UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Identidades Polinomiais Graduadas de Algumas Álgebras Matriciais

por

Evander Pereira de Rezende

Brasília
2010

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Identidades Polinomiais Graduadas de Algumas Álgebras Matriciais

por

Evander Pereira de Rezende*

Orientador: Prof. Dr. Alexei Krassilnikov

*O autor contou com o apoio financeiro parcial do CNPq/CAPES.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Identidades Polinomiais Graduadas de Algumas Álgebras Matriciais

por

Evander Pereira de Rezende

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de **Doutor em Matemática**.

Brasília, 20 de agosto de 2010.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov - UnB
(Orientador)

Prof. Dr. Ivan Chestakov - USP

Profa. Dra. Shirlei Serconek - UFG

Profa. Dra. Irina Sviridova - UnB

Prof. Dr. José Antônio Oliveira de Freitas - UnB

À minha esposa Mônica Cristina.

Agradecimentos

Ao Deus autor da minha salvação, o único que é digno de toda honra, glória e louvor, pelo dom da vida e pela capacitação que me foi concedida.

À minha esposa Mônica Cristina, pelo apoio, incentivo, compreensão nos momentos mais críticos e pelo amor a mim dedicado.

Aos meus pais, Maria Aparecida e Gumercino, que muito me apoiaram e me ajudaram em todos os projetos de minha vida, em especial nesta caminhada.

Aos meus irmãos, irmãs, cunhado e cunhadas, que sempre me apoiaram e me ajudaram das mais diversas formas possíveis, inclusive financeiramente.

Aos meus sobrinhos, que sempre trazem diversão e carinho, sempre me alegrando, mesmo em momentos de tristeza e desânimo.

Ao meu sogro Valdeci, minha sogra Honória, e cunhadas, por me receberem em sua família com todo carinho.

À todos os meus verdadeiros amigos, pelos momentos de alegria, companheirismo e trocas de conhecimento.

Ao meu orientador professor Alexei Krassilnikov, pela competência, paciência com minhas limitações, dedicação e pela escolha do tema e ajuda na construção do meu conhecimento.

À professora Shirlei Serconek, por me incentivar a fazer este doutorado e me inspirar a gostar de álgebra e também por participar da banca examinadora e pelas contribuições e sugestões.

Aos professores Ivan Chestakov, Irina Sviridova e José Antônio, por participarem da banca examinadora e pelas contribuições e sugestões para a versão final desta tese.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, pela prestatividade e paciência que sempre demonstraram.

Aos amigos e colegas do CEPESC, que conheci no último ano desta jornada, os quais pude contar com o apoio em vários momentos.

Ao CNPq e a Capes, pelo suporte financeiro.

Resumo

Seja K um anel associativo, comutativo e unitário e seja A uma K-álgebra associativa com ou sem 1. Dizemos que as identidades polinomiais de A possuem a *propriedade de Specht* se qualquer K-álgebra B satisfazendo todas as identidades polinomiais de A possui base finita para suas identidades.

Seja $M_2(K)$ a álgebra de matrizes 2×2 sobre um corpo K. Se K for um corpo de característica 0, então, pelo celebrado resultado de Kemer, as identidades polinomiais de toda álgebra sobre K têm a propriedade de Specht. Em particular, vale o resultado para as identidades de $M_2(K)$. Entretanto, se a característica do corpo K é positiva e K é infinito, não é conhecido se as identidades de $M_2(K)$ possuem tal propriedade.

Neste trabalho estudamos a propriedade de Specht para as identidades polinomiais 2-graduadas da álgebra $M_2(K)$ sobre um anel K associativo, comutativo, Noetheriano e unitário. A 2-graduação de $M_2(K)$ é dada por

$$M_2(K)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in K \right\}, \quad M_2(K)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; b, c \in K \right\}.$$

Nosso resultado principal é o seguinte:

Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Então as identidades polinomiais 2-graduadas da álgebra $M_2(K)$ de matrizes 2×2 sobre K possuem a propriedade de Specht.

Mostramos a propriedade de Specht também para as identidades polinomiais graduadas de algumas outras álgebras.

Palavras-chave: Álgebras Graduadas, Álgebras Matriciais, Identidades Polinomiais, PI-álgebras, Propriedade da Base Finita, Propriedade de Specht.

Abstract

Let K be an associative and commutative ring with 1 and let A be an associative K-algebra with or without 1. We say that the polynomial identities of A have the *Specht property* if each K-algebra B satisfying all the polynomial identities of A has a finite basis for its identities.

Let $M_2(K)$ be the algebra of 2×2 matrices over a field K. If K is a field of characteristic 0 then, by the celebrated result of Kemer, the polynomial identities of every algebra over K have the Specht property. In particular, the result holds for the polynomial identities of $M_2(K)$. However, if the characteristic of the field K is positive and K is infinite, it is not known if the identities of $M_2(K)$ have such a property .

In this work we study the Specht property for the 2-graded polynomial identities of the algebra $M_2(K)$ over an associative and commutative Noetherian ring with 1. The 2-grading of $M_2(K)$ is given by

$$M_2(K)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in K \right\}, \quad M_2(K)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; b, c \in K \right\}.$$

Our main result is as follows:

Let K be an associative and commutative Noetherian ring with 1. Then the 2-graded polynomial identities of the algebra $M_2(K)$ of 2×2 matrices over K have the Specht property.

We have proved also the Specht property for the graded polynomial identities of some other algebras.

Keywords: Graded Algebras, Matrix Algebras, Polynomial Identities, PI-Algebras, Finite Basis Property, Specht Property.

Conteúdo

Introdução

Seja K um anel associativo e comutativo com 1. Denotemos por $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre não unitária sobre K com conjunto de geradores livres $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Um ideal bilateral J da álgebra livre $K\langle X\rangle$ é chamado de T-*ideal* se J é invariante sobre todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Seja A uma álgebra associativa qualquer. O polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma *identidade polinomial* da álgebra A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in A$. Por exemplo, a identidade $[x, y]$ vale em toda álgebra comutativa. Para qualquer álgebra A dada, é fácil verificar que o conjunto de todas as identidades polinomiais de A é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, chamado T-*ideal da álgebra* A e denotado por $T(A)$. Por outro lado, para cada T-ideal T, existe uma álgebra A, tal que $T = T(A)$. Uma *PI-álgebra* é uma álgebra que satisfaz alguma identidade polinomial f, tal que algum coeficiente na componente homogênea de maior grau de f é igual a 1 (a componente homogênea de grau r é formada por todos os termos em que a soma dos graus de todas as variáveis é igual a r).

Seja $\beta = \{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra livre $K\langle X\rangle$. Se β é um conjunto gerador de $T(A)$, para alguma álgebra A, dizemos que β é uma *base* das identidades de A. Dado um T-ideal J, as K-álgebras associativas que satisfazem a todas as identidades polinomiais de J formam uma variedade de álgebras associativas. É bem conhecido que existe uma bijeção entre variedades de álgebras e T-ideais da K-álgebra livre $K\langle X\rangle$, de posto enumerável. Se toda subvariedade de uma variedade $\mathbf{A}$, incluindo $\mathbf{A}$, possui base finita, então dizemos que $\mathbf{A}$ possui a *propriedade de Specht*. Seja A uma K-álgebra associativa qualquer. Diremos que as identidades polinomiais de A possuem a propriedade de Specht se a variedade gerada por A possuir a propriedade de Specht.

Identidades Polinomiais

Um dos problemas centrais na Teoria das Identidades Polinomiais foi formulado em 1950 por W. Specht [43]. Este problema ficou conhecido como Problema de Specht e pode ser enunciado da seguinte forma: *Toda álgebra associativa sobre um corpo de característica* 0 *possui uma base finita para suas identidades polinomiais?* Ou equivalentemente: Todo T-ideal da K-álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, onde K é corpo e char $K=0$, é finitamente gerado como T-ideal? Foi provado por Kemer [22] em 1987 que o Problema de Specht possui solução positiva. O mesmo problema foi investigado também quando K é corpo e char $K \neq 0$. Para K de característica positiva, o problema correspondente ficou sem solução até 1999, quando Belov [6], Grishin [20] (para um corpo K tal que char $K=2$) e Shchigolev [42] resolveram negativamente o problema, exibindo contra-exemplos.

Seja $M_2(K)$ a álgebra associativa das matrizes 2×2 sobre um corpo K. Seja $gl_2(K)$ a álgebra de Lie sobre o K-espaço vetorial de $M_2(K)$ com produto definido por $[a,b]=ab-ba$ e seja $sl_2(K)$ a subálgebra de $gl_2(K)$ de todas as matrizes com traço zero. Um fato que devemos observar é que se char $K\neq 2$, então as identidades de $gl_2(K)$ e $sl_2(K)$ coincidem. Tal fato não ocorre em característica 2, conforme veremos mais tarde.

Suponha que char $K=0$. Razmyslov provou em 1973 que as identidades $M_2(K)$ admitem uma base finita (veja [38,39]). Alguns anos depois, em 1981 Tki [45] mostrou que as identidades de $M_2(K)$ são consequência de 4 delas. No mesmo ano, Drensky [12] provou que a base minimal de identidades de $M_2(K)$ sobre um corpo de característica 0 é composta da identidade standard $s_4=\sum_{\sigma\in S_4}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(4)}$ e da identidade $[[x_1,x_2]^2,x_3]$. Como consequência do resultado de Latyshev [32] em 1976, as identidades polinomiais de $M_2(K)$ têm a propriedade de Specht (também segue do resultado de Kemer [22], que afirma que as identidades polinomiais de cada álgebra associativa em característica 0 têm a propriedade de Specht, em particular as de $M_2(K)$).

Supondo ainda que char $K=0$, as identidades satisfeitas pela álgebra de Lie $sl_2(K)$ têm base finita. Esse resultado foi provado por Razmyslov (ver [38, 39]). Na verdade ele provou mais ainda, que as identidades de $sl_2(K)$ têm a propriedade de Specht. Como $sl_2(K)$ e $gl_2(K)$ possuem as mesmas identidades quando K é um corpo de característica 0, os resultados valem também para $gl_2(K)$. Em 1981, Filipov [15] mostrou que as identidades da álgebra de Lie $sl_2(K)$ são consequência de uma única identidade, a saber $[y, z, [t, x], x] + [y, x, [z, x], t]$.

Agora, quando char $K = p > 2$ e K é infinito, não sabemos se as identidades polinomiais de $M_2(K)$ possuem a propriedade de Specht. Entretanto, em 2001, Koshlukov [25] provou que as identidades polinomiais de $M_2(K)$ admitem uma base finita composta de 4 identidades para qualquer primo $p > 2$. No mesmo artigo esta base foi minimizada para duas identidades no caso em que $p > 5$. Três anos depois, Colombo e Koshlukov [10] exibiram bases minimais composta de 2 identidades no caso $p = 5$ e de 3 identidades se $p = 3$. No ano de 1989, Vasilovsky [46] provou que quando K é infinito e char $K > 2$, as identidades da álgebra de Lie $sl_2(K)$ (consequentemente o mesmo vale para $gl_2(K)$) admitem uma base composta de uma única identidade (esta é a mesma identidade descrita por Filipov no caso de char $K = 0$).

Vamos supor agora que char $K = 2$ e K é infinito. Neste caso, não sabemos se o sistema de identidades de $M_2(K)$ possui base finita, e consequentemente não sabemos se o mesmo tem a propriedade de Specht. Mas em 1970, Vaughan-Lee [48] provou que as identidades de $gl_2(K)$ não possuem nenhuma base finita. Conforme observado também por Vaughan-Lee em [48] temos que $sl_2(K)$ admite base finita para suas identidades.

Vamos considerar o caso restante, quando K é finito. Em 1973, Kruse e Lvov (ver [31, 33]) mostraram que as identidades polinomiais de toda álgebra finita têm a propriedade de Specht, em particular o resultado é válido para $M_2(K)$. O sistema finito de identidades de $M_2(K)$, composto das identidades $f_1(x, y) = (x - x^q)(y - y^{q^2})(1 - [x, y]^{q-1})$, $f_2(x, y) = (x - x^q) \circ (y - y^q) - [(x - x^q) \circ (y - y^q)]^q$ onde $[x, y] = xy - yx$ e $x \circ y = xy + yx$, foi exibido por Maltsev e Kuzmin em [35]. Em 1975, Bahturin e Olshanski [5] mostraram que o sistema de identidades de toda álgebra de Lie finita tem a propriedade de Specht. Em particular, temos que $gl_2(K)$ e $sl_2(K)$ têm base finita de identidades.

Se considerarmos $K = \mathbb{Z}$, não sabemos se as identidades polinomiais de $M_2(K)$ têm base finita, muito menos se têm a propriedade de Specht.

Resumindo, sabemos que as identidades polinomiais da álgebra $M_2(K)$ possuem a propriedade de Specht, se K é um corpo tal que char $K = 0$ ou K é finito. Nos demais casos, não sabemos se as mesmas têm a propriedade de Specht.

Seja K um corpo, tal que char $K \neq 2$. Consideremos o K-espaço vetorial V com base $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, onde Λ é infinito. A *álgebra de Grassmann* (ou *álgebra exterior*) $E = E(V)$ é gerada pela base de V, sujeita às seguintes relações:

$$e_{\lambda_1}e_{\lambda_2} + e_{\lambda_2}e_{\lambda_1} = 0,$$

para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Notemos que usando as relações acima, obtemos

$$e_\lambda^2 = 0,$$

para todo $\lambda \in \Lambda$. Assim, E é gerada por 1 e pelos monômios $e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Denote por E_0, respectivamente E_1, o subespaço de E gerado por todos os monômios tais que k é par, respectivamente ímpar. É fácil ver que E_0 é o centro de E. Note que quaisquer dois elementos w_1 e w_2 de E_1 são tais que $w_1w_2 = -w_2w_1$. Também devemos observar que E é a soma direta dos subespaços E_0 e E_1, i.e., $E = E_0 \oplus E_1$.

A álgebra $M_{1,1}(E)$ é a subálgebra de $M_2(E)$ que consiste de todas as matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onde $a, d \in E_0$ e $b, c \in E_1$.

Seja $E \otimes E$ o produto tensorial de E por E. Podemos colocar uma estrutura de álgebra em $E \otimes E$, fazendo $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$, onde $a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \in E \otimes E$.

Seja K um corpo de característica 0. É fácil mostrar que a álgebra $E \otimes E$ satisfaz as identidades $[u, v, [x, y], z]$ e $[[x, y]^2, y] = 0$. Em 1982, Popov [36] mostrou que estas duas identidades são uma base para as identidades de $E \otimes E$. Uma importante consequência da teoria de Kemer é o fato que se K é um corpo de característica 0, as identidades polinomiais de $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ são as mesmas. Como char $K = 0$, segue pelo resultado de Kemer que as identidades polinomiais de $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ têm a propriedade de Specht. Observamos que bases de identidades satisfeitas por $M_{1,1}(E)$ e por $E \otimes E$ no caso em que char $K = p > 2$ ainda são desconhecidas.

Seja $M_n(K)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K, com $n \geq 3$. Se char $K = 0$, então o resultado de Kemer garante que o sistema de identidades de $M_n(K)$ tem a propriedade de Specht, para qualquer n. Se char $K > 0$, K é infinito e $n \geq 3$, não sabemos se $M_n(K)$ tem base finita de identidades, e consequentemente não sabemos se suas identidades têm a propriedade de Specht. Agora, se K é finito, temos como consequência do resultado de Kruse [31] e Lvov [33] que as identidades de $M_n(K)$ têm a propriedade de Specht, para todo n. Ainda neste caso, K finito, conhecemos as bases de identidades apenas nos casos $n = 3$ ou $n = 4$ encontradas em 1981 por Genov em [16] e por Genov e Siderov em [18], respectivamente. No caso restante, K infinito, char $K > 0$ e $n \geq 3$ não é conhecido nenhum resultado relativo à propriedade de Specht.

Seja $UT_n(K) = \{\|a_{ij}\| \mid a_{ij} \in K$ e $a_{ij} = 0$, se $j < i\}$ a subálgebra das matrizes triangulares superiores de $M_n(K)$. Em 1971, Maltsev [34] mostrou que se K é um corpo de característica zero, as identidades polinomiais de $UT_n(K)$ são consequência da identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]$. Para um corpo K de característica 0, as identidades polinomiais da álgebra $UT_n(K)$ têm a propriedade de Specht, fato demonstrado por Latyshev [32] e Genov [17] no ano de 1976 (isto também segue do resultado de Kemer de 1987). Eles mostraram, independentemente, que sobre um corpo K de característica 0, toda álgebra que satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}],$$

tem base finita de identidades, ou seja, o sistema de identidades de $UT_n(K)$ tem a propriedade de Specht. Se K é um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1 e se $n = 2$, é consequência do resultado principal de Popov [37], obtido em 1979, que toda álgebra que satisfaz a identidade acima tem base finita de identidades. Dois anos mais tarde, Chiripov e Siderov [8] mostraram que se K é um corpo de característica $p \neq 2$ e $n = 3$, então o sistema de identidades de toda álgebra que satisfaz a identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$ possui a propriedade de Specht. Em 1990, Krasilnikov [29] mostrou que se K é um corpo infinito, então as identidades polinomiais de $UT_n(K)$ possuem a propriedade de Specht. Porém, se K é um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1 (não necessariamente um corpo), não sabemos se as identidades polinomiais de $UT_n(K)$ possuem a propriedade de Specht.

Identidades Polinomiais Graduadas

Uma das principais ferramentas usadas por Kemer em [22] para resolver o Problema de Specht para as identidades polinomiais de álgebras sobre um corpos de característica zero, foram as identidades graduadas.

Definiremos agora noções sobre álgebras graduadas. Se G é um grupo, então a K-álgebra A é *G-graduada* se $A = \oplus_{g\in G} A_g$, onde A_g são K-submódulos de A e $A_g A_h \subset A_{g+h}$, para todo $g, h \in G$. Convém notar que A_0 é uma subálgebra de A. Se $G = \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, chamaremos a álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada de n-graduada. Um exemplo de álgebra 2-graduada é a álgebra $\mathbb{C}$ dos números complexos sobre $\mathbb{R}$, que possui uma graduação natural, dada por $\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_1$, onde $\mathbb{C}_0$ é a subálgebra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}_1$ é o subespaço de $\mathbb{C}$, gerado por i. Seja K um anel associativo e comutativo com 1. Seja $M_2(K)$ a álgebra das matrizes 2×2 sobre K. A álgebra $M_2(K)$ possui a seguinte 2-graduação: $M_2(K) = M_2(K)_0 \oplus M_2(K)_1$, onde

$$M_2(K)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in K \right\}$$

é a subálgebra de $M_2(K)$, consistindo de todas as matrizes diagonais e

$$M_2(K)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; b, c \in K \right\}$$

é o submódulo de $M_2(K)$ de todas as matrizes com 0 na diagonal. Além disso,

$$M_2(K)_i M_2(K)_j \subset M_2(K)_{i+j},$$

onde $i + j$ é a soma em $\mathbb{Z}_2$.

Seja K um anel associativo e comutativo com 1. Sejam Y e Z conjuntos infinitos disjuntos. Seja $X = Y \cup Z$. Construiremos a álgebra livre associativa $K\langle X\rangle$ sobre K com geradores livres X. O grau homogêneo de um monômio $m \in K\langle X\rangle$, denotado por $w(m)$ é 0 se o grau com respeito às variáveis de Z é par e 1 se for ímpar. Assim, $K\langle X\rangle$ é 2-graduada da seguinte maneira: $K\langle X\rangle_i$ é gerado por todos os monômios m, tais que $w(m) = i$, para $i = 0, 1$. O polinômio $f(y_1, \ldots, y_m, z_1 \ldots, z_n) \in K\langle X\rangle$ é uma identidade 2-graduada para a álgebra 2-graduada $A = A_0 \oplus A_1$ se $f(a_1, \ldots, a_m, b_1 \ldots, b_n) = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_m \in A_0$ e $b_1, \ldots, b_n \in A_1$. As identidades 2-graduadas para a álgebra A formam um ideal em $K\langle X\rangle$, chamado o *T_2-ideal* de A e denotado por $T_2(A)$. Um ideal em $K\langle X\rangle$ é o T_2-ideal de alguma álgebra 2-graduada A se, e somente se, é fechado sob todos os endomorfismos φ de $K\langle X\rangle$ tais que $\varphi(K\langle X\rangle_i) \subset K\langle X\rangle_i$, com $i = 0$ ou 1. Estes endomorfismos são chamados *endomorfismos 2-graduados*. Sejam I um T_2-ideal em $K\langle X\rangle$ e $S \subset I$. O conjunto S é uma base de I, se S gera I como T_2-ideal, ou seja, S é uma base de I, se I é o menor T_2-ideal que contém S.

Seja K um corpo de característica 0. Em 1992, Di Vincenzo [11] mostrou que as identidades 2-graduadas de $M_2(K)$ possuem base finita, a saber $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$. Recentemente, Sviridova [44] mostrou que se G é um grupo abeliano finito e K é um corpo de característica 0, então as identidades polinomiais G-graduadas de qualquer PI-álgebra associativa sobre K têm a propriedade de Specht. Este resultado também foi demonstrado independentemente por Aljadeff e Kanel-Belov [1] em uma forma mais geral, com G um grupo finito qualquer, não necessariamente abeliano, e K um corpo tal que char $K = 0$. Como consequência destes resultados, as identidades polinomiais 2-graduadas de $M_2(K)$ têm a propriedade de Specht.

Se K é um corpo infinito e char $K > 2$, Koshlukov e Azevedo [27], em 2002, mostraram que $M_2(K)$ possui base finita de identidades 2-graduadas e exibiram uma base (a mesma do caso char $K = 0$). Como foi observado por Brandão Junior, Koshlukov e Krasilnikov em [7], a prova feita em [27] no caso de característica $p > 2$ vale para qualquer domínio de integridade infinito.

Nossa contribuição principal é o teorema abaixo:

Teorema 2.1. *Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Então as identidades polinomiais 2-graduadas da álgebra $M_2(K)$ satisfazem a propriedade de Specht.*

Lembramos que, para as identidades polinomiais ordinárias de $M_2(K)$, o problema análogo ao Teorema 2.1 em geral permanece em aberto. É conhecido que estas identidades polinomiais possuem a propriedade de Specht apenas no caso em que K é um corpo de característica 0 ou K é um corpo finito.

Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita. Definamos em $M_{1,1}(E)$ a seguinte 2-graduação $M_{1,1}(E) = B_0 \oplus B_1$, onde

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} ; a, d \in E_0 \right\}, \qquad B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} ; b, c \in E_1 \right\}.$$

Em $E \otimes E$, definamos a 2-graduação $E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1$ dada por

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0 \oplus E_1 \otimes E_1)$$

e

$$(E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1 \oplus E_1 \otimes E_0).$$

Se char $K = 0$, Di Vincenzo [11] mostrou que as identidades 2-graduadas de $M_{1,1}(E)$ têm base $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$. Ele mostrou ainda que $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ possuem as mesmas identidades polinomiais 2-graduadas (análogo ao caso de identidades polinomiais ordinárias), portanto ambas têm base finita de identidades 2-graduadas. Pelos resultados de Sviridova e Aljadeff e Kanel-Belov (ver [44] e [1]) se char $K = 0$, temos que as identidades polinomiais 2-graduadas de $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ possuem a propriedade de Specht. Se K é um corpo infinito e char $K = p > 2$, Koshlukov e Azevedo [27] mostraram que as identidades 2-graduadas de $M_{1,1}(E)$ são as mesmas que em característica 0. As identidades 2-graduadas de $E \otimes E$ seguem das de $M_{1,1}(E)$ e se char $K = p > 2$, é necessário adicionar a identidade $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$. Observe que a última identidade não é satisfeita por $M_{1,1}(E)$.

Nossa contribuição para o estudo das identidades 2-graduadas de $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ foi mostrar o seguinte teorema, cuja demonstração é apenas uma adaptação do Teorema 2.1.

Teorema 2.2. *Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Então as identidades polinomiais 2-graduadas das álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ satisfazem a propriedade de Specht.*

A álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ sobre K possui uma $\mathbb{Z}_n$-graduação natural, dada por

$$M_n(K) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}_n} M_n(K)_t,$$

onde

$$M_n(K)_t = \{\|a_{ij}\| \mid a_{ij} \in K, \text{ para todo } i, j = 0, 1 \ldots, n-1 \text{ e } a_{ij} = 0, \text{ se } j - i \not\equiv t \mod n\}.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, podemos definir álgebra livre n-graduada e identidades polinomiais n-graduadas. Sobre um corpo K de característica zero, as identidades polinomiais n-graduadas de $M_n(K)$, com $n > 2$, têm base finita, descrita por Vasilovsky em 1999 (ver [47]). Este resultado foi estendido para um corpo K infinito por Azevedo (ver [2]).

A n-graduação de $UT_n(K)$ é induzida pela n-graduação de $M_n(K)$. Se K é um corpo infinito, as identidades polinomiais n-graduadas de $UT_n(K)$ tem base finita e foram descritas em 2003 por Koshlukov e Valenti [26]. Se char $K = 0$, as identidades polinomiais n-graduadas de $UT_n(K)$ têm a propriedade de Specht, pelos trabalhos de Sviridova e Aljadeff e Kanel-Belov (ver [44], [1]).

Nossa contribuição no estudo das identidades polinomiais n-graduadas de $UT_n(K)$ foi o seguinte

Teorema 3.1. *Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Então as identidades polinomiais n-graduadas da álgebra $UT_n(K)$ possuem a propriedade de Specht.*

Esta tese é organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1, damos algumas definições e enunciamos alguns resultados auxiliares para o desenvolvimento dos demais capítulos.

No Capítulo 2, usamos o método dos conjuntos parcialmente bem ordenados, introduzido por Higman, para demonstrar os teoremas 2.1 e 2.2. Estes dois teoremas demonstram a propriedade de Specht para as identidades polinomiais 2-graduadas de $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, sobre um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1.

No Capítulo 3, mostramos a propriedade de Specht para as identidades polinomiais n-graduadas da álgebra $UT_n(K)$ das matrizes triangulares superiores sobre um anel K associativo, comutativo e Noetheriano com 1.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, colocaremos alguns conceitos e resultados que serão necessários ao longo do trabalho. Os teoremas e proposições serão enunciados sem demonstração, mas indicaremos onde o leitor poderá encontrar mais detalhes. As principais referências para este capítulo serão [3], [13], [14], [19], [21], [40], [41] e [49].

Em todo o trabalho, $\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos inteiros positivos e $\mathbb{N}_0$ denotará o conjunto dos inteiros não negativos.

1.1 Anéis, Módulos e Álgebras

Nesta seção, assumiremos conhecidos definições e resultados básicos sobre anéis, módulos e álgebras tais como homomorfismos e teoremas mais simples. Daremos as definições dessas estruturas, a fim de elucidar o contexto em que trabalharemos, e alguns resultados que serão necessários para o entendimento do texto. O objetivo é apenas deixar claros os conceitos que serão usados no trabalho.

Anéis

Definição 1.1. Um *anel* R é um conjunto com duas operações binárias $+$ e $\cdot$ (chamadas adição e multiplicação, respectivamente) satisfazendo os seguintes axiomas:

i) $(R, +)$ é um grupo abeliano;

ii) a distributividade vale em R, i.e., para quaisquer $a, b, c \in R$, temos $(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$ e $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Definição 1.2. Se o anel R satisfaz $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para quaisquer $a, b, c \in R$, diremos que R é um *anel associativo*.

Definição 1.3. O anel R é *comutativo* se a multiplicação é comutativa, i.e., se $[a, b] = ab - ba = 0$, para quaisquer $a, b \in R$.

Definição 1.4. Diremos que o anel R tem *identidade* (ou *contém* 1) se existe um elemento $1 \in R$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, para todo $a \in R$.

Observação 1.5. Omitiremos o $\cdot$ na notação, fazendo $ab = a \cdot b$. A menos que seja mencionado, o termo anel significará anel associativo e comutativo com 1.

Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I\}$ uma família de subconjuntos de X. São equivalentes as seguintes condições:

i) A família $\mathcal{F}$ não contém uma subfamília infinita estritamente crescente

$$X_{i_1} \subset X_{i_2} \subset X_{i_3} \subset \dots;$$

ii) Para toda cadeia $X_{i_1} \subseteq X_{i_2} \subseteq X_{i_3} \subseteq \dots$ em $\mathcal{F}$, existe n tal que $X_{i_n} = X_{i_{n+1}} = \dots;$

iii) Qualquer subfamília não vazia de $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal.

O fato acima pode ser encontrado em diversos livros, em particular em [40] e [41].

Um conjunto X satisfaz a *condição da cadeia ascendente* se satisfaz alguma das condições acima.

Definição 1.6. Um anel R é dito ser *Noetheriano* se satisfaz a condição da cadeia ascendente para seus ideais.

Proposição 1.7. *Seja R um anel. Então R é Noetheriano se, e somente se, todo ideal de R é finitamente gerado.*

Demonstração. Ver [40] e [41]. $\square$

Módulos

Definição 1.8. Seja R um anel (não necessariamente comutativo ou com 1). Um R-*módulo à esquerda* ou um *módulo à esquerda* sobre R é um grupo aditivo M munido de uma operação, chamada multiplicação por escalar, de R sobre M (isto é, uma aplicação de $R \times M \to M$) denotada por rm, para todo $r \in R$ e para todo $m \in M$ tal que para todo $r, s \in R$ e $m, n \in M$,

1. $(r + s)m = rm + sm$;
2. $(rs)m = r(sm)$;
3. $r(m + n) = rm + rn$ e
4. $1m = m$, se R possui 1.

Analogamente, define-se R-módulo à direita. Se R é um anel comutativo e M é um R-módulo à esquerda, podemos considerar M um R-módulo à direita, simplesmente fazendo $rm = mr$, para todos $r \in R$ e $m \in M$. Se M é um R-módulo à direita e à esquerda, diremos que M é um R-*módulo*. Se o anel R for um corpo, então o R-módulo M é um espaço vetorial.

Para módulos sobre um anel R, define-se módulo Noetheriano de forma análoga à definição de anel Noetheriano.

Definição 1.9. Dado um automorfismo φ de um anel R, uma função $f : M \to N$ de dois R-módulos M e N é aplicação φ-*semilinear*, ou simplesmente *semilinear*, se para todo $x, y \in M$ e $r \in R$ temos

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(rx) = \varphi(r)f(x)$.

Sejam M um R-módulo e b um elemento de M. Denotaremos por $\langle b\rangle$ o submódulo gerado por b. Se $M = \langle b\rangle$, diremos que M é um módulo cíclico.

Definição 1.10. Um R-módulo F é chamado um *R-módulo livre* se F é isomorfo a uma soma direta de cópias de R, isto é, se existe um conjunto I (possivelmente infinito) com

$$F = \bigoplus_{i \in I} R_i,$$

onde $R_i = \langle b_i \rangle \cong R$ para todo i. Chamamos $B = \{b_i \mid i \in I\}$ de *base* de F.

Temos a seguinte proposição.

Proposição 1.11. *Seja F um R-módulo livre e seja $B = \{b_i \mid i \in I\}$ uma base de F. Se M é um R-módulo arbitrário e se $\gamma : B \to M$ é uma função qualquer, então existe um único R-homomorfismo $g : F \to M$ com $g(b_i) = \gamma(b_i)$ para todo $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dotted, "g"] & \\ B \arrow[u] \arrow[r, "\gamma"'] & M \end{tikzcd}$$

Demonstração. Ver [40]. □

Álgebras

Definição 1.12. Seja K um anel associativo e comutativo com 1. Um K-módulo A é chamado uma *álgebra* (ou *K-álgebra*), se A munido de uma operação binária $*$, chamada *multiplicação*, para todo $a, b, c \in A$ e $\alpha \in K$ satisfaz

i) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

iii) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Se a álgebra A satisfaz a propriedade $(a * b) * c = a * (b * c)$, dizemos que A é *associativa*.

Denotaremos a multiplicação em A por $\cdot$ e usaremos ab no lugar de $a \cdot b$.

Exemplo 1.13. Se K é um anel associativo e comutativo com 1, então o anel de polinômios $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ nas variáveis comutativas $x_,x_2, \dots$ é uma K-álgebra.

Exemplo 1.14. Se K é um anel associativo e comutativo com 1, então o anel $M_n(K)$ de todas as matrizes $n \times n$ sobre K é uma K-álgebra. Mais ainda, se A é uma K-álgebra, então $M_n(A)$ também é uma K-álgebra.

1.2 Álgebras Livres e Identidades Polinomiais

Definição 1.15. Sejam $\mathbf{A}$ uma classe de álgebras associativas e $F \in \mathbf{A}$, uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é chamada *álgebra livre na classe* $\mathbf{A}$, *livremente gerada pelo conjunto* X, se para toda álgebra $A \in \mathbf{A}$, toda aplicação $\varphi : X \to A$ pode ser estendida a um homomorfismo $\bar{\varphi} : F \to A$. A cardinalidade do conjunto X é chamada *posto* da álgebra F.

Se tomarmos a classe $\mathbf{A}$ como sendo a classe de todas as álgebras associativas sobre um anel K, então a álgebra F será chamada de *álgebra associativa livre não unitária.* Nos demais casos, chamaremos F *álgebra associativa relativamente livre.*

Sejam K um anel associativo e comutativo com 1 e $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Denotaremos por $K\langle X\rangle$ a álgebra gerada como K-módulo por todas as palavras $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}$, com $x_{i_l} \in X$ e $s \in \mathbb{N}$ e com multiplicação definida por

$$(x_{i_1}\dots x_{i_m})(x_{j_1}\dots x_{j_n}) = x_{i_1}\dots x_{i_m}x_{j_1}\dots x_{j_m},$$

onde $x_{i_l}, x_{j_k} \in X$.

Proposição 1.16. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa livre não unitária com conjunto de geradores livres X.*

Demonstração. Ver [3], [13], [14] e [19]. □

Definição 1.17. Seja K um anel associativo, comutativo e unitário. Sejam $f \in K\langle X\rangle$, $f = f(x_1, x_2 \dots, x_n)$ e A uma álgebra associativa sobre K. Dizemos que a expressão $f = 0$ (ou o elemento f) é uma *identidade polinomial* para álgebra A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \dots, a_n \in A$. Dizemos que a álgebra associativa A é uma PI-*álgebra* (PI vem do inglês “Polinomial Identity”), se a álgebra A satisfaz uma identidade polinomial f, tal que algum coeficiente na componente homogênea de maior grau de f é igual a 1 (a componente homogênea de grau r é formada por todos os termos em que a soma dos graus de todas as variáveis é igual a r).

Exemplo 1.18. a) Seja A uma álgebra comutativa. Então a álgebra A satisfaz a identidade polinomial

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1 = 0;$$

b) Seja A uma álgebra de dimensão finita. Se $\dim A < n$, então A satisfaz a *identidade “standard”*

$$s_n(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

Em particular, a álgebra de matrizes $M_n(K)$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade s_{n^2+1}, pois $\dim M_n(K)$ é n^2. Na verdade, o famoso resultado de Amitsur-Levitzky diz que $M_n(K)$ satisfaz a identidade standard s_{2n} de grau $2n$ e não satisfaz nenhuma outra identidade de menor grau.

Definição 1.19. Seja $V = \{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto não vazio de polinômios da álgebra $K\langle X\rangle$. A classe $\mathbf{V}$ de todas as álgebras associativas sobre K que satisfazem às identidades polinomiais $f_i = 0$, para todo $i \in I$, é chamada a *variedade de álgebras associativas* definida por V.

Diante desta definição, temos uma equivalência dada por Birkhoff:

Teorema 1.20 (Birkhoff)**.** *Uma classe de álgebras $\boldsymbol{V}$ é uma variedade se, e somente se, $\boldsymbol{V}$ é fechada a somas cartesianas, subálgebras e álgebras quocientes.*

Demonstração. Ver [3] ou [19]. □

Definição 1.21. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. O ideal I é um T-*ideal* de A se I é invariante por todos os endomorfismos de A, ou seja, $\varphi(I) \subset I$ para todo endomorfismo φ de A.

Teorema 1.22. *Seja A uma PI-álgebra. O conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais de A é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Demonstração. Ver [13] e [19]. □

Dado um T-ideal J, as K-álgebras associativas que satisfazem a todas as identidades polinomiais de J, formam uma variedade de álgebras associativas. É bem conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os T-ideais de $K\langle X\rangle$ e as variedades de álgebras associativas. Para todo T-ideal V, considere a variedade $\mathbf{A}$ definida pelas identidades de V. Por outro lado, dada uma variedade $\mathbf{A}$, seja V o T-ideal gerado pelas identidades que definem $\mathbf{A}$. Esta correspondência é de Galois, i.e., dados dois T-ideais V_1 e V_2, tais que $V_1 \subset V_2$ e A_1 e A_2 são as variedades definidas por V_1 e V_2, respectivamente, temos $A_2 \subset A_1$.

1.3 Problema da Base Finita e Propriedade de Specht

Definição 1.23. Sejam A uma álgebra e $\beta = \{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra livre $K\langle X\rangle$. Se β é um conjunto gerador do T-ideal $T(A)$, dizemos que β é uma *base* das identidades de A.

Se as identidades polinomiais da álgebra A possuem base finita e se as identidades de toda álgebra que satisfaz as identidades polinomiais de A também têm base finita, dizemos que A possui a *propriedade de Specht*. Analogamente, se toda subvariedade de uma variedade $\mathbf{A}$, incluindo $\mathbf{A}$, possui base finita, dizemos que $\mathbf{A}$ possui a *propriedade de Specht*. Seja A uma K-álgebra associativa qualquer. Diremos que A possui a propriedade de Specht se a variedade gerada por A possuir a propriedade de Specht.

1.4 Álgebras Graduadas e suas Identidades Polinomiais Graduadas

Introduziremos nessa seção o conceito de álgebra G-graduada e identidades de álgebra G-graduadas, onde G é um grupo abeliano.

Durante esta seção, usaremos G, K e A para denotar grupo abeliano, anel associativo e comutativo com 1 e álgebra sobre K, respectivamente.

Definição 1.24. Dizemos que a álgebra A é *G-graduada* se A pode ser escrita como a soma direta de submódulos $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ de tal forma que $A_g A_h \subset A_{g+h}$. Os submódulos A_g são chamados *componentes homogêneas* (ou *componentes homogêneas de grau g*) de A. Se $G = \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ usaremos a terminologia n-graduada.

Em alguns momentos, usaremos a notação $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ no lugar de $\bigoplus_{g \in G} A_g$, principalmente no Capítulo 3.

Definição 1.25. Sejam A e B álgebras G-graduadas. Um homomorfismo $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo G-graduado se $\varphi(A_g) \subset B_g$ para todo $g \in G$. Do mesmo modo, são definidos isomorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduados.

Podemos ver claramente que A_0 é uma subálgebra de A. Convém observar que todo elemento $a \in A$ pode ser escrito de forma única como soma finita $a = \sum_{g \in G} a_g$, com $a_g \in A_g, g \in G$. Um elemento $a \in A$ é chamado homogêneo de grau g se $a \in A_g$.

Exemplo 1.26 (G-graduação trivial)**.** Sejam G um grupo abeliano e A uma álgebra qualquer. A álgebra A possui uma G-graduação trivial dada por $A = \oplus_{g \in G} A_g$, onde $A_0 = A$ e $A_g = \{0\}$, para todo $g \neq 0$.

Exemplo 1.27 (Álgebra das Matrizes 2×2)**.** Seja K um anel associativo e comutativo com 1. Seja $M_2(K)$ a álgebra das matrizes 2×2 sobre K. A álgebra $M_2(K)$ possui a seguinte 2-graduação: $M_2(K) = M_2(K)_0 \oplus M_2(K)_1$, onde

$$M_2(K)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in K \right\}$$

é a subálgebra de $M_2(K)$, consistindo de todas as matrizes diagonais e

$$M_2(K)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; b, c \in K \right\}$$

é o submódulo de $M_2(K)$ de todas as matrizes com 0 na diagonal. Além disso,

$$M_2(K)_i M_2(K)_j \subset M_2(K)_{i+j},$$

onde $i + j$ é a soma em $\mathbb{Z}_2$. Chamaremos os elementos de $M_2(K)_0$ e os de $M_2(K)_1$ de *elementos pares* e *elementos ímpares*, respectivamente.

Exemplo 1.28 (Álgebra de Grassmann E)**.** Seja K um anel associativo e comutativo com 1. Seja V um K-módulo livre com base $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. A álgebra associativa livre $K\langle e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\rangle$ módulo o ideal gerado por $e_\lambda^2 = 0$ e $e_{\lambda_i}e_{\lambda_j} = -e_{\lambda_j}e_{\lambda_i}$ é denominada *álgebra de Grassmann* de V sobre K, e é denotada por $E = E(V)$. A álgebra de Grassmann E tem como base os produtos $e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}\ldots e_{\lambda_k}$, onde $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$, com $k \geq 0$. Em E, definimos a 2-graduação $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é gerado como submódulo pelos monômios acima com k par e E_1 é gerado pelos monômios onde k é ímpar. Devemos observar que se K é um corpo de característica 2, E é uma álgebra comutativa. Os elementos de E_0 e E_1 são chamados de elementos pares e ímpares, respectivamente.

Exemplo 1.29 (Álgebra $E \otimes E$)**.** Seja $E \otimes E$ o produto tensorial de E por E. Podemos colocar uma estrutura de álgebra em $E \otimes E$, fazendo $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$, onde $a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \in E \otimes E$. Em $E \otimes E$, definamos a 2-graduação $E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1$ dada por

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0 \oplus E_1 \otimes E_1)$$

e

$$(E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1 \oplus E_1 \otimes E_0).$$

Exemplo 1.30 (Álgebra das matrizes $M_{1,1}(E)$)**.** A álgebra $M_{1,1}(E)$ é a subálgebra de $M_2(E)$ que consiste das matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onde $a, d \in E_0$ e $b, c \in E_1$. Definamos em $M_{1,1}(E)$ a seguinte 2-graduação $M_{1,1}(E) = B_0 \oplus B_1$, onde

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in E_0 \right\}, \qquad B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; b, c \in E_1 \right\}.$$

Exemplo 1.31 (Álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$)**.** A álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ sobre K, possui uma $\mathbb{Z}_n$-graduação natural, dada por

$$M_n(K) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}_n} M_n(K)_t,$$

onde

$$M_n(K)_t = \{\|a_{ij}\| \mid a_{ij} \in K, \text{ para todo } i, j = 0, 1 \ldots, n-1 \text{ e } a_{ij} = 0, \text{ se } j-i \not\equiv t \mod n\}.$$

Exemplo 1.32 (Álgebra $UT_n(K)$ das Matrizes Triangulares Superiores $n \times n$)**.** A n-graduação de $UT_n(K)$, é induzida pela n-graduação de $M_n(K)$. Tal n-graduação é dada por

$$UT_n(K) = UT_n^{(0)} + UT_n^{(1)} + \ldots + UT_n^{(n-1)},$$

onde $UT_n^{(k)}$ é o K-submódulo gerado pelas matrizes elementares e_{ij} tais que $j - i = k$, $k = 0, 2 \ldots, n-1$.

Seja $X = \{X_g \mid g \in G\}$, onde os conjuntos X_g, $g \in G$ são disjuntos, e infinitos enumeráveis. Seja $K\langle X \rangle$ a álgebra livre sobre X. Em $K\langle X \rangle$ definimos a G-graduação $K\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} K\langle X \rangle_g$, onde $K\langle X \rangle_g$ é gerado como K-módulo pelos monômios $x_{i_1}^{(g_1)} \ldots x_{i_s}^{(g_s)}$, onde $i_j \in \mathbb{N}$, $x^{(g_i)} \in X_{g_i}$ $g_1 + \ldots + g_s = g$, $s \geq 1$. É fácil verificar que $K\langle X \rangle_g K\langle X \rangle_h \subset K\langle X \rangle_{g+h}$.

Definição 1.33. Um ideal I de uma álgebra G-graduada A é um T_G-ideal se é invariante sob todos os endomorfismos G-graduados de A, ou seja, $\varphi(I) \subset I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de A.

Definição 1.34. Seja $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in K\langle X \rangle$, $f \neq 0$, $x_i^{g_i} \in X_{g_i}$. O polinômio $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)})$ (ou a expressão $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) = 0$) é uma *identidade polinomial G-graduada* para a álgebra G-graduada A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in A_{g_i}$. O conjunto $T_G(A)$ de todas as identidades G-graduadas da álgebra G-graduada A é um T_G-ideal de $K\langle X \rangle$, denotado *ideal das identidades G-graduadas da álgebra A.*

Os demais conceitos, de base de identidades graduadas, propriedade da base finita, propriedade de Specht e outros, são definidos de forma análoga ao caso de identidades polinomiais ordinárias (ou seja, não graduadas). Tais definições podem ser encontradas, por exemplo, em [19].

A seguir, daremos alguns exemplos de álgebras e suas identidades graduadas.

Exemplo 1.35. Seja K um anel associativo e comutativo com 1. Seja $M_2(K)$ a álgebra das matrizes 2×2 sobre K. A álgebra $M_2(K)$ satisfaz as identidades polinomiais 2-graduadas

$$y_1 y_2 - y_2 y_1$$

e

$$z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1.$$

A verificação de que estas identidades são satisfeitas, é feita por cálculos diretos. No Capítulo 2, Teorema 2.1, mostramos que se K é Noetheriano, então toda álgebra que satisfaz as identidades polinomiais 2-graduadas acima, possui a propriedade de Specht para seu respectivo sistema de identidades polinomiais 2-graduado. Em particular, o resultado vale para $M_2(K)$.

Exemplo 1.36. Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um anel K associativo e comutativo com 1. Temos que $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ satisfazem as identidades polinomiais 2-graduadas

$$y_1 y_2 - y_2 y_1$$

e

$$z_1 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_1.$$

O Teorema 2.2 afirma, no caso em que K é Noetheriano, que toda álgebra que satisfaz as identidades polinomiais 2-graduadas acima, possui a propriedade de Specht para seu respectivo sistema de identidades polinomiais 2-graduado. Logo, as identidades polinomiais 2-graduadas de $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ possuem a propriedade de Specht.

Exemplo 1.37. Seja $UT_n(K)$, a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um anel K associativo e comutativo com 1. A álgebra $UT_n(K)$ satisfaz as seguintes identidades polinomiais n-graduadas:

$$[y_1, y_2], \quad \{z^{(i)} z^{(j)} \mid i + j \geq n\}.$$

Suponha que K é Noetheriano. O resultado principal do Capítulo 3, afirma que neste caso, o sistema de identidades polinomiais n-graduado acima possui a propriedade de Specht.

1.5 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Neta seção, vamos enunciar alguns resultados de Higman [21] sobre conjuntos parcialmente bem ordenados. Tais resultados também podem ser encontrados no livro de Vovsi [49].

Seja A um conjunto não vazio. Uma relação $\leq$ em A é uma *ordem parcial*, se $\leq$ é reflexiva, transitiva e antissimétrica. Neste caso, dizemos que A é *parcialmente ordenado* e denotamos por $\langle A, \leq \rangle$. Uma ordem em um conjunto A é chamada *linear* se para todo $a, b \in A$, temos que $a \leq b$ ou $b \leq a$. Seja $\langle A, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e seja B um subconjunto de A. O conjunto $cl(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B; b \leq a\}$ é chamado de o *fecho* de B. Se $cl(B) = B$, dizemos que B é *fechado.* O conjunto A possui a *propriedade da base finita,* se todo subconjunto fechado B de A é o fecho de algum conjunto finito.

Lema 1.38 (G. Higman, [21])**.** *As seguintes condições sobre um conjunto A parcialmente ordenado são equivalentes:*

i) Toda sequência infinita $a_1, a_2, \ldots$ de elementos de A possui uma subsequência infinita não-decrescente

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \quad (i_1 < i_2 < \ldots);$$

ii) Se $a_1, a_2, \ldots$ é uma sequência infinita de elementos de A, então existem inteiros positivos i e j tais que $i < j$ e $a_i \leq a_j$;

iii) Toda cadeia ascendente de subconjuntos fechados de A estabiliza;

iv) Todo subconjunto não vazio fechado de A é o fecho de um conjunto finito;

v) Não existe uma sequência infinita estritamente decrescente, nem um número infinito de elementos mutuamente incomparáveis.

Suponha que A possui uma ordem linear $\leq$ e que todo subconjunto de A possui um único elemento minimal, então A é chamado *bem ordenado* e a ordem $\leq$ é chamada uma *boa ordem.* Se A é um conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto $B \neq \emptyset$ de A possui um número finito de elementos minimais, então dizemos que A possui uma *boa ordem parcial* ou que A é *parcialmente bem ordenado.* Assim, A é parcialmente bem ordenado se, e somente se, satisfaz algum dos itens do Lema 1.38.

Denote por Φ o conjunto de todas a aplicações $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que preservam ordem (i.e., se $i < j$, então $\varphi(i) < \varphi(j)$). Seja $\langle A, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado, com elemento distinguido 0. Denote por $V(A) = V(A, 0)$ o conjunto de todas as sequências infinitas de elementos de A, tal que apenas um número finito de ternos é não-nulo. Defina em $V(A)$ a relação $\leq$ dada por $\{x_i\} \leq \{y_i\}$ se, e somente se, existe $\varphi \in \Phi$ tal que $x_j \leq y_{\varphi(j)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Nestas condições, vale o seguinte lema:

Lema 1.39 (G. Higman, [21])**.** *$V(A)$ é um conjunto parcialmente bem ordenado.*

Usaremos com muita frequência o lema abaixo, sobre o produto cartesiano de conjuntos parcialmente bem ordenados.

Lema 1.40 (G. Higman, [21])**.** *Sejam* $\langle A_1, \leq_1\rangle$ *e* $\langle A_2, \leq_2\rangle$ *conjuntos parcialmente ordenados. Seja* $\leq$ *a ordem parcial em* $A = A_1 \times A_2$ *definida componente a componente* (*i.e.* $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ *se, e somente se,* $a_1 \leq_1 b_1$ *e* $a_2 \leq_2 b_2$). *Se* $\langle A_1, \leq_1\rangle$ *e* $\langle A_2, \leq_2\rangle$ *são parcialmente bem ordenados, então* $\langle A, \leq\rangle$ *é parcialmente bem ordenado.*

Capítulo 2

Identidades Polinomiais 2-graduadas de Matrizes 2×2

Os resultados principais deste capítulo são os seguintes:

Teorema 2.1. *Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Então as identidades polinomiais 2-graduadas da álgebra $M_2(K)$ satisfazem a propriedade de Specht.*

Teorema 2.2. *Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Então as identidades polinomiais 2-graduadas das álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ satisfazem a propriedade de Specht.*

Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra livre 2-graduada, onde $X = Y \cup Z$, $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $Z = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Seja I o T_2-ideal de $K\langle X\rangle$, gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + \varepsilon z_3z_2z_1$, onde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

2.1 Um Conjunto Gerador M do K-módulo $K\langle X\rangle/I$

Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra livre 2-graduada, onde $X = Y \cup Z$, $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $Z = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Lembremos que I é o T_2-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + \varepsilon z_3z_2z_1$, onde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Sobre um corpo K a Proposição 2.3 abaixo, segue imediatamente das Proposições 5 e 8 de [27] que foram provadas em [27] usando as ideias de [11]. Entretanto (veja [7]), sobre um anel K associativo e comutativo com 1 este fato pode ser provado exatamente da mesma forma que em [27]. Daremos uma prova completa da proposição aqui a fim de tornar o trabalho autossuficiente.

Proposição 2.3 ([27], vide também [7]). *Seja K um anel associativo e comutativo com 1. Então a álgebra 2-graduada relativamente livre $K\langle X\rangle/I$ é gerada sobre K pelos seguintes monômios:*

$$y_{a_1}y_{a_2}\dots y_{a_k}+I, \tag{2.1.1}$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\dots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\dots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}}+I, \tag{2.1.2}$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\dots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\dots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\dots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}}+I. \tag{2.1.3}$$

onde $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k$, $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_l$, $c_1 \le c_2 \le \dots \le c_m$ e $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_m$, $k > 0$ em (2.1.1), $k \ge 0$, $m > 0$ em (2.1.2) e $k \ge 0$, $l > 0$, $m > 0$ em (2.1.3). O "chapéu" sobre a variável significa que ela pode ser omitida.

Demonstração. Vamos omitir o ideal I na notação dos monômios de $K\langle X\rangle/I$. Analizaremos primeiramente o caso em que I é gerado por $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$, ou seja, $\varepsilon = 1$. Seja $y^{(i)} = y_{a_{i1}}y_{a_{i2}}\dots y_{a_{ik_i}} + I$, $k_i \ge 0$. Seja f um monômio em $K\langle X\rangle/I$. Se a expressão de f não contém nenhum z_i, então usando a identidade polinomial 2-graduada $y_1y_2 - y_2y_1$, obtemos o resultado. Caso contrário, podemos escrever f como

$$f = y^{(1)}z_{i_1}y^{(2)}z_{i_2}y^{(3)}z_{i_3}\dots y^{(2m-1)}z_{i_{2m-1}}y^{(2m)}\widehat{z_{i_{2m}}}+I,$$

onde $m \ge 1$ e $y^{(1)}z_{i_1}y^{(2)}z_{i_2}y^{(3)}z_{i_3}\dots y^{(2m-1)}z_{i_{2m-1}}y^{(2m)}\widehat{z_{i_{2m}}}$ é um monômio de $K\langle X\rangle$. Convém notar que os termos $y^{(1)}, \dots, y^{(2m)}$ podem aparecer ou não. No caso em que a expressão de f não contém nenhum $y^{(i)}$, teremos o monômio $z_{i_1}z_{i_2}\dots z_{i_{2m-1}}\widehat{z_{i_{2m}}}$. Agora, usando a identidade polinomial 2-graduada $y_1y_2 - y_2y_1$, segue que

$$f = y^{(1)}y^{(3)}\dots y^{(2m-1)}z_{i_1}y^{(2)}y^{(4)}\dots y^{(2m)}z_{i_2}z_{i_3}\dots z_{i_{2m-1}}\widehat{z_{i_{2m}}}+I.$$

Assim, podemos escrever f na forma

$$f = y_{a_1}y_{a_2}\dots y_{a_k}z_{i_1}y_{b_1}y_{b_2}\dots y_{b_l}z_{i_2}z_{i_3}\dots z_{i_{2m-1}}\widehat{z_{i_{2m}}}+I,$$

onde $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k$, $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_l$, $k \ge 0$ e $l \ge 0$. Existe uma permutação σ do conjunto $\{1, 3, \dots, 2m-1\}$ tal que $i_{\sigma(1)} \le i_{\sigma(3)} \le \dots \le i_{\sigma(2m-1)}$. Denotemos $c_1 = i_{\sigma(1)}, c_2 = i_{\sigma(3)}, \dots, c_m = i_{\sigma(2m-1)}$. Também existe uma permutação τ do conjunto

$\{2, 4, \ldots, 2m-2, \widehat{2m}\}$ tal que $i_{\tau(2)} \leq i_{\tau(4)} \leq \cdots \leq i_{2m-2} \leq \widehat{i_{\tau(2m)}}$. Denotemos $d_1 = i_{\tau(2)}, d_2 = i_{\tau(4)}, \ldots, d_m = i_{\tau(2m)}$. Portanto, usando a identidade polinomial 2-graduada $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$, obtemos

$$f = \delta y_{a_1} y_{a_2} \ldots y_{a_k} z_{c_1} y_{b_1} y_{b_2} \ldots y_{b_l} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}} + I,$$

onde $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$ e $\delta = \pm 1$, dependendo apenas do número de vezes que aplicamos a identidade polinomial 2-graduada $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$. Assim, segue que a álgebra $K\langle X\rangle/I$ é gerada pelos monômios (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3), conforme queríamos.

No caso em que o T_2-ideal I é gerado por $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$, ou seja, $\varepsilon = -1$, a prova é análoga. A única diferença é que o sinal do monômio será sempre positivo. □

Observação 2.4. Note que se I é gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$, então os monômios da forma (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3) formam uma K-base do K-módulo livre $K\langle X\rangle/I$ (veja [7, Prop.3]). Por outro lado, se I é gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ então alguns dos monômios da forma (2.1.2) e (2.1.3) são iguais a 0 em $K\langle X\rangle/I$ (veja [27, Prop.8]).

Denotaremos por M_1, M_2 e M_3 o conjunto de monômios (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3), respectivamente. Seja $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Notemos que $K\langle X\rangle/I$ satisfaz as seguintes identidades polinomiais 2-graduadas $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + \varepsilon z_3z_2z_1$, onde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Assim, temos que as variáveis $y_1, y_2, \ldots$ comutam entre si. Portanto, podemos considerar os elementos de M_1 como monômios nas variáveis comutativas $y_1, y_2, \ldots$. As identidades polinomiais 2-graduadas $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ ou $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ nos dão a seguinte relação:

$$z_{c_1} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}} = \delta z_{\sigma(c_1)} z_{\tau(d_1)} z_{\sigma(c_2)} z_{\tau(d_2)} \ldots z_{\sigma(c_m)} \widehat{z_{\tau(d_m)}},$$

onde $\delta = \pm 1$, σ é uma permutação do conjunto de índices $\{c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, c_m\}$ e τ é uma permutação do conjunto índices $\{d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}, \widehat{d_m}\}$. O coeficiente δ é igual a 1, se $\varepsilon = -1$, e no caso em que $\varepsilon = 1$, o coeficiente depende apenas do sinal das permutações σ e τ. Desta forma, podemos considerar este elemento como sendo dois monômios, um nas variáveis $z_{c_1}, z_{c_2}, \ldots, z_{c_{m-1}}, z_{c_m}$ e outros nas variáveis $z_{d_1}, z_{d_2}, \ldots, z_{d_{m-1}}, \widehat{z_{d_m}}$. Devemos notar que os elementos z_{c_i} e z_{d_j} não comutam entre si. Além disso, o produto z_iz_j é um elemento par e portanto comuta com todo $y = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_s}$.

2.2 Uma Boa Ordem e uma Boa Ordem Parcial em M

Ordem Parcial $\leq'$ em um Conjunto de Sequências

Seja $\mathbb{N}_0$ o conjunto de todos os inteiros não negativos. Consideraremos em $\mathbb{N}_0$ a ordem linear padrão $\leq$. Seja $m \in \mathbb{N}$. Definamos a relação $\leq_m$ em $\mathbb{N}_0$ tal que para $l_1, l_2 \in \mathbb{N}_0$, temos que $l_1 \leq_m l_2$ se, e somente se, $l_1 \leq l_2$ e $l_1 \equiv l_2 \mod 2m$. É fácil verificar que $\leq_m$ define uma ordem parcial em $\mathbb{N}_0$.

Lema 2.5. *Dado $m \in \mathbb{N}$, $\leq_m$ é uma boa ordem parcial no conjunto $\mathbb{N}_0$.*

Demonstração. Seja $C = \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$, com a ordem trivial $\leq$, dada por $a \leq b$ se, e somente se $a = b$. Considere $\mathbb{N}_0 \times C$ com a ordem $\leq$ definida componente a componente. Consideremos a aplicação de $\mathbb{N}_0$ em $\mathbb{N} \times C$, dada por $a \mapsto (a, r)$, onde r é o resto da divisão de a por $2m$. A aplicação acima preserva ordem, ou seja, se $a_1 \leq_m a_2$, então $(a_1, r_1) \leq (a_2, r_2)$. Pelo Lema 1.40 temos que $\mathbb{N}_0 \times C$ é parcialmente bem ordenado. Logo, $\leq_m$ é uma boa ordem parcial. □

Denotemos por Q_n o produto cartesiano $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ n-vezes. Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em Q_n, definamos a ordem parcial $\preceq$ componente a componente (i.e., $x \preceq y$ se, e somente se, $x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n$). Diante desta definição, o resultado bem conhecido a seguir é uma consequência imediata do Lema 1.40.

Lema 2.6. *$\langle Q_n, \preceq \rangle$ é parcialmente bem ordenado.*

Seja $V(Q_n)$ o conjunto de todas as sequências não nulas de elementos de Q_n para as quais apenas um número finito de termos é não nulo. Definamos em $V(Q_n)$ a ordem parcial $\leq_\Phi$ tal que para $\{u_i\}, \{v_i\} \in V(Q_n)$, temos que $\{u_i\} \leq_\Phi \{v_i\}$ se, e somente se, existe $\varphi \in \Phi$ tal que $u_j \leq v_{\varphi(j)}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Lema 1.39, temos o seguinte resultado

Lema 2.7. *$\langle V(Q_n), \leq_\Phi \rangle$ é parcialmente bem ordenado.*

Agora, consideraremos o conjunto $Q_2 = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Pelo Lema 2.6, temos que $\langle Q_2, \preceq \rangle$ é parcialmente bem ordenado. Definamos em Q_2 a relação $\leq_m$, tal que para $x = (x_1, x_2)$

e $y = (y_1, y_2)$ em Q_2 temos que $x \leq_m y$ se, e somente se, $x_i \leq_m y_i$, para todo $i = 1, 2$. Usando os lemas 1.40 e 2.5, obtemos que $\langle Q_2, \leq_m \rangle$ é parcialmente bem ordenado.

Denotemos por Θ a família de todas as aplicações $\theta_{kl} : V(Q_n) \to V(Q_n)$, com $k, l \in \mathbb{N}, k < l$, definidas para $n = 1, 2$, dadas por $\theta_{kl}(\{u_i\}) = \{u'_i\}$, onde

$$u'_i = \begin{cases} u_i, & i \neq k \\ u_l, & i = k. \end{cases}$$

Agora, se $n > 2$, definimos aplicação θ_{kl} de $V(Q_n)$ da seguinte forma: $\theta_{kl}(\{u_i\}) = \{u'_i\}$, onde $\{u'^{(j)}_i\} = \theta_{kl}(\{u^{(j)}_i\})$, se $j = 1, 2, \ldots, n-2$ e $\{u'^{(j)}_i\} = \{u^{(j)}_i\}$, se $j = n-1, n$. Seja $V(Q_n) = V(Q_{n-2}) \times V(Q_2)$, para $n \geq 2$.

Denotemos por Φ_1 a família de todas as aplicações $\varphi_1 : V(Q_n) \to V(Q_n)$ definidas por $\varphi_1 = \varphi$, se $n = 1, 2$ e $\varphi_1(u, v) = (\varphi(u), v)$, onde $u \in V(Q_{n-2})$ e $v \in V(Q_2)$, se $n > 2$.

Agora, seja Φ_2 a família de todas as aplicações $\varphi_2 : V(Q_n) \to V(Q_n)$, definidas como aplicação identidade se $n = 1, 2$ e $\varphi_2(u, v) = (u, \varphi(v))$, onde $u \in V(Q_{n-2})$ e $v \in V(Q_2)$, se $n > 2$.

Denotaremos por Λ a família de todas as aplicações $\lambda : V(Q_n) \to V(Q_n)$, tal que $\lambda = \theta_{k_1 l_1}\theta_{k_2 l_2} \ldots \theta_{k_q l_q} \cdot \varphi_1, q \geq 0$, onde $\theta_{k_1 l_1}, \theta_{k_2 l_2}, \ldots \theta_{k_q l_q}, \in \Theta$, $\varphi_1 \in \Phi_1$, $k_i \notin \varphi(\mathbb{N})$, $i = 1, 2, \ldots, q$ e $k_i \neq k_j$, se $i \neq j$.

Agora, em $V(Q_2)$ definamos a ordem parcial $\leq_m$ tal que para $u, v \in V(Q_2)$, onde $u = \{u_i\}$ e $v = \{v_i\}$, temos que $u \leq_m v$ se, e somente se, $u_i \leq_m v_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definamos a relação binária $\leq_\Lambda$ em $V(Q_2)$ tal que $u \leq_\Lambda v$ se, e somente se, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $u'_i \leq_m v_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, onde $\lambda(\{u_i\}) = \{u'_i\}$.

Lema 2.8 (A. N. Krasilnikov, [28]). *Sejam $\langle A, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e 0 um elemento minimal em A. Seja $V(A) = V(A, 0)$ o conjunto de todas as sequências de elementos de A em que apenas um número finito de elementos não são iguais a 0. Seja $\leq_\Lambda$ uma relação binária em $V(A)$ tal que para $\{a_i\}, \{a'_i\} \in V(A)$, temos $\{a_i\} \leq_\Lambda \{a'_i\}$ se, e somente se, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $a''_i \leq a'_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, onde $\lambda(\{a_i\}) = \{a''_i\}$. Então $\leq_\Lambda$ é uma ordem parcial em $V(A)$.*

Assim, $\leq_\Lambda$ é uma ordem parcial em $V(Q_2)$. Como $\leq_\Lambda$ depende do número m fixado, vamos denotar $\leq_\Lambda$ por $\leq_{m,\Lambda}$.

Seja C um conjunto finito com elemento distinguido 0 e considere o conjunto $S = \mathbb{N}_0^n \times C$, com elemento distinguido $0 = (0, \ldots, 0)$. Ordenaremos o conjunto S, colocando $s \preceq s'$, onde $s = (j_1, j_2, \ldots, j_n, c)$, $s' = (j_1', j_2', \ldots, j_n', c')$, $j_l, j_l' \in \mathbb{N}_0, c, c' \in C$, se, e somente se, $j_l \leq j_l'$, $l = 1, 2, \ldots, n$ e $c = c'$. É claro que S é um conjunto parcialmente bem ordenado.

Considere agora o conjunto $V(S) = V(S, 0)$. Suponha que $v \in V(S)$, onde $v = \{\{s_j\} \mid j \in \mathbb{N}\}$ e $s_j \in S$. Seja $\varphi \in \Phi$ uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que preserva a ordem. Usaremos a mesma notação para a injeção de $V(S)$ em $V(S)$ definida por $\varphi(v) = v'$, onde

$$s_j' = \begin{cases} s_i, \ j = \varphi(i) \\ 0, \ j \notin \varphi(\mathbb{N}). \end{cases}$$

Seja Θ a família de aplicações θ_{kl} de $V(S)$ em $V(S)$, onde $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, definidas por $\theta_{kl}(v) = v'$, onde

$$s_j' = \begin{cases} s_j, \ j \neq k \\ s_l, \ j = k. \end{cases}$$

Seja Λ a família de aplicações $\lambda = \theta_{k_1 l_1} \theta_{k_2 l_2} \ldots \theta_{k_q l_q} \cdot \varphi$, $q \geq 0$, $k_i \notin \varphi(\mathbb{N})$, $k_i \neq k_j$, se $i \neq j$. Definamos agora a ordem parcial $\leq_\Lambda$, tal que para $u, v \in V(S)$, temos que $u \preceq v$ se, e somente se, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $u_i' \preceq v_i$, $i = 1, 2, \ldots$, onde $\lambda(u) = u'$.

Lema 2.9 (A. N. Krasilnikov, [30])**.** *$\langle V(S), \leq_\Lambda \rangle$ é um conjunto parcialmente bem ordenado.*

Agora, diante deste fato, podemos demonstrar o seguinte lema:

Lema 2.10. *$\leq_{m,\Lambda}$ é uma boa ordem parcial em $V(Q_2)$.*

Demonstração. Seja $C^2 = \{(i, j) \mid i = 1, 2, \ldots, 2m - 1, j = 1, 2, \ldots, 2m - 1\}$. Definamos $S = Q_2 \times C^2$. Pelo Lema 2.9, temos que $\leq_\Lambda$ é uma boa ordem em $V(S)$. Consideremos agora o conjunto

$$N = \{((l_1, l_2), (r_1, r_2)) \in S \mid l_i \equiv r_i \mod 2m, i = 1, 2\}.$$

Notemos que existe uma bijeção ε entre Q_2 e N, dada por

$$\varepsilon(l_1, l_2) = ((l_1, l_2), (r_1, r_2)),$$

onde r_i é o resto da divisão de l_i por $2m$. Assim, temos que $V(Q_2)$ pode ser identificado com $V(N) \subset V(S)$. Assim, para verificar que $\leq_{m,\Lambda}$ é uma boa ordem parcial em $V(Q_2)$, vamos verificar que para $u, v \in V(Q_2)$, temos que $u \leq_{m,\Lambda} v$ se, e somente se, $\varepsilon(u) \leq_\Lambda \varepsilon(v)$. Como $u \leq_{m,\Lambda} v$, temos que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $u'_i \leq_m v_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots$, onde $\lambda(u_i) = u'_i$. Temos que $u'_i \leq_m v_i$ se, e somente se, $u'^{(1)}_i \leq v^{(1)}_i$, $u'^{(2)}_i \leq v^{(2)}_i$ e $u'^{(1)}_i \equiv v^{(1)}_i$ mod $2m$, $u'^{(2)}_i \equiv v^{(2)}_i$ mod $2m$. Logo $u'_i \leq_m v_i$ se, e somente se, $u'^{(1)}_i \leq v^{(1)}_i$, $u'^{(2)}_i \leq v^{(2)}_i$ e $r'^{(1)}_i = r^{(1)}_i$, $r'^{(2)}_i = r^{(2)}_i$, onde $r'^{(1)}_i$, $r'^{(2)}_i$, $r^{(1)}_i$ e $r^{(2)}_i$ são respectivamente os restos da divisão de $u'^{(1)}_i$, $u'^{(2)}_i$, $v^{(1)}_i$ e $v^{(2)}_i$, por $2m$. Assim, temos que $u'_i \leq_m v_i$ se, e somente se $((u'^{(1)}_i, u'^{(2)}_i), (r'^{(1)}_i, r'^{(2)}_i)) \preceq ((v^{(1)}_i, v^{(2)}_i), (r^{(1)}_i, r^{(2)}_i))$. Portanto, temos que $u'_i \leq_m v_i$ se, e somente se, $\varepsilon(u'_i) \preceq \varepsilon(v_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. É fácil verificar que $\varepsilon(\lambda(u)) = \lambda(\varepsilon(u))$, para todo $u \in V(Q_2)$. Logo, segue que $\leq_{m,\Lambda}$ é uma boa ordem parcial em $V(Q_2)$. □

Temos que $\langle V(Q_2), \leq_\Phi \rangle$ e $\langle V(Q_2), \leq_{m,\Lambda} \rangle$ são parcialmente bem ordenados. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 2.11. Em $V(Q_2) \times V(Q_2)$ definimos a ordem parcial $\leq_{m,\Lambda}$ tal que para

$$(\{u_i\}, \{u'_i\}), (\{v_i\}, \{v'_i\}) \in V(Q_2) \times V(Q_2),$$

temos que $(\{u_i\}, \{u'_i\}) \leq_{m,\Lambda} (\{v_i\}, \{v'_i\})$ se, e somente se, $\{u_i\} \leq_{m,\Lambda} \{v_i\}$ e $\{u'_i\} \leq_\Phi \{v'_i\}$.

Pelo Lema 1.40 segue que $\langle V(Q_2) \times V(Q_2), \leq_{m,\Lambda} \rangle$ é parcialmente bem ordenado.

Devemos notar que existe uma bijeção entre $V(Q_2) \times V(Q_2)$ e $V(Q_4)$, dada por $(\{u^{(1)}_i\}, \{u^{(2)}_i\}) \mapsto \{(u^{(1)}_i, u^{(2)}_i)\}$. Assim, a ordem parcial $\leq_{m,\Lambda}$ é também uma boa ordem parcial em $V(Q_4)$, onde, para $\{u_i\}, \{v_i\} \in V(Q_4)$ temos $\{u_i\} \leq_{m,\Lambda} \{v_i\}$ se, e somente se, existe $\lambda \in \Lambda$ e $\varphi_2 \in \Phi_2$ tal que $u'^{(1)}_i \leq_m v^{(1)}_i$, $u'^{(2)}_i \leq_m v^{(2)}_i$, $u^{(3)}_j \leq v^{(3)}_{\varphi(j)}$, $u^{(4)}_j \leq v^{(4)}_{\varphi(j)}$, desde que $u_i = (u^{(1)}_i, u^{(2)}_i, u^{(3)}_i, u^{(4)}_i)$ e $v_i = (v^{(1)}_i, v^{(2)}_i, v^{(3)}_i, v^{(4)}_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\lambda(\{u^{(1)}_i\}) = \{u'^{(1)}_i\}$ e $\lambda(\{u^{(2)}_i\}) = \{u'^{(2)}_i\}$.

Ordem Linear $\leq$ e Ordem Parcial $\leq'$ no Conjunto M

Sejam Q_1 e $V(Q_1)$ como definidos anteriormente. Defina a relação binária $\leq$ em $V(Q_1)$ tal que para $\{u_i\}, \{v_i\}$ em $V(Q_1)$ temos que $\{u_i\} < \{v_i\}$ se, e somente se, existe $k \geq 0$ tal que $v_k < v_k$ e $u_t = v_t$, para todo $t > k$.

Lema 2.12. *$\leq$ é uma boa ordem em $V(Q_1)$.*

No conjunto $V(Q_1)$, vamos definir a função $\partial : V(Q_1) \to \mathbb{N}$, dada por

$$\partial(u) = \partial(\{u_i\}) = \sum_i u_i.$$

Sejam Q_n e $V(Q_n)$, como definidos anteriormente. Note que existe uma bijeção entre $V(Q_n)$ e o produto cartesiano de n cópias de $V(Q_1)$ definida por

$$(\{u_i^{(1)}\}, \{u_i^{(2)}\}, \ldots, \{u_i^{(n)}\}) \mapsto \{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \ldots . u_i^{(n)})\}.$$

Diante disto, vamos definir a ordem linear $\leq$ em $V(Q_2)$, tal que para $u, v \in V(Q_2)$, onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, com $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V(Q_1)$ temos que $u < v$ se, e somente se, $\partial(u_1) + \partial(u_2) < \partial(v_1) + \partial(v_2)$ ou $\partial(u_1) + \partial(u_2) = \partial(v_1) + \partial(v_2)$ e $u_2 < v_2$ ou $\partial(u_1) + \partial(u_2) = \partial(v_1) + \partial(v_2)$, $u_2 = v_2$ e $u_1 < v_1$.

Lema 2.13. *$\leq$ é uma boa ordem em $V(Q_2)$.*

Demonstração. É fácil ver que $\leq$ é uma ordem linear. Resta então mostrar que $\leq$ é uma boa ordem. Seja W um subconjunto não vazio de $V(Q_2)$. Queremos mostrar que W possui elemento minimal, e portanto um único elemento minimal. Seja $S = \{\partial(u_1) + \partial(u_2) \mid (u_1, u_2) \in W\}$. Note que S é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$, logo possui elemento minimal s_0. Seja $W_0 = \{(u_1, u_2) \in W \mid \partial(u_1) + \partial(u_2) = s_0\} \subset W$. Consideraremos agora um subconjunto V de $V(Q_1)$, tal que $V = \{u_2 \in V(Q_1) \mid (u_1, u_2) \in W_0\}$. Como $\leq$ é uma boa ordem parcial em $V(Q_1)$, temos que V possui elemento minimal u_2'. Agora, $V' = \{u_1 \in V(Q_1) \mid (u_1, u_2') \in W_0\}$. Como $\leq$ é uma boa ordem em $V(Q_1)$, temos que V' possui um único elemento minimal u_1'. Assim, encontramos o elemento minimal (u_1', u_2') de W. Logo, $\leq$ é uma boa ordem em $V(Q_2)$. $\square$

Agora, vamos definir a ordem linear $\leq$ em $V(Q_n)$, onde $n \geq 3$. Primeiramente identificaremos $V(Q_n)$ com $V(Q_1) \times V(Q_1) \times \cdots \times V(Q_1)$. Assim, dados $u, v \in V(Q_n)$, onde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, com $u_i, v_i, \in V(Q_1)$, temos que $u < v$ se, e somente se, $(u_{n-1}, u_n) < (v_{n-1}, v_n)$ ou existe t_0 tal que $u_{t_0} < v_{t_0}$ e $u_t = v_t$, $t = t_0 + 1, \ldots, n$.

Lema 2.14. *$\leq$ é uma boa ordem em $V(Q_n)$.*

Demonstração. Seja W um subconjunto não vazio de $V(Q_n)$. Vamos fazer a demonstração por indução. Quando $n = 2$, segue pelo lema anterior que $\leq$ é uma boa ordem. Queremos mostrar que W possui elemento minimal. Seja

$$W_1 = \{\{(w_i^{(2)}, w_i^{(3)}, \ldots, w_i^{(n)})\} \mid \{(w_i^{(1)}, w_i^{(2)}, \ldots, w_i^{(n)})\} \in W\} \subset V(Q_{n-1}).$$

Pela hipótese de indução, temos que $V(Q_{n-1})$ é bem ordenado, com a ordem linear $\leq$. Como W_1 é um subconjunto não-vazio de $V(Q_{n-1})$, segue que W_1 possui um único elemento minimal $\{(\bar{w}_i^{(2)}, \bar{w}_i^{(3)}, \ldots, \bar{w}_i^{(n)})\}$. Agora, seja

$$W_2 = \{\{w_i^{(1)}\} \mid \{(w_i^{(1)}, \bar{w}_i^{(2)}, \ldots, \bar{w}_i^{(n)})\} \in W\}.$$

Note que W_2 é um subconjunto não-vazio de $V(Q_1)$. Como $V(Q_1)$ é bem ordenado, W_2 possui elemento minimal $\{\bar{w}_i^{(1)}\}$. Assim, segue que W possui único elemento minimal $\{(\bar{w}_i^{(1)}, \bar{w}_i^{(2)}, \ldots, \bar{w}_i^{(n-1)}, \bar{w}_i^{(n)})\}$. □

Consideraremos agora os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
V_1 &= V(Q_1);\\
V_2 &= \{\{u_i\} \in V(Q_3) \mid \partial(\{u_i^{(2)}\}) > 0, \partial(\{u_i^{(2)}\}) - \partial(\{u_i^{(3)}\}) = 0 \text{ ou } 1\};\\
V_3 &= \{\{u_i\} \in V(Q_4) \mid \partial(\{u_i^{(j)}\}) > 0, j = 2, 3, \partial(\{u_i^{(3)}\}) - \partial(\{u_i^{(4)}\}) = 0 \text{ ou } 1\}.
\end{aligned}$$

Denote por V o conjunto $V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Note que $\langle V_1, \leq\rangle$, $\langle V_2, \leq\rangle$, $\langle V_3, \leq\rangle$ são bem ordenados, pois $\langle V(Q_n), \leq\rangle$ é bem ordenado, para todo n. Defina em V a relação $\leq$ tal que para todo $u, v \in V$ temos

i) se $u, v \in V_i$ e $u < v$ em $V_i, i = 1, 2, 3$ então $u < v$ em V;

ii) se $u \in V_1$ e $v \in V_2 \cup V_3$, então $u < v$ em V;

iii) se $u \in V_2$, $v \in V_3$ e $\{(u_i^{(2)}, u_i^{(3)})\} \leq \{(v_i^{(3)}, v_i^{(4)})\}$, então $u < v$ em V;

iv) se $u \in V_3$, $v \in V_2$ e $\{(u_i^{(3)}, u_i^{(4)})\} < \{(v_i^{(2)}, v_i^{(3)})\}$, então $u < v$ em V.

É imediato verificar que $<$ é uma ordem linear em V.

Proposição 2.15. *$\langle V, \leq\rangle$ é um conjunto bem ordenado.*

Demonstração. De fato, seja $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. Então $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$, onde $W_i \subset V_i, i = 1, 2, 3$. Agora, se $W_1 \neq \emptyset$, como $\leq$ é uma boa ordem em V_1, temos que W_1 possui elemento minimal w_1. E portanto, w_1 é o elemento minimal de V. Se $W_1 = \emptyset$, temos que $W_2 \neq \emptyset$ ou $W_3 \neq \emptyset$. Sejam w_2 e w_3 os elementos minimais de W_2 e W_3, respectivamente. Como $\leq$ é uma ordem linear em V, segue que $w_2 < w_3$ ou $w_3 < w_2$. Assim, obtemos o elemento minimal de W. Logo, $\leq$ é uma boa ordem. $\square$

Vamos denotar por

$$V_3^0 = \{\{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}, u_i^{(4)})\} \in V_3 \mid \partial(\{u_i^{(3)}\}) - \partial(\{u_i^{(4)}\}) = 0\}$$

e por

$$V_3^1 = \{\{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}, u_i^{(4)})\} \in V_3 \mid \partial(\{u_i^{(3)}\}) - \partial(\{u_i^{(4)}\}) = 1\}.$$

É claro que V_3 é a união disjunta de V_3^0 e V_3^1. Em V_3^1, vamos definir a ordem parcial $\leq'$, tal que para $u, v \in V_3^1$, temos que $u \leq' v$ se, e somente se, $u \leq_\Phi v$. Agora, em V_3^0, vamos definir a ordem parcial $\leq'$. Sejam $u, v \in V_3^0$; diremos que $u \leq' v$ se, e somente se, $\partial(\{u_i^{(3)}\}) < \partial(\{v_i^{(3)}\})$ e $u \leq_\Phi v$, ou $\partial(\{u_i^{(3)}\}) = \partial(\{v_i^{(3)}\}) = m$ e $u \leq_{m,\Lambda} v$. Finalmente, vamos definir em V uma relação $\leq'$ tal que para $u, v \in V$, temos que $u \leq' v$ se, e somente se $u, v \in V_1$ e $u \leq_\Phi v$ ou se $u, v \in V_2$ e $u \leq_\Phi v$ ou se $u, v \in V_3$ e $u \leq' v$. Note que $\leq'$ é uma ordem parcial em V.

Proposição 2.16. *$\langle V, \leq' \rangle$ é um conjunto parcialmente bem ordenado.*

Demonstração. Mostraremos que toda sequência infinita de elementos de V, possui uma subsequência infinita não decrescente. Seja $\{u_i\}$ uma sequência infinita de elementos de V. Temos que u_i, para todo i, pertence a V_1, V_2 ou V_3. Assim, existe um subsequência infinita de $\{u_i\}$ totalmente contida em V_1, ou em V_2, ou em V_3. Como V_1 e V_2 são parcialmente bem ordenados, é suficiente verificar que V_3 é parcialmente bem ordenado. Note que V_3 é a união disjunta de V_3^0 e V_3^1, onde V_3^1 é parcialmente bem ordenado. Se V_3^0 é parcialmente bem ordenado, segue que V é parcialmente bem ordenado. Assim, resta verificar que V_3^0 é parcialmente bem ordenado. Seja $\{u_i\}$ uma sequência infinita de elementos de V_3^0. Consideremos a sequência infinita $\{\partial(u_i^{(3)})\} = \{\partial(u_i^{(4)})\}$ de inteiros não negativos, que denotaremos por $\{s_i\}$. Como $\leq$ é uma boa ordem em $V(\mathbb{N}_0)$, existe uma subsequência infinita não decrescente $\{s_{i_j}\}$. Agora temos duas possibilidades $\{s_{i_j}\}$ é uma sequência limitada, e portanto possui uma subsequência infinita constante, ou $\{s_{i_j}\}$ não é limitada, e portanto possui uma subsequência infinita não decrescente. Primeiro suponha que $\{s_{i_{j_k}}\}$ é constante (i.e, $s_{i_{j_k}} = m$, para todo $k > 0$). Assim, temos que $u_{i_{j_k}} = (u^{(1)}_{i_{j_k}}, u^{(2)}_{i_{j_k}}, u^{(3)}_{i_{j_k}}, u^{(4)}_{i_{j_k}})$, onde $\partial(u^{(3)}_{i_{j_k}}) = \partial(u^{(4)}_{i_{j_k}}) = m$ para todo $k > 0$. Neste caso, como $\langle V^0_3, \leq_{m,\Lambda}\rangle$ é parcialmente bem ordenado, segue pelo Lema 1.38 que a sequência $\{u_{i_{j_k}}\}$ possui uma subsequência infinita não decrescente. Finalmente, suponha que $\{s_{i_{j_k}}\}$ é estritamente crescente. Temos a sequência $\{u_{i_{j_k}}\} = \{(u^{(1)}_{i_{j_k}}, u^{(2)}_{i_{j_k}}, u^{(3)}_{i_{j_k}}, u^{(4)}_{i_{j_k}})\}$, com $\partial(u^{(3)}_{i_{j_1}}) < \partial(u^{(3)}_{i_{j_2}}) < \cdots$. Como $\langle V^0_3, \leq_\Phi\rangle$ é parcialmente bem ordenado, segue pelo Lema 1.38 que a sequência $\{u_{i_{j_k}}\}$ possui uma subsequência infinita não decrescente. Portanto, concluímos que V é parcialmente bem ordenado. $\square$

Consideraremos algumas famílias de endomorfismos de $K\langle X\rangle/I$. Seja Φ o conjunto de todos os endomorfismos φ de $K\langle X\rangle/I$, dados por

$$\varphi(x_i) = x_{\varphi(i)},$$

onde $x_i \in X = Y \cup Z, i = 1, 2, \ldots$ (φ é aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que preserva ordem).

Análogo ao caso anterior, consideraremos agora, duas famílias de endomorfismos Φ_1 e Φ_2 de $K\langle X\rangle/I$. Definamos $\varphi_1 \in \Phi_1$ por $\varphi_1(y_i) = y_{\varphi(i)}$, onde $y_i \in Y, i = 1, 2, \ldots$, e $\varphi_1(z_i) = z_i$, com $z_i \in Z, i = 1, 2, \ldots$. Analogamente, podemos definir $\varphi_2 \in \Phi_2$ que é dada por $\varphi_2(z_i) = z_{\varphi(i)}$, onde $z_i \in Z, i = 1, 2, \ldots$, e $\varphi_2(y_i) = y_i$, com $y_i \in Y, i = 1, 2, \ldots$. Notemos que se $\varphi \in \Phi$, então $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$.

Seja Θ a família de endomorfismos θ_{kl} de $K\langle X\rangle/I$, com $k, l \in \mathbb{N}, k < l$, dada por

$$\theta_{kl}(y_i) = \begin{cases} y_i, \ i \neq l \\ y_k y_l, \ i = l, \end{cases}$$

para todo $y_i \in Y$ e $\theta_{kl}(z_i) = z_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Agora, podemos definir a família Λ de todos os endomorfismos

$$\lambda = \theta_{k_1 l_1} \theta_{k_2 l_2} \cdots \theta_{k_q l_q} \cdot \varphi_1,$$

onde $q \geq 0$, $\theta_{k_i l_i} \in \Theta$, $\varphi_1 \in \Phi_1$, $k_i \notin \varphi(\mathbb{N})$ e $k_i \neq k_j$, se $i \neq j$.

Devemos notar que existe uma bijeção ξ entre os conjuntos M e V, dada por

i) Para $y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k} \in M_1$, definimos

$$\xi(y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}) = \{u_i\},$$

onde $u_i = \sum_{a_j;a_j=i} 1$;

ii) Para $y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\ldots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}} \in M_2$, definimos

$$\xi(y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\ldots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}}) = \{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)})\},$$

onde $u_i^{(1)} = \sum_{a_j;a_j=i} 1$, $u_i^{(2)} = \sum_{c_j;c_j=i} 1$ e $u_i^{(3)} = \sum_{d_j;d_j=i} 1$;

iii) Para $y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\ldots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\ldots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}} \in M_3$, definimos

$$\xi(y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\ldots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\ldots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}}) = \{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}, u_i^{(4)})\},$$

onde $u_i^{(1)} = \sum_{a_j;a_j=i} 1$, $u_i^{(2)} = \sum_{b_j;b_j=i} 1$, $u_i^{(3)} = \sum_{c_j;c_j=i} 1$ e $u_i^{(4)} = \sum_{d_j;d_j=i} 1$.

Lema 2.17. *Suponha que $x \in M$, $\varphi \in \Phi$, $\varphi_1 \in \Phi_1$, $\varphi_2 \in \Phi_2$ e $\lambda \in \Lambda$. Então $\xi(\varphi(x)) = \varphi(\xi(x))$, $\xi(\varphi_1(x)) = \varphi_1(\xi(x))$, $\xi(\varphi_2(x)) = \varphi_2(\xi(x))$ e $\xi(\lambda(x)) = \lambda(\xi(x))$.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que $\xi(\varphi(x)) = \varphi(\xi(x))$. Suponha que $x \in M_1$. Então, $x = y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k} = y_1^{u_1}y_2^{u_2}\ldots y_n^{u_n}$, onde $u_n \neq 0$, $u_i = \sum_{a_j;a_j=i} 1$. Assim, $\varphi(\xi(x)) = \varphi(\{u_i\}) = \{v_i\}$, onde $v_i = u_j, i = \varphi(j)$, e $v_i = 0$, $i \notin \varphi(\mathbb{N})$. Por outro lado, temos que

$$\begin{array}{rcl}
\xi(\varphi(x)) & = & \xi(\varphi(y_1^{u_1}y_2^{u_2}\ldots y_n^{u_n})) \\
 & = & \xi(y_{\varphi(1)}^{u_1}y_{\varphi(2)}^{u_2}\ldots y_{\varphi(n)}^{u_n}) \\
 & = & \{v_i\},
\end{array}$$

onde $v_i = u_j, i = \varphi(j)$, e $v_i = 0$, se $i \notin \varphi(\mathbb{N})$. Agora, se $x \in M_2$, temos que $x = y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\ldots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}}$. Portanto,

$$\varphi(\xi(y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\ldots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}})) = \varphi(\{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)})\}) = \{(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)})\},$$

onde $u_i^{(1)} = \sum_{a_j;a_j=i} 1$, $u_i^{(2)} = \sum_{c_j;c_j=i} 1$, $u_i^{(3)} = \sum_{d_j;d_j=i} 1$, e

$$(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)}) = \begin{cases} (u_j^{(1)}, u_j^{(2)}, u_j^{(3)}), \ i = \varphi(j) \\ (0,0,0), \ i \notin \varphi(\mathbb{N}). \end{cases}$$

Agora, calcularemos o outro lado da igualdade.

$$\begin{array}{rcl}
\xi(\varphi(x)) & = & \xi(\varphi(y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\ldots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}})) \\
 & = & \xi(y_{\varphi(a_1)}y_{\varphi(a_2)}\ldots y_{\varphi(a_k)}z_{\varphi(c_1)}z_{\varphi(d_1)}z_{\varphi(c_2)}z_{\varphi(d_2)}\ldots z_{\varphi(c_m)}\widehat{z_{\varphi(d_m)}}) \\
 & = & \{(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)})\},
\end{array}$$

onde $v_i^{(1)} = \sum_{\varphi(a_j);\varphi(a_j)=i} 1$, $v_i^{(1)} = \sum_{\varphi(c_j);\varphi(c_j)=i} 1$, $v_i^{(1)} = \sum_{\varphi(a_j);\varphi(a_j)=i} 1$ e $(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)}) = (0,0,0)$, se $i \notin \varphi(\mathbb{N})$. Portanto, $\varphi(\xi(x)) = \xi(\varphi(x))$. O caso em que $x \in M_3$ é mera repetição do caso anterior.

De forma análoga ao que foi feito para φ, mostra-se $\xi(\varphi_1(x)) = \varphi_1(\xi(x))$ e que $\xi(\varphi_2(x)) = \varphi_2(\xi(x))$.

Resta mostrar que $\lambda(\xi(x)) = \xi(\lambda(x))$, com $\lambda = \theta_{k_1l_1}\theta_{k_2l_2}\dots\theta_{k_ql_q}\cdot\varphi_1$, onde $q \geq 0$, $\theta_{k_1l_1},\dots,\theta_{k_ql_q} \in \Theta$, $\varphi_1 \in \Phi_1$, e $\theta_{k_il_i} \neq \theta_{k_jl_j}$, se $i \neq j$. Como as aplicações θ_{kl} agem apenas nos geradores $y_1, y_2, \dots$, veremos apenas o caso em que $x \in M_1$ e y_k não está presente na expressão x. Assim, suponha que $\theta_{kl} \in \Theta$, e $x = y_1^{u_1}y_2^{u_2}\dots y_n^{u_n} \in M_1$ onde $u_n \neq 0$, $u_k = 0$. Logo,

$$\begin{array}{rcl}
\xi(\theta_{kl}(x)) & = & \xi(\theta_{kl}(y_1^{u_1}y_2^{u_2}\dots y_{k-1}^{u_{k-1}}y_{k-1}^{u_{k-1}}\dots y_l^{u_l}\dots y_n^{u_n})) \\
& = & \xi(y_1^{u_1}y_2^{u_2}\dots y_{k-1}^{u_{k-1}}y_{k-1}^{u_{k-1}}\dots (y_ky_l)^{u_l}\dots y_n^{u_n}) \\
& = & \xi(y_1^{u_1}y_2^{u_2}\dots y_{k-1}^{u_{k-1}}y_k^{u_l}y_{k-1}^{u_{k-1}}\dots y_l^{u_l}\dots y_n^{u_n}) \\
& = & \{v_i\},
\end{array}$$

onde $v_i = u_i$, se $i \neq k$ e $v_k = u_l$. Por outro lado, temos que

$$\begin{array}{rcl}
\theta_{kl}(\xi(x)) & = & \theta_{kl}(\xi(y_1^{u_1}y_2^{u_2}\dots y_{k-1}^{u_{k-1}}y_{k-1}^{u_{k-1}}\dots y_l^{u_l}\dots y_n^{u_n})) \\
& = & \theta_{kl}(\{u_i\}) \\
& = & \{v_i\},
\end{array}$$

onde $v_i = u_i$, se $i \neq k$ e $v_k = u_l$. Assim, concluímos que $\lambda(\xi(x)) = \xi(\lambda(x))$, com $\lambda = \theta_{k_1l_1}\theta_{k_2l_2}\dots\theta_{k_ql_q}\cdot\varphi_1$, onde $q \geq 0$, $\theta_{k_1l_1},\dots,\theta_{k_ql_q} \in \Theta$, $\varphi_1 \in \Phi_1$, e $\theta_{k_il_i} \neq \theta_{k_jl_j}$, se $i \neq j$. □

Usando este lema e a bijeção ξ (ver página 33) entre os conjuntos M e V, podemos definir em M a boa ordem parcial $\leq'$ via ξ. Também podemos definir na mesma forma a boa ordem $\leq$ em M.

2.3 Termos Líderes das Imagens de Polinômios

Lema 2.18. *Sejam $y = y_1^{r_1}y_2^{r_2}\dots y_l^{r_l}$ e $x, \tilde{x} \in M$ tais que $x < \tilde{x}$. Então $yx < y\tilde{x}$.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que se $x, \tilde{x} \in M_1$, então o resultado é verdadeiro. Sejam $x = y_1^{u_1} y_2^{u_2}, \ldots, y_n^{u_n}$ e $\tilde{x} = y_1^{v_1} y_2^{v_2}, \ldots, y_n^{v_n}$ com $u_n \neq 0$ ou $v_n \neq 0$. Como $x < \tilde{x}$, então existe $t_0 \geq 0$ tal que $u_{t_0} < v_{t_0}$ e $u_t = v_t$, se $t > t_0$. Lembramos que $y = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots y_l^{r_l}$. Seja $n' = \max\{n, l\}$. Assim,

$$\xi(yx) = \xi(y_1^{u_1+r_1} y_2^{u_2+r_2} \ldots y_{n'}^{u_{n'}+r_{n'}}) = \{u_i + r_i\}$$

e

$$\xi(y\tilde{x}) = \xi(y_1^{v_1+r_1} y_2^{v_2+r_2} \ldots y_{n'}^{v_{n'}+r_{n'}}) = \{v_i + r_i\}.$$

Como $u_{t_0} < v_{t_0}$ e $u_t = v_t$, se $t > t_0$, segue o resultado.

Agora, tomemos x e $\tilde{x}$ em M_2 onde $x = y_{a_1} y_{a_2} \ldots y_{a_k} z_{c_1} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}}$ e $\tilde{x} = y_{a'_1} y_{a'_2} \ldots y_{a'_{k'}} z_{c'_1} z_{d'_1} z_{c'_2} z_{d'_2} \ldots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}}$. Notemos que a multiplicação por y não interfere em $z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}}$, ou em $z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}}$. Diante disto, é suficiente verificar o caso onde $z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}} = z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}}$ e $y_{a_1} y_{a_2} \ldots y_{a_k} < y_{a'_1} y_{a'_2} \ldots y_{a'_{k'}}$. Pelo caso anterior, temos que $y(y_{a_1} y_{a_2} \ldots y_{a_k}) < y(y_{a'_1} y_{a'_2} \ldots y_{a'_{k'}})$. Assim, $yx < y\tilde{x}$. Os demais casos são similares. □

Lema 2.19. *Sejam $x = y_1^{u_1} y_2^{u_2} \ldots y_n^{u_n}$ e $y = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots y_l^{r_l}$. Então $x < xy$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $x < xy_i$, $y_i \in Y$. Assim,

$$xy_i = (y_1^{u_1} y_2^{u_2} \ldots y_n^{u_n}) y_i = y_1^{u'_1} y_2^{u'_2} \ldots y_n^{u'_n},$$

onde $u'_j = u_j$, se $j \neq i$ e $u'_j = u_j + 1$, se $j = i$. Tome $t_0 = i$. Assim, $u_{t_0} < u'_{t_o}$ e $u'_t = u_t$, para todo $t > t_o$. Portanto $x < xy_i$. Por indução obtemos $x < xy$. □

Observação 2.20. Seja x um monômio em $K\langle X \rangle / I$. Pela demonstração da Proposição 2.3, temos que existe δ_x tal que $\delta_x x \in M$. Assim, se x_1, x_2 são monômios em $K\langle X \rangle / I$, então $\delta_{x_1 x_2} x_1 x_2 \in M$

Lema 2.21. *Sejam $x = z_{c_1} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}}$ e $z = z_{t_1} z_{t_2} \ldots z_{t_l}$. Então $x < \delta_{xz} xz$, onde $\delta_{xz} = \pm 1$.*

Demonstração. É fácil ver que $\partial(\xi(xz)) = \partial(\xi(x)) + l$. Assim, temos que $x < \delta_{xz} xz$. □

Lema 2.22. *Sejam $y = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots y_k^{r_k}$, $z' = z_{t_1} z_{t_2} \ldots z_{t_l}$, $z'' = z_{t_1} y z_{t_2} \ldots z_{t_l}$, e $x, \tilde{x} \in M$. Se $x < \tilde{x}$, então $xy < \tilde{x}y$, $\delta_{xz'} xz' < \delta_{\tilde{x}z'} \tilde{x}z'$ e $\delta_{xz''} xz'' < \delta_{\tilde{x}z''} \tilde{x}z''$.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que $xy < \tilde{x}y$. Note que se $x, \tilde{x} \in M_1$, temos $xy = yx$ e $\tilde{x}y = y\tilde{x}$. Portanto, usando o Lema 2.18, obtemos que $xy < \tilde{x}y$. Agora, suponha que $x, \tilde{x} \in M_2$, $x = y' z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}}$ e $\tilde{x} = y'' z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}}$, com $y' = y_{a_1} y_{a_2} \ldots y_{a_k}$ e $y'' = y_{a'_1} y_{a'_2} \ldots y_{a'_{k'}}$. Temos dois casos a considerar. Primeiro, se $z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}} < z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}}$, então segue imediatamente que $xy < \tilde{x}y$. Segundo, quando $z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}} = z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}}$, então como $x < \tilde{x}$, temos que $y' < y''$. Assim, temos duas possibilidades, ou

$$xy = y' y z_{c_1} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \ldots z_{c_m} z_{d_m},$$

quando o número de z_j's na expressão de x é par, ou quando o número de z_j's é ímpar, temos que

$$xy = y' z_{c_1} y z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \ldots z_{c_m}.$$

Se o número de z_j's é par, temos que $xy = y' y z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} z_{d_m}$ e $\tilde{x}y = y'' y z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} z_{d_m}$. Usando o Lema 2.18 obtemos $y_{a_1} \ldots y_{a_k} y < y_{a'_1} \ldots y_{a'_{k'}} y$. Portanto, $xy < \tilde{x}y$. Se o número de z_j's é ímpar, temos $xy = y' z_{c_1} y z_{d_1} \ldots z_{c_m} z_{d_m}$ e $\tilde{x}y = y'' z_{c_1} y z_{d_1} \ldots z_{c_m} z_{d_m}$. Como $y' < y''$, o resultado segue.

Se $x, \tilde{x} \in M_3$ a prova é análoga.

Suponha que $x \in M_2$, e $\tilde{x} \in M_3$. Então não temos nada para mostrar, pois a ordem depende apenas do fato de que $z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}}$ é menor ou maior que $z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}}$. O mesmo acontece quando $x \in M_3$ e $\tilde{x} \in M_2$. Quando $x \in M_1$ e $\tilde{x} \in M_2 \cup M_3$, não existe nada a ser demonstrado. Assim, concluímos que $xy < \tilde{x}y$.

Vamos mostrar agora que $\delta_{xz'} x z' < \delta_{\tilde{x}z'} \tilde{x} z'$. Se $x, \tilde{x} \in M_1$ é claro que $\delta_{xz'} x z' < \delta_{\tilde{x}z'} \tilde{x} z'$. É suficiente mostrar o caso onde $x = z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}}$ e $\tilde{x} = z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}}$, pois a multiplicação por z' não interfere nos y_j's. Como $x < \tilde{x}$, então $\xi(x) < \xi(\tilde{x})$. Portanto $\{(r_j, s_j)\} < \{(r'_j, s'_j)\}$, onde $r_j = \sum_{c_i; c_i = j} 1$, $s_j = \sum_{d_i; d_i = j} 1$, $r'_j = \sum_{c'_i; c'_i = j} 1$, e $s'_j = \sum_{d'_i; d'_i = j} 1$. Temos que verificar os seguintes casos:

i) $\partial(\{r_j\}) + \partial(\{s_j\}) < \partial(\{r'_j\}) + \partial(\{s'_j\})$;

ii) $\partial(\{r_j\}) + \partial(\{s_j\}) = \partial(\{r'_j\}) + \partial(\{s'_j\})$ e $\{s_j\} < \{s'_j\}$ ou $\{s_j\} = \{s'_j\}$ e $\{r_j\} < \{r'_j\}$.

O item i) é claro. No item ii), temos os seguintes casos, quando $x = z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} z_{d_m}$ e $\tilde{x} = z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_m} z_{d'_m}$ ou quando $x = z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{d_{m-1}} z_{c_m}$ e $\tilde{x} = z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{d'_{m-1}} z_{c'_m}$. Faremos apenas o primeiro caso, pois o segundo é semelhante. Inicialmente, provaremos para $z' = z_{t_1}$ e por indução concluiremos o caso geral. Temos que $xz' = z_{c_1} z_{d_1} \ldots z_{c_m} z_{d_m} z_{t_1}$ e $\tilde{x}z' = z_{c'_1} z_{d'_1} \ldots z_{c'_{m'}} z_{d'_m} z_{t_1}$. Como $x < \tilde{x}$, então $\xi(x) < \xi(\tilde{x})$. Portanto ou $\{s_j\} < \{s'_j\}$ ou $\{s_j\} = \{s'_j\}$ e $\{r_j\} < \{r'_j\}$, onde $r_j = \sum_{c_i; c_i = j} 1$, $s_j = \sum_{d_i; d_i = j} 1$, $r'_j = \sum_{c'_i; c'_i = j} 1$, $s'_j = \sum_{d'_i; d'_i = j} 1$. Assim, $\xi(\delta_{xz'} xz') = \{(u_j, v_j)\}$, onde $u_j = r_j$, se $j \neq t_1$ e $u_{t_1} = r_{t_1} + 1$ e para todo j $v_j = s_j$. Também temos que $\xi(\delta_{\tilde{x}z'} \tilde{x}z') = \{(u'_j, v'_j)\}$, onde $u'_j = r'_j$, se $j \neq t_1$ e $u'_{t_1} = r'_{t_1} + 1$ e $v'_j = s'_j$, para todo j. Como $x \leq \tilde{x}$, temos $\{s_j\} < \{s'_j\}$ e portanto ou $\{v_j\} < \{v'_j\}$ ou $\{s_j\} = \{s'_j\}$ e $\{r_j\} < \{r'_j\}$. Assim, $\{v_j\} = \{v'_j\}$ e $\{u_j\} < \{u'_j\}$. Recursivamente aplicando este resultado, obtemos $\delta_{xz'} xz' < \delta_{\tilde{x}z'} \tilde{x}z'$. Para mostrar que $\delta_{xz''} xz'' < \delta_{\tilde{x}z''} \tilde{x}z''$, usamos os mesmos argumentos que foram feitos para y e para z'. $\square$

Agora, provaremos que os endomorfismos em Φ, Φ_1, Φ_2 e Λ, preservam a ordem linear $\leq$ em M.

Lema 2.23. *Sejam $\varphi \in \Phi$, $\varphi_i \in \Phi_i$, $i = 1, 2$ e $\lambda \in \Lambda$. Se $x < \tilde{x}$, então temos*

i) $\varphi_i(x) < \varphi_i(\tilde{x}), i = 1, 2;$

ii) $\varphi(x) < \varphi(\tilde{x});$

iii) $\lambda(x) < \lambda(\tilde{x}).$

Demonstração. Note que o item ii) é uma consequência do item i), pois $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Vamos provar o item i). Inicialmente, suponha que $x, \tilde{x} \in M_1$, então $x = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots y_n^{r_n}$, $\tilde{x} = y_1^{s_1} y_2^{s_2} \ldots y_n^{s_n}$, com $r_n \neq 0$ ou $s_n \neq 0$. Assim, temos

$$\xi(\varphi_1(x)) = \xi(y_{\varphi(1)}^{r_1} y_{\varphi(2)}^{r_2} \ldots y_{\varphi(n)}^{r_n}) = \{r'_i\},$$

onde $r'_i = r_j$, se $i = \varphi(j)$ ou $r'_i = 0$, se $i \notin \varphi(\mathbb{N})$. Também temos que

$$\xi(\varphi_1(\tilde{x})) = \xi(y_{\varphi(1)}^{s_1} y_{\varphi(2)}^{s_2} \ldots y_{\varphi(n)}^{s_n}) = \{s'_i\},$$

onde $s'_i = s_j$, se $i = \varphi(j)$ ou $s'_i = 0$, se $i \notin \varphi(\mathbb{N})$. Agora, como $x < \tilde{x}$, existe t_0 tal que $r_{t_0} < s_{t_0}$ e $r_t = s_t$, para todo $t > t_0$. Assim, temos que $r'_{\varphi(t_0)} = r_{t_0} < s_{t_0} = s'_{\varphi(t_0)}$ e

$r'_{\varphi(t)} = r_t < s_t = s'_{\varphi(t)}$, para todo $t > t_0$. Além disso, $r'_{t'} = r_{t'} = 0 = s_{t'} = s'_{t'}$, se $t' \notin \varphi(\mathbb{N})$. Portanto, $r'_{\varphi(t_0)} < s'_{\varphi(t_0)}$ e $r'_t = s'_t$, para todo $t > \varphi(t_0)$. Assim, $\varphi_1(x) < \varphi_1(\tilde{x})$. Como os geradores $z_1, z_2, \ldots$ são fixados por φ_1, o resultado segue da sentença acima.

Agora, vamos mostrar que $\varphi_2(x) < \varphi_2(\tilde{x})$. Como φ_2 fixa os geradores $y_1, y_2, \ldots$, podemos considerar apenas o caso em que

$$x = z_{c_1} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \ldots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}}$$

e

$$\tilde{x} = z_{c'_1} z_{d'_1} z_{c'_2} z_{d'_2} \ldots z_{c'_m} \widehat{z_{d'_{m'}}}.$$

Notemos que $\xi(x) = \{(r_i, s_i)\}$ e $\xi(\tilde{x}) = \{(r'_i, s'_i)\}$, onde $r_j = \sum_{c_i; c_i = j} 1$, $s_j = \sum_{d_i; d_i = j} 1$, $r'_j = \sum_{c'_i; c'_i = j} 1$, $s'_j = \sum_{d'_i; d'_i = j} 1$. Temos que $\xi(\varphi_2(x)) = \{(u_i, v_i)\}$, e $\xi(\varphi_2(\tilde{x})) = \{(u'_i, v'_i)\}$, onde $(u_i, v_i) = (r_j, s_j)$ e $(u'_i, v'_i) = (r'_j, s'_j)$, se $i = \varphi_2(j)$ e $(u_i, v_i) = 0$ e $(u'_i, v'_i) = 0$, se $i \notin \varphi_2(\mathbb{N}_0)$. O caso em que $\partial(\{r_i\}) + \partial(\{s_i\}) < \partial(\{r'_i\}) + \partial(\{s'_i\})$ é trivial. Portanto, consideraremos apenas o caso em que $\partial(\{r_i\}) + \partial(\{s_i\}) = \partial(\{r'_i\}) + \partial(\{s'_i\})$. Como $x < \tilde{x}$, temos que ou $\{s_i\} < \{s'_i\}$ ou $\{s_i\} = \{s'_i\}$ e $\{r_i\} < \{r'_i\}$. Consequentemente, temos que ou $\{v_i\} < \{v'_i\}$ ou $\{v_i\} = \{v'_i\}$ e $\{u_i\} < \{u'_i\}$. Portanto $\varphi_2(x) = \varphi_2(\tilde{x})$.

Agora, para demonstrar o item iii), é conveniente notar que os endomorfismos θ_{kl} fixam os geradores $z_1, z_2, \ldots$. Logo, é suficiente verificar que $\theta_{kl}(x) < \theta_{kl}(\tilde{x})$, onde y_k não está presente na expressão de x e $\tilde{x}$. Assim, sejam

$$x = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots y_{k-1}^{r_{k-1}} y_{k+1}^{r_{k+1}} \ldots y_l^{r_l} \ldots y_n^{r_n},$$

e

$$\tilde{x} = y_1^{s_1} y_2^{s_2} \ldots y_{k-1}^{s_{k-1}} y_{k+1}^{s_{k+1}} \ldots y_l^{s_l} \ldots y_n^{s_n},$$

onde ou $r_n \neq 0$ ou $s_n \neq 0$. Logo, temos que

$$\begin{array}{rcl} \xi(\theta_{kl}(x)) & = & \xi(y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots y_{k-1}^{r_{k-1}} y_{k+1}^{r_{k+1}} \ldots (y_k y_l)^{r_l} \ldots y_n^{r_n}) \\ & = & \xi(y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots y_{k-1}^{r_{k-1}} y_k^{r_l} y_{k+1}^{r_{k+1}} \ldots y_l^{r_l} \ldots y_n^{r_n}) \\ & = & \{r'_i\}, \end{array}$$

onde $r'_i = r_i$, se $i \neq k$ e $r'_k = r_l$. Similarmente, temos

$$\xi(\theta_{kl}(\tilde{x})) = \{s'_i\},$$

com $s'_i = s_i$, se $i \neq k$ e $s'_k = s_l$. Agora, como $x < \tilde{x}$, existe $t_0 \leq n$ tal que $r_{t_0} < s_{t_0}$ e $r_t = s_t$, para todo $t > t_0$. Portanto, claramente $\theta_{kl}(x) < \theta_{kl}(\tilde{x})$. Assim, temos que

$\lambda(x) < \lambda(\tilde{x})$, onde $\lambda = \theta_{k_1l_1}\theta_{k_2l_2}\cdots\theta_{k_ql_q}\cdot\varphi_1$, com $q \geq 0$, $\theta_{k_il_i} \in \Theta$, $\varphi_1 \in \Phi_1$, $k_i \notin \varphi(\mathbb{N})$ e $k_i \neq k_j$, se $i \neq j$. $\square$

Denotemos por Γ a família de todos os endomorfismos γ_y de $K\langle X\rangle/I$, com $y \in M_1$, dada por

$$\gamma_y(z_i) = yz_i + z_iy, \qquad \gamma_y(y_i) = y_i$$

para todo $z_i \in Z$ e para todo $y_i \in Y$.

Lema 2.24. *Sejam $\gamma_y \in \Gamma$ e $x = y'z_{i_1}y''z_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_s} \in M$ onde $y' = y_{a_1}y_{a_2}\ldots y_{a_k}$, e $y'' = y_{b_1}y_{b_2}\ldots y_{b_l}$, com $k, l \geq 0$. Então*

$$\gamma_y(x) = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}y'y^{s-t}z_{i_1}y''y^tz_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_s}.$$

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre s. O caso $s = 1$ é trivial, pois

$$\begin{aligned}\gamma_y(y'z_{i_1}y'') &= y'(z_{i_1}y + yz_{i_1})y'' \\ &= y'z_{i_1}yy'' + y'yz_{i_1}y'' \\ &= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}y'y^{s-t}z_{i_1}y''y^t.\end{aligned}$$

Agora, pela hipótese de indução, temos que o lema é verdadeiro para $s-1$. Em outras palavras,

$$\gamma_y(y'z_{i_1}y''z_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}) = \sum_{t=0}^{s-1}\binom{s-1}{t}y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^tz_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\gamma_y(x) &= y'(z_{i_1}y + yz_{i_1})y''(z_{i_2}y + yz_{i_2})\ldots(z_{i_{s-1}}y + yz_{i_{s-1}})(z_sy + yz_s) \\ &= \left(\sum_{t=0}^{s-1}\binom{s-1}{t}y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^tz_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}\right)(z_{i_s}y + yz_{i_s}) \\ &= \sum_{t=0}^{s-1}\binom{s-1}{t}y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^tz_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}z_{i_s}y + \\ &\quad + \sum_{t=0}^{s-1}\binom{s-1}{t}y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^tz_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}yz_{i_s},\end{aligned}$$

Notemos que se s é par, então temos

$$y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^tz_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}z_{i_s}y = y'y^{s-t}z_{i_1}y''y^tz_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}z_{i_s}$$

e

$$y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^tz_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}yz_{i_s} = y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^{t+1}z_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}z_{i_s}.$$

Agora, se s é ímpar, então

$$y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^t z_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}z_{i_s}y = y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^{t+1}z_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}z_{i_s}$$

e

$$y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^t z_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}yz_{i_s} = y'y^{s-t}z_{i_1}y''y^t z_{i_2}z_{i_3}\ldots z_{i_{s-1}}z_{i_s}.$$

Assim, em ambos os casos temos o mesmo resultado. Portanto

$$\begin{aligned}\gamma_y(x) &= \sum_{t=0}^{s-1}\binom{s-1}{t}y'y^{s-t}z_{i_1}y''y^t z_{i_2}\ldots z_{i_s}+\\ &\quad+\sum_{t=0}^{s-1}\binom{s-1}{t}y'y^{(s-1)-t}z_{i_1}y''y^{t+1}z_{i_2}\ldots z_{i_s}.\end{aligned}$$

Agora, fazendo $t'=t$ no primeiro somatório e $t'=t+1$ no segundo somatório, obtemos

$$\begin{aligned}\gamma_y(x) &= \sum_{t'=0}^{s-1}\binom{s-1}{t'}y'y^{s-t'}z_{i_1}y''y^{t'}z_{i_2}\ldots z_{i_s}+\\ &\quad+\sum_{t'=1}^{s}\binom{s-1}{t'-1}y'y^{s-t'}z_{i_1}y''y^{t'}z_{i_2}\ldots z_{i_s}\\ &= \sum_{t'=1}^{s-1}\left(\binom{s-1}{t'}+\binom{s-1}{t'-1}\right)y'y^{s-t'}z_{i_1}y''y^{t'}z_{i_2}\ldots z_{i_s}+\\ &\quad+\binom{s-1}{0}y'y^{s}z_{i_1}y''z_{i_2}\ldots z_{i_s}+\binom{s-1}{s-1}y'z_{i_1}y''y^{s}z_{i_2}\ldots z_{i_s}.\end{aligned}$$

Como $\binom{s-1}{t'}+\binom{s-1}{t'-1}=\binom{s}{t'}$, segue que $\gamma_y(x)=\displaystyle\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}y'y^{s-t}z_{i_1}y''y^t z_{i_2}\ldots z_{i_s}$. □

Seja f uma combinação K-linear (formal) de elementos de M,

$$f=\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2+\ldots+\alpha_l m_l,$$

onde $\alpha_i\in K$ e $m_i\in M$ para todo i. Suponha que $\alpha_1\neq 0$ e $m_1>m_i$ para todo $i>1$. Então dizemos que m_1 é o *monômio líder*, α_1 é o *coeficiente líder* e $\alpha_1 m_1$ é o *termo líder* de f. Escrevemos $m_1=\mathrm{lm}(f)$, $\alpha_1=\mathrm{lc}(f)$ e $\alpha_1 m_1=\mathrm{lt}(f)$.

Se denotamos $x_t=y'y^{s-t}z_{i_1}y''y^t z_{i_2}\ldots z_{i_s}$, então $x_t<x_s$, para todo $t<s$, pois, pelo Lema 2.19, temos que $y''y^t<y''y^s=(y''y^t)y^{s-t}$. Assim, x_s é o monômio líder de $\gamma_y(x)$, i.e., $x_s=\mathrm{lm}(\gamma_y(x))$.

Lema 2.25. *Sejam $x, \tilde{x} \in M$ e $\gamma_y \in \Gamma$. Se $x < \tilde{x}$, então $x_1 < \tilde{x}_1$, onde x_1 e $\tilde{x}_1$ são os monômios líderes de $\gamma_y(x)$ e $\gamma_y(\tilde{x})$, respectivamente.*

Demonstração. Se $x \in M_1$, então $\gamma_y(x) = x$ e portanto não temos nada a demonstrar. Agora, vamos analisar o caso em que $x = y' z_{i_1} y'' z_{i_2} \dots z_{i_s} \in M$, e $\tilde{x} = \tilde{y}' z_{j_1} \tilde{y}'' z_{j_2} \dots z_{j_{\tilde{s}}} \in M$, onde $y', y'', \tilde{y}', \tilde{y}'' \in M_1$. Note que se $x \in M_2$ o termo y'' não aparece, o mesmo ocorre com $\tilde{x} \in M_2$. Temos

$$\mathrm{lm}(\gamma_y(x)) = x_1 = y' z_{i_1} y'' y^s z_{i_2} \dots z_{i_s}$$

e

$$\mathrm{lm}\gamma_y(\tilde{x}) = \tilde{x}_1 = \tilde{y}' z_{j_1} \tilde{y}'' y^{\tilde{s}} z_{j_2} \dots z_{j_{\tilde{s}}}.$$

Como $x < \tilde{x}$, temos três possibilidades a considerar. Primeiro, se $z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s} < z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_{\tilde{s}}}$; segue imediatamente que $x_1 < \tilde{x}_1$. Segundo, se $z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s} = z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_{\tilde{s}}}$ e $y'' < \tilde{y}''$, então $s = \tilde{s}$. Pelo Lema 2.18 obtemos que $y'' y^s < \tilde{y}'' y^s$. Portanto, $x_1 < \tilde{x}_1$. Se o termo y'' não aparece, pelo Lema 2.19 segue que $y^s < \tilde{y}'' y^s$. Finalmente, temos o caso em que $z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s} = z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_{\tilde{s}}}$, $y'' = \tilde{y}''$, e $y' < \tilde{y}'$. Neste caso é claro que $x_1 < \tilde{x}_1$. □

Lema 2.26. *Sejam $x, \tilde{x} \in M$. Se $x \leq' \tilde{x}$, então temos*

i) se $x, \tilde{x} \in M_1$, então existem $\varphi \in \Phi$ e $y \in M_1$ tais que $y\varphi(x) = \varphi(\tilde{x})$;

ii) se $x, \tilde{x} \in M_2$, então existem $\varphi \in \Phi$, $y \in M_1$ e $z = z_{i_1} \dots z_{i_k}$, $k \geq 0$, tais que $\delta_{y\varphi(x)z} y\varphi(x)z = \tilde{x}$;

iii) se $x, \tilde{x} \in M_3^1$, então existem $\varphi \in \Phi$, $y, y' \in M_1$, e $z = z_{i_1} \dots z_{i_k}$, $k \geq 0$, tais que $\delta_{y\varphi(x)y'z} y\varphi(x)y'z = \tilde{x}$;

iv) se $x, \tilde{x} \in M_3^0$ com

$$x = y_{a_1} y_{a_2} \dots y_{a_k} z_{c_1} y_{b_1} y_{b_2} \dots y_{b_l} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \dots z_{c_m} z_{d_m},$$

e

$$\tilde{x} = y_{a'_1} y_{a'_2} \dots y_{a'_{k'}} z_{c'_1} y_{b'_1} y_{b'_2} \dots y_{b'_{l'}} z_{d'_1} z_{c'_2} z_{d'_2} \dots z_{c'_{m'}} z_{d'_{m'}},$$

onde $m < m'$, então existem $\varphi \in \Phi$, $y, y' \in M_1$ e $z = z_{i_1} y' z_{i_2} \dots z_{i_k}$, $k > 1$, tais que $\delta_{y\varphi(x)z} y\varphi(x)z = \tilde{x}$;

v) se $x, \tilde{x} \in M_3^0$ com

$$x = y_{a_1} y_{a_2} \dots y_{a_k} z_{c_1} y_{b_1} y_{b_2} \dots y_{b_l} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \dots z_{c_m} z_{d_m},$$

e

$$\tilde{x} = y_{a'_1} y_{a'_2} \dots y_{a'_{k'}} z_{c'_1} y_{b'_1} y_{b'_2} \dots y_{b'_{l'}} z_{d'_1} z_{c'_2} z_{d'_2} \dots z_{c'_m} z_{d'_m},$$

então existem $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_2 \in \Phi_2$, $\gamma_{y'} \in \Gamma$ e $y \in M_1$ tais que $\mathrm{lm}(y\gamma_{y'}(\lambda(\varphi_2(x)))) = \tilde{x}$.

Demonstração. Item i): Sejam $x = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \dots y_n^{r_n}$, $\tilde{x} = y_1^{s_1} y_2^{s_2} \dots y_n^{s_n}$, com $r_n \neq 0$ ou $s_n \neq 0$. Como $x \leq' \tilde{x}$, temos que existe $\varphi \in \Phi$ tal que $r_j < s_{\varphi(j)}$. Sabemos que $\xi(\tilde{x}) = \{s_i\}$ e $\xi(\varphi(x)) = \{r'_i\}$, onde $r'_i = r_j$, se $i = \varphi(j)$, e $r'_i = 0$, se $i \notin \varphi(\mathbb{N})$. Assim, podemos escrever $\varphi(x) = y_1^{r'_1} y_2^{r'_2} \dots y_{\varphi(n)}^{r'_{\varphi(n)}}$, onde $r'_i = r_j$, se $i = \varphi(j)$, e $r'_i = 0$ se $i \notin \varphi(\mathbb{N})$. Agora, tomemos $l_j = s_j - r'_j$, $j = 1, 2, \dots$ e seja $y = y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_{\varphi(n)}^{l_{\varphi(n)}}$. Assim

$$\begin{aligned}
\xi(y\varphi(x)) &= \xi((y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_{\varphi(n)}^{l_{\varphi(n)}})(\varphi(y_1^{r_1} y_2^{r_2} \dots y_n^{r_n}))) \\
&= \xi((y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_{\varphi(n)}^{l_{\varphi(n)}})(y_1^{r'_1} y_2^{r'_2} \dots y_{\varphi(n)}^{r'_{\varphi(n)}})) \\
&= \xi(y_1^{r'_1 + l_1} y_2^{r'_2 + l_2} \dots y_{\varphi(n)}^{r_{\varphi(n)} + l_{\varphi(n)}}) \\
&= \{r'_i + l_i\} \\
&= \{r'_i + (s_i - r'_i)\} \\
&= \{s_i\} \\
&= \xi(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $y\varphi(x) = \tilde{x}$.

Item ii): Vamos supor que

$$x = y_{a_1} y_{a_2} \dots y_{a_k} z_{c_1} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \dots z_{c_m} \widehat{z_{d_m}}$$

e que também que

$$\tilde{x} = y_{a'_1} y_{a'_2} \dots y_{a'_{k'}} z_{c'_1} z_{d'_1} z_{c'_2} z_{d'_2} \dots z_{c'_{m'}} \widehat{z_{d'_{m'}}},$$

com $x \leq' \tilde{x}$. Assim, temos que $\xi(x) = \{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)})\}$, onde $u_i^{(1)} = \sum_{a_j; a_j = i} 1$, $u_i^{(2)} = \sum_{c_j; c_j = i} 1$ e $u_i^{(3)} = \sum_{d_j; d_j = i} 1$. Também temos que $\xi(\tilde{x}) = \{(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)})\}$, onde $v_i^{(1)} = \sum_{a'_j; a'_j = i} 1$, $v_i^{(2)} = \sum_{c'_j; c'_j = i} 1$ e $v_i^{(3)} = \sum_{d'_j; d'_j = i} 1$. Suponha que $x \leq' \tilde{x}$. Assim, existe $\varphi \in \Phi$ tal que $u_j^{(1)} < v_{\varphi(j)}^{(1)}$, $u_j^{(2)} < v_{\varphi(j)}^{(2)}$, e $u_j^{(3)} < v_{\varphi(j)}^{(3)}$. Seja $l_j^{(i)} = v_j^{(i)} - u_{\varphi(j)}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Definamos y tal que $\xi(y) = \{l_i^{(1)}\} = \{v_i^{(1)} - u_{\varphi(i)}^{(1)}\}$. Denotemos por $\bar{y}$ o elemento $y_{a_1} y_{a_2} \dots y_{a_k}$ e por $\tilde{y}$ o elemento $y_{a'_1} y_{a'_2} \dots y_{a'_{k'}}$. Assim, como $\bar{y} \leq' \tilde{y}$, temos pelo Item i) que $y\varphi(\bar{y}) = \tilde{y}$. Se $x = z_{c_1} z_{d_1} \dots z_{c_m} z_{d_m}$, definimos $z = z_{e_1} z_{f_1} z_{e_2} z_{f_2} \dots z_{e_{m''}} \widehat{z_{f_{m''}}}$, onde $\sum_{e_j; e_j = i} 1 = l_i^{(2)}$ e

$\sum_{f_j;f_j=i} 1 = l_i^{(3)}$. Agora, como $x = z_{c_1}z_{d_1}\dots z_{c_m}$, tomemos $z = z_{f_1}z_{e_1}z_{f_2}z_{e_2}\dots z_{f_{m''}}\widehat{z_{e_{m''}}}$, onde $\sum_{e_j;e_j=i} 1 = l_i^{(2)}$ e $\sum_{f_j;f_j=i} 1 = l_i^{(3)}$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\xi(\delta\varphi(x)z) &= \xi(\delta\varphi(z_{c_1}z_{d_1}\dots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}})(z_{e_1}z_{f_1}\dots z_{e_{m''}}\widehat{z_{f_{m''}}})) \\
&= \xi(z_{\varphi(c_1)}z_{\varphi(d_1)}\dots z_{\varphi(c_m)}\widehat{z_{\varphi(d_m)}}z_{e_1}z_{f_1}\dots z_{e_{m''}}\widehat{z_{f_{m''}}}) \\
&= \{(v_i'^{(2)}, v_i'^{(3)})\},
\end{aligned}$$

onde $\delta = \delta_{\varphi(x)z}$, $v_i'^{(2)} = \sum_{e_j;e_j=i} 1 + \sum_{\varphi(c_j);\varphi(c_j)=\varphi(i)} 1 = l_i^{(2)} + u_{\varphi(i)}^{(2)} = v_i^{(2)}$ e $v_i'^{(3)} = \sum_{f_j;f_j=i} 1 + \sum_{\varphi(d_j);\varphi(d_j)=\varphi(i)} 1 = l_i^{(3)} + u_{\varphi(i)}^{(3)} = v_i^{(3)}$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\delta y\varphi(x)z &= \delta y\varphi(\bar{y}z_{\varphi(d_1)}\dots z_{\varphi(c_m)}\widehat{z_{\varphi(d_m)}})(z_{e_1}z_{f_1}\dots z_{e_{m''}}\widehat{z_{f_{m''}}}) \\
&= \delta\varphi(\bar{y})z_{\varphi(c_1)}z_{\varphi(d_1)}\dots z_{\varphi(c_m)}\widehat{z_{\varphi(d_m)}}(z_{e_1}z_{f_1}\dots z_{e_{m''}}\widehat{z_{f_{m''}}}) \\
&= \delta\tilde{y}z_{\varphi(c_1)}z_{\varphi(d_1)}\dots z_{\varphi(c_m)}\widehat{z_{\varphi(d_m)}}z_{e_1}z_{f_1}\dots z_{e_{m''}}\widehat{z_{f_{m''}}} \\
&= \tilde{y}z_{c_1'}z_{d_1'}z_{c_2'}z_{d_2'}\dots z_{c_{m'}'}\widehat{z_{d_{m'}'}} \\
&= \tilde{x}.
\end{aligned}$$

Por isso $\delta y\varphi(x)z = \tilde{x}$, onde $\delta = \delta_{y\varphi(x)z}$.

Itens iii), iv) e v): Sejam $x, \tilde{x} \in M_3$, onde

$$x = y_{a_1}\dots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}\dots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\dots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}}$$

e

$$\tilde{x} = y_{a_1'}\dots y_{a_{k'}'}z_{c_1'}y_{b_1'}\dots y_{b_{l'}'}z_{d_1'}z_{c_2'}z_{d_2'}\dots z_{c_{m'}'}\widehat{z_{d_{m'}'}}.$$

Assim, $\xi(x) = \{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}, u_i^{(4)})\}$, onde $u_i^{(1)} = \sum_{a_j;a_j=i} 1$, $u_i^{(2)} = \sum_{b_j;b_j=i} 1$, $u_i^{(3)} = \sum_{c_j;c_j=i} 1$ e $u_i^{(4)} = \sum_{d_j;d_j=i} 1$. Também temos que $\xi(\tilde{x}) = \{(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)}, v_i^{(4)})\}$, onde $v_i^{(1)} = \sum_{a_j';a_j'=i} 1$, $v_i^{(2)} = \sum_{b_j';b_j'=i} 1$, $v_i^{(3)} = \sum_{c_j';c_j'=i} 1$ e $v_i^{(4)} = \sum_{d_j';d_j'=i} 1$.

Vamos considerar primeiramente o Item iii), onde $\partial(\{u_i^{(3)}\}) - \partial(\{u_i^{(4)}\}) = 1$ e $\partial(\{v_i^{(3)}\}) - \partial(\{v_i^{(4)}\}) = 1$. Como $x \leq' \tilde{x}$, existe $\varphi \in \Phi$ tal que $u_j^{(1)} < v_{\varphi(j)}^{(1)}$, $u_j^{(2)} < v_{\varphi(j)}^{(2)}$, $u_j^{(3)} < v_{\varphi(j)}^{(3)}$ e $u_j^{(4)} < v_{\varphi(j)}^{(4)}$. Seja $l_j^{(i)} = v_j^{(i)} - u_{\varphi(j)}^{(i)}$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Denotemos $y_{a_1}\dots y_{a_k}$ por $\bar{y}$, $y_{b_1}\dots y_{b_l}$ por $\bar{y}'$, $y_{a_1'}\dots y_{a_{k'}'}$ por $\tilde{y}$, e $y_{b_1'}\dots y_{b_{l'}'}$ por $\tilde{y}'$. Definimos y tal que $\xi(y) = \{l_i^{(1)}\} = \{v_i^{(1)} - u_{\varphi(i)}^{(1)}\}$. Também definimos y' de tal forma que $\xi(y') = \{l_i^{(2)}\} = \{v_i^{(2)} - u_{\varphi(i)}^{(2)}\}$. Finalmente, façamos $z = z_{f_1}z_{e_1}z_{f_2}z_{e_2}\dots z_{f_{m''}}z_{e_{m''}}$, onde $\sum_{e_j;e_j=i} 1 = l_i^{(3)}$ e $\sum_{f_j;f_j=i} 1 = l_i^{(4)}$. Pelo Item ii), segue que

$$\delta\varphi(z_{c_1}z_{d_1}\dots z_{d_{m-1}}z_{c_m})z = z_{c_1'}z_{d_1'}\dots z_{d_{m'-1}'}z_{c_{m'}'},$$

onde $\delta = \delta_{\varphi(z_{c_1}z_{d_1}\dots z_{d_{m-1}}z_{c_m})z} = \delta_{y\varphi(x)y'z}$. Como $\bar{y} \leq' \tilde{y}$ e $\bar{y}' \leq' \tilde{y}'$, temos pelo Item i) que $y\varphi(\bar{y}) = \tilde{y}$ e $y'\varphi(\bar{y}') = \tilde{y}'$. Notemos que $z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\dots z_{d_{m-1}}z_{c_m}$ é um elemento par, portanto comuta com y'. Logo,

$$\begin{aligned}
\delta y\varphi(x)y'z &= \delta y\varphi(\bar{y}z_{c_1}\bar{y}'z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\dots z_{d_{m-1}}z_{c_m})y'z \\
&= \delta y\varphi(\bar{y})z_{\varphi(c_1)}\varphi(\bar{y}')z_{\varphi(d_1)}z_{\varphi(c_2)}z_{\varphi(d_2)}\dots z_{\varphi(d_{m-1})}z_{\varphi(c_m)}y'z \\
&= \delta\tilde{y}z_{\varphi(c_1)}\varphi(\bar{y}')y'z_{\varphi(d_1)}z_{\varphi(c_2)}z_{\varphi(d_2)}\dots z_{\varphi(d_{m-1})}z_{\varphi(c_m)}z \\
&= \delta\tilde{y}z_{\varphi(c_1)}\tilde{y}'z_{\varphi(d_1)}z_{\varphi(c_2)}z_{\varphi(d_2)}\dots z_{\varphi(d_{m-1})}z_{\varphi(c_m)}z \\
&= \tilde{y}z_{c'_1}\tilde{y}'z_{d'_1}z_{c'_2}z_{d'_2}\dots z_{d'_{m'-1}}z_{c'_{m'}} \\
&= \tilde{x},
\end{aligned}$$

onde $\delta = \delta_{\varphi(z_{c_1}z_{d_1}\dots z_{d_{m-1}}z_{c_m})z} = \delta_{y\varphi(x)y'z}$.

Agora, consideremos o Item iv), no qual $\partial(\{u_i^{(3)}\}) - \partial(\{u_i^{(4)}\}) = 0$ e $\partial(\{v_i^{(3)}\}) - \partial(\{v_i^{(4)}\}) = 0$, com $\partial(\{u_i^{(3)}\}) < \partial(\{v_i^{(3)}\})$. Como $x \leq' \tilde{x}$, existe $\varphi \in \Phi$ tal que $u_j^{(1)} < v_{\varphi(j)}^{(1)}$, $u_j^{(2)} < v_{\varphi(j)}^{(2)}$, $u_j^{(3)} < v_{\varphi(j)}^{(3)}$ e $u_j^{(4)} < v_{\varphi(j)}^{(4)}$. Seja $l_j^{(i)} = v_j^{(i)} - u_{\varphi(j)}^{(i)}$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Denotemos $y_{a_1}\dots y_{a_k}$ por $\bar{y}$, $y_{b_1}\dots y_{b_l}$ por $\bar{y}'$, $y_{a'_1}\dots y_{a'_{k'}}$ por $\tilde{y}$, e $y_{b'_1}\dots y_{b'_{l'}}$ por $\tilde{y}'$. Definamos y tal que $\xi(y) = \{l_i^{(1)}\} = \{v_i^{(1)} - u_{\varphi(i)}^{(1)}\}$. Também definamos y' tal que $\xi(y') = \{l_i^{(2)}\} = \{v_i^{(2)} - u_{\varphi(i)}^{(2)}\}$. Finalmente, façamos $z = z_{e_1}y'z_{f_1}z_{e_2}z_{f_2}\dots z_{e_{m''}}z_{f_{m''}}$, onde $\sum_{e_j;e_j=i} 1 = l_i^{(3)}$ e $\sum_{f_j;f_j=i} 1 = l_i^{(4)}$. Assim, como foi feito previamente, temos

$$\delta\varphi(z_{c_1}z_{d_1}\dots z_{c_m}z_{d_m})z = z_{c'_1}z_{d'_1}\dots z_{c'_{m'}}z_{d_{m'}},$$

onde $\delta = \delta_{\varphi(z_{c_1}z_{d_1}\dots z_{c_m}z_{d_m})z} = \delta_{y\varphi(x)z}$. Como $\bar{y} \leq' \tilde{y}$ e $\bar{y}' \leq' \tilde{y}'$, temos pelo Item i) que $y\varphi(\bar{y}) = \tilde{y}$ e $y'\varphi(\bar{y}') = \tilde{y}'$. Notemos que $z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\dots z_{c_m}z_{d_m}z_{e_1}$ é par e portanto comuta com y'. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta y\varphi(x)z &= \delta y\varphi(\bar{y}z_{c_1}\bar{y}'z_{d_1}\dots z_{c_m}z_{d_m})z \\
&= \delta y\varphi(\bar{y}z_{c_1}\bar{y}'z_{d_1}\dots z_{c_m}z_{d_m})z \\
&= \delta y\varphi(\bar{y})z_{\varphi(c_1)}\varphi(\bar{y}')z_{\varphi(d_1)}\dots z_{\varphi(c_m)}z_{\varphi(d_m)}z_{e_1}y'z_{f_1}\dots z_{e_{m''}}z_{f_{m''}} \\
&= \delta y\varphi(\bar{y})z_{\varphi(c_1)}\varphi(\bar{y}')y'z_{\varphi(d_1)}\dots z_{\varphi(c_m)}z_{\varphi(d_m)}z_{e_1}z_{f_1}\dots z_{e_{m''}}z_{f_{m''}} \\
&= \delta\tilde{y}z_{\varphi(c_1)}\tilde{y}'z_{\varphi(d_1)}\dots z_{\varphi(c_m)}z_{\varphi(d_m)}z_{e_1}z_{f_1}\dots z_{e_{m''}}z_{f_{m''}} \\
&= \tilde{y}z_{c'_1}\tilde{y}'z_{d'_1}\dots z_{c'_{m'}}z_{d'_{m'}} \\
&= \tilde{x},
\end{aligned}$$

onde $\delta = \delta_{\varphi(z_{c_1}z_{d_1}\dots z_{c_m}z_{d_m})z} = \delta_{y\varphi(x)z}$.

Agora, vamos verificar o último item, o caso em que $\partial(\{u_i^{(3)}\}) = \partial(\{u_i^{(4)}\}) = \partial(\{v_i^{(3)}\}) = \partial(\{v_i^{(4)}\}) = m$. Como $x \leq' \tilde{x}$, existem $\lambda \in \Lambda$ e $\varphi'_2 \in \Phi_2$ tais que $\{(u_i'^{(1)}, u_i'^{(2)})\} \leq'_m \{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)})\}$, onde $\lambda(\{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)})\}) = \{(u_i'^{(1)}, u_i'^{(2)})\}$, $u_j'^{(1)} = u_i^{(1)}$ e $u_j'^{(2)} = u_i^{(2)}$, com $j = \lambda(i)$ e $u_i^{(3)} < v_{\varphi'(i)}^{(3)}$ e $u_i^{(3)} < v_{\varphi'(i)}^{(3)}$. Portanto, $u_i^{(1)} \leq_m v_{\lambda(i)}^{(1)}$, e $u_i^{(2)} \leq_m v_{\lambda(i)}^{(2)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, em outras palavras, $u_i^{(1)} \leq v_{\lambda(i)}^{(1)}$, $u_i^{(1)} \equiv v_{\lambda(i)}^{(1)} \mod 2m$, e $u_i^{(2)} \leq v_{\lambda(i)}^{(2)}$, $u_i^{(2)} \equiv v_{\lambda(i)}^{(2)} \mod 2m$. Para estas relações, obtemos que $v_j^{(1)} - u_i^{(1)} = q_j^{(1)}$ e $v_j^{(2)} - u_i^{(2)} = q_j^{(2)}2m$, onde $q_j^{(1)}, q_j^{(2)} \geq 0$ e $j = \lambda(i)$. Assim, definimos y' tal que $\xi(y') = \{q_j^{(2)}\}$. Logo, temos $\xi(y'^{2m}) = \{q_j'^{(2)}\}$, onde $q_j'^{(2)} = q_j^{(2)}2m$. Se $\bar{y}'$ é tal que $\xi(\bar{y}') = \{u_i^{(2)}\}$ e $\tilde{y}'$ é tal que $\xi(\tilde{y}') = \{v_i^{(2)}\}$ então

$$\begin{aligned} \xi(\lambda(\bar{y}')y'^{2m}) &= \{u_j'^{(2)} + q_j'^{(2)}\} \\ &= \{u_j'^{(2)} + q_j^{(2)}2m\} \\ &= \{u_i^{(2)} + v_j^{(2)} - u_i^{(2)}\} \\ &= \{v_j^{(2)}\} \\ &= \xi(\tilde{y}'). \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda(\bar{y}')y'^{2m} = \tilde{y}'$. Definamos y tal que $\xi(y) = \{q_i^{(1)}\}$. Seja $\bar{y}$ tal que $\xi(\bar{y}) = \{u_i^{(1)}\}$ e seja $\tilde{y}$ tal que $\xi(\tilde{y}) = \{v_i^{(1)}\}$. Usando argumento similar aos anteriores, obtemos $\lambda(\bar{y})y = \tilde{y}$. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi_2'(\lambda(x)) &= \varphi_2'(\lambda(\bar{y}z_{c_1}\bar{y}'z_{d_1}\ldots z_{c_m}z_{d_m})) \\ &= \lambda(\bar{y})\varphi'(z_{c_1})\lambda(\bar{y}')\varphi'(z_{d_1}\ldots z_{c_m}z_{d_m}) \\ &= \lambda(\bar{y})z_{c_1'}\lambda(\bar{y}')z_{d_1'}\ldots z_{c_m'}z_{d_m'}. \end{aligned}$$

Consideraremos agora os endomorfismos $\gamma_{y'}$. Usando os lemas 2.19 e 2.24, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{lm}(y\gamma_{y'}(\varphi_2'(\lambda(x)))) &= \mathrm{lm}(y\gamma_{y'}(\lambda(\bar{y})z_{c_1'}\lambda(\bar{y}')z_{d_1'}\ldots z_{c_m'}z_{d_m'})) \\ &= \mathrm{lm}(y\lambda(\bar{y})z_{c_1'}\lambda(\bar{y}')y'^{2m}z_{d_1'}\ldots z_{c_m'}z_{d_m'}) \\ &= \mathrm{lm}(\tilde{y}z_{c_1'}\tilde{y}'z_{d_1'}\ldots z_{c_m'}z_{d_m'}) \\ &= \mathrm{lm}(\tilde{x}). \end{aligned}$$

□

Denotaremos por Ω o conjunto de todos os endomorfismos que são composições de endomorfismos de Λ, Φ_2 e de Γ.

Corolário 2.27. *Sejam $x, \tilde{x} \in M$. Se $x \leq' \tilde{x}$ então existem $\omega \in \Omega$, $y \in M_1$ e $z \in M$ tais que* $\mathrm{lm}(y\omega(x)z) = \tilde{x}$.

Como a ordem linear $\leq$ é preservada por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega$ bem como pela multiplicação à direita e à esquerda por $y \in M_1$ e por $z \in M$, respectivamente, obtemos o corolário abaixo.

Corolário 2.28. *Sejam $f, \tilde{f}$ combinações K-lineares (formais) de geradores de $K\langle X\rangle/I$, onde* $\mathrm{lm}(f) = x_1$ *e* $\mathrm{lm}(\tilde{f}) = \tilde{x}_1$ *com $x_1 \leq' \tilde{x}_1$. Então existem $\omega \in \Omega$, $y \in M_1$ e $z \in M$ tais que* $\mathrm{lm}(y\omega(f)z) = \tilde{x}_1$.

2.4 Demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2

Os Teoremas 2.1 e 2.2 são corolários imediatos da seguinte proposição.

Proposição 2.29. *Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Seja I o T_2-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + \varepsilon z_3z_2z_1$, onde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Então todo T_2-ideal de $K\langle X\rangle/I$ é finitamente gerado como um T_2-ideal.*

Demonstração. Lembre que se

$$f = \alpha_1m_1 + \alpha_2m_2 + \ldots + \alpha_lm_l \qquad (\alpha_i \in K, m_i \in M \text{ para todo } i)$$

é uma combinação K-linear (formal) de elementos de M tal que $\alpha_1 \neq 0$ e $m_1 > m_i$ para todo $i > 1$, então $m_1 = \mathrm{lm}(f)$ é o monômio líder, $\alpha_1 = \mathrm{lc}(f)$ o coeficiente líder e $\alpha_1m_1 = \mathrm{lt}(f)$ o termo líder de f.

Faremos a demonstração da Proposição 2.29 por contradição. Assim, suponha que existe um T_2-ideal J que não é finitamente gerado em $K\langle X\rangle/I$. Assim, podemos escolher um elemento g_1 não nulo de J e gerar o T_2-ideal $J_1 \subsetneqq J$, pois J não é finitamente gerado. Agora, tomemos um elemento g_2 de $J\backslash J_1$, e geremos o T_2-ideal J_2 por J_1 e g_2 e assim, como J não é finitamente gerado, temos que $J_1 \subsetneqq J_2 \subsetneqq J$. Assim, temos que existe uma cadeia estritamente ascendente

$$J_1 \subsetneqq J_2 \subsetneqq \ldots$$

de T_2-ideais em $K\langle X\rangle/I$. Seja $R_i = J_i\backslash J_{i-1}$; então $R_i \neq \emptyset$ para todo $i > 1$. Seja $\mathcal{L}_i$ o conjunto de todas as combinações K-lineares (formais) v de elementos de M tais que v visto como um elemento de $K\langle X\rangle/I$ pertence a R_i. Seja L_i o conjunto dos monômios líderes de elementos de $\mathcal{L}_i$, $L_i \subset M$. Note que $L_i \neq \emptyset$ pois $R_i \neq \emptyset$ e, portanto $\mathcal{L}_i \neq \emptyset$. Como $\leq$ é uma boa ordem em M, o conjunto L_i possui um único elemento minimal, digamos x_i, com respeito a $\leq$. Além disso, como $\leq'$ é uma boa ordem parcial em M, existe, pelo Lema 1.38, um subsequência infinita $\{x_{i_l}\}$ da sequência $\{x_i\}$ tal que

$$x_{i_1} \leq' x_{i_2} \leq' \ldots, \qquad i_1 < i_2 < \ldots.$$

Claramente, cada elemento x_{i_l} é o monômio líder de algum elemento, digamos h_l, de $\mathcal{L}_{i_l}$. Seja $\alpha_l \in K$ o coeficiente líder de h_l, $\alpha_l \neq 0$. Seja $\mathcal{I}$ o ideal de K gerado por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Como K é Noetheriano, existe um inteiro k tal que $\mathcal{I}$ é gerado por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Daí resulta que

$$\alpha_{k+1} = \sum_{l=1}^{k} \beta_l \alpha_l$$

com $\beta_l \in K$.

Note que $x_{i_l} \leq' x_{i_{k+1}}$ para $l = 1, 2, \ldots, k$. Portanto, pelo Corolário 2.28, existem um endomorfismo $\omega_l \in \Omega$, e $x'_l, x''_l \in M$ tais que

$$\mathrm{lm}(\delta_l x'_l \omega_l(h_l) x''_l) = x_{i_{k+1}}, \quad l = 1, 2, \ldots, k.$$

Portanto,

$$\mathrm{lt}(\delta_l x'_l \omega_l(h_l) x''_l) = \alpha_l x_{i_{k+1}}, \quad l = 1, 2, \ldots, k.$$

Considere $h = \sum_{l=1}^{k} \beta_l (\delta x'_l \omega_l(h_l) x''_l)$. Então h é uma combinação K-linear (formal) de elementos de M. Temos que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{lt}(h) & = & \mathrm{lt}(\sum_{l=1}^{k} \beta_l (\delta_l x'_l \omega_l(h_l) x''_l)) \\ & = & \sum_{l=1}^{k} \beta_l \alpha_l x_{i_{k+1}} \\ & = & (\sum_{l=1}^{k} \beta_l \alpha_l) x_{i_{k+1}} \\ & = & \alpha_{k+1} x_{i_{k+1}}. \end{array}$$

Note que $h_l \in R_{i_l} \subset J_{i_l} \subset J_{i_{(k+1)}-1}$, $l = 1, 2, \ldots, k$. Como $J_{i_{(k+1)}-1}$ é um T_2-ideal, obtemos $\omega_l(h_l) \in J_{i_{(k+1)}-1}$ e portanto $\delta_l x'_l \omega_l(h_l) x''_l \in J_{i_{(k+1)}-1}$. Por isso, $h \in J_{i_{k+1}-1}$. Seja $f = h_{k+1} - h$. Note que o coeficiente líder e o monômio líder de h_{k+1} e h são iguais (eles são ambos iguais a α_{k+1} e $x_{i_{k+1}}$, respectivamente). Daí resulta que o monômio líder de f é menor que o de h_{k+1}, isto é, menor que $x_{i_{k+1}}$. Além disso, temos $f \in J_{i_{(k+1)}}$ um vez que $h_{k+1} \in J_{i_{(k+1)}}$ e $h \in J_{i_{(k+1)}-1} \subset J_{i_{(k+1)}}$. Por outro lado, $f \notin J_{i_{(k+1)}-1}$, pois $h \in J_{i_{(k+1)}-1}$ e $h_{i_{k+1}} \notin J_{i_{(k+1)}-1}$. Portanto, $f \in J_{i_{(k+1)}} \backslash J_{i_{(k+1)}-1} = R_{i_{(k+1)}}$ de modo que o monômio líder de f pertence a $L_{i_{(k+1)}}$. Isto é uma contradição haja vista que o monômio líder de f é menor que $x_{i_{k+1}}$ e, por outro lado, $x_{i_{k+1}}$ é o menor elemento de $L_{i_{(k+1)}}$. Deste modo, $K\langle X\rangle/I$ não contém nenhuma cadeia ascendente estritamente crescente de T_2-ideais ou, equivalentemente, cada T_2-ideal de $K\langle X\rangle/I$ é finitamente gerado como um T_2-ideal. A demonstração da Proposição 2.29 está completa. □

Observação 2.30. Chamaremos de Ω-ideal, todo ideal de $K\langle X\rangle/I$ que é invariante por endomorfismos de Ω. Na demonstração da proposição 2.29, não usamos o fato dos ideais serem T_2-ideais, usamos apenas o fato de serem Ω-ideais. Portanto, o resultado vale para Ω-ideais, ou seja, todo Ω-ideal de $K\langle X\rangle/I$ é finitamente gerado como Ω-ideal.

Capítulo 3

Identidades n-Graduadas de Matrizes Triangulares Superiores

Neste capítulo, K é um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Consideraremos em $UT_n(K)$ a seguinte graduação:

$$UT_n(K) = UT_n^{(0)} + UT_n^{(1)} + \ldots + UT_n^{(n-1)},$$

onde $UT_n^{(k)}$ é o K-submódulo gerado pelas matrizes elementares e_{ij} tais que $j - i = k$, $k = 0, 2 \ldots, n-1$.

O resultado principal deste capítulo, sobre matrizes triangulares superiores, é o seguinte:

Teorema 3.1. *Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Então as identidades polinomiais n-graduadas da álgebra $UT_n(K)$ possuem a propriedade de Specht.*

3.1 Demonstração do Teorema 3.1

Seja K é um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Seja $K\langle X\rangle = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_n} K\langle X\rangle_i$ a álgebra livre n-graduada, com conjunto de geradores livres $X = Y \cup Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_{n-1}$, onde $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $Z_r = \{z_i^{(r)} \mid i \in \mathbb{N}\}$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Aqui $Y \subset K\langle X\rangle_0$ e $Z_r \subset K\langle X\rangle_r$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Notemos que $UT_n(K)$ satisfaz as identidades

$$[y_1, y_2], \quad \{z^{(i)} z^{(j)} \mid i + j \geq n\}. \tag{3.1.1}$$

De fato, como K é comutativo, duas matrizes diagonais sempre comutam e, portanto, a identidade polinomial n-graduada $[y_1, y_2]$ vale em $UT_n(K)$. Além disso, como $i + j \geq n$ implica $UT_n^{(i)} \cdot UT_n^{(j)} = 0$, as identidades polinomiais n-graduadas $z^{(i)}z^{(j)}$ também valem.

Denotaremos por T o T_n-ideal gerado pelas identidades polinomiais n-graduadas (3.1.1). Observe que o T_n-ideal das identidades polinomiais n-graduadas de $UT_n(K)$ contém T. As identidades polinomiais n-graduadas (3.1.1), formam uma base de identidades para $UT_n(K)$, se K é um corpo infinito. Este fato foi demonstrado em 2003 por Koshlukov e Valenti [26].

Denotaremos a álgebra relativamente livre n-graduada $L_n = K\langle X\rangle/T$ por $L_n = L_n^{(0)} + L_n^{(1)} + \ldots + L_n^{(n-1)}$. Convém observar que a álgebra L_n satisfaz as identidades (3.1.1).

Notemos que se as identidades polinomiais n-graduadas de L_n possuem a propriedade de Specht, então as identidades polinomiais n-graduadas de $UT_n(K)$ também possuem. Isto se deve ao fato que $UT_n(K)$ satisfaz as identidades n-graduadas (3.1.1) e que estas formam uma base de identidades para L_n. Assim, para demonstrar o teorema 3.1 é suficiente demonstrar o teorema abaixo.

Teorema 3.2. *Seja K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Então as identidades polinomiais n-graduadas da álgebra relativamente livre $L_n = K\langle X\rangle/T$ possuem a propriedade de Specht.*

Inicialmente faremos algumas considerações.

Lema 3.3. *A álgebra L_n é m-graduada, para todo $m \geq n$.*

Demonstração. É suficiente fazer a componente $L_n^{(i)} = \{0\}$, para todo $i > n$. □

Convém notar que a mesma observação vale para a álgebra n-graduada $UT_n(K)$. Usando o lema acima e o princípio de indução, podemos reduzir nosso problema. Conforme a proposição seguinte.

Proposição 3.4. *Suponha que para cada $n \geq 1$, toda cadeia de T_n-ideais de L_n, contidos no ideal $L_n^{(n-1)}$ estabiliza. Então vale o Teorema 3.2.*

Demonstração. Lembramos que K um anel associativo, comutativo e Noetheriano com 1. Seja

$$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots \tag{3.1.2}$$

uma cadeia ascendente de T_n-ideais de L_n. Devemos mostrar que existe um índice j a partir do qual $J_j = J_{j+1} = \dots$.

Faremos a demonstração usando indução sobre n. Inicialmente, observemos que em L_1 toda cadeia ascendente de T_1-ideais estabiliza, este fato não depende da hipótese desta proposição. De fato, L_1 é uma álgebra comutativa e como consequência do resultado de Cohen [9], em qualquer álgebra comutativa de polinômios, toda cadeia ascendente de ideais invariantes por todos os endomorfismos estabiliza. Agora, pela hipótese de indução, temos que em L_{n-1} toda cadeia ascendente de T_{n-1}-ideais estabiliza. Lembremos que pelo Lema 3.3 podemos considerar L_{n-1} uma álgebra n-graduada. Logo, em L_{n-1} toda cadeia ascendente de T_n-ideais estabiliza. Notemos que $L_{n-1} \simeq L_n/L_n^{(n-1)}$. Logo, $L_n/L_n^{(n-1)}$ é uma álgebra n-graduada tal que toda cadeia ascendente de T_n-ideais estabiliza. Assim, temos que

$$(J_1 + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)} \subset (J_2 + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)} \subset (J_3 + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)} \subset \dots$$

é uma cadeia ascendente de T_n-ideais em $L_n/L_n^{(n-1)}$ e portanto estabiliza. Logo, existe j_1 a partir do qual $(J_{j_1} + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)} = (J_{j_1+1} + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)} = \dots$.

Agora, pela hipótese desta proposição, temos que em $L_n^{(n-1)}$ toda cadeia ascendente de T_n-ideais estabiliza. Portanto,

$$J_1 \cap L_n^{(n-1)} \subset J_2 \cap L_n^{(n-1)} \subset J_3 \cap L_n^{(n-1)} \subset \dots$$

é uma cadeia ascendente de T_n-ideais em $L_n^{(n-1)}$ e consequentemente estabiliza. Assim, existe j_2 tal que $J_{j_2} \cap L_n^{(n-1)} = J_{j_2+1} \cap L_n^{(n-1)} = \dots$.

Tomemos $j = \max\{j_1, j_2\}$. Assim temos

$$(J_j + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)} = (J_{j+1} + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)} = \dots$$

e

$$J_j \cap L_n^{(n-1)} = J_{j+1} \cap L_n^{(n-1)} = \dots .$$

Então, $J_j = J_s$, para todo $s > j$. De fato, temos que $J_j \subset J_s$; devemos verificar que se $f \in J_s$, então $f \in J_j$. Observe que $f + L_n^{(n-1)} \in (J_s + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)} = (J_j + L_n^{(n-1)})/L_n^{(n-1)}$. Logo, existe $f' \in J_j$ tal que $f - f' \in L_n^{(n-1)}$. Observemos que $f - f' \in J_j \cap L_n^{(n-1)} = J_s \cap L_n^{(n-1)}$, assim $f - f' \in J_j$ e portanto $f \in J_j$. Assim, $J_j = J_s$, para todo $s > j$. Portanto, a cadeia ascendente (3.1.2) estabiliza, pois $J_j = J_{j+1} = \ldots$. Isto conclui a demonstração da proposição.

$\square$

É fácil verificar o seguinte lema.

Lema 3.5. *O ideal $L_n^{(n-1)}$ é gerado por*

$$g_1(y)z_{i_1}^{(r_1)}g_2(y)z_{i_2}^{(r_2)}g_3(y)\ldots g_s(y)z_{i_s}^{(r_s)}g_{s+1}(y),$$

onde $g_j(y)$ é um monômio em Y, $i_l \in \mathbb{N}$ e $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n - 1$.

Lembremos que Φ é o conjunto de todas as aplicações $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que preservam ordem (i.e., se $i < j$, então $\varphi(i) < \varphi(j)$).

Consideraremos algumas famílias de endomorfismos de $L_n^{(n-1)}$. Denotaremos também por Φ o conjunto de todos os endomorfismos φ de $L_n^{(n-1)}$, dados por:

$$\varphi(x_i) = x_{\varphi(i)},$$

onde $x_i \in X = Y \cup Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_{n-1}, i = 1, 2, \ldots$ (φ é aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que preserva ordem).

Seja Θ a família de todos os endomorfismos θ_{ij} de $L_n^{(n-1)}$, com $i, j \in \mathbb{N}, i < j$, dados por:

$$\theta_{ij}(y_l) = \begin{cases} y_l, \ j \neq l \\ y_i y_j, \ j = l, \end{cases}$$

para todo $y_i \in Y$ e $\theta_{ij}(z_l^{(r)}) = z_l^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots n-1$, $i \in \mathbb{N}$.

Seja $s > 0$. Consideremos as s-uplas $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$, com $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n - 1$. Para cada s-upla, denotemos por $V_{r_1 r_2 \ldots r_s}$ o K-submódulo de $L_n^{(n-1)}$ gerado pelos elementos $g_1(y)z_{i_1}^{(r_1)}g_2(y)z_{i_2}^{(r_2)}g_3(y)\ldots g_s(y)z_{i_s}^{(r_s)}g_{s+1}(y)$, onde $g_k(y)$ é um monômio em Y, $i_1, i_2, \ldots, i_s \in \mathbb{N}$.

Fixemos agora, a s-upla $(r_1, r_2, \dots, r_s)$ e consideremos o K-módulo $V_{r_1 r_2 \dots r_s}$.

Seja $R = K[t_{ki} \mid k = 1, 2, \dots, s+1, i \in \mathbb{N}]$. Considere o R-módulo livre M gerado por $\omega_{(i_1, i_2, \dots, i_s)}$. Agora, observemos que M é gerado como K-módulo livre pelos elementos

$$\omega_{(i_1,i_2,\dots,i_s)} g_1(t_1) g_2(t_2) \dots g_{s+1}(t_{s+1})),$$

onde $g_k(t_k)$, é um monômio nas variáveis $t_{k1}, t_{k2}, \dots$. Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma aplicação que preserva ordem. Com a mesma notação, defina o endomorfismo φ do K-módulo M, por:

$$\varphi(\omega_{(i_1,i_2,\dots,i_s)} g_1(t_1) \dots g_{s+1}(t_{s+1})) = \omega_{(\varphi(i_1),\varphi(i_2),\dots,\varphi(i_s))} \varphi(g_1(t_1)) \dots \varphi(g_{s+1}(t_{s+1})),$$

onde $\varphi(g_k(t_k)) = t_{k\varphi(j_1)} t_{k\varphi(j_2)} \dots t_{k\varphi(j_k)}$, com $g_k(t_k) = t_{kj_1} t_{kj_2} \dots t_{kj_{l_k}}$. Denotemos por Φ o conjunto de todos os endomorfismos φ de M. Agora, definamos no anel R, os endomorfismos θ_{ij} $(i < j)$, dados por:

$$\theta_{ij}(t_{kl}) = \begin{cases} t_{kl}, \ j \neq l \\ t_{ki} t_{kj}, j = l, \end{cases}$$

onde $k = 1, 2, \dots, s+1$. Podemos estender θ_{ij}, naturalmente para o K-módulo M, fazendo

$$\theta_{ij}(\omega_{(i_1,i_2,\dots,i_s)} g_1(t_1) g_2(t_2) \dots g_{s+1}(t_{s+1}))) = \omega_{(i_1,i_2,\dots,i_s)} \theta_{ij}(g_1(t_1) g_2(t_2) \dots g_{s+1}(t_{s+1}))).$$

O conjunto de todos os endomorfismos θ_{ij} de M, será denotado por Θ. Usamos φ e θ_{ij} tanto para os endomorfismos de $V_{r_1 r_2 \dots r_s}$ quanto para os endomorfismos de M. Mas esta escolha não deve causar confusão, haja vista que os endomorfismos atuam da mesma forma, mudando apenas o contexto, conforme veremos nos lemas abaixo.

Definamos a aplicação $\psi : M \to V_{r_1 r_2 \dots r_s}$, por:

$$\psi(\omega_{(i_1,i_2,\dots,i_s)} g_1(t_1) g_2(t_2) \dots g_{s+1}(t_{s+1})) = g_1(y) z_{i_1}^{(r_1)} g_2(y) z_{i_2}^{(r_2)} g_3(y) \dots g_s(y) z_{i_s}^{(r_s)} g_{s+1}(y),$$

onde $g_k(t_k) = t_{kj_1} t_{kj_2} \dots t_{kj_{l_k}}$ e $g_k(y) = y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_{l_k}}$, $j_1, j_2, \dots, j_{l_k} \in \mathbb{N}$, para todo $k = 1, 2, \dots, s+1$.

Lema 3.6. *ψ é um epimorfismo de K-módulos.*

Demonstração. É suficiente lembrar que M é um R-módulo livre. □

Lema 3.7. *$\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x))$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \Phi$. Seja $m = \omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)}g_1(t_1)g_2(t_2)\ldots g_{s+1}(t_{s+1}) \in M$, onde $g_k(t_k) = t_{kj_1}t_{kj_2}\ldots t_{kj_{l_k}}, j_1, j_2, \ldots j_{k_l} \in \mathbb{N}$ e $k = 1, 2, \ldots, s+1$. Note que φ age separadamente, aplicando os elementos $\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)}$ para as variáveis $z_i^{(r)}$ e os monômios nas variáveis t_{ki}, para os monômios nas variáveis y_i. Logo, podemos calcular separadamente os epimorfismos em $g_k(t_k) = t_{kj_1}t_{kj_2}\ldots t_{kj_{l_k}}$, para depois concluir para m. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi\psi(g_k(t_k)) &= \varphi(\psi(t_{kj_1}t_{kj_2}\ldots t_{kj_{l_k}})) \\
&= \varphi(y_{j_1}y_{j_2}\ldots y_{j_{l_k}}) \\
&= y_{\varphi(j_1)}y_{\varphi(j_2)}\ldots y_{\varphi(j_{l_k})} \\
&= \varphi(g_k(y)).
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi\psi(m) &= \varphi(\psi(\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)}g_1(t_1)g_2(t_2)\ldots g_{s+1}(t_{s+1})))) \\
&= \varphi(g_1(y)z_{i_1}^{(r_1)}g_2(y)z_{i_2}^{(r_2)}g_3(y)\ldots g_s(y)z_{i_s}^{(r_s)}g_{s+1}(y)) \\
&= \varphi(g_1(y))z_{\varphi(i_1)}^{(r_1)}\varphi(g_2(y))z_{\varphi(i_2)}^{(r_2)}\varphi(g_3(y))\ldots\varphi(g_s(y))z_{\varphi(i_s)}^{(r_s)}\varphi(g_{s+1}(y))).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que,

$$\begin{aligned}
\psi\varphi(g_k(t_k)) &= \psi(\varphi(t_{kj_1}t_{kj_2}\ldots t_{kj_{l_k}})) \\
&= \psi(t_{k\varphi(j_1)}t_{k\varphi(j_2)}\ldots t_{k\varphi(j_{l_k})}) \\
&= y_{\varphi(j_1)}y_{\varphi(j_2)}\ldots y_{\varphi(j_{l_k})} \\
&= \varphi(g_k(y)).
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}
\psi\varphi(m) &= \psi(\varphi(\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)}g_1(t_1)g_2(t_2)\ldots g_{s+1}(t_{s+1})))) \\
&= \psi(\omega_{(\varphi(j_i),\varphi(j_2),\ldots,\varphi(j_s))}\varphi(g_1(t_1))\varphi(g_2(t_2))\ldots\varphi(g_{s+1}(t_{s+1}))) \\
&= \varphi(g_1(y))z_{\varphi(i_1)}^{(r_1)}\varphi(g_2(y))z_{\varphi(i_2)}^{(r_2)}\varphi(g_3(y))\ldots\varphi(g_s(y))z_{\varphi(i_s)}^{(r_s)}\varphi(g_{s+1}(y)) \\
&= \varphi\psi(m).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.8. *$\psi(\theta_{ij}(x)) = \theta_{ij}(\psi(x))$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Como θ_{ij} age apenas nas variáveis t_{kl} e nas variáveis y_l, a demonstração é feita por cálculos diretos como no lema anterior. □

Finalmente, para todo polinômio $f(y)$ nas variáveis de Y definamos o seguinte endomorfismo de $L_n^{(n-1)}$

$$\delta_f(z_i^{(r)}) = z_i^{(r)} f(y)$$

para todo $z_i^{(r)} \in Z_r$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$, e $\delta(y_i) = y_i$, onde $i \in \mathbb{N}, r = 1, 2, \ldots, n-1$. Para cada f, δ_f é um endomorfismo do K-módulo $V_{r_1 r_2 \ldots r_s}$. Denotemos por Δ a família de todos os endomorfismos δ_f de $L_n^{(n-1)}$.

Seja $f(y) = f(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l})$ um polinômio nas variáveis de Y. No R-módulo M, definamos o R-endomorfismo δ_f, por

$$\delta_f(\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)}) = \omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)} f(t_2) f(t_3) \ldots f(t_s),$$

onde $f(t_k) = f(t_{kj_1}, t_{kj_2}, \ldots, t_{kj_l})$, $k = 2, 3, \ldots, s+1$. Usaremos novamente notação igual, tanto para os endomorfismos de $V_{r_1 r_2 \ldots r_s}$ quanto para os de M.

Lema 3.9. *$\psi(\delta_f(x)) = \delta_f(\psi(x))$, para todo polinômio $f(\overline{y}) = f(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l})$ e para todo $x \in M$. Além disso, $f(\overline{y})\psi(\delta_f(x)) = f(\overline{y})\delta_f(\psi(x))$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos calcular a primeira parte da igualdade. Sejam $m = \omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)} g_1(t_1) \ldots g_{s+1}(t_{s+1}) \in M$, e $f(\overline{y}) = f(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l})$, assim temos,

$$\begin{aligned}
f(\overline{y})\psi(\delta_f(m)) &= \psi(\delta_f(\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)} g_1(t_1) g_2(t_2) \ldots g_{s+1}(t_{s+1}))) \\
&= f(\overline{y})\psi(\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)} f(\overline{t_2}) \ldots f(\overline{t_{s+1}}) g_1(t_1) g_2(t_2) \ldots g_{s+1}(t_{s+1})) \\
&= f(\overline{y})\psi(\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)} g_1(t_1) g_2(t_2) f(\overline{t_2}) \ldots g_{s+1}(t_{s+1}) f(\overline{t_{s+1}})) \\
&= f(\overline{y}) g_1(y) z_{i_1}^{(r_1)} g_2(y) f(\overline{y}) z_{i_2}^{(r_2)} g_3(y) f(\overline{y}) \ldots g_s(y) f(\overline{y}) z_{i_s}^{(r_s)} g_{s+1}(y) f(\overline{y}) \\
&= g_1(y) f(\overline{y}) z_{i_1}^{(r_1)} g_2(y) f(\overline{y}) z_{i_2}^{(r_2)} g_3(y) f(\overline{y}) \ldots g_s(y) f(\overline{y}) z_{i_s}^{(r_s)} g_{s+1}(y) f(\overline{y}).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned}
f(\overline{y})\delta_f(\psi(m)) &= f(\overline{y})\delta_f(\psi(\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)} g_1(t_1) g_2(t_2) \ldots g_{s+1}(t_{s+1}))) \\
&= f(\overline{y})\delta_f(g_1(y) z_{i_1}^{(r_1)} g_2(y) z_{i_2}^{(r_2)} g_3(y) \ldots g_s(y) z_{i_s}^{(r_s)} g_{s+1}(y)) \\
&= f(\overline{y}) g_1(y) z_{i_1}^{(r_1)} f(\overline{y}) g_2(y) z_{i_2}^{(r_2)} f(\overline{y}) g_3(y) \ldots f(\overline{y}) g_s(y) z_{i_s}^{(r_s)} f(\overline{y}) g_{s+1}(y) \\
&= g_1(y) f(\overline{y}) z_{i_1}^{(r_1)} g_2(y) f(\overline{y}) z_{i_2}^{(r_2)} g_3(y) f(\overline{y}) \ldots g_s(y) f(\overline{y}) z_{i_s}^{(r_s)} g_{s+1}(y) f(\overline{y}).
\end{aligned}$$

$\square$

Denotaremos por Ω a união de todos os endomorfismos de Φ, Θ e Δ.

Relembremos que M é gerado como K-módulo livre pelos elementos

$$\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)}g_1(t_1)g_2(t_2)\ldots g_{s+1}(t_{s+1})),$$

onde $g_k(t_k)$, é um monômio nas variáveis $t_{k1}, t_{k2}, \ldots$.

Seja $f(y) = f(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l})$. Seja $\hat{R}$ a subálgebra de R gerada por

$$f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_{s+1}),$$

onde $f(t_k)$ é um polinômio nas variáveis t_{kl}.

A proposição abaixo será demonstrada na próxima seção.

Proposição 3.10. *Em M, toda cadeia ascendente de $\hat{R}$-módulos invariantes por todos as aplicações de Φ e Ψ estabiliza.*

Como consequência da Proposição 3.10, obtemos que

Proposição 3.11. *Em $V_{r_1r_2\ldots r_s}$, toda cadeia ascendente de K-módulos invariantes por endomorfismos de Ω estabiliza, equivalentemente, em $V_{r_1r_2\ldots r_s}$, toda cadeia ascendente de $\hat{R}$-módulos invariantes por endomorfismos de Φ e Ψ estabiliza.*

Observe que se I é um T_n-ideal n-graduado de L_{n-1}, então $\psi^{-1}(I \cap V_{r_1r_2\ldots r_s})$ é um $\hat{R}$-módulo em M.

Para demonstrar o Teorema 3.2 precisamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 3.12. *Toda cadeia de T_n-ideais de $L_n = K\langle X\rangle/T$, contidos em $L_n^{(n-1)}$ estabiliza.*

Demonstração. Como todo T_n-ideal é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$, temos que todo T_n-ideal é invariante por endomorfismos de Ω. Assim, é suficiente mostrar que em L_n^{n-1}, toda cadeia ascendente de K-módulos invariantes por endomorfismos de Ω estabiliza. Para demonstrar esta proposição, criaremos uma cadeia ascendente $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_d = L_n^{(n-1)}$ de T_n-ideais contidos em $L_n^{(n-1)}$, tal que em cada quociente U_i/U_{i-1} toda cadeia ascendente de K-módulos invariantes por endomorfismos de Ω estabiliza.

Como visto na Proposição acima, temos que nos K-módulos $V_{r_1r_2\ldots r_s}$, onde $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n-1$, toda cadeia de submódulos Ω-invariantes estabiliza. Tomemos s maximal, ou seja, $s = n-1$. Neste caso temos que $r_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Assim, temos o módulo $V_{11\ldots 1}$. Denotaremos $U_0 = \{0\}$. Seja U_1 o T_n-ideal contendo U_0, gerado por $V_{11\ldots 1}$. Observe que U_1/U_0 é gerado como módulo por $V_{11\ldots 1} + U_0$. Assim, em U_1/U_0 toda cadeia de T_n-ideais estabiliza. Tomemos agora, $s = n-2$. Assim, temos que $V_{r_1r_2\ldots r_{n-2}}$, onde $r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-2} = n-1$, logo para cada $l = 1, 2, \ldots, n-2$, temos um módulo $V_{r_1r_2\ldots r_s}$, onde $r_l = 2$, e $r_i = 1$ se $i \neq l$. Para $l = 1$, tomemos U_2 o T_n-ideal contendo U_1, gerado por $V_{211\ldots 1}$. Analogamente ao caso anterior, U_2/U_1 é gerado como módulo por $V_{211\ldots 1} + U_1$. Portanto, pela proposição anterior, em U_2/U_1 toda cadeia de T_n-ideais estabiliza. Repetimos o processo, com todos os módulos como descritos assim, até percorrer todos os módulos $V_{r_1r_2\ldots r_s}$, onde $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n-1$, com $s = n-2$. Repetimos esse processo para todos os valores de s, até $s = 1$. Com isso obtemos a cadeia de T_n-ideais

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_d = L_n^{(n-1)},$$

onde em cada quociente U_i/U_{i-1}, toda cadeia de T_n-ideais estabiliza. □

Agora, o Teorema 3.2 segue imediatamente das proposições 3.4 e 3.12. Isto implica, conforme foi observado no início da seção, o Teorema 3.1.

3.2 Demonstração da Proposição 3.10

Seja $R_c = K[u_{kl} \mid k = 1, 2, \ldots, c, j \in \mathbb{N}]$. Denotemos por M_c o R_c-módulo livre gerado por $\omega_{i_1i_2\ldots i_{2c}}$, onde $i_l \in \mathbb{N}$.

Seja p o polinômio de $\mathbb{Z}[u_i \mid i \in \mathbb{N}]$, dado por

$$p(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}) = 1 - n^{(1)}(1 - u_{i_1}^{n_{1i_1}} u_{i_2}^{n_{1i_2}} \ldots u_{i_k}^{n_{1i_k}}) - \ldots - n^{(l)}(1 - u_{i_1}^{n_{li_1}} u_{i_2}^{n_{li_2}} \ldots u_{i_k}^{n_{li_k}}),$$

onde $n_{ij} \in \mathbb{N}_0$, $n^{(i)} \in \mathbb{Z}$, para todo i, j. Suponha que $q = p(u_{1i_1}, \ldots, u_{1i_k}) \ldots p(u_{ci_1}, \ldots, u_{ci_k})$, $q \in R_c$.

Agora, considere Φ o conjunto de todas as aplicações de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que preservam a ordem. Denotemos também por Φ o conjunto de todos os endomorfismos de R_c e de todas as aplicações semilineares de M_c tais que

$$\varphi(u_{ij}) = u_{i\varphi(j)} \quad (i = 1, \ldots, c; j \in \mathbb{N}),$$

$$\varphi(\omega_{i_1 i_2 \ldots i_{2c}} r) = \omega_{\varphi(i_1)\varphi(i_2)\ldots\varphi(i_{2c})}\varphi(r) \quad (i_1, \ldots, i_c \in \mathbb{N}; r \in R_c).$$

Usamos Θ para denotar o conjunto de endomorfismos θ_{ij} do anel R_c tal que

$$\theta_{ij}(u_{kl}) = u_{kl} \quad (l \neq j), \qquad \theta_{ij}(u_{kj}) = u_{ki}u_{kj}.$$

Podemos estender θ_{ij}, naturalmente para o R_c-módulo M_c, fazendo

$$\theta_{ij}(\omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)}r) = \omega_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)}\theta_{ij}(r),$$

onde $r \in R_c$.

Vale o seguinte resultado

Proposição 3.13 (A. Krasilnikov, [29])**.** *Toda cadeia ascendente de $\tilde{R}_c$-submódulos de M_c admitindo aplicações de Φ e Θ estabiliza.*

Notemos que se $c = s + 1$, temos que $\tilde{R}_c \subset \hat{R}$. Além disso, M pode ser visto como um submódulo de M_c; basta fazer M o submódulo gerado por $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_s i_{s+1} \ldots i_{2c}}$ tal que $i_{s+1} = i_{s+2} = \ldots = i_{2c}$. Com isto, em M toda cadeia de $\tilde{R}_c$-submódulos admitindo aplicações de Φ e Θ estabiliza. Portanto, toda cadeia de $\hat{R}$-submódulos admitindo aplicações de Φ e Θ estabiliza. Isto demonstra a Proposição 3.10.

Referências Bibliográficas

[1] E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, *Representability and Specht Problem for G-graded Algebras*, `arXiv:0903.0362 [math.FA]`

[2] S.S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra, **30** (12) (2002), 5849–5860.

[3] Yu.A. Bahturin, Basic structures of modern algebra. Mathematics and its Applications, 265. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. x+419 pp. ISBN: 0-7923-2459-5.

[4] Yu.A. Bahturin, Identical Relations in Lie Algebras (Russian), "Nauka", Moscow, 1985. Translation: VNU Science Press, Utrecht, 1987.

[5] Yu.A. Bahturin, A.Yu. Olshanskii, *Identical relations in finite Lie rings.* (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **96(138)** (1975), no. 4, 543–559, 645.

[6] A.Ya. Belov, *On non-Specht varieties,* Fund. Prikl. Mat. **5** (1999), 47–66.

[7] A.P. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *Graded central polynomials for the matrix algebra of order two,* Monatsh. Math. **157** (2009), 247–256.

[8] P.Z. Chiripov, P.N. Siderov, *On bases for identities of some varieties of associative algebras.* (Russian) PLISKA Stud. Math. Bulgar. **2** (1981), 103–115.

[9] D.E Cohen, *On the laws of a metabelian variety*, J. Algebra **5** (1967) 267–273.

[10] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two.* Linear Algebra Appl. **377** (2004), 53—67.

[11] O.M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$,* Israel J. Math. **80** (3) (1992), 323–335.

[12] V. Drensky, *A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra i Logika **20**, No. 3 (1981), 282–290 [in Russian]; Algebra and Logic **20**, No. 3 (1981), 188–194 [Engl. transl.].

[13] V. Drensky, *Free Algebras and Pi-Algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[14] V. Drensky, E. Formanek, Polynomial identity rings. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004. viii+200 pp. ISBN: 3-7643-7126-9.

[15] V.T. Filippov, *Varieties of Mal'tsev algebras*, Algebra i Logika **20**, No. 3 (1981), 300–314 [in Russian]; Algebra and Logic **20**, No. 3 (1981), 200–210 [Engl. transl.].

[16] G.K. Genov, *Basis for identities of a third order matrix algebra over a finite field*, Algebra i Logika **20** (1981), no. 4, 365–388 [in Russian]; Algebra and Logic **20**, 241—257 (1981) [Engl. transl.].

[17] G.K. Genov, *On the Specht property of certain varieties of associative algebras over a field of characteristic zero*, Dokl. Bulg. AN **29** (1976), 939–941 [in Russian].

[18] G.K. Genov, P.N. Siderov, *A basis for identities of the algebra of fourth-order matrices over a finite field I, II*, Serdica **8**, 313–323, 351–366 (1982) [Russian].

[19] A. Giambruno, M. Zaicev, Polynomial identities and asymptotic methods. Mathematical Surveys and Monographs, 122. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xiv+352 pp. ISBN: 0-8218-3829-6.

[20] A.V. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals of characteristic* 2 *without the finite basis property,* Fund. Prikl. Mat. **5** (1999), 101–118.

[21] G. Higman, *Ordering by divisibility in abstract algebras,* Proc.London Math. Soc.(3) **2** (1952), 326–336.

[22] A. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras,* Algebra i Logika **26** (1987), 597–641 [in Russian]; Algebra and Logic **26** (1988), 362–397 [Engl. transl.].

[23] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations of Mathematical Monographs **87**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[24] A. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras,* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **48** (1984), 1042–1059.

[25] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$.* J. Algebra **241** (2001), no. 1, 410–434.

[26] P. Koshlukov, A. Valenti, *Graded identities for the algebra of $n \times n$ upper triangular matrices over an infinite field.* Internat. J. Algebra Comput. **13** (2003), no. 5, 517–526.

[27] P. Koshlukov, S.S. de Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic,* Israel J. Math. **128** (2002), 157–176.

[28] A. Krasilnikov, *Identities of groups with nilpotent commutant,* Doctoral Dissertation [in Russian], Moscow State University, Moscow (1995).

[29] A. Krasilnikov, *The identities of a group with nilpotent commutator subgroup are finitely based,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), 1181–1195[in Russian]; Math. USSR Izvestiya **37** (1991), 539–553 [Engl. transl.].

[30] A. Krasilnikov, *On identities of triangulable matrix representations of groups,* Trans. Moscow Math. Soc. **1990** (1991), 233–249.

[31] R.L. Kruse, *Identities satisfied by a finite ring*, J. Algebra **26** (1973), 298—318.

[32] V.N. Latyshev, *Partially ordered sets and nonmatrix identities of associative algebras*, Algebra i Logika 15 (1976), no. 1, 53–70 [in Russian].

[33] I.V. Lvov, *Varieties of associative rings*, Algebra i Logika **12** No. 3 (1973), 269–297 [in Russian]; Algebra and Logic **12** No. 3 (1973), 667–688 [Engl. transl.].

[34] Yu.N. Maltcev, *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices.* Algebra i Logika **10** (1971), 393–400 [in Russian]; Algebra and Logic **10** (1971), 242–247 (1973) [Engl. transl.].

[35] Yu.N. Maltsev and E. N. Kuz'min, *A basis for the identities of the algebra of second order matrices over a finite field*, Algebra i Logika **17**, No. 1 (1978), 28–32 [in Russian]; Algebra and Logic **17**, No. 1 (1978), 18–21 [Engl. transl.].

[36] A.P. Popov, *Identities of the tensor square of a Grassmann algebra.* Algebra i Logika **21** (1982), no. 4, 442–471 ´[in Russian]; Algebra and Logic **21** (1982), no. 4, 296–316 [Engl. transl.].

[37] A.P. Popov, *Some finitely based varieties of rings.* C. R. Acad. Bulgare Sci. 32 (1979), no. **7**, 855–858.

[38] Yu.P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra i Logika **12**, No. 1 (1973), 83–113 [in Russian]; Algebra and Logic **12** (1973), 47–63 [Engl. transl.].

[39] Yu.P. Razmyslov, *Identities of Algebras and Their Representations*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 138, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[40] J.J. Rotman, Advanced modern algebra. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2002. xvi+1012+A8+B6+I14 pp. ISBN: 0-13-087868-5

[41] L.H. Rowen, Ring theory. Student edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1991. xxviii+623 pp. ISBN: 0-12-599840-6.

[42] V.V. Shchigolev, *Examples of infinitely based T-ideals,* Fund. Prikl. Mat. **5** (1999), 307–312.

[43] W. Specht, *Gesetze in ringen,* Math. Zeitschrift **52** (1950), 557–589.

[44] I. Sviridova, *Identities of PI-Algebras Graded by a Finite Abelian Group*, Commun. Algebra, a aparecer.

[45] B.T. Tki, *On the basis of the identities of the matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Serdica **7**, No. 3 (1981), 187–194.

[46] S.Yu. Vasilovsky, *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra i Logika **28**, No. 5 (1989), 534–554 [in Russian]; Algebra and Logic **28**, No. 5 (1989), 355–368 [Engl. transl.].

[47] S.Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n*, Proceedings of the American Mathematical Society **127** (1999), 3517-3524.

[48] M.R. Vaughan-Lee, *Varieties of Lie algebras*, Quart. J. Math. Oxford **(2) 21** (1970), 297–308.

[49] S.M. Vovsi, Topics in varieties of group representations. London Mathematical Society Lecture Note Series, 163. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. xiv+200 pp. ISBN: 0-521-42410-0.