UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Soluções Tipo Blow-Up para Equações Elípticas Quasilineares com Termo Semilinear Satisfazendo a Condição de Keller-Osserman

por

Jiazheng Zhou

Brasília
2010

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Soluções Tipo Blow-Up para Equações Elípticas Quasilineares com Termo Semilinear Satisfazendo a Condição de Keller-Osserman

por

Jiazheng Zhou*

Orientador: Prof. José Valdo Abreu Gonçalves

*O autor contou com o apoio financeiro parcial do CAPES e do CNPq.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Soluções Tipo Blow-Up para Equações Elípticas Quasilineares com Termo Semilinear Satisfazendo a Condição de Keller-Osserman

por

Jiazheng Zhou

Tese de Doutorado submetida ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de **Doutor em Matemática**.

Brasília, 23 de abril de 2010

Banca Examinadora:

Prof. José Valdo Abreu Gonçalves - UFG
(Orientador)

Prof. Carlos Alberto Pereira dos Santos - UnB

Prof. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa - UFCG

Prof. Olimpio Hiroshi Miyagaki - UFV

Prof. Paulo César Carrião - UFMG

À minha família.

AGRADECIMENTO

Agradeço a Deus, por permitir mais esta conquista e por me iluminar a cada dia;

A meu orientador, Professor José Valdo Gonçalves pela orientação e principalmente pela paciência durante a realização deste trabalho;

A minha família: minha esposa e minha filha;

Aos meus avós, meus pais e meu tio Detang Zhou;

Aos meus amigos da igreja: o Claúdio, o Sérgio e a Marli.

Aos meus amigos e colegas da UnB: o Anderson, a Letícia, o Ricardo e a Manuela etc.

Aos membros da comissão examinadora por aceitarem compor a banca e por suas sugestões;

A professor Paulo César de Resende Andrade, o diretor do ICT da UFVJM;

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, pela atenção, colaboração e harmonioso convívio;

A CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudamos existência de soluções C^1 (no sentido das distribuições) para problemas do tipo

$$\begin{cases} \Delta_p u = F(x,u) + \lambda V(x,u)|\nabla u|^\sigma \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \quad u(x) \overset{x \to \partial\Omega}{\to} \infty, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um domínio (possivelmente não limitado), $1 < p < \infty$, $\mathbb{N} \geq 3$, $0 \leq \sigma \leq p$, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $F, V : \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ são contínuas. Lembramos que $x \to \partial\Omega$ significa $d(x, \partial\Omega) \to 0$.

Estudamos os seguintes casos:
(i) $\lambda = 0$, $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
(ii) $\lambda < 0$, $V(x,u) = V(x) \geq 0$, $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
(iii) $\lambda > 0$, $V(x,u) = V(u) \geq 0$, Ω limitado regular.

Em nossos resultados exigimos somente continuidade em F e V enquanto que em artigos recentes é exigido que F, V sejam C^1 em u, Höder-contínuas em x e também F, V monótonas em u.

Utilizamos Técnicas de Sub e Supersolução, Simetria, Pontos Fixos e Argumentos Variacionais. (Minimização).

Palavras-chaves: Problemas Quasilineares, Soluções tipo "Blow-Up", Sub e Supersolução, Pontos Fixos, Convecção.

ABSTRACT

In this work we study existence of distribuition C^1-solutions for the problem

$$\begin{cases} \Delta_p u = F(x,u) + \lambda V(x,u)|\nabla u|^\sigma \ \text{ in } \Omega, \\ \\ \quad u \geq 0 \ \text{ in } \Omega, \quad u(x) \overset{x \to \partial\Omega}{\to} \infty, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is a, possibly unbounded domain, $1 < p < \infty$, $\mathbb{N} \geq 3$, $0 \leq \sigma \leq p$, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $F, V : \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ are continuous. We recall that $x \to \partial\Omega$ means $d(x,\partial\Omega) \to 0$.

We study the following cases:
(i) $\lambda = 0$, $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
(ii) $\lambda < 0$, $V(x,u) = V(x) \geq 0$, $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
(iii) $\lambda > 0$, $V(x,u) = V(u) \geq 0$, Ω limited regular.

In our results we require only continuity on F and V while in recent papers it is required that $F,\ V$ are C^1 in u, Höder-continuous in x with $F,\ V$ monotone in u.

We use the technique of Sub and Super solutions, Symmetry, Fixed Points and Variational arguments. (Minimization).

Key Words: Quasilinear Problems, "Blow-up" solutions, Sub and Super Solutions, Fixed Points, Convection.

SUMÁRIO

Introdução **ix**

1 Resultados Preliminares **1**

1.1 Problemas de Contorno em Domínios Limitados 1

1.2 Simetria Radial: Problemas Tipo Blow-Up em Bolas 7

2 Problemas sem Termo Convectivo **12**

2.1 Soluções Positivas, Domínios Limitados 12

2.2 Subsoluções 17

2.3 Demonstração do Resultado Principal 27

3 Problemas com Termo Convectivo **30**

3.1 Subsoluções no Caso de Coeficiente Negativo do Termo Convectivo 30

3.2 Resultado Príncipal no Caso de Coeficiente Negativo do Termo Convectivo 40

3.3 Subsoluções no Caso de Coeficiente Positivo do Termo Convectivo 41

3.4 Resultado Príncipal no Caso de Coeficiente Positivo do Termo Convectivo . 54

A Sub e Supersoluções, Princípio de Comparação, C^1-regularidade **57**

A.1 Sub e Supersoluções 57

A.2 Princípio de Comparação 60

A.3 C^1-regularidade 62

B Soluções Tipo Ground State **64**

Referências Bibliográficas **67**

Introdução

Neste trabalho investigamos a existência de soluções para problemas quasilineares do tipo

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_p u = F(x,u) + \lambda V(x,u)|\nabla u|^{\sigma} \quad \text{em } \Omega, \\ \\ \qquad u \geq 0 \text{ em } \Omega,\ u(x) \overset{x\to\partial\Omega}{\longrightarrow} \infty, \end{array}\right. \tag{0.0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $1 < p < \infty$, $\mathbb{N} \geq 3$, $0 \leq \sigma \leq p$, $\Delta_p u := div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, λ é um parâmetro real, $F,\ V : \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ são contínuas, $x \to \partial\Omega$ significa que $dist(x,\partial\Omega) \to 0$.

A norma euclidiana do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ será denotada por $|\cdot|$ e introduziremos as funções M_a e M_b, definida para $r \geq 0$, por

$$M_a(r) := \max_{|x|=r} a(x),\ \ M_b(r) := \max_{|x|=r} b(x).$$

Agora, definimos as condições de *Keller-Osserman e* c_Ω*-positiva.*

Uma função $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfaz a condição de Keller-Osserman se

$$\int_{\delta}^{\infty} H(t)^{-\frac{1}{p}}dt < \infty \text{ para algum } \delta > 0,\ \text{onde } H(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

Dado Ω um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, (cf. [22] e Lair & Mohammed [23]) dizemos que uma função $\mu : \Omega \to [0,\infty)$ é c_Ω-positiva se,

$$\mu(x_0) = 0 \text{ para algum } x_0 \in \Omega, \text{ então existe um domínio } \Theta \subset\subset \Omega \text{ tal que}$$

$$x_0 \in \Theta \text{ e } \mu(x) > 0 \text{ para } x \in \partial\Theta.$$

Apresentaremos, a seguir, vários resultados relacionados com os objetivos deste trabalho.

Em 1916, Bieberbach estudou em [2] o problema

$$\begin{cases} \Delta u &= & e^u & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x) & \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} & \infty, & \end{cases} \tag{0.0.2}$$

onde Ω é um domínio limitado com $\partial\Omega$ regular, $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$. Foi provado em [2] que o problema (0.0.2) possui uma única solução clássica.

Em 1943, Rademacher estendeu em [36] o resultado de [2] para domínios limitados em $\mathbb{R}^3$.

Em 1957, Keller em [20] e Osserman em [34] estabeleceram a condição necessária e suficiente(condição de Keller-Osserman) sobre f para a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u &= & f(u) & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ u(x) & \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} & \infty, & \end{cases} \tag{0.0.3}$$

onde Ω é domínio limitado.

Em 1982, Ni considerou a seguinte questão da geometria em [33]:

Se (M, g) é uma variedade Riemaniana de dimensão $\mathbb{N} \geq 3$, K é uma função definida em M, podemos definir uma nova métrica g_1 em M tal que K é uma curvatura escalar de g_1 e g_1 é conformal com g (isto é $g_1 = u^{\frac{4}{N-2}} g$ para $u > 0$ em M)?

Esse problema é equivalente ao problema de encontrar solução positiva de

$$\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta_g u - ku + Ku^{\frac{N+2}{N-2}} = 0,$$

onde k é curvatura escalar de (M, g), Δ_g é operador de Laplace-Beltrami.
Se $M = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $K \leq 0$, então $k = 0$ e $\Delta_g = \Delta$ o operador Laplaciano usual, a equação acima fica

$$\Delta u = \tilde{K}(x) u^{\frac{N+2}{N-2}}, \tag{0.0.4}$$

onde

$$\tilde{K}(x) = -\frac{N-2}{4(N-1)} K(x).$$

Ni provou em [33] que a equação (0.0.4) possui uma solução inteira.

Em 1988, Iscoe, motivado pela questão da teoria de controle estocástico, estudou em [19] o problema

$$\begin{cases} \Delta u = u^{\alpha} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ u > 0 \ \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ u(x) \overset{d(x) \to 0}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{0.0.5}$$

Ele provou que (0.0.5) possui uma solução, onde Ω é domínio limitado e $\alpha > 1$.

Em 1992, Cheng & Ni consideram em [7] o problema

$$\begin{cases} \Delta u = a(x) u^{\alpha} \quad \Omega \text{ ou } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ u > 0 \quad \Omega \text{ ou } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ u(x) \overset{d(x) \to 0}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{0.0.6}$$

onde $\alpha > 1$ e a é uma função suave não negativa. Se Ω é um domínio limitado, $a > 0$ em $\partial\Omega$, eles provaram que (0.0.6) possui uma solução. Se $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e existe $\gamma > 2$ tal que $|x|^{\gamma} a(x)$ é limitado para $|x|$ grande, então (0.0.6) possui uma única solução positiva. No caso $d(x) \to 0$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ significa $|x| \to \infty$.

Em 1999, Lair & Wood provaram em [24] a existência de soluções do problema (0.0.6), onde $\alpha > 1$, a é uma função não negativa e c_{Ω}-positiva satisfazendo

$$\int_0^{\infty} r M_a(r) dr < \infty. \tag{0.0.7}$$

Lair também provou em [22] a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)f(u) \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ u > 0 \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{0.0.8}$$

onde a é c_Ω-positiva satisfazendo (0.0.7) e f é não decrescente satisfazendo a condição de Keller-Osserman. A não existência de soluções foi provada em [24] e [22], se a satisfaz

$$\int_0^\infty rM_a(r)dr = \infty.$$

Em 2006, Gonçalves & Roncalli, provaram em [14] a existência de soluções positivas de (0.0.8). As condições de a e f são

$$a \in C^{0,\nu}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \ \nu \in (0,1), \ a > 0,$$

$$f \in C^1([0,\infty)), \ f(t) > 0, \ t > 0, \ f(0) = 0,$$
$$0 < \liminf_{|x|\to\infty} \frac{a(x)}{|x|^\alpha} \leq \limsup_{|x|\to\infty} \frac{a(x)}{|x|^\alpha} < \infty, \quad \alpha < -2\gamma_1,$$

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{\gamma_1}} \leq \infty, \ 0 < \sup_{t>0} \frac{f(t)}{t^{\gamma_2}} < \infty, \ 1 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty. \tag{0.0.9}$$

Observando que neste trabalho não precisaram de monotonicidade de f, também podemos observar que a condição de a acima implica a (0.0.7) e que a condição de f acima implica a condição de Keller-Osserman.

Em 2007, Lair; Proano & Wood provaram em [26] a existência de soluções positivas de (0.0.8), colocando a seguinte condição no lugar da monotonicidade de f,

$$g_1 \leq f \leq g_2,$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas não decrescente e g_1 satisfaz a condição de Keller-Osserman.

Vários autores trabalharam com operador p-Laplaciano. Por exemplo, em 2007, Yang; Xu & Wu provaram em [40] a existência de soluções positivas do problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f(u) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ u > 0 \ \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ u(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{0.0.10}$$

onde Ω é domínio limitado, a é uma função positiva Höder-contínua e f é uma função localmente Höder-contínua em $(0, \infty)$. Se f satisfaz (0.0.9) com $p - 1 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty$ e a satisfaz

$$C_1 d(x)^{\alpha_1} \leq a(x) \leq C_2 d(x)^{\alpha_2}, \ x \in \Omega, \ C_1, \ C_2 > 0 \text{ e } \alpha_1 \geq \alpha_2 > -p. \tag{0.0.11}$$

Então (0.0.10) possui uma solução u satisfazendo

$$D_1 d(x)^{-\beta_1} \leq u(x) \leq D_2 d(x)^{-\beta_2} \ \text{ em } \Omega,$$

onde

$$\beta_1 = \frac{p + \alpha_2}{\gamma_1 - p + 1}, \qquad \beta_2 = \frac{p + \alpha_1}{\gamma_2 - p + 1},$$

e D_1, D_2 são constantes positivas.

Em 1992, Brézis & Kamin [3], provaram a existência de soluções limitadas para uma classe de equações semilineares do tipo

$$-\Delta U = a(x) U^{\alpha}, \ \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \mathbb{N} \geq 3$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $a \geq 0$, dependendo da existência de uma solução limitada para a equação correspondente à

$$-\Delta V = a(x) \ \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

No entanto, para a classe de problemas do tipo (0.0.1), com $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\lambda = 0$, $F(x, u) = a(x)f(u) + b(x)g(u)$, isto é,

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f(u) + b(x)g(u) \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} \infty, \end{cases} \tag{0.0.12}$$

onde $a, b : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty)$ são contínuas e $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são contínuas, $f(0) = g(0) = 0$, já existe uma teoria ampla e importante na literatura para o caso $p = 2$.

Consideremos também o problema de ground states

$$\begin{cases} -\Delta_p v = a(x) + b(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ v > 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{0.0.13}$$

onde $a, b : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty)$ são contínuas.

Observamos que existem muitos resultados sobre a existência de ground states para equações não lineares. Por exemplo Gonçalves & Santos em [17], Gonçalves & Silva em [15] e suas referencias.

Retornando para (0.0.12) Mohammed, em [32], supondo no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um domínio limitado, $g = 0$ e f é uma função não decrescente satisfazendo a condição de Keller-Osserman, então (0.0.12) possui uma solução $u \in C^1(\Omega)$ se (0.0.13) possui uma solução $v \in C^1(\Omega)$.

Analisando o caso $p = 2$, em [41], Dong & Zhou consideraram o problema (0.0.12) no caso $p = 2$, $g = 0$ e f é uma função não decrescente e positiva em $(0, \infty)$ satisfazendo a condição de Keller-Osserman, então (0.0.12) possui uma solução $u \in C^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ se (0.0.13) possui uma solução $v \in C^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Veja o Teorema 4.1 em [41].

Em 2008, Lair em [21] considerou o problema (0.0.12) no caso $p = 2$, $f(u) = u^\alpha$ e $g(u) = u^\beta$, onde $0 < \alpha \leq 1 < \beta$, então o problema (0.0.12) possui uma solução se valerem

$$\int_0^\infty r M_a(r) dr = \infty$$

e

$$\int_0^\infty r i(r) dr < \infty,$$

onde

$$i(r) = M_b(r) \exp\{\frac{\beta - 1}{N - 2} \int_0^r s M_a(s) ds\}.$$

Em 2009, Lair e Mohammed em [23], consideraram o problema (0.0.12) no caso $p = 2$. Foi provado em [23] que o problema (0.0.12) possui uma solução $u \in C^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ se valerem

- f e g são funções $C^1((0,\infty),[0,\infty))$ não decrescente, $f(0)=0=g(0),\ f(s)g(s)>0$ para $s>0$;

- $f+g$ satisfaz a condição de Keller-Osserman;

- o problema (0.0.13) possui uma solução $v\in C^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Antes de enunciar o nosso primeiro resultado principal, definimos: $v\in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ é uma supersolução de (0.0.13) se,

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\phi dx \geq \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}[a(x)+b(x)]\phi dx, \\ \\ \qquad v>0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad v(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0, \end{cases} \tag{0.0.14}$$

para todo $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}),\ \phi\geq 0$.

Teorema 0.1. *Suponhamos que a função $\mu:=\mu_{a,b}$ dada por $\mu(x):=\min\{a(x),b(x)\}$ é c_{B_n}-positiva para cada $n>1$ inteiro, onde $B_n\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é a bola com raio n e centrada na origem. Se além disso, $f,g\in C([0,\infty)),\ f(0)=g(0)=0$ e existe uma função contínua $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$, não decrescente tal que $f+g\geq h$, h satisfazendo a condição de Keller-Osserman, então (0.0.12) possui uma C^1-solução (no sentido das distribuições) se (0.0.13) possui uma C^1-supersolução.*

Observação 0.1. **(a)** Não exigimos monotonicidade nem em f e nem em g, enquanto que do problema (0.0.13) só exigimos uma supersolução.

(b) Fazendo $f(t)=t^\alpha$ e $g(t)=t^\beta(2+\sin t)$ onde $\max\{\alpha,\beta\}>p-1$, temos um exemplo coberto pelo **Teorema 0.1** que não é coberto por resultados anteriores.

No nosso problema (0.0.1), façamos $\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F(x,u)=a(x)f(u)$, $\lambda=-1$, $V(x,u)=V(x)$ e $\sigma=p$, então (0.0.1) se escreve como

$$\begin{cases} \Delta_p u + V(x)|\nabla u|^p = a(x)f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ u \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{0.0.15}$$

onde $a, V : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty),\ f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são funções contínuas e $f(0) = 0$.

Em 1999, Lair & Wood provaram em [25] a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u + |\nabla u|^q = a(x)u^\alpha \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{0.0.16}$$

onde $q > 0,\ \alpha > \max\{1, q\}$ e $a \geq 0$ é c_Ω-positiva satisfazendo (0.0.7).

Em 2005, Zhang provou em [42] a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda|\nabla u|^q = a(x)f(u), \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0,\ \text{em } \Omega,\ u(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{0.0.17}$$

onde $\lambda \geq 0,\ q \in [0, 1],\ a \geq 0$ é Hölder-contínua não trivial, $f \in C^1([0, \infty)),\ f(0) = 0$, $f'(t) > 0$ e vale

$$f(\delta s) \leq \delta f(s), \quad \forall s \geq 0 \text{ e algum } \delta \in (0, 1).$$

Então a solução $u_\lambda \in C^2(\Omega)$ satisfaz

$$\frac{u_\lambda(x)}{\tau(d(x)^\mu)} \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} d_0,$$

onde μ e d_0 são constantes positivas e τ é definida por

$$\int_{\tau(s)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2F(t)}} = s, \quad s > 0.$$

Em 2006, Zhang provou em [43] a existência de soluções positivas blow-up de (0.0.17), onde a satisfaz (0.0.11) com $f \in C^1([0, \infty))$ é não decrescente satisfazendo (0.0.9) e $0 \leq q \leq \min\{\gamma_1, \frac{2\gamma_1+\alpha_1}{\gamma_1+\alpha_1+1}\}$.

Em 2008, Liu & Yang genenalizaram (0.0.17) do [43] em [30] para o problema de operador p-Laplaciano. As hipóteses são semelhantes.

Antes de enunciar nosso segundo resultado principal, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w = a(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ w > 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{0.0.18}$$

Para resolver (0.0.15), ultilizaremos as condições abaixo em f:

existem constantes $\gamma_1, \ \gamma_2, \ C_1$ e C_2 *positivas tais que*

$$f(t) \geq C_1 t^{\gamma_1} \text{ e } f(t) \leq C_2 t^{\gamma_2}, \quad \text{para } t \text{ grande.} \tag{0.0.19}$$

O segundo de nossos resultados principais segue abaixo.

Teorema 0.2. *Seja* $2 \leq p < \infty$. *Suponhamos* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *é uma função contínua tal que* $f(0) = 0$ *satisfazendo (0.0.19) para* $\gamma_2 \geq \gamma_1 \geq p$, a *é* c_{B_n}*-positivo para cada* $n > 1$ *inteiro, onde* $B_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *é a bola com raio* n *e centro na origem e* $a, V : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty)$ *são funções contínuas. Se (0.0.18) possui uma supersolução* $w \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, *então (0.0.15) possui uma solução* $u \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Observação 0.2. **(a)** Provaremos no Apêndice B.1 que se a função a satisfazer

$$\int_0^\infty (r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} M_a(t) dt)^{\frac{1}{p-1}} dr < \infty, \tag{0.0.20}$$

então (0.0.18) possui uma solução $w \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.
Note que w é uma supersolução do (0.0.18).

Quanto ao caso $\lambda > 0$, considerando o problema (0.0.1) com $F(x, u) = a(x) f(u)$, $V(x, u) = g(u)$, isto é,

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x) f(u) + \lambda g(u) |\nabla u|^\sigma \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \Omega, \ u(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{0.0.21}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um domínio limitado, $1 < p < \mathbb{N},\ \sigma \in [0, p]$, $a : \bar{\Omega} \to [0, \infty)$ é uma função contínua, $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é contínua, $f(0) = g(0) = 0$.

Recentemente, Gonçalves & Silva em [16] trabalharam com existência de soluções tipo ground state para problemas com termo convectivo.

Enfatizamos que nosso interesse é sobre problemas tipo blow-up.

Em 1989, Lasry & Lions, motivados por questões na teoria de controle estocástico estudaram em [29] o problema

$$\begin{cases} \Delta u = au + |\nabla u|^{\sigma} + \psi(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \Omega,\ u(x) \overset{d(x)\to 0}{\to} \infty, \end{cases} \tag{0.0.22}$$

onde $a > 0$, $1 < \sigma < \infty$ são constantes e ψ é uma função suave. Eles provaram o problema (0.0.22) possui uma solução em $C^2(\Omega)$.

Em 1999, Lair & Wood provaram em [25] a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^{\alpha} + |\nabla u|^{\sigma} \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u(x) \overset{|x|\to \infty}{\to} \infty, \end{cases} \tag{0.0.23}$$

onde $\alpha > 1$ e as condições
(i) existem $\beta,\ M$ e R constantes tais que

$$0 \leq a(x) \leq Mr^{-2-\beta}, \quad r = |x| > R,$$

$$\text{se } \sigma \geq 1,\ \max\{\alpha, \sigma\} > 2; \text{ se } \sigma \in (0, 1),\ \alpha \leq 1 + \frac{\beta(1-\sigma)}{2-\sigma}.$$

Em 2000, Giarrusso estudou em [12] a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) + |\nabla u|^{\sigma} \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \Omega,\ u(x) \overset{d(x)\to 0}{\to} \infty, \end{cases} \tag{0.0.24}$$

onde $1 < \sigma < 2$, f é uma função contínua positiva crescente satisfazendo a condição Keller-Osserman.

Em 2005, Zhang provou em [42] a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)f(u) + \lambda|\nabla u|^{\sigma} \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \Omega, \ u(x) \overset{d(x)\to 0}{\to} \infty, \end{cases} \tag{0.0.25}$$

onde $\lambda \geq 0$, $\sigma \in [1,2]$, $a \geq 0$ é Hölder-contínua não trivial, $f \in C^1([0,\infty))$, $f(0) = 0$ é crescente satisfazendo

$$f(\delta s) \leq \delta f(s), \ \forall s \geq 0 \text{ e algum } \delta \in (0,1)$$

e a solução u_λ satisfaz

$$\frac{u_{\lambda(x)}}{\tau(d(x)^{\mu})} \overset{d(x)\to 0}{\to} d_0$$

onde μ e d_0 são constantes positivas e τ é definida por

$$\int_{\tau(s)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2F(t)}} = s, \ s > 0.$$

Em 2006, Gonçalves & Roncalli estudaram em [13] o problema

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)f(u) + \lambda u^q|\nabla u|^{\sigma} \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \Omega, \ u(x) \overset{d(x)\to 0}{\to} \infty, \end{cases} \tag{0.0.26}$$

onde $a \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, $a > 0$, $q \in [0,\infty)$, $\sigma \in [0,2]$, $f \in C^{0,\alpha}_{loc}([0,\infty))$ é crescente, $f(0) = 0$ satisfazendo a condição Keller-Osserman, λ é um parâmetro. Eles provaram que o problema acima tem uma solução $u \in C^2(\Omega)$.

Em 2006, Zhang provou em [43] a existência de soluções positivas blow-up do problema (0.0.25) onde a satisfaz (0.0.11) ($p = 2$), $f \in C^1([0,\infty))$ é não decrescente satisfazendo (0.0.9) e $1 < \sigma \leq \frac{2\beta+\gamma_1}{\beta+\gamma_1+1}$.

Em 2008, Liu & Yang genenalizaram o problema (0.0.25) do [43] em [30] para o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f(u) + \lambda|\nabla u|^{\sigma(p-1)} \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \; u(x) \overset{d(x)\to 0}{\to} \infty. \end{cases} \tag{0.0.27}$$

As hipóteses são semelhantes.

A seguir apresentaremos o terceiro de nossos resultados principais, que melhora os teoremas em [43], [30], [12] e [13] no sentido de que exigimos somente continuidade em f e a função a pode se anular em pontos de Ω.

Teorema 0.3. *Suponhamos que $a : \bar{\Omega} \to [0, \infty)$ é uma função contínua e c_Ω-positivo; $f, g \in C([0, \infty))$, $f(0) = g(0) = 0$ e existe uma função $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ contínua e não decrescente satisfazendo a condição de Keller-Osserman tal que $f \geq h$. Sejam $1 < p < \mathbb{N}$, $R := \sup_{x \in \Omega} |x|$. Então existe $\Lambda_R > 0$ tal que $\Lambda_R \overset{R\to 0}{\to} \infty$, $\Lambda_R \overset{R\to\infty}{\to} 0$ e o problema (0.0.21) possui uma solução $u \in C^1(\Omega)$ para cada $\lambda \in [0, \Lambda_R]$.*

Observação 0.3. **(a)** Durante da demonstração veremos que

$$\Lambda_R = (2\beta R)^{-\frac{p}{p-1}},$$

onde β é uma constante positiva.

(b) Nosso Teorema 0.3 melhora o resultado de Gonçalves e Roncalli [13] para o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f(u) + \lambda u^q |\nabla u|^{\sigma} \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \Omega, \; u(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{0.0.28}$$

onde $q \in [0, \infty)$, a, f e σ são dados.

Exemplo: tomamos $p = 2$, $f(t) = t^\alpha(2 + \sin u)$, $g(t) = t^\beta$ e $\sigma = 2$ em (0.0.21), temos um problema como

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^{\alpha}(2+\sin u) + \lambda u^{\beta}|\nabla u|^2 \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } \Omega, \ u(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{0.0.29}$$

onde $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Pelo **Teorema 0.3**, existe $\Lambda_R > 0$ tal que $\Lambda_R \overset{R\to 0}{\to} \infty$, $\Lambda_R \overset{R\to\infty}{\to} 0$ e o problema (0.0.29) possui uma solução $u \in C^1(\Omega)$ para cada $\lambda \in [0, \Lambda_R]$.

Esta tese encontra-se organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 1 provaremos um resultado devido Diaz [10] para a existência das soluções do problema do tipo

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f_1(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u(x) = k \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.30}$$

onde k é uma constante. As funções a, f_1 satisfazem as condições apropriadas.

Também provaremos a existência de solução radialmente simétrica de problemas do tipo

$$\begin{cases} \Delta_p u = h(u) \quad \text{em } B, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } B, \ u(x) \overset{x\to\partial B}{\to} \infty, \end{cases} \tag{0.0.31}$$

onde $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma bola e h é uma função dada.

No Capítulo 2 verificaremos o nosso primeiro resultado, isto é, o **Teorema 0.1**.

No Capítulo 3 provaremos os nossos segundo e terceiro resultado, isto é, o **Teorema 0.2** e o **Teorema 0.3**.

No Apêndice A apresentaremos as demonstrações de Teoremas de sub e supersoluções, Príncipio de comparação e C^1-regularidade para soluções fracas, utilizados nesta tese.

Enfim, no Apêndice B apresentaremos um resultado técnico.

CAPÍTULO 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, formulamos e demonstramos resultados sobre existência de problemas quasilineares.

1.1 Problemas de Contorno em Domínios Limitados

Geralmente, trabalhamos primeiro com problemas de contorno em domínios limitados, depois tomamos o limite do valor da fronteira, conseguiremos resolver os problemas do tipo blow-up.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x) f_1(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad u = k \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

onde

$\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular,

$\mathbb{N} \geq 3$, $p > 1$, k é uma constante,

$a : \bar{\Omega} \to [0, \infty)$ é contínua,

$f_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ é contínua não decrescente.

O Teorema seguinte é fundamental para nosso trabalho e o caso mais geral pode ser encontrado em Diaz [10].

Teorema 1.1. *Sob as hipóteses acima, o problema (1.1.1) possui uma solução* $u \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$*, onde* $0 < \nu < 1$.

Em primeiro lugar, vamos provar a existência de soluções de problema do tipo

$$\begin{cases} \Delta_p \varsigma = a(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \\ \varsigma = k \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Definimos o conjunto

$$K = \{\varsigma \in L^1(\Omega) : (\varsigma - k) \in W_0^{1,p}(\Omega)\} \tag{1.1.3}$$

e um funcional

$$J(\varsigma) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla \varsigma|^p dx + \int_\Omega a(x) \varsigma dx. \tag{1.1.4}$$

O lema seguinte é usado para provar **Teorema** 1.1.

Lema 1.1. *Suponhamos que* $a : \bar{\Omega} \to [0, \infty)$ *é contínua, então existe uma função* $\varsigma_0 \in K$ *tal que*

$$J(\varsigma_0) = \min_K J.$$

Além disso,

$$\int_\Omega |\nabla \varsigma_0|^{p-2} \nabla \varsigma_0 \nabla \phi dx + \int_\Omega a(x) \phi dx = 0, \quad \forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Demonstração. se $\varsigma \in K$, temos

$$\begin{array}{rcl} ||\varsigma||_{L^p} & = & ||\varsigma - k + k||_{L^p} \\ & \leq & ||\varsigma - k||_{L^p} + ||k||_{L^p}. \end{array}$$

Como $\varsigma - k \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$||\varsigma||_{L^p} \leq C||\nabla\varsigma||_{L^p} + ||k||_{L^p}. \tag{1.1.5}$$

Por (1.1.5) temos

$$\begin{aligned} J(\varsigma) &= \tfrac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varsigma|^p dx + \int_\Omega a(x)\varsigma dx \\ &\geq \tfrac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varsigma|^p - ||a||_{L^q}||\varsigma||_{L^p}, \text{ onde } \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1, \\ &\geq \tfrac{1}{p}||\nabla\varsigma||^p_{L^p} - ||a||_{L^q}(C||\nabla\varsigma||_{L^p} + ||k||_{L^p}), \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

donde J é limitado inferiormente em K.

Seja

$$I_0 = \inf_K J > -\infty.$$

Tomamos $\{\varsigma_n\} \subset K$ uma sequencia minimizante, isto é

$$J(\varsigma_n) \to I_0.$$

Segue que $J(\varsigma_n)$ é limitada.

Por (1.1.5) temos

$$||\varsigma_n||_{L^p} \leq C||\nabla\varsigma_n||_{L^p} + ||k||_{L^p}.$$

Por (1.1.6) temos

$$J(\varsigma_n) \geq \frac{1}{p}||\nabla\varsigma||^p_{L^p} - ||a||_{L^q}(C||\nabla\varsigma||_{L^p} + ||k||_{L^p}).$$

Então $||\nabla\varsigma_n||_{L^p}$ e $||\varsigma_n||_{L^p}$ são limitadas.

Assim,

$$||\varsigma_n||_{1,p} = ||\varsigma_n||_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} ||\frac{\partial\varsigma_n}{\partial x_i}||_{L^p}$$

é limitada e

$$\varsigma_n \rightharpoonup \varsigma_0 \ \text{ em } W^{1,p}(\Omega). \tag{1.1.7}$$

Consequentemente,

$$\varsigma_0 \in K.$$

Por (1.1.7) e o fato

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega),$$

temos

$$\varsigma_n \longrightarrow \varsigma_0 \text{ em } L^p(\Omega).$$

Agora,

$$||\nabla\varsigma_0||_{L^p} \leq \liminf_{n\to\infty} ||\nabla\varsigma_n||_{L^p};$$

$$\int_\Omega a(x)\varsigma_0 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega a(x)\varsigma_n dx.$$

Logo

$$\begin{aligned} J(\varsigma_0) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varsigma_0|^p dx + \int_\Omega a(x)\varsigma_0 dx \\ &\leq \frac{1}{p}\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla\varsigma_n|^p dx + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x)\varsigma_n dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} J(\varsigma_n), \end{aligned}$$

donde

$$J(\varsigma_0) = \min_K J.$$

Dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e tome $t > 0$, como $\varsigma_0 \in K$, daí

$$\varsigma_0 + t\phi \in K.$$

Assim,

$$J(\varsigma_0 + t\phi) \geq J(\varsigma_0).$$

Temos

$$\frac{J(\varsigma_0 + t\phi) - J(\varsigma_0)}{t} \geq 0,$$

isto é

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla(\varsigma_0 + t\phi)|^p - |\nabla\varsigma_0|^p}{t} dx + \int_\Omega \frac{a(x)(\varsigma_0 + t\phi) - a(x)\varsigma_0}{t} dx \geq 0,$$

donde

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla(\varsigma_0 + t\phi)|^p - |\nabla\varsigma_0|^p}{t} dx + \int_\Omega a(x)\phi dx \geq 0.$$

Afirmação:

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla(\varsigma_0 + t\phi)|^p - |\nabla\varsigma_0|^p}{t} dx \overset{t\to 0}{\to} \int_\Omega |\nabla\varsigma_0|^{p-2}\nabla\varsigma_0\nabla\phi dx.$$

Suponha provada a afirmação temos

$$\int_\Omega |\nabla\varsigma_0|^{p-2}\nabla\varsigma_0\nabla\phi dx + \int_\Omega a(x)\phi dx \geq 0. \tag{1.1.8}$$

Substuindo ϕ por $-\phi$ em (1.1.8) temos

$$\int_\Omega |\nabla\varsigma_0|^{p-2}\nabla\varsigma_0\nabla\phi dx + \int_\Omega a(x)\phi dx \leq 0. \tag{1.1.9}$$

Por (1.1.8) e (1.1.9) temos

$$\int_\Omega |\nabla\varsigma_0|^{p-2}\nabla\varsigma_0\nabla\phi dx + \int_\Omega a(x)\phi dx = 0.$$

Verificação da afirmação. Define

$$G(t,x) = \frac{1}{p}|\nabla(\varsigma_0 + t\phi)|^p,$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla(\varsigma_0+t\phi)|^p-|\nabla\varsigma_0|^p}{t}dx &= \int_\Omega \frac{G(t,x)-G(0,x)}{t}dx\\
&= \int_\Omega G'(\theta_t,x)dx,\ 0<\theta_t<t,\\
&= \int_\Omega |\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)|^{p-2}\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)\nabla\phi dx.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
||\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)|^{p-2}\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)\nabla\phi| &= |\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)|^{p-1}|\nabla\phi|\\
&\leq 2^{p-1}(|\nabla\varsigma_0|^{p-1}+|\theta_t\nabla\phi|^{p-1})|\nabla\phi|\\
&= 2^{p-1}|\nabla\varsigma_0|^{p-1}|\nabla\phi|+2^{p-1}\theta_t^{p-1}|\nabla\phi|^p
\end{aligned}$$

Note que $|\nabla\varsigma_0|^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ pois

$$\int_\Omega(|\nabla\varsigma_0|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dx=\int_\Omega|\nabla\varsigma_0|^p dx<\infty.$$

Por Hölder temos

$$\int_\Omega|\nabla\varsigma_0|^{p-1}|\nabla\phi|dx\leq(\int_\Omega|\nabla\varsigma_0|^p)^{\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega|\nabla\phi|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

donde

$$2^{p-1}|\nabla\varsigma_0|^{p-1}|\nabla\phi|+2^{p-1}\theta_t^{p-1}|\nabla\phi|^p\in L^1(\Omega).$$

Note que $\theta_t\to 0$, quando $t\to 0$.

Assim temos

$$|\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)|^{p-2}\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)\nabla\phi\overset{qtp}{\to}|\nabla\varsigma_0|^{p-2}\nabla\varsigma_0\nabla\phi,\ \text{quando } t\to 0.$$

Pelo Teorema de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla(\varsigma_0+t\phi)|^p-|\nabla\varsigma_0|^p}{t}dx &= \int_\Omega \lim_{t\to 0}|\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)|^{p-2}\nabla(\varsigma_0+\theta_t\phi)\nabla\phi dx\\
&= \int_\Omega \nabla\varsigma_0|^{p-2}\nabla\varsigma_0\nabla\phi dx.
\end{aligned}$$

□

Demonstração do Teorema 1.1. Pelo **Lema** 1.1, existe uma solução para o problema

$$\begin{cases} \Delta_p \psi = a(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \\ \psi = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1.10}$$

e pelo Príncipio de Comparação (cf. **Teorema A.2**), temos $\psi \leq 0$ em Ω.
Tomando $\kappa > [f_1(0)]^{\frac{1}{p-1}}$ e temos

$$\Delta_p(\kappa\psi) = (\kappa)^{p-1}\Delta_p\psi \geq a(x)f_1(0) \geq a(x)f_1(\kappa\psi),$$

isto é $\kappa\psi$ é uma subsolução do (1.1.1).

Note que $\Psi := k$ é uma supersolução do (1.1.1), além disso, $\kappa\psi \leq \Psi$ em Ω. Então pelo método de sub e supersolução (cf. **Teorema A.1**) e Teorema de regularidade (cf. **Teorema A.3**) temos uma função $u \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$ que é solução do (1.1.1).

□

1.2 Simetria Radial: Problemas Tipo Blow-Up em Bolas

Para resolver nossos problemas, vamos resolver os problemas tipo blow-up numa bola limitada, depois tomamos o limite do raio da bola.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = h(u) \quad \text{em } B, \\ \\ u \geq 0 \text{ em } B,\ u(x) \overset{x \to \partial B}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

onde

$B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma bola de centro na origem e raio R,

$\mathbb{N} \geq 3$, $p > 1$ e $x \to \partial B$ significa que $d(x, \partial B) \to 0$,

$h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é contínua não decrescente satisfazendo a condição de Keller-Osserman, $h(0) = 0$.

O teorema abaixo é devido a um resultado de Du [11].

Teorema 1.2. *Sob as condições acima, o problema (1.2.1) possui uma solução radialmente simétrica $u \in C^1(B)$.*

Demonstração. A ideia desta demonstração também pode ser encontrada em Keller [20] e Matero [31]. Fixando $k \in \mathbb{N}$, pelo **Teorema** 1.1, o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = h(u) \quad \text{em } B, \\ u \geq 0 \text{ em } B,\ u(x) = k \text{ em } \partial B, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

possui uma solução $u_k \in W^{1,p}(B)$. Pela Teorema de regularidade (cf. **Teorema A.3**) e Príncipio de Comparação (cf. **Teorema A.2**), $u_k \in C^{1,\nu}(\bar{B})$ onde $0 < \nu < 1$ e vale:

$$u_1 \leq u_2 \cdots \leq u_k \cdots .$$

Pelo **Corolário** 1.35 (cf. Díaz [10]) temos que u_k é radialmente simétrica.
Definimos

$$v_k(r) := u_k(x),\ \text{onde } r = |x|.$$

Temos

$$|v_k'(r)|^{p-2} v_k'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} h(v_k(s)) ds,\ \forall r \in [0, R].$$

Logo, $v_k'(r) \geq 0$ para $r \in (0, R]$. Assim temos

$$\begin{aligned} v_k'(r)^{p-1} &= r^{1-N} \textstyle\int_0^r s^{N-1} h(v_k(s)) ds \\ &\leq r^{1-N} h(v_k(r)) \textstyle\int_0^r s^{N-1} ds \\ &= \tfrac{r}{N} h(v_k(r)),\ \forall r \in [0, R] \end{aligned}$$

e

$$[(v_k^{'})^{p-1}]' + \frac{N-1}{r}(v_k^{'})^{p-1} = h(v_k), \ \forall r \in (0, R].$$

Usando $0 \leq (v_k^{'})^{p-1} \leq \frac{r}{N}h(v_k)$, obtemos

(i).

$$(p-1)(v_k^{'})^{p-2}v_k^{''} + \frac{N-1}{r}(v_k^{'})^{p-1} = h(v_k),$$
$$(p-1)(v_k^{'})^{p-2}v_k^{''} \leq h(v_k).$$

(ii).

$$\begin{aligned}(p-1)(v_k^{'})^{p-2}v_k^{''} &= h(v_k) - \tfrac{N-1}{r}(v_k^{'})^{p-1} \\ &\geq h(v_k) - \tfrac{N-1}{r}\tfrac{r}{N}h(v_k) \\ &= \tfrac{1}{N}h(v_k).\end{aligned}$$

Por **(i)** e **(ii)** temos

$$\frac{1}{N}h(v_k) \leq (p-1)(v_k^{'})^{p-2}v_k^{''} \leq h(v_k).$$

Multiplicando $v_k^{'}$ na desigualdade acima temos

$$\frac{1}{N}h(v_k)v_k^{'} \leq (p-1)(v_k^{'})^{p-1}v_k^{''} \leq h(v_k)v_k^{'},$$

isto é

$$\frac{1}{N}h(v_k)v_k^{'} \leq \frac{p-1}{p}[(v_k^{'})^p]' \leq h(v_k)v_k^{'}. \tag{1.2.3}$$

Denotamos que $v_{0,k} := v_k(0)$ e integrando (1.2.3) temos

$$\frac{1}{N}\int_{v_{0,k}}^{v_k(r)} h(s)ds \leq \frac{p-1}{p}[v_k^{'}(r)]^p \leq \int_{v_{0,k}}^{v_k(r)} h(s)ds. \tag{1.2.4}$$

Escrevemos $H(v_k, v_{0,k}) = \frac{p}{p-1}\int_{v_{0,k}}^{v_k} h(s)ds$, então

$$\frac{1}{N}H(v_k, v_{0,k}) \leq [v_k^{'}(r)]^p \leq H(v_k, v_{0,k}),$$

ou seja

$$(\frac{1}{N})^{\frac{1}{p}} H(v_k, v_{0,k})^{\frac{1}{p}} \leq v_k^{'}(r) \leq H(v_k, v_{0,k})^{\frac{1}{p}}.$$

Logo

$$H(v_k, v_{0,k})^{-\frac{1}{p}} v_k^{'} \leq 1 \leq N^{\frac{1}{p}} H(v_k, v_{0,k})^{-\frac{1}{p}} v_k^{'}. \tag{1.2.5}$$

Integrando de 0 até r em (1.2.5) temos

$$\int_{v_{0,k}}^{v_k} H(s, v_{0,k})^{-\frac{1}{p}} ds \leq r \leq N^{\frac{1}{p}} \int_{v_{0,k}}^{v_k} H(s, v_{0,k})^{-\frac{1}{p}} ds.$$

Em particular

$$\int_{v_{0,k}}^{k} H(s, v_{0,k})^{-\frac{1}{p}} ds \leq R \leq N^{\frac{1}{p}} \int_{v_{0,k}}^{k} H(s, v_{0,k})^{-\frac{1}{p}} ds. \tag{1.2.6}$$

Tomando $k \to \infty$ e definindo

$$v_{0,\infty}(r) = \lim_{k \to \infty} v_{0,k}(r) \text{ para cada } r > 0,$$

logo (1.2.6) fica

$$\int_{v_{0,\infty}}^{\infty} H(s, v_{0,\infty})^{-\frac{1}{p}} ds \leq R \leq N^{\frac{1}{p}} \int_{v_{0,\infty}}^{\infty} H(s, v_{0,\infty})^{-\frac{1}{p}} ds.$$

Note que $R \to 0$, quando $v_{0,\infty} \to \infty$. Então $v_{0,\infty}$ depende de R.

Agora para $x_0 \in B$ qualquer, seja a bola $B(x_0, R_1) \subset B$, onde $R_1 = R - |x_0|$. Consideremos o problema

$$\begin{cases} \Delta_p z = h(z) \quad \text{em } B(x_0, B_1), \\ z \geq 0 \text{ em } B(x_0, R_1), \ z(x) = k \text{ em } \partial B(x_0, R_1), \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Pelo Príncipio de Comparação (Cf. **Teorema A.2**), temos

$$v_k(x_0) \leq z_k(x_0) \leq z_{x_0,\infty} < \infty \text{ para todo } k.$$

Assim, podemos definir $u(x_0) := \lim_{k\to\infty} v_k(x_0)$. Consequentemente

$$u_k \to u \text{ pontualmente}$$

e u é solução do (1.2.1). Como u_k são simétricas, então u também é simétrica.

$\square$

CAPÍTULO 2

Problemas sem Termo Convectivo

O objetivo deste capítulo é demonstrar o Teorema 0.1, o argumento é baseado [23], [32] e [8].

2.1 Soluções Positivas, Domínios Limitados

Seja B uma bola tal que μ é c_B-positiva e considere o problema

$$\begin{cases} \Delta_p Y = \mu(x)h(Y) \quad \text{em } B, \\ \\ Y \geq 0 \quad \text{em } B,\ Y(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

onde $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função contínua não decrescente tal que $h(0) = 0$.

A existência das soluções de (2.1.1) que demonstremos no lema abaixo será supersolução de (0.0.12) em cada bola B.

Lema 2.1. *Sob as hipóteses acima, (2.1.1) possui uma solução $Y \in C^{1,\nu}_{loc}(B)$, $\nu \in (0, 1)$.*

Demonstração. Consideremos uma família de problemas

$$\begin{cases} \Delta_p Y = \mu(x)h(Y) \quad \text{em } B, \\ Y \geq 0 \ \text{ em } B, \ Y = k \text{ em } \partial B, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

onde $k \geq 1$ é um número inteiro. Pelo **Teorema 1.1**, (2.1.2) possui uma solução, denotada por $Y_k \in W^{1,p}(B)$ no sentido

$$\int_B |\nabla Y_k|^{p-2} \nabla Y_k \nabla \phi dx + \int_B \mu(x)h(Y_k)\phi dx = 0, \ \phi \in C_0^\infty(B). \tag{2.1.3}$$

Pelo Princípio de Comparação (cf. **Teorema A.2**) temos $0 \leq Y_k \leq k$ e $Y_k \leq Y_{k+1}$ e pela regularidade (cf. **Teorema A.3**), $Y_k \in C^{1,\nu}(\bar{B})$.

Afirmação Existe uma função $Y : B \to [0, \infty)$ tal que

$$Y_k \to Y \text{ pontualmente em } B, \ Y \in L^\infty_{loc}(B), \ Y_k \leq Y \text{ em } B. \tag{2.1.4}$$

De fato, tome $x_0 \in B$. Dividimos em dois casos:

(i) $\mu(x_0) > 0$.

Existe uma vizinhança de bola $V_{x_0} \subset\subset B$ que contém x_0 tal que $\mu(x) > 0$ para $x \in \bar{V}_{x_0}$. Seja

$$m_0 := m_{V_{x_0}} := \min_{\bar{V}_{x_0}} \mu.$$

Consideremos uma outra família de problema

$$\begin{cases} \Delta_p \delta = m_0 h(\delta) \quad \text{em } V_{x_0}, \\ \delta \geq 0 \ \text{ em } V_{x_0}, \ \delta = k \text{ em } \partial V_{x_0}. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Usando o **Teorema 1.1** novamente, (2.1.5) possui uma solução $\delta_k \in W^{1,p}(V_{x_0})$. Pela regularidade (cf. **Teorema A.3**), $\delta_k \in C^{1,\nu}(\bar{V}_{x_0})$.

Assim, temos uma sequência $\{\delta_k\}$ de funções que pelo Princípio de Comparação, satisfaz

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \cdots .$$

Usando o **Teorema 1.2**, existe uma função radialmente simétrica $\delta_0 \in W^{1,p}_{loc}(V_{x_0}) \cap L^{\infty}_{loc}(V_{x_0})$ tal que $\delta_k \to \delta_0$ em $W^{1,p}_{loc}(V_{x_0})$ e δ_0 é uma solução fraca de

$$\begin{cases} \Delta_p \delta_0 = m_0 h(\delta_0) \quad \text{em } V_{x_0}, \\ \\ \delta_0 \geq 0 \;\; \text{em } V_{x_0},\; \delta_0(x) \overset{x \to \partial V_{x_0}}{\to} \infty. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Pelo Corolário em DiBennedeto [9], $\delta_0 \in C^{1,\nu}_{loc}(V_{x_0})$.

Agora, note que as funções $\{Y_k\}$ que foram construídas anteriomente satisfazem

$$\begin{cases} \Delta_p Y = \mu(x) h(Y) \quad \text{em } V_{x_0}, \\ \\ Y \geq 0 \;\; \text{em } V_{x_0},\; Y = Y_k|_{\partial V_{x_0}} \text{ em } \partial V_{x_0}. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Pelo Príncipio de Comparação (cf. **Teorema A.2**),

$$Y_k \leq \delta_0 \;\; \text{em } V_{x_0} \text{ para cada } k.$$

Consequentemente, existe função $Y_{x_0} \in L^{\infty}(V_{x_0})$ tal que

$$Y_k \to Y_{x_0} \text{ pontualmente em } V_{x_0}.$$

(ii) $\mu(x_0) = 0$.

Como μ é c_B-positiva, então existe um domínio $V_{x_0} \subset\subset B$, tal que V_{x_0} contém x_0 e $\mu(x) > 0$ em ∂V_{x_0}.

Como ∂V_{x_0} é compacto, então existem número finito de pontos $x_1, \cdots, x_k \in \partial V_{x_0}$ e bolas correspondentes $V_i := V(x_i)$ tais que $\partial V_{x_0} \subset \cup V_i$ e $\mu(x) > 0,\; x \in \bar{V}_i$. Definimos

$$m_i := m_{V_{x_i}} := \min_{\bar{V}_{x_i}} \mu$$

e consideremos i-família de problemas

$$\begin{cases} \Delta_p \delta = m_i h(\delta) \quad \text{em } V_{x_i}, \\ \\ \delta \geq 0 \;\; \text{em } V_{x_i},\; \delta(x) \overset{x \to \partial V_{x_i}}{\to} \infty. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Façamos o mesmo argumento como em **(i)** para concluir que existe uma solução radialmente simétrica $\delta_i \in C^{1,\nu}_{loc}(V_{x_i})$ de (2.1.8). Novamente, as funções construídas antes satisfazem

$$\begin{cases} \Delta_p Y = \mu(x)h(Y) \quad \text{em } V_{x_i}, \\ Y \geq 0 \ \text{ em } V_{x_i}, \ Y = Y_k|_{\partial V_{x_i}}, \ \text{em } \partial V_{x_i}. \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Pelo Princípio de Comparação (cf. **Teorema A.2**) temos

$$Y_k \leq \delta_i \text{ em } V_{x_i}, \text{ para cada } k.$$

Consequentemente, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$Y_k \leq C \text{ em } \partial V_{x_0}, \text{ para cada } k.$$

Por outro lado, $z := C$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_p z = 0 \quad \text{em } V_{x_0}, \\ z \geq 0 \text{ em } V_{x_0}, \ z = C \text{ em } \partial V_{x_0}, \end{cases}$$

e pelo Princípio de Comparação

$$Y_k \leq C \text{ em } V_{x_0}, \text{ para cada } k.$$

Então existe uma função $Y_{x_0} \in L^\infty(V_{x_0})$ tal que

$$Y_k \to Y_{x_0} \text{ pontualmente em } V_{x_0}.$$

Assim, nos dois casos **(i)** e **(ii)**, dado $x_0 \in B$, existe um domínio $V_{x_0} \subset\subset B$ e uma função $Y_{x_0} \in L^\infty(V_{x_0})$ tal que

$$Y_k \to Y_{x_0} \text{ pontualmente em } V_{x_0}.$$

Definimos

$$Y(x) := Y_{x_0}(x), \text{ se } x \in V_{x_0}.$$

Então $Y : B \to [0,\infty)$ está bem definida e satisfaz (2.1.4). Assim, terminamos a demonstrar a afirmação.

Seja U um domínio regular tal que $U \subset\subset B$. Afirmamos que

$$\int_U |\nabla Y|^{p-2}\nabla Y \nabla \phi dx + \int_U \mu(x)h(Y)\phi dx = 0, \ \phi \in C_0^\infty(U). \tag{2.1.10}$$

De fato, por (2.1.4), existe uma constante positiva $C_U > 0$ tal que

$$Y_k \leq Y \text{ e } h(Y_k) \leq h(Y) \leq C_U \text{ em } \bar{U}$$

e por (2.1.3),

$$\int_U |\nabla Y_k|^{p-2}\nabla Y_k \nabla \phi dx + \int_U \mu(x)h(Y_k)\phi dx = 0, \ \phi \in C^\infty(\bar{U}). \tag{2.1.11}$$

Logo existe uma constante denotando também C_U tal que

$$\int_U |\nabla Y_k|^p dx \leq C_U.$$

Como ∂U é regular, $W^{1,p}(U) = \overline{C^\infty(\bar{U})}^{||\cdot||_{1,p}}$ e $Y_k \leq Y$ em $\bar{U}$, temos

$$\{Y_k\} \text{ é limitada em } W^{1,p}(U).$$

Então existe uma subsequência denotamos ainda $\{Y_k\}$ tal que

$$Y_k \rightharpoonup Y \text{ em } W^{1,p}(U).$$

Tomando $\phi \in C_0^\infty(U)$ em (2.1.11) e passando o limite em k, teremos (2.1.10).
Como $Y \in L^\infty_{loc}(B)$, usando a regularidade (cf. **Teorema A.3**) temos $Y \in C^{1,\nu}_{loc}(B)$.

Finalmente, vamos provar que $Y(x) \overset{x\to\partial B}{\to} \infty$. De fato, seja $(x_l) \subseteq B$ uma sequência tal que $x_l \to x$ para algum $x \in \partial B$. Então

$$k = \liminf_{l\to\infty} Y_k(x_l) \leq \liminf_{l\to\infty} Y(x_l), \text{ para todo } k,$$

demonstrando que $Y(x_l) \overset{l\to\infty}{\to} \infty$ e consequentemente temos $Y(x) \overset{x\to\partial B}{\to} \infty$.
Em conclusão, existe $Y \in C^{1,\nu}_{loc}(B)$ satisfazendo (2.1.1).

□

2.2 Subsoluções

A construção da subsolução é baseada na idéia de Cirstea & Radulescu [8] e de Ye & Zhou [41]. Antes da construção, demonstraremos dois lemas importantes.

Lema 2.2. *Se $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função contínua não decrescente satisfazendo a condição de Keller-Osserman, então também vale*

$$\int_\delta^\infty h(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt < \infty, \text{ para algum } \delta > 0. \tag{2.2.1}$$

Demonstração. Em primeira lugar, vamos provar que

$$h(t) \geq Ct^{p-1},$$

para t suficientemente grande e alguma constante $C > 0$.
De fato,

$$(t - \frac{t}{2})\frac{1}{H(t)^{\frac{1}{p}}} \leq \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{ds}{H(s)^{\frac{1}{p}}} \longrightarrow 0,$$

quando $t \to \infty$, uma vez que h satisfaz a condição de Keller-Osserman.
Então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\frac{t^p}{H(t)} < c \text{ para } t \text{ suficientemente grande.}$$

Como

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds$$

e h é não decrescente, tem-se

$$H(t) \leq th(t)$$

e

$$\frac{t^{p-1}}{h(t)} = \frac{t^p}{th(t)} \leq \frac{t^p}{H(t)} < c, \text{ para } t \text{ suficientemente grande,}$$

isto é

$$h(t) > Ct^{p-1}, \text{ para } t \text{ suficientemente grande,}$$

onde $C = \frac{1}{c}$.

Agora

$$\frac{h(t)^p}{H(t)^{p-1}} \geq \frac{h(t)^p}{t^{p-1}h(t)^{p-1}} = \frac{h(t)}{t^{p-1}} > C, \text{ para } t \text{ suficientemente grande,}$$

isto é

$$h(t)^p > CH(t)^{p-1}, \text{ para } t \text{ suficientemente grande,}$$

ou seja

$$h(t)^{-\frac{1}{p-1}} < \hat{c}H(t)^{-\frac{1}{p}},$$

onde $\hat{c} = C^{\frac{1}{p}}$.

Finalmente, como h satisfaz a condição de Keller-Osserman temos o resultado do lema, isto é

$$\int_\delta^\infty h(t)^{-\frac{1}{p-1}}dt < \hat{c}\int_\delta^\infty H(t)^{-\frac{1}{p}}dt < \infty, \text{ para algum } \delta > 0.$$

$\square$

Lema 2.3. *Se* $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *são contínuas, então existe uma função contínua* $L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *tal que* $L + f + g \in C^1((0, \infty), [0, \infty))$ *e*

$$L(0) = 0, \ (L + f + g)(t)' \geq 0 \textit{ para } t > 0.$$

Além disso, se $f(0) = g(0) = 0$, temos também $(f + g + L)(0) = 0$.

Demonstração. Definimos

$$l(t) = \max_{s\in[0,t]}(f + g)(s),$$

então

$$l(t) \geq (f + g)(t),$$

$$l(t) \geq 0,\ \ t \geq 0,$$

$$l \text{ é não decrescente.}$$

Provaremos que l é contínua.
De fato, tomamos $t \in [0, \infty)$ e uma sequência $t_n \to t$. S.P.G., $t_n \searrow t$. Sejam $\xi_{t_n} \in [0, t_n]$ e $\xi_t \in [0, t]$ tais que

$$l(t_n) = (f + g)(\xi_{t_n}) \text{ e } l(t) = (f + g)(\xi_t).$$

Vamos provar

$$(f + g)(\xi_{t_n}) \to (f + g)(\xi_t).$$

Note que

$$\begin{aligned}
(f + g)(\xi_{t_n}) &= \max\nolimits_{s\in[0,t_n]}(f + g)(s) \\
&= \max\{\max\nolimits_{s\in[0,t]}(f + g)(s), \max\nolimits_{s\in[t,t_n]}(f + g)(s)\} \\
&= \max\{(f + g)(\xi_t), \max\nolimits_{s\in[t,t_n]}(f + g)(s)\}.
\end{aligned}$$

Seja $\eta_n \in [t, t_n]$ tal que

$$\max_{s\in[t,t_n]}(f + g)(s) = (f + g)(\eta_n),$$

temos

$$(f + g)(\eta_n) \xrightarrow{n} (f + g)(t).$$

Logo

$$\max\{(f+g)(\xi_t), \max_{s\in[t,t_n]}(f+g)(s)\} =$$
$$\frac{|(f+g)(\xi_t)-(f+g)(\eta_n)|}{2}+\frac{(f+g)(\xi_t)+(f+g)(\eta_n)}{2}.$$

Assim

$$\max\{(f+g)(\xi_t), \max_{s\in[t,t_n]}(f+g)(s)\} \to (f+g)(\xi_t),$$

isto é

$$(f+g)(\xi_{t_n}) \to (f+g)(\xi_t).$$

Agora, definimos

$$\tilde{l}(t)=\begin{cases} \frac{1}{t}\int_t^{2t} l(s)ds, & t>0,\\ \\ (f+g)(0), & t=0.\end{cases}$$

Note que

$$(f+g)(t)\le l(t)\le \tilde{l}(t)\le l(2t),$$

$$\tilde{l} \text{ é contínua e } \tilde{l}(0)=(f+g)(0),$$

$$\begin{aligned}(\tilde{l})'(t) &= \tfrac{1}{t}[2l(2t)-l(t)]-\tfrac{1}{t^2}\textstyle\int_t^{2t} l(s)ds\\ &= \tfrac{2}{t}l(2t)-\tfrac{1}{t}l(t)-\tfrac{1}{t^2}\textstyle\int_t^{2t} l(s)ds\\ &\ge \tfrac{2}{t}l(2t)-\tfrac{1}{t}l(t)-\tfrac{1}{t^2}tl(2t)\\ &= \tfrac{1}{t}l(2t)-\tfrac{1}{t}l(t)\ge 0,\ \forall\ t>0.\end{aligned}$$

Finalmente, definimos

$$L(t)=\tilde{l}(t)-(f+g)(t),\ t\ge 0.$$

Verificando que

$$L(0)=0 \text{ e } L(t)\ge 0;$$

$$(L+f+g)'(t)=(\tilde{l})'\ge 0,\ t>0;$$

$$L + f + g \geq 0.$$

Além disso, se $f(0) = g(0) = 0$, temos

$$(f + g + L)(0) = f(0) + g(0) + L(0) = 0.$$

□

Lema 2.4. ***(Construção da subsolução)*** *Sejam $a, b : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty)$, $\mu := \mu_{a,b}(x) := \min\{a(x), b(x)\}$ é c_{B_n}-positiva para cada $n \geq 1$, onde $B_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é a bola de raio n e centrada na origem; $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funções contínuas tais que $f(0) = g(0) = 0$. Se o problema (0.0.13) possui uma supersolução em $C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, então o problema (0.0.12) admite uma subsolução em $C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.*

Demonstração. Pela **Lema 2.3**,

$$\text{existe uma função } L: \ [0, \infty) \to [0, \infty) \text{ tal que } (L + f + g) \in C^1((0, \infty), [0, \infty)),$$

$$L(t) \geq 0 \text{ e } (L + f + g)^{'}(t) \geq 0, \ t > 0.$$

Além disso, se $f(0) = g(0) = 0$, temos também $(f + g + L)(0) = 0$.

Consideramos o problema

$$\begin{cases} \Delta_p z = (a(x) + b(x))(L + f + g)(z) \ \text{ em } B_n, \\ \\ z \geq 0 \ \text{ em } B_n, \ \ z(x) = k \ \text{ em } \partial B_n, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

onde $k \geq 1$ inteiro.

Pelo **Teorema 1.1**, (2.2.2) tem uma solução $z^k \in C^{1,\nu}(\bar{B}_n)$.

Pelo **Lema 2.1** existe $Y_n \in C^1(B_n)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta_p Y_n = \mu(x)(L + f + g)(Y_n) \ \text{ em } B_n, \\ \\ Y_n \geq 0 \ \text{ em } B_n, \ \ Y_n(x) \overset{x \to \partial B_n}{\to} \infty, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

no sentido das distribuições.

Pelo Princípio de Comparação (cf. **Teorema A.2**) temos

$$0 \leq z^1 \leq z^2 \leq \cdots \leq z^k \leq \cdots \text{ em } \bar{B}_n,$$

e

$$z^k \leq Y_n \quad k = 1, 2, \cdots \text{ em } \bar{B}_n.$$

Seja W um domínio tal que $\bar{W} \subset B_n$, note que

$$\int_W |\nabla z^k|^{p-2} \nabla z^k \nabla \phi dx + \int_W (a+b)(L+f+g)(z^k)\phi dx = 0, \ \phi \in C_0^\infty(W). \tag{2.2.4}$$

Segue pela regularidade (cf. **Teorema A.3**) temos que

$$|z^k|_{C^{1,\nu}(\bar{W})} \leq C,$$

onde C é uma constante.

Daí, passando eventualmente a uma subsequência

$$z^k \longrightarrow z_n \text{ em } C^1(\bar{W}).$$

Passando ao limite em (2.2.4), concluímos que

$$\int_{B_n} |\nabla z_n|^{p-2} \nabla z_n \nabla \phi dx + \int_{B_n} (a+b)(L+f+g)(z_n)\phi dx = 0, \ \phi \in C_0^\infty(B_n).$$

Assim $z_n \in C^1(B_n)$ e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_p z_n = (a(x)+b(x))(L+f+g)(z_n) \ \text{ em } B_n, \\ \\ z_n \geq 0 \ \text{ em } B_n, \ \ z_n(x) \stackrel{x \to \partial B_n}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

no sentido das distribuições.

Pelo Princípio de Comparação (cf. **Teorema A.2**) novamente, temos

$$z_m \geq z_n \text{ em } B_m, \text{ se } n > m.$$

Seja $B_m \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ uma bola de raio m centrada na origem, note que

$$\int_{B_m} |\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n \nabla \phi dx + \int_{B_m} (a+b)(L+f+g)(z_n)\phi dx = 0,\ \phi \in C_0^\infty(B_m)\ n > m. \quad (2.2.6)$$

Segue pela regularidade (cf. **Teorema A.3**) temos que

$$|z_n|_{C^{1,\nu}(\bar{B}_m)} \leq C,\ n \geq m$$

onde C é uma constante.

Daí, passando eventualmente a uma subsequência

$$z_n \to \varphi_m \text{ em } C^1(\bar{B}_m).$$

Passando ao limite em (2.2.6), concluímos que

$$\int_{B_m} |\nabla \varphi_m|^{p-2}\nabla \varphi_m \nabla \phi dx + \int_{B_m} (a+b)(L+f+g)(\varphi_m)\phi dx = 0,\ \phi \in C_0^\infty(B_m).$$

Definimos que

$$\varphi(x) := \varphi_m(x) \text{ para } x \in B_m.$$

Note que φ está bem definida pelo fato que

$$\varphi_m = \varphi_{m-1} \ \text{ em } B_{m-1},$$

pois

$$\begin{aligned} &z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots \to \varphi_1 \ \text{ em } B_1; \\ &z_2,\ z_3,\ z_4,\ \cdots \to \varphi_2 \ \text{ em } B_2; \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \to \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots. \end{aligned}$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla \varphi|^{p-2}\nabla \varphi \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (a+b)(L+f+g)(\varphi)\phi dx = 0,\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Provaremos agora

$$\varphi(x) \to \infty \text{ quando } |x| \to \infty.$$

Para isso, defina

$$\kappa_n(x) = \int_{z_n(x)+\delta}^{\infty} (L+f+g)^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt \quad x \in B_n. \tag{2.2.7}$$

Pela condição de Keller-Osserman, $0 \leq \kappa_n(x) < \infty$.

Como

$$z_n \overset{x\to\partial B_n}{\longrightarrow} \infty,$$

então

$$\kappa_n(x) \overset{x\to\partial B_n}{\longrightarrow} 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\kappa_{n+1}(x) &= \int_{z_{n+1}(x)+\delta}^{\infty} (L+f+g)^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt \\
&\geq \int_{z_n(x)+\delta}^{\infty} (L+f+g)^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt \\
&= \kappa_n(x),
\end{aligned}$$

isto é

$$\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \cdots.$$

De (2.2.7) temos

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial x_i} = -(L+f+g)^{-\frac{1}{p-1}}(z_n+\delta)\frac{\partial z_n}{\partial x_i}.$$

Daí

$$\nabla \kappa_n = -(L+f+g)^{-\frac{1}{p-1}}(z_n+\delta)\nabla z_n. \tag{2.2.8}$$

Portanto

$$|\nabla \kappa_n|^{p-2} = (L+f+g)^{-\frac{p-2}{p-1}}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2},$$

donde

$$|\nabla \kappa_n|^{p-2}\nabla \kappa_n = (L+f+g)^{-\frac{p-2}{p-1}}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2}\nabla \kappa_n.$$

Usando (2.2.8) temos

$$
\begin{aligned}
|\nabla \kappa_n|^{p-2}\nabla \kappa_n &= -(L+f+g)^{-\frac{p-2}{p-1}}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2}(L+f+g)^{-\frac{1}{p-1}}(z_n+\delta)\nabla z_n \\
&= -(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n.
\end{aligned}
$$

Dado $\phi \in C_0^\infty(B_n)$ e $\phi \geq 0$ temos

$$|\nabla \kappa_n|^{p-2}\nabla \kappa_n \nabla \phi = -(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n \nabla \phi.$$

Integrando e usando o Teorema do Divergente temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_n} |\nabla \kappa_n|^{p-2}\nabla \kappa_n \nabla \phi dx &= \int_{B_n} -(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n \nabla \phi dx \\
&= \int_{B_n} div[(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n]\phi dx.
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

Calculando derivadas fracas

$$div[(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n]$$

$$= -(L+f+g)^{-2}(z_n+\delta)(L+f+g)^{'}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p} + (L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)div[|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n].$$

Multiplicando por ϕ e integrando, obtemos

$$\int_{B_n} div[(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n]\phi dx$$

$$= \int_{B_n} div[|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n][(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)\phi]dx - \int_{B_n} (L+f+g)^{-2}(z_n+\delta)(L+f+g)^{'}(z_n+\delta)|\nabla z_n|^{p}\phi dx,$$

$$\leq \int_{B_n} div[|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n][(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)\phi]dx.$$

Usando (2.2.9) temos

$$\int_{B_n} |\nabla \kappa_n|^{p-2}\nabla \kappa_n \nabla \phi dx \leq \int_{B_n} div[|\nabla z_n|^{p-2}\nabla z_n][(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)\phi]dx.$$

Como $(L+f+g)^{-1}(z_n+\delta)\phi \in C_0^1(B_n)$ e z_n é solução de (2.2.5) no sentido das distribuições, temos

$$\int_{B_n} |\nabla \kappa_n|^{p-2} \nabla \kappa_n \nabla \phi dx \leq \int_{B_n} (a(x) + b(x))(L + f + g)(z_n)(L + f + g)^{-1}(z_n + \delta)\phi dx,$$

isto é

$$\int_{B_n} |\nabla \kappa_n|^{p-2} \nabla \kappa_n \nabla \phi dx \leq \int_{B_n} (a(x) + b(x))\phi dx.$$

Como o problema (0.0.13) possui uma supersolução $v \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, então pelo Príncipio de Comparação (cf. **Teorema A.2**), temos

$$\kappa_n \leq v \quad \text{em } B_n.$$

Assim, existe $\kappa \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que

$$\kappa_n(x) \to \kappa(x) \quad x \in B_n,$$

e

$$\kappa(x) \overset{|x| \to \infty}{\to} 0.$$

Finalmente vamos provar que

$$\kappa(x) = \int_{\varphi(x)+\delta}^{\infty} (L + f + g)^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt \quad x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

De fato

$$\begin{aligned} &| \int_{z_n(x)+\delta}^{\infty} (L + f + g)^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt - \int_{\varphi(x)+\delta}^{\infty} (L + f + g)^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt| \\ &\leq | \int_{\varphi(x)+\delta}^{z_n+\delta} (L + f + g)^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt| \overset{n \to \infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

Então temos

$$\varphi(x) \to \infty, \quad \text{quando } |x| \to \infty.$$

Mostrando que φ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_p \varphi = (a(x)+b(x))(L+f+g)(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ \varphi \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} \infty, \end{cases} \tag{2.2.10}$$

e

$$\begin{cases} \Delta_p \varphi \geq a(x)f(\varphi)+b(x)g(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ \varphi \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} \infty, \end{cases} \tag{2.2.11}$$

é subsolução de (0.0.12)

□

2.3 Demonstração do Resultado Principal

Para cada bola $B_{n'} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que μ é $c_{B_{n'}}$-positiva, consideremos o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u_n = a(x)f(u_n)+b(x)g(u_n) \quad \text{em } B_n, \\ \\ u_n \geq 0 \ \text{ em } B_n, \ u_n(x) = y^n_{n'} \ \text{ em } \partial B_n, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

onde $B_n \subset B_{n'}$ tal que $y^n_{n'} = \min_{|x|=n} Y^n_{n'} = \min_{|x|=n} Y_{n'}|_{B_n} \geq \varphi_0|_{B_n}$ e $Y_{n'}$ é a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p Y_{n'} = \mu(x)h(Y_{n'}) \quad \text{em } B_{n'}, \\ \\ Y_{n'} \geq 0 \ \text{ em } B_{n'}, \ Y_{n'}(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

φ_0 é a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p \varphi = (a(x)+b(x))(L+f+g)(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ \varphi \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} \infty. \end{cases}$$

Observamos que $Y^n_{n'}$ é uma supersolução do problema (2.3.1), e $\varphi_0|_{B_n}$ é uma subsolução de (2.3.1). Além disso, $Y^n_{n'} \geq \varphi_0|_{B_n}$. Portando, pelo teorema de sub e supersoluções (cf. **Teorema A.1**), (2.3.1) possui uma solução $u_n \in C^{1,\nu}(\bar{B}_n)$ e

$$\varphi_0 \leq u_n \leq Y^n_{n'} \quad \text{em } \bar{B}_n.$$

Note que

$$Y^n_{n'} \geq Y^n_{m'}, \quad \text{para } n' \leq m'.$$

Definimos

$$u^n_m = u_m|_{B_n}, \quad m > n,$$

onde u_m é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p u_m = a(x)f(u_m) + b(x)g(u_m) \quad \text{em } B_m, \\ \\ u_m \geq 0 \text{ em } B_m, \ u_m(x) = y^m_{m'} \text{ em } \partial B_m, \end{cases} \tag{2.3.3}$$

e $\varphi_1 \leq u_m \leq Y^m_{m'}$, onde $B_m \subset B_{m'}$ tal que $y^m_{m'} = \min_{|x|=m} Y^m_{m'} = \min_{|x|=m} Y_{m'}|_{B_m} \geq \varphi_0|_{B_m}$ e $Y_{m'}$ é a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p Y_{m'} = \mu(x)h(Y_{m'}) \quad \text{em } B_{m'}, \\ \\ Y_{m'} \geq 0 \text{ em } B_{m'}, \ Y_{m'}(x) \stackrel{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Temos

$$\{u^n_m\} \text{ é limitada em } C^{1,\nu}(\bar{B}_n)$$

e a imersão compacta

$$C^{1,\nu}(\bar{B}_n) \stackrel{cpt}{\hookrightarrow} C^1(\bar{B}_n).$$

Então existe uma subsequência de $\{u^n_m\}$ converge em $C^1(\bar{B}_n)$, isto é,

$$\begin{array}{ccccc} u^1_2, & u^1_3, & u^1_4, & \cdots \stackrel{C^1(\bar{B}_1)}{\longrightarrow} & u^1, \\ u^2_3, & u^2_4, & u^2_5, & \cdots \stackrel{C^1(\bar{B}_2)}{\longrightarrow} & u^2, \\ u^3_4, & u^3_5, & u^3_6, & \cdots \stackrel{C^1(\bar{B}_3)}{\longrightarrow} & u^3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array}$$

Definimos

$$u(x) = u^n(x), \quad \forall x \in B_n.$$

Tomando a subsequência diagonal $\{u^n_{2n}\}$ e temos

$$u^n_{2n} \longrightarrow u \;\; \text{em } C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

e

$$u \geq \varphi_0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

então u é uma solução do problema (0.0.12).

Isto termina a prova do **Teorema 0.1**.

$\square$

CAPÍTULO 3

Problemas com Termo Convectivo

Neste capítulo demonstremos o **Teorema 0.2** e o **Teorema 0.3**

3.1 Subsoluções no Caso de Coeficiente Negativo do Termo Convectivo

A construção é baseada da ideia de Lair & Wood [25]. Antes da construção, demonstraremos um lema importante.

Lema 3.1. *Se a função* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *é contínua tal que* $f(0) = 0$ *satisfazendo (0.0.19), então existe uma função* $h_1 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *é não decrescente e de* $C^1((0, \infty), [0, \infty))$ *tal que* $h_1 \leq f$, $h_1(0) = 0$ *satisfazendo (0.0.19).*

Demonstração. Definimos

$$l_1(t) = \inf_{s \in [t, \infty]} f(s),$$

então

$$l_1(t) \leq f(t),$$

$$l_1(t) \geq 0, \ t \geq 0, \ l_1(0) = 0,$$

$$l_1 \text{ é não decrescente e satisfazendo } (0.0.19).$$

Agora, definimos

$$h_1(t) = \begin{cases} \frac{2}{t}\int_{\frac{t}{2}}^{t} l_1(s)ds, & t > 0, \\ \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Note que

$$l_1(\frac{t}{2}) \leq h_1(t) \leq l_1(t) \leq f(t),$$

$$h_1 \text{ é contínua e } h_1(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= \tfrac{2}{t}[l_1(t) - \tfrac{1}{2}l_1(\tfrac{t}{2})] - \tfrac{2}{t^2}\int_{\frac{t}{2}}^{t} l_1(s)ds \\ &= \tfrac{2}{t}l_1(t) - \tfrac{1}{t}l_1(\tfrac{t}{2}) - \tfrac{2}{t^2}\int_{\frac{t}{2}}^{t} l_1(s)ds \\ &\geq \tfrac{2}{t}l_1(t) - \tfrac{1}{t}l_1(\tfrac{t}{2}) - \tfrac{2}{t^2}\tfrac{t}{2}l_1(t) \\ &= \tfrac{1}{t}l_1(t) - \tfrac{1}{t}l_1(\tfrac{t}{2}) \geq 0, \ \forall\, t > 0. \end{aligned}$$

Verificamos (0.0.19). Por um lado,

$$h_1(t) \leq l_1(t) \leq f(t) \leq C_2 t^{\gamma_2}, \quad \text{para } t \text{ grande}.$$

Por outro lado,

$$h_1(t) \geq l_1(\frac{t}{2}) \geq C_1(\frac{t}{2})^{\gamma_1}, \quad \text{para } t \text{ grande},$$

isto é

$$h_1(t) \geq \frac{C_1}{2^{\gamma_1}} t^{\gamma_1}.$$

□

Note que h_1 pode ser escolhida como uma função em $C^1([0,\infty))$ e $h(t) = 0$ para $t \in [0,\epsilon]$, onde ϵ é uma constante positiva.

Lema 3.2. *Sejam $2 \leq p < \infty$, $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, Suponhamos que $a : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0,\infty)$ é c_B-positivo, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta_p z + V(x)|\nabla z|^p = a(x)h_1(z) \quad \text{em } B, \\ \\ z \geq 0 \quad \text{em } B, \ z = m \quad \text{em } \partial B, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

possui uma solução $z \in C^{1,\alpha}(\bar{B})$, $\alpha \in (0,1)$, *onde* h_1 *é dada em* ***Lema 3.1*** *e* $m \geq 1$ *é uma constante tal que* $h_1(m) > 0$.

Demonstração Sabemos que $\bar{z} = m$ é uma supersolução de (3.1.1). Vamos construir uma subsolução $\underline{z}$. Seja $\omega^m \in C^{1,\nu}(\bar{B})$ uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p \omega = a(x) \quad \text{em } B, \\ \omega > 0 \quad \text{em } B, \ \omega(x) = \int_m^\infty h_1(s)^{-\frac{1}{p-1}} ds \quad \text{em } \partial B. \end{cases}$$

A solução ω^m existe, porque o problema acima é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_p \kappa = a(x) \quad \text{em } B, \\ \kappa \geq 0 \quad \text{em } B, \ \kappa(x) = 0 \quad \text{em } \partial B, \end{cases}$$

onde $\kappa = \omega - \int_m^\infty h_1(s)^{-\frac{1}{p-1}} ds$.
Definimos uma função z^m de forma

$$\omega^m(x) = \int_{z^m(x)}^\infty h_1(s)^{-\frac{1}{p-1}} ds.$$

A função z^m está bem definida porque h_1 é não decrescente e satisfaz a condição de Keller-Osserman.
Temos

$$z^m|_{\partial B} = m, \quad z^m \geq 0 \text{ em } B$$

e

$$\int_B |\nabla z^m|^{p-2} \nabla z^m \nabla \phi dx + \int_B a(x) h_1(z^m) \phi dx \leq 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(B) \text{ e } \phi \geq 0.$$

Portanto

$$\int_B |\nabla z^m|^{p-2} \nabla z^m \nabla \phi dx + \int_B a(x) h_1(z^m) \phi dx \leq \int_B V(x) |\nabla z^m|^p \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(B) \text{ e } \phi \geq 0.$$

Definimos

$$\underline{z} = z^m$$

e temos que $\underline{z}$ é uma subsolução de (3.1.1).

Pelo Príncipio de Comparação (cf. [18], **Teorema 10.7**), temos

$$\underline{z} \leq \bar{z} \quad \text{em } \bar{B}.$$

Pelo método de sub e supersoluções e regularidade (cf. Lieberman [27]), existe uma função $z \in C^{1,\alpha}(\bar{B})$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e

$$0 < \underline{z} \leq z \leq \bar{z} = m \ \text{ em } \bar{B}$$

satisfaz (3.1.1) no sentido das distribuições.

□

Lema 3.3. *(**Construção da Subsolução**) Sejam $2 \leq p < \infty$, $B = B_n(0) \subset \mathbb{R}^N$. Suponhamos que $a : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty)$ é c_B-positivo, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta_p z + V(x)|\nabla z|^p = a(x)h_1(z) \quad \text{em } B, \\ \\ z \geq 0 \quad \text{em } B, \ z \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

*possui uma solução $z \in C^1(B)$, onde h_1 é dada em **Lema 3.1**.*

Demonstração. Pelo **Lema 3.2**, para cada $m \in \mathbb{N}$, (3.1.1) possui uma solução $z_m \in C^{1,\nu}(\bar{B})$ e $z_m \geq 0$ em B.

Como $z_m \leq z_{m+1}$ em ∂B, pelo princípio de Comparação (cf. [18], **Teorema 10.7**), temos

$$z_m \leq z_{m+1} \ \text{ em } \bar{B}, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Tome $x_0 \in B$, se $a(x_0) > 0$, então existe uma vizinhança de bola $\bar{V}_{x_0}$ de x_0 tal que

$$a(x) > 0, \quad \forall x \in \bar{V}_{x_0}.$$

Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta_p \omega = m_0 h_1(\omega) \quad \text{em } V_{x_0}, \\ \\ \omega \geq 0 \quad \text{em } V_{x_0},\ \omega(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

onde

$$m_0 := m_{V_{x_0}} := \min_{x \in \bar{V}_{x_0}} a(x).$$

Pelo **Teorema 1.2**, sabemos que (3.1.3) possui uma solução radialmente simétrica $\omega \in C^1(B)$, vamos procurar uma função $\hat{\omega}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta_p \hat{\omega} + V(x)|\nabla \hat{\omega}|^p \leq m_0 h_1(\hat{\omega}) \quad \text{em } V_{x_0}, \\ \\ \hat{\omega} \geq 0 \quad \text{em } V_{x_0},\ \hat{\omega} \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Suponhamos a existência de $\hat{\omega}$, pelo Princípio de Comparação (cf. [18], **Teorema 10.7**), temos

$$z_m \leq \hat{\omega}, \quad \text{em } V_{x_0},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

consequentemente, existe uma função $z_{x_0} \in L^\infty_{loc}(V_{x_0})$ tal que

$$z_m \to z_{x_0} \text{ pontualmente em } V_{x_0}.$$

Se $a(x_0) = 0$. Como a é c_B-positiva, então existe um subconjunto $V_{x_0} \subset B$ tal que $x_0 \in V_{x_0}$ e

$$a(x) > 0, \quad \forall x \in \partial V_{x_0}.$$

Como V_{x_0} é limitado, então ∂V_{x_0} é compacto, logo existem finitas bolas V_i tais que

$$\partial V_{x_0} \subset \cup_i \bar{V}_i,$$

e

$$a(x) > 0, \quad \forall x \in \bar{V}_i.$$

Sejam

$$m_i := m_{V_i} := \min_{\bar{V}_i} a$$

e consideremos i-família dos problemas

$$\begin{cases} \Delta_p \omega = m_i h_1(\omega) \quad \text{em } V_i, \\ \\ \omega \geq 0 \quad \text{em } V_i,\ \omega(x) \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Pelo **Teorema 1.2** novamente, sabemos que (3.1.5) possui uma solução radialmente simétrica $\omega_i \in C^1(B)$ e teremos uma funcão $\hat{\omega}_i$ tal que

$$\begin{cases} \Delta_p \hat{\omega} + V(x)|\nabla \hat{\omega}|^p \leq m_i h_1(\hat{\omega}), \quad \text{em } V_i, \\ \\ \hat{\omega} \geq 0, \quad \text{em } V_i,\ \hat{\omega} \overset{d(x)\to 0}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Pelo princípio de comparação (cf. [18], **Teorema 10.7**), temos

$$z_m \leq \hat{\omega}_i, \quad \text{em } V_i,\ \forall m.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$z_m \leq C \quad \text{em } \partial V_{x_0},\ \forall m.$$

Por outro lado, $\delta := C$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_p \delta = 0 \quad \text{em } V_{x_0}, \\ \\ \delta \geq 0 \quad \text{em } V_{x_0},\ \delta(x) = C \quad \text{em } \partial V_{x_0}, \end{cases} \tag{3.1.7}$$

e pelo princípio de comparação (cf. [18], **Teorema 10.7**), temos

$$z_m \leq C, \quad \text{em } V_{x_0},\ \forall m.$$

Consequentemente, existe uma função $z_{x_0} \in L^{\infty}_{loc}(V_{x_0})$ tal que

$$z_m \to z_{x_0} \text{ pontualmente em } V_{x_0}.$$

Assim, em qualquer caso, dado $x_0 \in B$, existe um domínio $V_{x_0} \subset\subset B$ e uma função $z_{x_0} \in L^\infty_{loc}(V_{x_0})$ tal que

$$z_m \to z_{x_0} \text{ pontualmente em } V_{x_0}.$$

Definimos

$$z(x) := z_{x_0}(x) \text{ se } x \in V_{x_0}.$$

Então $z : B \to [0, \infty)$ é bem definida, $z \in L^\infty_{loc}(B)$ e

$$z_m \to z \text{ pontualmente em } B,$$

$$z_m \leq z, \quad \text{em } B. \tag{3.1.8}$$

Seja U um domínio regular tal que $U \subset\subset B$. Afirmamos que

$$\int_U |\nabla z|^{p-2} \nabla z \cdot \nabla \phi dx + \int_U a(x)h(z)\phi dx = \int_U V(x)|\nabla z|^p \phi dx, \quad \phi \in C_0^\infty(U). \tag{3.1.9}$$

De fato, por (3.1.8) e Teorema 1 e 2 do DiBenedetto [9], existe uma constante $C_U > 0$ tal que

$$z_m \leq C_U, \quad \forall m \text{ em } \bar{U}$$

e

$$|\nabla z_m| \leq C_U \quad \forall m \text{ em } \bar{U}.$$

Então

$$\nabla z_m \to \nabla z, \text{ pontualmente.}$$

Por (3.1.1) temos

$$\int_U |\nabla z_m|^{p-2} \nabla z_m \cdot \nabla \phi dx + \int_U a(x)h(z_m)\phi dx = \int_U V(x)|\nabla z_m|^p \phi dx, \quad \phi \in C_0^\infty(U). \tag{3.1.10}$$

Passando o limite em (3.1.10) e usando Teorema de Lebesgue temos (3.1.9).

Finalmente, vamos provar $z(x) \overset{x \to \partial B}{\to} \infty$. De fato, tome $(x_l) \subseteq B$ uma sequência tal que $x_l \to x$ para algum $x \in \partial B$. Então

$$m = \liminf_{l\to\infty} z_m(x_l) \leq \liminf_{l\to\infty} z(x_l), \quad \text{para todo } m,$$

mostramos que $z(x_l) \overset{l\to\infty}{\to} \infty$ e $z(x) \overset{x\to\partial B}{\to} \infty$.
Como $z \in L^\infty_{loc}(B)$, pela regularidade, $z \in C^{1,\alpha}_{loc}(B)$ satisfazendo (3.1.2).

Agora, vamos procurar a função $\hat{\omega}$ usando a idéia do Lair e Wood em [25].
Definimos

$$\hat{\omega} = \omega^\lambda, \quad \lambda \text{ é um parametro,}$$

onde ω é solução do (3.1.3).

Temos

$$\nabla\hat{\omega} = \lambda\omega^{\lambda-1}\nabla\omega.$$

Como ω é radialmente simétrica, então podemos escrever ω como

$$\omega(r) = \omega_0 + \int_0^r (t^{1-N}\int_0^t s^{N-1} m_0 h_1(\omega) ds)^{\frac{1}{p-1}} dt,$$

onde ω_0 é a constante suficiente grande tal que h_1 satisfaz

$$h_1(\omega) \geq C_1\omega^{\gamma_1} \text{ e } h_1(\omega) \leq C_2\omega^{\gamma_2},$$

quando $\omega \geq \omega_0$.
Então

$$\begin{aligned}
\omega(r) &\geq \omega(0) = \omega_0 \\
\omega'(r) &= (r^{1-N}\int_0^r s^{N-1} m_0 h_1(\omega) ds)^{\frac{1}{p-1}} \\
&\leq (r^{1-N}\int_0^r s^{N-1} m_0 C_2 \omega(s)^{\gamma_2})^{\frac{1}{p-1}} \\
&\leq (C_2 m_0 \omega(r) r)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} |\nabla\hat{\omega}| &= \lambda\omega^{\lambda-1}|\nabla\omega| = \lambda\omega^{\lambda-1}|\omega'| \\ |\nabla\hat{\omega}|^{p-2}\nabla\hat{\omega} &= (\lambda\omega^{\lambda-1})^{p-2}|\omega'|^{p-2}\lambda\omega^{\lambda-1}\nabla\omega \\ &= \lambda^{p-1}\omega^{(\lambda-1)(p-1)}|\omega'|^{p-2}\nabla\omega. \end{aligned}$$

Calculando derivadas fracas

$$\Delta_p\hat{\omega} = \lambda^{p-1}(\lambda-1)(p-1)\omega^{(\lambda-1)(p-1)-1}|\omega'|^p + \lambda^{p-1}\omega^{(\lambda-1)(p-1)}\Delta_p\omega.$$

Agora,

$\Delta_p\hat{\omega} + V(x)|\nabla\hat{\omega}|^p - m_0h_1(\hat{\omega})$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda^{p-1}\omega^{(\lambda-1)(p-1)}\Delta_p\omega + \lambda^{p-1}(\lambda-1)(p-1)\omega^{(\lambda-1)(p-1)-1}|\omega'|^p + V(x)\lambda^p\omega^{(\lambda-1)p}|\omega'|^p - m_0C_1\omega^{\lambda\gamma_1} \\ &\leq \lambda^{p-1}\omega^{(\lambda-1)(p-1)}\Delta_p\omega + \lambda^{p-1}(\lambda-1)(p-1)\omega^{(\lambda-1)(p-1)-1}|\omega'|^p + B\lambda^p\omega^{(\lambda-1)p}|\omega'|^p - m_0C_1\omega^{\lambda\gamma_1} \\ &= \lambda^{p-1}\omega^{(\lambda-1)(p-1)}[\Delta_p\omega + (\lambda-1)(p-1)\omega^{-1}|\omega'|^p + B\lambda\omega^{(\lambda-1)}|\omega'|^p - \tfrac{m_0C_1}{\lambda^{p-1}}\omega^{\lambda\gamma_1-(\lambda-1)(p-1)}], \end{aligned}$$

para $\lambda > 1$, onde

$$B = \max_{x\in\bar{V}_{x_0}} V(x).$$

Vamos procurar λ tal que

$$\Delta_p\omega + (\lambda-1)(p-1)\omega^{-1}|\omega'|^p + B\lambda\omega^{(\lambda-1)}|\omega'|^p - \frac{m_0C_1}{\lambda^{p-1}}\omega^{\lambda\gamma_1-(\lambda-1)(p-1)} \leq 0.$$

Mas

$m_0h_1(\omega) + (\lambda-1)(p-1)\omega^{-1}|\omega'|^p + B\lambda\omega^{(\lambda-1)}|\omega'|^p - \frac{m_0C_1}{\lambda^{p-1}}\omega^{\lambda\gamma_1-(\lambda-1)(p-1)}$

$$\leq \quad C_2 m_0 \omega^{\gamma_2} + (\lambda-1)(p-1)\omega^{-1}|\omega'|^p + B\lambda\omega^{(\lambda-1)}|\omega'|^p - \tfrac{m_0 C_1}{\lambda^{p-1}}\omega^{\lambda\gamma_1-(\lambda-1)(p-1)}$$

$$\leq \quad C_2 m_0 \omega^{\gamma_2} + (\lambda-1)(p-1)\omega^{-1}(C_2 m_0 \omega^{\gamma_2} r)^{\frac{p}{p-1}} + B\lambda\omega^{(\lambda-1)}(C_2 m_0 \omega^{\gamma_2} r)^{\frac{p}{p-1}}$$
$$- \quad \tfrac{m_0 C_1}{\lambda^{p-1}}\omega^{\lambda\gamma_1-(\lambda-1)(p-1)}$$

$$\leq \quad C_2 m_0 \omega^{\gamma_2} + (\lambda-1)(p-1)(C_2 m_0 r_\Gamma)^{\frac{p}{p-1}}\omega^{\frac{p\gamma_2}{p-1}-1} + B\lambda(C_2 m_0 r_\Gamma)^{\frac{p}{p-1}}\omega^{\frac{p\gamma_2}{p-1}+\lambda-1}$$
$$- \quad \tfrac{m_0 C_1}{\lambda^{p-1}}\omega^{\lambda\gamma_1-(\lambda-1)(p-1)},$$

onde

$$r_\Gamma \text{ é o diâmentro de } V_{x_0}.$$

Vamos escolher λ tal que

$$\begin{cases} \lambda\gamma_1 - (\lambda-1)(p-1) & > & \gamma_2, \\ \lambda\gamma_1 - (\lambda-1)(p-1) & > & \frac{p\gamma_2}{p-1} - 1, \\ \lambda\gamma_1 - (\lambda-1)(p-1) & > & \frac{p\gamma_2}{p-1} + \lambda - 1, \end{cases}$$

isto é

$$\begin{cases} \lambda & > & \frac{\gamma_2+1-p}{\gamma_1+1-p}, \\ \lambda & > & \frac{\frac{p\gamma_2}{p-1}-p}{\gamma_1+1-p}, \\ \lambda & > & \frac{\frac{p\gamma_2}{p-1}-p}{\gamma_1-p}. \end{cases}$$

Então para $\lambda > \max\{\frac{\gamma_2+1-p}{\gamma_1+1-p}, \frac{\frac{p\gamma_2}{p-1}-p}{\gamma_1-p}\}$ e ω_0 é suficientemente grande, $\hat{\omega}$ satisfaz (3.1.4).

□

3.2 Resultado Príncipal no Caso de Coeficiente Negativo do Termo Convectivo

Pelo **Teorema 0.1**, fazendo $g = 0$ temos que o problema

$$\begin{cases} \Delta_p \varphi = a(x) f(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ \\ \varphi \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \varphi(x) \overset{|x| \to \infty}{\to} \infty, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

possui uma solução $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, se a é c_{B_n}-positiva, f satisfaz (0.0.19) e (0.0.18) possui uma supersolução $v \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Então φ é uma subsolução de (0.0.15).
Para cada $B_{n'} \subset \mathbb{R}^N$, consideremos o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u_n + V(x)|\nabla u_n|^p = a(x) f(u_n) \quad \text{em } B_n, \\ \\ u_n \geq 0 \quad \text{em } B_n, \ u_n = \max_{\bar{B}_n} \varphi \quad \text{em } \partial B_n. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

onde $B_n \subset B_{n'}$ tal que $z_{n'}^n|_{\partial B_n} = z_{n'}|_{\partial B_n} > \max_{\bar{B}_n} \varphi$, onde $z_{n'} \in C^1(B_{n'})$ é a solução do problema (3.1.4). Então $z_{n'}^n = z_{n'}|_{B_n}$ é uma supersolução de (0.0.15). Além disso, pelo Príncipio de Comparação (cf. [18], **Teorema 10.7**), temos

$$\varphi \leq z_{n'}^n \quad \text{em } B_n.$$

Então pelo método de sub e supersoluções, (3.2.2) possui uma solução $u_n \in C^{1,\nu}(\bar{B}_n)$ e

$$\varphi \leq u_n \leq z_{n'}^n.$$

Observamos que

$$z_{n'}^n \geq z_{m'}^n \quad \text{para } n' < m'.$$

Definimos

$$u_n^k := u_n|_{B_k}, \quad k < n \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Temos

$$\{u_n^k\} \text{ é limitada uniformemente em } C^{1,\nu}(\bar{B}_k).$$

Como

$$C^{1,\nu}(\bar{B}_k) \xrightarrow{cpt} C^1(\bar{B}_k).$$

Então existe uma subsequência de $\{u_{2k}^k\}$ converge em $C^1(\bar{B}_k)$, isto é,

$$\begin{array}{ccccccc}
u_2^1, & u_3^1, & u_4^1, & \cdots & \xrightarrow{C^1(\bar{B}_1)} & u^1, \\
u_3^2, & u_4^2, & u_5^2, & \cdots & \xrightarrow{C^1(\bar{B}_2)} & u^2, \\
u_4^3, & u_5^3, & u_6^3, & \cdots & \xrightarrow{C^1(\bar{B}_3)} & u^3, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots
\end{array}$$

Definimos

$$u(x) = u^k(x), \quad \forall x \in B_k.$$

Tomando a subsequência diagonal $\{u_{2k}^k\}$ e temos

$$u_{2k}^k \longrightarrow u \;\; \text{em } C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

e

$$u \geq \varphi, \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Portanto $u \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ é solução de (0.0.15).

$\square$

3.3 Subsoluções no Caso de Coeficiente Positivo do Termo Convectivo

Seja $B_R \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ uma bola de centro na origem e raio R. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = \beta(1+\gamma|\nabla u|^p) \quad \text{em } B_R, \\ \\ \qquad u = 1 \quad \text{em } \partial B_R, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

onde $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ é um parâmetro.

Lema 3.4. *Se $0 \leq \gamma \leq (2\beta R)^{-\frac{p}{p-1}}$, então existe uma função radialmente simétrica $u_R \in C^1(\bar{B}_R)$ satisfazendo (3.3.1) no sentido das distribuições.*

Demonstração: Seja $u(x) = u(|x|) = u(r)$, $x \in B_R$, onde $r = |x|$. Provaremos em primeiro lugar que existe uma função $u \in C^1([0,R])$ satisfazendo

$$u(r) = 1 - \int_r^R s^{\frac{1-N}{p-1}} (\int_0^s \beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^p)dt)^{\frac{1}{p-1}} ds, \; 0 \leq r \leq R, \tag{3.3.2}$$

De fato,

Se $\gamma = 0$, a solução de (3.3.2) é dada por

$$u(r) = 1 - \frac{p-1}{p}(\frac{\beta}{N})^{\frac{1}{p-1}}(R^{\frac{p}{p-1}} - r^{\frac{p}{p-1}}).$$

Se $0 < \gamma \leq (2\beta R)^{-\frac{p}{p-1}}$, seja

$$X := (C^1([0,R]), |\cdot|_1), \text{ onde } |u|_1 := \max_{0\leq r\leq R}\{|u(r)|, |u^{'}(r)|\}, \; u \in X.$$

É suficiente encontrar um ponto fixo $u \in X$ do operador

$$(Fu)(r) = 1 - \int_r^R s^{\frac{1-N}{p-1}} (\int_0^s \beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^p)dt)^{\frac{1}{p-1}} ds. \tag{3.3.3}$$

Consideramos

$$\tilde{X} := \{u \in X| - (2\beta)^{\frac{1}{p-1}}\frac{p-1}{p}R^{\frac{p}{p-1}} \leq u(r) \leq 1, \; 0 \leq u^{'}(r) \leq (2\beta R)^{\frac{1}{p-1}}, \; 0 \leq r \leq R\}.$$

Note que $\tilde{X}$ é um subconjunto fechado e convexo de X.

Provaremos usando o Teorema do ponto fixo de Schauder que existe $u \in \tilde{X}$ satisfazendo (3.3.2).

Afirmações:

(i) $F: \ \tilde{X} \to \tilde{X}$ é contínua;

(ii) $\overline{F(\tilde{X})}$ é compacto.

Argumentaremos em dois casos.

(I) $p \in (1,2]$.

Para provar (i), vamos provar primeiro $Fu \in X$, para cada $u \in \tilde{X}$.

Observamos que

$$(Fu)^{'}(r) = r^{\frac{1-N}{p-1}}(\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^p)dt)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{3.3.4}$$

isto é

$$[(Fu)^{'}(r)]^{p-1} = r^{1-N}\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^p)dt$$

e

$$\lim_{r\to 0^+}[(Fu)^{'}(r)]^{p-1} = 0.$$

Assim

$$\lim_{r\to 0^+}(Fu)^{'}(r) = 0.$$

Agora

$$\begin{aligned} (Fu)^{'}(0) &= \lim_{r\to 0^+}\tfrac{(Fu)(r)-(Fu)(0)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0^+}\tfrac{(Fu)^{'}(\xi_r)r}{r} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

onde $\xi_r \in [0,r]$. Portanto $Fu \in X$. Agora vamos provar $Fu \in \tilde{X}$. Pela definição do F temos

$$(i)\ (Fu)(r) \leq 1, \quad (ii)\ -(Fu)(r) \leq \int_r^R s^{\frac{1-N}{p-1}}(\int_0^s \beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^p)dt)^{\frac{1}{p-1}}ds.$$

Então

$$-(2\beta)^{\frac{1}{p-1}}\frac{p-1}{p}R^{\frac{p}{p-1}} \leq (Fu)(r) \leq 1. \tag{3.3.6}$$

Analogamente, temos

$$0 \leq (Fu)^{'}(r) \leq (2\beta R)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.3.7}$$

Então $Fu \in \tilde{X}$. Agora resta provar que F é contínua.

De fato, dada uma sequência $\{u_n\} \subset \tilde{X}$ tal que $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u_0 \in \tilde{X}$. Pela definição da norma do X temos

$$|u_n|_1 \overset{n\to\infty}{\to} |u_0|_1,$$

temos

$$|u_n^{'}| \overset{n\to\infty}{\to} |u_0^{'}|.$$

Agora,

$$|Fu_n|_1 = \max_{0\leq r\leq R}\{|Fu_n|, |(Fu_n)^{'}|\}.$$

Usando (3.3.3) e (3.3.4), tomamos o limite e temos

$$|Fu_n| \overset{n\to\infty}{\to} |Fu_0| \text{ e } |(Fu_n)^{'}| \overset{n\to\infty}{\to} |(Fu_0)^{'}|.$$

Finalmente, temos

$$|Fu_n|_1 \overset{n\to\infty}{\to} |Fu_0|_1$$

e F é contínua.

Para provar (ii), ultilizaremos o teorema de Arzelà-Ascoli. Sejam

$$F\tilde{X} := \{Fu|u \in \tilde{X}\} \text{ e } (F\tilde{X})^{'} := \{(Fu)^{'}|u \in \tilde{X}\}.$$

Por (3.3.6) e (3.3.7) temos que $F\tilde{X}$ e $(F\tilde{X})^{'}$ são limitados. resta provar que $F\tilde{X}$ e $(F\tilde{X})^{'}$ são equicontínuas.

De fato, dados $r_1,\ r_2 \in [0, R]$, por (3.3.7) temos

$$
\begin{aligned}
|(Fu)(r_1) - (Fu)(r_2)| &\leq |(Fu)^{'}(\eta)||r_1 - r_2| \\
&\leq (2\beta R)^{\frac{1}{p-1}}|r_1 - r_2|,
\end{aligned}
$$

onde $\eta \in [r_1, r_2]$, então Fu é Lipschitz e a constante Lipschitzana não depende de $u \in \tilde{X}$. Por (3.3.4) temos

$$
[(Fu)^{'}(r)]^{p-1} = r^{1-N} \int_0^r \beta t^{N-1}(1 + \gamma|u^{'}|^p)dt \tag{3.3.8}
$$

e

$$
r^{N-1}[(Fu)^{'}(r)]^{p-1} = \int_0^r \beta t^{N-1}(1 + \gamma|u^{'}|^p)dt. \tag{3.3.9}
$$

Derivando (3.3.8) em relação r temos

$$
\{[(Fu)^{'}(r)]^{p-1}\}^{'} = (1 - N)r^{-N} \int_0^r \beta t^{N-1}(1 + \gamma|u^{'}|^p)dt + \beta(1 + \gamma|u^{'}|^p)
$$

e

$$
|\{[(Fu)^{'}(r)]^{p-1}\}^{'}| = (N - 1)r^{-N} \int_0^r \beta t^{N-1}(1 + \gamma|u^{'}|^p)dt + \beta(1 + \gamma|u^{'}|^p).
$$

Então

$$
|\{[(Fu)^{'}(r)]^{p-1}\}^{'}| \leq 2\beta N.
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
|[(Fu)^{'}(r_1)]^{p-1} - [(Fu)^{'}(r_2)]^{p-1}| &\leq |\{[(Fu)^{'}(\eta)]^{p-1}\}^{'}||r_1 - r_2|, \\
&\leq 2\beta N|r_1 - r_2|,
\end{aligned} \tag{3.3.10}
$$

onde $\eta \in [r_1, r_2]$.

Definimos

$$
\Phi_p(\tau) = \tau^{p-1}.
$$

Então (3.3.10) fica

$$
|\Phi_p((Fu)^{'}(r_1)) - \Phi_p((Fu)^{'}(r_2))| \leq 2\beta N|r_1 - r_2|.
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
|(Fu)^{'}(r_1)-(Fu)^{'}(r_2)| &= |(\Phi_p)^{-1}[\Phi_p((Fu)^{'}(r_1))]-(\Phi_p)^{-1}[\Phi_p((Fu)^{'}(r_2))]| \\
&\leq |[(\Phi_p)^{-1}]^{'}(\eta)||\Phi_p((Fu)^{'}(r_1))-\Phi_p((Fu)^{'}(r_2))| \\
&\leq \max_{\iota\in[0,2\beta R]}|[(\Phi_p)^{-1}]^{'}(\iota)|2\beta N|r_1-r_2|.
\end{aligned}
$$

onde $\eta\in[\min\{\Phi_p((Fu)^{'}(r_1)),\Phi_p((Fu)^{'}(r_2))\},\max\{\Phi_p((Fu)^{'}(r_1)),\Phi_p((Fu)^{'}(r_2))\}]$. Então $(Fu)^{'}$ é Lipschitz e a constante Lipschitzana não depende de $u\in\tilde{X}$. Portanto $F\tilde{X}$ e $(F\tilde{X})^{'}$ são equicontínuas.

Pelo Teorema de ponto fixo de Schauder [8], existe uma função $u\in\tilde{X}$ tal que (3.3.2) vale.

(II) $p\geq 2$. Para cada $\epsilon>0$ consideramos um problema de perturbação

$$
\begin{cases}
(r^{N-1}[\epsilon u^{'}+|u^{'}(r)|^{p-2}u^{'}(r)])^{'}=\beta r^{N-1}(1+\gamma|u^{'}(r)|^{p}) \quad 0<r<R,\\
u^{'}(0)=0, \quad u(R)=1.
\end{cases}
\tag{3.3.11}
$$

Definimos $\Phi_{p,\epsilon}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$\Phi_{p,\epsilon}(\tau):=\epsilon\tau+|\tau|^{p-2}\tau.$$

e $F_\epsilon:\tilde{X}\to\tilde{X}$

como

$$(F_\epsilon u)(r)=1-\int_r^R(\Phi_{p,\epsilon})^{-1}(s^{1-N}\int_0^s\beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^{p})dt)ds. \tag{3.3.12}$$

Isto é

$$\epsilon r^{N-1}(F_\epsilon u)^{'}(r)+r^{N-1}|(F_\epsilon u)^{'}(r)|^{p-2}(F_\epsilon u)^{'}(r)=\int_0^r\beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^{p})dt.$$

Observamos que $(F_\epsilon u)^{'}\geq 0$. Note que

$$
\begin{gathered}
\epsilon r^{N-1}(F_\epsilon u)^{'}(r)+r^{N-1}[(F_\epsilon u)^{'}(r)]^{p-1}=\int_0^r\beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^{p})dt,\\
\epsilon(F_\epsilon u)^{'}(r)+[(\hat{F}u)^{'}(r)]^{p-1}\leq\int_0^r\beta(1+\gamma|u^{'}|^{p})dt,\\
[(\hat{F}u)^{'}(r)]^{p-1}\overset{r\to 0}{\to}0,
\end{gathered}
$$

Então $F_\epsilon u \overset{r\to 0}{\to} 0$. Análogo, por (3.3.5) temos $(F_\epsilon u)^{'}(0) = 0$.

Por um lado,

$$(i)\ (F_\epsilon u)(r) \leq 1, \quad (ii)\ -(F_\epsilon u)(r) \leq \int_r^R s^{\frac{1-N}{p-1}}(\int_0^s \beta t^{N-1}(1+\gamma|u^{'}|^p)dt)^{\frac{1}{p-1}}ds.$$

Então

$$-(2\beta)^{\frac{1}{p-1}}\frac{p-1}{p}R^{\frac{p}{p-1}} \leq (F_\epsilon u)(r) \leq 1.$$

Por outro lado,

$$(F_\epsilon u)^{'}(r)[\epsilon + (F_\epsilon u)^{'}(r)^{p-2}] \leq 2\beta R$$

e

$$(F_\epsilon u)^{'}(r) \leq (2\beta R)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Então $F_\epsilon \tilde{X} \subset \tilde{X}$.

Para provar (i), resta provar $F_\epsilon : \tilde{X} \to \tilde{X}$ é contínua. Dado uma sequência $\{u_n\} \subset \tilde{X}$ tal que $u_n \overset{n}{\to} u_0 \in \tilde{X}$. Pela definição da norma do X temos

$$|u_n^{'}| \overset{n\to\infty}{\to} |u_0^{'}|.$$

Por (3.3.12) temos que

$$|F_\epsilon u_n| \overset{n}{\to} |F_\epsilon u_0|$$

e

$$(F_\epsilon u_n)^{'}(r) = (\Phi_{p,\epsilon})^{-1}(r^{1-N}\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u_n^{'}|^p)dt).$$

Logo

$$|(F_\epsilon u_n)^{'}| \overset{n}{\to} |(F_\epsilon u_0)^{'}|.$$

Agora, vamos provar (ii). Note que $F_\epsilon \tilde{X}$ e $(F_\epsilon \tilde{X})^{'}$ são limitados e $(F_\epsilon u)$ é Lipschitz e a constante Lipschitzana não depende de $u \in \tilde{X}$.

Por (3.3.12) temos

$$\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r)) = r^{1-N}\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u'|^p)dt. \tag{3.3.13}$$

Derivando (3.3.13) em relação r temos

$$[\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r))]' = (1-N)r^{-N}\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u'|^p)dt + \beta(1+\gamma|u'|^p)$$

e

$$|[\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r))]'| \leq (N-1)r^{-N}\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u'|^p)dt + \beta(1+\gamma|u'|^p).$$

Então

$$|[\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r))]'| \leq 2\beta N.$$

Agora, dados $r_1,\ r_2 \in [0,R]$ temos

$$\begin{aligned} |(F_\epsilon u)'(r_1) - (F_\epsilon u)'(r_2)| &= |\Phi_{p,\epsilon}^{-1}[\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r_1))] - (\Phi_{p,\epsilon})^{-1}[\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r_2))]| \\ &\leq |[\Phi_{p,\epsilon}^{-1}]'(\eta)||\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r_1)) - \Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r_2))| \\ &\leq \max_{\iota\in[0,2\beta R+\epsilon(2\beta R)^{\frac{1}{p-1}}]} |[\Phi_{p,\epsilon}^{-1}]'(\iota)|2\beta N|r_1 - r_2|. \end{aligned}$$

onde $\eta \in [\min\{\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r_1)), \Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r_2))\}, \max\{\Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r_1)), \Phi_{p,\epsilon}((F_\epsilon u)'(r_2))\}]$. Então $(F_\epsilon u)'$ é Lipschitz e a constante Lipschitzana não depende de $u \in \tilde{X}$. (ii) ficou provado.

Pelo Teorema de ponto fixo de Schauder [8], existe uma função $u \in \tilde{X}$ tal que

$$\epsilon r^{N-1}u'(r) + r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u'|^p)dt.$$

Como $u'(r)$ é limitado em $[0,R]$, passando $\epsilon \to 0$ temos (3.3.2).

Final, afirmamos que u é uma solução de (3.3.1) no sentido das distribuições. A idéia da demonstração é baseada de Alves, Gonçalves e Santos [1]

Por (3.3.2) temos

$$u'(r) = r^{\frac{1-N}{p-1}}(\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u'|^p)dt)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Para $r > 0$, temos

$$\begin{aligned} u''(r) &= \quad \tfrac{1-N}{p-1} r^{\frac{2-N-p}{p-1}} \left(\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u'|^p)dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &+ \tfrac{\beta}{p-1} r^{\frac{(1-N)(2-p)}{p-1}} (1+\gamma|u'|^p)\left(\int_0^r \beta t^{N-1}(1+\gamma|u'|^p)dt\right)^{\frac{2-p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Então $u \in C^1([0,R]) \cap C^2((0,R])$ satisfazendo

$$\begin{cases} (r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = \beta r^{N-1}(1+\gamma|u'(r)|^p) \quad 0 < r < R, \\ \\ u'(0) = 0, \quad u(R) = 1. \end{cases} \tag{3.3.14}$$

no sentido clássica.

Logo u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_p u = \beta(1+\gamma|\nabla u|^p) \quad \text{em } B_R - \{0\}, \\ \\ u = 1 \quad \text{quando } |x| = R, \end{cases} \tag{3.3.15}$$

no sentido clássica.

Dada uma função $\phi \in C_0^\infty(B_R - \{0\})$ e integrando, temos

$$\int_{B_R} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi dx + \int_{B_R} \beta(1+\gamma|\nabla u|^p)\phi dx = 0.$$

Considere a função $\eta \in C^\infty(B_R)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 0$ se $|x| \leq 1$ e $\eta(x) = 1$ se $|x| \geq 2$.

Tome $\epsilon > 0$ e considere a função $\psi_\epsilon(x) = \eta(x/\epsilon)$. Se $\phi \in C_0^\infty(B_R)$ então $\psi_\epsilon\phi \in C_0^\infty(B_R - \{0\})$. Trocando ϕ por esta função temos

$$\int_{B_R} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\psi_\epsilon dx + \int_{B_R} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\phi\nabla\psi_\epsilon dx + \int_{B_R} \beta(1+\gamma|\nabla u|^p)\phi\psi_\epsilon dx = 0. \tag{3.3.16}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, vamos provar

$$\int_{B_R} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\psi_\epsilon dx \to \int_{B_R} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx, \tag{3.3.17}$$

$$\int_{B_R} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \phi \nabla \psi_\epsilon dx \to 0, \tag{3.3.18}$$

$$\int_{B_R} \beta(1+\gamma|\nabla u|^p)\phi\psi_\epsilon dx \to \int_{B_R} \beta(1+\gamma|\nabla u|^p)\phi dx. \tag{3.3.19}$$

De fato, (3.3.17) e (3.3.19) segue como aplicação direta do Teorema de Lebesgue. Retornando a (3.3.18) e usando a desigualdade de Höder, temos

$$|\int_{B_R} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \phi \nabla \psi_\epsilon dx| \le C(\int_{B_R} |\nabla u|^p dx)^{\frac{p-1}{p}} (\int_{B_R} |\nabla \psi_\epsilon|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.20}$$

onde C é uma constante positiva. Sejam $z := x/\epsilon$ e $\eta(z) := \psi_\epsilon(x(z))$, daí

$$\frac{\partial \eta}{\partial z_j} = \epsilon \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x_j}$$

e

$$|\nabla \eta|^p = \epsilon^p |\nabla \psi_\epsilon|^p.$$

Logo

$$(\int_{|x|\le 2\epsilon} |\nabla \psi_\epsilon|^p dx)^{\frac{1}{p}} \le C_1 (\int_{|z|\le 2} |\nabla \eta|^p dz)^{\frac{1}{p}} \epsilon^{\frac{N-p}{p}} \to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0,$$

e portanto (3.3.18) vale. Fazendo $\epsilon \to 0$ em (3.3.16) obtemos uma solução no sentido das distribuições de (3.3.1).

$\square$

Para construir a subsolução precisamos o próximo lema importante.

Lema 3.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um domínio limitado e $R := \sup_{x\in\Omega} |x|$. Suponhamos que $a : \bar{\Omega} \to [0, \infty)$, $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são funções contínuas. Então existe uma função $\mathbb{H} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ contínua não decrescente tal que $\mathbb{H}(0) = 0$, $\mathbb{H}(t) > 0$ $t > 0$ e*

$$a(x)f(\eta) + \lambda g(\eta)|\zeta|^\sigma \le \mathbb{H}(\eta)(1 + \Lambda_R |\zeta|^p),$$

onde $x \in \Omega$, $\eta \in [0, \infty)$, $\zeta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $0 \le \sigma \le p$ e $\Lambda_R = (2\mathbb{H}(1)R)^{-\frac{p}{p-1}}$ para cada $0 \le \lambda \le \Lambda_R$.

Demonstração. Seja $\hat{a} := \max_{\bar{\Omega}} a$, afirmamos que existe uma constante positiva Λ_R tal que

$$\Lambda_R = \{2[(\hat{a} + \Lambda_R + 1)(f(1) + g(1) + L(1)) + 1]R\}^{-\frac{p}{p-1}} \tag{3.3.21}$$

e

$$\Lambda_R \overset{R\to 0}{\to} \infty, \ \Lambda_R \overset{R\to\infty}{\to} 0, \tag{3.3.22}$$

onde L é a função dada no **Lema 2.3**.
De fato, (3.3.21) é equivalente a

$$\Lambda_R \{2[(\hat{a} + \Lambda_R + 1)(f(1) + g(1) + L(1)) + 1]\}^{\frac{p}{p-1}} = R^{-\frac{p}{p-1}}. \tag{3.3.23}$$

Definimos

$$F(\Lambda_R) = \Lambda_R \{2[(\hat{a} + \Lambda_R + 1)(f(1) + g(1) + L(1)) + 1]\}^{\frac{p}{p-1}} - R^{-\frac{p}{p-1}}.$$

Observamos que F é crescente e

$$F(0) = -R^{-\frac{p}{p-1}} < 0,$$

$$F(\Lambda_R) > 0 \text{ para } \Lambda_R \text{ grande.}$$

Então para cada $R > 0$ existe único $\Lambda_R > 0$ tal que

$$F(\Lambda_R) = 0,$$

donde vale (3.3.23) e ficou provado a afirmação.

Agora definimos

$$\mathbb{H}(t) = (\hat{a} + \Lambda_R + 1)(f(t) + g(t) + L(t)) + t^2. \tag{3.3.24}$$

Note que

$$(i)\ \Lambda_R = (2\mathbb{H}(1)R)^{-\frac{p}{p-1}},$$

(ii) $\mathbb{H}$ é uma função contínua não decrescente e satisfaz $\mathbb{H}(0) = 0$ e $\mathbb{H}(t) > 0$ $t > 0$.

Para concluir a demonstração, para cada $\lambda \in [0, \Lambda_R]$, faremos em dois casos:

(i) se $|\zeta| \leq 1$,

$$\begin{aligned} a(x)f(\eta) + \lambda g(\eta)|\zeta|^\sigma &\leq a(x)f(\eta) + \lambda g(\eta) \\ &\leq [(\hat{a} + \Lambda_R + 1)(f(\eta) + g(\eta) + L(\eta)) + \eta^2](1 + \Lambda_R|\zeta|^p) \\ &= \mathbb{H}(\eta)(1 + \Lambda_R|\zeta|^p), \end{aligned}$$

(ii) se $|\zeta| \geq 1$,

$$\begin{aligned} a(x)f(\eta) + \lambda g(\eta)|\zeta|^\sigma &\leq a(x)f(\eta) + \lambda g(\eta)|\zeta|^p \\ &\leq [(\hat{a} + \Lambda_R + 1)(f(\eta) + g(\eta) + L(\eta)) + \eta^2](1 + \Lambda_R|\zeta|^p) \\ &= \mathbb{H}(\eta)(1 + \Lambda_R|\zeta|^p). \end{aligned}$$

Ficou provado o lema 3.5.

□

Para cada número inteiro $k \geq 1$ consideramos o problema quasilinear

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f(u) + \lambda g(u)|\nabla u|^\sigma \quad \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \quad u(x) = k \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3.25}$$

onde $\lambda \in [0, \Lambda_R]$ e Λ_R é dado em **Lema 3.5**. Precisamos o próximo lema.

Lema 3.6. *Sejam $p \in (1, \mathbb{N})$ e $\sigma \in [0, p]$. Suponhamos que $a : \overline{\Omega} \to [0, \infty)$ e $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são funções contínuas tais que $f(0) = g(0) = 0$. Então existe $u \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$ $(0 < \nu < 1)$ satisfazendo (3.3.25) no sentido das distribuições para cada k.*

Demonstração. Note que

$$\bar{u} = k$$

é supersolução de (3.3.25).

Tomamos em (3.3.1) $\beta = \mathbb{H}(1) > 0$, para cada $\lambda \in [0, (2\beta R)^{-\frac{p}{p-1}}]$ uma vez por **Lema 3.4** temos uma função u_R satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_p u_R = \mathbb{H}(1)(1 + \Lambda_R |\nabla u_R|^p) & \text{em } \Omega, \\ -(2\beta)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} R^{\frac{p}{p-1}} \leq u_R(r) \leq 1 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.3.26}$$

onde $\mathbb{H}$ e Λ_R são dados do **Lema 3.5**. Pelo **Lema 3.5**, então u_R é sub solução de (3.3.25). Pelo Príncipio de Comparação (cf. **Teorema A.2**) temos

$$u_R \leq \bar{u},$$

pelo Teorema de sub e supersoluções (cf. **Teorema A.1**), o problema (3.3.25) possui uma solução $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_R \leq u \leq \bar{u} = k$. Pela C^1-regularidade (cf. **Teorema A.3**), $u \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$. Como $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $|\nabla u|$ é limitado. Logo

$$\begin{aligned} \Delta_p u &= a(x) f(u) + \lambda g(u) |\nabla u|^\sigma \\ &\leq \mathbb{H}(u)(1 + \Lambda_R |\nabla u|^p) \\ &\leq C\mathbb{H}(u). \end{aligned}$$

Usando $f(0) = g(0) = 0$ temos $\mathbb{H}(0) = 0$. Então

$$\Delta_p u \leq C\mathbb{H}(u) \ \text{ em } \Omega,$$

$$\Delta_p 0 = 0 \geq C\mathbb{H}(0) \ \text{ em } \Omega,$$

$$u \geq 0 \ \text{ em } \partial\Omega,$$

pelo **Teorema A.2** temos $u \geq 0$ em Ω.

□

3.4 Resultado Príncipal no Caso de Coeficiente Positivo do Termo Convectivo

Afirmamos que existe uma sequência monótonas $\{u_k\} \subset C^1(\Omega)$ satisfazendo (no sentido das distribuições)

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f(u) + \lambda g(u)|\nabla u|^{\sigma} \;\; \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \;\; \text{em } \Omega, \;\; u(x) = k \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

A ideia é baseada de Lair, Proano & Wood [26].
Consideramos o problema

$$\begin{cases} \Delta_p \delta = a(x)h(\delta) \quad \text{em } \Omega, \\ \\ \delta \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \;\; \delta(x) \stackrel{x \to \partial\Omega}{\rightarrow} \infty, \end{cases} \tag{3.4.2}$$

onde h é a função real não negativa e não decrescente satisfazendo a condição de Keller-Osserman. Pelo **Lema 2.1**, (3.4.2) possui uma solução $\delta \in C^1(\Omega)$.
Tomando $k = 1$ no **Lema 3.6**, então existe uma função $u_1 \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$ $\nu \in (0,1)$ satisfazendo (3.3.25) no sentido das distribuições.
Pelo **Teorema A.2** temos

$$u_1 \leq \delta.$$

Consideremos $\underline{u} = u_1$ e $\overline{u} = \delta$ como sub e supersoluções do problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f(u) + \lambda g(u)|\nabla u|^{\sigma} \;\; \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \;\; \text{em } \Omega, \;\; u(x) = 2 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Pelo **Teorema A.1**, (3.4.3) possui uma solução $u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_1 \leq u_2 \leq \delta$, pela C^1-regularidade (cf. **Teorema A.4**) temos $u_2 \in C^1(\Omega)$.
Construimos indutivamente $u_1, \; u_2, \; \cdots \; u_k$ funções em $C^1(\Omega)$ tais que $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_k \leq \delta$ satisfazendo (3.4.1) no sentido das distribuições.
Consideremos agora $\underline{u} = u_k$ e $\overline{u} = \delta$ como sub e supersoluções do problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)f(u) + \lambda g(u)|\nabla u|^\sigma \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \quad u(x) = k+1 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Pelo **Teorema A.1**, (3.4.4) possui uma solução $u_{k+1} \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_k \leq u_{k+1} \leq \delta$, pela C^1-regularidade (cf. **Teorema A.4**) temos $u_{k+1} \in C^1(\Omega)$.
Consequentemente, existe uma função $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ tal que

$$u_k \to u \text{ pontualmente em } \Omega,$$

$$u_k \leq u \leq \delta. \tag{3.4.5}$$

Seja U um domínio regular tal que $U \subset\subset \Omega$. Afirmamos que

$$\int_U |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi dx + \int_U [a(x)f(u) + \lambda g(u)|\nabla u|^\sigma]\phi dx = 0, \ \phi \in C_0^\infty(U). \tag{3.4.6}$$

De fato, por (3.4.5) e C^1-regularidade (cf. **Teorema A.4**), existe uma constante $C_U > 0$ tal que

$$u_k \leq C_U, \ \forall k \text{ em } \bar{U}$$

e

$$|\nabla u_k| \leq C_U, \ \forall k \text{ em } \bar{U}.$$

Então

$$\nabla u_k \to \nabla u \text{ pontualmente.}$$

Por (3.4.1) temos

$$\int_U |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \cdot \nabla\phi dx + \int_U [a(x)f(u_k) + \lambda g(u_k)|\nabla u_k|^\sigma]\phi dx = 0, \ \phi \in C_0^\infty(U). \tag{3.4.7}$$

Passando o limite em (3.4.7) e usando Teorema de Lebesgue temos (3.4.6).
Como $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, pela C^1-regularidade (cf. **Teorema A.4**), $u \in C^{1,\nu}_{loc}(\Omega)$.

Finalmente, vamos provar $u \overset{x\to\partial\Omega}{\to} \infty$. De fato, tome $(x_l) \subseteq \Omega$ uma sequência tal que $x_l \to x$ para algum $x \in \partial\Omega$. Então

$$k = \lim_{l\to\infty} \inf u_k(x_l) \leq \lim_{l\to\infty} \inf u(x_l), \text{ para todo } k,$$

mostramos que $u(x_l) \stackrel{l\to\infty}{\to} \infty$ e $u(x) \stackrel{x\to\partial\Omega}{\to} \infty$.

$\square$

APÊNDICE A

Sub e Supersoluções, Princípio de Comparação, C^1-regularidade

Neste Apêndice demonstraremos um teorema de sub e supersoluções usando um resultado de Boccardo, Murat & Puel [5]. Também demonstraremos o príncipio de comparação. No final, enunciamos dois resultados de C^1-regularidade para soluções fracas devido Lieberman [27] e DiBenedetto [9]. Os resultados são usados frequentemente no nosso trabalho.

A.1 Sub e Supersoluções

Consideramos o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = \xi(x, u, \nabla u), & \text{em } \Omega, \\ u = \rho, \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é domínio limitado e $\xi : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ é uma função Carathèodory e ρ é uma constante positiva.

Agora, definimos:

uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma solução do (A.1.1) se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \phi + \int_\Omega \xi(x,u,\nabla u)\phi dx = 0,\ \ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$u - \rho \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

uma função $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma subsolução do (A.1.1) se

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi + \int_\Omega \xi(x,\underline{u},\nabla \underline{u})\phi dx \le 0,\ \ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \ \phi \ge 0,$$

$$(\underline{u} - \rho)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

uma função $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma supersolução do (A.1.1) se

$$\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^{p-2}\nabla \bar{u} \cdot \nabla \phi + \int_\Omega \xi(x,\bar{u},\nabla \bar{u})\phi dx \ge 0,\ \ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \phi \ge 0,$$

$$(\bar{u} - \rho)^- \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

O teorema seguinte é baseado no Teorema 2.1 de Boccardo, Murat & Puel [5].

Teorema A.1. *Suponhamos que* $\underline{v}_\rho$ *e* $\bar{v}_\rho \in L^\infty(\Omega)$ *são sub e supersoluções respectivamente do (A.1.1). Se a função* ξ *satisfaz*

$$|\xi(x,\eta,\zeta)| \le c(|\eta|)(1 + |\zeta|^p),\quad x \in \Omega, \tag{A.1.2}$$

para alguma função crescente $c:\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$*. Então (A.1.1) possui uma solução* $v_\rho \in W^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $\underline{v}_\rho \le v_\rho \le \bar{v}_\rho$*.*

Demonstração. Tome $u = v - \rho$ em Ω, temos

$$\Delta_p v = \Delta_p u,$$

$$\xi(x,v,\nabla v) = f(x, u+\rho, \nabla(u+\rho)).$$

Assim, o problema (A.1.1) fica

$$\begin{cases} \Delta_p u = \xi(x, u+\rho, \nabla(u+\rho)), & \text{em } \Omega \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases} \tag{A.1.3}$$

Como $\underline{v}$ e $\overline{v}$ são sub e supersoluções do problema (A.1.1), temos

$$\begin{aligned} \Delta_p(\underline{v}-\rho) &= \Delta_p \underline{v} \\ &\geq \xi(x, \underline{v}, \nabla \underline{v}) \\ &= \xi(x, \underline{v}-\rho+\rho, \nabla(\underline{v}-\rho+\rho)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_p(\overline{v}-\rho) &= \Delta_p \overline{v} \\ &\leq \xi(x, \overline{v}, \nabla \overline{v}) \\ &= \xi(x, \overline{v}-\rho+\rho, \nabla(\underline{v}-\rho+\rho)). \end{aligned}$$

Então $\underline{v}-\rho$ e $\overline{v}-\rho$ são sub e supersoluções de (A.1.3) e $\underline{v}-\rho \leq \overline{v}-\rho$. Pelo teorema 2.1 do [5], o problema (A.1.3) possui uma solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\underline{v}-\rho \leq u \leq \overline{v}-\rho,$$

e temos

$$v = u+\rho \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

é uma solução de (A.1.1) e $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

Pela $C^{1,\nu}$-regularidade de Lieberman [4] temos também $v \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$, para algum $\nu \in (0,1)$.

□

A.2 Princípio de Comparação

O lema seguinte pode ser encontrado em Simom [37] e será ultilizado no próximo resultado.

Lema A.1. *Seja $p > 1$. Existe uma constante $c_p > 0$ tal que, para todo $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^N$,*

$$(|s_2|^{p-2}s_2 - |s_1|^{p-2}s_1,\ s_2 - s_1) \geq \begin{cases} c_p|s_2 - s_1|^p, & se\ p \geq 2, \\ c_p\frac{|s_2-s_1|^p}{(|s_2|+|s_1|)^{2-p}}, & se\ p \leq 2, \end{cases}$$

onde $(,)$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$.

Agora demonstramos um resultado que será ultilizada na demonstração do Príncipio de Comparação.

Proposição A.1. *Sejam $u,\ v \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $p > 1$, então*

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot \nabla(u-v)dx \geq \begin{cases} c_p \int_\Omega |\nabla(u-v)|^p dx, & se\ p \geq 2, \\ c_p \frac{(\int_\Omega |\nabla(u-v)|^p dx)^{\frac{2}{p}}}{(\int_\Omega (|\nabla u|+|\nabla v|)^p dx)^{\frac{2-p}{p}}}, & se\ p \leq 2. \end{cases}$$

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos:

Caso $p \geq 2$: Neste caso, o resultado é uma aplicação imediata do lema acima.

Caso $p \leq 2$: Usando desigualdade de Höder temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(u-v)|^p dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla(u-v)|^p}{(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(p-2)}{2}}}(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(p-2)}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u-v)|^2}{(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2}} dx\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \end{aligned}$$

Então, usando o lema acima, temos que

$$\begin{aligned}\frac{(\int_\Omega |\nabla(u-v)|^p dx)^{\frac{2}{p}}}{(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^p dx)^{\frac{2-p}{p}}} &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla(u-v)|^2}{(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2}} dx \\ &\leq \frac{1}{c_p}\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(u-v)dx,\end{aligned}$$

daí segue o resultado.

□

Teorema A.2. ***(Príncipio de Comparação)*** *Seja $G : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não decrescente em relação com segunda variável. Sejam $u,\ v \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx + \int_\Omega G(x,u)\varphi dx \leq 0$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi dx + \int_\Omega G(x,v)\varphi dx \geq 0$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ não negativa. Então, $u \leq v$ em $\partial\Omega$ implica $u \leq v$ em Ω.

Demonstração Tomamos $\varphi = (u-v)^+ \geq 0$ e temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \quad \nabla(u-v)^+ - \textstyle\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(u-v)^+ dx \leq$$

$$\textstyle\int_\Omega G(x,u)(u-v)^+ - \int_\Omega G(x,v)(u-v)^+ dx.$$

e

$$\begin{aligned}\int_{u\geq v} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(u-v)dx &\leq \int_{u\geq v} (G(x,u) - G(x,v))(u-v)dx \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a proposição acima temos

$$\int_{u\geq v} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(u-v)dx \geq \begin{cases} c_p \int_{u\geq v} |\nabla(u-v)|^p dx, & \text{se } p \geq 2, \\ c_p \frac{(\int_{u\geq v} |\nabla(u-v)|^P dx)^{\frac{2}{p}}}{(\int_{u\geq v} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p dx)^{\frac{2-p}{p}}}, & \text{se } p \leq 2. \end{cases}$$

Então

$$\nabla(u-v)^+ = 0.$$

Logo

$$(u-v)^+ = 0,$$

isto é

$$u \leq v \text{ em } \Omega.$$

□

A.3 C^1-regularidade

Enuciamos agora dois resultados de C^1-regularidade que pode ser encontrado em [27] e em [9].

Teorema A.3. *Sejam $\alpha,\ \Lambda,\ M_0$ constantes positivas com $\alpha \leq 1$ e seja Ψ uma constante não-negativa. Suponhamos que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com $\partial\Omega$ de $C^{1,\alpha}$ e vale*

$$|\xi(x,\eta,\zeta)| \leq \Lambda(1+|\zeta|^p)$$

para todo $(x,\eta,\zeta) \in \partial\Omega \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Se $\rho \leq \Psi$ e u é uma solução fraca limitada de (A.1.1), então existe uma constante positiva $\beta = \beta(\alpha,\Lambda,p,\mathbb{N})$ tal que $u \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ e

$$|u|_{1,\beta} \leq C(\alpha,\Lambda,p,M_0,\mathbb{N},\Psi,\Omega).$$

Teorema A.4. *Seja Λ uma constante positiva. Suponhamos que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e vale*

$$|\xi(x,\eta,\zeta)| \leq \Lambda(1+|\zeta|^p)$$

para todo $(x, \eta, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *é uma solução fraca de*

$$\Delta_p u = \xi(x, u, \nabla u), \quad \text{em } \Omega,$$

então para cada subdomínio $D \subset\subset \Omega$ *existe constantes positivas* α *e* C *dependendo* $\Lambda, p, \mathbb{N}, |u|_{\infty}, D$ *tais que* $u \in C^{1,\beta}(D)$ *e*

$$|u|_{1,\alpha} \leq C.$$

APÊNDICE B

Soluções Tipo Ground State

Neste Apêndice demonstraremos um resultado técnico.

Demonstração da observação 0.2(a). Se a satisfaz (0.0.20), então

$$\bar{w}(r) = \int_0^\infty (r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} M_a(t)dt)^{\frac{1}{p-1}} dr - \int_0^r (t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} M_a(s)ds)^{\frac{1}{p-1}} dt$$

é uma solução radialmente simétrica do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p \bar{w} = M_a(|x|), \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \bar{w} > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \ \bar{w}(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{B.0.1}$$

Novamente por (0.0.20) temos

$$\int_0^\infty (r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} m_a(t)dt)^{\frac{1}{p-1}} dr < \infty$$

onde $m_a(r) = \min_{|x|=r} a(x)$.

Logo, $\underline{w}$ definida por

$$\underline{w}(r) = \int_0^\infty (r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} m_a(t)dt)^{\frac{1}{p-1}} dr - \int_0^r (t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} m_a(s)ds)^{\frac{1}{p-1}} dt$$

é uma solução radialmente simétrica do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p \underline{w} = m_a(|x|), \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \\ \underline{w} > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \ \underline{w}(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{B.0.2}$$

Afirmamos que

$$\underline{w} \leq \bar{w} \text{ em } [0,\infty).$$

Consideremos uma sequência de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p w_i = m_a(|x|), \quad \text{em } B_i, \\ \\ w_i > 0, \quad \text{em } B_i, \ w_i(x) = 0 \ \text{ em } \partial B_i. \end{cases} \tag{B.0.3}$$

onde $B_i \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma bola de centro na origem e raio i.

Note que

$$w_i(r) = \int_0^i (r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} m_a(t)dt)^{\frac{1}{p-1}} dr - \int_0^r (t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} m_a(s)ds)^{\frac{1}{p-1}} dt$$

é solução de (B.0.3).

Além disso,

$$w_i \leq \bar{w} \text{ em } B_i,$$

$$w_i \leq \underline{w} \text{ em } B_i,$$

e

$$w_i \overset{i}{\to} \underline{w}.$$

Agora, fixamos $i \in \mathbb{N}$ e consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w^i = a(x), \quad \text{em } B_i, \\ \\ w^i > 0, \quad \text{em } B_i, \ w^i(x) = 0 \ \text{ em } \partial B_i. \end{cases} \tag{B.0.4}$$

Observamos que (B.0.4) possui uma subsolução $w_i \in C^1(\bar{B}_i)$ e uma supersolução $\bar{w} \in C^1(\bar{B}_i)$, além disso, $w_i \leq \bar{w}$. Pelo teorema de sub e supersoluções e regularidade [27], o problema (B.0.4) possui uma solução $w^i \in C^{1,\nu}(B_i)$, $\nu \in (0,1)$ e $w_i \leq w^i \leq \bar{w}$.

Para cada $j > i$ número inteiro, definimos

$$w_j^i(x) = w_j(x)|_{B_i}, \text{ para todo } x \in B_i.$$

Temos que w_j^i é limitada, então existe uma subsequência que denotamos ainda como w_j^i converge para w_{0i}.

Assim temos

$$\begin{array}{ccccc} w_2^1, & w_3^1, & w_4^1, & \cdots \overset{C^1(\bar{B}_1)}{\longrightarrow} & w_{01}, \\ w_3^2, & w_4^2, & w_5^2, & \cdots \overset{C^1(\bar{B}_2)}{\longrightarrow} & w_{02}, \\ w_4^3, & w_5^3, & w_6^3, & \cdots \overset{C^1(\bar{B}_3)}{\longrightarrow} & w_{03}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array}$$

Definimos

$$w(x) = w_{0i}(x), \quad \forall x \in B_i.$$

Tomando a subsequência diagonal $\{w_{2i}^i\}$, temos

$$w_{2i}^i \longrightarrow w \;\text{ em } C^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$w_i \leq w \leq \bar{w}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Portanto $\underline{w} \leq w \leq \bar{w}$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, isto é

$$w(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0$$

e $w \in C^1(\mathbb{R}^N)$ é solução de ((0.0.18)).

$\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Alves C. O., Gonçalves J. V. & Santos C. A., *Existence and asymptotic behavior of ground states for quasilinear singular equations involving Hardy-Sobolev exponents*, J. Math. Anal. Appl., 322 (2006) 298-315.

[2] Bieberbach, L., $\Delta u = e^u$ *und die automorphem Funktionen*, Math. Ann. 77 (1916), 173-212.

[3] Brézis, H. & Kamin, S., *Sublinear elliptic equation em* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, Manuscripta Math. 74 (1992) 87-106

[4] Bandle, C. & Marcus, M., *Asymptotic behaviour of solutions and their derivatives for semilinear elliptic problems with blow-up on the boundary*, Ann. Inst. H. Poincaré. Anal Non Linéaire 12 (1995) 155-171.

[5] Boccardo, L., Murat, F. & Puel, P. J., *Résultats d´existence pour certains problémes elliptiques quasilinéares*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, classe di Scienze 4^{e}série tome 11, no 2 (1984) 213-235.

[6] Covei, D-P, *Large and entire large solutions for a quasilinear problema*, Nonlinear Anal. (2009), 1738-1745.

[7] Cheng, K-S & Ni, W-M, *On the structure of the conformal scalar curvature equation on* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, Ind. Univ. Math. Journal, Vol. 41, no. 01 (1992), 261-278.

[8] Cirstea, F. & Radulescu, V., *Blow-up boundary solutions of semilinear elliptic problem*, Nonlinear Anal. 48 (2002) 521-534.

[9] DiBenedetto, E., *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. 7 (1983), 827-850.

[10] Díaz, J. I., *Nonlinear partial differential equations and free boundaries VOLUME I Elliptic equations*, Universidad Complutense, Madrid 1985.

[11] Du, Y. & Guo, Z. M., *Liouville type results and eventual flatness of positive solutions for p-Laplacian equations*, Adv. Dif. Equa., Vol. 7 No. 12(2002) 1479-1512.

[12] Giarrusso, E. , *Asymptotic bavior of large solutions of an elliptic equation in a borderline case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331(2000) 777-782.

[13] Gonçalves, J. V. & Roncalli, A., *Boundary blow-up solutions for a class of elliptic equations on a bounded domain*, Appl. Math. Comp. 182(2006), 13-23.

[14] Gonçalves, J. V. & Roncalli, A., *Existence, non-existence and asymptotic behavior of blow-up entire solutions of semilinear equation*, J. Math. Anal. Appl. 321 (2006), 524-536.

[15] Gonçalves, J. V. & Silva, F. K., *Solutions of quasilinear elliptic equations in RN decaying at infinity to a non-negative number*, Complex Variables and Elliptic Equa., Vol.E (2009), 1-26.

[16] Gonçalves, J. V. & Silva, F. K., *Existence and non-existence of ground state solutions for elliptic equations with a convection term*, Nonlinear Anal., Vol.72 (2009), 905-915.

[17] Gonçalves, J. V. & Santos, C. A., *Existence and asymptotic behavior of nonradially symmetric ground states of semilinear singular elliptic equations*, Nonlinear Anal., Vol.65(2006), 719-727.

[18] Gilbarg, D. & Trudinger, N. S., *Elliptic partial dfferential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1998).

[19] Iscoe, I., *On the supports of measure-valued critical branching Brownian motion*, The Probab. 16 (1988), 200-221.

[20] Keller, J. B., *On solutions of $\Delta u = f(u)$*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 503–510.

[21] Lair, A. V., *Large solutions of mixed sublinear/superlinear elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. 346 (2008), 99-106.

[22] Lair, A. V., *A necessary and suficiente condition for existence of large solutions to semilinear elliptic equation*, J. Math. Anal. Appl.. 240 (1999), 205-218.

[23] Lair, A. V. & Mohammed, A., *Entire large solutions of semilinear elliptic equation of mixed type*, Comm. on Pure and Applied Analysis, Vol 8 no 5 (2009), 1607-1618.

[24] Lair, A. V. & Wood, A. W., *Large solutions of semilinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. 37 (1999), 805-812.

[25] Lair, A. V. & Wood, A. W., *Large solutions of semilinear elliptic equations with nonlinear gradient term*, Inter. J. Math. and Mathematical Sciences, Vol. 22 no. 4 (1999), 869-883.

[26] Lair, A. V., Zachary, J. P., & Wood, W. A., *Existence of large solutions to nonmonotone semilinear elliptic equations*, Aust. J. Math. Anal. Appl., Vol. 4 no. 2, Art. 14 (2007), 7pp.

[27] Lieberman, G. M., *Boundary regularity solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal., Vol. 12 no. 11 (1988), 1203-1219.

[28] Lazer, A. C. & Mckenna, P. J., *On singular boundary value problems for the Monge-Ampère operator*, J. Math. Anal. 197 (1996) 341-362.

[29] Lasry, J. M. & Lions, P. L., *Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constrains*, Math. Ann. 283 (1989) 583-630.

[30] Liu, C. & Yang, Z., *Existence of large solutions for a quasilinear elliptic problem via explosive sub-super solutions*, Applied Mathematics and Computation, (2008), 414-424.

[31] Matero, J., *Quasilinear elliptic equation with boundary blow-up*, Journal D´analyse Mathematique, Vol.69 (1996), 229-247.

[32] MOHAMMED, A., *Existence and asymptotic behavior of blow-up solutions to weighted quasilinear equations*, J. Math. Anal. Appl. 298 (2004), 621-637.

[33] NI, W-M , *On the elliptic equations* $\Delta u + Ku^{\frac{N+2}{N-2}} = 0$*, its generalizations, and applications in geometry*, Ind. Univ. Math. Journal, Vol. 31, no. 004 (1982), 493-529.

[34] OSSERMAN, R., *On inequality* $\Delta u \geq f(u)$, Pacif J. Math., **7**(1957), 1641-1647.

[35] PORRETTA, A. & VÉRON, L., *Symmetry of large solutions of nonlinear elliptic equations in a ball*, J. Funct. Anal. 236 (2006) 581-591.

[36] RADEMACHER, H., *Einige besondere probleme partiller Differentialgleichungem, Die differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, 2nd ed. Rosenberg, New York, (1943), 838-845.

[37] SIMON, J., *Regularité de la solution d'une equation non linéaire das* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, Journeés d'analyse non linéaire, Proceedings, Besançon, Françe, 1977, Lectures Notes in Mathematics, 665, Springer-Verlag, (1978).

[38] YANG, Z., *Existence of explosive positive solutions of quasilinear elliptic equations*, Applied Mathematics and Computation 171 (2006), 581-588.

[39] YANG, Z., *On the existence of multiple positive entire solutions for a class of quasilinear elliptic equations*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 16,(2006) 1-19.

[40] YANG, Z., XU, B., & WU, M., *Existence of positive boundary blow-up solutions for quasilinear elliptic equations via sub and super solutions*, Applied Mathematics and Computation 188 no. 1 (2007) 492-498.

[41] YE, D. & ZHOU, F., *Existence and nonexistence of entire large solutions for some semilinear elliptic equations*, J. Partial Differential Equations 21 (2008), 253-262.

[42] ZHANG, Z., *The asymptotic behaviour of solutions with boundary blow-up for semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms*, Nonlinear Anal. 62 (2005) 1137-1148.

[43] ZHANG, Z., *Existence of large solutions for a semilinear elliptic problem via explosive sub-super solutions*, Electronic Journal of Differential Equations, no. 2 (2006), 1-8.

[44] Zhang, Z., *A remark on the existence of positive entire solutions of a sublinear elliptic problem*, Nonlinear Anal. 67 (2007), 147-153.