Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre um Método Geral para se obter Leis Fortes dos Grandes Números.

por

Grace Kelly Souza Carmo Goulart

Brasília

2010

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

Sobre um Método Geral para se obter Leis Fortes dos Grandes Números.

por

Grace Kelly Souza Carmo Goulart *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 10 de agosto de 2010

Comissão Examinadora:

____
Prof. Ary Vasconcelos Medino - UnB - (Orientador)

____
Prof. Leandro Martins Cioletti - UnB - (Membro)

____
Prof^a. Sílvia Regina Costa Lopes - UFRGS - (Membro)

*A autora foi bolsista do CNPQ durante a elaboração deste trabalho.

Ao meu esposo Claudiney, minha filha Yasmim e meus pais Wilson e Eunice.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, que com sua infinita bondade, sempre me dá mais do que mereço.

Ao meu esposo, pela paciência e ajuda em todos os momentos, não existem palavras para agradecer tudo de bom que ele faz por mim, ele é muito mais que um companheiro, é um amigo, um pai, um irmão. À minha filha, por ter aceitado minha ausência durante todo o mestrado. Aos meus pais Wilson e Eunice, meus irmãos Gil César e Kadygia, pelo apoio em todos os momentos, que sempre acreditaram em minha capacidade. Ao meu sogro Osório e minha sogra Maria das Mercês, que me acolheram como uma filha. Aos meus cunhados Cláudio Marzo, Claudiano e Cláudio Goulart.

Ao professor orientador Ary Vasconcelos Medino, pela paciência e ajuda, sem ele, não teria conseguido desenvolver este trabalho. Aos membros da banca Leandro e Sílvia, pela disponibilidade e pelas valiosas sugestões.

Aos meus colegas de turma do segundo semestre de 2008, Tarcísio e Weslley, por terem me dado o apoio no início do semestre. Também aos colegas Bruno Nunes, Bruno César, Eduardo, Thaynara e Wembesom, pela amizade e ajuda com as disciplinas. Aos queridos amigos da turma do primeiro semestre de 2009, Elis, Hudson, Jairo, Joaby e Thiago Lima, pela amizade e pelos estudos em conjunto.

Em especial as amigas, Mônica, Laura e Mariana, pela ajuda em tudo que precisei, sempre dispostas em ajudar, e me dar apoio sempre. Aos colegas Renato e Andrey, pelo incentivo, em procurar o professor Ary para me orientar, e pelas dúvidas tiradas com eles.

Aos professores que ministraram disciplinas em especial à professora Cátia e ao professor Marcelo. Ao professor Elves, pela amizade. Aos amigos que me deram apoio e ajuda, Anyelle, Manuela, Thiago Gonçalves, Dayanne, Ricardo, Eunice, Kéllem ,Walter, Luciene, Danielle, Kaliana, Regina e André Caldas.

Aos professores de graduação Fabiano, Luciana e Tonires, por me incentivarem em fazer Mestrado e pela ajuda, sempre que precisei. Aos professores Iron, Jaqueline e Marta, muito queridos, da época da graduação. Aos amigos da graduação, Flávio, Marta Regina, Murilo e Marlise. Aos amigos de Jataí, Taís, Andrea, Marco Aurélio e Zilda, muito obrigada pela amizade de todos vocês.

A todas as pessoas, que de alguma forma, me ajudaram a chegar aqui, nesta fase tão importante em minha vida.

Enfim, agradeço ao CNPQ, pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, iremos apresentar um Método Geral para se obter Leis Fortes dos Grandes Números e aplicá-lo em sequências de variáveis aleatórias Positivamente e Negativamente Associadas. Faremos uma comparação entre a demonstração de um teorema clássico de Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias independentes e suas versões para variáveis aleatórias Positivamente e Negativamente Associadas. Apresentaremos um resultado sobre a taxa de convergência de $\frac{S_n}{n}$, no caso de variáveis aleatórias Positivamente Associadas.

Palavras chave: Lei Forte dos Grandes Números, Variáveis Aleatórias Associadas, Taxa de convergência.

Abstract

In this dissertation we will present a General Method in order to obtain Strong Laws of Large Numbers and we will apply it in sequences of positively and negatively associated random variables . We will make a comparison among the proof of a classical Strong Law of Large Numbers Theorem for independent random variables and its versions for positively and negatively associated random variables. We will present a result on the convergence rate of $\frac{S_n}{n}$, in the case of positively associated random variables.

Key words: Strong Law of Large Numbers, Associated Random Variables, Convergence rate.

Sumário

Lista de Notações

v.a.'s - variáveis aleatórias.

L.F.G.N. - Lei Forte dos Grandes Números.

$h(x) \searrow$ - $h(x)$ é não-crescente.

$h(x) \nearrow$ - $h(x)$ é não-decrescente.

PA - Positivamente Associadas (*Definição pag. 20*).

NA - Negativamente Associadas (*Definição pag. 40*).

Introdução

O conceito de variáveis aleatórias Positivamente Associadas (associadas, na terminologia original) foi introduzido na literatura estatística por Lehmann [22] em 1966. Em 1967, devido à sua aplicação em Teoria da Confiabilidade, Esary et. al. [17] no artigo *Association of Random Variables, with Applications*, também introduziram a noção de associação. O mesmo conceito foi usado em Mecânica Estatística sob o nome de desigualdades FKG, iniciais dos autores Fortuin, Kasteleyn, Ginibre em 1971 [19]. Discussões extensas sobre associação também podem ser encontradas em livros recentes e monografias, por exemplo Cohen e Sackrowitz [14, 15]. Newman [23] foi o primeiro a estabelecer o Teorema do Limite Central para variáveis aleatórias Positivamente Associadas. Outros importantes trabalhos do mesmo autor, individualmente ou em conjunto são Newman [24] e Newman e Wright [25, 26]. Há uma melhoria significativa no número de contribuições do ponto de vista de probabilidade e estatística. Algumas delas são representadas pelos artigos de Cox e Grimmett [16], Birkel [4, 5, 6], Bagai e Prakasa Rao [2, 3], Roussas [28, 29, 30, 31, 32], Yu [35] e Cai e Roussas [7, 8, 9, 10]. *

Este trabalho é baseado principalmente no artigo *A General Method to the Strong Law of Large Numbers and its Applications*, dos autores *Shanchao Yang, Chun Su e Keming Yu* [34]. O objetivo é descrever um resultado geral sobre a Lei Forte dos Grandes Números e aplicá-lo em sequências de variáveis aleatórias Positivamente Associadas e Negativamente Associadas. Para isso, consideraremos versões do seguinte teorema para variáveis aleatórias independentes:

*As referências deste parágrafo, foram tiradas da Introdução de [20].

Teorema 0.1. *Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $EX_n = 0$ para cada n, e $0 < b_n \uparrow \infty$. Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função par e contínua em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{\varphi(x)}{|x|} \nearrow, \quad \frac{\varphi(x)}{x^2} \searrow, \quad \textit{quando} \ |x| \uparrow \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_n))}{\varphi(b_n)} < \infty.$$

Então $\displaystyle \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} X_j \to 0 \quad q.c.$

Observe que no teorema acima, se considerarmos $\varphi(x) = x^2$ e $b_n = n$ obtemos a 1^a *Lei Forte de Kolmogorov*, que é clássica nos estudos de probabilidade. Ela é um dos casos mais práticos de Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias independentes. Mas nem sempre é possível se ter a independência das variáveis aleatórias, por isso há diversos estudos sobre variáveis aleatórias dependentes.

Em nosso trabalho, iremos tratar de um tipo de dependência. Apresentaremos versões do teorema acima para variáveis aleatórias Positivamente Associadas e Negativamente Associadas:

(i) *Sejam $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias Positivamente Associadas com $EX_n = 0$ para todo n, e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função par, com $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, e tal que*

   (a) *φ é não-decrescente em $[0, \infty)$ e $\dfrac{\varphi(x)}{x} \searrow$, $x \to \infty$ ou*

   (b) $\dfrac{\varphi(x)}{x} \nearrow$ *e* $\dfrac{\varphi(x)}{x^2} \searrow$, $x \to \infty$.

   Suponha que $\{b_n\}$ é uma sequência não-decrescente de números positivos que satisfaça $1 \leq \dfrac{b_{2n}}{b_n} \leq c < \infty$, para algum $c > 1$, para todo $n \geq 1$, e que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} u^{\frac{1}{2}}(2^i) < \infty$ onde $u(n) = \displaystyle\sup_{i\geq 1} \sum_{j:j-i\geq n} Cov(X_i, X_j)$. Adicionalmente suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} < \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_n))}{\varphi(b_n)} < \infty \quad e \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\leq j\leq n} \frac{b_j^2 \ E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} < \infty.$$

   Então $\dfrac{S_n}{b_n} \to 0 \quad q.c.$

(ii) *Sejam* $\{X_n, n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias Negativamente Associadas com* $EX_n = 0$ *para todo* n, *e* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função par, com* $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, *e tal que*

(a) φ *é não-decrescente em* $[0, \infty)$ *e* $\dfrac{\varphi(x)}{x} \searrow$, $x \to \infty$ *ou*

(b) $\dfrac{\varphi(x)}{x} \nearrow$ *e* $\dfrac{\varphi(x)}{x^2} \searrow$, $x \to \infty$.

Suponha que $\{b_n\}$ *é uma sequência não-decrescente de números positivos que satisfaça* $1 \leq \dfrac{b_{2n}}{b_n} \leq c < \infty$, *para algum* $c > 1$, *para todo* $n \geq 1$, *e que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^2\ E(\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)} < \infty.$$

Então, $\dfrac{S_n}{b_n} \to 0$ q.c.

No Capítulo 1, apresentaremos um método eficaz para se obter a Lei Forte dos Grandes Números. Neste método, em nenhum momento vamos mencionar sobre a dependência das variáveis aleatórias envolvidas. Este método é muito importante para o nosso trabalho, pois ele é a chave principal das demonstrações dos teoremas sobre Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias Positivamente Associadas e Negativamente Associadas. Em tal método, vamos considerar $\{b_n\}$ uma sequência não-decrescente de números positivos com $1 \leq \dfrac{b_{2n}}{b_n} \leq c < \infty$, para algum c>1, e se para um dado $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq b_n\varepsilon\right) \leq K < \infty,$$

onde $K > 0$ é uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leq j\leq n} |S_j|}{b_n} = 0 \text{ q.c.}$$

Como implicações deste método, provaremos que ele também vale se $\{\alpha_j : j \geq 1\}$ é não-decrescente e as condições

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k|\right)^r \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{b_j^r} < \infty,$$

valem, para $r > 0$, e para $b_n = n^\alpha\ l(n)$, onde $\alpha > 0$ e $l(n)$ é uma sequência não-decrescente definida em $(0, \infty)$ e lentamente variante, isto é, $\dfrac{l(tn)}{l(t)} \to 1$, quando $t \to \infty$. Demonstraremos também uma versão deste método para o caso em que $\dfrac{b_{2n}}{b_n}$ é crescente e ilimitada.

No Capítulo 2, Seção 2.1, apresentaremos a definição de variáveis aleatórias Positivamente Associadas e alguns resultados preliminares, como por exemplo o Lema 2.3 que será de grande importância na demonstração do Teorema 2.5. Na Seção 2.2, demonstraremos o teorema da Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias Positivamente Associadas, que nada mais é do que uma versão do Teorema 0.1. Para tal demonstração, precisaremos da noção de sequências equivalentes que é apresentada na Definição 2.7. Após sua demonstração, faremos uma observação interessante, a qual iremos comparar as demonstrações do teorema para variáveis aleatórias Positivamente Associadas com o Teorema 0.1. Em seguida, vamos mostrar algumas consequências, como a prova de um resultado para variáveis aleatórias independentes usando o teorema para variáveis aleatórias Positivamente Associadas. Isto é possível pois variáveis aleatórias independentes são Positivamente Associadas. Finalmente, na Seção 2.3, faremos uma discussão sobre a taxa de convergência de $\dfrac{S_n}{n}$.

No Capítulo 3, Seção 3.1, apresentaremos a definição de variáveis aleatórias Negativamente Associadas e alguns resultados preliminares, como o lema que nos auxiliará na demonstração do Teorema 3.8. Para a demonstração deste lema, utilizamos resultados sobre variáveis aleatórias Negativamente Associadas que podem ser encontrados em [33, 11]. Na Seção 3.2, demonstraremos o Teorema 3.8, que como no Capítulo 2, é uma versão do Teorema 0.1 para variáveis aleatórias Negativamente Associadas.

Capítulo

1

Um Método Geral para a Lei Forte dos Grandes Números

Neste capítulo vamos apresentar um método eficaz para obter Leis Fortes dos Grandes Números. Em tal método, precisamos apenas que $\{b_n\}$ seja uma sequência não-decrescente de números positivos com $1 \leq \dfrac{b_{2n}}{b_n} \leq c < \infty$, para algum c>1 e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq b_n \varepsilon\right) \leq K < \infty,$$

para $\varepsilon > 0$ e $K > 0$ (constante). Como consequências desse Método, demonstraremos dois corolários. Além disso, vamos demonstrar uma versão deste método para uma sequência de números positivos $\{b_n\}$ geometricamente crescente $\left(\text{isto é, } \dfrac{b_{2n}}{b_n} \text{ é crescente e ilimitada}\right)$.

Em todo o trabalho, $\{X_j, j \geq 1\}$ denotará uma sequência de v.a.'s definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

Neste e nos próximos capítulos, vamos considerar, a menos que se diga o contrário, que $\{b_n\}$ é uma sequência não-decrescente de números positivos com $1 \leq \dfrac{b_{2n}}{b_n} \leq c < \infty$, para algum $c > 1$, para todo $n \geq 1$.

1.1 Um Método Geral e algumas Consequências

O teorema a seguir é um método geral da Lei Forte dos Grandes Números. A grande importância deste método é que não é necessário ter como hipótese a dependência ou independência das v.a.'s envolvidas.

Teorema 1.1. ***(Método Geral)*** *Suponha que $\{b_n\}$ satisfaça as condições acima e que para um dado $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq b_n\varepsilon\right) \leq K < \infty, \tag{1.1}$$

onde $K > 0$, é uma constante. Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leq j\leq n} |S_j|}{b_n} = 0 \quad q.c. \tag{1.2}$$

Demonstração:

Vamos provar inicialmente que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P\left(\max\limits_{1\leq j\leq 2^k} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) < \infty$. Observe que,

$$\sum_{2^k\leq\ n<\ 2^{k+1}} (2^k)^{-1} = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k}(2^{k+1} - 2^k) = 2 - 1 = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq 2^k} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{2^k\leq\ n<\ 2^{k+1}} (2^k)^{-1} P\left(\max_{1\leq j\leq 2^k} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{2^k\leq\ n<\ 2^{k+1}\\ n\ \text{par}}} (2^k)^{-1} P\left(\max_{1\leq j\leq 2^k} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{2^k\leq\ n<\ 2^{k+1}\\ n\ \text{ímpar}}} (2^k)^{-1} P\left(\max_{1\leq j\leq 2^k} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right)
\end{aligned}$$

Usando o fato que $2^k \leq n$, temos

$$\max_{1\leq j\leq 2^k} |S_j| \ \leq\ \max_{1\leq j\leq n} |S_j| \ \Rightarrow\ \left(\max_{1\leq j\leq 2^k} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) \subset \left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) \ \Rightarrow$$

$$P\left(\max_{1\leq j\leq 2^k} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) \leq P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right).$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{1\le j\le 2^k} |S_j| > \varepsilon\, b_{2^k}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{2^k \le\ n <\ 2^{k+1} \\ n \text{ par}}} (2^k)^{-1} P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{2^k}\right) + $$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{2^k \le\ n <\ 2^{k+1} \\ n \text{ ímpar}}} (2^k)^{-1} P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{2^k}\right)$$

Observe agora que:

$$2^k \le n < 2^{k+1} \quad \Rightarrow \quad 2^k + 1 \le n+1 \le 2^{k+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{2} \le \frac{2^{k+1}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{2} \le 2^k$$

e logo, $\frac{n}{2} < \frac{n+1}{2} \le 2^k$. Usando a desigualdade $\frac{n}{2} < 2^k$, podemos concluir que se $\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{2^k}$ então $\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{\frac{n}{2}}$, daí

$$P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{2^k}\right) \le P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{\frac{n}{2}}\right).$$

Agora, usando a desigualdade $\frac{n+1}{2} \le 2^k$, teremos

$$\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{2^k} \quad \Rightarrow \quad \max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{\frac{n+1}{2}}$$

e portanto

$$P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{2^k}\right) \le P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{\frac{n+1}{2}}\right).$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{1\le j\le 2^k} |S_j| > \varepsilon\, b_{2^k}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{2^k \le\ n <\ 2^{k+1} \\ n \text{ par}}} \left(\frac{n}{2}\right)^{-1} P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{\frac{n}{2}}\right) + $$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{2^k \le\ n <\ 2^{k+1} \\ n \text{ ímpar}}} \left(\frac{n}{2}\right)^{-1} P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

Observe que:

$$b_{\frac{n}{2}} \le b_n \le c\, b_{\frac{n}{2}} \quad \Rightarrow \quad b_{\frac{n}{2}} \ge c^{-1}\, b_n \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\, b_{\frac{n}{2}} \ge \varepsilon\, c^{-1}\, b_n$$

então,

$$\max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, b_{\frac{n}{2}} \ \Rightarrow\ \max_{1\le j\le n} |S_j| > \varepsilon\, c^{-1}\, b_n \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ b_{\frac{n}{2}}\right) \quad \subset \quad \left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_n\right) \quad \Longrightarrow$$

$$P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ b_{\frac{n}{2}}\right) \quad \le \quad P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_n\right).$$

Também temos,

$$b_{\frac{n+1}{2}} \le b_{n+1} \le c\ b_{\frac{n+1}{2}} \quad \Rightarrow \quad b_{\frac{n+1}{2}} \ge c^{-1}\ b_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\ b_{\frac{n+1}{2}} \ge \varepsilon\ c^{-1}\ b_{n+1}$$

Desenvolvendo como acima, chegamos a:

$$P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ b_{\frac{n+1}{2}}\right) \quad \le \quad P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_{n+1}\right).$$

Então:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{1\le j\le 2^k}|S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) \quad &\le \quad 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{2^k\le\ n<\ 2^{k+1}\\ n\ \text{par}}} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_n\right) + \\ &\quad + \ 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{2^k\le\ n<\ 2^{k+1}\\ n\ \text{ímpar}}} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}b_{n+1}\right).\end{aligned}$$

Como b_n é uma sequência não-decrescente de números positivos, segue que

$$b_n \le b_{n+1} \ \Rightarrow\ \varepsilon\ c^{-1}\ b_n \le \varepsilon\ c^{-1}\ b_{n+1} \quad \Longrightarrow$$

$$\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_n \quad \Longrightarrow$$

$$P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_{n+1}\right) \quad \le \quad P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_n\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{1\le j\le 2^k}|S_j| > \varepsilon\ b_{2^k}\right) \quad &\le \quad 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{2^k\le\ n<\ 2^{k+1}\\ n\ \text{par}}} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}\ b_n\right) + \\ &\quad + \ 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{2^k\le\ n<\ 2^{k+1}\\ n\ \text{ímpar}}} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}b_n\right) \\ &\le \quad 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^k\le\ n<\ 2^{k+1}} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j| > \varepsilon\ c^{-1}b_n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{1\le j\le 2^k}|S_j|>\varepsilon\ b_{2^k}\right) &\le 2\sum_{2\le n<4} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|>\varepsilon\ c^{-1}b_n\right)+\\ &+\ 2\sum_{4\le n<8} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|>\varepsilon\ c^{-1}b_n\right)+\\ &+\ 2\sum_{8\le n<16} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|>\varepsilon\ c^{-1}b_n\right)\ +\cdots\\ &= 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|>\varepsilon\ c^{-1}b_n\right)<\infty \ \text{ por (1.1).}\end{aligned}$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli,

$$P\left(\max_{1\le j\le 2^k}|S_j|>\varepsilon\ b_{2^k}\right)=0\ \Rightarrow\ P\left(\max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_{2^k}}\right|>\varepsilon\right)=0\ \Rightarrow\ \max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_{2^k}}\right|\to 0 \text{ q.c.}$$

quando $k\to\infty$.

Além disso, $\displaystyle\max_{2^{k-1}<n\le 2^k}\max_{1\le j\le n}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|\le\max_{2^{k-1}<n\le 2^k}\max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|$ pois como $n\le 2^k$, temos

$$\max_{1\le j\le n}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|\le\max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|.$$

Agora veja que

$$2^{k-1}<n\quad\Rightarrow\quad b_{2^{k-1}}\le b_n\ \Rightarrow\ \left|\frac{S_j}{b_n}\right|\le\left|\frac{S_j}{b_{2^{k-1}}}\right|$$

logo,

$$\max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|\le\max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_{2^{k-1}}}\right|\ \Rightarrow\ \max_{2^{k-1}<n\le 2^k}\max_{1\le j\le n}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|\le\max_{2^{k-1}<n\le 2^k}\max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_{2^{k-1}}}\right|.$$

Observe agora que:

$$b_{2^{k-1}}\le b_{2^k}\le c\ b_{2^{k-1}}\ \Rightarrow\ c^{-1}\ b_{2^k}\le b_{2^{k-1}}\ \Rightarrow$$

$$\left|\frac{S_j}{b_{2^{k-1}}}\right|\le c\ \left|\frac{S_j}{b_{2^k}}\right|\ \Rightarrow\ \max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_{2^{k-1}}}\right|\le c\ \max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_{2^k}}\right|.$$

Então,

$$\max_{2^{k-1}<n\le 2^k}\max_{1\le j\le n}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|\le c\ \max_{2^{k-1}<n\le 2^k}\max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_{2^k}}\right|=c\ \max_{1\le j\le 2^k}\left|\frac{S_j}{b_{2^k}}\right|\to 0\ \text{ q.c }\ (k\to\infty).$$

Observe que $\displaystyle\max_{1\le j\le n}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|$ depende apenas do termo j, enquanto que $\displaystyle\max_{2^{k-1}<n\le 2^k}\max_{1\le j\le n}\left|\frac{S_j}{b_n}\right|$

depende dos termos n e j. Logo, $\max\limits_{1\leq j\leq n}\left|\dfrac{S_j}{b_n}\right|$ é uma subsequência de $\max\limits_{2^{k-1}<n\leq 2^k}\max\limits_{1\leq j\leq n}\left|\dfrac{S_j}{b_n}\right|$ e portanto,

$$\max_{1\leq j\leq n}\left|\frac{S_j}{b_n}\right| \to 0 \ \text{ q.c } \ (n\to\infty).$$

■

Como consequências do teorema acima, vamos demonstrar dois corolários.

Corolário 1.2. *Suponha que* $\{b_n\}$ *satisfaça as condições fixadas no preâmbulo deste capítulo (pag. 6) e que existam* $r>0$ $(r\in\mathbb{R})$ *e uma sequência* $\{\alpha_j : j\geq 1\}$ *não-decrescente tais que*

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k|\right)^r \leq \sum_{j=1}^{n}\alpha_j \quad e \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j}{b_j^r}<\infty,$$

então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|}{b_n}=0 \quad q.c.$$

Demonstração:

Pela desigualdade de Markov e a primeira condição acima, temos que

$$\begin{aligned}
P\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k|>b_n\varepsilon\right) &\leq \frac{E\left(\max\limits_{1\leq k\leq n}|S_k|\right)^r}{b_n^r\ \varepsilon^r}\\
&\leq \frac{1}{b_n^r\ \varepsilon^r}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\\
&= \frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j b_n^{-r}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k|>b_n\varepsilon\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\ b_n^{-r}\\
&= \frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\ n^{-1}\ b_n^{-r} \qquad (1.3)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\ b_n^{-r}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

e como $\{\alpha_j : j \geq 1\}$ é não-decrescente, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \ \leq \ n\alpha_n \tag{1.5}$$

Substituindo (1.5) em (1.4) temos

$$\frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-r}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-r}\ n\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n b_n^{-r} < \infty, \quad \text{pela segunda condição.}$$

Portanto, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| > b_n\varepsilon\right) < \infty,$$

pelo Teorema 1.1, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|}{b_n} = 0 \quad \text{q.c.}$$

■

Corolário 1.3. *Suponha que $\{b_n\}$ satisfaça as condições fixadas no preâmbulo deste capítulo (pag. 6) e que para $b_n = n^\alpha\ l(n)$ as condições*

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k|\right)^r \leq \sum_{j=1}^{n}\alpha_j \quad e \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j}{b_j^r} < \infty,$$

valem, para $r > 0$, para algum $\alpha > 0$ e onde $l(n)$ é uma sequência não-decrescente definida em $(0,\infty)$ e lentamente variante, isto é, $\dfrac{l(tn)}{l(t)} \to 1$, quando $t \to \infty$. Então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|}{b_n} = 0 \quad q.c.$$

Para a demonstração deste corolário, vamos enunciar o seguinte resultado que pode ser encontrado em [18].

Teorema 1.4. *Seja $Z > 0$ lentamente variante. Então $\displaystyle\int_x^\infty y^p Z(y)\ dy$ converge, se $p < -1$ e diverge, se $p > -1$.*

Demonstração do Corolário 1.3 :

Dado $j \geq 1$, seja $k(n) = \left(\dfrac{j^{\alpha}\, l(j)}{l(n)}\right)^{r}$. Então, $k(n)$ é lentamente variante, pois para todo $t \geq 1$,

$$\frac{k(tn)}{k(t)} = \left(\frac{j^{\alpha}\, l(j)}{l(tn)} \cdot \frac{l(n)}{j^{\alpha}\, l(j)}\right)^{r} = \left(\frac{l(n)}{l(tn)}\right)^{r} \to\ 1,\ \text{quando } t\ \to \infty.$$

Assim, pelo teste da integral e o Teorema 1.4,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha r} k(n) < \infty,\ \text{pois}\ -1-\alpha r < -1.$$

Portanto, como $\{b_n\}$ satisfaz as condições fixadas no preâmbulo deste capítulo (pag. 6),

$$\sum_{n=j}^{\infty} n^{-1} \left(\frac{j^{\alpha}\, l(j)}{n^{\alpha}\, l(n)}\right)^{r} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha r} k(n) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=j}^{\infty} n^{-1} n^{-\alpha r} (l(n))^{-r} \leq C j^{-\alpha r} (l(j))^{-r} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=j}^{\infty} n^{-1} b_n^{-r} \leq C b_j^{-r}. \tag{1.6}$$

E assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\ n^{-1}\ b_n^{-r} &= 1^{-1}\ b_1^{-r}(\alpha_1) + 2^{-1}\ b_2^{-r}(\alpha_1+\alpha_2) + \\
&\quad +\ 3^{-1}\ b_3^{-r}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \cdots + \\
&\quad +\ k^{-1}\ b_k^{-r}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k) + \cdots \\
&= \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-r} + \alpha_2 \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-r} + \alpha_3 \sum_{n=3}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-r} + \cdots + \\
&\quad +\ \alpha_k \sum_{n=k}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-r} + \cdots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \sum_{n=j}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-r}
\end{aligned}$$

E usando (1.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\ n^{-1}\ b_n^{-r} \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\ b_j^{-r} < \infty, \quad \text{pela segunda condição.}$$

Portanto, como de (1.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > b_n\varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, n^{-1} \, b_n^{-r},$$

temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > b_n\varepsilon\right) < \infty$$

e pelo Teorema 1.1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leq j\leq n} |S_j|}{b_n} = 0 \quad \text{q.c.}$$

■

Agora, vamos verificar a validade do limite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leq j\leq n} |S_j|}{b_n} = 0 \quad \text{q.c.}$$

quando b_n for geometricamente crescente. Um exemplo de uma sequência geometricamente crescente, é o seguinte: $b_n = \rho^n$ para algum $\rho > 1$. Teremos que $\dfrac{b_{2n}}{b_n}$ é crescente, mas ilimitada. Mas antes, vamos enunciar e provar o seguinte

Lema 1.5. *Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$. Então, para $0 < r \leq 1$, vale*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^r \leq x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r$$

Demonstração:

Se $r = 1$, temos que a desigualdade é satisfeita. Vamos então demonstrar para o caso em que $0 < r < 1$. Seja $f(x_1) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^r - x_1^r - x_2^r - \cdots - x_n^r$. Vamos mostrar que $f(x_1) \leq 0$ para todo $x_1 \geq 0$ e $x_2, ..., x_n$ constantes. Se $n = 2$, temos:

$$f(x_1) = (x_1 + x_2)^r - x_1^r - x_2^r, \quad x_1 \geq 0.$$

Observe que $f(0) = x_2^r - x_2^r = 0$ e $f'(x_1) = r(x_1 + x_2)^{r-1} - r x_1^{r-1} = r[(x_1 + x_2)^{r-1} - x_1^{r-1}]$ e como $x_1 + x_2 \geq x_1$ e $0 < r < 1$ implica em $-1 < r - 1 < 0$, isto é, $r - 1 < 0$, então $(x_1 + x_2)^{r-1} \leq x_1^{r-1}$, para todo $x_1 \geq 0$. Portanto, $f'(x_1) < 0$, ou seja, $f(x_1)$ é decrescente.

Logo, $f(x_1) \leq f(0) = 0,$ para todo $x_1 \geq 0$. Logo, $(x_1 + x_2)^r \leq x_1^r + x_2^r$. Se $n = 3$, temos:

$$f(x_1) = (x_1 + x_2 + x_3)^r - x_1^r - x_2^r - x_3^r, \quad x_1 \geq 0.$$

Observe que $f(0) = (x_2+x_3)^r - x_2^r - x_3^r \leq x_2^r + x_3^r - x_2^r - x_3^r = 0$ e ainda que $f'(x_1) = r(x_1 + x_2 + x_3)^{r-1} - r x_1^{r-1} = r[(x_1+x_2+x_3)^{r-1} - x_1^{r-1}]$. Como $x_1+x_2+x_3 \geq x_1$ e $r-1 < 0$, então $(x_1+x_2+x_3)^{r-1} \leq x_1^{r-1}$, para todo $x_1 \geq 0$. Portanto, $f'(x_1) < 0$, isto é, $f(x_1)$ é decrescente. Então $f(x_1) \leq f(0) \leq 0$, para todo $x_1 \geq 0$. Logo, $(x_1 + x_2 + x_3)^r \leq x_1^r + x_2^r + x_3^r$. Suponha agora por indução que o resultado seja válido para n termos. Então

$$f(x_1) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^r - x_1^r - x_2^r - \cdots - x_n^r \leq 0, \text{ para todo } x_1 \geq 0.$$

Vamos provar que é válido para $n + 1$. Temos que,

$$f(x_1) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})^r - x_1^r - x_2^r - \cdots - x_n^r - x_{n+1}^r.$$

Observe que $f(0) = (x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})^r - x_2^r - \cdots - x_n^r - x_{n+1}^r \leq 0$, pela hipótese de indução e que $f'(x_1) = r[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})^{r-1} - x_1^{r-1}] < 0$, para todo $x_1 \geq 0$, logo f é decrescente. Então, $f(x_1) \leq f(0) \leq 0$, para todo $x_1 \geq 0$. Portanto,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})^r \leq x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r + x_{n+1}^r.$$

■

Teorema 1.6. *Seja $\{b_n\}$ uma sequência não-decrescente de números positivos tal que $\dfrac{b_{2n}}{b_n}$ é crescente e ilimitada. Se $\sup_{j\geq 1} E|X_j|^r < \infty$ para algum $0 < r < 1$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{1\leq j\leq n} |S_j|}{b_n} = 0 \quad q.c.$$

Demonstração:

Como $\dfrac{b_{2n}}{b_n}$ é crescente e ilimitada, temos que para cada $M > 0$, existe $n_o = n_o(M)$ tal que $\dfrac{b_{2n}}{b_n} \geq M$, para todo $n \geq n_o$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $\dfrac{b_{2^k}}{b_{2^{k-1}}} \geq M$, para cada $k > 1$ então,

$$b_{2^k} \geq M\ b_{2^{k-1}} \geq M^2\ b_{2^{k-2}} \geq M^3\ b_{2^{k-3}} \geq \cdots \geq M^k\ b_1. \tag{1.7}$$

Pela Desigualdade de Markov, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq n}|S_j| > \varepsilon\ b_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left(\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|\right)^r}{\varepsilon^r\ b_n^r}\\ &= \frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-r}\ E\left(\max_{1\leq j\leq n}|S_j|\right)^r.\end{aligned}$$

Observe que a função $f(x) = x^r$ para $x \geq 0$ é estritamente crescente. Logo como $|S_j| \geq 0$, temos que $\left(\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|\right)^r = \max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|^r$, para todo $r > 0$, e assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq n}|S_j| > \varepsilon\ b_n\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-r}\ E\left(\max_{1\leq j\leq n}|S_j|^r\right). \tag{1.8}$$

Afirmação 1.7. $E\left(\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|^r\right) \leq E\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|X_j|^r\right)$, *onde* $0 < r < 1$.

De fato, seja $J = \min\left\{1 \leq j_o \leq n; \max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|^r = |S_{j_o}|^r\right\}$. Para $J = j_o$, temos que $\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|^r = |S_{j_o}|^r$ e para $1 \leq j < j_o$, $\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|^r > |S_j|^r$. Como $E\left(\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|^r\right) = E\left(E\left(\max\limits_{1\leq j\leq n}|S_j|^r \;\Big|\; J\right)\right)$ e $E\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|X_j|^r\right) = E\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|X_j|^r \;\Big|\; J\right)\right)$, então

$$E\left(\max_{1\leq j\leq n}|S_j|^r\right) \leq E\left(\sum_{j=1}^{n}|X_j|^r\right) \Leftrightarrow$$

$$E\left(E\left(\max_{1\leq j\leq n}|S_j|^r \;\Big|\; J\right)\right) \leq E\left(E\left(\sum_{j=1}^{n}|X_j|^r \;\Big|\; J\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$E\left(E\left(\max_{1\leq j\leq n}|S_j|^r \;\Big|\; J = j_o\right)\right) \leq E\left(E\left(\sum_{j=1}^{n}|X_j|^r \;\Big|\; J = j_o\right)\right) \text{ para todo } j_o = 1, ..., n \Leftrightarrow$$

$$E\left(E\left(|S_{j_o}|^r \;\Big|\; J = j_o\right)\right) \leq E\left(E\left(\sum_{j=1}^{n}|X_j|^r \;\Big|\; J = j_o\right)\right) \text{ para todo } j_o = 1, ..., n.$$

Então, se mostrarmos que

$$E\big(|S_{j_o}|^r \mid J = j_o\big) \leq E\left(\sum_{j=1}^{n}|X_j|^r \;\Big|\; J = j_o\right)$$

completamos a prova da afirmação. Observe que:

$$\begin{aligned}
E\left(|S_{j_o}|^r \mid J=j_o\right) &= E\left(|X_1+\cdots+X_{j_o}|^r \mid J=j_o\right)\\
&\le E\left[\left(|X_1|+\cdots+|X_{j_o}|\right)^r \mid J=j_o\right]\\
&\le E\left[\left(|X_1|^r+\cdots+|X_{j_o}|^r\right) \mid J=j_o\right] \text{ pelo Lema 1.5}\\
&\le E\left[\left(|X_1|^r+\cdots+|X_{j_o}|^r+|X_{j_o+1}|^r+\cdots+|X_n|^r\right) \mid J=j_o\right]\\
&= E\left(\sum_{j=1}^{n}|X_j|^r \,\Big|\, J=j_o\right),
\end{aligned}$$

portanto,

$$E\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|^r\right) \le E\left(\sum_{j=1}^{n}|X_j|^r\right)=\sum_{j=1}^{n}E\left(|X_j|^r\right),$$

finalizando a prova da afirmação.

Logo, voltando à equação (1.8),

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|>\varepsilon\, b_n\right) \le \frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-r}\sum_{j=1}^{n}E\left(|X_j|^r\right).$$

Observe agora que

$$\sum_{j=1}^{n}E\left(|X_j|^r\right)=E|X_1|^r+E|X_2|^r+\cdots+E|X_n|^r\le n\sup_{j\ge 1}E\left(|X_j|^r\right)<\infty$$

por hipótese. Então, chamando $N=\sup_{j\ge 1}E\left(|X_j|^r\right)$, teremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|>\varepsilon\, b_n\right) \le \frac{1}{\varepsilon^r}N\sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n^{-r}$$

Veja que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}\le n<2^k} n\, b_n^{-r}=\sum_{n=1}^{1} n\, b_n^{-r}+\sum_{n=2}^{3} n\, b_n^{-r}+\sum_{n=4}^{7} n\, b_n^{-r}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n^{-r}$$

e então,

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|>\varepsilon\, b_n\right) \le \frac{N}{\varepsilon^r}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}\le n<2^k} n\, b_n^{-r}.$$

Temos agora que se $n<2^k$ então $n\le 2^k$ e também, se $2^{k-1}\le n$ então $b_{2^{k-1}}\le b_n$, pois b_n

é não-decrescente. Logo, $\dfrac{1}{b_n^r} \leq \dfrac{1}{b_{2^{k-1}}^r}$ portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| > \varepsilon\ b_n\right) \ \leq\ \frac{N}{\varepsilon^r}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}\leq n<2^k} 2^k\ b_{2^{k-1}}^{-r}$$

Desenvolvendo o segundo somatório da desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{2^{k-1}\leq n<2^k} 2^k\ b_{2^{k-1}}^{-r} \ &=\ b_{2^{k-1}}^{-r}\ 2^k(2^k-2^{k-1}) = \ b_{2^{k-1}}^{-r}\ 2^k\ 2^{k-1}(2-1) = \ b_{2^{k-1}}^{-r}\ 2^{2k-1}\\ &=\ 2\ b_{2^{k-1}}^{-r}\ 2^{2k-2} = \ 2\ b_{2^{k-1}}^{-r}\ 2^{2(k-1)}\end{aligned}$$

e assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| > \varepsilon\ b_n\right) \ \leq\ \frac{2N}{\varepsilon^r}\sum_{k=1}^{\infty} b_{2^{k-1}}^{-r}\ 2^{2(k-1)}$$

De (1.7), $M\ b_{2^{k-1}} \geq M^k\ b_1$ e então,

$$b_{2^{k-1}} \geq M^{k-1}\ b_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b_{2^{k-1}}^r} \leq \frac{1}{(M^{k-1}\ b_1)^r} \quad \Rightarrow \quad b_{2^{k-1}}^{-r} \leq M^{-r(k-1)}\ b_1^{-r}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| > \varepsilon\ b_n\right) \ &\leq\ \frac{2N\ b_1^{-r}}{\varepsilon^r}\sum_{k=1}^{\infty}\ M^{-r(k-1)}\ 2^{2(k-1)}\\ &=\ \frac{2N}{(b_1\ \varepsilon)^r}\sum_{k=1}^{\infty}\ \left(\frac{4}{M^r}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

Finalmente, tomando $M = 5^{\frac{1}{r}}$, teremos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| > \varepsilon\ b_n\right) \ &\leq\ \frac{2N}{(b_1\ \varepsilon)^r}\sum_{k=1}^{\infty}\ \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{2N}{(b_1\ \varepsilon)^r}\left(1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\cdots\right)\\ &=\ \frac{2N}{(b_1\ \varepsilon)^r}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{5}}\right) = \frac{2N}{(b_1\ \varepsilon)^r}.5 = \frac{10N}{(b_1\ \varepsilon)^r} < \infty\end{aligned}$$

Portanto pelo Lema de Borel-Cantelli, obtemos:

$$\max_{1\leq j\leq n}\left|\frac{S_j}{b_n}\right| \to 0 \quad \text{q.c.} \quad (n\to\infty)$$

■

Capítulo

2

Variáveis Aleatórias Positivamente Associadas e Lei Forte dos Grandes Números

Na terminologia original, variáveis aleatórias Positivamente Associadas eram chamadas apenas de variáveis aleatórias Associadas. Este conceito, foi introduzido na literatura estatística por Lehmann [22] em 1966. Esary et. al. [17] em 1967, também introduziram o conceito de associação apresentando vários resultados sobre variáveis aleatórias Positivamente Associadas e algumas aplicações em probabilidade e estatística. A motivação destes autores decorreu da grande importância da Teoria da Confiabilidade. Por exemplo, se assumirmos que os tempos de duração dos componentes de um determinado equipamento são variáveis aleatórias, as mesmas são independentes, mas em alguns casos é mais interessante assumir algum tipo de dependência entre as variáveis, pois a falha de um determinado componente pode afetar o desempenho dos outros. Então é necessário propor um modelo para a confiabilidade, de um sistema que resulta em componentes com um tipo de dependência.

Em Mecânica Estatística, este mesmo conceito foi usado sob o nome de desigualdades FKG, tirado das iniciais dos autores Fortuin, Kasteleyn, Ginibre em 1971 [19].

Este capítulo está dividido em três seções, na primeira definiremos variáveis aleatórias Positivamente Associadas e iremos provar alguns resultados preliminares. Na segunda seção, aplicaremos o Teorema 1.1 para provar a Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias Positivamente Associadas. Em seguida, apresentaremos algumas implicações do referido teorema. Na terceira seção, iremos discutir sobre a taxa de convergência de $\dfrac{S_n}{n}$.

2.1 Definição de v.a.'s Positivamente Associadas e Resultados Preliminares

Nesta seção vamos definir variáveis aleatórias Positivamente Associadas e demonstrar dois lemas, onde o segundo, é de grande importância para a demonstração do teorema da próxima seção.

Definição 2.1. *As v.a.'s $X_1, ..., X_n$ são ditas Positivamente Associadas (PA) se para cada n e $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ crescentes em cada coordenada*

$$Cov(f(X_1, X_2, ..., X_n), g(X_1, X_2, ..., X_n)) \geq 0,$$

sempre que existir a covariância.

Lema 2.2. *Sejam $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$ variáveis aleatórias Positivamente Associadas, com $EX_j = 0$ e $EX_j^2 < \infty$. Então*

$$E\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j^2\right) \leq E(S_n^2)$$

onde, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Demonstração:

Seja $J = \min\left\{1 \leq j_o \leq n; \max\limits_{1\leq j\leq n} S_j^2 = S_{j_o}^2\right\}$. Para $J = j_o$, temos que $\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j^2 = S_{j_o}^2$ e para $1 \leq j < j_o$, $\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j^2 > S_j^2$. Como $E\left(\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j^2\right) = E\left(E\left(\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j^2 \,\Big|\, J\right)\right)$ e $E(S_n^2) = E\big(E(S_n^2 \mid J)\big)$, então

$$E\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j^2\right) \leq E(S_n^2) \quad \Leftrightarrow \quad E\left(E\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j^2 \,\Big|\, J\right)\right) \leq E\big(E(S_n^2 \mid J)\big) \quad \Leftrightarrow$$

$$E\left(E\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j^2 \,\Big|\, J = j_o\right)\right) \leq E\big(E(S_n^2 \mid J = j_o)\big) \text{ para todo } j_o = 1, ..., n \quad \Leftrightarrow$$

$$E\left(E\left(S_{j_o}^2 \,\Big|\, J = j_o\right)\right) \leq E\big(E(S_n^2 \mid J = j_o)\big) \text{ para todo } j_o = 1, ..., n.$$

Então, se mostrarmos que

$$E\left(S_{j_o}^2 \,\middle|\, J=j_o\right) \le E(S_n^2 \mid J=j_o),$$

o lema ficará provado. Observe que:

$$E\left(S_{j_o}^2 \,\middle|\, J=j_o\right) \le E(S_n^2 \mid J=j_o) \quad \Leftrightarrow$$

$$E\left[(X_1+\cdots+X_{j_o})^2 \mid J=j_o\right] \le E\left[(X_1+\cdots+X_{j_o}+\cdots+X_n)^2 \mid J=j_o\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j_o} \; & E(X_i^2 \mid J=j_o) + 2\,\Big\{\big[E(X_1X_2 \mid J=j_o) + E(X_1X_3 \mid J=j_o) + \cdots + \\
& + E(X_1X_{j_o} \mid J=j_o)\big] + \big[E(X_2X_3 \mid J=j_o) + E(X_2X_4 \mid J=j_o) + \cdots + \\
& + E(X_2X_{j_o} \mid J=j_o)\big] + \cdots + E(X_{j_o-1}X_{j_o} \mid J=j_o)\Big\} \le \\
\le \; & \sum_{i=1}^{j_o} E(X_i^2 \mid J=j_o) + \sum_{i=j_o+1}^{n} E(X_i^2 \mid J=j_o) + \\
& + 2\,\Big\{\big[E(X_1X_2 \mid J=j_o) + E(X_1X_3 \mid J=j_o) + \cdots + \\
& + E(X_1X_{j_o} \mid J=j_o) + \cdots + E(X_1X_n \mid J=j_o)\big] + \\
& + \big[E(X_2X_3 \mid J=j_o) + E(X_2X_4 \mid J=j_o) + \cdots + \\
& + E(X_2X_{j_o} \mid J=j_o) + \cdots + E(X_2X_n \mid J=j_o)\big] + \cdots + \\
& + \big[E(X_{j_o-1}X_{j_o} \mid J=j_o) + \cdots + E(X_{j_o-1}X_n \mid J=j_o)\big] + \\
& + \big[E(X_{j_o}X_{j_o+1} \mid J=j_o) + \cdots + E(X_{j_o}X_n \mid J=j_o)\big] + \cdots + \\
& + E(X_{n-1}X_n \mid J=j_o)\Big\} \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j_o+1}^{n} \; & E(X_i^2 \mid J=j_o) + \; 2\,\Big\{\big[E(X_1X_{j_o+1} \mid J=j_o) + \cdots + E(X_1X_n \mid J=j_o)\big] + \\
& + \big[E(X_2X_{j_o+1} \mid J=j_o) + \cdots + E(X_2X_n \mid J=j_o)\big] + \cdots + \\
& + \big[E(X_{j_o-1}X_{j_o+1} \mid J=j_o) + \cdots + E(X_{j_o-1}X_n \mid J=j_o)\big] + \\
& + \big[E(X_{j_o}X_{j_o+1} \mid J=j_o) + \cdots + E(X_{j_o}X_n \mid J=j_o)\big] + \cdots + \\
& + E(X_{n-1}X_n \mid J=j_o)\Big\} \ge 0.
\end{aligned}$$

Na expressão acima, observe que $E(X_i^2 \mid J=j_o) \ge 0$ e logo, $\displaystyle\sum_{i=j_o+1}^{n} E(X_i^2 \mid J=j_o) \ge 0$ e temos $E(X_iX_k \mid J=j_o) = Cov[(X_i,X_j) \mid J=j_o] \ge 0$, pois as variáveis aleatórias $\{X_j\}$ são Positivamente Associadas. Portanto, todas as parcelas entre chaves, da expressão acima, são maiores que ou iguais a zero. Logo,

$$E\left(S_{j_o}^2 \,\middle|\, J = j_o\right) \leq E(S_n^2 \mid J = j_o),$$

e assim,

$$E\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j^2\right) \leq E(S_n^2)$$

■

Lema 2.3. *Sejam $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$ variáveis aleatórias Positivamente Associadas, com $EX_j = 0$ e $EX_j^2 < \infty$. Suponha que $\sum_{i=1}^{\infty} u^{\frac{1}{2}}(2^i) < \infty$, onde $u(n) = \sup_{i\geq 1} \sum_{j:j-i\geq n} Cov(X_i, X_j)$. Então existe uma constante C, que não depende de n, tal que*

$$E\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j^2\right) \leq C\ n\left(\max_{1\leq j\leq n} EX_j^2 + 1\right) \tag{2.1}$$

Demonstração:

Para cada $n \geq 1$ dado, vamos definir:

$$Y_j = \begin{cases} X_j & \text{se} \quad 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{se} \quad j > n \end{cases}$$

onde $Y_1, ..., Y_n$ têm as mesmas estruturas de dependência que $X_1, ..., X_n$. Denotaremos por $||Y||_2 = (EY^2)^{\frac{1}{2}}$, $S_k(n) = \sum_{i=k+1}^{k+n} Y_i$ e $\sigma_m = \sup_{k\geq 0} ||S_k(m)||_2$.

Afirmação 2.4. $\sigma_1^2 = \max_{1\leq j\leq n} E(X_j^2)$.

De fato,

$$\sigma_1 = \sup_{k\geq 0} ||S_k(1)||_2 = \sup_{k\geq 0} [E(S_k(1))^2]^{\frac{1}{2}} = \sup_{k\geq 0} \left[E\left(\sum_{i=k+1}^{k+1} Y_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sup_{k\geq 0} (E(Y_{k+1})^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Chamando $j = k + 1$, teremos que $j \geq 1$ e logo

$$\sigma_1 = \sup_{j\geq 1} (E(Y_j)^2)^{\frac{1}{2}} = \sup_{1\leq j\leq n} (E(X_j)^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Como a função $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ é estritamente crescente e $EX_j^2 \geq 0$, segue que

$$\left(\sup_{1\leq j\leq n}(E(X_j)^2)\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{1\leq j\leq n}(E(X_j)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Então, $\sigma_1 = \left(\sup_{1\leq j\leq n}(E(X_j)^2)\right)^{\frac{1}{2}}$ e como $\sup_{1\leq j\leq n}(E(X_j)^2)$ é assumido, segue que

$$\sigma_1^2 = \max_{1\leq j\leq n}(E(X_j)^2),$$

completando a prova da Afirmação 2.4.

Seja agora $l \geq 1$, temos que

$$S_k(2m) = S_k(m) + S_{k+m+l}(m) + S_{k+m}(l) - S_{k+2m}(l). \tag{2.3}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} S_{k+m}(l) + S_{k+m+l}(m) - S_{k+2m}(l) &= \sum_{i=k+m+1}^{k+m+l} Y_i + \sum_{i=k+m+l+1}^{k+2m+l} Y_i - \sum_{i=k+2m+1}^{k+2m+l} Y_i \\ &= \sum_{i=k+m+1}^{k+2m+l} Y_i - \sum_{i=k+2m+1}^{k+2m+l} Y_i \\ &= \sum_{i=k+m+1}^{k+2m} Y_i. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_k(2m) &= \sum_{i=k+1}^{k+2m} Y_i = Y_{k+1} + Y_{k+2} + \cdots + Y_{k+m} + Y_{k+m+1} + \cdots + Y_{k+2m} \\ &= \sum_{i=k+1}^{k+m} Y_i + \sum_{i=k+m+1}^{k+2m} Y_i \\ &= S_k(m) + S_{k+m}(l) + S_{k+m+l}(m) - S_{k+2m}(l). \end{aligned}$$

Portanto, de (2.3), segue que:

$$\begin{aligned} ||S_k(2m)||_2 &= ||S_k(m) + S_{k+m+l}(m) + S_{k+m}(l) - S_{k+2m}(l)||_2 \\ &\leq ||S_k(m) + S_{k+m+l}(m)||_2 + ||S_{k+m}(l)||_2 + ||S_{k+2m}(l)||_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde a última expressão segue da desigualdade de Minkowski. Observe agora que,

$$
\begin{aligned}
||S_{k+2m}(l)||_2 &= \left|\left|\sum_{i=k+2m+1}^{k+2m+l} Y_i\right|\right|_2 \leq \sum_{i=k+2m+1}^{k+2m+l} ||Y_i||_2 \leq \sum_{i=k+2m+1}^{k+2m+l} \sup_{j\geq 1} ||Y_j||_2 \\
&= l \ \sup_{j\geq 1} ||Y_j||_2 = l \ \sup_{j\geq 1} (EY_j^2)^{\frac{1}{2}} = l \ \ \sigma_1 \qquad \text{de (2.2)}
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
||S_{k+m}(l)||_2 &= \left|\left|\sum_{i=k+m+1}^{k+m+l} Y_i\right|\right|_2 \leq \sum_{i=k+m+1}^{k+m+l} ||Y_i||_2 \leq \sum_{i=k+m+1}^{k+m+l} \sup_{j\geq 1} ||Y_j||_2 \\
&= l \ \sup_{j\geq 1} ||Y_j||_2 = l \ \ \sigma_1.
\end{aligned}
$$

Logo, temos:

$$
||S_{k+m}(l)||_2 + ||S_{k+2m}(l)||_2 \leq 2l \ \ \sigma_1. \tag{2.5}
$$

Vamos agora desenvolver,

$$
\begin{aligned}
E\big(S_k(m) \ &+ \ S_{k+m+l}(m)\big)^2 = \\
&= E(S_k(m))^2 + E(S_{k+m+l}(m))^2 + 2E(S_k(m)S_{k+m+l}(m))
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Observe que,

$$
\begin{aligned}
2\ E(S_k(m)S_{k+m+l}(m)) &= 2\ E\left(\sum_{i=k+1}^{k+m} \sum_{j=k+m+l+1}^{k+2m+l} Y_i\ Y_j\right) \\
&= 2 \sum_{i=k+1}^{k+m} \sum_{j=k+m+l+1}^{k+2m+l} E(Y_i\ Y_j).
\end{aligned}
$$

Como $Cov(Y_i, Y_j) = E(Y_i\ Y_j) - E(Y_i)\ E(Y_j) = E(Y_i\ Y_j)$, pois, por hipótese, $EX_j = 0$ e da definição da variável aleatória Y_j, segue que $EY_j = 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
2\ E(S_k(m)S_{k+m+l}(m)) &= 2 \sum_{i=k+1}^{k+m} \sum_{j=k+m+l+1}^{k+2m+l} Cov(Y_i, Y_j) \\
&\leq 2 \sum_{i=k+1}^{k+m} \sum_{j=k+m+l+1}^{\infty} Cov(Y_i, Y_j)
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade é verdadeira pois $Cov(Y_i, Y_j) \geq 0$ por hipótese. Observe agora que $j - i \geq k + m + l + 1 - (k + m) = l + 1 \geq l$, logo

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=k+m+l+1}^{\infty} Cov(Y_i, Y_j) &= \sum_{j:j-i\geq l}^{\infty} Cov(Y_i, Y_j) \leq \sup_{i\geq 1} \sum_{j:j-i\geq l}^{\infty} Cov(Y_i, Y_j) \\
&= \sup_{i\geq 1} \sum_{j:j-i\geq l}^{\infty} Cov(X_i, X_j)
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade segue da definição da variável aleatória Y_j. Então, como $u(l) = \sup_{i\geq 1} \sum_{j:j-i\geq l} Cov(X_i, X_j)$, segue que $\sum_{j=k+m+l+1}^{\infty} Cov(Y_i, Y_j) \leq u(l)$. Logo,

$$2\ E(S_k(m)S_{k+m+l}(m)) \leq 2 \sum_{i=k+1}^{k+m} u(l) = 2m\ u(l). \tag{2.7}$$

Observe agora que, $E(S_k(m))^2 + E(S_{k+m+l}(m))^2 = ||S_k(m))||_2^2 + ||S_{k+m+l}(m))||_2^2$ e temos $\sigma_m^2 = \left(\sup_{k\geq 0} ||S_k(m)||_2\right)^2 = \sup_{k\geq 0} ||S_k(m)||_2^2$, pois $||S_k(m)||_2 \geq 0$ e a função $f(x) = x^2$ é crescente para $x \geq 0$. Logo,

$$||S_k(m)||_2^2 \leq \sup_{k\geq 0} ||S_k(m)||_2^2 = \sigma_m^2$$

e da mesma forma, temos também que

$$||S_{k+m+l}(m)||_2^2 \leq \sigma_m^2$$

pois chamando k+m+l=q, temos $\sigma_m^2 = \left(\sup_{q\geq 0} ||S_q(m)||_2\right)^2 = \sup_{q\geq 0} ||S_q(m)||_2^2$. Então,

$$E(S_k(m))^2 + E(S_{k+m+l}(m))^2 \leq \sigma_m^2 + \sigma_m^2 = 2\ \sigma_m^2 \tag{2.8}$$

Portanto, substituindo (2.7) e (2.8) em (2.6), obtemos:

$$E(S_k(m) + S_{k+m+l}(m))^2 \leq 2\ \sigma_m^2 + 2\ m\ u(l) \tag{2.9}$$

Voltando agora à expressão (2.4):

$$\begin{aligned}
||S_k(2m)||_2 &\leq ||S_k(m) + S_{k+m+l}(m)||_2 + ||S_{k+m}(l)||_2 + ||S_{k+2m}(l)||_2 \\
&\leq [E(S_k(m) + S_{k+m+l}(m))^2]^{\frac{1}{2}} + 2\ l\ \sigma_1 \quad \text{de (2.5)} \\
&\leq [2\ \sigma_m^2 + 2\ m\ u(l)]^{\frac{1}{2}} + 2\ l\ \sigma_1 \quad \text{de (2.9)} \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_m + [2\ m\ u(l)]^{\frac{1}{2}} + 2\ l\ \sigma_1
\end{aligned}$$

pois pelo Lema (1.5), $[2\ \sigma_m^2 + 2\ m\ u(l)]^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_m + [2\ m\ u(l)]^{\frac{1}{2}}$. Logo,

$$\sigma_{2m} = \sup_{k\geq 0} ||S_k(2m)||_2 \leq 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_m + [2\ m\ u(l)]^{\frac{1}{2}} + 2\ l\ \sigma_1.$$

Chamando $l = [m^{\frac{1}{3}}]$ (função maior inteiro) e sabendo que $[m^{\frac{1}{3}}] \leq m^{\frac{1}{3}}$, teremos

$$\sigma_{2m} \leq 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_m + [2\ m\ u([m^{\frac{1}{3}}])]^{\frac{1}{2}} + 2\ m^{\frac{1}{3}}\ \sigma_1.$$

Tomando $m = 2^{r-1}$, segue que

$$\begin{aligned} \sigma_{2^r} &\leq 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_{2^{r-1}} + [2^r\ u([2^{\frac{r-1}{3}}])]^{\frac{1}{2}} + 2\ .\ 2^{\frac{r-1}{3}}\ \sigma_1 \\ &= 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_{2^{r-1}} + 2\ .\ 2^{\frac{r-1}{3}}\ \sigma_1 + 2^{\frac{r}{2}}\ u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-1}{3}}]). \end{aligned}$$

Observe agora que, se substituirmos $\sigma_{2^{r-1}}$ na equação acima, teremos:

$$\begin{aligned} \sigma_{2^r} &\leq 2^{\frac{1}{2}}\{2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_{2^{r-2}} + 2\ .\ 2^{\frac{r-2}{3}}\ \sigma_1 + 2^{\frac{r-1}{2}}\ u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-2}{3}}])\} + 2\ .\ 2^{\frac{r-1}{3}}\ \sigma_1 + 2^{\frac{r}{2}}\ u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-1}{3}}]) \\ &= 2^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_{2^{r-2}} + 2^{\frac{1}{2}}\ 2\ .\ 2^{\frac{r-2}{3}}\ \sigma_1 + 2^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{r-1}{2}}\ u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-2}{3}}]) + 2\ .\ 2^{\frac{r-1}{3}}\ \sigma_1 + \\ &\quad + 2^{\frac{r}{2}}\ u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-1}{3}}]) \\ &= 2^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_{2^{r-2}} + 2\ \sigma_1[2^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{r-2}{3}} + 2^{\frac{r-1}{3}}] + 2^{\frac{r}{2}}\ \{u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-2}{3}}]) + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-1}{3}}])\} \end{aligned}$$

se substituirmos agora $\sigma_{2^{r-2}}$ na equação acima:

$$\begin{aligned} \sigma_{2^r} &\leq 2^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{1}{2}}\ \sigma_{2^{r-3}} + 2\ \sigma_1[2^{\frac{2}{2}}\ 2^{\frac{r-3}{3}} + 2^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{r-2}{3}} + 2^{\frac{r-1}{3}}] + 2^{\frac{r}{2}}\ \{u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-3}{3}}]) + \\ &\quad + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-2}{3}}]) + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-1}{3}}])\}. \end{aligned}$$

Repetindo este processo, chegaremos a:

$$\begin{aligned} \sigma_{2^r} &\leq 2^{\frac{r}{2}}\ \sigma_1 + 2\ \sigma_1[2^{\frac{r-1}{2}} + 2^{\frac{r-2}{2}}\ 2^{\frac{1}{3}} + \cdots + 2^{\frac{2}{2}}\ 2^{\frac{r-3}{3}} + 2^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{r-2}{3}} + 2^{\frac{r-1}{3}}] + \\ &\quad + 2^{\frac{r}{2}}\ \{u^{\frac{1}{2}}([2^0]) + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{1}{3}}]) + \cdots + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-3}{3}}]) + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-2}{3}}]) + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{r-1}{3}}])\} \\ &\leq 2^{\frac{r}{2}}\ \sigma_1 + 2\ \sigma_1 \sum_{i=0}^{r-1} 2^{\frac{r-1-i}{2}} 2^{\frac{i}{3}} + 2^{\frac{r}{2}} \sum_{i=0}^{r-1} u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{i}{3}}]) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=3i}^{3i+2} u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{j}{3}}]) &= \sum_{j=0}^{2} u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{j}{3}}]) + \sum_{j=3}^{5} u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{j}{3}}]) + \sum_{j=6}^{8} u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{j}{3}}]) + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{j}{3}}]) \\ &\geq \sum_{j=0}^{r-1} u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{j}{3}}]) \end{aligned}$$

pois $u(n) \geq 0$. Então, voltando à expressão (2.10):

$$\begin{aligned} \sigma_{2^r} &\leq 2^{\frac{r}{2}}\ \sigma_1 + 2\ \sigma_1 \sum_{i=0}^{r-1} 2^{\frac{r-1-i}{2}} 2^{\frac{i}{3}} + 2^{\frac{r}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=3i}^{3i+2} u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{j}{3}}]) \\ &= \sigma_1 \left[2^{\frac{r}{2}} + 2\ .\ 2^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=0}^{r-1} 2^{-\frac{i}{2}+\frac{i}{3}} \right] + 2^{\frac{r}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \left[u^{\frac{1}{2}}([2^i]) + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{3i+1}{3}}]) + u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{3i+2}{3}}]) \right]. \end{aligned}$$

Como $u(n)$ é decrescente com respeito a n,

$$[2^i] \leq [2^{\frac{3i+1}{3}}] \quad \Rightarrow \quad u([2^i]) \geq u([2^{\frac{3i+1}{3}}]) \quad \Rightarrow \quad u^{\frac{1}{2}}([2^i]) \geq u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{3i+1}{3}}])$$

e o mesmo ocorre em

$$u^{\frac{1}{2}}([2^i]) \geq u^{\frac{1}{2}}([2^{\frac{3i+2}{3}}]).$$

Portanto,

$$\sigma_{2^r} \leq \sigma_1 \left[2^{\frac{r}{2}} + 2^{\frac{r+1}{2}} \sum_{i=0}^{r-1} 2^{-\frac{i}{6}} \right] + 2^{\frac{r}{2}}\ .\ 3 \sum_{i=0}^{\infty} u^{\frac{1}{2}}(2^i).$$

Por hipótese, $\sum_{i=0}^{\infty} u^{\frac{1}{2}}(2^i) \leq C_1 < \infty$, e observe também que $\sum_{i=0}^{r-1} 2^{-\frac{i}{6}} \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\frac{i}{6}}$, logo

$$\sigma_{2^r} \leq \sigma_1 \left[2^{\frac{r}{2}} + 2^{\frac{r+1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\frac{i}{6}} \right] + 3\ C_1\ 2^{\frac{r}{2}}.$$

Como $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\frac{i}{6}} \leq C_2 < \infty$, segue que

$$\sigma_{2^r} \leq \sigma_1 \left[2^{\frac{r}{2}} + 2^{\frac{r}{2}} 2^{\frac{1}{2}}\ C_2 \right] + 3\ C_1\ 2^{\frac{r}{2}} = 2^{\frac{r}{2}} \left[\sigma_1 \left(1 + 2^{\frac{1}{2}}\ C_2 \right) + 3\ C_1 \right] \leq C_o\ 2^{\frac{r}{2}}\ (\sigma_1 + 1)$$

onde $C_o = \max\left\{ 1 + 2^{\frac{1}{2}}\ C_2,\ 3\ C_1 \right\}$. Portanto, como ambos os membros da desigualdade são maiores que ou iguais a zero,

$$\sigma_{2^r} \leq C_o\ 2^{\frac{r}{2}}\ (\sigma_1 + 1) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2^r}^2 &\leq C_o^2\ 2^r\ (\sigma_1 + 1)^2 = C_o^2\ 2^r\ (\sigma_1^2 + 1 + 2\sigma_1) \\ &= C_o^2\ 2^r\ (\sigma_1^2 + 1) + C_o^2\ 2^r\ 2\sigma_1 \\ &= C_o^2\ 2^r\ (\sigma_1^2 + 1) + C_o^2\ 2^r\ \frac{2\sigma_1}{\sigma_1^2 + 1}\ \sigma_1^2 + 1 \\ &= 2^r\ (\sigma_1^2 + 1) \left[C_o^2 + C_o^2 \frac{2\sigma_1}{\sigma_1^2 + 1} \right]. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{2\sigma_1}{\sigma_1^2+1} \leq 1$, segue que

$$\sigma_{2^r}^2 \leq 2^r\ (\sigma_1^2+1)\left[2\ C_o^2\right] = \bar{C}\ 2^r\ (\sigma_1^2+1) \tag{2.11}$$

onde $\bar{C} = 2\ C_o^2$. Sabemos que para cada $n \geq 1$ dado, existe um inteiro positivo $r \geq 0$ tal que, $2^r \leq n < 2^{r+1}$. Então, $E(S_n)^2 \leq E(S_{2^{r+1}})^2$. De fato, observe que

$$E(Y_1+\cdots+Y_n)^2 \leq E(Y_1+\cdots+Y_n+\cdots+Y_{2^{r+1}})^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} & E(Y_i)^2 + 2[(E\ Y_1Y_2 + E\ Y_1Y_3 + \cdots + E\ Y_1Y_n) + \\
& + (E\ Y_2Y_3 + E\ Y_2Y_4 + \cdots + E\ Y_2Y_n) + \cdots + E\ Y_{n-1}Y_n] \leq \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{2^{r+1}} E(Y_i)^2 + \\
& + 2[(E\ Y_1Y_2 + E\ Y_1Y_3 + \cdots + E\ Y_1Y_n + \cdots + E\ Y_1Y_{2^{r+1}}) + \\
& + (E\ Y_2Y_3 + E\ Y_2Y_4 + \cdots + E\ Y_2Y_n + \cdots + E\ Y_2Y_{2^{r+1}}) + \cdots + \\
& + (E\ Y_nY_{n+1} + \cdots + E\ Y_nY_{2^{r+1}}) + (E\ Y_{n+1}Y_{n+2} + \cdots + E\ Y_{n+1}Y_{2^{r+1}}) + \cdots + \\
& + E\ Y_{2^{r+1}-1}Y_{2^{r+1}}] \qquad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{2^{r+1}} & E(Y_i)^2 + 2[(E\ Y_1Y_{n+1} + \cdots + E\ Y_1Y_{2^{r+1}}) + \\
& + (E\ Y_2Y_{n+1} + \cdots + E\ Y_2Y_{2^{r+1}}) + \cdots + (E\ Y_nY_{n+1} + \cdots + E\ Y_nY_{2^{r+1}}) + \\
& + (E\ Y_{n+1}Y_{n+2} + \cdots + E\ Y_{n+1}Y_{2^{r+1}}) + \cdots + E\ Y_{2^{r+1}-1}Y_{2^{r+1}}] \geq 0.
\end{aligned}$$

Temos que $E(Y_i)^2 \geq 0$ e logo, $\sum_{i=n+1}^{2^{r+1}} E(Y_i)^2 \geq 0$ e como $E(Y_iY_j) = Cov(Y_i, Y_j) \geq 0$, segue que todas as parcelas entre os colchetes, da equação acima, são maiores que ou iguais a zero.

Então,

$$\begin{aligned}
E(S_n)^2 &\leq E(S_{2^{r+1}})^2 = E(S_o(2^{r+1}))^2 \leq \sup_{k\geq 0} E(S_k(2^{r+1}))^2 = \sigma_{2^{r+1}}^2 \\
&\leq \bar{C}\ 2^{r+1}\ (\sigma_1^2+1) \qquad \text{por (2.11)} \\
&= \bar{C}\ 2^r.\ 2\ (\sigma_1^2+1).
\end{aligned}$$

Como $2^r \leq n$ e chamando $2\,\bar{C} = C$, temos:

$$E(S_n)^2 \leq C\ n\ (\sigma_1^2 + 1)$$

onde C é uma constante que não depende de n. Logo, pelo Lema 2.2

$$E\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j^2\right) \leq E(S_n^2) \leq C\ n\ (\sigma_1^2 + 1) = C\ n\ \left(\max_{1\leq j\leq n} E(X_j^2) + \ 1\right)$$

onde a última igualdade segue da Afirmação 2.4. ∎

2.2 A Lei Forte dos Grandes Números e Consequências

Nesta seção, iremos demonstrar o teorema sobre a Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias Positivamente Associadas, utilizando resultados sobre sequências equivalentes, Lema de Kronecker, Desigualdade de Chebyschev e o Método Geral do Capítulo 1. Apresentaremos um corolário que altera algumas hipóteses do teorema sobre a Lei Forte dos Grandes Números. Em seguida, provaremos que variáveis aleatórias independentes são Positivamente Associadas, para depois demonstrar um resultado para variáveis aleatórias independentes, usando o referido corolário.

Teorema 2.5. *Sejam $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias Positivamente Associadas com $E(X_n) = 0$ para todo n, e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função par, tal que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, e*

(a) φ é não-decrescente em $[0, \infty)$ e $\dfrac{\varphi(x)}{x} \searrow$, $x \to \infty$ ou

(b) $\dfrac{\varphi(x)}{x} \nearrow$ e $\dfrac{\varphi(x)}{x^2} \searrow$, $x \to \infty$.

Suponha que $\{b_n\}$ satisfaça as condições fixadas no preâmbulo do Capítulo 1 (pag. 6) e que $u(n) = \sup_{i\geq 1} \sum_{j:j-i\geq n} Cov(X_i, X_j)$ satisfaz as condições do Lema 2.3 (pag. 22). Adicionalmente suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} < \infty, \tag{2.12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_n))}{\varphi(b_n)} < \infty \quad e \tag{2.13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\le j\le n} \frac{b_j^2\ E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} < \infty. \tag{2.14}$$

Então

$$\frac{S_n}{b_n} \longrightarrow 0 \quad q.c. \tag{2.15}$$

Observação 2.6. *Pela Desigualdade de Chebyschev, temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\le j\le n} \left[b_j^2\ P(|X_j| > b_j)\right] \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\le j\le n} \frac{b_j^2\ E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)}$$

e de $I_{[|X_j|\le b_j]} \le 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\le j\le n} \frac{b_j^2\ E\left(\varphi(X_j)\ I_{[|X_j|\le b_j]}\right)}{\varphi(b_j)} \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\le j\le n} \frac{b_j^2\ E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)}.$$

Então como a condição (2.14) implica nas condições

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\le j\le n} \left[b_j^2\ P(|X_j| > b_j)\right] < \infty \quad e \tag{2.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\le j\le n} \frac{b_j^2\ \ E\left(\varphi(X_j)\ \ I_{[|X_j|\le b_j]}\right)}{\varphi(b_j)} < \infty. \tag{2.17}$$

podemos substituí-las no Teorema 2.5.

Para a demonstração deste teorema, vamos precisar de alguns resultados, que podem ser encontrados em [13].

Definição 2.7. *Duas sequências de variáveis aleatórias* $\{X_n\}$ *e* $\{Z_n\}$ *são ditas equivalentes quando* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \ne Z_n) < \infty$.

Teorema 2.8. *Se* $\{X_n\}$ *e* $\{Z_n\}$ *são equivalentes, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - Z_n)$ *converge q.c. Mais ainda, se* $b_n \uparrow \infty$ *então* $\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - Z_j) \ \rightarrow\ 0$ *q.c.*

Lema de Kronecker. *Sejam* $\{x_k\}$ *uma sequência de números reais,* $\{a_k\}$ *uma sequência* *de números reais positivos e* $a_k \uparrow \infty$. *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n} < \infty$ *então* $\displaystyle\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} x_j \to 0$.

Demonstração do Teorema 2.5 :

Inicialmente, observe que em (b), φ é não-decrescente em $[0,\infty)$, isto é, se $0 < x < y$ então, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, pois, caso contrário, suponha que exista $0 < x < y$ tal que $\varphi(x) > \varphi(y)$. Como $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, segue que $\frac{\varphi(y)}{y} < \frac{\varphi(x)}{x}$, ou seja, $\frac{\varphi(x)}{x}$ é não-crescente, contrariando a primeira hipótese em (b).

Seja agora $Z_j := X_j I_{[|X_j|\leq b_j]} - b_j I_{[X_j<-b_j]} + b_j I_{[X_j>b_j]}$. Temos que $\{X_j\}$ e $\{Z_j\}$ são sequências equivalentes. De fato,

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(X_j \neq Z_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(|X_j| > b_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} < \infty, \quad \text{pela hipótese} \quad (2.13),$$

onde, na penúltima desigualdade, usamos a Desigualdade de Chebyschev, pois φ é não-decrescente em $[0,\infty)$ em (a) e (b). Então, como $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} P(X_j \neq Z_j) < \infty$ segue que $\{X_j\}$ e $\{Z_j\}$ são sequências equivalentes, e logo, pelo Teorema 2.8, $\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - Z_j) \to 0$ q.c.

Assim, se mostrarmos que $\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \to 0$ q.c., o teorema ficará provado.

Observe que:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} Z_j = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} EZ_j + \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}(Z_j - E\, Z_j).$$

Afirmação 2.9. $\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} E(Z_j) \to 0.$

De fato, se $\varphi(x)$ satisfaz a condição (a), isto é, $\frac{\varphi(x)}{x} \searrow$, então sempre que $|X_j| \leq b_j$, temos $\frac{\varphi(b_j)}{b_j} \leq \frac{\varphi(|X_j|)}{|X_j|}$ e assim, $\frac{|X_j|}{b_j} \leq \frac{\varphi(|X_j|)}{\varphi(b_j)}$ e como φ é par, $\frac{|X_j|}{b_j} \leq \frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}$. Observe agora que:

$$\begin{aligned}
|Z_j| &= |X_j I_{[|X_j|\leq b_j]} - b_j I_{[X_j<-b_j]} + b_j I_{[X_j>b_j]}| \leq |X_j| I_{[|X_j|\leq b_j]} + b_j I_{[X_j<-b_j]} + b_j I_{[X_j>b_j]} \\
&= |X_j| I_{[|X_j|\leq b_j]} + b_j (I_{[X_j<-b_j]} + I_{[X_j>b_j]}) = |X_j| I_{[|X_j|\leq b_j]} + b_j I_{[X_j<-b_j]\cup[X_j>b_j]} \\
&= |X_j| I_{[|X_j|\leq b_j]} + b_j I_{[|X_j|>b_j]}.
\end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
|EZ_j| &\leq E|Z_j| \leq E(|X_j|I_{[|X_j|\leq b_j]} + b_j I_{[|X_j|>b_j]}) = E(|X_j|I_{[|X_j|\leq b_j]}) + b_j\ E(I_{[|X_j|>b_j]}) \\
&= b_j\ E\left(\frac{|X_j|}{b_j} I_{[|X_j|\leq b_j]}\right) + b_j\ P(|X_j| > b_j)
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Chebyschev, temos que $P(|X_j| > b_j) \leq E\left(\dfrac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right)$ logo,

$$
\begin{aligned}
|EZ_j| &\leq b_j\ E\left(\frac{|X_j|}{b_j} I_{[|X_j|\leq b_j]}\right) + b_j\ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) \\
&\leq b_j\ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)} I_{[|X_j|\leq b_j]}\right) + b_j\ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) \\
&\leq b_j\ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) + b_j\ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) \\
&= 2\ b_j\ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right).
\end{aligned}
$$

Agora, se $\varphi(x)$ satisfaz a condição (b), ou seja, $\dfrac{\varphi(x)}{x} \nearrow$, então sempre que $b_j < |X_j|$, segue $\dfrac{\varphi(b_j)}{b_j} \leq \dfrac{\varphi(|X_j|)}{|X_j|}$ o que implica em $\dfrac{|X_j|}{b_j} \leq \dfrac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}$. Então,

$$
\begin{aligned}
Z_j &= X_j I_{[|X_j|\leq b_j]} - b_j I_{[X_j<-b_j]} + b_j I_{[X_j>b_j]} \\
&\leq X_j I_{[|X_j|\leq b_j]} + b_j I_{[X_j<-b_j]} + b_j I_{[X_j>b_j]} \\
&= X_j I_{[|X_j|\leq b_j]} + b_j I_{[|X_j|>b_j]}
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

$$
|E\ Z_j| \leq |E(X_j I_{[|X_j|\leq b_j]})| + |E(b_j I_{[|X_j|>b_j]})| = |E(X_j I_{[|X_j|\leq b_j]})| + b_j\ P(|X_j| > b_j)
$$

Observe que:

$$
I_{[|X_j|>b_j]} = 1 - I_{[|X_j|\leq b_j]} \quad \Rightarrow \quad X_j I_{[|X_j|>b_j]} = X_j - X_j I_{[|X_j|\leq b_j]} \quad \Rightarrow
$$

$$
E(X_j I_{[|X_j|>b_j]}) = E\ X_j - E(X_j I_{[|X_j|\leq b_j]}) \quad \Rightarrow
$$

$$
|E(X_j I_{[|X_j|>b_j]})| = |E(X_j I_{[|X_j|\leq b_j]})|.
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|EZ_j| &\leq |E(X_j I_{[|X_j|>b_j]})| + b_j P(|X_j| > b_j) \leq E(|X_j| I_{[|X_j|>b_j]}) + b_j \ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) \\
&= b_j \ E\left(\frac{|X_j|}{b_j} I_{[|X_j|>b_j]}\right) + b_j \ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) \\
&\leq b_j \ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)} I_{[|X_j|>b_j]}\right) + b_j \ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) \\
&\leq b_j \ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) + b_j \ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) \\
&= 2 \ b_j \ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$|EZ_j| \leq 2 \ b_j \ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}\right) \tag{2.19}$$

em ambos os casos (a) e (b). De (2.13) e (2.19), temos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|EZ_j|}{b_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \ E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} < \infty.$$

Então, pelo Lema de Kronecker, $\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} |E(Z_j)| \ \rightarrow 0,$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\frac{1}{b_n} \left| \sum_{j=1}^{n} E(Z_j) \right| \leq \frac{1}{b_n} \ \sum_{j=1}^{n} |E(Z_j)|$, segue que

$$\frac{1}{b_n} \left| \sum_{j=1}^{n} E(Z_j) \right| \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

e portanto,

$$\frac{1}{b_n} \ \sum_{j=1}^{n} EZ_j \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Afirmação 2.10. $\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} (Z_j - EZ_j) \rightarrow 0.$

De fato, por (a), $\frac{\varphi(x)}{x} \searrow$, então, se $0 < x \leq y$ temos $\frac{\varphi(x)}{x} \geq \frac{\varphi(y)}{y}$, e como $xy \leq y^2$ temos $\frac{y^2}{\varphi(y)} \geq \frac{xy}{\varphi(y)} \geq \frac{x^2}{\varphi(x)}$. Logo, $0 < x \leq y$ implica em $\frac{\varphi(x)}{x^2} \geq \frac{\varphi(y)}{y^2}$ e portanto concluímos que $\frac{\varphi(x)}{x^2} \searrow$. Em (b), temos o mesmo, $\frac{\varphi(x)}{x^2} \searrow$. Então para $|X_j| \leq b_j$,

$\dfrac{X_j^2}{\varphi(|X_j|)} \leq \dfrac{b_j^2}{\varphi(b_j)}$ e assim,

$$\frac{X_j^2}{b_j^2} \leq \frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)}. \tag{2.20}$$

Observe agora que, de (2.18)

$$Z_j \leq X_j I_{[|X_j| \leq b_j]} + b_j I_{[|X_j| > b_j]}$$

e então,

$$Z_j^2 \leq X_j^2 I_{[|X_j| \leq b_j]} + b_j^2 I_{[|X_j| > b_j]} + 2 X_j b_j I_{[|X_j| \leq b_j]} I_{[|X_j| > b_j]}.$$

Sabemos que $I_{[|X_j| \leq b_j]} I_{[|X_j| > b_j]} = I_{[|X_j| \leq b_j] \cap [|X_j| > b_j]} = I_{\emptyset} \equiv 0$. Logo,

$$Z_j^2 \leq X_j^2 I_{[|X_j| \leq b_j]} + b_j^2 I_{[|X_j| > b_j]}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
E(Z_j^2) &\leq E\left(X_j^2 I_{[|X_j| \leq b_j]}\right) + b_j^2\ P(|X_j| > b_j) \\
&= b_j^2\ E\left(\frac{X_j^2}{b_j^2} I_{[|X_j| \leq b_j]}\right) + b_j^2\ P(|X_j| > b_j) \\
&\leq b_j^2\ E\left(\frac{\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)} I_{[|X_j| \leq b_j]}\right) + b_j^2\ P(|X_j| > b_j) \quad \text{por} \quad (2.20) \\
&= b_j^2\ \frac{E(\varphi(X_j)\ I_{[|X_j| \leq b_j]})}{\varphi(b_j)} + b_j^2\ P(|X_j| > b_j) \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Agora, temos que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \quad P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left|\sum_{j=1}^{k} (Z_j - EZ_j)\right| > b_n\ \varepsilon\right) \leq \\
&\leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{b_n^2\ \varepsilon^2}\ E\left[\max_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{j=1}^{k} (Z_j - EZ_j)\right)^2\right] \quad \text{pela Desigualdade de Markov} \\
&= \quad \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-2} E\left[\max_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{j=1}^{k} (Z_j - EZ_j)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

e pelo Lema 2.3

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \quad n^{-1} \quad P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=1}^{k}(Z_j - EZ_j)\right| > b_n\ \varepsilon\right) \le \\
&\le \quad \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\ b_n^{-2}\ C\ n\ \left(\max_{1\le j\le n} E(Z_j - EZ_j)^2 + 1\right)\\
&= \quad C\ \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2}\left[\max_{1\le j\le n}\left(E(Z_j^2) - (EZ_j)^2\right) + 1\right].
\end{aligned}$$

Como $E(Z_j^2) - (EZ_j)^2 \le E(Z_j^2)$, então $\max_{1\le j\le n}\left[E(Z_j^2) - (EZ_j)^2\right] \le \max_{1\le j\le n} E(Z_j^2)$ e portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \quad n^{-1} \quad P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=1}^{k}(Z_j - EZ_j)\right| > b_n\ \varepsilon\right) \le \\
&\le \quad C\ \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2}\left(\max_{1\le j\le n} E(Z_j^2) + 1\right)\\
&\le \quad C\ \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2}\left\{\max_{1\le j\le n}\left[b_j^2\ \frac{E(\varphi(X_j)\ I_{[|X_j|\le b_j]})}{\varphi(b_j)} + b_j^2\ P(|X_j| > b_j)\right] + 1\right\}
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (2.21). Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \quad n^{-1} \quad P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=1}^{k}(Z_j - EZ_j)\right| > b_n\ \varepsilon\right) \le \\
&\le \quad C\ \varepsilon^{-2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2}\max_{1\le j\le n}\frac{b_j^2\ E(\varphi(X_j)\ I_{[|X_j|\le b_j]})}{\varphi(b_j)} + \right.\\
&+ \quad \left.\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2}\max_{1\le j\le n}\left[b_j^2\ P(|X_j| > b_j)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2}\right]\\
&\le \quad C\ \varepsilon^{-2}\left[2\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2}\max_{1\le j\le n}\frac{b_j^2\ E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2}\right]\\
&< \quad \infty,
\end{aligned}$$

devido às hipóteses (2.12) e (2.14). Então, pelo Teorema 1.1 (Método Geral),

$$\frac{1}{b_n}\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=1}^{k}(Z_j - E\ Z_j)\right| \to 0 \ \text{ q.c.}$$

o que implica em

$$\frac{1}{b_n}\left|\sum_{j=1}^{n}(Z_j - E\ Z_j)\right| \to 0 \ \text{ q.c.}$$

e portanto,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}(Z_j - E\ Z_j) \to 0 \text{ q.c.}$$

Portanto, das Afirmações 2.9 e 2.10, segue que $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \to 0$ q.c. ■

Observação 2.11. *Veja no Apêndice A, que as demonstrações do Teorema 2.5 e do Teorema 0.1, enunciado na Introdução desta dissertação se diferem apenas das Afirmações 2.10 e A.4, que são justamente o ponto da demonstração onde aplicamos o caso das variáveis aleatórias serem PA, usando o Lema 2.3 e o Método Geral, no Teorema 2.5 e das variáveis aleatórias serem independentes, usando o Critério de Convergência de Kolmogorov, no Teorema 0.1 .*

O corolário a seguir, é o Teorema 2.5, com algumas hipóteses modificadas, que será de grande auxílio para resultados posteriores.

Corolário 2.12. *No Teorema 2.5, se as condições (2.12) - (2.14) forem substituídas por*

$$\sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j)) < \infty \quad e \tag{2.22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(b_n)} < \infty, \tag{2.23}$$

então,

$$\frac{S_n}{b_n} \to 0 \quad q.c.$$

Demonstração:

Na demonstração do Teorema 2.5, provamos que $\frac{\varphi(x)}{x^2} \searrow$ em ambos os casos (a) e (b). Como b_n é uma sequência não-decrescente de números positivos, então

$$b_1 \leq b_n \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{b_1^2}{\varphi(b_1)} \leq \frac{b_n^2}{\varphi(b_n)}. \tag{2.24}$$

Observe que, como $b_j \leq b_n$ para todo $1 \leq j \leq n$, então $\frac{b_j^2}{\varphi(b_j)} \leq \frac{b_n^2}{\varphi(b_n)}$ e logo,

$$\max_{1\leq j\leq n}\frac{b_j^2}{\varphi(b_j)} = \frac{b_n^2}{\varphi(b_n)}. \tag{2.25}$$

Note que, para cada n,

$$E(\varphi(X_n)) \leq \sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j)) \quad \Rightarrow \quad \frac{E(\varphi(X_n))}{\varphi(b_n)} \leq \frac{\sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_n)},$$

logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_n))}{\varphi(b_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_n)} = \sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j)) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_n)} < \infty, \tag{2.26}$$

devido às hipóteses (2.22) e (2.23). Observe agora que, de (2.24), $b_n^{-2} \leq \dfrac{\varphi(b_1)}{b_1^2\ \varphi(b_n)}$ então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(b_1)}{b_1^2} \cdot \frac{1}{\varphi(b_n)} = \frac{\varphi(b_1)}{b_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_n)} < \infty.$$

Temos agora que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\leq j\leq n} \frac{b_j^2\ E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \max_{1\leq j\leq n} \frac{b_j^2}{\varphi(b_j)} \cdot \max_{1\leq j\leq n} E(\varphi(X_j)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \frac{b_n^2}{\varphi(b_n)} \max_{1\leq j\leq n} E(\varphi(X_j)) \quad \text{por (2.25)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_n)} \max_{1\leq j\leq n} E(\varphi(X_j)) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_n)} \sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j)) < \infty, \text{ de (2.26)}
\end{aligned}$$

pois como $E(\varphi(X_j)) \leq \sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j)) < \infty$, para todo $j \geq 1$, então $\max_{1\leq j\leq n} E(\varphi(X_j)) \leq \sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j)) < \infty$, para todo $n \geq 1$. Logo, o resultado segue do Teorema 2.5 ■

Antes de demonstrarmos uma consequência do Corolário 2.12 vamos provar o seguinte

Teorema 2.13. ***(Teorema 2.1 [17])*** *Variáveis Aleatórias independentes são Positivamente Associadas (PA).*

Para tal demonstração, vamos utilizar duas propriedades sobre variáveis aleatórias Positivamente Associadas, suas demonstrações podem ser encontradas em [17].

(P_1)Se dois conjuntos de variáveis aleatórias Positivamente Associadas são independentes um do outro, então a sua união é um conjunto de variáveis aleatórias Positivamente Associadas.

(P_2)O conjunto constituído por uma única variável aleatória é Positivamente Associado.

Demonstração do Teorema 2.13 :

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes. Por (P_2), X_1 é PA e X_2 também é PA. Então por (P_1) X_1, X_2 são PA. Sejam agora $W = (X_1, X_2)$ e X_3 variáveis aleatórias independentes. Por (P_2), W é PA e X_3 é PA. Então por (P_1) (W, X_3) são PA, isto é, (X_1, X_2, X_3) são PA.

Suponha, por indução, que $Y = (X_1, X_2, ..., X_n)$ variáveis aleatórias independentes sejam PA. Suponha também que Y e X_{n+1} sejam variáveis aleatórias independentes. Por (P_2), Y é PA e X_{n+1} é PA. Então por (P_1) (Y, X_{n+1}) são PA, isto é, $(X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1})$ são PA.

Portanto, variáveis aleatórias independentes são PA. ■

O corolário a seguir, é uma consequência do Corolário 2.12, para variáveis aleatórias independentes.

Corolário 2.14. *Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Se existe $k > 0$ tal que $E(X_n^2) \leq k$, para todo n, então,*

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \quad q.c.$$

Demonstração:

Sejam $\{X_n, n \geq 1\}$ variáveis aleatórias independentes e tais que existe $k > 0$ tal que $E(X_n^2) \leq k$, para todo n. Pelo Teorema 2.13 temos que variáveis aleatórias independentes são Positivamente Associadas, logo fazendo $b_n = n$ e $\varphi(x) = x^2$ no Corolário 2.12, temos:

$$\sup_{j \geq 1} E(\varphi(X_j)) = \sup_{j \geq 1} E(X_j^2) \leq k < \infty \quad \text{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Logo, $\frac{S_n}{n} \to 0$ q.c. ■

2.3 Taxa de Convergência

Nesta seção, apresentaremos uma consequência do Corolário 2.12, e em seguida, a conclusão sobre uma estimativa para a taxa de convergência de $\dfrac{S_n}{n}$.

Corolário 2.15. *Suponha que* $\{X_j, j \geq 1\}$ *é uma sequência de variáveis aleatórias Positivamente Associadas,* $E(X_j) = 0$, $\sup_{j\geq 1} E|X_j|^p < \infty$ *para algum* $1 \leq p \leq 2$ *e que é satisfeita a seguinte condição,* $\sum_{i=1}^{\infty} u^{\frac{1}{2}}(2^i) < \infty$. *Então, para cada* $\delta > 1$, *temos*

$$\frac{S_n}{(n \log n \ (\log\log n)^{\delta})^{\frac{1}{p}}} \to 0 \quad q.c.$$

Demonstração:

Tomando $\varphi(x) = |x|^p$ e $b_n = (n \log n \ (\log\log n)^{\delta})^{\frac{1}{p}}$, $n > 1$, no Corolário 2.12, temos:

$$\sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j)) = \sup_{j\geq 1} E(|X_j|^p) < \infty \ \text{ (por hipótese).}$$

A série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \ (\log\log n)^{\delta}} < \infty,$$

pois, pelo Teste da Integral, para $a > 1$,

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} \frac{1}{x \log x \ (\log\log x)^{\delta}} \, dx &= \int_{\log a}^{\infty} \frac{1}{u \ (\log u)^{\delta}} \, du = \int_{\log\log a}^{\infty} v^{-\delta} \, dv \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{v^{-\delta+1}}{-\delta+1} \right)_{\log\log a}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{(-\delta+1)v^{\delta-1}} \right)_{\log\log a}^{b} \\ &= \frac{-1}{(-\delta+1)(\log\log a)^{\delta-1}} = \frac{1}{(\delta-1)(\log\log a)^{\delta-1}} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário 2.12,

$$\frac{S_n}{(n \log n \ (\log\log n)^{\delta})^{\frac{1}{p}}} \to 0 \ \text{ q.c.}$$

■

Taxa de Convergência. Para o caso $p = 2$, o Corolário implica que a taxa de convergência de $\dfrac{S_n}{n}$ é $n^{-\frac{1}{2}}\ (\log n)^{\frac{1}{2}}\ (\log\log n)^{\frac{\delta}{2}}$. De fato, como

$$\frac{S_n}{(n\log n\ (\log\log n)^{\delta})^{\frac{1}{2}}} \to 0 \quad \text{q.c.}$$

segue-se que,

$$\frac{\frac{S_n}{n}}{\frac{(n\log n\ (\log\log n)^{\delta})^{\frac{1}{2}}}{n}} \to 0 \quad \text{q.c.}$$

logo, a taxa de convergência é

$$\frac{(n\log n\ (\log\log n)^{\delta})^{\frac{1}{2}}}{n} = n^{-\frac{1}{2}}\ (\log n)^{\frac{1}{2}}\ (\log\log n)^{\frac{\delta}{2}}.$$

Capítulo

3

Variáveis Aleatórias Negativamente Associadas e Lei Forte dos Grandes Números

Desde o início dos estudos sobre variáveis aleatórias Positivamente Associadas, um grande número de artigos têm sido escrito sobre o assunto. A teoria e aplicação de variáveis aleatórias Negativamente Associadas não é simplesmente uma cópia da teoria e da aplicação de associação positiva, elas se diferem em aspectos importantes. Na verdade, variáveis aleatórias Negativamente Associadas são uma versão qualitativa de dependência negativa entre as variáveis aleatórias. Detalhes sobre essa teoria podem ser encontrados em [21].

O objetivo deste capítulo, é definir variáveis aleatórias Negativamente Associadas e provar alguns resultados preliminares para que, na segunda seção, possamos aplicar o Teorema 1.1 para provar a Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias Negativamente Associadas.

3.1 Definição e alguns Resultados Preliminares

Nesta seção, iremos definir variáveis aleatórias Negativamente Associadas e demonstrar três lemas, onde o último será usado na demonstração do Teorema 3.8, que se encontra na próxima seção. Para a demonstração deste lema, serão utilizados os lemas anteriores e alguns resultados que só foram enunciados, suas demonstrações foram omitidas pois não são de nosso interesse nesta dissertação.

Definição 3.1. *As v.a.'s $X_1, ..., X_n$ são ditas Negativamente Associadas (NA) se para cada n e cada par de subconjuntos disjuntos A_1, A_2 de $\{1, \cdots, n\}$,*

$$Cov(f(X_i : i \in A_1), g(X_j : j \in A_2)) \leq 0,$$

onde f e g são crescentes em cada coordenada e a covariância existe.

Lema 3.2. *Para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $1 < p \leq 2$,*

$$|1 + x|^p \leq 1 + px + 2^{2-p}|x|^p. \tag{3.1}$$

Demonstração:

Para provar a desigualdade acima, vamos considerar a seguinte função

$$f(x) = |1 + x|^p - 1 - px - 2^{2-p}|x|^p$$

e provar que $f(x) \leq 0$, para todo x, fazendo um estudo de seu gráfico. Temos que f não é derivável em $x = 0$ e $x = -1$, e que $f(0) = 0$ e $f(-1) = -1 + p - 2^{2-p} \leq 0$, pois $-1 + p \leq 1 \leq 2^{2-p}$. Então, o nosso estudo será dividido em três casos.

1^o *Caso:* $x > 0$.

Para $x > 0$, $f(x)$ fica

$$f(x) = (1 + x)^p - 1 - px - 2^{2-p}x^p.$$

Sua derivada é $f^{'}(x) = p\,[(1+x)^{p-1} - 1 - 2^{2-p}x^{p-1}]$, então, se verificarmos que $f^{'}(x) \leq 0$, então f é decrescente e logo $f(x) \leq f(0) = 0$, para todo $x > 0$. Como $1 < p \leq 2$, então basta verificar que $g(x) = (1 + x)^{p-1} - 1 - 2^{2-p}x^{p-1} \leq 0$. Para isto, calculando $g'(x)$, temos:

$$g'(x) = (p - 1)[(1 + x)^{p-2} - 2^{2-p}x^{p-2}],$$

e observe que

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2-p} \leq 2^{2-p} \quad \Rightarrow \quad (1 + x)^{p-2} \leq 2^{2-p}x^{p-2} \quad \Rightarrow \quad (1 + x)^{p-2} - 2^{2-p}x^{p-2} \leq 0.$$

Portanto $g(x) \leq 0$, para todo $x > 0$, e assim f é decrescente e $f(x) \leq 0$, para todo $x > 0$, conforme a Figura 3.1.

2^o *Caso:* $x < -1$.

Para $x < -1$, $f(x)$ fica

$$f(x) = (-1-x)^p - 1 - px - 2^{2-p}(-x)^p.$$

Temos que

$$f'(x) = p\,[-(-1-x)^{p-1} - 1 + 2^{2-p}(-x)^{p-1}]$$
$$f''(x) = p\,(p-1)\,[(-1-x)^{p-2} - 2^{2-p}(-x)^{p-2}].$$

Seja $\varphi(x) = (-1-x)^{p-2} - 2^{2-p}(-x)^{p-2}$. Temos que $0 \le 2-p < 1$, $\varphi(-1) = -2^{2-p} < 0$ e $\varphi(-2) = 0$. Reescrevendo $\varphi(x)$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{(-1-x)^{2-p}} + \frac{2^{2-p}}{(-x)^{2-p}} = \frac{1}{(-x)^{2-p}}\left[\left(\frac{-x}{-1-x}\right)^{2-p} - 2^{2-p}\right] \\ &= \frac{1}{(-x)^{2-p}}\left[\left(1 + \frac{1}{-1-x}\right)^{2-p} - 2^{2-p}\right]. \end{aligned}$$

Observe agora que,

- se $-2 < x < -1$, então $0 < -1-x < 1$ e logo, $\varphi(x) > 0$;
- se $x \le -2$, então $-1-x \ge 1$ e logo, $\varphi(x) \le 0$.

Logo, $f''(x) > 0$ se $-2 < x < -1$ e $f''(x) \le 0$ se $x \le -2$. Então, segue que $x = 2$ é um ponto de inflexão, isto é, no intervalo $(-\infty, -2]$ o gráfico de f é côncavo para baixo e no intervalo $(-2, -1)$ é côncavo para cima. Veja Figura 3.1.

3^o *Caso:* $-1 < x < 0$.

Para $-1 < x < 0$, $f(x)$ fica

$$f(x) = (1+x)^p - 1 - px - 2^{2-p}(-x)^p.$$

Observe que

$$f'(x) = p\,[(1+x)^{p-1} - 1 + 2^{2-p}(-x)^{p-1}]$$
$$f''(x) = p\,(p-1)\,[(1+x)^{p-2} - 2^{2-p}(-x)^{p-2}].$$

Seja agora $\psi(x) = (1+x)^{p-2} - 2^{2-p}(-x)^{p-2}$. Temos que

$$\psi(-1) = -2^{2-p} < 0 \quad \text{e}$$

$$\psi\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{p-2} - 2^{2-p}\left(-\frac{2}{3}\right)^{p-2} = 0.$$

Reescrevendo $\psi(x)$, como no caso anterior, chegamos a

$$\psi(x) = \frac{1}{(-x)^{2-p}}\left[\left(-1+\frac{1}{1+x}\right)^{2-p} - 2^{2-p}\right].$$

Então, temos

- se $-1 < x < -\frac{2}{3}$, então $0 < 1+x < \frac{1}{3}$ e logo, $\psi(x) > 0$;
- se $-\frac{2}{3} \leq x < 0$, então $\frac{1}{3} \leq 1+x < 1$ e logo, $\psi(x) \leq 0$.

Assim $f''(x) > 0$ se $-1 < x < -\frac{2}{3}$ e $f''(x) \leq 0$ se $-\frac{2}{3} \leq x < 0$. Logo, temos que $x = -\frac{2}{3}$ é um ponto de inflexão, isto é, no intervalo $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ o gráfico de f é côncavo para cima e no intervalo $\left[-\frac{2}{3}, 0\right)$ é côncavo para baixo. Veja a figura abaixo. Finalmente, pelos três casos acima, temos que o gráfico de f se assemelha ao seguinte:

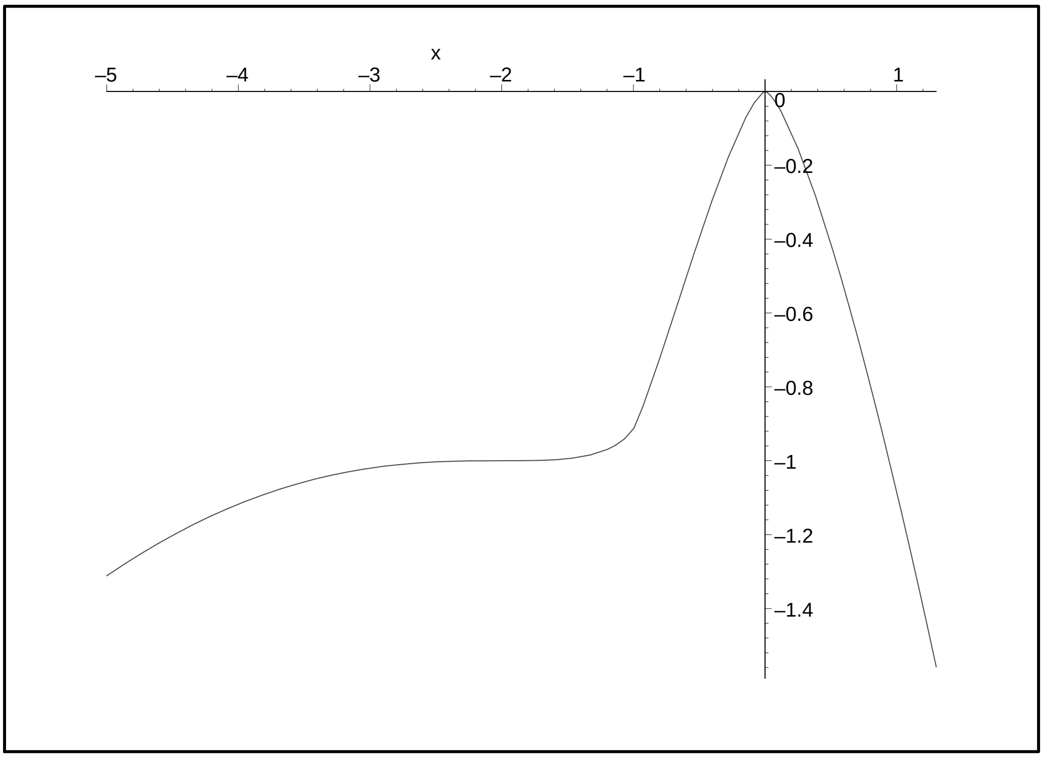

Figura 3.1: *Gráfico da função* $f(x) = |1+x|^p - 1 - px - 2^{2-p}|x|^p$, *caso* $p = \frac{3}{2}$.

Portanto, $f(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O que conclui o Lema 3.2. ■

Lema 3.3. *Sejam* $X_1, ..., X_n$ *variáveis aleatórias independentes com média zero. Então a desigualdade (3.1) implica em,* $1 < p \leq 2$,

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^p \leq 2^{2-p}\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p.$$

Demonstração:

No Lema 3.2, provamos que $|1+x|^p \leq 1 + px + 2^{2-p}|x|^p$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $1 < p \leq 2$, então fazendo $x = \dfrac{b}{a}$ $(a \neq 0)$, temos

$$\left|1 + \frac{b}{a}\right|^p \leq 1 + p\,\frac{b}{a} + 2^{2-p}\left|\frac{b}{a}\right|^p \quad \Rightarrow$$

$$|a+b|^p \leq |a|^p + p\,\frac{|a|}{a}\,|a|^{p-1}\,b + 2^{2-p}|b|^p \quad \Rightarrow$$

$$|a+b|^p \leq |a|^p + sinal(a)\;p\;b\;|a|^{p-1} + 2^{2-p}|b|^p.$$

Se X_1, X_2 são variáveis aleatórias independentes com $EX_1 = EX_2 = 0$, então fazendo $a = X_1$ e $b = X_2$, na última desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
E|X_1+X_2|^p &\leq E|X_1|^p + E(sinal(X_1)\;p\;X_2\;|X_1|^{p-1}) + 2^{2-p}\;E|X_2|^p \leq \\
&= E|X_1|^p + sinal(X_1)\;p\;E(X_2\;|X_1|^{p-1}) + 2^{2-p}\;E|X_2|^p \\
&= E|X_1|^p + sinal(X_1)\;p\;E(X_2)\;E|X_1|^{p-1} + 2^{2-p}\;E|X_2|^p \quad \text{(independência)} \\
&= E|X_1|^p + 2^{2-p}\;E|X_2|^p \quad (\text{pois } EX_2 = 0) \\
&\leq 2^{2-p}\;(E|X_1|^p + E|X_2|^p).
\end{aligned}$$

Seja agora X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias independentes com $EX_1 = EX_2 = EX_3 = 0$, então fazendo $a = X_1 + X_2$ e $b = X_3$, temos

$$\begin{aligned}
&E\,|X_1 + X_2 + X_3|^p \leq \\
&\leq E|X_1+X_2|^p + sinal(X_1+X_2)\;p\;E(X_3\;|X_1+X_2|^{p-1}) + 2^{2-p}\;E|X_3|^p \\
&\leq 2^{2-p}\;(E|X_1|^p + E|X_2|^p) + sinal(X_1+X_2)\;p\;E(X_3)\;E|X_1+X_2|^{p-1} + 2^{2-p}\;E|X_3|^p \\
&= 2^{2-p}\;(E|X_1|^p + E|X_2|^p + E|X_3|^p).
\end{aligned}$$

Suponha, por indução, que $X_1, ..., X_n$ sejam independentes com $EX_1 = \cdots = EX_n = 0$, então,

$$E|X_1 + X_2 + \cdots + X_n|^p \leq 2^{2-p}\;(E|X_1|^p + E|X_2|^p + \cdots + E|X_n|^p).$$

Vamos mostrar que isto é válido para $n+1$. Sejam então $X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}$ independentes com $EX_1 = \cdots = EX_{n+1} = 0$. Assim fazendo $a = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ e $b = X_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned}
&E\,|X_1 + X_2 + \cdots + X_n + X_{n+1}|^p \leq \\
&\quad \leq E|X_1 + X_2 + \cdots + X_n|^p + \\
&\quad + sinal(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\ p\ E(X_{n+1}\ |X_1 + X_2 + \cdots + X_n|^{p-1}) + \\
&\quad + 2^{2-p}\ E|X_{n+1}|^p \\
&\quad \leq 2^{2-p}\ (E|X_1|^p + E|X_2|^p + \cdots + E|X_n|^p) + 2^{2-p}\ E|X_{n+1}|^p \\
&\quad = 2^{2-p}\ (E|X_1|^p + E|X_2|^p + \cdots + E|X_n|^p + E|X_{n+1}|^p).
\end{aligned}$$

Portanto, $E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^p \leq\ 2^{2-p} \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p.$ ∎

Lema 3.4. *Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias Negativamente Associadas com média zero e $E|X_i|^p < \infty$ onde $1 < p \leq 2$. Então*

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k|^p\right) \leq 2^{3-p} \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p. \tag{3.2}$$

Para a demonstração deste lema vamos utilizar alguns resultados que serão enunciados abaixo. Porém suas demonstrações não são de nosso interesse nesta dissertação e portanto serão omitidas.

Teorema 3.5. [33] *Seja $\{X_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ uma sequência de variáveis aleatórias Negativamente Associadas e seja $\{X_i^*,\ 1 \leq i \leq n\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tal que X_i^* e X_i tem a mesma distribuição para cada $i = 1, 2, ..., n$. Então se f é uma função convexa não-decrescente,*

$$E\ f\left(\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i\right) \leq E\ f\left(\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i^*\right) \tag{3.3}$$

sempre que a esperança no lado direito existir.

Teorema 3.6. [11] *Seja ϕ uma função convexa não-decrescente definida em $[0, \infty)$. Sejam $X_1, X_2, ...$ variáveis aleatórias independentes com média zero. Então, para qualquer* *inteiro* $n \geq 1$ *e* $a \in \mathbb{R}$,

$$E\ \phi \left[\max \left(0, \max_{1 \leq k \leq n} (S_k - a) \right) \right] \leq 2\ E\ \phi \left[\max \left(0, (S_n - a) \right) \right] - \phi(0), \qquad (3.4)$$

onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Demonstração do Lema 3.4 :

Seja $\{X_i^*,\ 1 \leq i \leq n\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tal que X_i^* e X_i tem a mesma distribuição para cada $i = 1, 2, ..., n$. Seja $f(x) = [\max(0, x)]^p$, para $1 < p \leq 2$. Temos que f é uma função convexa não-decrescente e então, pelo Teorema 3.5,

$$E \left[\max \left(0, \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i \right) \right]^p \leq E \left[\max \left(0, \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i^* \right) \right]^p.$$

Assim, fazendo $\phi(x) = x^p$ e $a = 0$ no Teorema 3.6, segue que

$$E \left[\max \left(0, \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i \right) \right]^p \leq 2\ E \left[\max \left(0, \sum_{i=1}^{n} X_i^* \right) \right]^p.$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} E \left[\max \left(0, \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^{k} (-X_i) \right) \right]^p &\leq E \left[\max \left(0, \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^{k} (-X_i^*) \right) \right]^p \\ &\leq 2\ E \left[\max \left(0, \sum_{i=1}^{n} (-X_i^*) \right) \right]^p. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} X_i \right|^p \right) &= E \left[\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} X_i \right| \right]^p = E \left[\max \left(0, \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} X_i \right| \right) \right]^p \\ &\leq 2\ E\ \left[\max \left(0, \left| \sum_{i=1}^{n} X_i^* \right| \right) \right]^p \\ &= 2\ E\ \left| \sum_{i=1}^{n} X_i^* \right|^p. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Assim, pelo Lema 3.3, segue que

$$E\ \left| \sum_{i=1}^{n} X_i^* \right|^p \leq 2^{2-p} \sum_{i=1}^{n} E|X_i^*|^p = 2^{2-p} \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|^p\right) &\le 2\cdot 2^{2-p}\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p \\ &= 2^{3-p}\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p, \end{aligned}$$

e o lema fica demonstrado. ■

Observação 3.7. *Temos o seguinte resultado sobre variáveis aleatórias independentes:* ***(Exercício 5 página 361 de [12])*** *Se $\{X_n, n \ge 1\}$ são variáveis aleatórias independentes com $EX_n = 0,\ n \ge 1$ e $p \in (1,2]$, então para alguma constante finita C que depende apenas de p,*

$$E\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|^p \le C\ \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p.$$

Na demonstração do lema anterior, podemos aplicar o exercício acima em vez de usar o Lema 3.3. De fato, por (3.5), temos

$$E\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|^p \le 2\ E\ \left|\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right|^p,$$

e como

$$\left|\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right|^p \le \max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right|^p$$

então,

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right|^p \le\ E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right|^p\right),$$

e assim,

$$E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|^p\right) \le\ 2\ E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right|^p\right) \le\ 2\ C\ \sum_{i=1}^{n} E|X_i^*|^p =\ \bar{C}\ \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p.$$

3.2 A Lei Forte dos Grandes Números e algumas Consequências

O Teorema a seguir, é sobre a Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias Negativamente Associadas. Uma parte de sua demonstração é análoga à demonstração do

Teorema 2.5 para variáveis aleatórias Positivamente Associadas. O restante da demonstração segue do Lema 3.4, demonstrado na seção anterior.

Teorema 3.8. *Sejam* $\{X_n, n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias Negativamente Associadas com* $E(X_n) = 0$ *para todo* n, *e* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função par, tal que* $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, *e*

(a) φ *é não-decrescente em* $[0, \infty)$ *e* $\frac{\varphi(x)}{x} \searrow$, $x \to \infty$ *ou*

(b) $\frac{\varphi(x)}{x} \nearrow$ *e* $\frac{\varphi(x)}{x^2} \searrow$, $x \to \infty$.

Suponha que $\{b_n\}$ *satisfaça as condições fixadas no preâmbulo do Capítulo 1 (pag. 6) e que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} < \infty \quad e \tag{3.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^2 \; E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} < \infty. \tag{3.7}$$

Então,

$$\frac{S_n}{b_n} \to 0 \quad q.c.$$

Observação 3.9. *Da mesma forma que na Observação 2.6, a condição (3.7), implica as condições,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \; P(|X_j| > b_j) < \infty \quad e \tag{3.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \; \frac{E(\varphi(X_j) \; I_{[|X_j| \leq b_j]})}{\varphi(b_j)} < \infty. \tag{3.9}$$

logo, podemos substituí-las no Teorema 3.8.

Demonstração do Teorema 3.8 :

Note que nos Teoremas 2.5 e 3.8 as hipóteses (a), (b) e (2.13) são análogas as hipóteses (a), (b) e (3.6) respectivamente. A demonstração do Teorema 3.8 será análoga à demonstração do Teorema 2.5 até a parte da demonstração da Afirmação 2.10, desigualdade (2.21). Iremos demonstrar o Teorema 3.8 a partir do momento em que as demonstrações tomam rumos diferentes, e isto ocorre, quando aplicamos o Lema 3.4.

No Teorema 2.5, Afirmação 2.10, mostramos que

$$E(Z_j^2) \leq b_j^2 \; \frac{E(\varphi(X_j) \; I_{[|X_j| \leq b_j]})}{\varphi(b_j)} + b_j^2 \; P(|X_j| > b_j). \tag{3.10}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \; n^{-1} \; & P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k}(Z_j - EZ_j)\right| > b_n \; \varepsilon\right) \leq \\
\leq \; & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{b_n^2 \; \varepsilon^2} \; E\left[\max_{1\leq k\leq n}\left(\sum_{j=1}^{k}(Z_j - EZ_j)\right)^2\right] \quad \text{pela Desigualdade de Markov} \\
= \; & \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \; b_n^{-2} \; E\left[\max_{1\leq k\leq n}\left(\sum_{j=1}^{k}(Z_j - EZ_j)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

e pelo Lema 3.4 com $p = 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \; n^{-1} \; & P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k}(Z_j - EZ_j)\right| > b_n \; \varepsilon\right) \leq \\
\leq \; & \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \; b_n^{-2} \; C \; \sum_{j=1}^{n} E(Z_j - EZ_j)^2 \\
\leq \; & \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \; b_n^{-2} \; C \; \sum_{j=1}^{n} EZ_j^2 \\
\leq \; & C \; \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \; b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n}\left[b_j^2 \; \frac{E(\varphi(X_j) \; I_{[|X_j| \leq b_j]})}{\varphi(b_j)} + b_j^2 \; P(|X_j| > b_j)\right]
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade substituímos a expressão (3.10). Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \; n^{-1} \; & P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k}(Z_j - EZ_j)\right| > b_n \; \varepsilon\right) \leq \\
\leq \; & C \; \varepsilon^{-2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \; b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \; \frac{E(\varphi(X_j) \; I_{[|X_j| \leq b_j]})}{\varphi(b_j)} + \right. \\
+ \; & \left. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \; b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \; P(|X_j| > b_j)\right] \\
\leq \; & C \; \varepsilon^{-2} \; 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^2 \; E(\varphi(X_j)}{\varphi(b_j)} \\
< \; & \infty,
\end{aligned}$$

por (3.7). Logo o resultado segue como no Teorema 2.5. ■

Corolário 3.10. *No Teorema 3.8, se as condições (3.6) e (3.7) forem substituídas por*

$$\sup_{j\geq 1} E(\varphi(X_j)) < \infty \quad e \tag{3.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_n)} < \infty, \tag{3.12}$$

então

$$\frac{S_n}{b_n} \to 0 \quad q.c.$$

Demonstração:

Observe que do mesmo modo que na demonstração do Corolário 2.12, $b_j \leq b_n$ para todo $1 \leq j \leq n$, implica em $\dfrac{b_j^2}{\varphi(b_j)} \leq \dfrac{b_n^2}{\varphi(b_n)}$. A prova da expressão (3.6) é análoga a do Corolário 2.12. Observe agora que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^2 \; E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_n^2}{\varphi(b_n)} \; E(\varphi(X_j)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{\varphi(b_n)} \sum_{j=1}^{n} E(\varphi(X_j)) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{\varphi(b_n)} \sum_{j=1}^{n} \sup_{k\geq 1} E(\varphi(X_k)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{\varphi(b_n)} \; n \; \sup_{k\geq 1} E(\varphi(X_k)) \\
&= \sup_{k\geq 1} E(\varphi(X_k)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_n)} < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.8, $\dfrac{S_n}{b_n} \to 0$ q.c. ■

A seguir temos uma consequência do Corolário 3.10.

Corolário 3.11. *Suponha que* $\{X_j, j \geq 1\}$ *é uma sequência de variáveis aleatórias Negativamente Associadas,* $E(X_j) = 0$ *e* $\sup_{j\geq 1} E(|X_j|^p) < \infty$ *para algum* $1 \leq p \leq 2$. *Então, para cada* $\delta > 1$, *temos*

$$\frac{S_n}{(n \log n \; (\log\log n)^{\delta})^{\frac{1}{p}}} \to 0 \quad q.c.$$

Demonstração:

Como as hipóteses (3.11) e (3.12) do corolário anterior são as mesmas hipóteses do Corolário 2.12, segue que a demonstração é análoga a do Corolário 2.15, para variáveis aleatórias Positivamene Associadas. ∎

Apêndice

$\mathcal{A}$

Demonstração do Teorema de Lei Forte dos Grandes Números para v.a.'s Independentes

Com o intuito de fazer uma comparação entre o Teorema 2.5 e o caso independente demonstraremos o seguinte

Teorema A.1. ***(Correspondente ao Teorema 2.5, caso independente)***
Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes com* $EX_n = 0$ *para cada* n*, e* $0 < b_n \uparrow \infty$*. Seja* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função par e contínua em* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$\frac{\varphi(x)}{|x|} \nearrow, \quad \frac{\varphi(x)}{x^2} \searrow \quad \textit{quando} \quad |x| \uparrow \infty \tag{A.1}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_n))}{\varphi(b_n)} < \infty. \tag{A.2}$$

Então

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} X_j \to 0 \qquad q.c. \tag{A.3}$$

Para a demonstração deste teorema, vamos utilizar o seguinte resultado

Teorema A.2. ***(Critério de Convergência de Kolmogorov [1])*** *Sejam* $\{X_n, n \geq 1\}$ *variáveis aleatórias independentes com esperança finita. Se* $\sum_{n=1}^{\infty} VarX_n < \infty$, *então,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - EX_n) \quad \textit{converge q.c.}$$

Demonstração do Teorema A.1 :

Inicialmente, observe que, φ é não-decrescente em $[0,\infty)$, isto é, se $0 < x < y$ então, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, pois, caso contrário, suponha que exista $0 < x < y$ tal que $\varphi(x) > \varphi(y)$. Como $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, segue que $\frac{\varphi(y)}{y} < \frac{\varphi(x)}{x}$, ou seja, $\frac{\varphi(x)}{x}$ é não-crescente, contrariando a primeira hipótese sobre φ.

Seja $Z_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{se} \quad |X_n(\omega)| \leq b_n \\ 0 & \text{se} \quad |X_n(\omega)| > b_n \end{cases}$. Temos que $\{X_j\}$ e $\{Z_j\}$ são sequências equivalentes. De fato,

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(X_j \neq Z_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(|X_j| > b_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_j))}{\varphi(b_j)} < \infty, \quad \text{pela hipótese} \quad (A.2),$$

onde, na penúltima desigualdade, usamos a Desigualdade de Chebyschev. Então, como $\sum_{j=1}^{\infty} P(X_j \neq Z_j) < \infty$ segue que $\{X_j\}$ e $\{Z_j\}$ são sequências equivalentes, e logo, pelo Teorema 2.8, $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - Z_j) \to 0$ q.c. Assim, se mostrarmos que $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \to 0$ q.c., o teorema ficará provado.

Observe que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{EZ_n}{b_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n - EZ_n}{b_n}.$$

Afirmação A.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EZ_n}{b_n} < \infty$.

De fato, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|EZ_n|}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}\left|E(X_n \; I_{[|X_n| \leq b_n]})\right|$, e como $\left|E(X_n \; I_{[|X_n| > b_n]})\right| = \left|E(X_n \; I_{[|X_n| \leq b_n]})\right|$, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|EZ_n|}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}\left|E(X_n \; I_{[|X_n| > b_n]})\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} E\left|\frac{X_n}{b_n} \; I_{[|X_n| > b_n]}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{|X_n|}{b_n} \; I_{[|X_n| > b_n]}\right).$$

Pela primeira hipótese em (A.1), temos $\frac{\varphi(x)}{|x|} \nearrow$ implica em, para $|X_n| > b_n$, $\frac{\varphi(|X_n|)}{|X_n|} \geq$

$\dfrac{\varphi(b_n)}{b_n}$ e como φ é par, $\dfrac{\varphi(X_n)}{|X_n|} \geq \dfrac{\varphi(b_n)}{b_n}$. Então, $\dfrac{|X_n|}{b_n} \leq \dfrac{\varphi(X_n)}{\varphi(b_n)}$, para $|X_n| > b_n$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|EZ_n|}{b_n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{|X_n|}{b_n} I_{[|X_n|>b_n]}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\varphi(X_n)}{\varphi(b_n)} I_{[|X_n|>b_n]}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_n))}{\varphi(b_n)} < \infty.
\end{aligned}$$

E podemos então concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(Z_n)}{b_n} < \infty$.

Afirmação A.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n - EZ_n}{b_n}$ *converge q.c.*

De fato, $E\left(\dfrac{Z_n^2}{b_n^2}\right) = E\left(\dfrac{X_n^2}{b_n^2} I_{[|X_n|\leq b_n]}\right)$ e logo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{Z_n^2}{b_n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_n^2}{b_n^2} I_{[|X_n|\leq b_n]}\right)$.
Observe agora que, pela segunda hipótese em (A.1), temos que $\dfrac{\varphi(x)}{x^2} \searrow$ implica em, para $|X_n| \leq b_n$, $\dfrac{\varphi(b_n)}{b_n^2} \leq \dfrac{\varphi(|X_n|)}{X_n^2}$ e como φ é par segue que $\dfrac{\varphi(b_n)}{b_n^2} \leq \dfrac{\varphi(X_n)}{X_n^2}$. Então, $\dfrac{X_n^2}{b_n^2} \leq \dfrac{\varphi(X_n)}{\varphi(b_n)}$, para $|X_n| \leq b_n$. Segue-se que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{Z_n}{b_n}\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{Z_n^2}{b_n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_n^2}{b_n^2} I_{[|X_n|\leq b_n]}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\varphi(X_n)}{\varphi(b_n)} I_{[|X_n|\leq b_n]}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\varphi(X_n)}{\varphi(b_n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\varphi(X_n))}{\varphi(b_n)} < \infty \text{ por (A.2).}
\end{aligned}$$

Como as variáveis aleatórias X_n são independentes, então as Z_n também são independentes. Aplicando o Teorema A.2 para a sequência de variáveis aleatórias $\left\{\dfrac{Z_n}{b_n}\right\}$, temos de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{Z_n}{b_n}\right) < \infty$, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n - EZ_n}{b_n} \text{ converge q.c.}$$

Logo, das Afirmações A.3 e A.4, segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{b_n}$ converge q.c. Finalmente, pelo Lema de Kronecker, para cada ω em um conjunto de probabilidade um, teremos $\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \to 0$ q.c. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Ash, R. B. e Doléans-Dade, C. A., *Probability and Measure Theory*, 2nd Ed, Academic Press, New York, 2000.

[2] Bagai, I. e Prakasa Rao, B.L.S., *Estimation of the Survival Function for Stationary Associated Processes*, Statist. Probab. Lett. **12**, 1991, 385-391.

[3] Bagai, I. e Prakasa Rao, B.L.S., *Kernel-type Density and Failure Rate Estimation for Associated Sequences*, Ann. Inst. Statist. Math. **47**, 1995, 253-266.

[4] Birkel, T., *Moment Bounds for Associated Sequences*, Ann. Probab. **16**, 1988a, 1184-1193.

[5] Birkel, T., *On the Convergence Rate in the Central Limit Theorem for Associated Processes*, Ann. Probab. **16**, 1988b, 1685-1698.

[6] Birkel, T., *A Note on the Strong Law of Large Numbers for Positively Dependent Random Variables*, Statist. Probab. Lett. **7**, 1989, 17-20.

[7] Cai, Z.W. e Roussas, G.G., *Efficient Estimation of a Distribution Function Under Quadrant Dependence*, Scand. J. Statist. **24**, 1997a, 1-14.

[8] Cai, Z.W. e Roussas, G.G., *Smooth Estimate of Quantiles Under Association*, Statist. Probab. Lett. **36**, 1997b, 275-287.

[9] Cai, Z.W. e Roussas, G.G., *Berry-Esseen Bounds for Smooth Estimator of a Distribution Function Under Association*, J. Nonparametric Statist., 1998a. to appear.

[10] Cai, Z.W. e Roussas, G.G., *Kaplan-Meier Estimator Under Association.* J. Multivariate Anal., 1998b. to appear.

[11] Choi, K. P. e Klass, M. J. *Some Best Possible Prophet Inequalities for Convex Functions of Sums of Independent Variates and Unordered Martingale Difference Sequences*, The Annals of Probability **25 (2)**, 1997, 803-811.

[12] Chow, Y. S. e Teicher, H., *Probability Theory: Independence, Interchangeability Martingales*, 3nd Ed, Springer, New York, 2003.

[13] Chung, K. L., *A Course of Probability Theory*, 3nd Ed, Academic Press, New York, 2001.

[14] Cohen, A. e Sackrowitz, H.B., *Some Remarks on a Notion of Positive Dependence, Association, and Unbiased Testing*, In: Shaked, M., Tong, Y.L. (Eds.), Stochastic Inequalities, IMS, Lecture Notes-Monograph Series, vol. 22, 1992.

[15] Cohen, A. e Sackrowitz, H.B., *Association and Unbiased Tests in Statistics*, In: Shaked, M., Shanthikumar, J.G. (Eds.), Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, Boston, 1994.

[16] Cox, J.T. e Grimmett, G., *Central Limit Theorem for Associated Random Variables and the Percolation Model*. Ann. Probab. **12**, 1984, 514-528.

[17] Esary, J. D., Proschan F. e Walkup, D. W., *Association of Random Variables, with Applications*, The Annals of Mathematical Statistics, 1967, 1466-1474.

[18] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2nd Ed, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.

[19] Fortuin, C.M., Kasteleyn e P.W., Ginibre, J., *Correlation Inequalities on some Partially Ordered Sets*, Commun. Math. Phys. **22**, 1971, 89-103.

[20] Ioannides, D.A. e Roussas, G.G., *Exponential Inequality for Associated Random Variables*, Statist. Probab. Lett. **42**, 1999, 423-431.

[21] Joag-Dev, K. e Proschan, F., *Negative Association of Random Variables with Applications*, The Annals of Statistics **11 (1)**, 1983, 286-295.

[22] Lehmann, E.L., *Some concepts of dependence*, The Annals of Mathematical Statistics **43** 1996, 1137-1153.

[23] Newman, C.M., *Normal fluctuations and the FKG inequalities*, Commun. Math. Phys. **74**,1980, 119-128.

[24] Newman, C.M., *Asymptotic Independence and Limit Theorems for Positively and Negatively Dependent Random Variables*, In: Tong, Y.L. (Ed.), Inequalities in Statistics and Probability, IMS Lecture Notes-Monograph Series, vol. 5, pp. 127-140, Hayward, CA, 1984.

[25] Newman, C.M. e Wright, A.L., *An Invariance Principle for Certain Dependent Sequences*, Ann. Probab. **9**,1981, 671-675.

[26] Newman, C.M. e Wright, A.L., *Associated Random Variables and Martingale Inequalities*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **59**,1982, 361-371.

[27] Oliveira, P.E., *An Exponential Inequality for Associated Variables*, Statist. Probab. Lett. **73**, 2005, 189-197.

[28] Roussas, G.G., *Kernel Estimates Under Association: Strong Uniform Consistency*, Statist. Probab. Lett. **12**, 1991, 393-403.

[29] Roussas, G.G., *Curve Estimation in Random Fields of Associated Processes*, J. Nonparametric Statist. **2**, 1993, 215-224.

[30] Roussas, G.G., *Asymptotic Normality of Random Fields of Positively or Negatively Associated Processes*, J. Multivariate Anal. **50**, 1994, 152-173.

[31] Roussas, G.G., *Asymptotic Normality of a Smooth Estimate of a Random Field Distribution Function Under Association*, Statist. Probab. Lett. **24**, 1995, 77-90.

[32] Roussas, G.G., *Exponential Probability Inequalities with some Applications*, In: Ferguson, T.S., Shapely, L.S., MacQueen, J.B. (Eds.), Statistics, Probability and Game Theory, IMS Lecture Notes-Monograph Series, vol. 30, pp. 303-319, Hayward, CA, 1996.

[33] Shao, Q. *A Comparison Theorem on Moment Inequalities Between Negatively Associated and Independent Random Variables*, Journal of Theoretical Probability **13 (2)**, 2000, 343-356.

[34] Yang, S., Su, C. e Yu, K., *A General Method to the Strong Law of Large Numbers and its Applications*, Statistics & Probability Letters **78**, 2008, 794-803.

[35] Yu, H., *A Glivenko-Cantelli Lemma and Weak Convergence for Empirical Processes of Associated Sequences*, Probab. Theory Relat. Fields **95**, 1993, 357-370.