(N-2)/2}}. \tag{2.20}$$

Por outro lado, usando novamente a definição de φ, obtemos

$$\begin{aligned}\int \frac{\varphi^q|x|^\beta}{(\varepsilon+|x|^2)^{q(N-2)/2}} &= \int_{B_2(0)} \frac{|x|^\beta}{(\varepsilon+|x|^2)^{q(N-2)/2}} + \int_{B_2(0)} \frac{(\varphi^q-1)|x|^\beta}{(\varepsilon+|x|^2)^{q(N-2)/2}} \\ &= \int_{B_2(0)} \frac{|x|^\beta}{(\varepsilon+|x|^2)^{q(N-2)/2}} + O(1).\end{aligned}$$

Portanto, podemos usar a mudança de variável $x \mapsto x/\sqrt{\varepsilon}$ para obter

$$\int \frac{\varphi^q|x|^\beta}{(\varepsilon+|x|^2)^{q(N-2)/2}} = \varepsilon^{\beta/2+N/2-q(N-2)/2} \int_{B_{2/\sqrt{\varepsilon}}(0)} \frac{|x|^\beta}{(1+|x|^2)^{q(N-2)/2}}\mathrm{d}x + O(1).$$

Segue de (2.19) e do Teorema da Convergência Dominada que a integral do lado direito é convergente quando $\varepsilon \to 0^+$. Portanto, podemos usar (2.20) para deduzir que

$$|u_\varepsilon|_{q,K}^q \geq O(\varepsilon^{\beta/2+N/2-q(N-2)/2}) + O(1). \tag{2.21}$$

Segue de (2.44) que

$$|u_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*} = \int K(x)|u_\varepsilon|^{2^*} = \varepsilon^{-N/2}A_0 + O(1) \qquad \text{(para } N > 2), \tag{2.22}$$

onde

$$A_0 := \int \frac{1}{(1+|x|^2)^N} \qquad \text{(para } N > 2). \tag{2.23}$$

Logo concluímos que

$$|u_\varepsilon|_{2^*,K}^{q} = O(\varepsilon^{-q(N-2)/4}) + O(1) \qquad \text{(para } N > 2).$$

Isto e (2.21) implicam que

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon|_{q,K}^q = \frac{|u_\varepsilon|_{q,K}^q}{|u_\varepsilon|_{2^*,K}^q} &\geq \frac{O(\varepsilon^{\beta/2+N/2-q(N-2)/2}) + O(1)}{O(\varepsilon^{-q(N-2)/4}) + O(1)} \\ &= \frac{O(\varepsilon^{\beta/2+N/2-q(N-2)/4}) + O(\varepsilon^{q(N-2)/4})}{O(1) + O(\varepsilon^{q(N-2)/4})}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

e portanto

$$\frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2}}|v_\varepsilon|_{q,K}^q \geq \frac{O(\varepsilon^{s(q)}) + O(\varepsilon^{t(q)})}{O(1) + O(\varepsilon^{q(N-2)/4})}, \tag{2.25}$$

onde $s(q)$ e $t(q)$ são funções afins dadas pelas seguintes expressões

$$s(q) := \frac{\beta}{2} + \frac{N}{2} - \frac{q(N-2)}{4} - \frac{\alpha}{2}, \qquad t(q) := \frac{q(N-2)}{4} - \frac{\alpha}{2}. \tag{2.26}$$

Como $0 = s(2) > s(2^*) = -\alpha/2$ e $2 < q < 2^*$ concluímos que $s(q) < 0$. Além do mais, se $N \geq \alpha + 2$, temos que $0 \leq (N-2-\alpha)/2 = t(2) < t(q)$, e assim $t(q) > 0$ para qualquer $2 < q < 2^*$. Desse modo, podemos tomar o limite em (2.25) para concluir que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2}}|v_\varepsilon|_{q,K}^q = +\infty \qquad \text{(para } N \geq \alpha + 2).$$

Isto prova o lema no caso 1.

Caso 2. $N = \alpha + 2$

Nessa situação, segue de (2.49) e (2.40) que

$$\|u_\varepsilon\|_K^2 = \int K(x)|\nabla u_\varepsilon|^2 = \varepsilon^{1-N/2}A_1 + c_3|\log \varepsilon| + O(1),$$

com

$$A_1 := (N-2)^2 \int \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N} \qquad \text{(para } N > 2\text{).} \tag{2.27}$$

Assim, podemos usar (2.22) e (2.23) para obter

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_K^2 &= \frac{\|u_\varepsilon\|_K^2}{|u_\varepsilon|_{2^*,K}^2} = \frac{\varepsilon^{1-N/2}A_1 + c_1|\log\varepsilon| + O(1)}{\varepsilon^{1-N/2}A_0^{1-2/N} + O(\varepsilon)} \\ &= \frac{A_1A_0^{-1+2/N} + c_1\varepsilon^{N/2-1}|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^{-1+N/2})}{1+O(\varepsilon^{N/2})}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Para qualquer $0 < \delta < \alpha/2$, temos que

$$\varepsilon^{-1+N/2}|\log\varepsilon| = \varepsilon^{-1+N/2-\delta}\varepsilon^{\delta}|\log\varepsilon| = O(\varepsilon^{-1+N/2-\delta}).$$

Além do mais, conforme provado no artigo de Brézis-Nirenberg [5, pg. 444], temos que

$$A_1A_0^{-1+2/N} = S.$$

Portanto, como $-1+N/2 = \alpha/2$, obtemos

$$\|v_\varepsilon\|_K^2 = S + O(\varepsilon^{-1+N/2-\delta}) = S + O(\varepsilon^{\alpha/2-\delta}).$$

Isto fornece um limite inferior positivo para o valores t_ε e portanto podemos argumentar como em (2.17) para obter

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \le \frac{1}{N}S^{N/2} + \varepsilon^{\alpha/2-\delta}\left(O(1) - \lambda C_0\frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2-\delta}}|v_\varepsilon|_{q,K}^q\right).$$

Como no Caso 1, obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2-\delta}}|v_\varepsilon|_{q,K}^q \ge \frac{O(\varepsilon^{s(q)+\delta}) + O(\varepsilon^{t(q)+\delta})}{O(1)+O(\varepsilon^{q(N-2)/4})},$$

onde $s(q)$ e $t(q)$ são dados em (2.26). Como $s(q) < 0$ então podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $s(q)+\delta < 0$. Assim, recordando que $0 = t(2) < t(q)$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2-\delta}}|v_\varepsilon|_{q,K}^q = +\infty \qquad \text{(para } N = \alpha+2\text{),}$$

e portanto $I(t_\varepsilon v_\varepsilon) < \frac{1}{N}S^{N/2}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Caso 3. $2 < N < \alpha+2$ e $2^* - 4/\alpha < q < 2^*$.

Como $\int_{B_1(0)} |x|^\gamma < \infty$, desde que $\gamma + N > 0$, então

$$\begin{aligned}
\int \frac{\varphi^2|x|^\alpha}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} &\leq \int_{B_1(0)} \frac{|x|^\alpha}{|x|^{2(N-1)}} + \int_{B_2(0)-B_1(0)} \frac{\varphi^2|x|^\alpha}{|x|^{2(N-1)}} \\
&= \int_{B_1(0)} |x|^{\alpha-2(N-1)} + \int_{B_2(0)-B_1(0)} \frac{\varphi^2|x|^\alpha}{|x|^{2N-1}} < \infty.
\end{aligned}$$

De maneira análoga $\displaystyle\int \frac{\varphi^2|x|^{2(\alpha-1)}}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} < \infty$. Portanto, segue da equação (2.41) do Apêndice que

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_K^2 &= \varepsilon^{1-N/2}A_1 + c_4\int \frac{\varphi^2|x|^\alpha}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} + c_5\int \frac{\varphi^2|x|^{2(\alpha-1)}}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} + O(1) \\
&= \varepsilon^{1-N/2}A_1 + O(1),
\end{aligned}$$

onde A_1 está definida em (2.27). Portanto, podemos proceder como em (2.28) para obter

$$\|v_\varepsilon\|_K^2 = \frac{\|u_\varepsilon\|_K^2}{|u_\varepsilon|_{2^*,K}^2} = \frac{\varepsilon^{1-N/2}A_1 + O(1)}{\varepsilon^{1-N/2}A_0^{1-2/N} + O(\varepsilon)} = S + O(\varepsilon^{-1+N/2}).$$

Assim, t_ε tem um limite inferior positivo e podemos argumentar como em (2.17) e obter

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}S^{N/2} + \varepsilon^{-1+N/2}\left(O(1) - \lambda C_0 \frac{1}{\varepsilon^{-1+N/2}}|v_\varepsilon|_{q,K}^q\right).$$

Relembramos que (2.18) é válida se $\beta - q(N-2) - N < 0$. Ao substituir o valor de β nesta última inequação vemos que ela permanece válida se, e somente se,

$$q > q_1 := \frac{2^*(\alpha-2) + N(2^*-2)}{(N-2)(2^*-2) + (\alpha-2)} = \frac{2^*\alpha}{\alpha+2}.$$

Um cálculo simples mostra que $2 < q_1 < 2^*$ se, e somente se, $N < \alpha + 2$. Portanto, estamos nas hipóteses do Caso 3 e assim a expressão em (2.24) também ocorre. Logo,

$$\frac{1}{\varepsilon^{-1+N/2}}|v_\varepsilon|_{q,K}^q \geq \frac{O(\varepsilon^{\widehat{s}(q)}) + O(\varepsilon^{\widehat{t}(q)})}{O(1) + O(\varepsilon^{q(N-2)/4})}$$

onde $\widehat{s}(q)$ e $\widehat{t}(q)$ são funções lineares dadas por

$$\widehat{s}(q) := \frac{\beta}{2} - \frac{q(N-2)}{4} + 1, \qquad \widehat{t}(q) := \frac{q(N-2)}{4} + 1 - \frac{N}{2}.$$

Como $\widehat{t}(2) = 0$, temos que $\widehat{t}(q) > 0$ para qualquer $q > 2$. Um cálculo direto mostra que $\widehat{s}(q) < 0$ se, e somente se,

$$q > q_2 := \frac{2^*\alpha - 4}{\alpha} = 2^* - \frac{4}{\alpha}.$$

Decorre de $N < \alpha + 2$ que $q_1 < q_2$. Portanto, para qualquer $2^* - 4/\alpha < q < 2^*$, temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{1+N/2}} |v_\varepsilon|_{q,K}^q = +\infty$$

e a proposição é verdadeira, como no Caso 1.

Caso 4. $2 < N < \alpha + 2$, $2 < q \leq 2^* - 4/\alpha$ e λ grande.

Neste caso a prova é mais simples pois podemos tomar valores grandes para λ. Mais especificamente, seja $v \in H(\alpha)$ satisfazendo $|v|_{2^*,K} = 1$ e considere $t_\lambda > 0$ tal que $I_\lambda(t_\lambda v) = \sup_{t \geq 0} I_\lambda(tv)$, isto é,

$$\|v\|_K^2 - \lambda t_\lambda^{q-2} |v|_{q,K}^q = t_\lambda^{2^*-2}.$$

A expressão acima implica que $(t_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ é limitada. Se $\limsup_{\lambda \to \infty} t_\lambda = t_0 > 0$, a inequação acima implicaria que $v = 0$, o que é uma contradição. Portando, $\lim_{\lambda \to \infty} t_\lambda = 0$. Assim,

$$\sup_{t \geq 0} I_\lambda(tv) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t_\lambda^2 \|v\|_K^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right) t_\lambda^{2^*},$$

e portanto,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{t \geq 0} I_\lambda(tv) = 0$$

Logo, existe $\lambda^* > 0$ tal que, para qualquer $\lambda \geq \lambda^*$, existe v que satisfaz a Proposição 2.7. Isto finaliza a prova. $\square$

2.3 Soluções que mudam de sinal para $q = 2$

Nesta seção provaremos o Teorema B aplicando a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha (cf. [31, pg.28])

Teorema 2.8. *Seja E um espaço de Banach real com $E = Y \oplus Z$ e $\dim Y < \infty$. Suponha que $\mathcal{J} \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz*

(I_1) *existem ρ, $\sigma > 0$ tais que $\mathcal{J}|_{\partial B_\rho(0) \cap Z} \geq \sigma$;*

(I_2) *existem* $e \in \partial B_1(0) \cap Z$ *e* $R > \rho$ *tais que,*

$$\mathcal{J}|_{\partial Q} \leq 0,$$

com

$$Q := (\overline{B_R(0)} \cap Y) \oplus \{te : 0 < t < R\}.$$

Se definirmos

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} \mathcal{J}(\gamma(u))$$

onde

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C(\overline{Q}, E) : \gamma \equiv \mathrm{Id} \textit{ sobre } \partial Q\right\},$$

então existe uma sequência $(u_n) \subset E$ *tal que* $\mathcal{J}(u_n) \to c$ *e* $\mathcal{J}'(u_n) \to 0$.

Sejam $\lambda > 0$ tal que $\lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1}$ e Y_j o autoespaço associado ao autovalor λ_j. Defina

$$Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n, \quad Z = Y^{\perp},$$

de tal forma que $H^1(\alpha) = Y \oplus Z$. Segue da teoria spectral para operadores compactos, que

$$\lambda_{n+1} = \inf\left\{\frac{\|w\|_K^2}{|w|_{2,K}^2} \mid w \in Z/\{0\}\right\}. \tag{2.29}$$

Para a prova do Teorema A consideramos o funcional energia com parte positiva nas integrais com potência crítica e subcrítica, como não esperamos por soluções positivas, é natural que consideremos o funcional energia definido por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int K(x)|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{q}\int K(x)|x|^{\beta}|u|^q - \frac{1}{2^*}\int K(x)|u|^{2^*}.$$

A próxima proposição é o ponto chave para prova do Teorema B.

Proposição 2.9. *Se* $N \geq \alpha + 2$ *e* $\lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1}$*, então existe* $z \in Z \setminus \{0\}$ *tal que*

$$\max_{u \in Y + \mathbb{R}z} I(u) < \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

A prova desta proposição é bastante longa e técnica. Antes de apresentá-la, veremos como usá-la para obter uma solução nodal para $(\mathcal{P}_1)$.

Prova do Teorema B. Sejam Y e Z definidos acima. Segue de (2.29) que, para todo $u \in Z$

$$I(u) \geq \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda}{2}\right) \|u\|_K^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*,K}^{2^*},$$

e assim podemos argumentar como na prova do Lema 2.6 para concluir que I satisfaz a condição (I_1) do resultado abstrato anterior.

Também temos que

$$I(u) \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda}{2}\right) \|u\|_K^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*,K}^{2^*} \leq 0, \quad \forall\, u \in Y.$$

Além do mais, se $z \in Z \setminus \{0\}$ é dado pela Proposição 2.9, como $Y \oplus \mathbb{R}z$ tem dimensão finita, todas as normas são equivalentes. Assim existem $c_2 > 0$ e $c_{2^*} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_K^2 - \frac{\lambda}{q}|u|_{2,K}^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*,K}^{2^*} \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|_K^2 - \frac{\lambda}{q}c_2\|u\|_K^2 - \frac{c_{2^*}}{2^*}\|u\|_K^{2^*} \end{aligned}$$

e portanto

$$I(u) \to -\infty \quad \text{quando} \quad \|u\|_K \to \infty, \quad u \in Y \oplus \mathbb{R}z.$$

Segue então que a condição condição (I_2) é satisfeita para $R > 0$ suficientemente grande.

Aplicando o Teorema 2.8 e a Proposição 2.9 obtemos $(u_n) \subset H^1(\alpha)$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c < \frac{1}{N}S^{N/2} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} I'(u_n) = 0.$$

Decorre do Lema 2.5 que, a menos de subsequência, (u_n) converge fracamente para uma solução não trivial de $(\mathcal{P}_1)$. Como este problema não tem solução positiva para $\lambda \geq \lambda_1$ (cf. [7, pg.1158 Teorema 1.2]), concluímos que esta solução muda de sinal em $\mathbb{R}^N$. □

Resta provar a Proposição 2.9. Primeiro vamos introduzir algumas notações que serão úteis. Para todo par $u, v \in H^1(\alpha)$ denotaremos por

$$(u,v)_K := \int K(x)\nabla u \cdot \nabla v, \qquad (u,v)_{2,K} := \int K(x)|x|^{\alpha-2}uv,$$

o produto interno em $H^1(\alpha)$ e $L^2(\alpha)$, respectivamente.

Dividiremos a prova em dois caso distintos relacionados com o fato de λ ser ou não um autovalor. Começaremos com o caso $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$. Dado $\varepsilon > 0$ e φ definida na

Proposição 2.7, definimos

$$w_\varepsilon := \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} u_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} K(x)^{-1/2}\varphi(x)\left(\frac{1}{\varepsilon+|x|^2}\right)^{(N-2)/2},$$

e

$$z_\varepsilon := w_\varepsilon - \sum_{i=1}^{n}(w_\varepsilon,\varphi_i)_K\varphi_i,$$

onde $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é a sequência de autofunções do problema linear $(\mathcal{LP})$ associados aos autovalores (2.29).

Provaremos que a Proposição 2.9 é verdadeira para $z = z_\varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Como o máximo de $f(t) = \frac{A}{2}t^2 - \frac{B}{2}t^2 - \frac{C}{2^*}t^{2^*}$ é atingido em t_0 tal que $f'(t_0) = t(A - B - Ct^{2^*-2}) = 0$ então

$$t_0 = \left(\frac{A-B}{C}\right)^{1/(2^*-2)} = \left(\frac{A-B}{C}\right)^{(N-2)/4}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\max\{f(t) \mid t > 0\} &= f(t_0)\\
&= \frac{A}{2}\left(\frac{A-B}{C}\right)^{(N-2)/2} - \frac{B}{2}\left(\tfrac{A-B}{C}\right)^{(N-2)/2} - \frac{C}{2^*}\left(\frac{A-B}{C}\right)^{N/2}\\
&= \frac{1}{N}\frac{(A-B)^{N/2}}{C^{(N-2)/2}}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\max_{t\geq 0} I(tu) = \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_K^2 - \lambda|u|_{2,K}^2}{|u|_{2^*,K}^2}\right)^{N/2}, \quad \forall\, u \in H^1(\alpha)\setminus\{0\}.$$

Como $Y \oplus \mathbb{R}z_\varepsilon = Y \oplus \mathbb{R}w_\varepsilon$ é suficiente verificar que

$$m_\varepsilon := \max_{u\in\Sigma_\varepsilon}\left(\|u\|_K^2 - \lambda|u|_{2,K}^2\right) < S, \tag{2.30}$$

onde

$$\Sigma_\varepsilon := \{u = y + tw_\varepsilon : y \in Y,\, t \in \mathbb{R},\, |u|_{2^*,K} = 1\}.$$

Lema 2.10. *Quando $\varepsilon \to 0^+$, as seguinte estimativas são verdadeiras*

$$\int K(x)|w_\varepsilon|^{2^*-1} = O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}), \qquad |w_\varepsilon|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}), \tag{2.31}$$

$$\max\{(y,w_\varepsilon)_K, (y,w_\varepsilon)_{2,K}\} = |y|_{2,K}O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}), \quad \forall y \in Y. \tag{2.32}$$

Demonstração. Como $\varphi \equiv 0$ fora de $B_2(0)$, a definição de w_ε fornece

$$\begin{aligned}
\int K(x)|w_\varepsilon|^{2^*-1} &= \int K(x)\left(\varepsilon^{(N-2)/4}\frac{K(x)^{-1/2}\varphi}{(\varepsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}}\right)^{(N+2)/(N-2)}\\
&\leq c_1\varepsilon^{(N+2)/4}\int_{B_2(0)}\frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^{(N+2)/2}}\\
&= c_1\varepsilon^{(N+2)/4}\int_{B_{2/\sqrt{\varepsilon}}(0)}\frac{\varepsilon^{-1}}{(1+|y|^2)^{(N+2)/2}}\,\mathrm{d}y\\
&= c_1\varepsilon^{(N-2)/4}\int\frac{1}{(1+|y|^2)^{(N+2)/2}}\,\mathrm{d}y = O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}),
\end{aligned}$$

e assim a primeira afirmação em (2.31) ocorre. Para segunda estimativa é suficiente observar que

$$\begin{aligned}
|w_\varepsilon|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &\leq c_2\varepsilon^{(N-2)/4}\int_{B_2(0)}\frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}}\\
&\leq c_2\varepsilon^{(N-2)/4}\int_{B_2(0)}|x|^{2-N} = O(\varepsilon^{(N-2)/4}).
\end{aligned}$$

Se tomarmos $y = \sum_{i=1}^n \beta_i\varphi_i \in Y$ e lembrarmos que φ_i é solução de $(\mathcal{LP})$, obtemos

$$|(y, w_\varepsilon)_K| = \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i\beta_i(\varphi_i, w_\varepsilon)_{2,K}\right| \leq c_3\left(\sum_{i=1}^n|\beta_i|\right)\int|x|^{\alpha-2}w_\varepsilon, \tag{2.33}$$

com $c_3 := \lambda_n\max\left\{|\varphi_1|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \ldots, |\varphi_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right\}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\int|x|^{\alpha-2}w_\varepsilon &\leq c_4\varepsilon^{(N-2)/4}\int_{B_2(0)}\frac{|x|^{\alpha-2}}{(\varepsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}}\\
&\leq c_4\varepsilon^{(N-2)/4}\int_{B_2(0)}|x|^{\alpha-N} = O(\varepsilon^{(N-2)/4}).
\end{aligned}$$

Além disso, a equivalência das normas em Y, implica que $\sum_{i=1}^n|\beta_i| \leq c_4|y|_{2,K}$. Ao substituir isto e a inequação acima em (2.33), obtemos

$$|(y, w_\varepsilon)_K| = |y|_{2,K}O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}).$$

O argumento para $(y, w_\varepsilon)_{2,K}$ é análogo, e portanto (2.32) ocorre. O lema está provado. □

Nossa próxima estimativa é mais delicada.

Lema 2.11. *Para qualquer $u = y + tw_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$ temos que $t = O(1)$ quando $\varepsilon \to 0^+$.*

Demonstração. Dado $u = y + tw_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, definiremos

$$A(u) := |u|_{2^*,K}^{2^*} - |y|_{2^*,K}^{2^*} - |tw_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*}.$$

Como $\dim V < \infty$ e as auto-funções de $(\mathcal{LP})$ são regulares, concluímos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto,

$$\begin{aligned} A(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \left(|y + tw_\varepsilon|^{2^*} - |y|^{2^*} - |tw_\varepsilon|^{2^*} \right) \mathrm{d}x \\ &= 2^* \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 K(x) \left(|tw_\varepsilon + sy|^{2^*-2}(tw_\varepsilon + sy) - |sy|^{2^*-2} sy \right) y \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x \\ &= 2^*(2^* - 1) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 K(x) |sy + tw_\varepsilon \theta|^{2^*-2} tw_\varepsilon y \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

onde $0 \le \theta(x) \le 1$ é uma função mensurável. Lembrando que o suporte de w_ε está contido em $B_2(0)$, podemos usar a estimativa acima, (2.31), (2.32) e a equivalência das normas em Y, para obter

$$\begin{aligned} |A(u)| &\le c_1 \left\{ |y|_\infty^{2^*-1} |t| |w_\varepsilon|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + |y|_\infty |t|^{2^*-1} \int K(x) |w_\varepsilon|^{2^*-1} \right\} \\ &\le \left\{ |y|_{2^*,K}^{2^*-1} |t| O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}) + |y|_{2^*,K} |t|^{2^*-1} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}) \right\}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Dado $\delta > 0$, podemos aplicar a desigualdade de Young com expoentes $s = 2^*/(2^* - 1)$, $s' = 2^*$, para obter $c_3 = c_3(\delta)$ tais que

$$|y|_{2^*,K}^{2^*-1} |t| O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}) \le \delta |y|_{2^*,K}^{2^*} + c_3 |t|^{2^*} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}})^{\frac{2N}{N-2}}.$$

Analogamente, existe $c_4 = c_4(\delta)$ satisfazendo

$$|y|_{2^*,K} |t|^{2^*-1} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}) \le \delta |y|_{2^*,K}^{2^*} + c_4 |t|^{2^*} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}})^{\frac{2N}{N+2}}.$$

Escolhendo $\delta > 0$ de maneira que $2\delta c_1 < 1/2$, podemos substituir as duas últimas inequações em (2.34) para obter

$$|A(u)| \le \frac{1}{2} |y|_{2^*,K}^{2^*} + |t|^{2^*} \left\{ O(\varepsilon^{N/2}) + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{N+2}\frac{N}{2}}) \right\}.$$

Decorre da definição de $A(u)$ e (2.22) que

$$\begin{aligned} 1 = |u|_{2^*,K}^{2^*} &\geq |tw_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*} + |t|^{2^*} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{N+2}\cdot\frac{N}{2}}) + \frac{1}{2}|y|_{2^*,K}^{2^*} \\ &= |t|^{2^*}\left\{A_0 + O(\varepsilon^{\frac{N}{2}}) + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{N+2}\cdot\frac{N}{2}})\right\}, \end{aligned}$$

e portanto não podemos ter $t \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0^+$. Assim o lema está provado. $\square$

Estamos agora em condições de provar que (2.30) se verifica para o primeiro caso.

Prova da Proposição 2.9 (caso $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$). Conforme observado antes, basta verificar (2.30). Com este objetivo, seja $u = y + tw_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$. Usando (2.32) obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_K^2 &= \|y\|_K^2 + 2t(y, w_\varepsilon)_K + \|tw_\varepsilon\|_K^2 \\ &= \|y\|_K^2 + |y|_{2,K} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}) + \|tw_\varepsilon\|_K^2. \end{aligned}$$

Como vale uma estimativa análoga para $|u|_{2,K}^2$ e $\|y\|_K^2 \leq \lambda_n |y|_{2,K}^2$, concluímos que

$$\|u\|_K^2 - \lambda|u|_{2,K}^2 \leq (\lambda_n - \lambda)|y|_{2,K}^2 + |y|_{2,K} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}) + \|tw_\varepsilon\|_K^2 - \lambda|tw_\varepsilon|_{2,K}^2. \tag{2.35}$$

Lembremos que $-as^2 + bs \leq -b^2/4a$ sempre que $a > 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Assim, a expressão acima implica que

$$\|u\|_K^2 - \lambda|u|_{2,K}^2 \leq \frac{1}{4(\lambda - \lambda_n)} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) + Q_\lambda(tw_\varepsilon)|tw_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*}, \tag{2.36}$$

onde

$$Q_\lambda(v) := \frac{\|v\|_K^2 - \lambda|v|_{2,K}^2}{|v|_{2^*,K}^{2^*}},$$

para qualquer $v \in H^1(\alpha) \setminus \{0\}$.

Como $Q_\lambda(w_\varepsilon) = Q_\lambda(u_\varepsilon)$ e $\lambda > \lambda_1/2$, segue das equações (2.46), (2.47), (2.48) e (2.50) do Apêndice que

$$Q_\lambda(w_\varepsilon) = \begin{cases} S + \varepsilon^{\alpha/2} d + O(\varepsilon^\alpha), & \text{se } N > 2\alpha + 2, \\ S + \varepsilon^{\alpha/2} d + O(\varepsilon^\alpha |\log\varepsilon|) + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}), & \text{se } N = 2\alpha + 2, \\ S + \varepsilon^{\alpha/2} d + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}), & \text{se } \alpha + 2 < N < 2\alpha + 2, \\ S + \varepsilon^{\alpha/2} |\log\varepsilon| d + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}), & \text{se } N = \alpha + 2, \end{cases}$$

com $d < 0$. Portanto, para $\mu > 0$ pequeno, $N \geq \alpha + 2$ e γ dado por

$$\gamma := \min\left\{\alpha - \mu,\ \frac{N-2}{2}\right\} > 0, \tag{2.37}$$

temos que

$$Q_\lambda(tw_\varepsilon) = Q_\lambda(w_\varepsilon) \leq S + d\varepsilon^{\alpha/2-\mu} + O(\varepsilon^\gamma). \tag{2.38}$$

Por outro lado, usando o Teorema do Valor Médio obtemos $\theta = \theta(x) \in (0,1)$ tal que

$$1 = \int K(x)|tw_\varepsilon + y|^{2^*} = \int K(x)\left\{|tw_\varepsilon|^{2^*} + 2^*|tw_\varepsilon + \theta y|^{2^*-2}(tw_\varepsilon + \theta y)y\right\}.$$

Portanto, podemos usar a equivalência das normas em Y, o Lema 2.11 e (2.31), para obter

$$1 \quad \geq \quad |tw_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*} + 2^*\int K(x)|tw_\varepsilon|^{2^*-1}|y| \geq |tw_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*} - |y|_{2,K}O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}),$$

de onde obtemos

$$|tw_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*} \leq 1 + |y|_{2,K}O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}).$$

Substituindo a estimativa acima e (2.38) em (2.36), concluímos que

$$\begin{aligned}\|u\|_K^2 - \lambda|u|_{2,K}^2 \quad &\leq \quad \frac{1}{4(\lambda-\lambda_n)}O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) + S + d\varepsilon^{\alpha/2-\mu} + O(\varepsilon^\gamma)\\ &= \quad S + \varepsilon^{\alpha/2-\mu}\left(d + O(\varepsilon^{\gamma-\frac{\alpha}{2}+\mu}) + O(\varepsilon^{\frac{N-2-\alpha}{2}+\mu})\right).\end{aligned}$$

Lembrando que $N - \alpha - 2 \geq 0$ e usando a definição de γ, concluímos que

$$\min\{\gamma - \alpha/2 + \mu, (N-2-\alpha)/2 + \mu\} > 0.$$

Como $d < 0$, decorre da expressão acima que, para qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno, temos

$$\|u\|_K^2 - \lambda|u|_{2,K}^2 < S, \quad \forall\, u \in \Sigma_\varepsilon.$$

Isto conclui a prova no primeiro caso. □

Agora consideraremos o caso em que $\lambda = \lambda_n$ é um autovalor. Observe que, nesta situação, a estimativa (2.35) não vale e portanto precisamos mudar o argumento. Assim, dado $\varepsilon > 0$ definiremos

$$\widetilde{w}_\varepsilon := w_\varepsilon - (w_\varepsilon, \varphi_n)_K\varphi_n.$$

O próximo lema mostra que esta nova função tem as mesmas propriedades de w_ε.

Lema 2.12. *As seguintes estimativas ocorrem quando $\varepsilon \to 0^+$*

$$\int K(x)|\widetilde{w}_\varepsilon|^{2^*-1} = O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}), \qquad |\widetilde{w}_\varepsilon|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}),$$

$$\max\{(y, \widetilde{w}_\varepsilon)_K, (y, \widetilde{w}_\varepsilon)_{2,K}\} = |y|_{2,K} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}),$$

e

$$Q_\lambda(tw_\varepsilon) = Q_\lambda(w_\varepsilon) \leq S + d\varepsilon^{\alpha/2-\mu} + O(\varepsilon^\gamma), \tag{2.39}$$

onde $d < 0$, $\mu > 0$ é pequeno e γ é dado por (2.37).

Demonstração. Temos que

$$\int K(x)|\widetilde{w}_\varepsilon|^{2^*-1} \leq c_1 \int K(x)|w_\varepsilon|^{2^*-1} + c_1|(w_\varepsilon, \varphi_n)_K|^{2^*-1} \int K(x)|\varphi_n|^{2^*-1}.$$

O decaimento exponencial de φ_n implica que a última integral é finita. Como $2^* - 1 > 1$, decorre da inequação acima, (2.31) e (2.32) que

$$\int K(x)|\widetilde{w}_\varepsilon|^{2^*-1} = O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}),$$

e portanto a primeira afirmação é verdadeira. Usando o decaimento exponencial φ_n e o Lema 2.10 podemos provar a segunda e terceira afirmação de maneira similar. Omitimos os detalhes.

Resta verificar a última afirmação. Observe que, em vista da definição de $\widetilde{w}_\varepsilon$ e do Lema 2.10, temos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}_\varepsilon\|_K^2 &= \|w_\varepsilon\|_K^2 + (w_\varepsilon, \varphi_n)_K^2 \|\varphi_n\|_K^2 - 2(w_\varepsilon, \varphi_n)_K^2 \\ &\leq \|w_\varepsilon\|_K^2 + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) \end{aligned}$$

e

$$|\widetilde{w}_\varepsilon|_{2,K}^2 = |w_\varepsilon|_{2,K}^2 + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Agora estimaremos $|\widetilde{w}_\varepsilon|_{2^*,K}^2$ em termos de $|w_\varepsilon|_{2^*,K}^2$ como segue

$$\begin{aligned} |\widetilde{w}_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*} - |w_\varepsilon|_{2^*,K}^{2^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \frac{d}{ds} |w_\varepsilon - s(w_\varepsilon, \varphi_n)_K \varphi_n|^{2^*} \mathrm{d}s\, \mathrm{d}x \\ &\leq c_2 |(w_\varepsilon, \varphi_n)_K| \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|w_\varepsilon|^{2^*-1} \mathrm{d}x \\ &\quad + c_3 |(w_\varepsilon, \varphi_n)_K|^{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|\varphi_n|^{2^*} \mathrm{d}x \\ &= O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}) O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}) + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{4}})^{2^*} = O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}), \end{aligned}$$

onde usamos o decaimento exponencial de φ_n e o Lema 2.10. Decorre da expressão acima que, para algum $\theta \in (0,1)$, temos

$$\begin{aligned} |\widetilde{w}_\varepsilon|^2_{2^*,K} &= \left(|\widetilde{w}_\varepsilon|^{2^*}_{2^*,K}\right)^{2/2^*} = \left(|w_\varepsilon|^{2^*}_{2^*,K} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})\right)^{2/2^*} \\ &= \left(|w_\varepsilon|^{2^*}_{2^*,K}\right)^{2/2^*} + \frac{2}{2^*}\left(|w_\varepsilon|^{2^*}_{2^*,K} + \theta O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})\right)^{\frac{2}{2^*}-1} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}). \end{aligned}$$

Obtemos de (2.22) que $0 < \lim_{\varepsilon \to 0^+} |w_\varepsilon|^{2^*}_{2^*,K} < \infty$. Assim, concluímos que

$$|\widetilde{w}_\varepsilon|^2_{2^*,K} = |w_\varepsilon|^2_{2^*,K} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Todas as estimativas acima juntas fornecem

$$Q_\lambda(\widetilde{w}_\varepsilon) \leq \frac{\|w_\varepsilon\|^2_K - \lambda |w_\varepsilon|^2_{2,K} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})}{|w_\varepsilon|^2_{2^*,K} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})} = Q_\lambda(w_\varepsilon) + \frac{O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})}{|w_\varepsilon|^2_{2^*,K} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})}.$$

A afirmação (2.39) agora é uma consequência da inequação acima e (2.38). Isto finaliza a prova. □

Agora provaremos a Proposição 2.9 no caso $\lambda = \lambda_n$.

Prova da Proposição 2.9 (caso $\lambda = \lambda_n$). Como no primeiro caso, é suficiente mostrar que

$$\widetilde{m}_\varepsilon := \max_{u \in \widetilde{\Sigma}_\varepsilon} \left(\|u\|^2_K - \lambda_n |u|^2_{2,K}\right) < S,$$

onde

$$\widetilde{\Sigma}_\varepsilon := \{u = y + t\widetilde{w}_\varepsilon : y \in Y,\, t \in \mathbb{R},\, |u|_{2^*,K} = 1\}.$$

Seja $u = y + t\widetilde{w}_\varepsilon \in \widetilde{\Sigma}_\varepsilon$ e note que a função $y \in Y$ pode ser escrita como

$$y = \widetilde{y} + (y, \varphi_n)_K \varphi_n.$$

Já que $(\varphi_n, \widetilde{w}_\varepsilon)_K = (\varphi_n, \widetilde{w}_\varepsilon)_{2,K} = 0$ e $\|\varphi_n\|^2_K = \lambda_n |\varphi_n|^2_{2,K}$, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|^2_K - \lambda_n |u|^2_{2,K} &= \|\widetilde{y}\|^2_K - \lambda_n \|\widetilde{y}_n\|^2_{2,K} + 2(\widetilde{y}, t\widetilde{w}_\varepsilon)_K - 2\lambda_n(\widetilde{y}, t\widetilde{w}_\varepsilon)_{2,K} \\ &\quad + Q_\lambda(t\widetilde{w}_\varepsilon)|t\widetilde{w}_\varepsilon|^2_{2^*,K}. \end{aligned}$$

O Lema 2.12 e a mesma argumentação usada na prova do Lema 2.11 mostram que $t = O(1)$ quando $\varepsilon \to 0^+$. Portanto, podemos usar a inequação acima, $\widetilde{y} \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$

e o Lema 2.11 para obter

$$\|u\|_K^2 - \lambda_n |u|_{2,K}^2 \leq \frac{1}{4(\lambda_{n-1} - \lambda_n)} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) + Q_\lambda(t\widetilde{w}_\varepsilon)|t\widetilde{w}_\varepsilon|_{2^*,K}^2.$$

Decorre da limitação de t, (2.39) e do mesmo argumento usado no primeiro caso que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\|u\|_K^2 - \lambda |u|_{2,K}^2 < S, \quad \forall\, u \in \widetilde{\Sigma}_\varepsilon.$$

A proposição está provada. □

2.4 Apêndice

Nessa seção apresentaremos algumas estimativas usadas nas seções anteriores. Os resultados foram extraídos de [7].

Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $\varphi \equiv 0$ em $B_2(0)$, $0 \leq \varphi \leq 1$. Dados $a \geq 2$ e $b \geq 0$, temos que

$$\int |x|^a (1 + |x|^2)^{b-N} < \infty \quad \text{desde que} \quad N > a + 2b.$$

Como

$$\int \frac{(1-\varphi^2)|x|^a}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-b}} = \int_{\mathbb{R}^N/B_1(0)} \frac{(1-\varphi^2)|x|^a}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-b}} \leq \int_{\mathbb{R}^N/B_1(0)} |x|^{a-2N+2b} < \infty,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \int \frac{\varphi^2 |x|^a}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-b}} &= \int \frac{|x|^a}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-b}} + \int \frac{(\varphi^2 - 1)|x|^a}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-b}} \\ &= \int \frac{\varepsilon^{a/2} |x/\sqrt{\varepsilon}|^a}{\varepsilon^{N-b}(1 + |x/\sqrt{\varepsilon}|^2)^{N-b}} + O(1) \qquad (2.40) \\ &= \varepsilon^{b+a/2-N/2} \int \frac{|x|^a}{(1+|x|^2)^{N-b}} + O(1), \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0^+$. Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$u_\varepsilon = K(x)^{-1/2} \varphi(x) v_\varepsilon(x),$$

onde v_ε é dada por

$$v_\varepsilon(x) = \left(\frac{1}{\varepsilon + |x|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}.$$

Primeiramente, computamos os seguintes cálculos

$$\begin{aligned}\int |\nabla u_\varepsilon|^2 K &= \int \varphi^2 \left(|\nabla v_\varepsilon|^2 - \frac{\alpha}{4} v_\varepsilon (x \cdot \nabla v_\varepsilon)|x|^{\alpha-2} + \frac{\alpha^2}{4 \cdot 16} v_\varepsilon^2 |x|^{2(\alpha-1)}\right) \\ &\quad + \int v_\varepsilon^2 |\nabla \varphi|^2 + 2 \int \varphi v_\varepsilon \nabla \varphi \cdot \left(\nabla v_\varepsilon - \frac{\alpha}{8} v_\varepsilon |x|^{\alpha-2} x\right).\end{aligned}$$

Não é difícil provar que os dois últimos termos do lado direito são limitados quando $\varepsilon \to 0$. Assim, usando a definição de v_ε, obtemos

$$\begin{aligned}\int |\nabla u_\varepsilon|^2 K &= (2-N)^2 \int \frac{\varphi^2 |x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N} + \frac{\alpha(N-2)}{4} \int \frac{\varphi^2 |x|^\alpha}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-1}} \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{4 \cdot 16} \int \frac{\varphi^2 |x|^{2(\alpha-1)}}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + O(1) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + O(1).\end{aligned} \tag{2.41}$$

Segue das estimativas em (2.40) que

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon^{1-N/2} A_1 + O(1) && (\text{para } N > 2), \\ I_2 &= \varepsilon^{\alpha/2 + (1-N/2)} A_2 + O(1) && (\text{para } N > \alpha + 2), \\ I_3 &= \varepsilon^{\alpha + (1-N/2)} A_3 + O(1) && (\text{para } N > 2\alpha + 2), \end{aligned} \tag{2.42}$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= (N-2)^2 \int \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N} && (\text{para } N > 2), \\ A_2 &= \frac{\alpha(N-2)}{4} \int \frac{|x|^\alpha}{(1+|x|^2)^{N-1}} && (\text{para } N > \alpha + 2), \\ A_3 &= \frac{\alpha^2}{4 \cdot 16} \int \frac{|x|^{2(\alpha-1)}}{(1+|x|^2)^{N-2}} && (\text{para } N > 2\alpha + 2). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos

$$\begin{aligned}\lambda \int |u_\varepsilon|^2 K |x|^{\alpha-2} &= \lambda \int \frac{\varphi^2 |x|^{\alpha-2}}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} \\ &= \varepsilon^{\alpha/2 + (1-N/2)} \lambda A_4 + O(1) \quad (\text{para } N > \alpha + 2),\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde

$$A_4 = \int \frac{|x|^{\alpha-2}}{(1+|x|^2)^{N-2}} \quad (\text{para } N > \alpha + 2).$$

Argumentando como em (2.40), podemos escrever

$$\int |u_\varepsilon|^{2^*} K = \int \frac{\varphi^{2^*} K^{2/(2-N)}}{(\varepsilon + |x|^2)^N} = \varepsilon^{-N/2} A_0 + O(1) \quad (\text{para } N > 2), \tag{2.44}$$

onde

$$A_0 = \int \frac{1}{(1+|x|^2)^N} \quad (\text{para } N > 2).$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \left(\int |u_\varepsilon|^{2^*} K \right)^{2/2^*} &= \left(\varepsilon^{-N/2} A_0 + O(1) \right)^{2/2^*} \\ &= \left(\varepsilon^{-N/2} A_0 \right)^{2/2^*} + \tfrac{N-2}{N} \left(\varepsilon^{-N/2} A_0 + O(1) \right)^{-2/N} O(1), \end{aligned}$$

e assim

$$\left(\int |u_\varepsilon|^{2^*} K \right)^{2/2^*} = \varepsilon^{1-N/2} A_0^{(N-2)/N} + O(\varepsilon) \quad (\text{para } N > 2). \tag{2.45}$$

Para os casos a seguir definimos

$$Q_\lambda(w) = \frac{\|w\|_K^2 - \lambda |w|_{2,K}^2}{|w|_{2^*,K}^2}.$$

Caso 1. $N > 2\alpha + 2$

Neste caso, as equações em (2.42)-(2.45) e a igualdade $A_0^{-1+2/N} A_1 = S$ implicam que

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= \frac{\varepsilon^{1-N/2} \left(A_1 + \varepsilon^{\alpha/2}(A_2 - \lambda A_4) + \varepsilon^\alpha A_3 \right) + O(1)}{\varepsilon^{1-N/2} A_0^{(N-2)/N} + O(\varepsilon)} \\ &= A_0^{-1+2/N} \left(A_1 + \varepsilon^{\alpha/2}(A_2 - \lambda A_4) + \varepsilon^\alpha A_3 + O(\varepsilon^{N/2-1}) \right) \\ &= S + \varepsilon^{\alpha/2} A_0^{-1+2/N} (A_2 - \lambda A_4) + \varepsilon^\alpha A_3 A_0^{-1+2/N} + O(\varepsilon^{N/2-1}) \end{aligned} \tag{2.46}$$

Caso 2. $N = 2\alpha + 2$

Neste caso, faremos outra estimativa para I_3. Temos que

$$\int_{B_1(0)} \frac{|x|^{2(\alpha-1)}}{(\varepsilon+|x|^2)^{2\alpha}} \leq I_3 \leq \int_{B_2(0)} \frac{|x|^{2(\alpha-1)}}{(\varepsilon+|x|^2)^{2\alpha}}.$$

Por outro lado, para qualquer $R>0$

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} \frac{|x|^{2(\alpha-1)}}{(\varepsilon+|x|^2)^{2\alpha}} &= \frac{\omega_{N-1}}{2}\int_0^R \frac{r^{2(\alpha-1)}r^{2\alpha}(2r)}{(\varepsilon+r^2)^{2\alpha}}\, dr\\
&= \frac{\omega_{N-1}}{2}\int_\varepsilon^{\varepsilon+R^2} \frac{(s-\varepsilon)^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha}}\, ds\\
&= \frac{\omega_{N-1}}{2}\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon+R^2}\frac{1}{s}\, ds + \int_\varepsilon^{\varepsilon+R^2}\sum_{i=1}^{2\alpha-1} C_i\frac{s^{(2\alpha-1)-i}}{s^{2\alpha}}\varepsilon^i\, ds\right)\\
&= \frac{\omega_{N-1}}{2}\log|\varepsilon+R^2| - \frac{\omega_{N-1}}{2}\log|\varepsilon| + O(1)\\
&= \frac{\omega_{N-1}}{2}|\log\varepsilon| + O(1),
\end{aligned}$$

onde $\omega_{N-1} = \int_{\partial B_1(0)} dS$ é a área da esfera unitária de $\mathbb{R}^N$. Portanto, como no caso 1, temos

$$\begin{aligned}
\int |\nabla u_\varepsilon|^2 K &= \varepsilon^{1-N/2}\left(A_1 + \varepsilon^{\alpha/2}A_2 + \frac{\varepsilon^{-1+N/2}\omega_{N-1}}{2}|\log\varepsilon|\right) + O(1)\\
&= \varepsilon^{1-N/2}\left(A_1 + \varepsilon^{\alpha/2}A_2 + \frac{\varepsilon^{\alpha}\omega_{N-1}}{2}|\log\varepsilon|\right) + O(1),
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) &= A_0^{-1+2/N}\left(A_1 + \varepsilon^{\alpha/2}(A_2-\lambda A_4) + \frac{\varepsilon^\alpha\omega_{N-1}}{2}|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^{N/2-1})\right)\\
&= S + \varepsilon^{\alpha/2}A_0^{-1+2/N}(A_2-\lambda A_4) + \frac{\varepsilon^\alpha\omega_{N-1}}{2}A_0^{-1+2/N}|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^{N/2-1}).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Caso 3. $\alpha+2<N<2\alpha+2$

Neste caso, como $N<2\alpha+2$, podemos estimar I_3 da seguinte maneira

$$I_3 = \frac{\alpha^2}{4\cdot 16}\int_{B_2(0)} \frac{\varphi^2|x|^{2(\alpha-1)}}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} \leq \int_{B_2(0)} \frac{|x|^{2(\alpha-1)}}{|x|^{2(N-2)}} = O(1),$$

e portanto

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= A_0^{-1+2/N}\left(A_1 + \varepsilon^{\alpha/2}(A_2 - \lambda A_4) + O(\varepsilon^{N/2-1})\right) \\ &= S + \varepsilon^{\alpha/2} A_0^{-1+2/N}(A_2 - \lambda A_4) + O(\varepsilon^{N/2-1}) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Caso 4. $N = \alpha + 2$

Neste caso $I_3 = O(1)$. Entretanto, (2.43) não ocorre, portanto precisamos estimar I_2. Temos que

$$I_2 = \frac{\omega_{N-1}}{2}\frac{\alpha(N-2)}{4}|\log\varepsilon| + O(1)$$

e

$$\lambda\int |u_\varepsilon|^2 K|x|^{\alpha-2} = \frac{\omega_{N-1}}{2}|\log\varepsilon| + O(1).$$

Assim

$$\int |\nabla u_\epsilon|^2 K = (2-N)^2 \int \frac{\varphi^2|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^N} + \frac{\omega_{N-1}}{2}\frac{\alpha(N-2)}{4}|\log\varepsilon| + O(1) \tag{2.49}$$

e portanto

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= A_0^{-1+2/N}\left(A_1 + \frac{\omega_{N-1}}{2}\left(\frac{\alpha(N-2)}{4} - \lambda\right)\varepsilon^{N/2-1}|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^{N/2-1})\right) \\ &= S + \frac{\omega_{N-1}}{2}A_0^{-1+2/N}\left(\frac{\alpha(N-2)}{4} - \lambda\right)\varepsilon^{N/2-1}|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^{N/2-1}). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Capítulo 3

Soluções para um sistema elíptico do tipo gradiente

Neste capítulo estudaremos o seguinte problema

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = Q_u(u,v) + \dfrac{1}{2^*}H_u(u,v), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = Q_v(u,v) + \dfrac{1}{2^*}H_v(u,v), & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave limitado e $N \geq 3$, Q_u, H_u e Q_v, H_v são as derivadas parciais das funções homogêneas Q, $H \in C^1(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, onde $\mathbb{R}^2_+ := [0,\infty) \times [0,\infty)$, H satisfaz

(H_0) H é 2^*-homogênea, isto é

$$H(\theta s, \theta t) = \theta^{2^*} H(s,t) \text{ para cada } \theta > 0, \ (s,t) \in \mathbb{R}^2_+;$$

(H_1) $H_s(0,1) = 0$, $H_t(1,0) = 0$;

(H_2) $H(s,t) > 0$ para cada $s, t > 0$;

(H_3) $H_s(s,t) \geq 0$, $H_t(s,t) \geq 0$ para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$;

(H_4) a função 1-homogênea $(s,t) \mapsto H(s^{1/2^*}, t^{1/2^*})$ é côncava em $\mathbb{R}^2_+$.

A função $Q := Q(s,t)$ é uma perturbação subcrítica que satisfaz

(Q_0) Q é q-homogênea para algum $2 \leq q < 2^*$;

(Q_1) $Q_s(0,1) = 0$, $Q_t(1,0) = 0$.

A fim de apresentarmos nosso resultado, definimos os seguintes números

$$\mu \ := \ \min\left\{Q(s,t) \ : \ s^q + t^q = 1, \ s, \ t \geq 0\right\}, \tag{3.1}$$
$$\lambda \ := \ \max\left\{Q(s,t) \ : \ s^q + t^q = 1, \ s, \ t \geq 0\right\}. \tag{3.2}$$

Enunciamos abaixo nosso primeiro resultado de multiplicidade para o sistema $(\mathcal{P}_2)$.

Teorema C. *Suponha que H satisfaz $(H_0) - (H_4)$ e Q satisfaz $(Q_0) - (Q_1)$. Então existe $\Lambda > 0$ tal que o problema $(\mathcal{P}_2)$ tem pelo menos $\operatorname{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não negativas e não triviais se λ, $\mu \in (0, \Lambda)$.*

No segundo resultado, consideramos outra hipótese sobre Q.

Teorema D. *Suponha que H satisfaz $(H_0) - (H_4)$, Q satisfaz (Q_0) com $q > 2$ e*

$\widehat{(Q_1)}$ *$Q_s(0,1) > 0$ e $Q_t(1,0) > 0$.*

Então, definindo

$$\widehat{\lambda} = \max\{Q_s(0,1), \ Q_t(1,0)\}, \tag{3.3}$$

existe $\Lambda > 0$ tal que o problema $(\mathcal{P}_2)$ tem pelo menos $\operatorname{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não negativas e não triviais se λ, μ, $\widehat{\lambda} \in (0, \Lambda)$.

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na Seção 3.1 provamos um resultado de compacidade local para o funcional associado ao problema e obtemos existência de uma solução não negativa para $(\mathcal{P}_2)$. Na Seção 3.2 mostramos um resultado de concentração de compacidade e estudamos o comportamento dos níveis minimax relacionados com o problema. Os Teoremas C e D são provados na Seção 3.3. Na Seção 3.4 fazemos algumas considerações sobre a existência de solução positivas ou de pares de soluções $z = (u, v)$ com $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Finalizamos o capítulo com a Seção 3.5 onde colocamos alguns resultados abstratos usados no capítulo e apresentamos breves considerações sobre a categoria de Ljusternik-Schnirelmann.

Denotaremos por $\|f\|_p$ a norma de f em $L^p(A)$. A fim de simplificar a notação, escreveremos $\int_A f$ em vez de $\int_A f(x)\mathrm{d}x$. Também vamos omitir o conjunto A sempre que $A = \Omega$.

Destacamos para referência futura que, se $p \geq 1$ e F é uma função de classe C^1, p-homogênea , então:

(i) definindo o número $M_F := \max\{F(s,t) : s, t \in \mathbb{R}, |s|^p + |t|^p = 1\}$, para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, temos que
$$|F(s,t)| \leq M_F(|s|^p + |t|^p)\,; \tag{3.4}$$

(ii) ∇F é uma $(p-1)$ função homogênea e, para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$sF_s(s,t) + tF_t(s,t) = pF(s,t). \tag{3.5}$$

3.1 A condição PS e um resultado de existência

Começamos esta seção estendendo as funções Q e H. Observe que (Q_1) e (H_1) permitem-nos dar uma extensão C^1 de Q e H para o plano fazendo
$$\widetilde{Q}(s,t) := Q(s^+,t^+), \;\; \widetilde{H}(s,t) := H(s^+,t^+), \tag{3.6}$$
onde $s^+ := \max\{s,0\}$. Sob as hipóteses do Teorema D, com Q satisfazendo $(\widehat{Q_1})$ em vez de (Q_1), a extensão acima não é diferenciável. Neste caso, nós estendemos Q da seguinte forma
$$\widetilde{Q}(s,t) := Q(s^+,t^+) - \nabla Q(s^+,t^+) \cdot (s^-,t^-), \tag{3.7}$$
onde $s^- := \max\{-s,0\}$.

Para simplificar a apresentação do texto, vamos escrever apenas H para denotar a extensão $\widetilde{H}$. A extensão de Q depende de estarmos assumindo a condição (Q_1) ou $(\widehat{Q_1})$. Conforme lema à seguir, em ambos os casos, a extensão é de classe C^1 e será representada apenas por Q.

Lema 3.1. *Se Q e H satisfazem (Q_1) e (H_1), então as extensões (3.6) são de classe C^1. O mesmo vale se Q satisfaz $(\widehat{Q}_1)$ e usarmos a extensão (3.7).*

Demonstração. Provemos a primeira parte. Para tanto basta verificar a regularidade de Q nos eixos $(s,0)$ e $(0,t)$, o mesmo valendo para H. Observe que
$$\begin{aligned}
\nabla\widetilde{Q}(s,t) &= (Q_s(s,t), Q_t(s,t)) && \text{para } s>0,\ t>0,\\
\nabla\widetilde{Q}(s,t) &= (0, Q_t(0,t)) && \text{para } s<0,\ t>0,\\
\nabla\widetilde{Q}(s,t) &= (Q_s(s,0), 0) && \text{para } s>0,\ t<0,\\
\nabla\widetilde{Q}(s,t) &= (0,0) && \text{para } s<0,\ t<0.
\end{aligned}$$

Fixando $t>0$, usando (3.5) e (Q_1) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^-} \nabla\widetilde{Q}(s,t) &= (0, Q_t(0,t)) \\
&= (t^{q-1}Q_s(0,1), Q_t(0,t)) \\
&= (Q_s(0,t), Q_t(0,t)) \\
&= \nabla Q(0,t).
\end{aligned}$$

Esta última equação mostra que a extensão é regular no semi-eixo $(0,t)$ com $t \geq 0$. Também temos, para $s < 0$ fixo,

$$\lim_{t\to 0^+} \nabla\widetilde{Q}(s,t) = (0, Q_t(0,0)) = (0,0),$$

o que fornece a regularidade para extensão no semi-eixo $(s,0)$ com $s \leq 0$ pois no terceiro quadrante $\widetilde{Q} \equiv (0,0)$. Argumentando de modo análogo obtemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^-} \nabla\widetilde{Q}(s,t) = \nabla Q(s,0), && \text{para } s > 0, \\
&\lim_{s\to 0^+} \nabla\widetilde{Q}(s,t) = (0,0), && \text{para } t < 0.
\end{aligned}$$

As equações acima fornecem a regularidade nos semi-eixos $(s,0)$ com $s \geq 0$ e $(0,t)$ com $t \leq 0$.

Agora, analisemos a extensão (3.7) para Q. Temos que

$$\begin{aligned}
&\nabla\widetilde{Q}(s,t) = \nabla Q(s,t) && \text{para } s > 0,\ t > 0, \\
&\nabla\widetilde{Q}(s,t) = (Q_s(0,t)\ ,\ Q_t(0,t) + (q-1)st^{q-2}Q_s(0,1)) && \text{para } s < 0,\ t > 0, \\
&\nabla\widetilde{Q}(s,t) = (Q_s(s,0) + (q-1)ts^{q-2}Q_t(s,0)\ ,\ Q_t(s,0)) && \text{para } s > 0,\ t < 0, \\
&\nabla\widetilde{Q}(s,t) = (0,0) && \text{para } s < 0,\ t < 0.
\end{aligned}$$

Como $q > 2$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+} \nabla\widetilde{Q}(s,t) = \nabla Q(0,0) = (0,0), && \text{para } s < 0, \\
&\lim_{s\to 0^-} \nabla\widetilde{Q}(s,t) = \nabla Q(0,t), && \text{para } t > 0.
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{Q} \equiv (0,0)$ no terceiro quadrante, a primeira das equações acima mostra a regularidade da extensão no semi-eixo $(s,0)$ com $s \leq 0$. A segunda equação mostra a regularidade no semi-eixo $(0,t)$ com $t \geq 0$. A regularidade nos demais semi-eixos é feita de maneira análoga. $\square$

No decorrer deste capítulo utilizaremos de forma recorrente as propriedades abaixo.

Lema 3.2. *As extensões acima satisfazem, para todo $s, t \in \mathbb{R}$,*

(i) $Q(s^+, t^+) \leq \lambda(|s|^q + |t|^q)$.

Além disso, se Q satisfaz $(\widehat{Q}_1)$, então para todo $s, t \in \mathbb{R}$ vale

(ii) $Q_s(s^-, t) \geq 0$ *e* $Q_t(s, t^-) \geq 0$*;*

(iii) $|Q(s,t)| \leq (\lambda + \widehat{\lambda})(|s|^q + |t|^q)$,

(iv) $Q(s^+, t^+) \leq Q(s,t)$.

Demonstração. A propriedade (i) decorre de (3.4). No caso (ii) a extensão é dada por $\widetilde{Q}(s,t) = Q(s^+, t^+) - (s^-, t^-) \cdot \nabla Q(s^+, t^+)$. Logo, usando a $(q-1)-$homogeneidade de ∇Q, obtemos

$$\widetilde{Q}_s(s^-, t) = \begin{cases} -s^-(t^+)^{q-1} Q_s(0,1) & \text{para } s < 0, \\ 0 & \text{para } s \geq 0. \end{cases}$$

Como por hipótese $Q_s(0,1) > 0$ temos que $\widetilde{Q}_s(s^-, t) \geq 0$. A outra desigualdade é análoga e assim o item (ii) está provado.

Para o caso (iii), usando a $(q-1)$-homogeneidade de $\nabla Q(s,t)$, obtemos

$$-s^- Q_s(s^+, t^+) = \begin{cases} -sQ_s(0, t^+) = -s(t^+)^{q-1} Q_s(0,1) & \text{para } s < 0, \\ 0 & \text{para } s \geq 0. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} a(b^+)^{q-1} &\leq |a||a|^{q-1} = |a|^q \qquad \text{se } |b| \leq |a|, \\ a(b^+)^{q-1} &\leq |b||b|^{q-1} = |b|^q \qquad \text{se } |a| < |b|, \end{aligned}$$

então

$$a(b^+)^{q-1} \leq |a|^q + |b|^q,$$

e portanto

$$|-s^- Q_s(s^+, t^+)| \leq Q_s(0,1)(|s|^q + |t|^q).$$

De maneira análoga

$$|-t^- Q_t(s^+, t^+)| \leq Q_t(1,0)(|s|^q + |t|^q).$$

segue das expressões acima que $|(s^-, t^-) \cdot \nabla Q(s^+, t^+)| \leq \widehat{\lambda}(|s|^q + |t|^q)$, e portanto

$$|\widetilde{Q}(s,t)| \leq |Q(s^+, t^+)| + |(s^-, t^-) \cdot \nabla Q(s^+, t^+)| \leq (\lambda + \widehat{\lambda})(|s|^q + |t|^q).$$

Decorre da demonstração do item anterior que

$$-s^- Q_s(s^+, t^+) - t^- Q_t(s^+, t^-) \geq 0,$$

e portanto $\widetilde{Q}(s,t) \geq Q(s^+,t^+)$, o que conclui a prova do item (iv) e do lema. $\square$

Usando (3.4) e argumentos padrões, vemos que as soluções fracas de $(\mathcal{P}_2)$ são precisamente os pontos críticos do funcional $I_{\lambda,\mu} \in C^1(X,\mathbb{R})$ dado por

$$I_{\lambda,\mu}(z) := \frac{1}{2}\|z\|^2 - \int Q_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{2^*}\int H(z),\ \ z \in X,$$

onde X é o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com a norma

$$\|(u,v)\|^2 := \int \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right).$$

Observe que, na definição de $I_{\lambda,\mu}$, denotamos $Q_{\lambda,\mu}(z) := Q(z)$ para $z \in \mathbb{R}^2$. Escreveremos $Q_{\lambda,\mu}$ em vez de Q apenas para enfatizar a dependência dos parâmetros μ e λ definidos em (3.1)-(3.2).

Introduzimos a variedade de Nehari de $I_{\lambda,\mu}$ definindo

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu} := \left\{z \in X \setminus \{(0,0)\} : I'_{\lambda,\mu}(z)z = 0\right\}$$

e definimos o nível minimax $c_{\lambda,\mu}$ como

$$c_{\lambda,\mu} := \inf_{z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}} I_{\lambda,\mu}(z).$$

Lema 3.3. *Se $q = 2$ e $\lambda,\mu \in (0,\theta_1(\Omega)/2)$ ou $2 < q < 2^*$ e $\lambda,\mu \geq 0$ então existe $r = r(\lambda,\mu,\Omega) > 0$, tal que*

$$\|z\| \geq r > 0 \quad \textit{para todo } z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}. \tag{3.8}$$

Demonstração. Como $z = (u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ então $\|z\|^2 = q\int Q(z) + \int H(z)$. A homogeneidade de H e Q, (3.4) e as imersões de Sobolev implicam na existência de constantes satisfazendo

$$\begin{aligned}
\|z\|^2 &\leq qC_q(\|u\|_q^q + \|v\|_q^q) + C_{2^*}(\|u\|_{2^*}^{2^*} + \|v\|_{2^*}^{2^*}) \\
&\leq q\widehat{C}_q(\|u\|^q + \|v\|^q) + \widehat{C}_{2^*}(\|u\|^{2^*} + \|v\|^{2^*}) \\
&\leq q\widetilde{C}_q(\|u\| + \|v\|)^q + \widetilde{C}_{2^*}(\|u\| + \|v\|)^{2^*} \\
&= q\widetilde{C}_q\|z\|^q + \widetilde{C}_{2^*}\|z\|^{2^*}.
\end{aligned}$$

Quando $q = 2$ segue, da definição do primeiro autovalor para o operador laplaciano e de

(3.1), que $\widetilde{C}_2 = \mu/\theta_1(\Omega)$. Assim $\|z\|^2 \leq 2\mu\theta_1(\Omega)\|z\|^2 + \widetilde{C}_{2^*}\|z\|^{2^*}$, e portanto

$$1 - 2\mu/\theta_1(\Omega) \leq \widetilde{C}_{2^*}\|z\|^{2^*-2}.$$

Basta tomar

$$r := \left(\frac{1 - \frac{2\mu}{\theta_1(\Omega)}}{\widetilde{C}_{2^*}}\right)^{1/(2^*-2)} > 0$$

e o lema está provado. Se $q > 2$ então

$$1 \leq q\widetilde{C}_q\|z\|^{q-2} + \widetilde{C}_{2^*}\|z\|^{2^*-2}.$$

A expressão acima mostra que não pode existir $(z_n) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ tal que $\|z_n\| = o_n(1)$. Logo, existe r com no enunciado do lema. $\square$

O lema a seguir mostra que $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 3.4. *Se $q = 2$ e $\lambda \in (0, \theta_1(\Omega)/2)$, então existem $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ tais que $I(z) > r_1$, para todo $z \in \partial B_{r_2}(0)$ e $w \in \mathbb{R}^N/B_{r_2}(0)$ tal que $I(w) < 0$. O mesmo ocorre se $2 < q < 2^*$ e $\lambda > 0$.*

Demonstração. Usando (1.1), os itens (i) e (iv) do Lema 3.2 e as imersões de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \int Q_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{2^*}\int H(z) \\ &\geq \frac{1}{2}\|z\|^2 - \lambda\int(|u|^q + |v|^q) - S_H^{-2^*/2}\|z\|^{2^*} \\ &= \|z\|^2\left\{\frac{1}{2} - \lambda C_q\|z\|^{q-2} - S_H^{-2^*/2}\|z\|^{2^*-2}\right\}. \end{aligned}$$

Seja $f(t) := \frac{1}{2} - \lambda C_q t^{q-2} - S_H^{-2^*/2}t^{2^*-2}$. Se $q = 2$ e $\lambda \in (0, \theta_1(\Omega)/2)$, analogamente ao lema anterior $C_2 = 1/\theta_1(\Omega)$. Como $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \frac{\theta_1(\Omega)-2\lambda}{2\theta_1(\Omega)} > 0$, então existe $r_2 > 0$ tal que

$$I_{\lambda,\mu}(z) \geq r_1 := r_2 f(r_2) > 0, \quad \text{para todo} \quad z \in \partial B_{r_2}(0).$$

Se $2 < q < 2^*$, então $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \frac{1}{2} > 0$, para todo $\lambda > 0$. Procedemos como antes para provar o lema. $\square$

No decorrer desse capítulo vamos usar outros tipos de níveis minimax relacionados com o problema $(\mathcal{P}_2)$, a saber

$$\widetilde{c}_{\lambda,\mu} := \inf_{z \in X \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}(tz),$$

e

$$\widehat{c}_{\lambda,\mu} := \inf_{\gamma \in \Gamma_{\lambda,\mu}} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma_{\lambda,\mu} := \{\gamma \in C([0,1], X) \ : \ \gamma(0) = 0, \ I(\gamma(1)) < 0\}$.

O resultado abaixo estabelece a relação entre os diferentes minimax.

Lema 3.5. *Suponha que* Q *satisfaz* (Q_1) *ou* $(\widehat{Q_1})$, $2 < q < 2^*$ *e* $\lambda, \ \mu > 0$. *Então*

$$\widehat{c}_{\lambda,\mu} \leq \widetilde{c}_{\lambda,\mu} = c_{\lambda,\mu}.$$

O mesmo vale se Q *satisfaz* (Q_1), $q = 2$ *e* $\lambda, \ \mu \in (0, \theta_1(\Omega)/2)$.

Demonstração. Seja $Y := \{z \in X \setminus \{0\} \ : \ \max_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}(tz) < +\infty\}$ e observe que

$$\widetilde{c}_{\lambda,\mu} := \inf_{z \in X} \max_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}(tz).$$

Fixe $z \in Y$ e considere, para $t > 0$, a função

$$h(t) := I_{\lambda,\mu}(tz) = At^2 - Bt^q - Ct^{2^*}, \tag{3.9}$$

com

$$A := \frac{\|z\|^2}{2} > 0, \quad B := \int Q(z), \quad C := \frac{1}{2^*} \int H(z) \geq 0.$$

A derivada de h é dada por

$$h'(t) = I'_{\lambda,\mu}(tz)z = t(2A - qBt^{q-2} - 2^* C t^{2^*-2}),$$

de modo que $tz \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ se, e somente se, $t > 0$ é ponto crítico de h. Vamos mostrar que h possui exatamente um ponto crítico $t_z > 0$ que é um ponto de máximo global. Desse modo

$$c_{\lambda,\mu} \leq I_{\lambda,\mu}(t_z z) \leq \max_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}(tz).$$

Tomando o ínfimo para $z \in Y$, concluímos que $c_{\lambda,\mu} \leq \widetilde{c}_{\lambda,\mu}$.

Vamos considerar três casos distintos.

Caso 1. Q satisfaz (Q_1) com $2 < q < 2^*$ e $\lambda, \mu > 0$.

Observe que a derivada de h pode ser escrita como

$$h'(t) = t(2A - g(t)),$$

com

$$g(t) := qBt^{q-2} + 2^*Ct^{2^*-2}, \tag{3.10}$$

de modo que $h'(t) = 0$ se, e somente se, $g(t) = 2A$. Como Q satisfaz (Q_1), podemos usar a expressão da extensão de Q e H para concluir que B, $C \geq 0$. Além disso, como $z \in Y$, temos que $B > 0$ ou $C > 0$. Portanto a função g é crescente em $(0, \infty)$ e $\lim_{t\to\infty} g(t) = +\infty$. Como $g(0) = 0$ existe um único $t_z > 0$ tal que $g(t_z) = 2A$.

Caso 2. Q satisfaz $(\widehat{Q_1})$ com $2 < q < 2^*$ e $\lambda, \mu > 0$.

Nesse caso, se $B \geq 0$, a demonstração é análoga àquela do caso anterior. Contudo, se $B < 0$, então $C > 0$ e a função g não é mais crescente em todo o semi-eixo positivo. Porém o único ponto onde a sua derivada g' se anula é

$$\bar{t} = \left(\frac{-q(q-2)B}{2^*(2^*-2)C}\right)^{1/(2^*-q)} > 0.$$

Além disso, g é decrescente em $(0, \bar{t})$ e crescente em $(\bar{t}, +\infty)$. Como $g(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} g(t) = +\infty$ concluímos que existe um único $t_z > 0$ tal que $g(t_z) = 2A$.

Caso 3. Q satisfaz (Q_1) com $q = 2$ e $\lambda, \mu \in (0, \theta_1(\Omega)/2)$.

Afirmamos inicialmente que $A > B$. De fato, usando a definição de $\lambda < \theta_1(\Omega)$ e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$B = \int Q(z) \leq \lambda \int |z|^2 \leq \frac{\lambda}{\theta_1(\Omega)} \|z\|^2 < \frac{\|z\|^2}{2} = A.$$

Desse modo, se $C = 0$, teríamos $h(t) = (A-B)t^2$, o que implicaria que $\max_{t\geq 0} h(t) = +\infty$, contrariando $z \in Y$. Portanto concluímos que $C > 0$. Uma vez que $q = 2$ temos $h'(t) = t(2(A-B) - 2^*Ct^{2^*-2})$. Lembrando que $(A - B) > 0$ podemos proceder como antes para concluir que existe um único $t_z > 0$ tal que $t_z z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$.

A fim de concluir a demonstração tomamos $z \in Y$. Argumentando como acima e analisando os diversos casos para as constantes A, B e C, podemos mostrar que $\lim_{t\to+\infty} I(tz) = -\infty$. Assim, escolhendo $w := t_0 z$ com $t_0 > 0$ grande de modo que $I(w) < 0$, podemos considerar o caminho retilíneo $\gamma(t) = tw$ para concluir que $\widehat{c}_{\lambda,\mu} \leq \widetilde{c}_{\lambda,\mu}$. □

Veremos adiante (veja a Observação 3.14) que o nível $\widehat{c}_{\lambda,\mu}$ do Teorema do Passo da Montanha na verdade coincide com os outros dois níveis minimax. Outra observação importante é que, como uma consequência simples da demonstração acima, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.6. *Suponha que Q satisfaz (Q_1) ou $(\widehat{Q_1})$, $2 < q < 2^*$ e $\lambda,\ \mu > 0$. Então, se $z \in X \setminus \{0\}$ é tal que $\int H(z) > 0$, existe um único $t_z > 0$ tal que $t_z z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$. O mesmo vale se Q satisfaz (Q_1), $q = 2$ e $\lambda,\ \mu \in (0, \theta_1(\Omega)/2)$.*

Antes de passamos ao nosso próximo lema gostaríamos de enunciar alguns resultados que nos serão úteis. O primeiro é uma versão do Lema de Brézis-Lieb para o nosso problema. O segundo relaciona o número S_H definido em (1.1) com a melhor constante S da imersão de Sobolev $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Os dois enunciados abaixo são casos particulares dos Lemas 5 e 1, respectivamente, do artigo de Morais Filho e Souto [24].

Lema 3.7. *Sejam (u_n), $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ sequência limitadas e $u, v \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_n(x) \to u(x)$, $v_n(x) \to v(x)$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Então*

$$\int H(u_n, v_n)\,\mathrm{d}x - \int H(u_n - u, v_n - v)\,\mathrm{d}x = \int H(u, v)\,\mathrm{d}x + o_n(1).$$

O mesmo vale com Q no lugar de H.

Lema 3.8. *Se H satisfaz (H_4) então*

$$S_H = \frac{1}{M_F} S,$$

onde M_F é dado em (3.4) com $F(s,t) = H(s,t)^{2/2^*}$. Além disso, se a constante S é atingida por ω, então $(s_0\omega, t_0\omega)$ atinge o ínfimo S_H para todo $(s_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^2$ satisfazendo

$$H(s_0, t_0)^{2/2^*} = s_0^2 + t_0^2.$$

No resultado abaixo estabelecemos uma condição local de compacidade para o funcional.

Lema 3.9. *O funcional $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todos os níveis $c < \frac{1}{N} S_H^{N/2}$.*

Demonstração. Seja $(z_n) = ((u_n, v_n)) \subset X$ tal que $I'_{\lambda,\mu}(z_n) \to 0$ e $I_{\lambda,\mu}(z_n) \to c < \frac{1}{N} S_H^{N/2}$.

A definição de $I_{\lambda,\mu}$ fornece c_1, $c_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} c + c_1\|z_n\| + o_n(1) &\geq I_{\lambda,\mu}(z_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\mu}(z_n)z_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|z_n\|^2 + \left(\frac{2^* - q}{2^*q}\right)\int H(z_n) \qquad (3.11) \\ &\geq c_2\|z_n\|^2, \end{aligned}$$

A expressão acima implica que $(z_n) \subset X$ é limitada. Portanto, podemos supor que $z_n \rightharpoonup z := (u, v)$ fracamente em X e $z_n \to z$ forte em $L^q(\Omega) \times L^q(\Omega)$.

Definido $\widetilde{z}_n := (\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n) = (u_n - u, v_n - v)$ podemos usar a convergência forte em $L^q(\Omega) \times L^q(\Omega)$ e o Lema 3.7 para concluir que

$$\int Q_{\lambda,\mu}(z_n) = \int Q_{\lambda,\mu}(z) + o_n(1), \quad \int H(z_n) = \int H(z) + \int H(\widetilde{z}_n) + o_n(1). \qquad (3.12)$$

Afirmamos que $I'_{\lambda,\mu}(z) = 0$ e $I_{\lambda,\mu}(z) \geq 0$. Portanto segue de (3.12), a convergência fraca de (z_n) e a afirmação implicam que

$$c + o_n(1) = I_{\lambda,\mu}(z) + \frac{1}{2}\|\widetilde{z}_n\|^2 - \frac{1}{2^*}\int H(\widetilde{z}_n) \geq \frac{1}{2}\|\widetilde{z}_n\|^2 - \frac{1}{2^*}\int H(\widetilde{z}_n), \qquad (3.13)$$

Usando o fato de que $I'_{\lambda,\mu}(z_n) \to 0$ e (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'_{\lambda,\mu}(z_n)z_n = \|z_n\|^2 - q\int Q_{\lambda,\mu}(z_n) - \int H(z_n) \\ &= I'_{\lambda,\mu}(z)z + \|\widetilde{z}_n\|^2 - \int H(\widetilde{z}_n). \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Lembrando que $I'_{\lambda,\mu}(z)z = 0$, podemos usar (3.14) e (3.13) para obter

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{z}_n\|^2 = b = \lim_{n\ \to\infty} \int H(\widetilde{z}_n), \quad \frac{1}{N}b = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) b \leq c,$$

para algum $b \geq 0$.

Decorre da definição de S_H, que

$$\|\widetilde{z}_n\|^2 \geq S_H \left(\int H(\widetilde{z}_n)\right)^{2/2^*}.$$

Tomando o limite obtemos $b \geq S_H b^{2/2^*}$. Portanto, se $b > 0$, concluímos que $b \geq S_H^{N/2}$ e

assim
$$\frac{1}{N}S_H^{N/2} \leq \frac{1}{N}b \leq c < \frac{1}{N}S_H^{N/2},$$
que é absurdo. Portanto $b = 0$ e assim $z_n \to z$ forte em X.

Resta provar a afirmação. Seja $\phi, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Usando (3.4) e a compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $r \in \{q-1, 2^*-1\}$ obtemos

$$\|u_n - u\|_{q-1} = o_n(1) \ e \ \|v_n - v\|_{2^*-1} = o_n(1).$$

Segue da Teoria da Medida que existem $f, g \in L^1(\Omega)$ tais que

$$|u_n(x)| \leq f(x) \ e \ |v_n(x)| \leq g(x) \ q.t.p \ em \ \Omega.$$

Portanto, usando (3.5) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e concluímos que
$$o_n(1) = \int_\Omega (\phi, \varphi) \cdot \nabla Q_{\lambda,\mu}(z_n) - \int_\Omega (\phi, \varphi) \cdot \nabla Q_{\lambda,\mu}(z),$$
$$o_n(1) = \int_\Omega (\phi, \varphi) \cdot \nabla H_{\lambda,\mu}(z_n) - \int_\Omega (\phi, \varphi) \cdot \nabla H_{\lambda,\mu}(z).$$

As igualdades acima, a convergência fraca $z_n \rightharpoonup z$ e (3.5) fornecem $I'_{\lambda,\mu}(z)(\phi, \varphi) = 0$. Por densidade obtemos $I'_{\lambda,\mu}(z) = 0$. Em particular $I'_{\lambda,\mu}(z)z = 0$, o que nos fornece

$$I_{\lambda,\mu}(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|z\|^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right)\int H(z) \geq 0,$$
e isto conclui a demonstração. $\square$

Antes de apresentarmos nosso próximo resultado lembramos que, para cada $\varepsilon > 0$, a função
$$\Phi_\varepsilon(x) := \frac{C_N \varepsilon^{(N-2)/4}}{(\varepsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.15}$$
onde $C_N := N(N-2)^{(N-2)/4}$, satisfaz $\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_2^2 = \|\Phi_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = S^{N/2}$. Portanto, usando o Lema 3.8 e a homogeneidade de H, obtemos A, $B > 0$ tais que

$$S_H = \frac{||(A\Phi_\varepsilon, B\Phi_\varepsilon)||^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} H(A\Phi_\varepsilon, B\Phi_\varepsilon)\right)^{2/2*}} = \frac{(A^2+B^2)}{H(A,B)^{2/2^*}}\frac{S^{N/2}}{\|\Phi_\varepsilon\|_{2^*}^2}, \tag{3.16}$$

de onde se conclui que
$$S_H = \frac{(A^2+B^2)}{H(A,B)^{2/2^*}}S. \tag{3.17}$$

A equação acima e as idéias introduzidas por Brézis e Nirenberg [5] são o ponto chave para o próximo resultado.

Lema 3.10. *Suponha que Q satisfaz (Q_0) com $2 < q < 2^*$ e λ, μ, definidos em (3.1)-(3.2) são positivos. Então*

$$c_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N} S_H^{N/2}.$$

O mesmo resultado é verdadeiro se $q = 2$ e λ, $\mu \in (0, \theta_1(\Omega)/2)$.

Demonstração. Consideremos uma função não negativa $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B_R(0) \subset \Omega$, $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)$. Definimos

$$w_\varepsilon(x) := \frac{\phi(x)\Phi_\varepsilon(x)}{\|\phi\Phi_\varepsilon\|_{2^*}},$$

onde Φ_ε foi definida em (3.15). Como $\|w_\varepsilon\|_{2^*} = 1$, podemos usar a homogeneidade de Q e H para obter, para qualquer $t \geq 0$,

$$I_{\lambda,\mu}(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) = \frac{t^2}{2}(A^2 + B^2)\|w_\varepsilon\|^2 - t^q Q_{\lambda,\mu}(A, B)\|w_\varepsilon\|_q^q - \frac{t^{2^*}}{2^*} H(A, B).$$

Denotamos por $h_\varepsilon(t)$ o lado direito da equação acima e consideramos dois casos distintos.

Caso 1. $2 < q < 2^*$.

A função $h_\varepsilon(t)$ é da forma $At^2 - Bt^q - Ct^{2^*}$, com A, B e C positivos. Como na prova do Lema 3.5 concluímos que $h_\varepsilon(t)$ tem um único ponto crítico $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$h_\varepsilon(t_\varepsilon) = \max_{t \geq 0} h_\varepsilon(t). \tag{3.18}$$

Seja

$$g_\varepsilon(t) := \frac{t^2}{2}(A^2 + B^2)\|w_\varepsilon\|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*} H(A, B), \quad t \geq 0,$$

e note que o valor máximo de g_ε ocorre no ponto

$$\tilde{t}_\varepsilon := \left\{ \frac{(A^2 + B^2)\|w_\varepsilon\|^2}{H(A, B)} \right\}^{1/(2-2^*)}. \tag{3.19}$$

Portanto, para cada $t \geq 0$,

$$g_\varepsilon(t) \leq g_\varepsilon(\tilde{t}_\varepsilon) = \frac{1}{N} \left(\frac{(A^2 + B^2)\|w_\varepsilon\|^2}{H(A, B)^{2/2^*}} \right)^{N/2},$$

de modo que

$$h_\varepsilon(t_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}\left(\frac{(A^2+B^2)\|w_\varepsilon\|^2}{H(A,B)^{2/2^*}}\right)^{N/2} - t_\varepsilon^q Q_{\lambda,\mu}(A,B)\|w_\varepsilon\|_q^q. \tag{3.20}$$

Afirmamos que, para algum $c_2 > 0$

$$t_\varepsilon^q Q_{\lambda,\mu}(A,B) \geq c_2.$$

De fato, se isto não ocorre, então temos que $t_{\varepsilon_n} \to 0$ para alguma sequência $\varepsilon_n \to 0^+$. Entretanto está provado em [5, (1.11) e (1.12)] que

$$\|w_\varepsilon\|^2 = S + O(\varepsilon^{(N-2)/2}). \tag{3.21}$$

Assim, usando o Lema 3.5 concluímos que

$$0 < c_{\lambda,\mu} \leq \sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(tAw_{\varepsilon_n}, tBw_{\varepsilon_n}) = I_{\lambda,\mu}(t_{\varepsilon_n}Aw_{\varepsilon_n}, t_{\varepsilon_n}Bw_{\varepsilon_n}) \to 0,$$

o que não pode ocorrer. Portanto, a afirmação é verdadeira. De (3.20) e (3.21) obtemos que

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(t_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N}\left(\frac{(A^2+B^2)}{H(A,B)^{2/2^*}}S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})\right)^{N/2} - c_2\|w_\varepsilon\|_q^q \\ &\leq \frac{1}{N}S_H^{N/2} + O(\varepsilon^{(N-2)/2}) - c_2\|w_\varepsilon\|_q^q. \end{aligned}$$

Em [25, Afirmação 2, p. 778] está provado que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{(2-N)/2}\|w_\varepsilon\|_q^q = +\infty$. Assim, concluímos da equação acima que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$c_{\lambda,\mu} \leq \sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(tAw_\varepsilon, BAw_\varepsilon) = h_\varepsilon(t_\varepsilon) < \frac{1}{N}S_H^{N/2}.$$

Caso 2. $q = 2$.

Neste caso temos que $h_\varepsilon'(t) = 0$, se e somente, se

$$(A^2+B^2)\|w_\varepsilon\|^2 - 2Q_{\lambda,\mu}(A,B)\|w_\varepsilon\|_2^2 = t^{2^*-2}H(A,B).$$

Por hipótese temos que $\lambda < \theta_1(\Omega)/2$. Portanto, podemos usar a Desigualdade de

Poincaré para obter

$$\begin{aligned} 2Q_{\lambda,\mu}(A,B)\|w_\varepsilon\|_2^2 &\leq 2\lambda(A^2+B^2)\|w_\varepsilon\|_2^2 \\ &< \theta_1(\Omega)(A^2+B^2)\|w_\varepsilon\|_2^2 \leq (A^2+B^2)\|w_\varepsilon\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, existe $t_\varepsilon > 0$ satisfazendo (3.18). Usando a definição de w_ε e [5, (1.12) e (1.13)] obtemos

$$\|w_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \varepsilon^{(N-2)/4} + O(\varepsilon^{(N-2)/2}) & \text{se } N \geq 5, \\ \varepsilon^{(N-2)/2}|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^{(N-2)/2}) & \text{se } N = 4. \end{cases} \tag{3.22}$$

Argumentando como no primeiro caso concluímos que, para $\varepsilon > 0$ pequeno, ocorre

$$h_\varepsilon(t_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}S_H^{N/2} + O(\varepsilon^{(N-2)/2}) - c_2\|w_\varepsilon\|_2^2 < \frac{1}{N}S_H^{N/2},$$

onde usamos (3.22) na última inequação. Isto conclui a prova. □

Observação 3.11. *O lema anterior continua válido se supusermos $N = 3$, $4 < q < 6$ e λ, $\mu > 0$. Na verdade, é suficiente notarmos que neste caso, podemos usar as contas apresentadas em [25, p. 779, caso $N = 3$], para concluir que a função w_ε acima satisfaz* $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{(2-N)/2}\|w_\varepsilon\|_q^q = +\infty$. *Assim, o mesmo argumento do Caso 1 é válido.*

Como consequência dos Lemas 3.9 e 3.10 obtemos a seguinte generalização do Teorema 1 em [24].

Teorema 3.12. *Suponha que valem as hipóteses do Teorema C. Então o problema $(\mathcal{P}_2)$ possui uma solução não negativa e não trivial se $2 < q < 2^*$ e $\lambda, \mu > 0$, ou $q = 2$ e $\lambda, \mu \in (0, \theta_1(\Omega)/2)$. O mesmo resultado é verdadeiro se $N = 3$, $4 < q < 6$ e λ, $\mu > 0$.*

Demonstração. Como $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz a geometria do Passo da Montanha, existe $(z_n) \subset X$ tal que

$$I_{\lambda,\mu}(z_n) \to c_{\lambda,\mu}, \quad I'_{\lambda,\mu}(z_n) \to 0.$$

Segue do Lema 3.9 (com a Observação 3.11 no caso $N = 3$) e o Lema 3.10 que (z_n) converge, a menos de uma subsequência, para um ponto crítico não nulo $z = (u, v) \in X$ de $I_{\lambda,\mu}$. De acordo com (3.6) e (3.5), obtemos

$$I'_{\lambda,\mu}(z)z^- = -\|z^-\|^2 - \int \left(\nabla Q(u^+, v^+) \cdot (u^-, v^-) + \frac{1}{2^*}\nabla H(u^+, v^+) \cdot (u^-, v^-)\right).$$

Como z é ponto crítico e a integral acima é nula, segue que $z^- = 0$. Portanto, u, $v \geq 0$ em Ω e o teorema está provado. □

Teorema 3.13. *Suponha que valem as hipóteses do Teorema D. Então o problema* $(\mathcal{P}_2)$ *possui uma solução não negativa e não trivial se* λ, $\mu > 0$. *O mesmo resultado é válido se* $N = 3$, $4 < q < 6$ *e* λ, $\mu > 0$.

Demonstração. Como antes, obtemos um ponto crítico não trivial z de $I_{\lambda,\mu}$. Segue do item (iii) do Lema 3.2 que extensão dada em (3.7) satisfaz $Q_s(s,t) \geq 0$ para $s \leq 0$, e $Q_t(s,t) \geq 0$ para $t \leq 0$. Assim, usando a extensão de H e argumentando como no teorema anterior obtemos

$$0 = I'_{\lambda,\mu}(z)z^- = -\|z^-\|^2 - \int \big(Q_u(u,v)u^- + Q_v(u,v)v^-\big) \leq -\|z^-\|^2,$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 3.14. *No Lema 3.5 vimos que* $\widehat{c}_{\lambda,\mu} \leq \widetilde{c}_{\lambda,\mu} = c_{\lambda,\mu}$. *Sob as hipóteses consideradas nos Teoremas C e D vemos que existe* $z \in X$ *tal que*

$$I_{\lambda,\mu}(z) = c \text{ e } I'(z) = 0.$$

Logo $z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$, *o que mostra que* $\widehat{c}_{\lambda,\mu} \geq c_{\lambda,\mu}$. *Concluímos assim que* $\widehat{c}_{\lambda,\mu} = \widetilde{c}_{\lambda,\mu} = c_{\lambda,\mu}$.

3.2 Um lema de concentração de compacidade

Nesta seção denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ o espaço de Banach das medidas de Radon finitas e mensuráveis em $\mathbb{R}^N$ com a norma

$$|\!|\sigma|\!| := \sup_{\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1} |\sigma(\varphi)|,$$

em que $C_0(\mathbb{R}^N)$ denota o conjunto de todas as funções $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ contínuas de suporte compacto. Dizemos que uma sequência $(\sigma_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ converge fracamente no sentido da medidas para $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ quando $\sigma_n(\varphi) \to \sigma(\varphi)$ para toda $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Segue do Teorema de Banach-Alaoglu que toda sequência limitada $(\sigma_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ contém uma subsequência que converge fracamente.

O próximo resultado é uma versão do segundo Lema de Concentração de Compacidade de [22, Lemma I.1]. Para facilitar sua leitura definimos $|\nabla w|^2 := |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2$ para toda $w = (u,v) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 3.15. *Suponha que a sequência* $(w_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *satisfaz*

$$\begin{aligned}
&w_n \rightharpoonup w && \textit{fracamente em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),\\
&w_n(x) \to w(x) && \textit{para q.t.p } x \in \mathbb{R}^N,\\
&|\nabla(w_n - w)|^2 \rightharpoonup \sigma && \textit{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),\\
&H(w_n - w) \rightharpoonup \nu && \textit{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

e defina

$$\sigma_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|>R} |\nabla w_n|^2 \, \mathrm{d}x, \qquad \nu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|>R} H(w_n) \, \mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

Então

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 \, \mathrm{d}x = \|\sigma\| + \sigma_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{3.24}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} H(w_n) \, \mathrm{d}x = \|\nu\| + \nu_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} H(w) \, \mathrm{d}x, \tag{3.25}$$

$$\|\nu\|^{2/2^*} \le S_H^{-1}\|\sigma\| \quad e \quad \nu_\infty^{2/2^*} \le S_H^{-1}\sigma_\infty. \tag{3.26}$$

Além do mais, se $w = 0$ *e* $\|\nu\|^{2/2^*} = S_H^{-1}\|\sigma\|$, *então* ν *e* μ *estão concentradas em um único ponto.*

Demonstração. Sejam

$$w_n = (u_n, v_n), \quad w = (u, v), \quad \widetilde{w}_n := w_n - w = (u_n - u, v_n - v) =: (\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n).$$

Por hipótese temos que

$$\begin{aligned}
&\widetilde{w}_n \rightharpoonup 0 && \text{fracamente em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),\\
&\widetilde{w}_n(x) \to 0 && \text{para q.t.p } x \in \mathbb{R}^N,\\
&|\nabla \widetilde{w}_n|^2 \rightharpoonup \sigma && \text{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),\\
&H(\widetilde{w}_n) \rightharpoonup \nu && \text{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Em vista da definição de S_H e da homogeneidade de H, para cada função não negativa $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^{2^*} H(\widetilde{w}_n) \mathrm{d}x\right)^{2/2^*} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi \widetilde{w}_n) \mathrm{d}x\right)^{2/2^*} \le S_H^{-1} \|\varphi \widetilde{w}_n\|^2. \tag{3.27}$$

Definindo
$$A_n := \int |\nabla\varphi|^2(\widetilde{u}_n^2 + \widetilde{v}_n^2)\,\mathrm{d}x$$
e
$$B_n := 2\int \varphi(\widetilde{u}_n\nabla\varphi\cdot\nabla\widetilde{u}_n + \widetilde{v}_n w\nabla\varphi\cdot\nabla\widetilde{v}_n)\,\mathrm{d}x,$$
obtemos
$$\|\varphi\widetilde{w}_n\|^2 = A_n + B_n + \int (|\nabla\widetilde{u}_n|^2 + |\nabla\widetilde{v}_n|^2)\varphi^2\,\mathrm{d}x.$$

Como $\widetilde{w}_n \to 0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e φ tem suporte compacto então $A_n = o_n(1)$. Para cada $1 \le i \le N$ fixado a sequência $(\varphi\varphi_{x_i}(\widetilde{u}_n)_{x_i})$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como $\widetilde{u_n} \to 0$ fortemente em $L^2(\operatorname{supp}\varphi)$, concluímos que $\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(\widetilde{u}_n\nabla\varphi\cdot\nabla\widetilde{u}_n)\mathrm{d}x \to 0$. O mesmo vale para o segundo termo de B_n, e portanto $B_n = o_n(1)$. Assim

$$\|\varphi\widetilde{w}_n\|^2 = o_n(1) + \int (|\nabla\widetilde{u}_n|^2 + |\nabla\widetilde{v}_n|^2)\varphi^2\,\mathrm{d}x = o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N}\varphi^2\,\mathrm{d}\sigma, \tag{3.28}$$

em que usamos na última igualdade a convergência $|\nabla\widetilde{w}_n|^2 \rightharpoonup \sigma$. Passando a igualdade de (3.27) ao limite, usando a expressão acima e a convergência $H(\widetilde{w}_n) \rightharpoonup \nu$, concluímos que
$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^{2^*}\,\mathrm{d}\nu\right)^{2/2^*} \le S_H^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^2\,\mathrm{d}\sigma, \tag{3.29}$$
o que estabelece a primeira desigualdade em (3.26).

Dada $\psi \in C_0(\mathbb{R}^N)$, podemos usar a limitação de ψ e o Lema 3.7 para obter

$$\int_{\mathbb{R}^N}\psi(x)H(\widetilde{w}_n)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\psi(x)H(w_n)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}\psi(x)H(w)\mathrm{d}x + o_n(1),$$

de modo que
$$H(\widetilde{w}_n) \rightharpoonup H(w) + \nu, \quad \text{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N). \tag{3.30}$$

Como $\widetilde{w}_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\times\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x = \limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R}|\nabla w_n|^2\,\mathrm{d}x - \int_{|x|>R}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.31}$$

Segue da expressão acima e de (3.23) que

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\mathrm{d}x = \sigma_\infty. \tag{3.32}$$

Decorre do Lema 3.7 que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R} H(\widetilde{w}_n)\,\mathrm{d}x = \limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R} H(w_n)\,\mathrm{d}x - \int_{|x|>R} H(w)\,\mathrm{d}x, \tag{3.33}$$

donde se conclui que

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R} H(\widetilde{w}_n)\mathrm{d}x = \nu_\infty. \tag{3.34}$$

Como

$$|\nabla\widetilde{w}_n|^2 = |\nabla w_n|^2 + 2\nabla w_n\nabla w + |\nabla w|^2,$$

segue da convergência fraca $\widetilde{w}_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $\widetilde{w}_n \rightharpoonup \sigma$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ que

$$|\nabla\widetilde{w}_n|^2 \rightharpoonup |\nabla w_n|^2 + \sigma \ \text{ fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N). \tag{3.35}$$

Para $R > 0$, seja $\varphi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi_R \equiv 0$ em $B_R(0)$ e $\varphi_R \equiv 1$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{R+1}(0)$. Como $\widetilde{w}_n \to 0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, podemos usar um argumento análogo ao utilizado em (3.28) para obter

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left\{\int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi_R\widetilde{w}_n)\,\mathrm{d}x\right\}^{2/2^*} &\le \limsup_{n\to\infty} S_H^{-1}\|\varphi_R\widetilde{w}_n\|^2\\ &\le S_H^{-1}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\varphi_R^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.36}$$

como

$$\int_{|x|>R+1}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x \le \int_{|x|>R}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x,$$

então

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\varphi_R^2(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.37}$$

De maneira análoga temos

$$\int_{|x|>R+1} H(\widetilde{w}_n)\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi_R\widetilde{w}_n)\,\mathrm{d}x \le \int_{|x|>R} H(\widetilde{w}_n)\,\mathrm{d}x,$$

e portanto

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi_R\widetilde{w}_n)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R} H(\widetilde{w}_n)\,\mathrm{d}x. \tag{3.38}$$

Assim a segunda desigualdade em (3.26) decorre de (3.32), (3.34), (3.36), (3.37) e (3.38).

Usando (3.32) e (3.35) obtemos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x &= \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_R|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x+\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\varphi_R)|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x\\ &= \limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R}|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x+\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\varphi_R)|\nabla\widetilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x\\ &= \sigma_\infty+\int_{\mathbb{R}^N}(1-\varphi_R)|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}(1-\varphi_R)\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

Como a última expressão independe da escolha de R, tomando o limite $R\to\infty$ e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos (3.24). Procedendo de maneira análoga e usando (3.34) e (3.30) obtemos a veracidade de (3.25).

Vamos provar a última afirmação do lema. Suponha então que $\|\nu\|^{2/2^*}=S_H^{-1}\|\sigma\|$. Segue da desigualdade de Hölder e (3.29) que, para toda função positiva $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^N)$, vale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^{2^*}\mathrm{d}\nu &\le S_H^{-2^*/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^2\mathrm{d}\sigma\right)^{-2^*/2}\\ &\le S_H^{-2^*/2}\|\sigma\|^{2/(N-2)}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^{2^*}\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

A arbitrariedade de φ implica que, para todo conjunto mensurável $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^N$, temos

$$\nu(\mathcal{C})\le S_H^{-\frac{2^*}{2}}\|\sigma\|^{\frac{2}{N-2}}\sigma(\mathcal{C}).$$

Afirmamos que $\nu(\mathcal{C})=S_H^{-\frac{2^*}{2}}\|\sigma\|^{\frac{2}{N-2}}\sigma(\mathcal{C})$ para todo conjunto mensurável $\mathcal{C}$. De fato, suponha por contradição que existe $\mathcal{K}$ tal que

$$\nu(\mathcal{K})<S_H^{-\frac{2^*}{2}}\|\sigma\|^{\frac{2}{N-2}}\sigma(\mathcal{K}).$$

Então

$$\begin{aligned}\|\nu\| &= \nu(\mathcal{K})+\nu(\mathbb{R}^N-\mathcal{K})\\ &< S_H^{-\frac{2^*}{2}}\|\sigma\|^{\frac{2}{N-2}}\sigma(\mathcal{K})+S_H^{-\frac{2^*}{2}}\|\sigma\|^{\frac{2}{N-2}}\sigma(\mathbb{R}^N-\mathcal{K})\\ &= S_H^{-\frac{2^*}{2}}\|\sigma\|^{\frac{2}{N-2}}\sigma(\mathbb{R}^N)\\ &= S_H^{-\frac{2^*}{2}}\|\sigma\|^{-\frac{2^*}{2}}.\end{aligned}$$

Isto contradiz a hipótese $\|\nu\|^{2/2^*}=S_H^{-1}\|\sigma\|$.

As considerações acima mostram que $\nu = S_H^{-\frac{2^*}{2}} |\sigma|^{\frac{2}{N-2}} \sigma$, de modo que

$$\mathrm{d}\nu = S_H^{-\frac{2^*}{2}} |\sigma|^{\frac{2}{N-2}} \mathrm{d}\sigma.$$

Segue de (3.29) que

$$|\sigma|^{2/N} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^{2^*} \mathrm{d}\sigma \right\}^{2/2^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 \mathrm{d}\sigma.$$

Logo, para todo $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ compacto,

$$\sigma(\mathbb{R}^N)^{2/N} \sigma(\mathcal{C})^{2/2^*} \leq \sigma(\mathcal{C}).$$

Se $\sigma(\mathcal{C}) > 0$ então $\sigma(\mathbb{R}^N) \leq \sigma(\mathcal{C})$, donde se conclui que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathbb{R}^N)$ para todo conjunto com σ-medida positiva. Assim σ, e consequentemente ν, está concentrada em um único ponto pois, caso contrário, existiriam compactos disjuntos, ambos com medida não nula, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, contendo respectivamente $x_1 \neq x_2$, tais que $\sigma(\mathcal{C}_1) \neq \sigma(\mathcal{C}_2)$. $\square$

Observação 3.16. *Para referências futuras gostaríamos de observar que a última conclusão do lema 3.15 ainda é verdadeira no caso em que $w \not\equiv 0$. De fato, neste caso definimos $\widetilde{w}_n := w_n - w$ e observamos que*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{w}_n \rightharpoonup \widetilde{w} = 0 && \textit{fracamente em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),\\
&\widetilde{w}_n(x) \to 0 && \textit{q.t.p } x \in \mathbb{R}^N,\\
&|\nabla(\widetilde{w}_n - \widetilde{w})|^2 \rightharpoonup \widetilde{\sigma} && \textit{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),\\
&H(\widetilde{w}_n - \widetilde{w}) \rightharpoonup \widetilde{\nu} && \textit{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{w}_n - \widetilde{w} = w_n - w$, então $\widetilde{\sigma} = \sigma$ e $\widetilde{\nu} = \nu$, onde σ e ν são dada no Lema 3.15. Assim, se $|\nu|^{2/2^*} = S_H^{-1} |\sigma|$ também temos que $|\widetilde{\nu}|^{2/2^*} = S_H^{-1} |\widetilde{\sigma}|$ e o resultado segue a última parte do Lema 3.15.

Dada $z \in X$, estenderemos z para todo o $\mathbb{R}^N$ escrevendo $z(x) := 0$ se $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Para apresentarmos o próximo resultado, dado $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$, definimos $z^{y,r} \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ por

$$z^{y,r}(x) := r^{(N-2)/2} z(rx + y), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Proposição 3.17. *Suponha que $(z_n) \subset X$ é tal que*

$$\int H(z_n) = 1 \quad e \quad \lim_{n \to \infty} \|z_n\|^2 = S_H.$$

Então existe $(r_n) \subset (0,\infty)$ *e* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *tais que a sequência* $(z_n^{y_n,r_n})$ *converge fortemente para* $z \neq 0$ *em* $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$*. Além disso, quando* $n \to \infty$*, temos que* $r_n \to 0$ *e* $y_n \to \overline{y} \in \overline{\Omega}$*.*

Demonstração. Definimos inicialmente $z_n(x) := 0$ se $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Para cada $r > 0$

$$F_n(r) := \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} H(z_n).$$

Como $\lim_{r\to 0} F_n(r) = 0$ e $\lim_{r\to\infty} F_n(r) = 1$, existe $r_n > 0$ e uma sequência $(y_n^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo

$$\frac{1}{2} = F_n(r_n) = \lim_{k\to\infty} \int_{B_{r_n}(y_n^k)} H(z_n).$$

Lembrando que $\lim_{|y|\to\infty} \int_{B_{r_n}(y)} H(z_n) = 0$ concluímos que (y_n^k) é limitada. Portanto, a menos de uma subsequência, $\lim_{k\to\infty} y_n^k = y_n \in \mathbb{R}^N$ e assim obtemos

$$\frac{1}{2} = \int_{B_{r_n}(y_n)} H(z_n).$$

Agora provaremos que as sequências (r_n) e (y_n) acima satisfazem o resultado do teorema. Primeiramente observe que

$$\frac{1}{2} = \int_{B_{r_n}(y_n)} H(z_n) = \int_{B_1(0)} H(z_n^{y_n,r_n}) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} H(z_n^{y_n,r_n}). \tag{3.39}$$

Definindo $w_n := z_n^{y_n,r_n}$ e usando uma mudança de variável temos

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|z_n\|^2 = S_H, \quad \int_{\mathbb{R}^N} H(w_n) = 1.$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 3.15 para obter $w \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$S_H = |\sigma| + \sigma_\infty + \|w\|^2, \quad 1 = |\nu| + \nu_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} H(w), \tag{3.40}$$

$$|\nu|^{2/2^*} \leq S_H^{-1} |\sigma| \quad \text{e} \quad \nu_\infty^{2/2^*} \leq S_H^{-1} \sigma_\infty. \tag{3.41}$$

As igualdades (3.40) implicam que $\int H(w), |\nu|, \nu_\infty \in [0,1]$. Se um desses valores pertence ao intervalo $(0,1)$, podemos usar (3.40), $2/2^* < 1$, $(\int H(w))^{2/2^*} \leq S_H^{-1}\|w\|^2$ e

(3.41) para obter

$$\begin{aligned} S_H &= S_H\left(\|\nu\| + \nu_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} H(w)\right) \\ &< S_H\left(\|\nu\|^{2/2^*} + \nu_\infty^{2/2^*} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} H(w)\right)^{2/2^*}\right) \leq S_H, \end{aligned}$$

que é uma contradição. Assim $\int H(w)$, $\|\widetilde{\nu}\|$, $\nu_\infty \in \{0,1\}$. Decorre de (3.39) que $\int_{|x|>R} H(w_n) \leq 1/2$ para todo $R > 1$. Portanto, podemos concluir que $\nu_\infty = 0$.

Agora provaremos que $\|\nu\| = 0$. Suponha, por contradição, que $\|\nu\| = 1$. Decorre da primeira equação em (3.41) que $S_H \leq \|\sigma\|$. Por outro lado, a primeira equação em (3.40) fornece $\|\sigma\| \leq S_H$. Portanto, concluímos que $\|\sigma\| = S_H$. Como supomos que $\|\nu\| = 1$ então obtemos $\|\nu\|^{2/2^*} = S_H^{-1}\|\sigma\|$. Segue da observação (3.16) que $\nu = \delta_{x_0}$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Assim, de (3.39), obtemos

$$\frac{1}{2} \geq \lim_{n\to\infty} \int_{B_1(x_0)} H(w_n) = \int_{B_1(x_0)} \mathrm{d}\nu = \|\nu\| = 1.$$

Esta contradição prova que $\|\nu\| = 0$. Como $\|\nu\| = \nu_\infty = 0$ então temos que $\int_{\mathbb{R}^N} H(w) = 1$. Isto e (3.40) fornece

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|^2 = S_H \geq \|w\|^2 \geq S_H \left(\int_{\mathbb{R}^N} H(w)\right)^{2/2^*} = S_H.$$

Assim, $\|w\|^2 = S_H$ e portanto $w_n \to w \not\equiv 0$ fortemente em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $w_n(x) \to w(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$.

Para concluirmos nossa demonstração, observamos que

$$\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)\times L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{r_n^2}\|z_n\|_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

Sendo (z_n) limitada e $w \not\equiv 0$, segue da equação acima que, a menos de subsequência, $r_n \to r_0 \geq 0$. Caso $|y_n| \to \infty$ então, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $r_n x + y_n \notin \Omega$ para $n \geq n_x$. Para tais valores de n temos que $w_n(x) = 0$. Tomando o limite e lembrando que $x \in \mathbb{R}$ é arbitrário, concluímos que $w \equiv 0$, que é absurdo. Portanto, para uma subsequecia, $y_n \to y \in \mathbb{R}^N$.

Afirmamos que $r_0 = 0$. De fato, suponha por contradição que $r_0 > 0$. Então, tomando n grande, o $\Omega_n := (\Omega - y_n)/r_n$ aproxima-se de $\Omega_0 := (\Omega - y)/r_0 \neq \mathbb{R}^N$. Isto implica que w tem suporte compacto em $\mathbb{R}^N$. Por outro lado, como w atinge o ínfimo em (1.1) e H é homogênea, podemos usar o Teorema do Multiplicador de Lagrange para concluir que

$w = (u, v)$ satisfaz

$$-\Delta u = \lambda H_u(u, v), \ -\Delta v = \lambda H_v(u, v), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

para $\lambda = 2S_H/2^* > 0$. Segue de (H_3) e do Princípio do Máximo que pelo menos uma das funções u, v é positiva em $\mathbb{R}^N$. Mas isto contradiz $\operatorname{supp} w \subset \Omega_0$. Portando, podemos concluir que $r_0 = 0$. Finalmente, se $y \notin \overline{\Omega}$ obtemos $r_n x + y_n \notin \Omega$ para valores grandes de n, e portanto novamente devemos ter $w \equiv 0$. Assim, $y \in \overline{\Omega}$ e a prova está finalizada. □

Finalizaremos esta seção com um estudo do comportamento assintótico do nível minimax $c_{\lambda,\mu}$ quando ambos os parâmetros tendem a zero.

Lema 3.18. *Temos o seguinte resultado*

$$\lim_{\lambda,\,\mu \to 0^+} c_{\lambda,\mu} = c_{0,0} = \frac{1}{N} S_H^{N/2}.$$

Demonstração. Primeiramente provaremos a segunda igualdade. Quando $\lambda = \mu = 0$ então $Q_{0,0} \equiv (0, 0)$. Sejam A, B, w_ε e $\tilde{t}_\varepsilon$ dados na prova do Lema 3.10. Segue de (3.19) que

$$(\tilde{t}_\varepsilon A w_\varepsilon, \tilde{t}_\varepsilon B w_\varepsilon) \in \mathcal{N}_{0,0}.$$

Isso, (3.21) e o Lema 3.5 implicam que

$$\begin{aligned} c_{0,0} \ &\leq \ I_{0,0}(\tilde{t}_\varepsilon A w_\varepsilon, \tilde{t}_\varepsilon B w_\varepsilon) = \frac{1}{N} \left\{ \frac{(A^2 + B^2)}{H(A, B)^{2/2^*}} \|w_\varepsilon\|^2 \right\}^{N/2} \\ &= \ \frac{1}{N} \left\{ \frac{(A^2 + B^2)}{H(A, B)^{2/2^*}} (S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})) \right\}^{N/2}. \end{aligned}$$

Tomando o limite $\varepsilon \to 0^+$ e usando (3.17), concluímos que $c_{0,0} \leq \frac{1}{N} S_H^{N/2}$.

Para obtermos a desigualdade oposta, seja $(z_n) \subset X$ tal que $I_{0,0}(z_n) \to c_{0,0}$ e $I'_{0,0}(z_n) \to 0$. Uma tal sequência pode ser obtida através do Princípio Variacional de Ekeland. De modo análogo ao Lema 3.9 a sequência (z_n) é limitada e portanto $I'_{0,0}(z_n)z_n = \|z_n\|^2 - \int H(z_n) = o_n(1)$. Logo a menos de subsequência existe b tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|z_n\|^2 = b = \lim_{n \to \infty} \int H(z_n).$$

Segue da definição de S_H que $S_H \left(\int H(z_n) \right)^{2/2^*} \leq \|z_n\|^2$. Passando ao limite concluímos que $S_H b^{2/2^*} \leq b$, decorre do Lema 3.3 que $b > 0$. Logo $b \geq S_H^{N/2}$ e portanto

$$c_{0,0} = \lim_{n\to\infty} I_{0,0}(z_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|z_n\|^2 - \frac{1}{2^*}\int H(z_n)\right) = \frac{1}{N}b \geq \frac{1}{N}S_H^{N/2}.$$

Concluímos então que $c_{0,0} = \frac{1}{N}S_H^{N/2}$.

Agora calcularemos $\lim_{\lambda,\,\mu\to 0^+} c_{\lambda,\mu}$. Sejam (λ_n), $(\mu_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda_n,\,\mu_n \to 0^+$. Como μ_n é sempre não negativo temos que $Q_{\lambda_n,\mu_n}(z) \geq 0$ sempre que z é não negativa. Portanto, se $z \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} c_{\lambda_n,\mu_n} &= \inf_{z\neq(0,0)} \max_{t\geq 0} I_{\lambda_n,\mu_n}(tz) \\ &\leq \inf_{z\neq(0,0),\,z\geq 0} \max_{t\geq 0} I_{\lambda_n,\mu_n}(tz) \\ &\leq \inf_{z\neq(0,0),\,z\geq 0} \max_{t\geq 0} I_{0,0}(tz) = c_{0,0}, \end{aligned}$$

onde usamos, na última equação, que o ínfimo $c_{0,0}$ é atingido por uma função não negativa. A expressão acima implica que

$$\limsup_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\mu_n} \leq c_{0,0}. \tag{3.42}$$

Por outro lado, segue dos Teoremas 3.12 e 3.13 que existe $(z_n) = (u_n, v_n) \subset X$, com $u_n,\ v_n \geq 0$ tal que

$$I_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) = c_{\lambda_n,\mu_n}, \quad I'_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) = 0.$$

Sendo c_{λ_n,μ_n} limitada, o mesmo argumento usado em (3.11) implica que (z_n) é limitada em X. Como $z_n \geq 0$, segue do item (i) do Lema 3.2 que $0 \leq \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) \leq \lambda_n \int(|u_n|^q + |v_n|^q)$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) = 0. \tag{3.43}$$

Afirmamos que, para todo $n \geq n_0$, a menos de uma subsequência, a integral $\int H(z_n)$ é positiva. De fato, se $\int H(z_n) = 0$ então

$$\begin{aligned} \|z_n\|^2 &= q\int Q_{\lambda,\mu}(z_n) + \int H(z_n) \\ &\leq \lambda_n C_q \|z_n\|^q, \end{aligned}$$

onde $C_q > 0$ depende apenas de q. Deste modo $1 \leq \lambda_n C_q \|z_n\|^{q-2}$, o que contraria $\lambda_n \to 0^+$. Como $\int H(z_n) > 0$ podemos usar o Corolário 3.6 para garantir a existência de $t_n > 0$ tal que $t_n z_n \in \mathcal{N}_{0,0}$. Como $z_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,\mu_n}$, temos que

$$\begin{aligned} c_{0,0} &\leq I_{0,0}(t_n z_n) = I_{\lambda_n,\mu_n}(t_n z_n) + t_n^q \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) \\ &\leq I_{\lambda_n,\mu_n}(t_n z_n) + t_n^q \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) \\ &= c_{\lambda_n,\mu_n} + t_n^q \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(z_n). \end{aligned}$$

Se (t_n) for limitada, podemos usar a estimativa acima e (3.43) para obter

$$c_{0,0} \leq \liminf_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\mu_n}.$$

Isto e (3.42) provam o lema.

Resta verificar que (t_n) é limitada. Segue da definição de t_n que

$$t_n = \left(\frac{\|z_n\|^2}{\int H(z_n)} \right)^{1/(2^*-2)}. \tag{3.44}$$

Como $z_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,\mu_n}$ então

$$\|z_n\|^2 = q \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) + \int H(z_n) \leq o_n(1) + S_H^{-2^*/2} \|z_n\|^{2^*}.$$

Portanto $\|z_n\|^2 \geq c_1 > 0$ e assim obtemos da expressão acima que $\int H(z_n) \geq c_2 > 0$. Isto, e a limitação de (z_n) e (3.44) implicam que (t_n) é limitada. $\square$

3.3 Demonstração dos Teoremas C e D

Nessa seção provaremos os nossos resultados de multiplicidade para o sistema $(\mathcal{P}_2)$. Vamos utilizar o seguinte resultado abstrato (cf. [33, pg. 90]).

Teorema 3.19. *Seja E um espaço de Banach, $\mathcal{M} \subset E$ uma C^1-variedade e $\mathcal{J} \in C^1(E,\mathbb{R})$ um funcional limitado inferiormente em $\mathcal{M}$. Suponha que $\mathcal{J}$ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \leq d$ e considere $\mathcal{J}^d := \{u \in \mathcal{M} \ : \ \mathcal{J}(u) \leq d\}$. Então o funcional $\mathcal{J}$ restrito à $\mathcal{M}$ tem pelo menos cat$(\mathcal{J}^d)$ pontos críticos u tais que $\mathcal{J}(u) \leq d$.*

Maiores detalhes sobre a categoria de Ljusternik-Schnirelmann podem ser encontrados no Apêndice desse capítulo.

Fixemos $r > 0$ tal que os conjuntos

$$\Omega_r^+ := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, \Omega) < r\}, \quad \Omega_r^- := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes a Ω. Definimos o funcional

$$J_{\lambda,\mu} := \frac{1}{2}\|z\|^2 - \int Q_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{2^*}\int H(z), \quad z \in X_{r,rad},$$

onde

$$X_{r,rad} := \{(u, v) : u,\, v \in H_0^1(B_r(0)) \text{ e } u,\, v \text{ são funções radiais}\}.$$

Seja $\mathcal{M}_{\lambda,\mu} := \left\{z \in X_{r,rad} \;:\; J'_{\lambda,\mu}(z)z = 0\right\}$ a Variedade de Nehari associada a este funcional e defina

$$m_{\lambda,\mu} := \inf_{z\in\mathcal{M}_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(z).$$

Segue de (3.16) que S_H é atingido por funções de $\mathcal{D}^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, argumentando como na prova do Lema 3.18 e dos Teoremas C e D, obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.20. *Suponha que valem as hipóteses do Teorema C. Então o ínfimo $m_{\lambda,\mu}$ é atingido por uma função radial não negativa e não trivial se $2 < q < 2^*$ e $\lambda,\, \mu > 0$, ou $q = 2$ e $\lambda,\, \mu \in (0, \theta_1(B_r(0))/2)$. Além do mais*

$$m_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}S_H^{N/2} \quad e \quad \lim_{\lambda,\,\mu\to 0^+} m_{\lambda,\mu} = \frac{1}{N}S_H^{N/2}.$$

O mesmo resultado é válido se assumirmos as hipóteses do Teorema D e $\lambda,\ \mu > 0$. O lema ainda é válido se $N = 3$, $4 < q < 6$ e $\lambda,\ \mu > 0$.

A fim de enunciarmos o próximo resultado definimos a função baricentro $\beta_{\lambda,\mu} : \mathcal{N}_{\lambda,\mu} \to \mathbb{R}^N$ por

$$\beta_{\lambda,\mu}(z) := \frac{1}{S_H^{N/2}}\int H(z)x\,\mathrm{d}x.$$

Esta função tem as seguintes propriedades.

Lema 3.21. *Se satisfaz (Q_1) então existe $\lambda^* > 0$ tal que $\beta_{\lambda,\mu}(z) \in \Omega^+_{r/2}$ sempre que $z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$, $\lambda,\, \mu \in (0, \lambda^*)$ e $I_{\lambda,\mu}(z) \leq m_{\lambda,\mu}$. O mesmo ocorre se Q satisfaz $(\widehat{Q_1})$ e $\lambda,\, \mu,\, \widehat{\lambda} \in (0, \lambda^*)$.*

Demonstração. Vamos considerar primeiro o caso em que Q satisfaz (Q_1). Argumentando por contradição, suponha que existem (λ_n), $(\mu_n) \subset \mathbb{R}^+$ e $(w_n) \subset \mathcal{N}_{\lambda_n,\mu_n}$ tal que $\lambda_n,\, \mu_n \to$

0^+ quando $n \to \infty$, $I_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \leq m_{\lambda_n,\mu_n}$ mas $\beta_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \notin \Omega^+_{r/2}$.

Como antes, temos que (w_n) é limitada em X. Além disso

$$0 = I'_{\lambda_n,\mu_n}(w_n)w_n = \|w_n\|^2 - q\int Q_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) - \int H(w_n).$$

Escrevendo $w_n = (u_n, v_n)$, usando o Lema 3.2(i), a limitação de (w_n), a imersão $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ e $\lambda_n \to 0$, concluímos que

$$0 \leq \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \leq \lambda_n(\|u_n\|_q^q + \|v_n\|_q^q) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Portanto, a menos de subsequência, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int H(w_n) = b \geq 0.$$

Note que

$$c_{\lambda_n,\mu_n} \leq I_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) = \frac{1}{2}\|w_n\|^2 - \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) - \frac{1}{2^*}\int H(w_n) \leq m_{\lambda_n,\mu_n}.$$

Lembrando que c_{λ_n,μ_n} e m_{λ_n,μ_n} ambos convergem para $\frac{1}{N}S_H^{N/2}$, podemos usar a expressão acima e novamente $\int Q_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \to 0$ para concluir que $b = S_H^{N/2}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|^2 = S_H^{N/2} = \lim_{n\to\infty} \int H(w_n). \tag{3.45}$$

Seja $t_n := (\int H(w_n))^{-1/2^*} > 0$ e notemos que $z_n := t_n w_n$ satisfaz as hipóteses da Proposição 3.17. Portanto, para alguma sequência $(r_n) \subset (0,\infty)$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo $r_n \to 0$, $y_n \to \overline{y} \in \overline{\Omega}$ temos que $z_n^{y_n,r_n} \to z$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

A definição de z_n, (3.45), a convergência forte de $(z_n^{y_n,r_n})$ e o Teorema da Convergência Dominada fornecem

$$\begin{aligned}
\beta_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) &= \frac{t_n^{-2^*}}{S_H^{N/2}}\int H(z_n)x\,\mathrm{d}x = (1+o_n(1))\int H(z_n)x\,\mathrm{d}x \\
&= (1+o_n(1))\int H(z_n^{y_n,r_n})(r_n x + y_n)\,\mathrm{d}x \\
&= (1+o_n(1))\left(\int H(z)\overline{y}\,\mathrm{d}x + o_n(1)\right).
\end{aligned}$$

Como $\overline{y} \in \overline{\Omega}$ e $\int H(z) = 1$, a expressão acima implica que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\beta_{\lambda_n,\mu_n}(w_n), \overline{\Omega}) = 0,$$

que contradiz $\beta_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \notin \Omega^+_{r/2}$. Assim o lema está provado para este caso.

Considere agora o segundo caso e suponha, por contradição, que existem sequências (λ_n), (μ_n), $(\widehat{\lambda}_n) \subset \mathbb{R}^+$ e $(w_n) \subset \mathcal{N}_{\lambda_n,\mu_n}$ tais que λ_n, μ_n, $\widehat{\lambda}_n \to 0^+$ quando $n \to \infty$, $I_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \leq m_{\lambda_n,\mu_n}$ mas $\beta_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \notin \Omega^+_{r/2}$. O argumento acima pode ser usado novamente desde que provemos que $\int Q_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \to 0$ também nesse caso. Mas isso é uma consequência dos ítens (i) e (iii) do Lema 3.2, pois

$$\left| \int Q_{\lambda_n,\mu_n}(w_n) \right| \leq \int |Q_{\lambda_n,\mu_n}(w_n)| \leq (\lambda_n + c_1\widehat{\lambda}_n)(\|u_n\|_q^q + \|v_n\|_q^q).$$

Procedendo como no primeiro caso obtemos uma contradição. □

Segue do Lema 3.20, que para cada λ, $\mu > 0$ pequeno o ínfimo $m_{\lambda,\mu}$ é atingido por uma função radial não negativa que denotaremos por $z_{\lambda,\mu}$. Seja $I^{m_{\lambda,\mu}}_{\lambda,\mu}$ definido por

$$I^{m_{\lambda,\mu}}_{\lambda,\mu} := \{z \in X : I_{\lambda,\mu}(z) \leq m_{\lambda,\mu}\}$$

e defina a função

$$\gamma_{\lambda,\mu} : \Omega^-_r \to I^{m_{\lambda,\mu}}_{\lambda,\mu}$$

fazendo, para cada $y \in \Omega^-_r$,

$$\gamma_{\lambda,\mu}(y)(x) := \begin{cases} z_{\lambda,\mu}(x-y) & \text{se } x \in B_r(y), \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $z_{\lambda,\mu}$ é a função radial dada pelo Lema 3.20. Uma mudança de variáveis mostra que a aplicação $\gamma_{\lambda,\mu}$ está bem definida. Como $z_{\lambda,\mu}$ é radial temos que $\int_{B_r(0)} H(z_{\lambda,\mu})x\,\mathrm{d}x = 0$. Portanto, para cada $y \in \Omega^-_r$, obtemos

$$\beta_{\lambda,\mu}(\gamma_{\lambda,\mu}(y)) = \alpha(\lambda,\mu)y, \tag{3.46}$$

onde

$$\alpha(\lambda,\mu) := \frac{1}{S_H^{N/2}} \int H(z_{\lambda,\mu}).$$

Definindo $F_{\lambda,\mu} : [0,1] \times (\mathcal{N}_{\lambda,\mu} \cap I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}) \to \mathbb{R}^N$ por

$$F_{\lambda,\mu}(t,z) := \left(t + \frac{1-t}{\alpha(\lambda,\mu)}\right)\beta_{\lambda,\mu}(z),$$

temos o seguinte resultado

Lema 3.22. *Se Q satisfaz (Q_1) então existe $\lambda^{**} > 0$ tal que,*

$$F_{\lambda,\mu}\left([0,1] \times \left(\mathcal{N}_{\lambda,\mu} \cap I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}\right)\right) \subset \Omega_r^+,$$

para $\lambda, \mu \in (0, \lambda^{**})$. O mesmo ocorre se Q satisfaz $(\widehat{Q}_1)$ e $\lambda, \mu, \widehat{\lambda} \in (0, \lambda^{**})$.

Demonstração. Provaremos somente o primeiro caso porque o outro é análogo. Suponha então, por contradição, que existem sequências $(\lambda_n), (\mu_n) \subset \mathbb{R}^+$ e

$$(t_n, z_n) \in [0,1] \times (\mathcal{N}_{\lambda_n,\mu_n} \cap I_{\lambda_n,\mu_n}^{m_{\lambda_n,\mu_n}}),$$

tais que λ_n, $\mu_n \to 0^+$ mas $F_{\lambda_n,\mu_n}(t_n, z_n) \notin \Omega_r^+$. A menos de uma subsequência $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Além disso, a compacidade de $\overline{\Omega}$ e o Lema 3.21 implicam que, a menos de uma subsequência, $\beta_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) \to y \in \overline{\Omega_{r/2}^+} \subset \Omega_r^+$. Afirmamos que $\alpha(\lambda_n, \mu_n) \to 1$. Usando esta afirmação, segue da continuidade e da definição de F que $F_{\lambda_n,\mu_n}(t_n, z_n) \to y \in \Omega_r^+$, o que é uma contradição.

Agora provaremos a afirmação acima. Segue do Lema 3.20 que

$$m_{\lambda_n,\mu_n} = \frac{1}{2}\|z_{\lambda_n,\mu_n}\|^2 - \int_{B_r(0)} Q_{\lambda_n,\mu_n}(z_{\lambda_n,\mu_n}) - \frac{1}{2^*}\int_{B_r(0)} H(z_{\lambda_n,\mu_n}) < \frac{1}{N}S_H^{N/2}.$$

Como antes $\int_{B_r(0)} Q_{\lambda_n,\mu_n}(z_{\lambda_n,\mu_n}) \to 0$. Isto, $J'_{\lambda_n,\mu_n}(z_{\lambda_n,\mu_n}) = 0$, a expressão acima e o mesmo argumento usado na prova do Lema 3.20 implicam que

$$\lim_{n\to\infty} \int H(z_{\lambda_n,\mu_n}) = S_H^{N/2}.$$

A equação acima e a definição de $\alpha(\lambda, \mu)$ implicam que $\alpha(\lambda_n, \mu_n) \to 1$. O lema está provado. □

Trocando $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega)$, o próximo resultado é basicamente o mesmo de [1, Lema 4.3]. Para comodidade do leitor reproduziremos sua demonstração.

Corolário 3.23. *Seja $\Lambda := \min\{\lambda^*, \lambda^{**}\} > 0$, com λ^* e λ^{**} dados nos Lemas 3.21 e 3.22,* *respectivamente. Se Q satisfaz (Q_1) e $\lambda, \mu \in (0, \Lambda)$ então*

$$\mathrm{cat}_{I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}}(I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}) \geq \mathrm{cat}_{\Omega}(\Omega).$$

O mesmo ocorre se Q satisfaz $(\widehat{Q}_1)$ e $\lambda, \mu, \widehat{\lambda} \in (0, \Lambda)$.

Demonstração. Seja

$$I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}} = \cup_{k=1}^{n} A_k$$

onde A_k é um subconjunto fechado e contrátil em $I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}$. Então existem aplicações $h_k \in C([0,1] \times A_k, I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}})$ tais que $h_k(0,z) = z$ e $h_k(1,z) = w_k$ para todo $z \in A_k$, onde w_k é um valor fixo que depende apenas do conjunto A_k. Seja $B_k := \gamma_{\lambda,\mu}^{-1}(A_k)$. Por continuidade B_k é fechado em Ω_r^-. Além disso

$$\Omega_r^- = \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

O Lema 3.22 e a definição de Λ garantem que $g_k : [0,1] \times B_k \to \Omega_r^+$ dada por

$$g_k(t,y) := F_{\lambda,\mu}(t, h_k(t, \gamma_{\lambda,\mu}))$$

para $\lambda, \mu \in (0, \Lambda)$ e todo $y \in B_k$, está bem definida. Temos

$$\begin{aligned} g_k(0,y) &= F_{\lambda,\mu}(0, h_k(0, \gamma_{\lambda,\mu}(y))) \\ &= \left(0 + \frac{1-0}{\alpha(\lambda,\mu)}\right) \beta_{\lambda,\mu}(h_k(0, \gamma_{\lambda,\mu}(y))) \\ &= \frac{1}{\alpha(\lambda,\mu)} \beta_{\lambda,\mu}(\gamma_{\lambda,\mu}(y)) \\ &= y, \end{aligned}$$

em que usamos (3.46) na última equação. Também temos

$$\begin{aligned} g_k(1,y) &= F_{\lambda,\mu}(1, h_k(1, \gamma_{\lambda,\mu}(y))) \\ &= \left(1 + \frac{1-1}{\alpha(\lambda,\mu)}\right) \beta_{\lambda,\mu}(h_k(1, \gamma_{\lambda,\mu}(y))) \\ &= \beta_{\lambda,\mu}(w_k) \end{aligned}$$

Essas duas últimas equações implicam que B_k é contrátil em Ω_r^+. Segue da maneira como r foi escolhido e da definição de categoria que

$$n \geq \mathrm{cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) = \mathrm{cat}_{\Omega}(\Omega)$$

e portanto não podemos ter $\mathrm{cat}_{I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}}(I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}) < \mathrm{cat}_{\Omega}(\Omega)$. $\square$

O resultado abaixo fornece uma condição de compacidade local para o funcional restrito à variedade de Nehari. Lembremos que $z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ é um ponto crítico de $I_{\lambda,\mu}$ restrito à variedade $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ se

$$\|I'_{\lambda,\mu}(z)\|_* = \sup\left\{I'_{\lambda,\mu}(z)w \;:\; w \in T_z\mathcal{N}_{\lambda,\mu},\ \|w\| = 1\right\} = 0,$$

onde $T_z\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ é o espaço tangente de $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ no ponto z (cf. Apêndice).

Lema 3.24. *Suponha que $q = 2$ e $\lambda, \mu \in (0, \theta_1(\Omega)/2)$ ou $2 < q < 2^*$ e $\lambda, \mu > 0$. Então toda sequência $(z_n) \subset \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ tal que*

$$\|I'_{\lambda,\mu}(z_n)\|_* \to 0 \quad \text{e} \quad I_{\lambda,\mu}(z_n) \to c < \frac{1}{N}S_H^{N/2}$$

possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Para $z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu} = \left\{z \in X/\{0\} \;:\; \|z\|^2 = q\int Q_{\lambda,\mu}(z) + \int H(z)\right\}$, o espaço tangente $T_z\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ pode ser caracterizado como o núcleo do funcional $J'_{\lambda,\mu}(z)$, onde $J_{\lambda,\mu} : X \to \mathbb{R}$ é dado por

$$J_{\lambda,\mu}(z) := \|z\|^2 - q\int Q_{\lambda,\mu}(z) - \int H(z).$$

Assim, podemos usar o Lema 3.27 do Apêndice para obter $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$I'_{\lambda,\mu}(z_n) = \theta_n J'_{\lambda,\mu}(z_n) + o_n(1) \text{ em } X^*. \tag{3.47}$$

Como $z_n \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$, então $\|z_n\|^2 = q\int Q_{\lambda,\mu}(z_n) + \int H(z_n)$, de modo que

$$J'_{\lambda,\mu}(z_n)z_n = (2-q)\|z_n\|^2 + (q-2^*)\int H(z_n) \le 0. \tag{3.48}$$

Afirmação. Existem $r_2,\ r_1 > 0$ tais que $r_1 < \|z_n\| < r_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decorre portanto da definição de S_H e da afirmação acima que $J'_{\lambda,\mu}(z_n)z_n$ é limitada. Assim podemos supor que, a menos de subsequência

$$J'_{\lambda,\mu}(z_n)z_n \to l \le 0.$$

Se $l = 0$, como $\int H(z_n) \ge 0$, segue de (3.48) que $\|z_n\| = o_n(1)$, o que contraria a afirmação. Desse modo $l < 0$. Decorre de (3.47) e $z_n \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ que

$$-\theta_n J'_{\lambda,\mu}(z_n)z_n = o_n(1),$$

Como $J'_{\lambda,\mu}(z_n)z_n \to l < 0$ concluímos que $\theta_n \to 0$. Logo, usando (3.47), obtemos que $I'(z_n) \to 0$. Assim podemos usar o Lema 3.9 e obter a subsequência convergente.

Agora provaremos a afirmação. Como $z_n \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ então

$$\|z\|^2 = q\int Q_{\lambda,\mu}(z) + \int H(z) \leq \lambda C_2\|z_n\|^q + \|z_n\|^{2^*}. \tag{3.49}$$

Se $2 < q < 2^*$ então podemos obter $r_1 > 0$ tal que $\|z_n\| > r_1$, pois decorre de (3.49) que não podemos ter $\|z_n\| = o_n(1)$ para nenhuma subsequência. Se $q = 2$, escrevendo $z_n = (u_n, v_n)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|z_n\|^2 &= 2\int Q_{\lambda,\mu}(z_n) + \int H(z_n) \\
&\leq 2\lambda(\|u_n\|_2^2 + \|v_n\|_2^2) + S_H^{2/2^*}\|z_n\|^{2^*} \\
&\leq \frac{2\lambda}{\theta_1(\Omega)}\|z_n\|^2 + S_H^{2/2^*}\|z_n\|^{2^*}.
\end{aligned}$$

Como $2\lambda < \theta_1(\Omega)$ então não existe subsequência $\|z_n\| = o_n(1)$ e portanto podemos obter $r_1 > 0$ como na afirmação. □

Corolário 3.25. *Se z é um ponto crítico de $I_{\lambda,\mu} : \mathcal{N}_{\lambda,\mu} \to \mathbb{R}$, isto é,*

$$I'_{\lambda,\mu}(z)w = 0 \text{ para todo } w \in T_z\mathcal{N}_{\lambda,\mu},$$

então $I'_{\lambda,\mu}(z) = 0$ em X^*.

Demonstração. Segue do Lema 3.27 que existe $\theta > 0$ tal que

$$I'_{\lambda,\mu}(z) = \theta J'_{\lambda,\mu}(z),$$

onde $J_{\lambda,\mu}$ é definido no Lema 3.24. Como $z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ então

$$0 = I'_{\lambda,\mu}(z)z = \theta J'_{\lambda,\mu}(z)z.$$

Se $J'_{\lambda,\mu}(z)z = 0$, podemos usar o fato de que $\|z\|^2 = 2\int Q_{\lambda,\mu}(z) + \int H(z)$ para obter

$$(q-2)\|z\|^2 + 2^*\int H(z) = 0,$$

de modo que $z = 0$, o que é uma contradição. Logo, devemos ter $\theta = 0$, o que mostra que $I'_{\lambda,\mu}(z) = 0$. □

No que segue provamos os resultados principais desse capítulo

Prova dos Teoremas C e D. Seja $\Lambda > 0$ dado pelo Corolário 3.23 e suponha que Q é tal que $\lambda,\ \mu \in (0, \Lambda)$ se Q satisfaz (Q_1), ou $\lambda,\ \mu,\ \widehat{\lambda} \in (0, \Lambda)$ se Q satisfaz $(\widehat{Q}_1)$. O corolário 3.24 mostra que o funcional $I_{\lambda,\mu}$ resrito à $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < \frac{1}{N} S_H^{N/2}$. Como $m_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N} S_H^{N/2}$, o Teorema 3.19 fornece $\operatorname{cat}_{I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}}(I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}})$ pontos críticos do funcional restrito. Se $z \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ é um desses pontos críticos, o Lema 3.25 mostra que z é também um ponto crítico do funcional definido em X, e portanto uma solução não trivial de $(\mathcal{P}_2)$. Como antes, obtemos soluções não negativas em Ω. O resultado segue do Corolário 3.23. $\square$

3.4 Sobre a positividade das soluções

Com algumas condições adicionais podemos mostrar que as soluções obtidas nesse capítulo são de fato positivas. De fato, se supormos que

(A) $Q_s(s,t) \geq 0$, $Q_t(s,t) \geq 0$ para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$,

podemos aplicar o Princípio do Máximo para cada equação de $(\mathcal{P}_2)$. Assim, se (u,v) é uma solução não negativa, então $u \equiv 0$ ou $u > 0$ in Ω, o mesmo ocorrendo para v. Tudo que precisamos fazer agora é conseguir descartar soluções do tipo $(u,0)$ ou $(0,v)$. Isso pode ser feito se adicionarmos hipóteses que garantam um acoplamento forte para o sistema. A seguir, apresentamos algumas situações onde isso pode ser feito.

Suponha que valem as hipóteses do Teorema D e que $(u,0)$ é uma solução do sistema com $u \geq 0$ em Ω. Vamos mostrar que, necessariamente, devemos ter $u \equiv 0$. De fato, usando a segunda equação em $(\mathcal{P}_2)$ obtemos

$$0 = Q_v(u,0) + H_v(u,0) = u^{q-1} Q_v(1,0).$$

Por $(\widehat{Q_1})$ temos que $Q_v(1,0) > 0$, e portanto $u \equiv 0$. O argumento para $(0,v)$ é análogo. Assim, usando (A) e o Princípio do Máximo concluímos que as soluções não negativas obtidas são de fato positivas.

Suponha agora que valem as hipótese do Teorema C, que $q = 2$ e que $\nabla H(0,1) = \nabla H(1,0) = (0,0)$. Se $(u,0)$ é uma solução do sistema, segue de (3.5) e da primeira equação do problema $(\mathcal{P}_2)$ que

$$-\Delta u = u Q_u(1,0) = 2u Q(1,0).$$

Se $u \not\equiv 0$ então a expressão acima implica que $2Q(1,0)$ é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega)$. Mas isso não ocorre visto que $2Q(1,0) \leq 2\lambda < \theta_1(\Omega))$. De maneira análoga mostramos que se $(0, v)$ é solução então $v \equiv 0$.

Vamos considerar agora as hipótese do Teorema C com $2 \leq q < 2^*$. Nesse caso, vamos supor que $\nabla Q(1,0) = \nabla Q(0,1) = (0,0)$. Se $(u, 0)$ é uma solução então, usando a primeira equação em $(\mathcal{P}_2)$, obtemos

$$-\Delta u = \frac{1}{2^*} H_u(1,0) u^{2^*-1}.$$

Logo, como $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, devemos ter $u \equiv 0$. Do mesmo modo provamos que não existem soluções da forma $(0, v)$ com $v \not\equiv 0$.

No nosso próximo resultado apresentamos um lema que garante, sob as hipóteses do Teorema C e uma condição extra em H, a positividade das soluções. Vamos usar um argumento que está relacionado com a energia das soluções. Antes, vamos lembrar que

$$M_H = \max \left\{ H(s,t)^{2/2^*} \ : \ s^2 + t^2 = 1 \right\}$$

e definir o número

$$c_H := \frac{1}{N} S_H.$$

Observe que, por definição, $M_H \geq \max\{H(1,0), H(0,1)\}^{2/2^*}$. No nosso próximo resultado vamos mostrar que, se a condição (A) é satisfeita, então a ocorrência de desigualdade estrita na última inequação é suficiente para garantir a positividade das soluções. No enunciado e na demonstração vamos usar a mesma notação da seção anterior.

Lema 3.26. *Suponha que valem as hipóteses do Teorema C e*

$$M_H > \max\{H(1,0), H(0,1)\}^{2/2^*}. \tag{3.50}$$

Então existe $\Lambda_0 > 0$ tal que, se $\lambda, \mu \in (0, \Lambda_0)$, $2 \leq q < 2^*$ e $z = (u, v) \in I_{\lambda,\mu}^{m_{\lambda,\mu}}$ é solução de $(\mathcal{P}_2)$, então $u \neq 0$ e $v \neq 0$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem sequências (λ_n), $(\mu_n) \subset \mathbb{R}^+$ e $(z_n) \subset I_{\lambda_n,\mu_n}^{m_{\lambda_n,\mu_n}}$ tais que λ_n, $\mu_n \to 0^+$ e $z_n := (u_n, v_n)$ é solução de $(\mathcal{P}_2)$ com uma das componentes nula. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $z_n = (u_n, 0)$.

Como $z_n \in I_{\lambda_n,\mu_n}^{m_{\lambda_n,\mu_n}} \subset \mathcal{N}_{\lambda_n,\mu_n}$ então

$$c_{\lambda_n,\mu_n} \leq I_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) \leq m_{\lambda_n,\mu_n}. \tag{3.51}$$

Considere $\widehat{I} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\widehat{I}_\varepsilon(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \varepsilon \int_\Omega (u^+)^q - \frac{\delta}{2^*} \int_\Omega (u^+)^{2^*},$$

onde $\varepsilon = Q_{\lambda,\mu}(1,0)$ e $\delta = H(1,0)$. Uma vez que $z_n = (u_n, 0)$ temos que

$$I_{\lambda_n,\mu}(z_n) = \widehat{I}_{\varepsilon_n}(u_n). \tag{3.52}$$

Vamos supor primeiro que $\delta = \max\{H(1,0), H(0,1)\} > 0$. Procedendo como no Lema 3.9 podemos verificar que o funcional $\widehat{I}_\varepsilon$ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < \widehat{c} := \frac{1}{N}\delta^{(2-N)/2}S$. Seja $\widehat{\mathcal{N}}_\varepsilon$ a variedade de Nehari associada a este funcional e defina

$$\widehat{c}_\varepsilon := \inf_{u\in\widehat{\mathcal{N}}_\varepsilon} \widehat{I}_\varepsilon(u).$$

Vale aqui um análogo ao Lema 3.18 (veja também [1, Lemas 2.3 e 2.4]), de modo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \widehat{c}_\varepsilon = \widehat{c}. \tag{3.53}$$

Segue também do Lema 3.17 que $S_H = S/M_H$, e portanto

$$c_H < \widehat{c}. \tag{3.54}$$

Como $z_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,\mu_n}$, temos que $u_n \in \widehat{\mathcal{N}}_{\varepsilon_n}$, o que implica que $\widehat{I}_{\varepsilon_n}(u_n) \geq \widehat{c}_{\varepsilon_n}$. Uma vez que

$$\varepsilon_n = Q_{\lambda_n,\mu_n}(0,1) \leq \lambda_n \to 0,$$

obtemos que $\varepsilon_n \to 0$. Segue de (3.53) que existem $\rho > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tais que

$$\widehat{I}_{\varepsilon_n}(u_n) \geq \widehat{c} - \rho > 0, \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

A expressão acima, (3.52) e (3.51) implicam que, para $n \geq n_0$, vale

$$m_{\lambda,n,\mu_n} \geq I_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) = \widehat{I}_{\varepsilon_n}(u_n) \geq \widehat{c} - \rho > 0.$$

Passando ao limite e lembrando que $m_{\lambda_n,\mu_n} \to c_H$, obtemos $c_H \geq \widehat{c} - \rho$, o que contradiz (3.54).

Se $\delta = 0$, como $\|z_n\|^2 = q\int Q(z_n) + \int H(z_n)$, então $\|u_n\|^2 = q\varepsilon\|u_n^+\|_q^q$. Assim

$$\widehat{I}_{\varepsilon_n}(u_n) = \frac{\varepsilon_n(q-2)}{2}\|u_n^+\|_q^q.$$

Como no Lema 3.9, mostramos que (u_n) é limitada, e portanto

$$\lim_{n\to\infty} I_{\lambda_n,\mu_n}(z_n) = \lim_{n\to\infty} \widehat{I}_{\varepsilon_n}(u_n) = 0,$$

o que é um absurdo em vista de (3.51) e do fato de $c_{\lambda_n,\mu_n} \to c_H > 0$. $\square$

Finalizamos essa seção mostrando que, para um dos modelos apresentados na Introdução, a condição (3.50) é satisfeita. Vamos então considerar

$$H(s,t) := a_1 s^{2^*} + a_2 t^{2^*} + b_1 s^\alpha t^\beta,$$

com $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $0 \le a_1 \le a_2$, $b_1 \ge 0$, $N \ge 4$ e $\alpha + \beta = 2^*$. Uma vez que $\max\{H(0,1), H(1,0)\} = a_2$, é suficiente exibir um par $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tal que $s\ 2 + t^2 = 1$ e $H(s,t) > a_2$. Para tanto, considere as seguintes sequências

$$s_k := \frac{1}{k}, \ \ t_k := \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{1/2},$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Uma vez que $s_k, t_k \in [0,1]$ e $2^* \le 4$, temos que

$$H(s_k,t_k) \ge a_1 s_k^4 + a_2 t_k^4 + b_1 s_k^\alpha t_k^\beta. \tag{3.55}$$

Uma conta simples mostra que a inequação

$$a_1 s_k^4 + a_2 t_k^4 + b_1 s_k^\alpha t_k^\beta > a_2$$

é equivalente a

$$\frac{b_1}{k^{\alpha-2}} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{\beta/2} > 2a_2 - \frac{a_1 + a_2}{k^2}. \tag{3.56}$$

Se $\alpha < 2$ o lado esquerdo acima vai para infinito quando $k \to \infty$, de modo que a inequação é satisfeita para k suficientemente grande.

Suponha agora que $\alpha > 2$, $\beta \neq 2$ e $a_1 = a_2$. Então a inequação (3.56) se escreve como

$$k^{2(2-\alpha)/(2-\beta)} > \left(\frac{2a_1}{b_1}\right)^{2/(2-\beta)} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Se $\beta > 2$ então a potência do termo esquerdo da inequação acima é positiva e podemos proceder como antes. Se $\beta < 2$, fixando $\widehat{\beta} > 2$ obtemos de (3.55) que

$$H(s_k,t_k) \ge a_1 s_k^4 + a_2 t_k^4 + b_1 s_k^\alpha t_k^{\widehat{\beta}}$$

e o argumento pode ser repetido uma vez mais.

Destacamos finalmente que, $\alpha = 2$ ou $\beta = 2$, o exemplo apresentado acima pode não satisfazer (3.50). De fato, se tomarmos por exemplo $N = 4$ e $H(s,t) = (s^2+t^2)^2 = s^4 + t^4 + 2s^2t^2$, vemos que

$$M_H = \max\left\{H(s,t)^{2/2^*} \ : \ s^2+t^2 = 1\right\} = H(1,0)^{2/2^*} = H(0,1)^{2/2^*}.$$

3.5 Apêndice

Seja $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço de Banach e $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ seu espaço dual. Vamos considerar um funcional $\mathcal{J} : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1, quando este está restrito a uma C^1-variedade $\mathcal{M} \subset E$. A derivada de $\mathcal{J}$ restrita à $\mathcal{M}$ em um ponto $z \in \mathcal{M}$ é um funcional linear definido no espaço tangente $T_z\mathcal{M}$. A norma da derivada de $I|_{\mathcal{M}}$ em z é definida por

$$\|\mathcal{J}\|_* := \sup\left\{\mathcal{J}'(z)w \ : \ w \in T_z\mathcal{M}, \ \|w\|_E = 1\right\}. \tag{3.57}$$

Em alguns casos o espaço tangente $T_z\mathcal{M}$ pode ser caracterizado como o núcleo de um funcional linear de E^*, nesse caso o lema a seguir, fornece uma caracterização para $\|I\|_*$.

Lema 3.27. *Sejam $f, g \in E^*$. Se $\mathcal{N}_g := \{y \in E \mid g(y) = 0\}$, então*

$$\sup\left\{f(y) \mid y \in \mathcal{N}_g \text{ e } \|y\|_E = 1\right\} = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f - \lambda g\|_{E^*}.$$

Demonstração. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que, se $y \in \mathcal{N}_g$, então $(f - \lambda g)(y) = f(y)$. Assim

$$\sup\left\{f(y) \mid y \in \mathcal{N}_g, \ \|y\|_E = 1\right\} \leq \sup_{\|y\|=1} (f - \lambda g)(y) = \|f - \lambda g\|,$$

e portanto

$$\sup\left\{f(y) \mid y \in \mathcal{N}_g, \ \|y\|_E\right\} \leq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f - \lambda g\|_{E^*}.$$

Segue do Teorema de Hahn-Banach que existe $h \in E^*$ que estende $f : \mathcal{N}_g \to \mathbb{R}$ de modo que a extensão tenha a mesma norma de f, isto é,

$$\sup\left\{f(y) \mid y \in \mathcal{N}_g, \ \|y\|_E = 1\right\} = \|h\|_{E^*}.$$

Desse modo

$$f(u) \geq -\|h\|_{E^*}\|u\|_E \ \text{ sempre que } \ u \in \mathcal{N}_g.$$

Vamos mostrar que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\|f - tg\|_{E^*} \leq \|h\|_{E^*}$. Para tanto, considere o seguinte conjunto

$$\Sigma = \{tg + \|h\|_{E^*} w : t \in \mathbb{R},\ w \in E^*,\ \|w\|_{E^*} \leq 1\}.$$

Como o conjunto $\mathbb{R}g$ é convexo e fechado, temos que $\mathbb{R}g$ é fechado na topologia fraca-$^*\sigma(E^*, E)$. Lembrando que a bola unitária de E^* é $\sigma(E^*, E)$-compacta concluímos que Σ é fechado nessa topologia.

Tendo em vista a definição de Σ é suficiente mostrarmos que $f \in \Sigma$. Suponha então, por contradição, que $f \notin \Sigma$. Como Σ é $\sigma(E^*, E)$-fechado, podemos usar o teorema de Hahn-Banach para obter um funcional linear $\sigma(E^*, E)$-contínuo $w^* : E^* \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned} &w^*(g) < \alpha, \\ &w^*(h) \geq \alpha,\ \forall h \in \Sigma. \end{aligned}$$

Uma vez que w^* é $\sigma(E^*, E)$-contínua, existe $u \in E$ tal que $w^*(h) = h(u)$ para todo $h \in E^*$. Logo

$$g(u) < \alpha \tag{3.58}$$

e

$$h(u) \geq \alpha,\ \forall h \in \Sigma.$$

Usando a definição de Σ podemos reescrever a desigualdade acima como sendo

$$tg(u) \geq \alpha + \|h\|_{E^*} \sup_{\|w\|_{E^*} \leq 1} w(-u), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mas o supremo acima é exatamente $\|u\|_E$, e portanto

$$tg(u) \geq \alpha + \|h\|_{E^*} \|u\|_E, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.59}$$

Como t é arbitrário, segue que $g(u) = 0$, donde se conclui que $f(u) \geq -\|h\|_{E^*}\|u\|_E$. Por outro lado, usando (3.58) e (3.59) com $t = 0$, obtemos

$$f(u) < \alpha \leq -\|h\|_{E^*}\|u\|_E,$$

o que é um absurdo. Logo $f \in \Sigma$ e assim para algum $t \in \mathbb{R}$ vale $\|f - tg\|_{E^*} \leq \|h\|_{E^*}$.

Mas então

$$\begin{aligned}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f-\lambda g\|_{E^*} &\leq \|f-tg\|_{E^*}\\ &\leq \|h\|_{E^*} = \sup\{f(y) \mid g(y)=0,\ \|y\|_E = 1\}\\ &\leq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|f-\lambda g\|_{E^*},\end{aligned}$$

o que conclui a prova de lema. □

No que segue faremos algumas considerações sobre a categoria de Ljusternik-Schnirelmann. Vamos considerar um espaço topológico E e subconjuntos não vazios A, B, $C \subset E$.

Um subconjunto fechado $A \subset E$ é contrátil em $B \subset E$ se existir $h \in C([0,1]\times A, B)$ tal que, para todo $u,\ v \in A$

$$h(0,u) = u\ ,\ h(1,\cdot) \equiv constante.$$

Sejam $A,\ B$ subconjuntos fechados em E. Então nós escrevemos $A \prec B$ em E, se existir $h \in C([0,1], B)$ tal que

$$h(0,u) = u\ ,\ h(1,A) \subset B.$$

diremos que a deformação h leva continuamente A em B.

Definição 3.28. *Seja A um subconjunto fechado em $B \subset E$. A categoria de A em B, que denotaremos por $cat_B A$, é o menor inteiro n tal que existem n subconjuntos fechados $A_1, ..., A_n$ de B satisfazendo*

(i) $A = \cup_{j=1}^n A_j$,

(ii) $A_1, ..., A_n$, *são contráteis em B.*

Se não existir uma tal inteiro, escreveremos $cat_B A = \infty$.

De uma maneira geral não é simples determinar a categoria de um dado conjunto, o exemplo mais simples, que conhecemos, de um conjunto com categoria maior do que um, é o da esfera $\mathbb{S}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$, não é contrátil em $\mathbb{S}^k$, podemos pensar isso da seguinte maneira, não é possível contrair uma película que está na superfície de uma esfera e reduzi-la a um único ponto sem sair da superfície da esfera e sem que a película rasgue, desse modo $\mathrm{cat}_{\mathbb{S}^k}\mathbb{S}^k \neq 1$. Entretanto podemos cobrir a esfera com dois conjunto contráteis, por exemplo $\mathbb{S}^k - \{S\}$ e $\mathbb{S}^k - \{N\}$ onde $N,\ S$ são respectivamente o pólo sul e pólo norte da esfera. desse modo $\mathrm{cat}_{\mathbb{S}^k}\mathbb{S}^k = 2$. Um exemplo de conjunto com categoria maior é o k-toro $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}_2$, em [23] é mostrado que $\mathrm{cat}_{\mathbb{T}^k}\mathbb{T}^k = k+1$. A seguir enunciaremos e demostraremos alguns resultados sobre categoria.

Lema 3.29. *Sejam A, B e C subconjuntos fechados de E. Se $A \prec B$ e $B \prec C$ em E então $A \prec C$ em E.*

Demonstração. Sejam h, g respectivamente as deformações que levam A em B e B em C. Defina

$$(g * h)(t, u) = \begin{cases} h(2t, u) & \text{em } [0, \frac{1}{2}] \times A, \\ g(2t - 1, h(1, u)), & \text{em } (\frac{1}{2}, 1] \times A. \end{cases}$$

Não é difícil verificar que $g * h$ é uma deformação que leva A em C. □

Proposição 3.30. *Sejam A, B subconjuntos fechados de E tais que $A \cup B \subset F \subset E$. Então*

(i) $cat_F(A \cup B) \leq cat_F(A) + cat_F(B)$,

(ii) *Se $A \prec B$ então $cat_F(A) \leq cat_F(B)$.*

Demonstração. Quando temos duas coberturas de conjuntos contráteis, uma do conjunto A e outra do conjunto B, então a cobertura formada pelos elementos das coberturas de A e B, é também uma cobertura de $A \cup B$ por conjuntos contráteis, assim $cat_F(A \cup B) \leq cat_F(A) + cat_F(B)$.

Suponha que $A \prec B$ e que h é a deformação que leva A em B, sejam $B_1, ..., B_n$ uma cobertura de B por fechados contráteis em B, tal que $n = cat_F(B)$. Defina

$$A_j = \{u \in A : h(1, u) \in B_j\}.$$

É claro que $A = \cup_{j=1}^{n} = A_j$ e usando $h|_{A_j}$ como deformação obtemos que $A_j \prec B_j$. Como A_j pode ser levado em B_j. B_j pode ser levado em um único ponto, então na verdade, A_j pode ser levado em um único ponto de B, portanto A_j é contrátil em F e isto implica que $cat_F(A) \leq n$. □

Proposição 3.31. *Sejam $A \subset B \subset E$ todos fechados em E. Então existe uma vizinhança aberta V de A em E tal que $cat_E(A) = cat_E(\bar{V})$.*

Demonstração. Suponha que $cat_B(A) = 1$ e seja h a correspondente deformação. Considere o seguinte conjunto

$$N := ([0, 1] \times A) \cup (\{0, 1\} \times B),$$

que é fechado em $M := [0, 1] \times B$. Defina a aplicação $f : N \to B$ por

$$f(t,u) = \begin{cases} h(t,u) & t \in [0,1], u \in A, \\ u & t = 0, u \in B, \\ h(1,u_0) & t = 1, u \in B, \end{cases}$$

onde u_0 é tal que $h(1,\cdot) \equiv u_0$. Podemos estender continuamente f para uma vizinhança aberta U de N. Seja g tal extensão. A compacidade de $[0,1]$ implica na existência de uma vizinhança aberta V de A tal que $[0,1] \times B \subset \bar{U}$. Usando $g|_{[0,1]\times\bar{B}}$ como deformação, concluímos que $\bar{V}$ é contrátil em B, e portanto $cat_B(\bar{V}) = 1$. Suponha agora que $cat_B(A) = n$ e seja $\{A_j\}_{j=1}^n$ uma cobertura de A por conjuntos contráteis em B. Sejam $B_1, ..., B_n$ abertos tais que $A_j \subset B_j$ e $cat_B(A_j) = cat_B(\bar{V}_j)$. Então $V = \cup_{j=1}^n B_j$ é uma vizinhança aberta de A e

$$cat_B(\bar{V}) = \sum_{j=1}^n cat_B(\bar{V}_j) = \sum_{j=1}^n cat_B(A)_j = cat_B(A).$$

□

Referências Bibliográficas

[1] C.O. Alves e Y.H. Ding, *Multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation involving critical nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 508–521.

[2] C.O. Alves, D.C. de Morais Filho e M.A.S. Souto, *On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **42** (2000) 771–787.

[3] F. V. Atkinson e L. A. Peletier, *Sur les solutions radiales de l'équation* $\Delta u+\frac{1}{2}x\Delta\nabla u+\frac{1}{2}\lambda u+|u|^{p-1}u=0$. (French) [On the radial solutions of the equation $\Delta u+\frac{1}{2}x\Delta\nabla u+\frac{1}{2}\lambda u+|u|^{p-1}u=0$] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** (1986), 99–101.

[4] V. Benci e G. Cerami, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), 79–93.

[5] H. Brezis e L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[6] A. Capozzi, D. Fortunato e G. Palmieri, *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **2** (1985), 463–470.

[7] F. Catrina, M. F. Furtado e M. Montenegro, *Positive solutions for nonlinear elliptic equations with fast increasing weights*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **137A** (2007), 1157–1178.

[8] G. Cerami, D. Fortunato e M. Struwe, *Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), 341–350.

[9] L. Ding e S. W. Xiao, *Multiple positive solutions for a critical quasilinear elliptic system* Nonlinear Anal. **72** (2010), 2592–2607.

[10] M. Escobedo e O. Kavian, *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation*, Nonlinear Anal. **11** (1987), 1103–1133.

[11] M.F. Furtado, O.H. Myiagaki e J.P.P. da Silva, *On a class of nonlinear elliptic equations with fast increasing weight and critical growth*, J. Differential Equations **249** (2010), 1035–1055.

[12] P. Han, *High-energy positive solutions for a critical growth Dirichlet problem in non-contractible domains*, Nonlinear Anal. **60** (2005), 369–387.

[13] P. Han, *Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **64** (2006), 869–886.

[14] P. Han, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of an elliptic system involving critical Sobolev exponents*, Houston J. Math. **32** (2006), 1241–1257.

[15] A. Haraux e F. Weissler, *Nonuniqueness for a semilinear initial value problem*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 167–189.

[16] L. Herraiz, *Asymptotic behaviour of solutions of some semilinear parabolic problems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **16** (1999), 49–105.

[17] T.S. Hsu, *Multiple positive solutions for a critical quasilinear elliptic system with concave-convex nonlinearities*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 2688–2698.

[18] T. S. Hsu e H. L. Lin, *Multiple positive solutions for a critical elliptic system with concave-convex nonlinearities* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **139** (2009), 1163–1177.

[19] M. Ishiwata, *Effect of topology on the multiplicity of solutions for some semilinear elliptic systems with critical Sobolev exponent*, NoDEA Nonlinear Differential Equations and Appl. **16** (2009), 283–296.

[20] M. Ishiwata, *Multiple solutions for semilinear elliptic systems involving critical Sobolev exponent*, Differential Integral Equations **20** (2007), 1237–1252.

[21] M. Lazzo, *Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec léxposant critique de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 61–64.

[22] P.L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I.*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145–201.

[23] L. Ljusternik e L. Schnirelmann, *Méthods topologiques dans les problémes variationel*, Hermann, Paris, 1934.

[24] D.C. de Morais Filho e M.A.S. Souto, *Systems of p-Laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees,* Comm. Partial Diff. Equations **24** (1999), 1537–1553.

[25] O.H. Miyagaki, *On a class of semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Nonlinear Anal. **29** (1997), 773–781.

[26] Y. Naito, *Self-similar solutions for a semilinear heat equation with critical Sobolev exponent*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 1283–1315.

[27] Y. Naito e T. Suzuki, *Radial symmetry of self-similar solutions for semilinear heat equations*, J. Differential Equations **163** (2000), 407–428.

[28] H. Ohya, *Existence results for some quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Adv. Differential Equations **9** (2004), 1339–1368.

[29] Y. Qi, *The existence of ground states to a weakly coupled elliptic system*, Nonlinear Anal. **48** (2002), 905–925.

[30] O. Rey, *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 1241–1249.

[31] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to diferential equations*, American Mathematical Society, 1984.

[32] Z.W. Tang, *Sign-changing solutions of critical growth nonlinear elliptic systems*, Nonlinear Anal. **64** (2006), 2480–2491.

[33] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Basel, 1996.