Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Equações tipo Yamabe e algumas desigualdades numa classe de variedades

por

Levi Rosa Adriano

Brasília

2010

Agradecimentos

Sobretudo a Deus por tudo o que tenho em minha vida e pelas oportunidades em meu caminho. Agradeço aos meus pais, Geraldino e Diná pelo apoio, carinho, paciência e confiança durante todos esses anos.

Aos colegas do doutorado, Adail, Nilton, Leonardo, Veríssimo, Maxwell e demais que fizeram parte desta etapa da minha vida.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, por serem tão prestativos, em especial à professora Keti, pelas valiosas sugestões para enriquecimento deste trabalho. Ao professor Ezequiel por aceitar participar da banca examinadora. Ao meu orientador, professor Changyu Xia, pela paciência, disposição e por sempre me ajudar durante a elaboração desta tese.

A todos os meus colegas do Ime-Ufg, por serem sempre tão cordiais e companheiros para comigo.

A Ufg, por ter me liberado de todas as minhas atividades acadêmicas durante o período de realização deste curso.

Finalmente, à Capes(Picdt) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, consideramos variedades completas, não-compactas, satisfazendo alguma hipótese sobre a curvatura de Ricci radial. Na primeira parte, obtemos algumas estimativas à priori e também a questão de existência para equações tipo Yamabe em tais variedades. Como consequência destes resultados, mostramos um teorema de existência de métricas conformes com curvatura escalar dada. Na segunda parte, estudamos algumas famílias de desigualdades clássicas da análise. Entre outras coisas, mostramos que uma variedade completa, não-compacta, satisfazendo a propriedade do volume duplicado e tal que vale alguma desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, possui máximo crescimento de volume. Também mostramos que variedades completas não compactas com curvatura de Ricci não negativa e que satisfazem alguma desigualdade de Log-Sobolev ou de Hardy, com uma constante "próxima"da melhor constante do caso Euclideano, são difeomorfas a este último.

Palavras-Chave e frases: Equações de Yamabe, estimativas à priori e existência, variedades completas, curvatura de Ricci assintóticamente não-negativa, desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, máximo crescimento de volume, desigualdades de Hardy.

Abstract

In this work, we consider complete non-compact manifolds, satisfying some hypothesis about the radial Ricci curvature. In the first part, we obtain some priori estimates and also the question of existence for Yamabe type equations in such manifolds. As a consequence of these results, we show a theorem of existence of conformal metrics with scalar curvature given. In the second part, we study some families of classical inequalities of analysis. Among other things, we show that a complete non-compact manifold satisfying the doubling volume property and such that some inequality of Gagliardo-Nirenberg holds, has maximal volume growth. We also show that non-compact manifolds with non-negative Ricci curvature and satisfying some inequality of Log-Sobolev or Hardy, with a constant " close "to the best constant of the Euclidean case are diffeomorphics to the latter.

keywords and phrases: Yamabe equations, priori estimates and existence, complete manifolds, asymptotically non-negative Ricci curvature, Gagliardo-nirenberg inequalities, maximal volume growth, Hardy inequalities.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos variedades Riemannianas completas não-compactas em que, na maioria dos casos, o tensor de Ricci satisfaz

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(r(x)) \tag{1}$$

onde $r(x) = \mathrm{dist}(x, o)$ e $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz alguma condição de regularidade.

No Capítulo 1, apresentamos algumas ferramentas que serão utilizadas no decorrer do trabalho, entre elas, aparecendo na seção inicial, o conceito de espaços de Sobolev numa variedade Riemanniana, alguns teoremas sobre imersões contínuas e compactas envolvendo estes espaços. Apesar de quase todos os resultados desta seção serem enunciados sem demonstração, deixamos ao leitor interessado, as devidas referências para uma pesquisa mais aprofundada. Na seção seguinte, apresentamos os teoremas de comparação de Laplace e de comparação de volume de Bishop-Gromov com suas respectivas demonstrações, já que estes resultados são utilizados praticamente em todo o texto.

No Capítulo 2 estudamos o comportamento assintótico bem como a questão da existência de soluções positivas de equações tipo Yamabe, isto é, equações da forma

$$\Delta u + a(x)u - b(x)u^{\sigma} = 0,\ \ \sigma > 1, \tag{2}$$

numa variedade Riemanniana completa e não-compacta. Em biologia, estas equações descrevem o estado estacionário das soluções da equação logística com difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + a(x)u - b(x)u^{\sigma}.$$

Neste contexto, u representa a densidade de uma população e portanto é assumida não negativa, o termo não linear $-b(x)u^{\sigma}$ significa que a população se auto limita, e a função $a(x)$ representa a taxa de natalidade sem auto limitação.

Em geometria Riemanniana, equações deste tipo surgem como equações de mudança da curvatura escalar sob uma deformação conforme da métrica. Este problema surgiu inicialmente quando Yamabe ([46]) tentava provar a conjectura de Poincaré: *Uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *compacta e simplesmente conexa de dimensão* $n = 3$ *é difeomorfa a* S^3. Para isso, ele pensou, como um primeiro passo, em exibir uma métrica com curvatura escalar constante. Considerando métricas conformes, ele provou a seguinte afirmação "Numa variedade Riemanniana compacta (M^n, g), $n \geq 3$, existe uma métrica g' conforme a g, tal que a curvatura escalar correspondente R' é constante". Porém, nesta prova de Yamabe, havia uma lacuna que só foi preenchida em trabalhos posteriores (veja [5]). No caso em que R' não é constante, temos o problema da curvatura escalar prescrita: seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$. Dada $f \in C^\infty(M)$, *existe uma métrica* g' *em* M *tal que a curvatura escalar* R' *de* g' *é igual a* f*?*

Este problema foi inteiramente resolvido por Kazdan e Warner para o caso em que M é compacta ([24, 25, 26, 27]). Vale salientar que como as equações são diferentes para $n = 2$ e $n \geq 3$, as provas são diferentes assim como os resultados. Se denotarmos por R a curvatura escalar de (M^n, g), quando $n = 2$, escrevemos $g' = e^u g$ e o problema é equivalente a encontrar uma solução positiva da equação

$$\Delta u + R = f e^u.$$

Quando $n \geq 3$, consideramos a deformação conforme da métrica g dada por $g' = u^{\frac{4}{n-2}} g$, e neste caso, o problema é equivalente a encontrar uma solução positiva de

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + Ru = f u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Para variedades completas não-compactas, destacamos os trabalhos de Ratto-Rigoli-Véron e de Rigoli-Zamperlin ([38, 40]) onde os autores mostram alguns resultados de existência e não-existência de métricas conformes, bem como a questão da completude de algumas dessas métricas para uma classe de variedades cujo tensor de Ricci satisfaz

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)H^2(1 + r(x)^2)^{\frac{\delta}{2}}, \ \delta \geq -2. \tag{3}$$

No Capítulo 2, generalizamos alguns dos resultados obtidos em ([40]). Na primeira seção, determinamos algumas estimativas à priori para soluções da equação (2) e, como aplicação, utilizamos estes resultados para alguns casos particulares, afim de determinar a questão da completude de métricas conformes com curvatura escalar dada. Sobre a questão de existência de soluções, para o caso Euclideano, Du e Ma ([18, 19]), obtiveram um teorema de existência para esta equação, resultado este de suma importância e que serviu de inspiração para Rigoli-Zamperlin ([40]) mostrarem um teorema de existência para a equação (2) em variedades Riemannianas completas não-compactas com tensor de Ricci satisfazendo (3). Seguindo estas idéias, na última seção apresentamos um teorema de existência para variedades satisfazendo a nossa hipótese sobre a curvatura de Ricci (1).

Como aplicação, finalizamos o capítulo mostrando um resultado sobre a existência de métricas conformes, com curvatura escalar dada, em alguns casos incompletas, para uma classe de variedades não-compactas.

No Capítulo 3, mudamos de assunto e passamos a estudar algumas desigualdades tipo Sobolev, também conhecida na literatura como desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, em variedades Riemannianas, ou seja, desigualdades do tipo

$$\left(\int_M |f|^r dv_g\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_M |\nabla f|^q dv_g\right)^{\frac{\theta}{q}}\left(\int_M |f|^s dv_g\right)^{\frac{1-\theta}{s}},\ f \in C_0^\infty(M).$$

Vale ressaltar que desta desigualdade obtemos importantes desigualdades na análise tais como as desigualdades de Sobolev, Nash e Log-Sobolev. Dentre vários trabalhos relevantes envolvendo desigualdades clássicas da análise, destacamos o de Ledoux ([28]), o qual mostra que variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não-negativa e que vale alguma desigualdade de Sobolev com a melhor constante do caso Euclideano, são isométricas ao $\mathbb{R}^n$ ([28]). Em trabalhos posteriores de Xia, Do Carmo-Xia ([43, 17, 44, 45]), estas idéias foram estendidas também para outras desigualdades, como por exemplo, a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-bp}|u|^p dx\right)^{1/p} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dv_g\right)^{1/2},\ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

e aprimoradas, no sentido que, se esta desigualdade é válida numa variedade completa com curvatura de Ricci não-negativa com a constante "próxima"da melhor constante do caso Euclideano, então esta variedade é necessariamente difeomorfa ao espaço Euclideano. Em nosso trabalho, mostramos que se a desigualdade de Gagliardo-nirenberg é válida numa variedade Riemanniana completa n-dimensional para alguma constante C positiva, então esta constante deve ser maior ou igual a melhor constante da mesma desigualdade em $\mathbb{R}^n$. Em seguida, utilizamos o fato desta desigualdade ser localmente satisfeita em $\mathbb{R}^n$ para mostrarmos sua validade localmente em qualquer variedade Riemanniana. Mostramos também que uma variedade completa com a propriedade do volume duplicado, isto é, satisfazendo $\forall x \in M$, $Vol[B_{2R}(x)] \leq \alpha Vol[B_R(x)]$,

$\forall R > 0$, para algum $\alpha > 0$, em que vale alguma desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, possui máximo crescimento de volume, e, como consequência, variedades com curvatura seccional não negativa satisfazendo tal desigualdade são difeomorfas ao $\mathbb{R}^n$. Finalizamos o capítulo combinando alguns resultados afim de mostrarmos que uma variedade aberta de curvatura de Ricci não negativa em que vale a desigualdade de Log-Sobolev, com uma constante apropriada, é difeomorfa ao espaço Euclideano.

Finalmente no Capítulo 4, consideramos variedades Riemannianas nas quais vale alguma desigualdade do tipo Hardy,

$$\left(\int_M r(x)^{\gamma p}|u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_M r(x)^{\alpha q}|\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}},\ \forall\ u \in C_0^\infty(M),$$

neste caso, de modo semelhante ao que fizemos no Capítulo 3, mostramos que se esta desigualdade é válida para alguma constante $C > 0$, numa variedade Riemannina, então C deve ser maior ou igual a melhor constante desta desigualdade no caso Euclideano. Em seguida, passamos a considerar o caso especial em que $\alpha = 0$, ou seja,

$$\left(\int_M r(x)^{\gamma p}|u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_M |\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}},\ \forall\ u \in C_0^\infty(M)$$

onde mostramos a validade de alguns dos resultados obtidos no Capítulo 3 para a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. Desta forma, mostramos que variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não negativa em que vale alguma desigualdade de Hardy são difeomorfas e isométricas ao espaço Euclideano, desde que a constante seja próxima ou igual, respectivamente, à melhor constante do caso Euclideano.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas ferramentas que serão utilizadas no decorrer do trabalho, dentre as quais destacamos alguns teoremas clássicos em geometria diferencial como os de comparação de Laplace e de Bishop-Gromov. Faremos demonstrações apenas dos resultados que julgamos relevantes para nossas pretensões, mas sempre deixando ao leitor as devidas referências para um estudo minuncioso.

1.1 Introdução

Neste trabalho, obtemos alguns resultados válidos para uma variedade Riemannina (M^n, g) completa, não compacta e cujo tensor de Ricci satisfaz

$$Ric_{(M,g)}(x)(X, X) \geq -(n-1)G(r(x))g(X, X),$$

para todo $x \in M$ e para qualquer $X \in T_xM$, que por simplicidade de notação, escreveremos apenas

$$Ric_{(M,g)} \geq -(n-1)G(r(x)).$$

Aqui, $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função não negativa com alguma hipótese adicional que deveremos impor nos próximos capítulos e $r : M \to \mathbb{R}$ dada por $r(x) = dist_M(x, o)$ é a função distância a partir de um ponto $o \in M$ fixado. Os exemplos triviais de tais variedades são as chamadas variedades modelo, ou seja, o espaço Euclideano com a métrica dada em coordenadas polar-geodésicas

$$ds^2 = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$$

onde f é solução da seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} f'' - G(t)f = 0 \ em \ (0, \infty), \\ f(0) = 0, \ f'(0) = 1. \end{cases}$$

Uma grande quantidade de exemplos e resultados sobre esta classe de variedades pode ser encontrada em [22].

1.2 Análise em Variedades Riemannianas

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados que nos serão úteis. Afim de facilitar a notação, vamos utilizar a convenção de Einstein para os somatórios. Seja $\nabla^k u$ a k-ésima derivada covariante da função $u : M \to \mathbb{R}$, tal que a norma é definida em coordenadas locais por

$$|\nabla^k u|^2 = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} (\nabla^k u)_{i_1 \cdots i_k} (\nabla^k u)_{j_1 \cdots j_k}; \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$$

onde $\nabla^0 u = u$, $\nabla^1 u = \nabla u$, ou seja,

$$(\nabla u)_i = \partial_i u = \frac{\partial}{\partial x_i} u, \quad (\nabla^2 u)_{ij} = \partial_{ij} u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u.$$

Dado k um inteiro não-negativo e $p \geq 1$ real, seja

$$C_k^p(M) = \{u \in C^\infty(M); \forall j = 0, \cdots, k, \int_M |\nabla^j u|^p dv_g < +\infty\}.$$

Neste caso, quando M é compacta, $C_k^p(M) = C^\infty(M)$ para todo k e para todo $p \geq 1$. Para $u \in C_k^p(M)$ seja

$$\|u\|_{H_k^p} = \sum_{j=0}^{k} \left(\int_M |\nabla^j u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.2.1 *Dada a variedade Riemanniana (M^n, g), $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ real, o espaço de Sobolev $H_k^p(M)$ é o completamento de $C_k^p(M)$ com respeito à norma $\| \cdot \|_{H_k^p}$.*

Proposição 1.2.2 *Se M é compacta, $H_k^p(M)$ não depende da métrica.*

De fato, se M é compacta, todas as métricas são equivalentes.

Proposição 1.2.3 *Se $p > 1$, $H_k^p(M)$ é reflexivo.*

Proposição 1.2.4 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $u : M \to \mathbb{R}$ uma função de lipschitz com suporte compacto. Então $u \in H_1^p(M)$ para todo $p \geq 1$. Em particular, se M é compacta, qualquer função de lipschitz pertence ao espaço $H_1^p(M)$ para todo $p \geq 1$.*

Teorema 1.2.5 *Dada a variedade Riemanniana (M^n, g) completa, o conjunto $C_0^\infty(M)$ das funções suaves com suporte compacto em M é denso em $H_1^p(M)$ para todo $p \geq 1$.*

As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [23, 5].

1.2.1 Imersões de Sobolev(resultados gerais)

Dados $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ dois espaços vetoriais normados com a propriedade de que E é um subespaço de F, escrevemos $E \subset F$ e dizemos que a inclusão é contínua se existe $C > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|x\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Lema 1.2.6 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa tal que vale a imersão $H_1^1(M) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(M)$. Então para quaisquer reais $1 \leq q < p$ e quaisquer inteiros $0 \leq m < k$ tal que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{k-m}{n}$, $H_k^q(M) \subset H_m^p(M)$.*

Em outras palavras se vale para a primeira imersão $m = 0$, $q = 1$, então valerá para os demais casos.

Demonstração do Lema 1.2.6

Faremos aqui uma prova para o caso mais simples em que $m = 0$, $k = 1$, isto é, vamos mostrar que se $H_1^1(M) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(M)$, então para qualquer $q \in [1, n)$, $H_1^q(M) \subset L^p(M)$ onde $1/p = 1/q - 1/n$. A prova para os demais casos pode ser encontrada em [5], Proposição 2.11. Seja $C > 0$ tal que para qualquer $u \in H_1^1(M)$, vale

$$\left(\int_M |u|^{n/(n-1)} dv_g\right)^{(n-1)/n} \leq C \int_M (|\nabla u| + |u|)\, dv_g.$$

Sejam $q \in (1,\ n)$, $p = nq/(n-q)$, e $u \in C_0^\infty(M)$. Escreva $\varphi = |u|^{p(n-1)/n}$. Pela desigualdade de Hölder obtemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{(n-1)/n} &= \left(\int_M |\varphi|^{n/(n-1)} dv_g\right)^{(n-1)/n} \\
&\leq C\int_M (|\nabla\varphi| + |\varphi|)\, dv_g \\
&= \frac{Cp(n-1)}{n}\int_M |u|^{p'}|\nabla u| dv_g + C\int_M |u|^{p(n-1)/n} dv_g \\
&\leq \frac{Cp(n-1)}{n}\left(\int_M |u|^{p'q'} dv_g\right)^{1/q'}\left(\int_M |\nabla u|^q dv_g\right)^{1/q} \\
&+ C\left(\int_M |u|^{p'q'} dv_g\right)^{1/q'}\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

onde $1/q + 1/q' = 1$ e $p' = p(n-1)/n - 1$. Mas $p'q' = p$ pois $1/p = 1/q - 1/n$. Portanto, para qualquer $u \in C_0^\infty(M)$,

$$\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{Cp(n-1)}{n}\left(\left(\int_M |\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Logo o resultado segue por densidade (Teorema 1.2.5). $\square$

Utilizando os mesmos argumentos desenvolvidos na prova do Lema 1.2.6 podemos mostrar que existe uma certa "hierarquia" nas imersões de Sobolev, no sentido que, se para algum $q \in [1, n)$, $H_1^q(M) \subset L^{\frac{nq}{n-q}}(M)$, então $H_1^{q'}(M) \subset L^{\frac{nq'}{n-q'}}(M)$ para todo $q' \in [q, n)$. De fato, seja $C > 0$ tal que, para qualquer $u \in H_1^q(M)$,

$$\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\left(\int_M |\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

onde

$1/p = 1/q - 1/n$. Dado $q' \in (q,\ n)$, e $u \in C_0^\infty(M)$, seja $\varphi = |u|^{p'(n-q)/nq}$ onde $1/p' = 1/q' - 1/n$. Assim, procedendo como na prova do Lema 1.2.6, obtemos pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\left(\int_M |u|^{p'} dv_g\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_M |\varphi|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\left(\left(\int_M |\nabla\varphi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_M |\varphi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= C(s+1)\left(\left(\int_M |u|^{sq}|\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} + C\left(\int_M |u|^{\frac{p'(n-q)}{n}} dv_g\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\leq C(s+1)\left(\int_M |u|^{\frac{qsq'}{q'-q}} dv_g\right)^{\frac{q'-q}{qsq'}}\left(\int_M |\nabla u|^{q'} dv_g\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&+ C\left(\int_M |u|^{\frac{qsq'}{q'-q}} dv_g\right)^{\frac{q'-q}{qsq'}}\left(\int_M |u|^{q'} dv_g\right)^{\frac{1}{q'}}
\end{aligned}$$

onde $s = \frac{p'(n-q)}{nq} - 1$. Mas

$$\frac{1}{p} - \frac{q'-q}{qq'} = \frac{1}{q'} \text{ e } \frac{qsq'}{q'-q} = p'.$$

Portanto, para qualquer $u \in C_0^\infty(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p'} dv_g\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{p'(n-q)C}{nq} \left(\left(\int_M |\nabla u|^{q'} dv_g\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_M |u|^{q'} dv_g\right)^{\frac{1}{q'}}\right)$$

e novamente a afirmação segue pelo Teorema 1.2.5.

1.2.2 O Caso Euclideano

Lema 1.2.7 *Para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Como consequência deste resultado, obtemos o seguinte

Teorema 1.2.8 *Seja $q \in [1, n)$ real e p tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$. Então para todo $u \in H_1^q(\mathbb{R}^n)$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p(n-1)}{2n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Em particular, para quaisquer reais $1 \leq q < p$ e inteiros $0 \leq m < k$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$, $H_k^q(\mathbb{R}^n) \subset H_m^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração

Pelo Lema 1.2.7 temos que para toda $u \in H_1^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx.$$

Deste fato juntamente com o Lema 1.2.6, para quaisquer $1 \leq q < p$ reais e quaisquer $0 \leq m < k$ inteiros satisfazendo $1/p = 1/q - (k-m)/n$, $H_k^q(\mathbb{R}^n) \subset H_m^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, por um cálculo análogo ao feito na prova do Lema 1.2.6, podemos mostrar que para qualquer $1 \leq q < n$ e qualquer $u \in H_1^q(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p(n-1)}{2n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

onde $1/p = 1/q - 1/n$. Isto conclui a prova. □

Convém observar que a constante $\frac{p(n-1)}{2n}$ dada pelo teorema acima não é ótima conforme veremos no Capítulo 3.

1.2.3 Imersões Contínuas I

Para variedades compactas, não é difícil mostrar que vale a imersão $H_1^1(M) \subset L^{n/(n-1)}(M)$. Logo podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 1.2.9 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta. Para quaisquer reais $1 \leq q < p$ e inteiros $0 \leq m < k$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{m-k}{n}$ valem as imersões $H_k^q(M) \subset H_m^p(M)$. Em particular $H_1^q(M) \subset L^p(M)$ onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$.*

Como M é compacta, tem volume finito, assim, para $1 \leq q \leq q'$ temos $L^q(M) \subset L^{q'}(M)$.

Corolário 1.2.10 *Seja (M^n, g) Uma variedade Riemanniana compacta, q, p_0 reais tais que $q \in [1, n)$ e $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$. Então $H_1^q(M) \subset L^p(M)$ para todo $p \in [1, p_0]$.*

1.2.4 Imersões Contínuas II

Vamos discutir agora o caso em que $\frac{1}{q} - \frac{m-k}{n} < 0$. No caso Euclideano, Sobolev provou que $H_k^q(\mathbb{R}^n) \subset C_B^m(\mathbb{R}^n)$, onde

$$C_B^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^m(\mathbb{R}^n); \|u\|_{C^m} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D_\alpha u(x)| < +\infty\},$$

onde α é um multiíndice de comprimento $|\alpha|$, isto é,

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k), \; |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \; \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Dada a variedade Riemanniana compacta (M^n, g), definimos a norma $\| \cdot \|_{C^m}$ em $C^m(M)$ por

$$\|u\|_{C^m} = \sum_{j=0}^{m} \max_{x \in M} |(\nabla^j u)(x)|.$$

Teorema 1.2.11 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta, $q \geq 1$, $m < k$ inteiros satisfazendo $\frac{1}{q} < \frac{k-m}{n}$. Então $H_k^q(M) \subset C^m(M)$.*

Este resultado pode ser melhorado quando envolvemos espaços de Holder. Dada (M^n, g) compacta e $\lambda \in (0, 1)$, seja $C^\lambda(M)$ o conjunto das funções contínuas para os quais a norma

$$\|u\|_{c_\lambda} = \max_{x \in M} |u(x)| + \max_{x \neq y \in M} \frac{|u(x) - u(y)|}{d_g(x, y)^\lambda}$$

é finita.

Teorema 1.2.12 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta, $q \geq 1$, $\lambda \in (0, 1)$ reais. Se $\frac{1}{q} \leq \frac{1-\lambda}{n}$ então $H_1^q(M) \subset C^\lambda(M)$.*

1.2.5 Imersões Compactas

Dados os espaços vetoriais normados $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$, com E subespaço de F dizemos que a imersão de E em F é compacta se subconjuntos limitados de $(E, \|\cdot\|_E)$ são relativamente compactos em $(F, \|\cdot\|_F)$. Isto significa que sequências limitadas em $(E, \|\cdot\|_E)$ possuem subsequências convergentes em $(F, \|\cdot\|_F)$. Claramente, se a imersão de E em F é compacta, é também contínua.

Teorema 1.2.13 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta.*

i) Para quaisquer inteiros $j \geq 0$ e $m \geq 1$ e para quaisquer reais $q \geq 1$, $1 \leq p < \dfrac{nq}{n - mq}$, a imersão $H^q_{j+m}(M) \subset H^p_j(M)$ é compacta. Em particular, para quaisquer reais $q \in [1, n)$ e $p \geq 1$ tais que $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{n}$, a imersão $H^q_1(M) \subset L^p(M)$ é compacta.

ii) Se $q > n$, a imersão $H^q_1(M) \subset C^\lambda(M)$ é compacta para $\lambda \in (0, 1)$ tal que $(1 - \lambda)n > q$. Em particular, a imersão $H^q_1(M) \subset C^0(M)$ é compacta.

1.3 Teoremas de Comparação

Na demonstração dos principais resultados desta seção vamos precisar do seguinte resultado de comparação de Sturm-Liouville (ver [36]).

Lema 1.3.1 *Seja G uma função contínua em $[0, +\infty)$ e sejam ϕ, $\psi \in C^1([0, +\infty)$ com ϕ', $\psi' \in AC((0, +\infty))$ soluções dos problemas*

$$\begin{cases} \phi'' - G\phi \leq 0 \text{ q.s. em } (0, \infty), \\ \phi(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi'' - G\psi \geq 0 \text{ q.s. em } (0, \infty), \\ \psi(0) = 0, \ \psi'(0) > 0. \end{cases}$$

Se $\phi(r) > 0$ para $r \in (0, T)$ e $\psi'(0) \geq \phi'(0)$, então $\psi(r) > 0$ em $(0, T)$ e

$$\frac{\phi'}{\phi} \leq \frac{\psi'}{\psi} \text{ e } \psi \geq \phi \text{ em } (0, T). \tag{1.1}$$

Demonstração

Como $\psi'(0) > 0$, $\psi > 0$ numa vizinhança de zero. Neste ponto vale observar que se G é não-negativa, então integrando a inequação diferencial satisfeita por ψ obtemos

$$\psi'(r) \geq \psi'(0) + \int_0^r G(s)\psi(s)ds,$$

de modo que $\psi' \geq 0$ no intervalo onde $\psi \geq 0$, e concluimos que, de fato, $\psi > 0$ em $(0, +\infty)$.

No caso geral em que não há nenhuma hipótese sobre o sinal de G, escrevemos $\beta = \sup\{t : \psi > 0 \text{ em } (0,t)\}$ e $\tau = \min\{\beta, T\}$, de modo que ϕ e ψ são ambas positivas em $(0,\tau)$. A função $\psi'\phi - \psi\phi'$ é contínua em $[0,+\infty)$ se anula em $r = 0$, e satisfaz

$$(\psi'\phi - \psi\phi')' = \psi''\phi - \psi\phi'' \geq 0,$$

q.s. em $(0,\tau)$. Assim, $\psi'\phi - \psi\phi' \geq 0$ em $[0,\tau)$ e, dividindo esta última desigualdade por $\phi\psi$ obtemos que

$$\frac{\psi'}{\psi} \geq \frac{\phi'}{\phi} \text{ em } (0,\tau).$$

Integrando entre ϵ e r $(0 < \epsilon < r < \tau)$ obtemos

$$\phi(r) \leq \frac{\phi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)}\psi(r)$$

como

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\phi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)} = \frac{\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\phi(\epsilon)-\phi(0)}{\epsilon}}{\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\psi(\epsilon)-\psi(0)}{\epsilon}} = \frac{\phi'(0)}{\psi'(0)} \leq 1,$$

concluimos que de fato

$$\phi(r) \leq \psi(r) \text{ em } [0,\tau).$$

Como $\phi > 0$ em $(0,T)$ por hipótese, devemos ter $\tau = T$, pois, caso contrário, $\tau = \beta < T$, e neste caso, $\phi(\beta) > 0$, enquanto que, por continuidade, $\psi(\beta) = 0$, que é uma contradição.

□

Utilizando o resultado de comparação de Sturm-Liouville podemos obter um teorema de comparação de soluções de inequações de Riccati, conforme mostra o crolário a seguir.

Corolário 1.3.2 *Seja G uma função contínua em $[0,+\infty)$ e sejam $g_i \in AC((0,T_i))$ soluções das inequações de Riccati*

$$g_1' + \frac{g_1^2}{\alpha} - \alpha G \leq 0, \;\; g_2' + \frac{g_2^2}{\alpha} - \alpha G \geq 0$$

q.s. em $(0,T_i)$ satisfazendo a condição assintótica

$$g_i(t) = \frac{\alpha}{t} + O(1) \text{ quando } t \to 0^+,$$

para algum $\alpha > 0$. Então $T_1 \leq T_2$ e $g_1(t) \leq g_2(t)$ em $(0,T_1)$.

Demonstração

Observando que $\tilde{g}_i = \alpha^{-1} g_i$ satisfaz as hipóteses com $\alpha = 1$, sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha = 1$.

Observe que a função $g_i(s) - \frac{1}{s}$ é limitada e integrável numa vizinhança de $s = 0$, e seja $\phi_i \in C^1([0, T_i))$ a função positiva em $[0, T_i)$ definida por

$$\phi_i(t) = t \exp\left\{ \int_0^t (g_i(s) - \frac{1}{s}) ds \right\}.$$

Então $\phi_i(0) = 0$, $\phi > 0$ em $(0, T_i)$, $\phi_i' \in AC(0, T_i)$ e cálculos simples mostram que

$$\phi_i'(t) = g_i \phi_i(t), \ \phi_i'(0) = 1$$

e

$$\phi_1'' \leq G\phi_1 \text{ em } (0, T_1), \ \phi_2'' \geq G\phi_2 \text{ em } (0, T_2).$$

Pelo Lema 1.3.1 temos que $T_1 \leq T_2$ e $g_1 = \frac{\phi_1'}{\phi_1} \leq \frac{\phi_2'}{\phi_2} = g_2$ em $(0, T_1)$ como queríamos. $\square$

Estamos agora em condições de provar o resultado principal desta seção.

Teorema 1.3.3 *(Teorema de Comparação de Laplace). Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci radial satisfazendo*

$$Ric_{(M,g)}(x)(\nabla r, \nabla r) \geq -(n-1)G(r(x)) \tag{1.2}$$

para alguma função $G \in C^0([0, +\infty))$, e seja $h \in C^2([0, +\infty))$ solução do problema

$$\begin{cases} h'' - Gh \geq 0, \\ h(0) = 0, \ h'(0) = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Então a desigualdade

$$\Delta r(x) \leq (n-1)\frac{h'(r(x))}{h(r(x))} \tag{1.4}$$

onde $\Delta r = div(\nabla r)$, vale em $M \backslash (cut(o) \cup \{o\})$.

Demonstração

Seja $D_0 = M \backslash cut(o)$ e fixe $x \in D_0$. Seja $\gamma : [0, l] \to M$ a geodésica minimizante ligando os pontos o e x parametrizada por comprimento de arco. Vamos escrever

$$\phi(s) = \Delta r(\gamma(s)), \ s \in (0, l].$$

Vamos verificar que ϕ satisfaz

$$\begin{cases} i) \quad \phi(s) = \frac{n-1}{s} + o(1), \text{ quando } s \to 0^+, \\ ii) \quad \phi' + \frac{1}{n-1}\phi^2 \leq (n-1)G, \text{ em } (0, l]. \end{cases} \tag{1.5}$$

De fato, (1.5) $i)$ segue do fato que numa vizinhança de zero, $\Delta r \approx \Delta_{\mathbb{R}^n}|x|$, ou seja

$$\Delta r = \frac{n-1}{r} + o(1), \text{ quando } r \to 0^+.$$

Para $ii)$ vamos utilizar a fórmula de *Bochner*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2)) = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f)$$

para $f = r$, assim

$$0 = |\nabla^2 r|^2 + \langle \nabla(\Delta r), \nabla r\rangle + Ric(\nabla r, \nabla r). \tag{1.6}$$

Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ com $e_n = \gamma'(s)$ um referencial ortonormal em $y = \gamma(s)$. Como $\nabla^2 r(e_n, e_n) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \Delta r(y) &= \sum_{i=1}^{n-1} \nabla^2 r(e_i, e_i) \\ &\leq \sqrt{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \nabla^2 r(e_i, e_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{n-1}|\nabla^2 r|. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Logo, das expressões (1.7), (1.6) e (1.2) obtemos

$$\frac{(\Delta r)^2}{n-1} + \langle \nabla \Delta r, \nabla r\rangle \leq (n-1)G(r)$$

que é exatamente a expressão $ii)$ de (1.5). Da equação (1.3) temos que a função $\psi = \frac{h'}{h}$ satisfaz

$$\psi' + \psi^2 \geq G \text{ em } (0, +\infty), \ \psi(s) = \frac{1}{s} + O(1) \text{ quando } s \to 0^+.$$

Logo, as funções $g_1 = \phi$ e $g_2 = (n-1)\psi$ satisfazem as hipóteses do Corolário 1.3.2, o que conclui a prova. $\square$

Este resultado também vale no sentido de distribuições. O leitor interessado poderá consultar a prova deste fato em [39, 36].

O Teorema a seguir é uma espécie de generalização do que na literatura conhecemos como o Teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov. A demonstração em sua íntegra pode ser encontrada em [36].

Teorema 1.3.4 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com tensor de Ricci satisfazendo*

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(r(x)) \tag{1.8}$$

para alguma função $G \in C^0([0,+\infty))$ não-negativa. Seja $h \in C^2([0,+\infty))$ a solução não-negativa do problema

$$\begin{cases} h''(t) - G(t)h(t) = 0, \\ h(0) = 0, \;\; h'(0) = 1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Então, para quase todo $R > 1$, a função

$$R \mapsto \frac{vol[\partial B_R(o)]}{h(R)^{n-1}} \text{ é não} - \text{crescente} \tag{1.10}$$

e

$$vol[\partial B_R(o)] \leq c_n h(R)^{n-1} \tag{1.11}$$

onde c_n é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Além disso,

$$R \mapsto \frac{vol[B_R(o)]}{\int_0^R h(t)^{n-1}dt} \tag{1.12}$$

é uma função não-crescente em $(0,+\infty)$.

Demonstração

Pelo Teorema de comparação de Laplace, Teorema 1.3.3, temos que

$$\Delta r(x) \leq (n-1)\frac{h'(r(x))}{h(r(x))}$$

pontualmente em $M \backslash cut(o)$ e fracamente em toda a variedade M. Assim, para toda $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(M)$,

$$-\int_M \langle \nabla r, \nabla \varphi \rangle dv_g \leq (n-1)\int_M \frac{h'(r(x))}{h(r(x))}\varphi dv_g. \tag{1.13}$$

Para qualquer $\epsilon > 0$, considere a função corte radial

$$\varphi_\epsilon(x) = \eta_\epsilon(r(x))h(r(x))^{-n+1}$$

onde η_ϵ é a função linear por partes definida por

$$\eta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0,r), \\ \frac{t-r}{\epsilon} & \text{se } t \in [r, r+\epsilon), \\ 1 & \text{se } t \in [r+\epsilon, R-\epsilon), \\ \frac{R-t}{\epsilon} & \text{se } t \in [R-\epsilon, R), \\ 0 & \text{se } t \in [R,+\infty). \end{cases}$$

Logo, temos que

$$\nabla \varphi_\epsilon = \left\{ -\frac{\chi_{R-\epsilon,R}}{\epsilon} + \frac{\chi_{r,r+\epsilon}}{\epsilon} - (n-1)\frac{h'(r(x))}{h(r(x))}\eta_\epsilon \right\} h(r(x))^{-n+1}\nabla r,$$

para quase todo ponto $x \in M$, onde $\chi_{s,t}$ é a função característica do anel $B_t(o) \backslash B_s(o)$. Portanto, substituindo φ_ϵ em (1.13) e simplificando obtemos

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{B_R(o) \backslash B_{R-\epsilon}(o)} h(r(x))^{-n+1} \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{B_{r+\epsilon}(o) \backslash B_r(o)} h(r(x))^{-n+1}.$$

Utilizando a fórmula da co-área (veja [10]), podemos deduzir que

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{R-\epsilon}^{R} vol[\partial B_t(o)] h(t)^{-n+1} \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{r}^{r+\epsilon} vol[\partial B_t(o)] h(t)^{-n+1}$$

e, fazendo $\epsilon \searrow 0$,

$$\frac{vol[\partial B_R(o)]}{h(R)^{n-1}} \leq \frac{vol[\partial B_r(o)]}{h(r)^{n-1}} \tag{1.14}$$

para quase todo $0 < r < R$. Fazendo $r \to 0$ e lembrando que da geometria local de M, $h(r) \approx r$ e $vol[\partial B_r] \approx c_n r^{n-1}$ quando $r \to 0$, onde c_n é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, concluímos que,

$$vol[\partial B_R(o)] \leq c_n h(R)^{n-1},$$

para quase todo $R > 0$. Para provarmos a segunda afirmação do teorema, observe que para quaisquer funções reais $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$,

$$\text{se } t \to \frac{f(t)}{g(t)} \text{ é decrescente, então } t \to \frac{\int_0^t f}{\int_0^t g} \text{ é decrescente.}$$

De fato, como f/g é decrescente, se $0 < r < R$,

$$\int_0^r f \int_r^R g = \int_0^r g \frac{f}{g} \int_r^R g \geq \frac{f(r)}{g(r)} \int_0^r g \int_r^R g \geq \int_0^r g \int_r^R g \frac{f}{g} = \int_0^r g \int_r^R f,$$

assim

$$\int_0^r f \int_0^R g = \int_0^r f \int_0^r g + \int_0^r f \int_r^R g \geq \int_0^r f \int_0^r g + \int_0^r g \int_r^R f = \int_0^r g \int_0^R f.$$

Em particular, aplicando esta observação à expressão (1.14) e utilizando a fórmula da co-área, deduzimos que a função

$$r \to \frac{vol[B_r(o)]}{\int_0^r h(t)^{n-1} dt} \text{ é decrescente,}$$

como queríamos mostrar. $\square$

Corolário 1.3.5 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com tensor de Ricci satisfazendo (1.8). Suponhamos que $\int_0^{+\infty} tG(t)dt = b_0 < +\infty$. Então, para todo $R > r > 0$,*

$$\frac{vol[B_R(o)]}{vol[B_r(o)]} \leq e^{(n-1)b_0} \left(\frac{R}{r}\right)^n, \ vol[\partial B_r(o)] \leq c_n e^{(n-1)b_0} r^{n-1}.$$

Demonstração

Seja $h \in C^2([0,+\infty))$ a solução não-negativa do problema

$$\begin{cases} h''(t) - G(t)h(t) = 0, \\ h(0) = 0, \;\; h'(0) = 1. \end{cases}$$

Vamos considerar também as funções $\phi, \; \psi$ dadas por

$$\phi(t) = t \text{ e } \psi(t) = \int_0^t e^{\int_0^s uG(u)du} ds.$$

Observe que $\psi(t) \leq te^{\int_0^t sG(s)ds}$. De fato, escrevendo $w(t) = te^{\int_0^t sG(s)ds}$, temos que

$$(\psi - w)' = -t^2 G(t) e^{\int_0^t sG(s)ds} \leq 0.$$

Logo, para todo $t \geq 0$, $(\psi - w)(t) \leq (\psi - w)(0) = 0$.

Por um cálculo simples verificamos que ϕ e ψ satisfazem as seguintes inequações

$$\begin{cases} \phi'' - G(t)\phi \leq 0, \\ \phi(0) = 0, \;\; \phi'(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi'' - G(t)\psi \geq 0, \\ \psi(0) = 0, \;\; \psi'(0) = 1. \end{cases}$$

Logo, pelo Lema 1.3.1, temos que $\phi \leq h \leq \psi$, ou seja,

$$t \leq h(t) \leq te^{b_0}$$

donde obtemos

$$\frac{r^n}{n} \leq \int_0^r h(t)^{n-1} dt \leq e^{(n-1)b_0} \frac{r^n}{n}, \;\; \forall r > 0.$$

Desta última equação junto com o Teorema 1.3.4, temos para quaisquer $0 < r < R$,

$$vol[B_R(o)] \frac{n}{e^{(n-1)b_0} R^n} \leq \frac{vol[B_R(o)]}{\int_0^R h(t)^{n-1} dt} \leq \frac{vol[B_r(o)]}{\int_0^r h(t)^{n-1} dt} \leq vol[B_r(o)] \frac{n}{r^n}$$

e o resultado segue da primeira junto com a última desigualdade. $\square$

Capítulo 2

Estimativas à Priori e Existência Para Equações Tipo Yamabe

Neste capítulo, estudaremos o comportamento assintótico e a questão da existência de soluções positivas de equações tipo Yamabe numa variedade Riemanniana completa e não compacta. Como aplicação, mostraremos um resultado sobre a existência de métricas conformes para uma classe de variedades não compactas.

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo será determinar algumas estimativas à priori e a questão de existência de soluções positivas da equação

$$\Delta u + a(x)u - b(x)u^{\sigma} = 0,\ \sigma > 1, \tag{2.1}$$

numa variedade Riemanniana (M^n, g) completa não compacta. Iremos supor que o coeficiente $b(x)$ é não negativo enquanto que $a(x)$ possivelmente troca de sinal.

Em geometria Riemanniana, equações da forma (2.1) surgem como equações de mudança da curvatura escalar sob uma deformação conforme da métrica. Em biologia, estas equações descrevem o estado estacionário das soluções da equação logística com difusão (ou difusiva)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + a(x)u - b(x)u^{\sigma}.$$

Neste último contexto, u representa a densidade de uma população e portanto é assumida não negativa, o termo não linear $-b(x)u^\sigma$ significa que a população se auto limita, e a função $a(x)$ representa a taxa de natalidade sem auto limitação.

No contexto Euclideano, G. A. Afrouzi e K. J. Brown [1], estudaram o seguinte caso especial de (2.1)

$$\Delta u + \lambda[h(x)u - u^2] = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

onde o parâmetro positivo $\lambda > 0$ é o inverso da taxa de difusão, e $h(x)$ é um coeficiente que troca de sinal e que representa a taxa de natalidade da população. Seus resultados descrevem a interação entre a difusão e a taxa de natalidade, e mostram que se a difusão é suficientemente pequena, soluções podem existir mesmo se a é predominantemente negativa, enquanto que se a difusão é grande, então soluções existem somente se a taxa de natalidade é suficintemente grande.

Para mais detalhes sobre estes exemplos, o leitor interessado poderá consultar os seguintes trabalhos [24, 38, 18, 19, 37, 1, 3].

Lembrando que $\rho : M \to \mathbb{R}$ é a função distância em M definida por $\rho(x) = \mathrm{dist}_{(M,g)}(x, o)$, onde $o \in M$ é um ponto fixado, e vamos denotar por $B_R(p)$ a bola geodésica de centro p e raio R.

Dada uma função monótona (não-constante) $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vamos definir a função λ_f por

$$\lambda_f = \begin{cases} 1 & se \quad f \text{ é não-decrescente} \\ -1 & se \quad f \text{ é não-crescente.} \end{cases}$$

2.2 Estimativas à Priori

Nesta seção iremos estudar o comportamento assintótico das soluções da equação (2.1) para uma classe de variedades. Vamos considerar G, H funções positivas ambas não-decrescentes ou não-crescentes definidas em $[0, +\infty)$ e ψ monótona definida em $[R, +\infty)$ para algum $R >> 1$ satisfazendo

$$L_1 = \limsup_{t \to +\infty} \frac{G(t(1 + \lambda_G \epsilon))}{H(t(1 - \lambda_H \epsilon))} < +\infty, \tag{2.2}$$

$$L_2 = \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{H(t(1 - \lambda_H \epsilon))t^2} < +\infty, \tag{2.3}$$

e

$$\psi(t) = O\left(\psi\left(\frac{t}{1 + \lambda_\psi \epsilon}\right)\right), \quad t \to +\infty \tag{2.4}$$

para algum $\epsilon \in (0,1)$.

O teorema abaixo generaliza as idéias de Rigoli-Zamperlin [40].

Teorema 2.2.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com o tensor de Ricci satisfazendo*

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(r(x)). \tag{2.5}$$

Sejam $a(x)$, $b(x) \in C^0(M)$ com $b(x) > 0$ em M tais que

$$a(x) \geq H(r(x)), \;\; r(x) >> 1. \tag{2.6}$$

com as funções G e H satisfazendo (2.2) e (2.3) para

$$L_1 \leq \frac{n}{(n+1)(n-1)^2} \; e \; L_2 \leq \frac{\epsilon^2}{8n(n+1)}.$$

Além disso, suponhamos que

$$\liminf_{r(x)\to+\infty} \frac{a(x)}{b(x)}\psi(r(x)) > 0, \tag{2.7}$$

ψ satisfazendo (2.4). Nessas condições, qualquer solução $u \in C^2(M)$ positiva de

$$\Delta u + a(x)u - b(x)u^\sigma \leq 0, \qquad \sigma > 1, \tag{2.8}$$

satisfaz

$$u(x) \geq C\psi(r(x))^{-\frac{1}{\sigma-1}},$$

para alguma constante $C > 0$ e $r(x) >> 1$.

Demonstração

Fixe $q \in M$, tal que $r(q) >> 1$ e vamos definir $\rho(x) = \mathrm{dist}_{(M,g)}(x,q)$. Fixe $T > 0$ e consideremos em $B_T(q)$ a função

$$F(x) = \frac{u(x)}{[T^2 - \rho^2(x)]^{n+1}}. \tag{2.9}$$

Observamos que quando $x \to \partial B_T(q)$, $F(x) \to +\infty$ e $F(x) > 0$ em $B_T(q)$, de modo que F assume valor mínimo absoluto em $\bar{x} \in B_T(q)$. Pelo Argumento de Calabi [8], podemos supor que ρ é suave numa vizinhança de $\bar{x}$, donde deduzimos

$$(i) \quad \nabla \log F(\bar{x}) = 0 \qquad (ii) \quad \Delta \log F(\bar{x}) \geq 0. \tag{2.10}$$

Da equação (i) de (2.10) obtemos

$$\frac{\nabla u}{u}(\bar{x}) = -2(n+1)\frac{\rho\nabla\rho}{T^2-\rho^2}(\bar{x}). \tag{2.11}$$

Do mesmo modo, (ii) de (2.10) junto com (2.11) nos dá em $\bar{x}$

$$\frac{\Delta u}{u} - 4n(n+1)\frac{\rho^2}{[T^2-\rho^2]^2} + (n+1)\frac{\Delta\rho^2}{T^2-\rho^2} \geq 0. \tag{2.12}$$

Vamos estimar $\Delta\rho^2$. Para tanto, observamos que em $B_T(q)$

$$r(q) - T \leq r(x) \leq r(q) + T.$$

Logo,

$$G(r(x)) \leq G(r(q) + \lambda_G T),$$

donde concluímos que em $\overline{B}_T(q)$

$$Ric_{(M,g)} \geq -(n-1)Z^2$$

onde $Z^2 = G(r(q) + \lambda_G T)$. Temos que

$$\Delta\rho^2 = 2(1 + \rho\Delta\rho)$$

e pelo Teorema de comparação de Laplace (veja [22])

$$\Delta\rho \leq (n-1)\frac{f'}{f}(\rho),$$

onde f é solução da equação $f'' - Z^2 f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Assim

$$\Delta\rho \leq (n-1)Z\coth(Z\rho),$$

e por um cálculo simples, obtemos

$$\Delta\rho^2 \leq 2[n + (n-1)Z\rho] \quad \text{em} \quad \overline{B}_T(q). \tag{2.13}$$

Como $u > 0$ é solução de (2.8), juntamente com (2.12), obtemos

$$4n(n+1)\frac{\rho^2(\bar{x})}{[T^2-\rho^2(\bar{x})]^2} - (n+1)\frac{\Delta\rho^2(\bar{x})}{T^2-\rho^2(\bar{x})} \leq \frac{\Delta u}{u} \leq b(\bar{x})u^{\sigma-1} - a(\bar{x}).$$

Desta equação, e de (2.13) segue que

$$u(\bar{x})^{\sigma-1} \geq \frac{a(\bar{x})}{b(\bar{x})}\left\{1 + \frac{4n(n+1)}{a(\bar{x})}\frac{\rho^2(\bar{x})}{[T^2-\rho^2(\bar{x})]^2} - \frac{2(n+1)}{a(\bar{x})}\frac{(n+(n-1)Z\rho(\bar{x}))}{T^2-\rho^2(\bar{x})}\right\}.$$

Como $\bar{x}$ é o ponto de mínimo de F em $B_T(q)$ temos $\forall y \in B_T(q)$

$$[T^2-\rho^2(\bar{x})]^{n+1}u(y) \geq [T^2-\rho^2(y)]^{n+1}u(\bar{x}).$$

Em particular, para $y = q$, obtemos

$$u(q)^{\sigma-1} \geq u(\bar{x})^{\sigma-1} \geq \frac{a(\bar{x})}{b(\bar{x})} \left\{ 1 + \frac{4n(n+1)}{a(\bar{x})} \frac{\rho^2(\bar{x})}{[T^2 - \rho^2(\bar{x})]^2} - \frac{2(n+1)}{a(\bar{x})} \frac{(n + (n-1)Z\rho(\bar{x}))}{T^2 - \rho^2(\bar{x})} \right\}. \tag{2.14}$$

Afim de estimarmos a expressão entre chaves de (2.14), vamos considerar

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2n(n+1)}{a(\bar{x})} \frac{t^2}{[T^2 - t^2]^2} - \frac{2(n+1)}{a(\bar{x})} \frac{(n-1)Zt}{T^2 - t^2}$$

e

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2n(n+1)}{a(\bar{x})} \frac{t^2}{[T^2 - t^2]^2} - \frac{2n(n+1)}{a(\bar{x})(T^2 - t^2)}$$

em $[0, T)$. Temos que a parábola

$$w = \frac{2n(n+1)}{a(\bar{x})} y^2 - \frac{2(n-1)(n+1)}{a(\bar{x})} Zy + \frac{1}{2}$$

atinge seu valor mínimo em

$$\bar{f} = \frac{1}{2} - \frac{(n+1)(n-1)^2}{2n} \frac{Z^2}{a(\bar{x})}.$$

Para $g(t)$, temos que $g(0) = \frac{1}{2} - \frac{2n(n+1)}{a(\bar{x})T^2}$ e $\lim_{t \to T^-} g(t) = +\infty$. Além disso,

$$g'(t) = \frac{8n(n+1)}{a(\bar{x})} \frac{t^3}{(T^2 - t^2)^3} \geq 0.$$

Logo, g é não decrescente e $\bar{g} = g(0)$ é o valor mínimo de g em $B_T(q)$. Voltando a (2.14), obtemos

$$u(q)^{\sigma-1} \geq \frac{a(\bar{x})}{b(\bar{x})} \left\{ 1 - \frac{(n+1)(n-1)^2}{2n} \frac{Z^2}{a(\bar{x})} - \frac{2n(n+1)}{a(\bar{x})T^2} \right\}. \tag{2.15}$$

Escolhendo agora $T = \epsilon r(q)$, temos para todo $x \in B_T(q)$

$$r(q)(1 - \epsilon) \leq r(x) \leq r(q)(1 + \epsilon).$$

De (2.6), temos que

$$a(x) \geq H(r(q)(1 - \lambda_H \epsilon)) \tag{2.16}$$

$\forall x \in B_T(q)$. Denotando por $\Phi(\bar{x})$ a expressão entre chaves de (2.15), obtemos

$$\Phi(\bar{x}) = 1 - \frac{(n+1)(n-1)^2}{2n} \frac{G(r(q)(1 + \lambda_G \epsilon))}{a(\bar{x})} - \frac{2n(n+1)}{a(\bar{x})\epsilon^2 r(q)^2}. \tag{2.17}$$

Logo de (2.16) obtemos que

$$\Phi(\bar{x}) \geq 1 - \frac{(n+1)(n-1)^2}{2n} \frac{G(r(q)(1 + \lambda_G \epsilon))}{H(r(q)(1 - \lambda_H \epsilon))} - \frac{2n(n+1)}{H(r(q)(1 - \lambda_H \epsilon))\epsilon^2 r(q)^2}.$$

E portanto, de (2.2) e (2.3), podemos supor, escolhendo $R_0 > 0$ suficientemente grande, tal que para todo q com $r(q) > R_0$, tenhamos $\Phi(\bar{x}) \geq \dfrac{1}{4}$. Assim

$$u(q)^{\sigma-1} \geq \frac{1}{4}\frac{a(\bar{x})}{b(\bar{x})}$$

ou ainda

$$u(q) \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \left(\frac{a(\bar{x})}{b(\bar{x})}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} u(q)\psi(r(q))^{\frac{1}{\sigma-1}} &\geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \left[\psi(r(q))\frac{a(\bar{x})}{b(\bar{x})}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &\geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \left[\psi(r(q))\min_{\overline{B}_T(q)}\frac{a(x)}{b(x)}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}. \end{aligned}$$

Para concluirmos a prova, basta mostrarmos que

$$\liminf_{r(q)\to+\infty} \psi(r(q))\min_{\overline{B}_T(q)}\frac{a(x)}{b(x)} > 0.$$

De fato, se isto não for verdade, teremos uma sequência $(y_k) \subset M$ com $r(y_k) \to +\infty$, satisfazendo

$$\lim_{r(y_k)\to+\infty} \psi(r(y_k))\min_{\overline{B}_{T_k}(y_k)}\frac{a(x)}{b(x)} = 0, \tag{2.18}$$

$T_k = \epsilon r(y_k)$. Seja $(z_k) \subset \overline{B}_{T_k}(y_k)$ tal que

$$\min_{\overline{B}_{T_k}(y_k)}\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(z_k)}{b(z_k)}.$$

Deste modo temos que (2.18) é equivalente a

$$\lim_{r(y_k)\to+\infty} \psi(r(y_k))\frac{a(z_k)}{b(z_k)} = 0. \tag{2.19}$$

Da hipótese (2.4) temos que existe $\psi_0 > 0$ tal que

$$\psi(t) \leq \psi_0\psi\left(\frac{t}{1+\lambda_\psi\epsilon}\right)$$

e como

$$r(y_k)(1-\epsilon) \leq r(z_k) \leq r(y_k)(1+\epsilon)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \psi(r(y_k))\frac{a(z_k)}{b(z_k)} &\geq \psi\left(\frac{r(z_k)}{1+\lambda_\psi\epsilon}\right)\frac{a(z_k)}{b(z_k)} \\ &\geq \frac{1}{\psi_0}\psi(r(z_k))\frac{a(z_k)}{b(z_k)}. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $r(y_k) \to +\infty$, e neste caso $r(z_k) \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{r(z_k)\to+\infty} \psi(r(z_k))\frac{a(z_k)}{b(z_k)} \leq 0$$

o que é um absurdo, pois contradiz (2.7). $\square$

A seguir, faremos uma importante aplicação deste resultado. Para tanto, vamos supor que $H(t) = H_0 t^\alpha$, $\alpha \geq -2$, $t >> 1$. Suponhamos também que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{G(t)}{t^\alpha} \leq \frac{nH_0}{(n+1)(n-1)^2}\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)^{|\alpha|} \tag{2.20}$$

para algum $\epsilon \in (0,1)$ conveniente. Se $\alpha = -2$ vamos supor ainda que

$$H_0 \geq 8n(n+1)\left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right)^2.$$

Nessas condições, é fácil ver que G, H satisfazem as hipóteses do Teorema 2.2.1, e como consequência, temos a seguinte

Proposição 2.2.2 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 3$ com o tensor de Ricci satisfazendo $Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(r(x))$, onde G satisfaz (2.20). Suponha que a curvatura escalar $s(x)$ satisfaz*

$$s(x) \leq -H_0 r(x)^\alpha, \;\; r(x) >> 1. \tag{2.21}$$

Seja $K(x) \in C^\infty(M)$, $K(x) < 0$, satisfazendo

$$K(x) \geq -Br(x)^{2+\alpha}\log^2 r(x) \tag{2.22}$$

para $r(x) >> 1$ e alguma constante $B > 0$. Então qualquer deformação conforme de g a uma nova métrica de curvatura escalar $K(x)$ é completa.

Demonstração

Se $g_u = u^{\frac{4}{n-2}}g$ é uma deformação conforme de g com curvatura escalar $K(x)$ então $u > 0$ satisfaz a equação de Yamabe

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u - s(x)u + K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$$

Portanto u é solução de

$$\Delta u + (-s(x))u - (-K(x))u^{\frac{n+2}{n-2}} \leq 0. \tag{2.23}$$

Aqui $a(x) = -s(x)$, $b(x) = -K(x)$. Se $\psi(r) = r^2 \log^2 r$, temos que ψ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.1 para qualquer $\epsilon \in (0,1)$ e

$$\frac{a(x)}{b(x)}\psi(r(x)) \geq \frac{H_0 r(x)^\alpha}{B r(x)^{2+\alpha}\log^2 r(x)} r(x)^2 \log^2 r(x) = \frac{H_0}{B} > 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.2.1, existe $C > 0$ tal que

$$u(x) \geq C[r(x)^2 \log^2 r(x)]^{\frac{2-n}{4}}$$

para todo x tal que $r(x) > R_0$ para algum $R_0 >> 1$. Seja $\eta : [0, +\infty) \to M$ uma curva divergente parametrizada pelo comprimento de arco partindo de o. Denotando por $l_u(\eta)$ o comprimento de η na métrica g_u e levando em conta que $r(\eta(s)) \leq s$, obtemos

$$\begin{aligned}
l_u(\eta) &= \int_0^{+\infty} g_u(\eta', \eta')^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \int_0^{+\infty} u^{\frac{2}{n-2}}(\eta(s)) g(\eta', \eta')^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \int_0^{R_0} u^{\frac{2}{n-2}}(\eta(s)) g(\eta', \eta')^{\frac{1}{2}} ds + \int_{R_0}^{+\infty} u^{\frac{2}{n-2}}(\eta(s)) g(\eta', \eta')^{\frac{1}{2}} ds \\
&\geq C_0 \int_{R_0}^{+\infty} \frac{ds}{r(\eta(s))\log(\eta(s))} \\
&\geq C_0 \int_{R_0}^{+\infty} \frac{ds}{s \log s} \\
&= C_0 \log\log s|_{R_0}^{+\infty} = +\infty.
\end{aligned}$$

□

De modo semelhante ao Teorema 2.2.1, podemos obter uma estimativa para as soluções da inequação

$$\Delta u + a(x)u - b(x)u^\sigma \geq 0, \qquad \sigma > 1. \tag{2.24}$$

Considere as funções G, H satisfazendo as propriedades (2.2) e (2.3) e sejam ω, ψ, funções monótonas, definidas em $[R_0, +\infty)$ para algum $R_0 >> 1$, com as seguintes propriedades

$$i) \quad \omega\left(\frac{t}{1-\lambda_\omega \epsilon}\right) = O(\omega(t)), \qquad ii) \quad \psi\left(\frac{t}{1-\lambda_\psi \epsilon}\right) = O(\psi(t)), \quad t \to +\infty, \tag{2.25}$$

para algum $0 < \epsilon < 1$.

O próximo resultado estende as idéias de Rigoli-Setti-Pigola [39] (pg 40).

Teorema 2.2.3 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa (não-compacta), com tensor de Ricci satisfazendo*

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(r(x)). \tag{2.26}$$

Suponhamos que

$$i) \limsup_{r(x)\to+\infty} \frac{a_+(x)}{b(x)}\omega(r(x)) < +\infty, \;\; ii) \liminf_{r(x)\to+\infty} \frac{b(x)}{\psi(r(x))}\frac{r(x)}{H(r(x))^{\frac{1}{2}}} > 0, \tag{2.27}$$

onde ω, ψ *satisfazem (2.25),* G*,* H *satisfazem (2.2) e (2.3),* $a(x)$*,* $b(x) \in C^0(M)$*. Se* $u \in C^2(M)$ *é qualquer solução não-negativa de (2.24), então*

$$u(x) \leq C\left(\omega(r(x))^{-\frac{1}{\sigma-1}} + \psi(r(x))^{-\frac{1}{\sigma-1}}\right) \tag{2.28}$$

para alguma constante $C > 0$ *e* $r(x) >> 1$*.*

Demonstração

A demonstração segue as idéias utilizadas na prova do Teorema 2.2.1. Seja $q \in M$ tal que $r(q) >> 1$ e considere a função $\rho(x) = \mathrm{dist}_{(M,g)}(x,q)$. Fixado $T > 0$, vamos considerar a função contínua

$$F(x) = [T^2 - \rho^2(x)]^{\xi} u(x), \;\; \xi > 0, \tag{2.29}$$

onde $u \in C^2(M)$ é uma solução não-negativa qualquer de (2.24). Observe que $F|_{\partial B_T(q)} \equiv 0$. Se $u \equiv 0$ em $B_T(q)$ então temos a validade de (2.28). Caso contrário, F assume valor máximo (absoluto) positivo em $\bar{x} \in B_T(q)$. Em particular $u(\bar{x}) > 0$. Utilizando um argumento de Calabi [8], podemos supor que ρ é suave numa vizinhança de $\bar{x}$. Então

$$i) \; \nabla \log F(\bar{x}) = 0; \;\; ii) \; \Delta \log F(\bar{x}) \leq 0. \tag{2.30}$$

Da expressão $i)$ de (2.30), obtemos em $\bar{x}$

$$\frac{\nabla u}{u} = 2\xi \frac{\rho \nabla \rho}{T^2 - \rho^2}. \tag{2.31}$$

Do mesmo modo que de $ii)$ junto com (2.31) nos dá em $\bar{x}$

$$0 \geq \frac{\Delta u}{u} - 4\xi(\xi+1)\frac{\rho^2}{(T^2-\rho^2)^2} - \xi \frac{\Delta \rho^2}{T^2 - \rho^2}. \tag{2.32}$$

Como $\overline{B}_T(q)$ é compacta, Existe uma constante $Z > 0$ tal que

$Ric_{(M,g)} \geq -(n-1)Z^2$, em $\overline{B}_T(q)$, a saber $Z^2 = G(r(q) + \lambda_G T)$. Pelo Teorema de comparação de Laplace, podemos deduzir que

$$\Delta \rho^2 \leq 2[n + (n-1)Z\rho] \text{ em } \overline{B}_T(q). \tag{2.33}$$

Inserindo (2.24) e (2.33) em (2.32) obtemos em $\bar{x}$

$$u \leq \left\{\frac{1}{b}\right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} \left\{a_+ + 4\xi(\xi+1)\frac{\rho^2}{(T^2-\rho^2)^2} + 2\xi \frac{n + (n-1)Z\rho}{T^2 - \rho^2}\right\}^{\frac{1}{\sigma-1}}. \tag{2.34}$$

Recordando a propriedade

$(v+w)^\eta \leq c^2(v^\eta + w^\eta)$, $v,\ w \geq 0$, válida para qualquer $\eta > 0$ fixo, onde $c = c(\eta)$, desta propriedade com $\eta = \dfrac{1}{\sigma - 1}$ obtemos em $\bar{x}$

$$u \leq c^2 \left\{ \frac{a_+}{b} \right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} + c^2 \left\{ \frac{1}{b} \right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} \left\{ \frac{\rho^2}{(T^2-\rho^2)^2} + \frac{n+(n-1)Z\rho}{T^2-\rho^2} \right\}^{\frac{1}{\sigma-1}}. \tag{2.35}$$

Como $F(\bar{x}) \geq F(y)$, $\forall y \in B_T(q)$ e em particular para $y = q$, deduzimos que

$$\begin{aligned} u(q) &\leq c^2 \left\{ \frac{a_+}{b} \right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} + c^2 \left\{ \frac{1}{b} \right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} \left\{ \frac{1}{T^2} + \frac{Z}{T} \right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &\leq c^2 \left\{ \max_{\overline{B}_T(q)} \frac{a_+}{b} \right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} + c^2 \left\{ \min_{\overline{B}_T(q)} b \right\}^{-\frac{1}{\sigma-1}} \left\{ \frac{1}{T^2} + \frac{Z}{T} \right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde a constante c foi mantida por um abuso de notação. De (2.2) temos que existe $c_1 > 0$ tal que $G(t(1+\lambda_G\epsilon))^{\frac{1}{2}} \leq c_1 H(t(1-\lambda_H\epsilon))^{\frac{1}{2}}$. Fazendo $T = \epsilon r(q)$ e usando (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} + \frac{Z}{T} &= \frac{1}{\epsilon^2 r(q)^2} + \frac{G(r(q)(1+\lambda_G\epsilon))^{\frac{1}{2}}}{\epsilon r(q)} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2 r(q)^2} + \frac{c_1 H(r(q)(1-\lambda_H\epsilon))^{\frac{1}{2}}}{\epsilon r(q)} \\ &= \frac{H(r(q)(1-\lambda_H\epsilon))^{\frac{1}{2}}}{r(q)} \left\{ \frac{1}{H(r(q)(1-\lambda_H\epsilon))^{\frac{1}{2}} \epsilon^2 r(q)} + \frac{c_1}{\epsilon} \right\} \\ &\leq c_2 \frac{H(r(q)(1-\lambda_H\epsilon))^{\frac{1}{2}}}{r(q)} \end{aligned} \tag{2.37}$$

para alguma constante $c_2 > 0$. Como ψ é monótona, segue de (2.27) $ii)$ que para todo $x \in B_T(q)$

$$\begin{aligned} b(x) &\geq c_3 \frac{\psi(r(x))H(r(x))^{\frac{1}{2}}}{r(x)} \\ &\geq c_3 \frac{\psi(r(q)(1-\lambda_\psi\epsilon))H(r(q)(1-\lambda_H\epsilon))^{\frac{1}{2}}}{r(q)(1+\epsilon)} \\ &= c_4 \psi(r(q)(1-\lambda_\psi\epsilon)) \frac{H(r(q)(1-\lambda_H\epsilon))^{\frac{1}{2}}}{r(q)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\min_{\overline{B}_T(q)} b \geq c_4 \psi(r(q)(1-\lambda_\psi\epsilon)) \frac{H(r(q)(1-\lambda_H\epsilon))^{\frac{1}{2}}}{r(q)}. \tag{2.38}$$

Por outro lado, (2.27) $i)$ nos dá

$$\begin{aligned} \frac{a_+(x)}{b(x)} &\leq \frac{c_5}{\omega(r(x))} \\ &\leq \frac{c_5}{\omega(r(q)(1-\lambda_\omega\epsilon))} \end{aligned}$$

para alguma constante $c_5 > 0$ e para todo $x \in B_T(q)$. Logo,

$$\max_{B_T(q)} \frac{a_+}{b} \leq \frac{c_5}{\omega(r(q)(1-\lambda_\omega \epsilon))}. \tag{2.39}$$

Inserindo (2.37), (2.38) e (2.39) juntamente com a hipótese (2.25) em (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} u(q) &\leq c^2 \left\{ \omega(r(q)(1-\lambda_\omega\epsilon))^{-\frac{1}{\sigma-1}} + \psi(r(q)(1-\lambda_\psi\epsilon))^{-\frac{1}{\sigma-1}} \right\} \\ &\leq C^2 \left\{ \omega(r(q))^{-\frac{1}{\sigma-1}} + \psi(r(q))^{-\frac{1}{\sigma-1}} \right\} \end{aligned}$$

para alguma constante apropriada $C > 0$ independente de q, como queríamos. $\square$

Como aplicação do presente Teorema, vamos considerar o caso em que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{G(t)}{t^\alpha} < +\infty, \quad \alpha \geq -2. \tag{2.40}$$

Considerando $H(t) = H_0 t^\alpha$, $H_0 > 0$, $t >> 1$, é fácil ver que G e H satisfazem as condições (2.2) e (2.3) para qualquer $\epsilon \in (0,1)$. Apresentamos o seguinte resultado que nos dá uma condição suficiente para que qualquer métrica conforme g_u com curvatura escalar $K(x)$ seja geodesicamente incompleta.

Proposição 2.2.4 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa, não-compacta, $n \geq 3$, com curvatura escalar $s(x)$ e tal que o tensor de Ricci satisfaz*

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(r(x)),$$

com G satisfazendo (2.40). Seja $K \in C^\infty(M)$, $K(x) < 0$ tal que

$$K(x) \leq -k^2 r(x)^{2+\alpha} (\log r(x))^{2(1+\eta)} \tag{2.41}$$

onde k, η são constantes positivas. Então, qualquer deformação g_u de g com curvatura escalar $K(x)$ é incompleta.

Demonstração

Vamos considerar $\omega(t) = c_1 t^2 (\log t)^{2(1+\eta)}$, $\psi(t) = c_2 t^{3+\frac{\alpha}{2}} (\log t)^{2(1+\eta)}$. É claro que estas funções satisfazem (2.25) para todo $0 < \epsilon < 1$. Se $K(x)$ é a curvatura escalar da métrica $g_u = u^{\frac{4}{n-2}} g$ então $u > 0$ é solução da equação de Yamabe

$$\Delta u + \left(\frac{-s(x)}{c_n}\right) u - \left(\frac{-K(x)}{cm}\right) u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0.$$

É fácil ver que as funções

$$a(x) = \frac{-s(x)}{c_n}, \quad b(x) = \frac{-K(x)}{c_n}$$

satisfazem as hipóteses do Teorema 2.2.3, e portanto,

$$\begin{aligned} u(x) &\leq c^2\left\{(c_1 r^2(x)(\log r(x))^{2(1+\eta)})^{\frac{2-n}{4}} + (c_2 r(x)^{3+\frac{\alpha}{2}}(\log r(x))^{2(1+\eta)})^{\frac{2-n}{4}}\right\} \\ &\leq c^2\left\{(c_1 r^2(x)(\log r(x))^{2(1+\eta)})^{\frac{2-n}{4}} + (c_2 r(x)^2(\log r(x))^{2(1+\eta)})^{\frac{2-n}{4}} r(x)^{(1+\frac{\alpha}{2})\frac{2-n}{4}}\right\} \\ &\leq C^2\left\{r(x)(\log r(x))^{1+\eta}\right\}^{\frac{2-n}{2}} \end{aligned} \tag{2.42}$$

para alguma constante $C > 0$ apropriada. Seja $\gamma(r)$ um raio (p.c.a.), partindo de $o \in M$. Como (M, g) é completa, temos que γ é uma curva divergente. Vamos mostrar que γ tem comprimento finito com respeito à métrica g_u. De fato,

$$\begin{aligned} l_u(\gamma) &= \int_0^{+\infty} g_u(\gamma', \gamma')^{\frac{1}{2}}\,dr \\ &= \int_0^{+\infty} u(\gamma(r))^{\frac{2}{n-2}}\,dr \\ &= \int_0^{R_0} u(\gamma(r))^{\frac{2}{n-2}}\,dr + \int_{R_0}^{+\infty} u(\gamma(r))^{\frac{2}{n-2}}\,dr \\ &\leq A + C\int_{R_0}^{+\infty} \frac{dr}{r(\log r)^{1+\eta}} \\ &= A + \frac{C}{\eta \log^{\eta} R_0} < +\infty \end{aligned}$$

onde $A = \displaystyle\int_0^{R_0} u(\gamma(r))^{\frac{2}{n-2}}\,dr < +\infty$, o que conclui a demonstração. □

2.3 Existência de Soluções

Trataremos agora da questão de existência para o problema

$$\begin{cases} i) \quad \Delta u + a(x)u - b(x)u^{\sigma} = 0, \qquad \sigma > 1, \\ ii) \quad u > 0 \quad \text{em} \quad M \end{cases} \tag{2.43}$$

impondo algumas hipóteses aos coeficientes $a(x)$ e $b(x)$. Iniciaremos com algumas definições introdutórias que nos serão úteis posteriormente.

Seja $L = \Delta + a(x)$, $a \in C^0(M)$ e Ω um subconjunto (limitado) aberto e não vazio de M com fronteira suave $\partial\Omega$. O primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega)$ do operador L em Ω é dado pela caracterização variacional

$$\lambda_1^L(\Omega) = \inf \frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2 - a(x)\phi^2}{\int_\Omega \phi^2}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \not\equiv 0$. Da teoria de análise funcional sabemos que existe uma única autofunção v definida em $\bar{\Omega}$, tal que

$$\begin{cases} \Delta v + a(x)v + \lambda_1^L(\Omega)v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Para um subconjunto limitado arbitrário S de M definimos o primeiro autovalor $\lambda_1^L(S)$ por um processo de exaustão.

Definição 2.3.1 *Seja $S \subset M$ um subconjunto limitado arbitrário de M. O primeiro autovalor do operador L em S é definido por*

$$\lambda_1^L(S) = \sup \lambda_1^L(\Omega), \tag{2.44}$$

onde o supremo é tomado sobre todos os abertos Ω com fronteira suave tais que $S \subset \Omega$.

O próximo lema será útil na demonstração do teorema de existência que apresentaremos posteriormente.

Lema 2.3.2 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com o tensor de Ricci satisfazendo $Ric_{(M,g)}(\nabla r, \nabla r)(x) \geq -(n-1)G(r(x))$, em $M \backslash \{o, cut(o)\}$, onde $G \in C^1([0, +\infty))$. Nessas condições, se*

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{G'(t)}{G(t)^{\frac{3}{2}}} > -\infty, \tag{2.45}$$

então

$$\Delta r(x) \leq (n-1) D_0 G(r(x))^{\frac{1}{2}}, \quad r(x) >> 1 \tag{2.46}$$

para alguma constante $D_0 > 0$.

Demonstração

Pelo Teorema de comparação de Laplace, temos que

$$\Delta r \leq (n-1)\frac{f'(r)}{f(r)}, \tag{2.47}$$

onde f é solução da equação diferencial ordinária

$$f'' - G(r)f = 0, \; f(0) = 0, \; f'(0) = 1.$$

Considere a função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ definida por

$$h(t)=\frac{1}{DG(0)^{\frac{1}{2}}}\{e^{D\int_0^t G(s)^{\frac{1}{2}}ds}-1\} \tag{2.48}$$

onde $D>0$ é uma constante. Nessas condições temos que

$$h'(t)=\frac{G(t)^{\frac{1}{2}}}{G(0)^{\frac{1}{2}}}e^{D\int_0^t G(s)^{\frac{1}{2}}ds}$$

donde $h(0)=0$, $h'(0)=1$. Além disso,

$$h''(t)=\frac{G(t)e^{D\int_0^t G(s)^{\frac{1}{2}}ds}}{G(0)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{2}\frac{G'(t)}{G(t)^{\frac{3}{2}}}+D\right\}. \tag{2.49}$$

De (2.45) temos que, a expressão entre chaves de (2.49) fica maior ou igual a $H^2\geq 1$ para D suficientemente grande, se necessário. Assim

$$\frac{h''(t)}{h(t)}\geq G(t)=\frac{f''(t)}{f(t)}$$

e pelo Teorema de comparação de Sturm-Liouville obtemos que

$$\frac{f'}{f}\leq\frac{h'}{h}=DG(t)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{D\int_0^t G(s)^{\frac{1}{2}}ds}}{e^{D\int_0^t G(s)^{\frac{1}{2}}ds}-1}\leq D_0G(t)^{\frac{1}{2}}$$

para $t>>1$ e D_0 suficientemente grande. Desta última desigualdade junto com (2.47) obtemos (2.46). □

A seguir enunciamos um teorema que será crucial na demonstração do principal resultado deste capítulo, que trata da existência de soluções do problema (2.43).

Teorema 2.3.3 *(Pigola, Rigoli, Setti, [37]). Sejam $a(x)$, $b(x)\in C^{0,\lambda}_{loc}(M)$ para algum $0<\lambda\leq 1$ e suponha que $b(x)\geq 0$ e que o conjunto $B_0=b^{-1}(0)$ é limitado. Além disso suponha que $\lambda_1^L(B_0)>0$. Se $u_-\in C^0\cap H^1_{loc}(M)$, $u_-\geq 0$, $u_-\not\equiv 0$, é uma subsolução global de (2.43), então (2.43) possui uma solução C^2 máxima positiva.*

Lembrando que uma solução u positiva de (2.43) é dita *máxima* se, para qualquer outra solução positiva v, tem-se $v\leq u$ em M.

Para a demonstração do Teorema 2.3.3 vamos precisar do seguinte teorema de Li-Tam-Yang [31], o qual estabelece a seguinte relação entre o primeiro autovalor do conjunto onde $b(x)$ se anula e a existência de uma supersolução não trivial de (2.1).

Teorema 2.3.4 *Sejam $a(x)$ e $b(x)$ funções Hölder contínuas em M com $b(x) \geq 0$ em M, e seja $S_0 = b^{-1}(0)$. Seja Ω um domínio aberto e limitado em M, e seja $L = \Delta + a(x)$. Se a equação (2.1) possui uma supersolução positiva em Ω, então $\lambda_1^L(\Omega \cap S_0) \geq 0$. Reciprocamente, se $\lambda_1^L(\Omega \cap S_0) > 0$ então (2.1) possui uma supersolução positiva em Ω.*

A prova deste resultado pode ser encontrada em [31].

Demonstração do Teorema 2.3.3

Seja D_k uma exaustão crescente de M por domínios abertos com fronteira suave, isto é, $M = \bigcup D_k$, $D_k \subset D_{k+1}$, tais que $S_0 \subset D_k \subset \bar{D}_k \subset D_{k+1}$ para todo k. Fixe $k \in \mathbb{N}$. Como $\lambda_1^L(S_0) > 0$, pelo Teorema 2.3.4 existe uma funçao positiva v de classe C^2 satisfazendo

$$\Delta v + a(x)v - b(x)v^{\sigma} \leq 0 \text{ em } D_{k+1}.$$

Como D_k é pré-compacto em D_{k+1}, temos que $\inf_{D_k} v > 0$ e como u_- é limitada em $\bar{D}_k$, dado $n \geq \max_{D_k} u_-$, existe $C > 0$ suficintemente grande de modo que a função $v_+ = Cv$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta v_+ + a(x)v_+ \leq b(x)v_+ \text{ em } D_k \\ v_+ \geq n \geq \max_{\bar{D}_k} u_- \text{ em } \partial D_k \\ v_+ \geq u_- \text{ em } D_k. \end{cases}$$

Pelo esquema da iteração monótona obtemos uma solução $u_{k,n}$ do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \Delta u + a(x)u - b(x)u^{\sigma} = 0 \quad \text{em} \quad D_k \\ u = n \quad \text{sobre} \quad \partial D_k. \end{cases} \tag{2.50}$$

Vamos mostrar que a sequência $\{u_{k,n}\}$ é uniformemente limitada com respeito a $n \in \mathbb{N}$ em subconjuntos compactos de D_k.

Suponhamos inicialmente que K é um subconjunto compacto de D_k que não intercepta S_0. Logo podemos determinar uma constante positiva b_0 e um número finito de bolas abertas disjuntas B_i que cobrem K tal que $b(x) \geq b_0$ em cada B_i. Aplicando o Lema 2.6 de [39], deduzimos que existe uma constante $C_1 = C_1(K) > 0$ tal que

$$u_{k,n}(x) \leq C_1 \ \forall x \in K, \ \forall n. \tag{2.51}$$

A seguir vamos mostrar que $u_{k,n}$ é uniformemente limitada numa vizinhança de S_0. Da definição de $\lambda_1^L(S_0)$ temos que existem abertos Ω e Ω', com fronteiras suaves, tais que $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset D_k$ e $\lambda_1^L(\Omega') > 0$.

Observe que $\partial\Omega$ é um subconjunto compacto de D_k que não intercepta S_0, logo, existe uma constante positiva C_2 tal que $u_{k,n} \leq C_2$ em $\partial\Omega$. A seguir, seja ϕ uma autofunção positiva de L associada ao autovalor $\lambda_1^L(\Omega') > 0$. Como ϕ é positiva em Ω', temos que existe $\nu > 0$ tal que $\phi > \nu$ em $\bar{\Omega}$ e como consequência, existe uma constante positiva c tal que $c\phi > C_2$ em $\bar{\Omega}$.

Observe que

$$\Delta(c\phi) + a(x)(c\phi) = -\lambda_1^L(\Omega')(c\phi) < 0,$$

enquanto que

$$\Delta u_{k,n} + a(x)u_{k,n} = b(x)u_{k,n}^{\sigma} \geq 0$$

em Ω, e $u_{k,n} \leq C_2 < c\phi$ em $\partial\Omega$.

Vamos mostrar que $u_{k,n} \leq c\phi$ em Ω. De fato, suponhamos por contradição que $u_{k,n}(x) > c\phi(x)$ para algum $x \in \Omega$. Vamos definir $A = \{x \in \Omega' \ : \ u_{k,n} - c\phi > 0\}$. Então A é não vazio e $\bar{A} \subset \Omega$, e deduzimos que a função $w = u_{k,n} - c\phi$ atinge um máximo positivo em A. Por outo lado, w satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w + a(x)w & \geq & 0 & \text{em} & A \\ w & = & 0 & \text{sobre} & \partial A, \end{cases}$$

e como a função $\dfrac{w}{c\phi}$ possui máximo não negativo em A, pelo princípio do máximo generalizado, esta função deve ser constante em A, mas $\frac{w}{c\phi} = 0$ em ∂A donde concluimos que $\frac{w}{c\phi} = 0$ em A, isto é, $w = 0$ em A o que é uma contradição.

Assim $u_{k,n} \leq c\phi \leq C_3$ em $\bar{\Omega}$ e portanto, segue facilmente que $u_{k,n}$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de D_k.

Por um resultado sobre estimativa interior para operadores elípticos, temos que existe uma subsequência de $u_{k,n}$ que converge em C^2_{loc} a uma solução u_k^{∞} de

$$\begin{cases} \Delta u + a(x)u - b(x)u^{\sigma} & = & 0 & \text{em} & D_k \\ u & = & +\infty & \text{sobre} & \partial D_k. \end{cases}$$

Vamos considerar a sequência $\{u_k^{\infty}\}$. Pela Proposição 2.2 em [37] e utilizando um argumento de exaustão, podemos verificar que

$$u_k^{\infty} \geq u_- \geq 0 \text{ e } u_{k+1}^{\infty} \leq u_k^{\infty} \text{ em } \bar{D}_k.$$

Como $\{u_k^{\infty}\}$ é monótona não-crescente, temos que esta converge a uma função u que é solução de (2.1) e satisfaz $u \geq u_- \geq 0$, $u_- \not\equiv 0$ em M. Se u_1 é outra solução positiva de (2.1) em M, então, pela Proposição 2.2 de [37], $u_1 \leq u_k^\infty$ $\forall k$, e portanto, $u_1 \leq u$ provando assim a maximalidade de u. Finalmente, u é estritamente positiva pois, caso contrário, esta atinge um mínimo zero, e pelo princípio do mínimo (ver [21] pág 35), $u \equiv 0$ e portanto $u_- \equiv 0$ o que contraria a nossa hipótese. $\square$

No próximo resultado, iremos supor que

$$G(t) = O(H(t)),\ t \to +\infty. \tag{2.52}$$

Além disso vamos considerar $F \in C^2([0,\ +\infty))$, crescente, satisfazendo

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F'(t)}{H(t)^{\frac{1}{2}}F(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{F''(t)}{H(t)F(t)} = 0, \tag{2.53}$$

$$\lim_{t\to+\infty} H(t)F(t)^{\xi(1-\sigma)-1} \geq 1, \tag{2.54}$$

para algum $\xi < \frac{1}{1-\sigma} < 0$.

Apresentamos agora o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.3.5 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa, com tensor de Ricci satisfazendo*

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(r(x)) \tag{2.55}$$

em $M \backslash B_R(o)$, para algum $R > 0$, G satisfazendo (2.52) e (2.45). Sejam $a(x), b(x) \in C^{0,\lambda}(M)$ para algum $0 < \lambda \leq 1$ e suponha que $b(x) \geq 0$ é estritamente positivo fora da bola B_R. Seja $B_0 = b^{-1}(0)$ e suponha que

$$\lambda_1^L(B_0) > 0 \tag{2.56}$$

e

$$(i)\ a(x) \geq H(r(x)),\ \ (ii)\ b(x) \leq F(r(x)) \tag{2.57}$$

em $M \backslash B_R$, onde $H,\ F$ satisfazem (2.53) e (2.54). Além disso, seja

$$\tau = \inf_{B_R} r\Delta r \tag{2.58}$$

e suponhamos que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \ se\ \tau \leq -1 \tag{2.59}$$

em B_R. Então o problema (2.43) admite uma solução C^2 positiva máxima em M.

Demonstração

Pelo Teorema 2.3.3 basta construirmos uma subsolução global u_- em M não negativa e não identicamente nula. Para tanto, vamos construir inicialmente uma subsolução definida em B_R. Vamos construir uma subsolução radial v da forma $v(x) = \gamma(r(x))$ com $\gamma : [0, R] \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo

$$\begin{cases} \gamma'' + \Delta r \gamma' + \tilde{A}\gamma - \tilde{B}\gamma^\sigma \geq 0 \\ \gamma > 0, \quad \gamma'(0) = 0, \end{cases} \tag{2.60}$$

onde

$$\tilde{A} = \min_{\overline{B_R}} (a(x)) \quad \text{e} \quad \tilde{B} = \max_{\overline{B_R}} (b(x)) > 0.$$

Defina

$$\gamma(r) := \gamma_0 e^{\eta r^2} \tag{2.61}$$

com γ_0, $\eta > 0$ constantes a serem determinadas. Temos que

$$\gamma'(r) = 2\gamma_0 \eta r e^{\xi r^2}$$

e

$$\gamma'' = 2\gamma_0 \eta e^{\eta r^2}[1 + 2\eta r^2].$$

Logo, γ é uma solução de (2.60) se, e só se,

$$\begin{aligned} \gamma'' + \Delta r \gamma' &= 2\gamma_0 \eta e^{\eta r^2}\{1 + 2\eta r^2 + r\Delta r\} \\ &\geq \tilde{B}(\gamma_0 e^{\eta r^2})^\sigma - \tilde{A}\gamma_0 e^{\eta r^2}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

A desigualdade (2.62) é equivalente a

$$2\eta\{1 + 2\eta r^2 + r\Delta r\} \geq \tilde{B}(\gamma_0 e^{\eta r^2})^{\sigma-1} - \tilde{A}. \tag{2.63}$$

Observe que

$$2\eta\{1 + 2\eta r^2 + r\Delta r\} \geq 2\eta\{1 + \tau\}.$$

Se $\tau > -1$, temos que existem γ_0 e η convenientes satisfazendo

$$2\eta\{1 + \tau\} \geq \tilde{B}(\gamma_0 e^{\eta R^2})^{\sigma-1} - \tilde{A} \tag{2.64}$$

e portanto, vale a desigualdade (2.63). Se $\tau \leq -1$, de (2.59) segue que

$$\tilde{A} = \inf_{B_R} a(x) \geq a_0 > 0.$$

Logo podemos escolher γ_0 e η de modo conveniente afim de satisfazer (2.64) e portanto (2.63).

O próximo passo será construir uma subsolução em $M\backslash B_R$. Lembrando das hipóteses sobre G que juntamente com o Lema 2.3.2 e (2.57), temos que uma função w não-negativa, não-crescente em $[R,+\infty)$ satisfazendo

$$w'' + C(n-1)H(r)^{\frac{1}{2}}w' + H(r)w - F(r)w^{\sigma} \geq 0 \tag{2.65}$$

para alguma constante $C > 0$ conveniente, dá origem a uma subsolução $w_-(x) = w(r(x))$ de (2.43) em $M\backslash B_R$. Vamos procurar por uma solução da forma

$$w = (\mu + F(r))^{\xi},\ \xi < \frac{1}{1-\sigma} < 0, \tag{2.66}$$

onde $\mu > 0$ é uma constante positiva e suficientemente grande. Vamos mostrar que $w(r)$ escolhida desta forma é uma solução de (2.65). Temos que

$$w' = \xi(\mu + F(r))^{\xi-1}F'(r) < 0$$

e

$$w'' = \xi(\xi-1)(\mu + F(r))^{\xi-2}(F'(r))^2 + \xi(\mu + F(r))^{\xi-1}F''(r).$$

Vamos definir

$$\begin{aligned} H_w(r) &= w'' + C(n-1)H(r)^{\frac{1}{2}}w' + H(r)w \\ &= \xi(\xi-1)(\mu + F(r))^{\xi-2}(F'(r))^2 + \xi(\mu + F(r))^{\xi-1}F''(r) \\ &\quad +C(n-1)H(r)^{\frac{1}{2}}\xi(\mu + F(r))^{\xi-1}F'(r) + H(r)(\mu + F(r))^{\xi} \end{aligned} \tag{2.67}$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} H_w(r) &= H(r)(\mu + F(r))^{\xi}[\frac{\xi(\xi-1)}{H(r)}\frac{(F'(r))^2}{(\mu + F(r))^2} + \frac{\xi}{H(r)}\frac{F''(r)}{\mu + F(r)} \\ &\quad + \frac{C(n-1\xi)}{H(r)^{\frac{1}{2}}}\frac{F'(r)}{\mu + F(r)} + 1]. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Da hipótese (2.53), segue que

$$H_w(r) \approx H(r)(\mu + F(r))^{\xi} \text{ quando } r \to +\infty \text{ e } H_w(r) > 0 \text{ em } [R, +\infty)$$

para μ suficientemente grande, se necessário. Deste modo temos que w é uma subsolução (para $r >> 1$) se, e só se,

$$H(r)(\mu + F(r))^{\xi} \geq F(r)(\mu + F(r))^{\xi\sigma},$$

ou seja

$$H(r)(\mu + F(r))^{\xi(1-\sigma)}F(r)^{-1} \geq 1, \text{ para } r >> 1. \tag{2.69}$$

que é válida pela hipótese (2.54). Portanto, w satisfaz (2.65) em $[R, +\infty)$ a menos da escolha de $\mu > 0$ suficientemente grande. Para finalizar a prova, iremos "colar" as soluções obtidas acima afim de obtermos uma subsolução global. Se $u \in C^2(M)$ é uma função positiva, definimos

$$b_u = u^{-\sigma}\{\Delta u + a(x)u\}. \tag{2.70}$$

Observe que para qualquer $\lambda > 0$,

$$b_{\lambda u} = \lambda^{1-\sigma} b_u. \tag{2.71}$$

Também temos que u é uma subsolução de (2.43) se, e somente se,

$$b_u(x) \geq b(x), \text{ em } M. \tag{2.72}$$

Como $B_0 \subset\subset B_R$, podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$b(x) > 0 \text{ em } M \backslash B_{R-\epsilon}. \tag{2.73}$$

Seja $u_1 \in C^2(M)$ uma função positiva tal que

$$u_1(x) = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B_{R-\epsilon} \\ w_-(x) & \text{se } x \in M \backslash B_R. \end{cases} \tag{2.74}$$

De (2.73), (2.74) e pelo fato de $b_{u_1}|_{\partial B_{R-\epsilon}} > 0$, podemos supor que $b_{u_1} \geq b_0 > 0$ em $M \backslash B_{R-\epsilon}$ para alguma constante b_0 a menos da escolha de ϵ suficientemente pequeno. Logo, para algum λ suficientemente pequeno, temos

$$\lambda^{1-\sigma} b_{u_1} \geq b \text{ em } M \backslash B_{R-\epsilon}$$

portanto, $u_- := \lambda u_1$ satisfaz

$$b_{u_-}(x) \geq b(x) \text{ em } M \backslash B_{R-\epsilon}.$$

Logo, $u_-(x)$ é uma subsolução global de (2.43), com $u_- \not\equiv 0$. □

Exemplo:

$$G(t) = O(t^\alpha \log t), \ H(t) = t^\alpha \log t, \ F(t) = t^\beta e^{Dt^\theta},$$

onde

$$0 \leq \theta \leq 1 + \frac{\alpha}{2}, \ \alpha \geq -2, \ \beta \in \mathbb{R}, \text{ se } \theta > 0 \text{ e } \beta[\xi(1-\sigma) - 1] \geq \alpha \text{ se } \theta = 0,$$

satisfazem as hipóteses do Teorema 2.3.5.

Como consequência do Teorema 2.3.5, obtemos o seguinte resultado de existência para o problema de Yamabe.

Teorema 2.3.6 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana completa com tensor de Ricci satisfazendo (2.55) em $M\backslash B_R(o)$ para algum $R>0$ e curvatura escalar $s(x)$. Seja $K(x)\in C^\infty(M)$ não-positiva e estritamente negativa fora da bola B_R. Se $K_0=K^{-1}(0)$, suponhamos que*

$$\lambda_1^L(K_0)>0 \tag{2.75}$$

onde $L=c_n\Delta-s(x)$, $c_n=\frac{4(n-1)}{n-2}$, e

$$(i)\ s(x)\leq -H(r(x)),\ (ii)\ K(x)\geq -F(r(x)) \tag{2.76}$$

em $M\backslash B_R$, onde $H,\ F$ satisfazem (2.52), (2.53) e (2.54). Além disso, se

$$\tau=\inf_{B_R} r\Delta r \tag{2.77}$$

suponhamos que $s(x)\leq -s_0$, se $\tau\leq -1$ em B_R para algum $s_0>0$. Nessas condições temos que a métrica g pode ser conformemente deformada a uma métrica g_u com curvatura escalar $K(x)$.

Utilizando o teorema de comparação de Laplace, podemos verificar facilmente que se $R>0$ é suficientemente pequeno, de modo que B_R seja uma bola regular, então

$$\Delta r\geq (n-1)r^{-1}(1+o(1)) \text{ quando } r\to 0^+.$$

Deste modo, a menos da escolha de R suficientemente pequeno, $\tau\geq 0$ em B_R. Outro fato que vale salientar diz respeito ao primeiro autovalor de Dirichlet do Laplaciano numa bola B_r, que conforme [10], $\lambda_1^\Delta\approx r^{-2}$, quando $r\to 0$, assim, $\lambda_1^L(B_r)>0$ desde que r seja suficientemente pequeno. Portanto, se R é suficientemente pequeno, as hipóteses (2.56) e (2.59) podem ser suprimidas no Teorema 2.3.5. Nessas condições, temos o seguinte

Corolário 2.3.7 *Seja (M^n,g) uma variedade Riemanniana completa, com tensor de Ricci satisfazendo (2.55) em $M\backslash B_R(o)$, para algum $R>0$ suficientemente pequeno. Sejam $a(x)$, $b(x)\in C^{0,\mu}(M)$ para algum $0<\mu\leq 1$ e suponha que $b(x)\geq 0$ é estritamente positivo fora da bola B_R. Suponhamos que*

$$(i)\ a(x)\geq H(r(x)),\ (ii)\ b(x)\leq F(r(x))$$

em $M\backslash B_R$, onde $H,\ F$, satisfazem (2.52), (2.53) e (2.54). Então o problema (2.43) admite uma solução C^2 positiva máxima em M.

Corolário 2.3.8 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa com tensor de Ricci satisfazendo (2.55) em $M \backslash B_R(o)$ para algum $R > 0$ suficientemente pequeno e curvatura escalar $s(x)$. Seja $K(x) \in C^\infty(M)$ não-positiva e estritamente negativa fora da bola B_R. Suponhamos que*

$$(i)\ s(x) \leq -H(r(x)),\ (ii)\ K(x) \geq -F(r(x))$$

em $M \backslash B_R$, onde $H,\ F$ satisfazem (2.52), (2.53) e (2.54). Nessas condições temos que a métrica g pode ser conformemente deformada a uma métrica $\tilde{g}$ com curvatura escalar $K(x)$.

Observamos que nem todas as métricas obtidas pelo Teorema 2.3.6 são completas. Por exemplo, suponha que

$$-F(r(x)) \leq K(x) \leq -k^2 r(x)^{2+\alpha} (\log r(x))^{2(1+\eta)},\ \eta > 0.$$

Neste caso, supondo que $G(t) = O(t^\alpha)$, $t \to +\infty$, $\alpha \geq -2$, e G é não-decrescente se $\alpha \geq 0$ e não-crescente se $\alpha < 0$ teremos que esta métrica será incompleta, de acordo com a Proposição 2.2.4.

Capítulo 3

A Desigualdade Tipo Sobolev

Neste capítulo iremos estudar algumas desigualdades tipo Sobolev em variedades Riemannianas. Entre outras coisas, iremos mostrar que uma variedade Riemanniana completa, não-compacta e com curvatura de Ricci assintóticamente não-negativa em que vale alguma desigualdade de Gagliardo-Nirenberg possui máximo crescimento de volume e que uma variedade completa com curvatura de Ricci não-negativa em que vale a desigualdade de Log-Sobolev, com uma constante apropriada, é difeomorfa ao espaço Euclideano.

3.1 Introdução

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclideano n-dimensional. Vamos denotar por dx o elemento de volume canônico deste espaço. Dados $1 \leq q < n,\ 0 < \theta \leq 1,\ s > 1$, defina o número r por

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{r} = \theta \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{q^*} \right), \tag{3.1}$$

onde $q^* = \frac{nq}{n-q}$ é o expoente crítico de Sobolev.

De acordo com Gagliardo-Nirenberg (cf. [20, 35]), temos que existe uma constante C tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^q dx \right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^s dx \right)^{\frac{1-\theta}{s}}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Quando $\theta = 1, r = q^*$ temos a bem conhecida desigualdade de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^q dx \right)^{1/q}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.3}$$

Substituindo $q = 2$, $r = 2$, and $\theta = n/(n+2)$ em (3.2) obtemos a desigualdade de Nash

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx\right)^{1+(2/n)} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx\right)^{4/n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx, \;\; f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

Outra consequência (não trivial) de (3.2) é a desigualdade logarítmica de Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log f^2 dx \leq \frac{n}{2} \log\left(\tilde{C} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx\right), \;\; f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \;\; \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dv = 1. \tag{3.5}$$

De fato, (3.5) pode ser obtida como o caso limite quando $\theta \to 0$, isto é, $r = 2$ e $s \to r$, $s < r$. Afim de verificarmos isto, vamos primeiro observar o fato de que a constante C em (3.2) é independente de s (conforme [6]). podemos reescrever (3.2) como

$$\left(\frac{\|f\|_r}{\|f\|_s}\right)^{1/(1/s-1/r)} \leq \left(\frac{C_0 \|\nabla f\|_q}{\|f\|_s}\right)^{1/(1/s-1/q^*)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

onde $C_0 = C^{1/\theta}$. Segue da última expressão que

$$\frac{\log \|f\|_r - \log \|f\|_s}{1/s - 1/r} \leq (1/s - 1/q^*)^{-1} \log(C_0 \|\nabla f\|_q / \|f\|_s), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.6}$$

Assim, quando $s \to r^-$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[f^r \log\left(\frac{f}{\|f\|_r}\right)^r\right] dx \leq (1/r - 1/q^*)^{-1} \|f\|_r^r \log\left(\frac{C_0 \|\nabla f\|_q}{\|f\|_r}\right), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

onde usamos o fato de que a função $\phi(u) = \log \|f\|_{1/u}$ satisfaz

$$-\|f\|_r^r \phi'(1/r) = \int_{\mathbb{R}^n} [f^r \log(f/\|f\|_r)^r] dv.$$

Portanto, substituindo $r = q = 2$ e escrevendo $\tilde{C} = C_0^{1/2}$, obtemos (3.5).

Estas desigualdades tem sido utilizadas exaustivamente em variedades Riemannianas mais gerais para o estudo de estimativas para o núcleo do calor. Veja por exemplo [7, 14] e suas referências. Vale salientar neste momento que os autores em [6] obtiveram uma equivalência entre várias desigualdades funcionais tais como as degualdades de Sobolev, Nash ou Log-Sobolev em variedades completas.

A melhor constante $K(n,q)$ para a desigualdade (3.3) foi obtida, de forma independente, por Aubin [4] e Talenti [42]. Eles mostraram que

$$K(n,1) = n^{-1} \omega_n^{-\frac{1}{n}}$$

and

$$K(n,q) = \frac{1}{n}\left(\frac{n(q-1)}{n-q}\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{n\omega_n \Gamma(n/q)\Gamma(n+1-n/q)}\right)^{\frac{1}{n}}, \; q > 1,$$

onde ω_n é o volume da bola unitária $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 0$ é a função Gamma.

Se denotarmos por $c(n)$ e $\tilde{C}(n)$ as melhores constantes para as desigualdades (3.4) e (3.5), respectivamente, então

$$c(n) = \frac{2((n+2)/2)^{(n+2)/n}}{n\lambda_1^N \omega_n^{2/n}} \text{ e } \tilde{C}(n) = \frac{2}{n\pi e}.$$

onde λ_1^N é o primeiro autovalor de Newmann não-nulo do operador Laplaciano em $B_1(o)$ (cf. [7, 9, 23]).

Recentemente, Del Pino e Dolbeault (veja [15, 16]) obtiveram a melhor constante para uma classe de desigualdes de Gagliardo-Nirenberg, conforme veremos abaixo. Vamos denotar por $D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $p, q > 0$, o completamento do espaço das funções de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ para a norma $\|\cdot\|_{p,q}$ definida por $\|u\|_{p,q} = \|\nabla u\|_p + \|u\|_q$.

Teorema 3.1.1 *(Del Pino e Dolbeault). Suponha que*

$$1 < q < n, \;\; q < s \leq \frac{q(n-1)}{n-q}, \;\; nq < (n-q)s \tag{3.7}$$

e sejam r e θ dados por

$$r = \frac{q(s-1)}{q-1}, \;\; \theta = \frac{(s-q)n}{(s-1)(nq-(n-q)s)}. \tag{3.8}$$

Então para qualquer $u \in D^{q,s}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_r \leq \Phi \|\nabla u\|_q^\theta \|u\|_s^{1-\theta}, \tag{3.9}$$

onde Φ é a melhor constante para a desigualdade (3.9) e é dada por

$$\Phi = \left(\frac{s-q}{q\sqrt{\pi}}\right)^\theta \left(\frac{qs}{n(s-q)}\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\frac{\theta}{qs}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\Gamma(s\frac{q-1}{s-q})\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{q-1}{q}\frac{\delta}{s-q})\Gamma(n\frac{q-1}{q}+1)}\right)^{\frac{\theta}{n}}. \tag{3.10}$$

A igualdade é válida em (3.9) se, e só se, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = \alpha(1 + \beta|x - \bar{x}|^{\frac{q}{q-1}})^{-\frac{(q-1)}{(s-q)}}, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Em [44], com o auxílio deste significante resultado, o autor obteve teoremas de unicidade topológica e métrica para variedades completas de curvatura de Ricci não-negativa satisfazendo uma desigualdade do tipo (3.9). Este trabalho em questão, generaliza os resultados em [28] e [43]. O leitor interessado poderá verificar em [17, 45] que alguns destes resultados também são válidos para uma família de desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

Neste capítulo, iremos estudadar as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em variedades Riemannianas. Vamos mostrar que se (3.2) vale numa variedade Riemanniana completa n-dimensional para alguma constante A positiva, então esta constante deve ser maior ou igual a melhor constante da mesma desigualdade em $\mathbb{R}^n$. Iremos mostrar também que uma variedade completa com curvatura de Ricci assintóticamente não negativa que admite alguma desigualdade de Gagliardo-Nirenberg possui máximo crescimento de volume e que uma variedade aberta de curvatura de Ricci não negativa em que vale a desigualdade de Log-Sobolev com uma constante "próxima"da melhor constante do caso Euclideano é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

3.2 A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg em Variedades Riemannianas

Nesta seção, iremos considerar a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg em variedades Riemannianas. Enunciamos o nosso primeiro resultado a seguir.

Teorema 3.2.1 *Dados $1 \leq q < n,\ 0 < \theta \leq 1,\ s > 1$, defina o número r por (3.1). Vamos denotar por K_{opt} a melhor constante em da desigualdade (3.2). Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta com elemento de volume dv. Suponha que exista uma constante $A \in \mathbb{R}$ tal que para toda $u \in C_0^\infty(M)$,*

$$\left(\int_M |u|^r dv\right)^{\frac{1}{r}} \leq A \left(\int_M |\nabla u|^q dv\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_M |u|^s dv\right)^{\frac{1-\theta}{s}}.$$

Então $A \geq K_{opt}$.

Demonstração

Argumentaremos por contradição, isto é, vamos assumir que $A < K_{opt}$ e

$$\left(\int_M |u|^r dv\right)^{1/r} \leq A \left(\int_M |\nabla u|^q dv\right)^{\theta/q} \left(\int_M |u|^s dv\right)^{(1-\theta)/s}, \quad \forall\ u \in C_0^\infty(M). \tag{3.11}$$

Fixe um ponto $x \in M$. Para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma carta (Ω, ϕ) de M em x e um número $\delta > 0$ tal que $\phi(\Omega) = B_\delta(0)$, a bola Euclideana de raio δ centrada na origem em $\mathbb{R}^n$, e que as componentes g_{ij} de g nesta carta satisfazem

$$(1+\epsilon)^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq (1+\epsilon)\delta_{ij} \tag{3.12}$$

no sentido de formas bilineares (veja [23, 5]). Escolhendo ϵ suficientemente pequeno obtemos de (3.11) que existe $A' < K_{opt}$ e $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer $u \in C_0^\infty(B_0(\delta_0))$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^r dx\right)^{1/r} \leq A' \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^q dx\right)^{\theta/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^s dx\right)^{(1-\theta)/s}.$$

De fato, dada $\tilde{u} \in C_0^\infty(B_\delta(0))$ e definindo $u = \tilde{u} \circ \phi$ em Ω, $u \equiv 0$ em $M \backslash \Omega$, de (3.11) e (3.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(u \circ \phi^{-1})(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq (1+\epsilon)^{n/2r} \left(\int_\Omega |u|^r dv_g\right)^{1/r} \\
&= (1+\epsilon)^{n/2r} \left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{1/r} \\
&\leq (1+\epsilon)^{n/2r} A \left(\int_M |\nabla u|^q dv\right)^{\theta/q} \left(\int_M |u|^s dv\right)^{(1-\theta)/s} \\
&= (1+\epsilon)^{n/2r} A \left(\int_\Omega |\nabla u|^q dv\right)^{\theta/q} \left(\int_\Omega |u|^s dv\right)^{(1-\theta)/s} \\
&\leq A(1+\epsilon)^D \left(\int_{B_\delta(0)} |\nabla(u \circ \phi^{-1})(x)|^q dx\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_{B_\delta(0)} |u \circ \phi^{-1}(x)|^s dx\right)^{\frac{1-\theta}{s}} \\
&= A(1+\epsilon)^D \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u \circ \phi^{-1})(x)|^q dx\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u \circ \phi^{-1}(x)|^s dx\right)^{\frac{1-\theta}{s}} \\
&= A(1+\epsilon)^D \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\tilde{u})(x)|^q dx\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x)|^s dx\right)^{\frac{1-\theta}{s}}.
\end{aligned}$$

onde $D = \frac{n\theta}{2q} + \frac{n(1-\theta)}{2s} + \frac{n}{2r} + \frac{\theta}{2}$. Para ϵ suficientemente pequeno, temos que

$$A' := A(1+\epsilon)^D < K_{opt}$$

já que $A < K_{opt}$.

Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Escreva $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, $\lambda > 0$. Para λ suficientemente grande $u_\lambda(x) \in C_0^\infty(B_0(\delta_0))$. Logo

$$\left(\int_{B_0(\delta_0)} |u_\lambda(x)|^r dx\right)^{1/r} \leq A' \left(\int_{B_0(\delta_0)} |\nabla u_\lambda(x)|^q dx\right)^{\theta/q} \left(\int_{B_0(\delta_0)} |u_\lambda(x)|^s dx\right)^{(1-\theta)/s}. \quad (3.13)$$

Observe que

$$\left(\int_{B_0(\delta_0)} |u_\lambda(x)|^r dx\right)^{1/r} = \lambda^{-\frac{n}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^r dx\right)^{1/r},$$

$$\left(\int_{B_0(\delta_0)} |\nabla u_\lambda(x)|^q dx\right)^{\theta/q} = \lambda^{\frac{\theta(q-n)}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^q dx\right)^{\theta/q}$$

e

$$\left(\int_{B_0(\delta_0)} |u_\lambda(x)|^s dx\right)^{(1-\theta)/s} = \lambda^{\frac{n(\theta-1)}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^s dx\right)^{(1-\theta)/s}.$$

Inserindo as equações acima em (3.13) obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^r dx\right)^{1/r} \leq \lambda^{\frac{n}{r}+\frac{\theta(q-n)}{q}+\frac{n(\theta-1)}{s}} A' \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^q dx\right)^{\theta/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^s dx\right)^{(1-\theta)/s}.$$

De (3.1) temos que

$$\frac{n}{r} + \frac{\theta(q-n)}{q} + \frac{n(\theta-1)}{s} = 0.$$

Portanto, para qualquer $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^r dx\right)^{1/r} \leq A' \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^s dx\right)^{\theta/s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^q dx\right)^{(1-\theta)/q}$$

mas esta expressão contradiz o fato de que K_{opt} é a melhor constante para esta desigualdade em $\mathbb{R}^n$. □

Nosso próximo resultado afirma que a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg vale localmente em qualquer variedade Riemanniana.

Teorema 3.2.2 *Sejam $q,\ r,\ s,\ \theta$ como no Teorema 3.2.1 e seja $B_{5R}(o)$ uma bola geodésica relativamente compacta de raio $5R$ com centro o numa variedade Riemanniana (M^n, g). Suponhamos que $5R \leq diam(M)$. Então para cada domínio $\Omega \subset\subset B_R(o)$ existe uma constante $A = A(\Omega,\ n,\ q,\ s,\ \theta) > 0$ tal que*

$$\left(\int_\Omega |f|^r dv\right)^{1/r} \leq A \left(\int_\Omega |\nabla f|^q dv\right)^{\theta/q} \left(\int_\Omega |f|^s dv\right)^{(1-\theta)/s},\ \forall\ f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.14}$$

Para a demonstração deste resultado, vamos precisar do lema a seguir, que pode ser encontrado em ([36]).

Lema 3.2.3 *Suponha que $0 < 5R \leq diam(M)$ e que $B_{5R}(o)$ é uma bola geodésica relativamente compacta em (M^n, g). Seja $B \geq 0$ e suponha que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$Ric_{(M,g)} \geq -(m-1)B^2 \quad em \quad B_{5R}(o)$$

Então, para todo $p \geq 1$,

$$\int_{B_R(o)} |u|^p \leq C_p \int_{B_R(o)} |\nabla u|^p,\ \forall u \in C_0^\infty(B_R(o))$$

com

$$C_p = \left(\frac{pR\exp(2n(1+BR))}{1+BR}\right)^p.$$

Demonstração

Fixe $x_1 \in \partial B_{2R}(o)$ e seja $\rho(y) = dist_{(M,g)}(y, x_1)$. Pelo Teorema de comparação de Laplace (Teorema 1.3.3), e da hipótese sobre a curvatura de Ricci, segue que, em $B_{3R}(x_1)$

$$\Delta\rho \leq (n-1)B\coth(B\rho) \leq \frac{n-1}{\rho} + (n-1)B$$

no sentido fraco, isto é, para toda $0 \leq \phi \in C_0^\infty(B_{3R}(x_1))$,

$$\int_{B_{3R}(x_1)} \rho\Delta\phi \leq \int_{B_{3R}(x_1)} \left[\frac{n-1}{\rho} + (n-1)B\right]\phi.$$

Sendo $\alpha > 0$ uma constante a ser escolhida posteriormente, calculamos

$$\Delta e^{-\alpha\rho} = \alpha e^{-\alpha\rho}(-\Delta\rho + \alpha).$$

Como $B_R(o) \subset B_{3R}(x_1)\backslash B_R(x_1)$, deduzimos que

$$\Delta e^{-\alpha\rho} \geq \alpha e^{-\alpha\rho}\left[\alpha - \frac{n-1}{\rho} - (n-1)B\right]$$

em $B_R(o)$, e escolhendo

$$\alpha = n(\frac{1}{R} + B),$$

obtemos

$$\Delta e^{-\alpha\rho} \geq \alpha e^{-3\alpha R}(\frac{1}{R} + B) \text{ em } B_R(o). \tag{3.15}$$

Seja $0 \leq \psi \in C_0^\infty(B_R(o))$. Aplicando o teorema da divergência obtemos que

$$\int_{B_R(o)} \psi\Delta e^{-\alpha\rho} = -\int_{B_R(o)} \langle\nabla\psi, \nabla e^{-\alpha\rho}\rangle,$$

logo, de (3.15), da desigualdade de Schwarz, e do fato que $\rho \geq R$ em $B_R(o)$,

$$e^{-3\alpha R}(\frac{1}{R} + B)\int_{B_R(o)} \psi \leq \int_{B_R(o)} |\nabla\psi|e^{-\alpha\rho} \leq \int_{B_R(o)} |\nabla\psi|e^{-\alpha R}$$

e reescrevendo

$$\int_{B_R(o)} \psi \leq \frac{R}{1+BR}e^{2\alpha R}\int_{B_R(o)} |\nabla\psi|.$$

Seja $u \in C_0^\infty(B_R(o))$. Aplicando a desigualdade de Hölder e inserindo o valor de α obtemos da última desigualdade que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(o)} |u|^p &\leq \frac{R}{1+BR}e^{2n(1+BR)}\int_{B_R(o)} |\nabla(|u|^p)| \\
&= \frac{R}{1+BR}e^{2n(1+BR)}\int_{B_R(o)} p|u|^{p-1}|\nabla(|u|)| \\
&= \frac{pR}{1+BR}e^{2n(1+BR)}\int_{B_R(o)} |u|^{p-1}|\nabla u| \\
&\leq \frac{pR}{1+BR}e^{2n(1+BR)}\left\{\int_{B_R(o)} |u|^p\right\}^{1-1/p}\left\{\int_{B_R(o)} |\nabla u|^p\right\}^{1/p},
\end{aligned}$$

e a conclusão segue por simplificação. $\square$

Demonstração do Teorema 3.2.2.

Para cada $x \in \Omega$ existe uma bola geodésica $B_\epsilon(x) \subset\subset B_R(p)$ tal que, quando restrita a $B_\epsilon(x)$, a métrica g é quase-Euclideana, isto é, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que em $B_\epsilon(x)$,

$$C^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq C\delta_{ij}$$

no sentido de formas bilineares. Consequentemente temos que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1^{-1}|^e\nabla u|_e \leq |\nabla u| \leq C_1|^e\nabla u|, \ \forall u : B_\epsilon(x) \to \mathbb{R}$$

e

$$C_2^{-1}dv_e \leq dv_g|_{B_\epsilon(x)} \leq C_2 dv_e,$$

onde $|^e\nabla \cdot |_e$ e dv_e são, respectivamente, a norma Euclideana do gradiente e o elemento de volume Euclideano. Logo, segue deste fato que a desigualdade (3.14) vale em $B_\epsilon(x)$ para alguma constante apropriada $c = c(B_\epsilon(x)) > 0$. Seja $\{B_{\epsilon_j}\}_{j=1}^N$ uma cobertura finita do compacto $\overline{\Omega}$ por bolas geodésicas com a propriedade acima contidas em $B_R(p)$. Vamos denotar por c_j a constante relativa a B_{ϵ_j} no qual a desigualdade (3.14) vale. Escolha uma partição da unidade $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ subordinada à cobertura $\{B_{\epsilon_j}\}_{j=1}^N$ e satisfazendo $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset B_{\epsilon_j}$. Seja $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |u|^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_\Omega |\sum_j \phi_j u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (3.16)\\
&\leq \sum_j \left(\int_{B_{\epsilon_j}} |\phi_j u|^r\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\leq \sum_j c_j \left(\int_{B_{\epsilon_j}} |\nabla(\phi_j u)|^q\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_{B_{\epsilon_j}} |\phi_j u|^s\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq \sum_j c_j \left(\int_{B_{\epsilon_j}} |\phi_j \nabla u + u\nabla\phi_j|^q\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_{B_{\epsilon_j}} |u|^s\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq \sum_j c_j \left[\left(\int_{B_{\epsilon_j}} \phi_j^q |\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{B_{\epsilon_j}} |u|^q |\nabla\phi_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^\theta \left(\int_{B_{\epsilon_j}} |u|^s\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq \sum_j c_j \left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \max_{\overline{\Omega}} |\nabla\phi_j| \left(\int_\Omega |u|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^\theta \left(\int_\Omega |u|^s\right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.3, temos que

$$\int_\Omega |u|^q \leq C_q \int_\Omega |\nabla u|^q. \tag{3.17}$$

Substituindo (3.17) em (3.16), obtemos

$$\left(\int_\Omega |u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq A \left(\int_\Omega |\nabla u|^q\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_\Omega |u|^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

onde

$$A = \sum_j c_j (1 + C_q^{\frac{1}{q}} \max_{\overline{\Omega}} |\nabla \phi_j|)^\theta.$$

□

3.3 Desigualdades Tipo Sobolev e Curvatura de Ricci

Nesta seção, iremos estabelecer algumas propriedades geométricas e topológicas para uma classe de variedades completas em que vale alguma desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. Antes de enunciarmos nossos resultados, iremos fixar algumas definições. Dizemos que uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) possui a *propriedade do volume duplicado* em $x \in M$ se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$Vol[B_{2R}(x)] \leq \alpha Vol[B_R(x)], \ \ \forall R > 0. \tag{3.18}$$

Não é difícil verificar que a constante α na desigualdade acima é maior ou igual a 2^n.

Uma variedade completa aberta (M^n, g) possui curvatura de Ricci assintóticamente não negativa se existe um ponto $p \in M$ tal que

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(\rho(x)), \quad \forall x \in M, \tag{3.19}$$

onde ρ é a função distância em M a partir de p e $G \in C^1([0, +\infty))$ é uma função não negativa que satisfaz

$$\int_0^{+\infty} tG(t)dt = b_0 < +\infty.$$

Neste caso, M satisfaz a seguinte propriedade de crescimento de volume (conforme o Corolario 1.3.5):

$$\frac{Vol[B_R(p)]}{Vol[B_{\tilde{R}}(p)]} \leq e^{(n-1)b_0} \left(\frac{R}{\tilde{R}}\right)^n, \ \forall\, 0 < \tilde{R} < R \tag{3.20}$$

Em particular, M satisfaz a *propriedade do volume duplicado* em p.

O primeiro resultado desta seção afirma que uma variedade que possui a propriedade (3.18) e que satisfaz a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (3.2) possui máximo crescimento de volume.

Teorema 3.3.1 *Dados $1 \leq q < n$, $0 < \theta \leq 1$, $s > 1$, defina o número r por (3.1). Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não-compacta satisfazendo a propriedade (3.18) para algum ponto $p \in M$. Suponha que existe uma constante $c > 0$ tal que para toda $u \in C_0^\infty(M)$*

$$\left(\int_M |u|^r dv\right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\int_M |\nabla u|^q dv\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_M |u|^s dv\right)^{\frac{1-\theta}{s}}. \tag{3.21}$$

Então, temos

$$\liminf_{R \to +\infty} \frac{Vol[B_R(p)]}{R^n} \geq [c(\alpha^{\frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}})]^{-\frac{n}{\theta}}. \tag{3.22}$$

Demonstração

Dado $R > 0$, vamos considerar a função $f : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in B_R(p) \\ 1 - \frac{1}{R}\text{dist}(x, B_R(p)) & se \quad x \in B_{2R}(p) \backslash B_R(p) \\ 0 & se \quad x \in M \backslash B_{2R}(p) \end{cases}$$

Observe que $|\nabla f| \leq \dfrac{1}{R}$ quase sempre em M. Por um argumento de aproximação por funções suaves podemos substituir f em (3.21) e assim obtermos

$$Vol[B_R(p)]^{1/r} \leq c \left(\frac{1}{R}\right)^\theta Vol[B_{2R}(p)]^{\frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}}. \tag{3.23}$$

Deste modo, segue de (3.18) e (3.23) que

$$Vol[B_R(p)]^{\frac{\theta}{n}} \geq [c(\alpha^{\frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}})]^{-1} R^\theta,$$

isto é

$$Vol[B_R(p)] \geq [c(\alpha^{\frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}})]^{-\frac{n}{\theta}} R^n,$$

o que completa a prova do Teorema 3.3.1. □

Corolário 3.3.2 *Sejam q, r, s, θ como no Teorema 3.3.1. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não-compacta e suponha que existe uma constante positiva c tal que para toda $u \in C_0^\infty(M)$*

$$\left(\int_M |u|^r dv\right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\int_M |\nabla u|^q dv\right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_M |u|^s dv\right)^{\frac{1-\theta}{s}}.$$

Nessas condições

a) se M possui curvatura de Ricci não negativa, então o grupo fundamental de M, $\pi_1(M)$, é finito e a sua ordem é limitada superiormente por $\omega_n[c2^{n(\frac{\theta}{q}+\frac{1-\theta}{s})}]^{\frac{n}{\theta}}$.

b) Se a curvatura seccional de M é não negativa, então M é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

a) Como a curvatura de Ricci de M é não negativa, segue do teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov que M satisfaz a propriedade do volume duplicado (3.18) com $\alpha = 2^n$ para qualquer $x \in M$, e que a função $\frac{Vol[B_R(p)]}{R^n}$ é decrescente. Assim

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{Vol[B_R(p)]}{R^n}$$

existe e não depende de p. De (3.22), temos que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{Vol[B_R(p)]}{R^n} \geq [c(\alpha^{\frac{\theta}{q}+\frac{1-\theta}{s}})]^{-\frac{n}{\theta}}.$$

Isto é, M possui máximo crescimento de volume (cf. [30]). Segue portanto de um resultado de Anderson e Li (cf. [2, 30]) que $\pi_1(M)$ é finito e sua ordem é limitada superiormente por $\omega_n[c2^{n(\frac{\theta}{q}+\frac{1-\theta}{s})}]^{\frac{n}{\theta}}$.

b) Segue imediatamente do Teorema 3.3.1 e um teorema de Toponogov-Marenich ([32]) o qual afirma que uma variedade completa com curvatura seccional não negativa e com máximo crescimento de volume é difeomorfa ao espaço Euclideano. □

Nosso próximo resultado é concernente a propriedades geométricas de variedades completas com curvatura de Ricci assintóticamente não negativa que satisfazem a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (3.9). Portanto, iremos assumir de agora em diante que os números q, s, θ, r and Φ são dados em (3.7)-(3.9).

Teorema 3.3.3 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemannina completa não compacta com tensor de Ricci satisfazendo (3.19) e suponha que para qualquer $u \in C_0^\infty(M)$*

$$\|u\|_r \leq C\|\nabla u\|_q^\theta \|u\|_s^{1-\theta}. \tag{3.24}$$

Então para qualquer $R > 0$, temos

$$Vol[B_R(p)] \geq e^{-(n-1)b_0}(C^{-1}\Phi)^{\frac{n}{\theta}} V(R), \tag{3.25}$$

onde $V_0(R)$ denota o volume da bola Euclideana de raio R.

Antes de provarmos o Teorema 3.3.3, vamos precisar do seguinte lema, cuja demonstração é similar aos argumentos utilizados por Ledoux e Xia (cf. [28, 43, 44, 45]).

Lema 3.3.4 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta satisfazendo a propriedade*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{Vol[B_R(p)]}{R^n} < +\infty \tag{3.26}$$

para algum ponto $p \in M$. Seja $\rho(x) = dist(x, p)$, $x \in M$, e suponhamos que a desigualdade (3.24) é válida em M para alguma constante $C > \Phi$. Então, para todo $\lambda > 0$

$$F(\lambda) \geq \left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}} G(\lambda), \tag{3.27}$$

onde

$$F(\lambda) = \int_M \frac{dv}{(\lambda + \rho(x)^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{s(q-1)}{s-q}}}, \quad G(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(\lambda + \|x\|^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{s(q-1)}{s-q}}}. \tag{3.28}$$

Demonstração do Lema 3.3.4.

Inicialmente, observe que F está bem definida e é de classe C^1. De fato, pelo Teorema de Fubini (veja [41]),

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} Vol\left\{x : \frac{1}{(\lambda + \rho(x)^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(q-1)s}{s-q}}} > h\right\} dh. \tag{3.29}$$

A hipótese (3.26) implica que existe uma constante positiva A tal que $Vol[B_R(p)] \leq AR^n$, $\forall R > 0$. Fazendo a mudança de variável

$$h = \frac{1}{(\lambda + t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(q-1)s}{s-q}}}$$

em (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{qs}{s-q} \int_0^{+\infty} Vol[B_t(p)] \frac{t^{\frac{1}{q-1}}}{(\lambda + t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}} dt \\ &\leq \frac{qsA}{s-q} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda + t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}} dt. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Como $s < \frac{nq}{n-q}$, temos

$$n + \frac{1}{q-1} - \frac{q^2(s-1)}{(q-1)(s-q)} = n + \frac{1}{q-1} - \frac{q^2}{q-1} - \frac{q^2}{s-q} < -1.$$

Assim $0 \leq F(\lambda) < +\infty$, $\forall \lambda > 0$ e F é diferenciável. Temos também que

$$F'(\lambda) = -\frac{(q-1)s}{s-q} \int_M \frac{dv}{(\lambda + \rho^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}. \tag{3.31}$$

Utilizando um argumento de aproximação por funções suaves, podemos substituir $(\lambda+\rho^{\frac{q}{q-1}})^{-\frac{q-1}{s-q}}$ em (3.24) para todo $\lambda > 0$ e assim obtermos

$$\left(\int_M \frac{dv}{(\lambda+\rho^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\frac{q}{s-q}\right)^{\theta}\left(\int_M \frac{\rho^{\frac{q}{q-1}}dv}{(\lambda+\rho^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}\right)^{\frac{\theta}{q}}\left(\int_M \frac{dv}{(\lambda+\rho^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(q-1)s}{s-q}}}\right)^{\frac{1-\theta}{s}}$$

que, combinando com (3.31) nos dá

$$\left(-\frac{s-q}{(q-1)s}F'(\lambda)\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\frac{q}{s-q}\right)^{\theta}\left(F(\lambda)+\frac{s-q}{(q-1)s}\lambda F'(\lambda)\right)^{\frac{\theta}{q}} F(\lambda)^{\frac{1-\theta}{s}}.$$

Assim, F satisfaz a seguinte inequação diferencial

$$(-F'(\lambda))^{\frac{q}{\theta r}} \leq l\left(F(\lambda)+\frac{s-q}{(q-1)s}\lambda F'(\lambda)\right)F(\lambda)^{\frac{(1-\theta)q}{\theta s}}, \tag{3.32}$$

onde

$$l = C^{\frac{q}{\theta}}\left(\frac{q}{s-q}\right)^{q}\left(\frac{(q-1)s}{s-q}\right)^{\frac{q}{\theta r}}.$$

Por definição, podemos deduzir facilmente que

$$G(\lambda) = \frac{qs\omega_n}{s-q}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt. \tag{3.33}$$

Observe que quando $M=\mathbb{R}^n$ e $C=\Phi$, para cada $\lambda>0$, a função $v_\lambda:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por

$$v_\lambda = (\lambda+|x|^{\frac{q}{q-1}})^{-\frac{q-1}{s-q}} \tag{3.34}$$

é uma função extremante da desigualdade (3.9), isto é,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} v_\lambda^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = \Phi\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v_\lambda|^q dx\right)^{\frac{\theta}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} v_\lambda^s dx\right)^{\frac{1-\theta}{s}}, \tag{3.35}$$

e de acordo com os argumentos anteriores, a equação acima pode ser escrita como

$$(-G'(\lambda))^{\frac{q}{\theta r}} = \tilde{l}\left(G(\lambda)+\frac{s-q}{(q-1)s}\lambda G'(\lambda)\right)G(\lambda)^{\frac{(1-\theta)q}{\theta s}}, \tag{3.36}$$

onde

$$\tilde{l} = \Phi^{\frac{q}{\theta}}\left(\frac{q}{s-q}\right)^{q}\left(\frac{(q-1)s}{s-q}\right)^{\frac{q}{\theta r}}.$$

Substituindo

$$G(\lambda) = G(1)\lambda^{(q-1)\left(\frac{n}{q}-\frac{s}{s-q}\right)}$$

em (3.36), temos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{n(s-q)}{qs}\right)^{\frac{q}{\theta r}} &= \Phi^{\frac{q}{\theta}}\left(\frac{q}{s-q}\right)^{q}\left(\frac{(s-q)n}{qs}\right)G(1)^{\frac{q}{\theta}(\frac{\theta}{q}+\frac{1-\theta}{s}-\frac{1}{r})}\\ &= \Phi^{\frac{q}{\theta}}\left(\frac{q}{s-q}\right)^{q}\left(\frac{(s-q)n}{qs}\right)G(1)^{\frac{q}{n}}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Considere a constante B dada pela expressão

$$\left(1-\frac{n(s-q)}{qs}\right)^{\frac{q}{\theta r}} = C^{\frac{q}{\theta}}\left(\frac{q}{s-q}\right)^{q}\left(\frac{(s-q)n}{qs}\right)B^{\frac{q}{n}}. \tag{3.38}$$

Podemos checar facilmente que a função

$$H_0(\lambda) = B\lambda^{(q-1)\left(\frac{n}{q}-\frac{s}{s-q}\right)},\ \ \lambda \in (0,+\infty)$$

satisfaz a equação diferencial

$$(-H_0'(\lambda))^{\frac{q}{\theta r}} = l\left(H_0(\lambda)+\frac{s-q}{(q-1)s}\lambda H_0'(\lambda)\right)H_0(\lambda)^{\frac{(1-\theta)q}{\theta s}}. \tag{3.39}$$

Logo, segue de (3.37) e (3.38) que

$$B = \left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}} G(1) \tag{3.40}$$

assim

$$H_0(\lambda) = \left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}} G(\lambda). \tag{3.41}$$

Afirmação. Se $F(\lambda_0) < H_0(\lambda_0)$, para algum $\lambda_0 > 0$, então $F(\lambda) < H_0(\lambda)$, $\forall\lambda \in (0,\lambda_0]$. De fato, suponhamos que exista algum $\tilde{\lambda} \in (0,\lambda_0)$ tal que $F(\tilde{\lambda}) \geq H_0(\tilde{\lambda})$.

Vamos escrever

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda < \lambda_0; F(\lambda) \geq H_0(\lambda)\}.$$

Então para qualquer $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_0]$, $F(\lambda) \leq H_0(\lambda)$, e deste modo, temos de (3.32) que

$$(-F'(\lambda))^{\frac{q}{\theta r}} \leq l\left(H_0(\lambda)+\frac{s-q}{(q-1)s}\lambda F'(\lambda)\right)H_0(\lambda)^{\frac{(1-\theta)q}{\theta s}}. \tag{3.42}$$

Para cada $\lambda > 0$, a fução $\phi_\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi_\lambda(t) = t^{\frac{q}{\theta r}} + \frac{l\lambda(s-q)t}{(q-1)s}H_0(\lambda)^{\frac{(1-\theta)q}{\theta s}}$$

é crescente. Assim, quando $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_0]$, deduzimos de (3.42) e (3.39) que

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(-F'(\lambda)) &\leq lH_0(\lambda)^{1+\frac{(1-\theta)q}{\theta s}}\\ &= \phi_\lambda(-H_0'(\lambda)),\end{aligned}$$

donde obtemos que

$$-F'(\lambda) \leq -H_0'(\lambda),\ \ \forall\lambda \in [\lambda_1,\lambda_0].$$

Isto implica que $F - H_0$ é crescente em $[\lambda_1,\lambda_0]$. Consequentemente, temos

$$0 \leq (F-H_0)(\lambda_1) \leq (F-H_0)(\lambda_0) < 0$$

o que uma contradição, e, portanto, a afirmação vale.

Da geometria local de M temos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{Vol[B_h(p)]}{V(h)}=1.$$

Assim, para $\epsilon>0$ fixado, existe $\delta>0$ tal que

$$Vol[B_h(p)]\geq(1-\epsilon)V(h),\ \ \forall h\leq\delta.$$

Segue então deste fato que

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \frac{qs}{s-q}\int_0^{+\infty}Vol[B_t(p)]\frac{t^{\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt\\
&\geq \frac{qs}{s-q}\int_0^{\delta}Vol[B_t(p)]\frac{t^{\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt\\
&\geq \frac{qs}{s-q}(1-\epsilon)\int_0^{\delta}V(t)\frac{t^{\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt\\
&= \frac{qs}{s-q}(1-\epsilon)\lambda^{\frac{(q-1)n}{q}+1-\frac{q(s-1)}{s-q}}\int_0^{\delta\lambda^{\frac{1-q}{q}}}V(z)\frac{z^{\frac{1}{q-1}}}{(1+z^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dz.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.33) temos

$$G(\lambda)=\frac{qs}{s-q}\lambda^{\frac{(q-1)n}{q}+1-\frac{q(s-1)}{s-q}}\int_0^{+\infty}V(z)\frac{z^{\frac{1}{q-1}}}{(1+z^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dz.$$

Assim

$$\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}\geq(1-\epsilon)\frac{\int_0^{\delta\lambda^{\frac{1-q}{q}}}V(z)\frac{z^{\frac{1}{q-1}}}{(1+z^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dz}{\int_0^{+\infty}V(z)\frac{z^{\frac{1}{q-1}}}{(1+z^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dz}.$$

Portanto

$$\liminf_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}\geq 1-\epsilon.$$

Fazendo $\epsilon\to 0$, obtemos

$$\liminf_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}\geq 1. \tag{3.43}$$

Como $C>\Phi$, obtemos de (3.41) e (3.43) que

$$\begin{aligned}
\liminf_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda)}{H_0(\lambda)} &= \left(\frac{C}{\Phi}\right)^{\frac{n}{\theta}}\liminf_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}\\
&\geq \left(\frac{C}{\Phi}\right)^{\frac{n}{\theta}}>1.
\end{aligned}$$

A última expressão junto com a *Afirmação* acima implicam que

$$F(\lambda) \geq H_0(\lambda), \ \ \forall \lambda > 0.$$

$\square$

Demonstração do Teorema 3.3.3.

Pelo Teorema 3.2.1, temos que $C \geq \Phi$. Vamos separar a prova em dois casos.

Caso 1: $C > \Phi$. Argumentaremos por contradição. Suponha que exista algum $h_0 > 0$ tal que

$$\frac{Vol[B_{h_0}(p)]}{V(h_0)} < e^{-(n-1)b_0}\left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}.$$

Então

$$\frac{Vol[B_{h_0}(p)]}{V(h_0)} = e^{-(n-1)b_0}\left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}} - \epsilon_0 \tag{3.44}$$

para algum $\epsilon_0 > 0$. Deste modo, segue de (3.20) e (3.44) que para todo $h \geq h_0$

$$\begin{aligned} \frac{Vol[B_h(p)]}{V(h)} &\leq e^{(n-1)b_0}\frac{Vol[B_{h_0}(p)]}{V(h_0)} \\ &= \left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}} - e^{(n-1)b_0}\epsilon_0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Pelo Lema 3.3.4, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{+\infty}\left[\frac{Vol[B_t(p)]}{V(t)} - \left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}\right]\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda + t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt \qquad (3.46) \\ &= \int_0^{h_0}\frac{Vol[B_t(p)]}{V(t)}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda + t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt + \int_{h_0}^{+\infty}\frac{Vol[B_t(p)]}{V(t)}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda + t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt \\ &\quad - \left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda + t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt. \end{aligned}$$

Da equação (3.20), podemos verificar facilmente que

$$\frac{Vol[B_t(p)]}{V(t)} \leq e^{(n-1)b_0}, \ \forall t > 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq e^{(n-1)b_0}\int_0^{h_0}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt+\int_{h_0}^{+\infty}\left[\left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}-e^{(n-1)b_0}\epsilon_0\right]\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt\\
&-\left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt\\
&= e^{(n-1)b_0}\int_0^{h_0}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt+\int_{0}^{+\infty}\left[\left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}-e^{(n-1)b_0}\epsilon_0\right]\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt\\
&-\int_0^{h_0}\left[\left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}-e^{(n-1)b_0}\epsilon_0\right]\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt-\left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt \qquad .\\
&=\left(e^{(n-1)b_0}+e^{(n-1)b_0}\epsilon_0-\left(\tfrac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}\right)\int_0^{h_0}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt-e^{(n-1)b_0}\epsilon_0\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+\frac{1}{q-1}}}{(\lambda+t^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{(s-1)q}{s-q}}}dt\\
&\leq\left(e^{(n-1)b_0}+e^{(n-1)b_0}\epsilon_0-\left(\tfrac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}\right)\lambda^{-\frac{q(s-1)}{s-q}}\frac{h_0^{n+1+\frac{1}{q-1}}}{(n+1+\frac{1}{q-1})}-e^{(n-1)b_0}\epsilon_0\frac{s-q}{qs\omega_n}G(\lambda)\\
&=\left(e^{(n-1)b_0}+e^{(n-1)b_0}\epsilon_0-\left(\tfrac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}\right)\lambda^{-\frac{q(s-1)}{s-q}}\frac{h_0^{n+1+\frac{1}{q-1}}}{(n+1+\frac{1}{q-1})}-e^{(n-1)b_0}\epsilon_0\frac{s-q}{qs\omega_n}\lambda^{(q-1)\left(\frac{n}{q}-\frac{s}{s-q}\right)}G(1)
\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $\lambda>0$, temos

$$e^{(n-1)b_0}\epsilon_0\frac{s-q}{qs\omega_n}G(1)\leq\lambda^{-1-\frac{n(q-1)}{q}}\left(e^{(n-1)b_0}+e^{(n-1)b_0}\epsilon_0-\left(\frac{\Phi}{C}\right)^{\frac{n}{\theta}}\right)\frac{h_0^{n+1+\frac{1}{q-1}}}{(n+1+\frac{1}{q-1})}.$$

Fazendo $\lambda\to+\infty$ obtemos uma contradição. Isto completa a prova do Teorema 3.3.3 no caso em que $C>\Phi$.

Caso 2: $C=\Phi$. Neste caso, para qualquer $\delta>0$ fixado temos

$$\|u\|_r\leq(\Phi+\delta)\|\nabla u\|_q^{\theta}\|u\|_s^{1-\theta}.$$

Assim, pelo *caso 1* temos que

$$Vol[B_R(p)]\geq e^{-(n-1)b_0}\left(\frac{\Phi}{\Phi+\delta}\right)^{\frac{n}{\theta}}V(R),\ \ \forall R>0.$$

Fazendo $\delta\to 0$, obtemos que

$$Vol[B_R(p)]\geq e^{-(n-1)b_0}V(R),\ \ \forall R>0,$$

o que completa a prova do Teorema 3.3.3 para o caso $C = \Phi$. $\square$

Conforme foi provado por Zhu [47], dado $\delta > 0$, existe $\epsilon(n, \delta)$ tal que se uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) não compacta com curvatura seccional satisfazendo

$$K(x) \geq -G(\rho(x)), \quad \int_0^{+\infty} tG(t)dt \leq \epsilon$$

e

$$Vol[B_R(p)] \geq \left(\frac{1}{2} + \delta\right) V(R), \quad \forall\ R > 0,$$

então a função distância $\rho = d(p, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ não possui pontos críticos e assim M é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Combinando este teorema de Zhu com o Teorema 3.3.3, obtemos o seguinte

Corolário 3.3.5 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta. Fixe $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, existe um número $b_0 = b_0(n, \delta) > 0$ tal que, se a curvatura seccional de M satisfaz*

$$K(x) \geq -G(\rho(x)), \quad \int_0^{+\infty} tG(t)dt \leq b_0$$

e a desigualdade (3.24) é válida em M com $C < (\frac{1}{2} + \delta)^{-\frac{\theta}{n}}\Phi$, então M é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

3.4 A Desigualdade de Log-Sobolev

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre a desigualdade de Log-Sobolev (3.5) que possui importantes aplicações conforme o leitor interessado poderá verificar em [14, 15, 23, 35] e suas referências. Combinando alguns resultados podemos obter um teorema de unicidade topológica para esta desigualdade. Vamos denotar por $C_{opt}(= \frac{2}{n\pi e})$ a melhor constante no caso Euclideano.

Teorema 3.4.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa. Se para qualquer $f \in C_0^\infty(M)$, $\int_M f^2 dv_g = 1$, temos*

$$\int_M f^2 \log f^2 dv \leq \frac{n}{2} \log\left(C \int_M |\nabla f|^2 dv\right)$$

para alguma constante $C > 0$, então para qualquer $x \in M$, temos

$$Vol[B_r(x)] \geq \left(\frac{C_{opt}}{C}\right)^{\frac{n}{2}} V_0(r), \quad \forall r > 0.$$

Observação 3.4.2

Como $Ric_{(M,g)} \geq 0$, pelo teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov (Teorema 1.3.4), temos que

$$\frac{Vol[B_r(x)]}{V_0(r)} \leq 1.$$

Portanto, a conclusão do teorema acima diz que devemos obrigatoriamente ter $C \geq C_{opt}$.

Demonstração do Teorema 3.4.1.

Seja $p_t(x,y)$ o núcleo do calor em M. Por [7] temos que

$$\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) \leq \left(\frac{neC}{8t}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad t > 0. \tag{3.47}$$

Como $Ric_{(M,g)} \geq 0$, existe uma constante positiva $B = B(n)$ dependente de n tal que (cf. [30, 29])

$$\liminf_{t\to+\infty} Vol[B_{\sqrt{t}}(x)]p_t(x,y) \geq B. \tag{3.48}$$

Assim, segue de (3.47) e (3.48) que

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to+\infty} \frac{Vol[B_{\sqrt{t}}(x)]}{t^{n/2}} &= \liminf_{t\to+\infty} \left(Vol[B_{\sqrt{t}}(x)]p_t(x,y)\right)\left(\frac{1}{p_t(x,y)t^{n/2}}\right) \\
&\geq B \cdot \left(\frac{8}{neC}\right)^{\frac{n}{2}} > 0.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Logo, da expressão (3.49) temos que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{Vol[B_r(x)]}{r^n} = \liminf_{r\to+\infty} \frac{Vol[B_r(x)]}{r^n} > 0.$$

Deste modo M possui máximo crescimento de volume e o Teorema 2.2 in [30] implica que

$$\lim_{t\to+\infty} Vol[B_{\sqrt{t}}(x,)]p_t(x,y) = \omega_n(4\pi)^{-\frac{n}{2}}. \tag{3.50}$$

Portanto, substituindo (3.50) em (3.49) obtemos

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{Vol[B_r(x)]}{r^n} \geq \omega_n \left(\frac{C_{opt}}{C}\right)^{\frac{n}{2}}$$

e isto completa a prova do Teorema. □

Um importante teorema de Cheeger e Colding [12] afirma que dado um inteiro $n \geq 2$ existe uma constante $\delta = \delta(n) > 0$ tal que qualquer variedade Riemanniana completa (M^n, g) com curvatura de Ricci não negativa e $Vol[B_r(x)] \geq (1-\delta)V_0(r)$ para algum $x \in M$ e para todo $r > 0$ é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Combinando este teorema com o Teorema 3.4.1 obtemos o seguinte teorema de unicidade topológica para variedades completas não compactas com curvatura de Ricci não negativa.

Corolário 3.4.3 *Dado um inteiro $n \geq 2$, existe $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ tal que qualquer variedade Riemanniana (M^n, g) completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa em que a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\int_M f^2 \log f^2 dv \leq \frac{n}{2} \log \left((C_{opt} + \epsilon) \int_M |\nabla f|^2 dv \right), \;\; \int_M f^2 dv = 1, \;\; f \in C_0^\infty(M),$$

é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

Quando $C = C_{opt}$, obtemos do Teorema 3.4.1 o seguinte teorema de rigidez

Corolário 3.4.4 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e que a seguinte desigualdad é satisfeita*

$$\int_M f^2 \log f^2 dv \leq \frac{n}{2} \log \left(C_{opt} \int_M |\nabla f|^2 dv \right), \;\; \int_M f^2 dv = 1, \;\; f \in C_0^\infty(M).$$

Então M é isométrica ao $\mathbb{R}^n$.

Este resultado foi obtido primeiramente por Bakry-Concordet-Ledoux em [7].

Capítulo 4

A Desigualdade de Hardy

Neste capítulo, de modo semelhante ao que que foi feito no capítulo anterior, iremos mostrar, entre outras coisas, que variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não negativa em que vale alguma desigualdade de Hardy, com uma constante apropriada, são equivalentes ao espaço Euclideano.

4.1 Introdução

Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $p,\ q,\ \alpha$ and γ constantes satisfazendo a relação

$$1 \leq q < n,\ q \leq p \leq \frac{nq}{n-q},\ \gamma = \alpha - 1 + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right). \tag{4.1}$$

Lembrando que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções suaves com suporte compacto no espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$, de acordo com a desigualdade de Hardy (cf. [2, p.98]), existe uma constante positiva C tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma p}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha q}|\nabla u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},\ \forall\ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{4.2}$$

onde $|x|$ é a norma Euclideana do vetor posição $x \in \mathbb{R}^n$.

Vamos denotar por $K(n,q,\gamma)$ a melhor constante para esta desigualdade, isto é

$$K(n,q,\gamma)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) - \{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha q}|\nabla u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma p}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{4.3}$$

Quando $\alpha = 0$, $\gamma p + q > 0$ e $q > 1$, podemos verificar que

$$u(x) = \left(\lambda + |x|^{(q+\gamma p)/(q-1)}\right)^{(q-n)/(q+\gamma p)}, \ \ \lambda > 0$$

é uma família de funções minimizantes para (4.3) com

$$K(n,q,\gamma) = |S^{n-1}|^{-\frac{\gamma+1}{n}}(\frac{\gamma+1}{n})^{\frac{1}{q}}(\frac{q-1}{n-q})^{\frac{q-1}{q}}(\frac{n-(\gamma+1)q}{n})^{\frac{n-(\gamma+1)q}{nq}}(\beta(\frac{n}{(\gamma+1)q},\frac{n(q-1)}{q(\gamma+1)}+1))^{-\frac{\gamma+1}{n}},$$

onde $\beta : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \ Re(x), \ Re(y) \geq 0,$$

é a função Beta de Euler. (cf. [34, 33, 13]).

Os autores em [17] obtiveram teoremas de rigidez topológia e métrica para variedades completas de curvatura de Ricci não negativa satisfazendo alguma desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg:

$$\left(\int_M r(x)^{-bp}|u|^p dv\right)^{1/p} \leq C\left(\int_M r(x)^{-2a}|\nabla u|^2 dv\right)^{1/2}, \ u \in C_0^\infty(M), \tag{4.4}$$

onde

$$n \geq 3, \ 0 \leq a < \frac{n-2}{2}, \ a \leq b < a+1, \ p = \frac{2n}{n-2+2(b-a)}, \tag{4.5}$$

e r denota a função distância em M a partir de algum ponto fixado. Observe que quando $a = 0$ e $M = \mathbb{R}^n$, (4.4) é a desigualdade de Hardy (4.2) com $q = 2$.

Neste capítulo, conforme foi mencionado no início, estudaremos as variedades completas com curvatura de Ricci assintóticamente não negativa em que vale um tipo de desigualdade de Hardy. Para uma variedade Riemanniana (M^n, g), continuamos denotando por $C_0^\infty(M)$ o espaço das funções suaves em M com suporte compacto, ∇ e dv são o operador gradiente e o elemento de volume de M, respectivamente. A função $r(x) = dist_{(M,g)}(x, o)$, é a função distância em M a partir de um ponto fixado $o \in M$, $B_r(p)$ é a bola geodésica de centro p e raio r e $Vol[B_r(p)]$ é o volume de $B_r(p)$. Lembrando que M possui curvatura de Ricci assintóticamente não negativa se sua curvatura de Ricci satisfaz

$$Ric_{(M,g)}(x) \geq -(n-1)G(r(x)), \ \ x \in M, \tag{4.6}$$

onde $G \in C^1([0, +\infty))$ é uma função não negativa tal que

$$\int_0^{+\infty} tG(t)dt = b_0 < +\infty.$$

e neste caso, sabemos que M satisfaz a propriedade de crescimento de volume (3.20).

Finalizamos esta seção apresentando o seguinte resultado sobre a melhor constante do caso Euclideano.

Proposição 4.1.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa, não necessariamente compacta em que vale a desigualdade de Hardy, isto é, $\forall u \in C_0^\infty(M)$, tem-se*

$$\left(\int_M r(x)^{\gamma p}|u|^p dv\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_M r(x)^{\alpha q}|\nabla u|^q dv\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.7}$$

para alguma constante $C > 0$. Então $C \geq K(n, q, \gamma)$.

Demonstração

A demonstração segue as linhas da prova do Teorema 3.2.1, assim, vamos supor por contradição que $C < K(n, q, \gamma)$. Fixe um ponto $P \in M$ e considere um sistema de coordenadas polar geodésicas $\{r, \theta_i\}$ centrado em P. Dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhaça Ω de P e um número $\delta > 0$ tais que $\exp_P^{-1}(\Omega) = B_\delta(0)$ e as componentes $g_{\theta_i\theta_i}$ satisfazem

$$1 - \epsilon \leq \sqrt{g_{\theta_i\theta_i}} \leq 1 + \epsilon \text{ e } (1-\epsilon)^{n-1} \leq \sqrt{g(r,\theta)} \leq (1+\epsilon)^{n-1}. \tag{4.8}$$

A prova deste fato pode ser encontrada em [5] pág. 20. Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, temos que existe $C' < K(n, q, \gamma)$ e $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer $f \in C_0^\infty(B_{\delta_0}(0))$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma p}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C'\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha q}|\nabla u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

De fato, dada $f \in C_0^\infty(B_\delta(0))$ temos que $u = f \circ \exp^{-1} \in C_0^\infty(\Omega)$ satisfaz a desigualdade (4.7), portanto, utilizando as estimativas sobre a métrica (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma p}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{B_\delta(0)} |x|^{\gamma p}|(u \circ \exp_P)(x)|^p (1-\epsilon)^{-(n-1)}\sqrt{g}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (1-\epsilon)^{-\frac{n-1}{p}}\left(\int_\Omega r^{\gamma p}|u|^p dv\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (1-\epsilon)^{-\frac{n-1}{p}}\left(\int_M r^{\gamma p}|u|^p dv\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (1-\epsilon)^{-\frac{n-1}{p}} C\left(\int_M r^{\alpha q}|\nabla u|^q dv\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma p}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq (1-\epsilon)^{-\frac{n-1}{p}} C\left(\int_\Omega r^{\alpha q}|\nabla u|^q dv\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= (1-\epsilon)^{-\frac{n-1}{p}} C\left(\int_{B_\delta(0)}|x|^{\alpha q}|\nabla(u\circ \exp_P)(x)|^q\sqrt{g}dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq (1-\epsilon)^{-\frac{n-1}{p}} C(1+\epsilon)^{\frac{n-1}{q}}(1-\epsilon)^{-1}\left(\int_{B_\delta(0)}|x|^{\alpha q}|\nabla f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= C'\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha q}|\nabla f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

onde

$$C' = (1-\epsilon)^{-\frac{n-1}{p}} C(1+\epsilon)^{\frac{n-1}{q}}(1-\epsilon)^{-1}.$$

Como $C < K(n,q,\gamma)$, basta escolher ϵ suficientemente pequeno de modo a termos $C' < K(n,q,\gamma)$.

Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Escreva $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, $\lambda > 0$. Para λ suficientemente grande $u_\lambda(x) \in C_0^\infty(B_0(\delta_0))$. Logo

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma p}|u_\lambda|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C'\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha q}|\nabla u_\lambda|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Observe que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma p}|u_\lambda|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{-\gamma-\frac{n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma p}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha q}|\nabla u_\lambda|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-\alpha+1-\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha q}|\nabla u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Substituindo estas últimas expressões na desigualdade satisfeita por u_λ obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma p}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda^{-\alpha+1-\frac{n}{q}+\gamma+\frac{n}{p}} C'\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha q}|\nabla u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

mas, segue de (4.1) que

$$-\alpha+1-\frac{n}{q}+\gamma+\frac{n}{p} = 0$$

ou seja,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma p}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C'\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha q}|\nabla u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

o que é um absurdo já que $K(n,q,\gamma)$ é a melhor constante para esta desigualdade. $\square$

4.2 Desigualdades de Hardy e Curvatura de Ricci

O objetivo deste capítulo é provar o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1 *Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $p,\ q,\ \gamma$ constantes satisfazendo*

$$1 < q < n,\ q < p \leq \frac{nq}{n-q},\ \ \gamma = -1 + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right). \tag{4.9}$$

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci satisfazendo (4.6) e suponhamos que

$$\left(\int_M r(x)^{\gamma p} |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_M |\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}},\ \ \forall\ u \in C_0^\infty(M), \tag{4.10}$$

para alguma constante $C > 0$. Então, para qualquer $R > 0$, temos

$$Vol[B_R(o)] \geq e^{-(n-1)b_0}(C^{-1}K(n,q,\gamma))^{pq/(p-q)}V_0(R), \tag{4.11}$$

onde $V_0(R)$ denota o volume da bola Euclideana de raio R.

No caso especial que M possui curvatura de Ricci não negativa e $\gamma = 0$ (resp. $q = 2$), o teorema acima foi provado em [43] (resp. [17]).

Para a demonstração do Teorema 4.2.1, vamos precisar da seguinte

Proposição 4.2.2 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta satisfazendo a propriedade de crescimento de volume*

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{Vol[B_R(o)]}{R^n} < +\infty \tag{4.12}$$

para algum ponto $o \in M$. Seja $r(x) = dist(x, o)$, $x \in M$, $n,\ p,\ q,\ \gamma$ dadas em (4.9) e suponhamos que a desigualdade (4.10) seja válida em M para alguma constante $C > K(n,q,\gamma)$.

Então, para todo $\lambda > 0$, temos

$$F(\lambda) \geq \left(\frac{K(n,q,\gamma)}{C}\right)^{\frac{pq}{p-q}} G(\lambda),$$

onde

$$F(\lambda) = \frac{q + p\gamma}{p(n-q) - q - p\gamma} \int_M \frac{r^{p\gamma} dv_g}{(\lambda + r^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}}} \tag{4.13}$$

e

$$G(\lambda) = \frac{q + p\gamma}{p(n-q) - q - p\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{p\gamma} dx}{(\lambda + |x|^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}}}. \tag{4.14}$$

Demonstração da Proposição 4.2.2.

Pelo teorema de Fubini (veja [41]) temos que

$$F(\lambda) = \frac{q+p\gamma}{p(n-q)-q-p\gamma}\int_0^{+\infty} Vol\left\{x : \frac{r^{p\gamma}}{(\lambda + r^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}}}(x) > s\right\} ds.$$

Fazendo a mudança de variável

$$s = \frac{h^{p\gamma}}{(\lambda + h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}}}$$

na integral acima, obtemos que

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{q+p\gamma}{p(n-q)-q-p\gamma}\int_0^{+\infty} Vol\left\{x : r(x) < h\right\} \frac{h^{p\gamma-1}\left[-p\gamma\lambda + (\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q-1} - p\gamma)h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right] dh}{\left(\lambda + h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right)^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}} \\ &= \frac{q+p\gamma}{p(n-q)-q-p\gamma}\int_0^{+\infty} Vol[B_h(o)]\frac{h^{p\gamma-1}\left[-p\gamma\lambda + \frac{q(n-1)}{q-1}h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right]}{\left(\lambda + h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right)^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}} dh. \qquad (4.15) \end{aligned}$$

A hipótese (4.12) implica que $Vol[B_h(o)] \leq Ah^n$, para alguma constante $A > 0$, assim

$$F(\lambda) \leq \frac{A(q+p\gamma)}{p(n-q)-q-p\gamma}\int_0^{+\infty}\left(-p\gamma\lambda + \frac{q(n-1)}{q-1}h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right)h^{n+p\gamma-1}\left(\lambda + h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right)^{-\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}} dh.$$

De (4.9), é fácil verificarmos que

$$n + p\gamma - 1 - \frac{p(n-q)}{q-1} < -1,\ n + p\gamma - 1 + \frac{q+p\gamma}{q-1}\left(1 - \frac{p(n-q)}{q+p\gamma}\right) < -1.$$

E segue então deste fato que $0 \leq F(\lambda) < +\infty$, F está bem definida e é diferenciável. Logo, temos que

$$F'(\lambda) = -\int_M \frac{r^{p\gamma}dv_g}{(\lambda + r^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}}. \qquad (4.16)$$

Por um argumento de aproximação por funções suaves, podemos substituir a função

$$\left(\lambda + r(x)^{(q+p\gamma)/(q-1)}\right)^{(q-n)/(q+p\gamma)}$$

na desigualdade (4.10) para todo $\lambda > 0$, e assim obtermos

$$\begin{aligned} \left(\int_M \frac{r^{p\gamma}dv_g}{(\lambda + r^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}}\right)^{\frac{q}{p}} &\leq \left(\frac{C(n-q)}{q-1}\right)^q \int_M \frac{r^{\frac{(1+p\gamma)q}{q-1}}dv}{(\lambda + r^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{q(n+p\gamma)}{q+p\gamma}}} \\ &= \left(\frac{C(n-q)}{q-1}\right)^q \int_M \frac{r^{p\gamma + \frac{q+p\gamma}{q-1}}dv}{(\lambda + r^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}} \\ &= \left(\frac{C(n-q)}{q-1}\right)^q \left[\int_M \frac{r^{p\gamma}dv}{(\lambda + r^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}}} - \lambda\int_M \frac{r^{p\gamma}dv}{(\lambda + r^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}}\right], \end{aligned}$$

o que, combinando com (4.13) e (4.16), nos dá a seguinte inequação diferencial

$$l(-F'(\lambda))^{\frac{q}{p}} \leq \frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}F(\lambda)+\lambda F'(\lambda), \tag{4.17}$$

onde

$$l = \left(\frac{q-1}{C(n-q)}\right)^q.$$

A partir de (4.15), podemos deduzir que

$$G(\lambda) = \frac{\omega_n(q+p\gamma)}{p(n-q)-q-p\gamma}\int_0^{+\infty}\frac{h^{n+p\gamma-1}\left[-p\gamma\lambda+\frac{q(n-1)}{q-1}h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right]}{\left(\lambda+h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right)^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}}dh.$$

Observe que para cada $\lambda > 0$, a função $u_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_\lambda(x) = \left(\lambda + |x|^{(q+\gamma p)/(q-1)}\right)^{(q-n)/(q+\gamma p)}$$

é uma função extremante para a desigualdade (4.2), isto é

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma p}|u_\lambda|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = K(n,q,\gamma)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_\lambda|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

A expressão acima pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\tilde{l}(-G'(\lambda))^{\frac{q}{p}} = \frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}G(\lambda)+\lambda G'(\lambda), \tag{4.18}$$

onde

$$\tilde{l} = \left(\frac{q-1}{K(n,q,\gamma)(n-q)}\right)^q.$$

Substituindo

$$G(\lambda) = G(1)\lambda^{-\frac{n-q}{q+p\gamma}}$$

na equação (4.18), obtemos

$$\tilde{l}\left(\frac{n-q}{q+p\gamma}\right)^{\frac{q}{p}} = \frac{p(n-q)-p\gamma-n}{q+p\gamma}G(1)^{1-\frac{q}{p}}. \tag{4.19}$$

Considere a constante B dada por

$$l\left(\frac{n-q}{q+p\gamma}\right)^{\frac{q}{p}} = \frac{p(n-q)-p\gamma-n}{q+p\gamma}B^{1-\frac{q}{p}}. \tag{4.20}$$

Podemos verificar que a função

$$H_0(\lambda) = B\lambda^{-\frac{n-q}{q+p\gamma}}, \ \ \lambda \in (0,+\infty)$$

satisfaz a equação diferencial

$$l(-H_0'(\lambda))^{\frac{q}{p}} = \frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma} H_0(\lambda) + \lambda H_0'(\lambda). \tag{4.21}$$

Logo, dividindo (4.20) por (4.19), obtemos que

$$B = \left(\frac{K(n,q,\gamma)}{C}\right)^{\frac{pq}{p-q}} G(1),$$

isto é,

$$H_0(\lambda) = \left(\frac{K(n,q,\gamma)}{C}\right)^{\frac{pq}{p-q}} G(\lambda). \tag{4.22}$$

Afim de concluirmos a demonstração da Proposição 4.2.2, vamos mostrar o seguinte

Lema 4.2.3 *Se $F(\lambda_0) < H_0(\lambda_0)$, para algum $\lambda_0 > 0$, então $F(\lambda) < H_0(\lambda_0)$, $\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$.*

Demonstração do Lema 4.2.3.

Suponhamos que o Lema 4.2.3 é falso, assim, deve existir $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda_0)$ tal que $F(\tilde{\lambda}) \geq H_0(\tilde{\lambda})$. Seja

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda < \lambda_0; F(\lambda) \geq H_0(\lambda)\}.$$

Então para qualquer $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0]$, temos $0 < F(\lambda) \leq H_0(\lambda)$ e segue da equação (4.17) que

$$l(-F'(\lambda))^{\frac{q}{p}} \leq \frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma} H_0(\lambda) + \lambda F'(\lambda). \tag{4.23}$$

Para cada $\lambda > 0$, a função $\phi_\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi_\lambda(s) = l s^{\frac{q}{p}} + \lambda s$$

é crescente. Assim, quando $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0]$ deduzimos de (4.23) e (4.21) que

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(-F'(\lambda)) &= l(-F'(\lambda))^{\frac{q}{p}} - \lambda F'(\lambda) \\ &\leq \frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma} H_0(\lambda) \\ &= \phi_\lambda(-H_0'(\lambda)) \end{aligned}$$

e assim $-F'(\lambda) \leq -H_0'(\lambda)$, $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_0]$. Isto implica que $F - H_0$ é não decrescente no intervalo $[\lambda_1, \lambda_0]$. Consequentemente, temos que

$$0 \leq (F - H_0)(\lambda_1) \leq (F - H_0)(\lambda_0) < 0.$$

Mas isto é uma contradição, o que completa a prova do Lema 4.2.3. $\square$

Continuando a demonstração da Proposição 4.2.2, da geometria local de M sabemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{Vol[B_t(o)]}{V_0(t)}=1.$$

Logo, para $\epsilon>0$ fixado, existe $\delta>0$ tal que $Vol[B_h(o)]\geq(1-\epsilon)V_0(h)$, $\forall h\leq\delta$. Portanto, segue de (4.15) que

$$\begin{aligned}F(\lambda) &\geq \frac{(q+p\gamma)(1-\epsilon)}{p(n-q)-q-p\gamma}\int_0^{\delta}V_0(h)\frac{h^{p\gamma-1}\left[-p\gamma\lambda+\frac{q(n-1)}{q-1}h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right]}{\left(\lambda+h^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right)^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}}dh\\ &= \frac{(q+p\gamma)(1-\epsilon)}{p(n-q)-q-p\gamma}\lambda^{-\frac{n-q}{q+p\gamma}}\int_0^{\delta/\lambda^{\frac{q-1}{q+p\gamma}}}V_0(s)\frac{s^{p\gamma-1}\left[-p\gamma+\frac{q(n-1)}{q-1}s^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right]}{\left(1+s^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right)^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}}ds.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos de (4.14) que

$$G(\lambda)=\frac{q+p\gamma}{p(n-q)-q-p\gamma}\lambda^{-\frac{n-q}{q+p\gamma}}\int_0^{+\infty}V_0(s)\frac{s^{p\gamma-1}\left[-p\gamma+\frac{q(n-1)}{q-1}s^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right]}{\left(1+s^{\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right)^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}}ds.$$

Assim

$$\liminf_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}\geq 1-\epsilon.$$

Fazendo $\epsilon\to 0$, obtemos

$$\liminf_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}\geq 1. \tag{4.24}$$

Das expressões (4.22) e (4.24) segue que

$$\begin{aligned}\liminf_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda)}{H_0(\lambda)} &= \left(\frac{C}{K(n,q,\gamma)}\right)^{\frac{pq}{p-q}}\liminf_{\lambda\to 0}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}\\ &\geq \left(\frac{C}{K(n,q,\gamma)}\right)^{\frac{pq}{p-q}}>1,\end{aligned}$$

que, combinando com o Lema 4.2.3, implica que

$$F(\lambda)\geq H_0(\lambda),\ \ \forall\lambda>0$$

e isto conclui a prova da Proposição 4.2.2. □

Agora estamos em condições de provar o principal teorema deste capítulo.

Demonstração do Teorema 4.2.1.

Pela Proposição 4.1.1 temos que $C\geq K(n,q,\gamma)$, deste modo, vamos separar a prova em dois casos.

Caso 1: $C > K(n,q,\gamma)$. Argumentando por contradição, vamos supor que exista $h_0 > 0$ tal que

$$\frac{Vol[B_{h_0}(o)]}{V_0(h_0)} < e^{-(n-1)b_0}\left(\frac{K(n,q,\gamma)}{C}\right)^{\frac{pq}{p-q}}.$$

Assim

$$\frac{Vol[B_{h_0}(o)]}{V_0(h_0)} = e^{-(n-1)b_0}\left(\frac{K(n,q,\gamma)}{C}\right)^{\frac{pq}{p-q}} - \epsilon_0$$

para algum $\epsilon_0 > 0$. Para todo $h \geq h_0$, obtemos de (3.20) e da equação acima que

$$\begin{aligned} \frac{Vol[B_h(o)]}{V_0(h)} &\leq e^{(n-1)b_0}\frac{Vol[B_{h_0}(o)]}{V_0(h_0)} \\ &= \left(\frac{K(n,q,\gamma)}{C}\right)^{\frac{pq}{p-q}} - e^{(n-1)b_0}\epsilon_0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Afim de simplificar os cálculos, vamos escrever

$$\psi(s) = \frac{s^{p\gamma-1}(-p\gamma\lambda + \frac{q(n-1)}{q-1}s^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})}{(\lambda + s^{\frac{q+p\gamma}{q-1}})^{\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}}.$$

Pela Proposição 4.2.2, temos que

$$\int_0^{+\infty}\left[Vol[B_s(o)] - dV_0(s)\right]\psi(s)ds \geq 0. \tag{4.26}$$

onde

$$d = \left(\frac{K(n,q,\gamma)}{C}\right)^{\frac{pq}{p-q}},$$

segue de (4.26) que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{+\infty}\left[\frac{Vol[B_s(o)]}{V_0(s)} - d\right]s^n\psi(s)ds \qquad (4.27) \\ &= \int_0^{h_0}\frac{Vol[B_s(o)]}{V_0(s)}s^n\psi(s)ds + \int_{h_0}^{+\infty}\frac{Vol[B_s(o)]}{V_0(s)}s^n\psi(s)ds - d\int_0^{+\infty}s^n\psi(s)ds. \end{aligned}$$

Da hipótese sobre a curvatura de Ricci (4.6), temos da expressão (3.20) que

$$\frac{Vol[B_t(o)]}{V_0(t)} \leq e^{(n-1)b_0}, \ \ \forall t > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^{(n-1)b_0}\int_0^{h_0}s^n\psi(s)ds + \int_{h_0}^{+\infty}(d - e^{(n-1)b_0}\epsilon_0)s^n\psi(s)ds - d\int_0^{+\infty}s^n\psi(s)ds \\ &= e^{(n-1)b_0}\int_0^{h_0}s^n\psi(s)ds - d\int_0^{+\infty}s^n\psi(s)ds + (d - e^{(n-1)b_0}\epsilon_0)\left(\int_0^{+\infty}s^n\psi(s)ds - \int_0^{h_0}s^n\psi(s)ds\right) \\ &= (e^{(n-1)b_0} + e^{(n-1)b_0}\epsilon_0 - d)\int_0^{h_0}s^n\psi(s)ds - e^{(n-1)b_0}\epsilon_0\int_0^{+\infty}s^n\psi(s)ds, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}
0 &\leq (e^{(n-1)b_0} + e^{(n-1)b_0}\epsilon_0 - d)\int_0^{h_0} s^n\psi(s)ds - \frac{e^{(n-1)b_0}\epsilon_0}{\omega_n}\int_0^{+\infty} V_0(s)\psi(s)ds \\
&= (e^{(n-1)b_0} + e^{(n-1)b_0}\epsilon_0 - d)\int_0^{h_0} s^n\psi(s)ds - \frac{e^{(n-1)b_0}\epsilon_0}{\omega_n}\cdot\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}G(\lambda) \\
&\leq (e^{(n-1)b_0} + e^{(n-1)b_0}\epsilon_0 - d)\lambda^{-\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}\int_0^{h_0}(-p\gamma\lambda s^{n+p\gamma-1} + \frac{q(n-1)}{q-1}s^{n+p\gamma-1+\frac{q+p\gamma}{q-1}})ds \\
&\quad -\frac{e^{(n-1)b_0}\epsilon_0}{\omega_n}\cdot\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}\lambda^{-\frac{n-q}{q+p\gamma}}G(1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &\leq (e^{(n-1)b_0} + e^{(n-1)b_0}\epsilon_0 - d)\lambda^{-\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}\left(\frac{-p\gamma\lambda h_0^{n+p\gamma}}{n+p\gamma} + \frac{q(n-1)}{q-1}\frac{h_0^{n+p\gamma+\frac{q+p\gamma}{q-1}}}{n+p\gamma+\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right) \\
&\quad -\frac{e^{(n-1)b_0}\epsilon_0}{\omega_n}\cdot\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}\lambda^{-\frac{n-q}{q+p\gamma}}G(1).
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
0 &\leq (e^{(n-1)b_0} + e^{(n-1)b_0}\epsilon_0 - d)\lambda^{-\frac{p(n-q)}{q+p\gamma}}\left(\frac{-p\gamma\lambda h_0^{n+p\gamma}}{n+p\gamma} + \frac{q(n-1)}{q-1}\frac{h_0^{n+p\gamma+\frac{q+p\gamma}{q-1}}}{n+p\gamma+\frac{q+p\gamma}{q-1}}\right) \\
&\quad -\frac{e^{(n-1)b_0}\epsilon_0}{\omega_n}\cdot\frac{p(n-q)-q-p\gamma}{q+p\gamma}\lambda^{-\frac{n-q}{q+p\gamma}}G(1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{e^{(n-1)b_0}\epsilon_0(p(n-q)-q-p\gamma)G(1)}{\omega_n(q+p\gamma)(e^{(n-1)b_0}+e^{(n-1)b_0}\epsilon_0-d)} \leq \lambda^{\frac{(1-p)(n-q)}{q+p\gamma}}\left(\frac{-p\gamma\lambda h_0^{n+p\gamma}}{n+p\gamma} + \frac{q(n-1)}{(p-1)(n-q)}h_0^{\frac{(p-1)(n-q)}{q-1}}\right).$$

Fazendo $\lambda \to +\infty$ na desigualdade acima e observando que

$$\frac{(1-p)(n-q)}{q+p\gamma} + 1 < 0$$

obtemos a desejada contradição. Isto completa a demonstração do Teorema 4.2.1 para o caso em que $C > K(n,q,\gamma)$.

Caso 2: $C = K(n,q,\gamma)$. Neste caso, para qualquer $\delta > 0$ fixado, temos que

$$\left(\int_M r(x)^{\gamma p}|u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq (K(n,q,\gamma)+\delta)\left(\int_M |\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Assim, temos pelo *Caso 1* que

$$Vol[B_r(o)] \geq e^{-(n-1)b_0}\left(\frac{K(n,q,\gamma)}{K(n,q,\gamma)+\delta}\right)^{\frac{pq}{p-q}} V_0(r), \;\; \forall r > 0.$$

Fazendo $\delta \to 0$, obtemos que

$$Vol[B_r(o)] \geq e^{-(n-1)b_0} V_0(r), \ \ \forall r > 0,$$

o que completa a demonstração do Teorema 4.2.1. $\square$

O teorema de comparação de Bishop-Gromov [11, 41] implica que se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa, então para qualquer $x \in M$, $Vol[B_r(x)] \leq V_0(r)$ e a igualdade vale se, e só se $B_r(x)$ é isométrica a uma bola Euclideana de raio. Assim obtemos do Teorema 4.2.1 o seguinte teorema de rigidez:

Corolário 4.2.4 *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e tal que vale a desigualdade de Hardy*

$$\left(\int_M r(x)^{\gamma p} |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq K(n, q, \gamma) \left(\int_M |\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}, \quad u \in C_0^\infty(M),$$

é isométrica ao $\mathbb{R}^n$, onde $n,\ p,\ q,\ \gamma$ satisfazem as condições dadas em (4.9).

Quando $\gamma = 0$, o Corolário 4.2.4 é o teorema principal em [28].

Utilizando o teorema de Cheeger e Colding [12] junto com o Teorema 4.2.1, obtemos o seguinte teorema de unicidade topológica para variedades completas com curvatura de Ricci não negativa.

Corolário 4.2.5 *Sejam $n,\ p,\ q,\ \gamma$ satisfazendo (4.9). Existe uma constante positiva $\epsilon = \epsilon(n, p, q)$ tal que qualquer variedade Riemanniana (M^n, g) completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e que vale a desigualdade*

$$\left(\int_M r(x)^{\gamma p} |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq (K(n, q, \gamma) + \epsilon) \left(\int_M |\nabla u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}, \ \ u \in C_0^\infty(M),$$

é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

Utilizando novamente o teorema de Zhu [47], juntamente com o Teorema 4.2.1, obtemos agora um teorema de unicidade topológica para variedades completas com curvatura seccional assintóticamente não negativa.

Corolário 4.2.6 *Seja $n,\ p,\ q,\ \gamma$ satisfazendo (4.9). Para $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ fixado, existe $b_0 = b_0(n, \delta) > 0$ tal que, se a curvatura seccional de uma variedade Riemanniana (M^n, g) completa não compacta satisfaz*

$$K(x) \geq -G(r(x)), \int_0^{+\infty} tG(t)dt \leq b_0$$

e vale a desigualdade (4.10) em M com $C < (\frac{1}{2}+\delta)^{-\frac{p-q}{pq}} K(n,q,\gamma)$, então M difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

Neste ponto, vale a pena observar que, utilizando os argumentos acima, podemos obter resultados similares para uma classe de deisgualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (4.4). A melhor constante para esta desigualdade no caso Euclideano é dada por (see [13])

$$K_{a,b} = \left(\frac{1}{(n-2a-2)(n-bp)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(2-bp+2a)\Gamma((2n-2bp)/(2-bp+2a))}{n\omega_n \Gamma^2((n-bp)/(2-bp+2a))}\right)^{\frac{2(n-bp)}{2-bp+2a}}$$

onde $n \geq 3$, a, b e p são dados em (4.5).

Teorema 4.2.7 *Sejam n, a, b, p dados em (4.5). Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci satisfazendo (4.6). Suponhamos que para qualquer $u \in C_0^\infty(M)$, temos*

$$\left(\int_M r(x)^{-bp}|u|^p dv\right)^{1/p} \leq C \left(\int_M r(x)^{-2a}|\nabla u|^2 dv\right)^{1/2} \tag{4.28}$$

para alguma constante $C \geq K_{a,b}$. Então

$$Vol[B_R(o)] \geq e^{-(n-1)b_0}(C^{-1}K_{a,b})^{n/(1+a-b)} V_0(R), \ \ \forall R > 0.$$

Corolário 4.2.8 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta. Fixe um $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Existe $b_0 = b_0(n,\delta) > 0$ tal que, se a curvatura seccional de M satisfaz*

$$K(x) \geq -G(r(x)), \int_0^{+\infty} tG(t)dt \leq b_0$$

e a desigualdade (4.28) vale em M com $C < (\frac{1}{2}+\delta)^{-\frac{1+a-b}{n}} K_{a,b}$, então M é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

Referências Bibliográficas

[1] G. A. Afrouzi, K. J. Brown, *On a diffusion logistic equation*. J. Math. Analysis and Appl. **225** (1998) 326–339.

[2] M. T. Anderson, *On the topology of complete manifolds of non-negative Ricci curvature*. Topology **29** (1990), n.o 1, 41–55.

[3] D. G. Aronson, H. F. Weinberger, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*. Advances in Math. **30** (1978) 33–76.

[4] T. Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampére equations*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] T. Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 1998.

[6] D. Bakry, T. Coulhon and M. Ledoux, *Sobolev inequalities in disguise*. Indiana J. Math. **44** (1995) 1034–1074.

[7] D. Bakry, D. Concordet, M. Ledoux, *Optimal heat kernel bounds under logarithmic Sobolev inequalities*. ESAIM: Prob. and Stat. **1** (1997) 391–407.

[8] E. Calabi, *An extension of Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry*. Duke Math. J. **25** (1957) 45–56.

[9] E. A. Carlen, M. Loss, *Sharp constant in Nash's inequality*. Internat. Math. Res. Not. **7** (1993) 213–215.

[10] I. Chavel, *Eingenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, 1984.

[11] I. Chavel, *Riemannian Geometry - A Modern Introduction*. Cambridge studies in advanced mathematics **98** (2006).

[12] J. Cheeger, T. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded from below I*. J. Diff. Geom. **46** (1997) 406–480.

[13] K. S. Chou, C. W. Chu, *On the best constants for a weighted Sobolev-Hardy inequality*. J. London Math. Soc. **48** (1993) 137–151.

[14] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory*. Cambridge University Press, 1989.

[15] M. Del Pino, J. Dolbeault, *Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions*. J. Math. Pures Appl. **81** (2002) 847–895.

[16] M. Del Pino, J. Dolbeault, *The optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality*. J. Funct. Anal. **174** (2003) 151–161.

[17] M. Do Carmo, C. Xia, *Complete manifoldas with non-negative Ricci curvature and the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*. Compositio Math. **140** (2004) 818–826.

[18] Y. Du, L. Ma, *Logistic type equations on $\mathbb{R}^n$ by a squeezing method involving boundary blow-up solutions*. J. London Math. Soc. **(2) 64 (1)** (2001) 107–124.

[19] Y. Du, L. Ma, *Positive solutions of an elliptic partial differential equation on $\mathbb{R}^n$*. J. Math. Anal. Appl. **271** (2002) 409–425.

[20] E. Gagliardo, *Proprietá di alcune classi di funzioni in più variabili*. Ric. Mat. **7** (1958) 102–137.

[21] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial differential Equations of Second Order*, second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[22] R. Greene, H. H. Wu, *Function Theory on Manifolds which possess a pole*. Lecture Notes in Math., vol. 699, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[23] E. Hebey, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*. Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, 1999.

[24] J. Kazdan, *Prescribing the Curvature of a Riemannian Manifold*. CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Vol. 57, Amer. Math. Soc. (1985).

[25] J. Kazdan, F. Warner, *Curvature functions for compact 2-manifolds*. Ann. Math. **99** (1974) 14–47.

[26] J. Kazdan, F. Warner, *Scalar Curvature and conformal deformation of Riemannian structure*. J. Differ. Geome. **10** (1975) 113–134.

[27] J. Kazdan, F. Warner, *A direct aproach to the determination of Gaussian and scalar curvature functions*. Invent. Math. **28** (1975) 227–230.

[28] M. Ledoux, *On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities*. Comm. Anal. Geom. **7** (1999) 347–353.

[29] P. Li, S. T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*. Acta Math. **156** (1986), n.o 3-4, 153–201.

[30] P. Li, *Large time behavior of the heat equation on complete manifolds with non-negative Ricci curvature*. Ann. Math. **124** (1986) 1–21.

[31] P. Li, L. F. Tam, D. Yang, *On the elliptic equation $\Delta u + ku - Ku^p$ on complete manifolds and their geometric applications*. Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998) 1045–1078.

[32] V. B. Marenich, V. T. Toponogov, *Open manifolds of non-negative Ricci curvature with rapidly increasing volume*. Sibirsk. Mat. Zh. **26** (1985), n.o 4, 191–194.

[33] V. G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*, Springer, Berlin, 1995.

[34] A. I. Nazarov, *Hardy-Sobolev inequalities in a cone*, J. Math. Sci. **132** (2006), n.o 4, 419–427.

[35] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*. Ann. Sc. Norm. Pisa. **13** (1959) 116–162.

[36] S. Pigola, M. Rigoli, A. G. Setti, *Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis*. Progress in Mathematics. **266** Birkhauser, 2008.

[37] S. Pigola, M. Rigoli, A. G. Setti, *Existence and non-existence results for a logistic-type equation on manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., em impressão, (2010).

[38] A. Ratto, M. Rigoli, L. Véron, *Scalar curvature and conformal deformations of noncompact Riemannian manifolds*. Math. Z. **225** (1997) 395–426.

[39] M. Rigoli, A. G. Setti, S. Pigola, *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications*. Mem. Amer. Math. Soc. **174** (822) (2005).

[40] M. Rigoli, S. Zamperlin, *"A priori" estimates, uniqueness and existence of positive solutions of Yamabe type equations on complete manifolds*. J. Funct. Anal. **245** (2007) 144–176.

[41] R. Schoen, S. T. Yau, *Lecture on Differential Geometry*. International Press, Cambridge, MA, 1994.

[42] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*. Ann. Mat. Pure Appl. (4) **110** (1976) 353–372.

[43] C. Xia, *Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and almost best Sobolev constant*. Illinois J. Math. **45** (2001) 1253–1259.

[44] C. Xia, *The Gagliardo-Nirenberg inequalities and manifolds of non-negative Ricci curvature.* J. Funct. Anal. **224** (2005) 230–241.

[45] C. Xia, *The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inqualities on complete manifolds*. Math. Res. Lett. **14** (2007), n.o 5, 875–885.

[46] H. Yamabe, *On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds.* Osaka math. J. **12** (1960) 21–37.

[47] S. H. Zhu, *A volume comparison theorem for manifolds with asymptotically non-negative curvature and its applications*. Amer. J. Math. **116** (1994) 669–682.