Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre Autovalores do Laplaciano e Bi-harmônico em Variedades Riemannianas e do Poli-Harmônico em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$

por

Adail de Castro Cavalheiro

Brasília

2010

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela possibilidade de realizações como esta. A meus pais, Luiz Carlos e Teresinha, por me criarem para voos mais altos. Aos demais familiares, especialmente minha avó, Etelvina, e minha única irmã, Marcelle, pela compreensão com minha intolerância cotidiana. Aos tantos amigos, cujos nomes não caberiam nesta página, sempre presentes nos momentos de pressão, pelo apoio costumeiro. Aos professores e demais funcionários do departamento. Finalmente, ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Um problema com muitas aplicações físicas é estimar os autovalores do operador de Laplace e suas generalizações. Neste trabalho, apresentamos algumas cotas universais para os autovalores dos operadores Laplaciano e Bi-harmônico em domínios limitados de Variedades Riemannianas Completas. Para o Laplaciano, temos uma estimativa para a soma de quaisquer n autovalores consecutivos e, para o Bi-harmônico, uma desigualdade tipo-Yang foi provada. Finalmente, estudamos autovalores do Poli-Harmônico em domínios limitados de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n(1)$ e encontramos cotas para autovalores de ordem inferior.

Palavras-chave: autovalores, cotas universais, operador Laplaciano, operador Bi-harmônico, operador Poli-harmônico, operador de Schrödinger, Variedades Riemannianas, esfera, Desigualdade tipo-Yang.

Abstract

A problem with many applications in physics is to estimate the eigenvalues of the Laplacian operator and its generalizations. In this work, we present some universal bounds for the eigenvalues of Laplacian and Biharmonic operators in bounded domains of Complete Riemannian Manifolds. For the Laplacian, we have an estimate for the sum of any n consecutive eigenvalues and, for the Biharmonic, a Yang-type inequality has been proved. Finally, we study Polyharmonic eigenvalues in bounded domains of $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{S}^n(1)$ and we found bounds for lower order eigenvalues.

Keywords: eigenvalues, universal bounds, Laplacian operator, Biharmonic operator, Polyharmonic operator, Schrödinger operator, Riemannian Manifolds, sphere, Yang-type Inequality.

Sumário

Introdução

O estudo de autovalores tem suas raízes no método de separação de variáveis. Muitos problemas são simplificados ou até mesmo possibilitados com considerações a respeito de autovalores e autofunções. O problema ganha muita importância quando começa a solucionar questões físicas. Considere Ω um domínio, ou seja, aberto e conexo, limitado em M^n, variedade riemanniana completa $n(\geq 2)$-dimensional, com fronteira $\partial\Omega$ suave ou, possivelmente, vazia. Seja L algum operador do tipo $L = (-\Delta)^l + V(x)$, em que l é algum inteiro positivo e $V(x)$, $x \in \Omega$, é uma função potencial, possivelmente nula. Gostaríamos de encontrar informações sobre números λ tais que existam funções diferenciáveis $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam:

$$L(\psi) = \lambda\psi,$$

com alguma(s) condição(ões) inicial(is) de fronteira. O espectro dos operadores aqui analisados é puramente real e discreto, seus autovalores formam uma sequência não-decrescente

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \nearrow +\infty,$$

em que sempre consideramos que cada autovalor está repetido de acordo com sua multiplicidade. Quando, nesta sequência, uma desigualdade estrita acontece (há uma infinidade delas, já que a sequência não é limitada) dizemos que ocorreu uma lacuna, um salto ou um *gap*.

Estamos focados em estudar *cotas universais* de autovalores dos operadores desejados. São chamadas assim por que, apesar de dependerem da geometria de M^n, não dependem da escolha particular do domínio Ω, a menos de sua dimensão, que é a mesma dimensão de M^n. Em sua grande maioria, elas possuem o os formatos que veremos a seguir, em que F representa alguma expressão que depende das variáveis apresentadas. Podemos estimar uma possível lacuna entre o k-ésimo e o $(k+1)$-ésimo autovalores:

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq F(n, k, l, \lambda_1, ..., \lambda_k). \tag{1}$$

Outra estimativa muito estudada é aquela que permite, para alguma potência p, avaliar, para qualquer inteiro positivo k, a soma

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^p \leq F(n, k, l, \lambda_1, ..., \lambda_k). \tag{2}$$

Uma cota do tipo (2) será chamada cota para soma arbitrária, cota para autovalores de ordem arbitrária, etc. Para $p = 2$ ela é dita desigualdade tipo-Yang (cf. Capítulo 2).

Finalmente, nossos métodos permitem encontrar boas estimativas do tipo

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{i+1} - \lambda_1)^p \leq F(n, l, \lambda_1), \tag{3}$$

e expressões assim serão referidas como cotas para somas pequenas, cotas para autovalores de ordem inferior, etc. Mais comumente, são encontradas na literatura cotas para somas pequenas com $p = 1$ ou $p = \frac{1}{2}$.

Paine, Pólya e Weinberger [40, 33, 31, 41] propuseram estudos sobre autovalores desde a década de 1950, e seus resultados vêm sendo aprimorados por muitos matemáticos desde então.

Se $l = 1$ o problema se refere, como uma das possíveis interpretações, à Teoria do Som (cf. [34]) e os autovalores são proporcionais aos quadrados das frequências fundamentais de vibração de uma membrana elástica homogênea. Este caso foi bem estudado desde os trabalhos de Weyl e Courant-Hilbert (cf. [43, 15]). Em alguns estudos, a bola se mostra um domínio para extremos. Por exemplo, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & em \ \ \Omega \subseteq M^n, \\ \\ u = 0 & sobre \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

em que $M^n = \mathbb{R}^2$ temos um tambor vibrando. Para domínios com determinada área fixada, o menor autovalor é obtido quando Ω é uma bola. Isso quer dizer que membranas esféricas produzem sons mais graves do que qualquer outro formato, daí que não há baterias com bumbos quadrados. Para dimensão unitária, poderíamos modelar as frequências das cordas de um violão. Um exemplo de cota arbitrária bastante famosa para o problema acima, adotando $M^n = \mathbb{R}^n$, é a Desigualdade de Yang:

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\lambda_i. \tag{5}$$

Vale verificar a última seção do capítulo 2 para ler mais sobre ela.

Para $l = 2$, temos a equação de vibração de uma placa metálica com bordos fixos, possivelmente com alguma carga distribuída sobre ela. A medição de autovalores do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda u, \quad em \ \ \Omega \\ \\ u \mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

é útil para estimativas de resistência de suportes e elevadores utilizados em grandes carregamentos. Dela se derivam informações sobre que tipo de material e dimensões apropriadas para construção conveniente de tais equipamentos. O exemplo mais conhecido de uma cota para somas pequenas para o problema, quando $M^n = \mathbb{R}^n$ é

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1) \leq 24\lambda_1.$$

Recomendamos a leitura dos capítulos 3 e 4 para mais informações.

O caso geral, para l arbitrário, é muito mais recente, pois é estudado apenas há cerca de 4 anos. Entretanto, já é possível obter desigualdades e generalizações de resultados clássicos dos problemas anteriores para l qualquer. Faz parte do anseio de matemáticos generalizar problemas conhecidos, mesmo que não haja interpretações físicas famosas para cada problema com diferentes valores de l e, de certa forma, nos lançamos com entusiasmo para tal estudo.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira. No primeiro capítulo, indicamos alguns resultados que serão de valia para o decorrer dos principais teoremas. No Capítulo 2, estudamos somas pequenas para o operador de Laplace e para o operador de Schrödinger. No Capítulo 3, mostramos uma cota arbitrária para o problema generalizado do Biharmônico. Nos dois últimos capítulos, encontramos estimativas de autovalores de ordem inferior para o Poli-harmônico em domínios limitados de $\mathbb{R}^n$ e da esfera unitária.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos algumas observações necessárias para os próximos, e resultados básicos serão estabelecidos. No que se segue ao longo deste texto, Ω denotará um domínio limitado em uma Variedade Riemanniana Completa n-dimensional imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$, $(N \geq n)$. Sempre suporemos que sua fronteira $\partial\Omega$ é de classe C^∞ e será dita simplesmente suave. Denotamos por ν o campo vetorial normal, unitário, exterior a $\partial\Omega$, $divX$ o divergente de um campo vetorial X e a integral $\int_\Omega f(x)dx$, em que dx será sempre a medida usual de Lebesgue, será escrita da maneira mais singela $\int_\Omega f$.

1.1 Teoremas Gerais

Começamos com um teorema conhecido.

Teorema 1.1.1 (do Divergente) *Sejam X um campo de vetores suave em um aberto que contém algum compacto contendo Ω e ν o campo unitário normal e exterior a $\partial\Omega$. Então,*

$$\int_\Omega (divX)dx = \int_{\partial\Omega} (X \cdot \nu)dA. \tag{1.1}$$

O Teorema do Divergente nos leva a boas conclusões. Por exemplo, para $h, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suaves, podemos definir $X = h\nabla f$ e teremos a Identidade de Green:

$$\int_\Omega (\nabla h \nabla f + h\Delta f)dx = \int_{\partial\Omega} h\frac{\partial f}{\partial \nu} dA. \tag{1.2}$$

Se $\frac{\partial f}{\partial \nu} \equiv 0$ ou $h \equiv 0$ em $\partial\Omega$, então teremos

$$\int_\Omega \nabla h \nabla f = -\int_\Omega h\Delta f, \tag{1.3}$$

que é conhecida como Fórmula de Integração por Partes. Para $u, v \in L^2(\Omega)$, tais que

$$u \mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid_{\partial\Omega} = v \mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \mid_{\partial\Omega} = 0,$$

vale, aplicando o Teorema do Divergente duas vezes, $\int_\Omega u\Delta v = \int_\Omega v\Delta u$, ou seja, o operador Laplaciano é auto-adjunto para tais funções, considerando o produto interno em $L^2(\Omega)$. Mais geralmente, note que se uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$f \mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial f}{\partial \nu} \mid_{\partial\Omega} = ... = \frac{\partial^{l-1} f}{\partial \nu^{l-1}} \mid_{\partial\Omega} = 0,$$

então, para $l = 2q$ vale

$$f \mid_{\partial\Omega} = \nabla f \mid_{\partial\Omega} = \Delta f \mid_{\partial\Omega} = \nabla(\Delta f) \mid_{\partial\Omega} = ... = \Delta^{q-1} f \mid_{\partial\Omega} = \nabla(\Delta^{q-1} f) \mid_{\partial\Omega} = 0,$$

e se $l = 2q + 1$ temos

$$f \mid_{\partial\Omega} = \nabla f \mid_{\partial\Omega} = \Delta f \mid_{\partial\Omega} = \nabla(\Delta f) \mid_{\partial\Omega} = ... = \nabla(\Delta^{q-1} f) \mid_{\partial\Omega} = \Delta^q f \mid_{\partial\Omega} = 0.$$

Observando as igualdades acima, concluímos que para cada par de funções $u, v \in L^2(\Omega)$ tais que

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}} = 0,$$
$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} v}{\partial \nu^{l-1}} = 0,$$

em $\partial\Omega$, teremos $\int_\Omega u(-\Delta)^l v = \int_\Omega v(-\Delta)^l u$.

Utilizaremos nas demonstrações uma desigualdade bastante elementar. É obvio que para $a, b \in \mathbb{R}$ e para todo $\epsilon > 0$

$$\left(a\sqrt{\epsilon} \pm \frac{b}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2 \geq 0,$$

assim,

$$\pm 2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}.$$

Para um produto interno em algum espaço de Hilbert a desigualdade também vale, particularmente em $L^2(\Omega)$ temos

$$\pm 2\langle u, v\rangle = \pm 2\int_\Omega uv \leq \epsilon ||u||^2 + \frac{||v||^2}{\epsilon},$$

com $||u||^2 = \int_\Omega u^2$.

Recordemos um resultado clássico em Geometria Riemanniana.

Teorema 1.1.2 (de Nash) *Se M^n é uma variedade riemanniana completa, então ela pode ser imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$, para algum $N \geq n$.*

Para mais detalhes, recomendamos [30].

Seja H o campo vetorial curvatura média de M^n, normal a M^n, tal que $|H|$ é o traço da segunda forma fundamental da imersão, gostaríamos de definir a grandeza H_0^2 como segue.

Definição 1.1.3 *Seja χ o conjunto de todas as imersões isométricas $\xi : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, então definimos*

$$H_0^2 = inf_{\xi\in\chi}(sup_{x\in\Omega}|H|^2).$$

Por simplicidade, vamos nos referir nos enunciados dos teoremas como $H_0^2 := sup_{x\in\Omega}|H|^2$, mas está implícito que tomamos a melhor imersão possível para minimizá-la.

Definição 1.1.4 *Dados dois operadores A e B em um espaço vetorial, definimos o Colchete de Lie como o operador*

$$[A, B] = AB - BA.$$

É óbvio que o Colchete de Lie é bilinear e anti-simétrico, ou seja, $[A, B] = -[B, A]$.

1.2 Teoremas Específicos

Retomamos o tema discutido na Introdução. Para $x \in \Omega$, os operadores do tipo $L = (-\Delta)^l + V(x)$ (às vezes teremos $V \equiv 0$), os autovalores satisfazem certas propriedades importantes. Se um determinado número λ é tal que $L(\psi) = \lambda\psi$ para alguma função suave (no mínimo, de classe $C^2(\Omega)$) $0 \not\equiv \psi \in L^2(\Omega)$, dizemos que ψ é um autovetor, ou autofunção, correspondente ao autovalor λ. O subespaço de $L^2(\Omega)$ das soluções da equação é dito autoespaço de λ e a multiplicidade deste autovalor é definida como dimensão de seu autoespaço. Reunimos alguns fatos importantes a seguir.

Teorema 1.2.1 *Com respeito aos autovalores dos operadores aqui considerados, assegura-se que*

1. *cada autovalor de L é real,*

2. *cada autoespaço de cada autovalor tem dimensão finita,*

3. *autoespaços de autovalores diferentes são ortogonais,*

4. *$L^2(\Omega)$ é a soma direta de todos os autoespaços.*

O item 2 do teorema acima é equivalente a dizer que a multiplicidade de cada autovalor é finita. Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em [16].

Teorema 1.2.2 (Espectral) *Considerando o problema de autovalores de L, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *se repetirmos cada autovalor levando em conta sua multiplicidade, podemos escrever*

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots,$$

   em que $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$.

2. *existe uma base ortonormal $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$, tal que cada u_k é uma autofunção correspondente a λ_k.*

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [16] e [5]. Por fim, temos uma excelente caracterização variacional de autovalores.

Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Rayleigh) *Cada autovalor λ_k satisfaz*

$$\lambda_k = min \frac{\int_\Omega \phi L(\phi)}{\int_\Omega ||\phi||^2}, \tag{1.4}$$

em que o mínimo é tomado sobre todas as funções $\phi \in L^2(\Omega), \phi \not\equiv 0$, tais que, se $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal correspondente a cada autovalor, temos

$$\langle u_j, \phi \rangle_{L^2} = 0,$$

para $j = 1, 2, ...k-1$, e a condição de fronteira é satisfeita como segue

$$\phi \mid_\Omega = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \mid_\Omega = ... = \frac{\partial^{l-1} \phi}{\partial \nu^{l-1}} \mid_\Omega = 0.$$

As funções ϕ, que satisfazem as hipóteses do teorema acima (chamadas condições de ortogonalidade e de fronteira), são chamadas funções-teste, ou funções experimentais. Determinar boas funções-teste que possam ser colocadas em (1.4) é, por si só, um trabalho importante. Da Desigualdade de Rayleigh encontramos estimativas para autovalores, visto que, as funções ϕ desejáveis sempre estão relacionadas com autofunções do problema considerado. Ela será usada em todas as provas dos teoremas dos próximos capítulos, exceto um. Vale ressaltar que uma autofunção de λ_k realiza a igualdade em (1.4). O leitor interessado pode encontrar uma demonstração e versões mais gerais deste teorema em [6] e [41].

Para terminar nossas preliminares, enunciamos um lema.

Lema 1.2.4 *Sejam x_i, $i = 1, 2, ..., N$, as coordenadas do vetor posição de uma variedade riemanniana completa M^n isometricamente imersa em $\mathbb{R}^N$ e sejam Δ e ∇ os operadores Laplaciano e Gradiente, respectivamente, em M^n, com a métrica induzida. Então, para cada função real e suave $u : \Omega \subseteq M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ valem:*

$$\sum_{i=1}^{N} \langle \nabla x_i, \nabla u \rangle^2 = |\nabla u|^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} |\nabla x_i|^2 = n$$

$$\sum_{i=1}^{N} (\Delta x_i)^2 = n^2 |H|^2 \leq n^2 H_0^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \nabla x_i = 0.$$

Uma prova do Lema 1.2.4 pode ser lida em [8, 12]. Particularmente, para a esfera unitária,

$$\mathbb{S}^n(1) = \left\{ (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1 \right\}$$

teremos as seguintes conclusões:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla x_i, \nabla u \rangle^2 = |\nabla u|^2$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\nabla x_i|^2 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(\Delta x_i)^2 = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\Delta x_i \nabla x_i = 0.$$

Capítulo 2

Autovalores do Laplaciano em Variedades Riemannianas

Neste capítulo trataremos de desigualdades sobre autovalores do Laplaciano em um domínio limitado de uma variedade riemanniana, M^n, n-dimensional, completa e com fronteira $\partial\Omega$, suposta suave. Encontramos cotas para autovalores de ordem inferior e fornecemos uma demonstração da Desigualdade de Yang.

2.1 Introdução

Começamos considerando o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & em \;\; \Omega \subseteq M^n, \\ \\ u = 0 & sobre \; \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

O problema descreve vibrações de uma membrana com bordo fixo. Os autovalores estão relacionados com as frequências harmônicas de vibração de uma membrana, sendo relacionados com teorias acústicas.

Para os autovalores do Problema (2.1) há diversas desigualdades derivadas por muitos matemáticos. Citamos algumas.

Se $M^n = \mathbb{R}^n$, Payne, Pólya e Weinberger [31] provaram, para qualquer k inteiro positivo:

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{kn} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \tag{2.2}$$

que foi melhorada por Hile e Protter em [19],

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{kn}{4}. \tag{2.3}$$

Claro que podemos obter (2.2) substituindo cada λ_i do denominador de (2.3) por λ_k, portanto vemos que (2.2) foi realmente melhorada. Entretanto, a melhor estimativa para cotas de autovalores de ordem arbitrária de (2.1) é devida a Yang [44]:

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\lambda_i. \tag{2.4}$$

Esta desigualdade data de 1991 e jamais conseguiu ser superada. Tornou-se, assim, um marco, uma referência para muitos pesquisadores. Desigualdades tipo-Yang para outros problemas foram motivadas por esta, e obteve-se sucesso na maioria dos casos. Ao final deste capítulo, damos uma demonstração para (2.4).

Para estimativas de ordem inferior também há resultados interessantes para o Problema (2.1) quando $M^n = \mathbb{R}^n$. Payne, Pólya e Weinberger [31] encontraram para $n = 2$

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1} \leq 6. \tag{2.5}$$

Depois esta estimativa foi melhorada por Brands [4]

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1} \leq 3 + \sqrt{7},$$

Hile e Protter [19]

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1} \leq 5,622$$

e em [29] Marcellini encontrou

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1} \leq (15 + \sqrt{345})/6 \cong 5,5957.$$

Uma generalização para (2.5) para outras dimensões $n \geq 2$ foi dada por Ashbaugh e Benguria em [3], a saber,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1} \leq (n+4)\lambda_1. \tag{2.6}$$

Nosso próximo passo é generalizar (2.6) para Variedades Riemannianas.

2.2 Sobre somas pequenas de autovalores

O seguinte resultado foi obtido, simultaneamente, em 2008 pelo autor desta tese e por Guangyue Huang, Xingxiao Li e Ruiwei Xu em [25]. Como foi feito de maneira absolutamente independente, ele faz parte do presente texto e está demonstrado a seguir. O leitor interessado pode ler mais em [26].

Teorema 2.2.1 *Seja $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ uma variedade riemanniana n-dimensional completa, imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$. Seja Ω um domínio limitado em M^n, com fronteira $\partial\Omega$ suave. Então, os autovalores do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad \text{em} \ \ \Omega \\ \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

satisfazem

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1} \leq (n+4)\lambda_1 + n^2 H_0^2,$$

em que $H_0^2 := sup_{x\in\Omega}|H|^2$ *e* $|H|$ *é a norma do vetor curvatura média de* M^n.

Demonstração

Seja $y = (y^1, ..., y^N)$ o vetor posição da imersão de M^n. Observe, inicialmente, que podemos escrever, para cada função coordenada y_i,

$$\overline{\nabla} y_i = \nabla y_i + \nabla^N y_i,$$

em que $\overline{\nabla}$ é o gradiente de $\mathbb{R}^n$, ∇^N sua parte normal a M^n e ∇ o gradiente de M^n. Note que $|\overline{\nabla} y_i|^2 = 1$ e

$$|\overline{\nabla} y_i|^2 = |\nabla y_i|^2 + |\nabla^N y_i|^2.$$

Portanto,

$$|\nabla y_i|^2 \leq 1. \tag{2.8}$$

Sejam $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ as autofunções ortonormais do problema de Dirichlet correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, ou seja, satisfazem

$$\begin{cases} (-\Delta)u_i = \lambda_i u_i, \\ \\ u_i \mid_{\partial\Omega} = 0, \\ \\ \int_\Omega u_i u_j = \delta_{ij}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Seja $A = (a_{ij})$ a matriz $N \times N$ dada por

$$a_{ij} = \int_\Omega y_i u_1 u_{j+1},$$

decorre do Teorema de Eliminação de Gauss que existem $B = (b_{ij})$ triangular superior e $T = (t_{ij})$ ortogonal, tais que

$$B = TA,$$

ou seja,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{N} t_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega t_{ik} y_k u_1 u_{j+1} = 0, \qquad 1 \leq j < i.$$

Adotando $x_i = \sum_{k=1}^{N} t_{ik} y_k$ sabemos que x_i são novas coordenadas dadas pela rotação (possivelmente com reflexão), dada pela matriz T, das antigas coordenadas y_i.

Portanto, com as novas coordenadas, temos que

$$\int_\Omega x_i u_1 u_j = 0, \qquad 1 < j \leq i. \tag{2.10}$$

Considere as funções-teste dadas por

$$\phi_i = x_i u_1 - a^i u_1 \tag{2.11}$$

com $a^i = \int_\Omega x_i u_1^2$. Claramente,

$$\phi_i \mid_{\partial\Omega} = 0,$$

e observe que (2.10) implica

$$\int_\Omega \phi_i u_j = 0 \tag{2.12}$$

sempre que $1 < j \leq i$ com $i = 1, ..., N$. Para $j = 1$ temos que

$$\int_\Omega \phi_i u_1 = \int_\Omega x_i u_1^2 - a^i \int_\Omega u_1^2 = \int_\Omega x_i u_1^2 - a^i = 0 \tag{2.13}$$

pela definição de a^i.

Juntando (2.12) e (2.13) concluímos, para $1 \leq j \leq i$

$$\int_\Omega \phi_i u_j = 0. \tag{2.14}$$

A desigualdade de Rayleigh-Ritz fornece

$$\lambda_{i+1} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_i|^2}{\int_\Omega \phi_i^2}. \tag{2.15}$$

É fácil ver que (2.14) implica

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi_i^2 &= \int_\Omega \phi_i (x_i u_1 - a^i u_1) \\ &= \int_\Omega \phi_i x_i u_1. \end{aligned}$$

Estimamos:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\phi_i|^2 &= -\int_\Omega \phi_i\Delta\phi \\
&= -\int_\Omega \phi_i\Delta(x_iu_1 - a^iu_1) \\
&= -\int_\Omega \phi_i(\Delta(x_iu_1) - a^i\Delta u_1) \\
&= -\int_\Omega \phi_i\left(x_i\Delta u_1 + u_1\Delta x_i + 2\nabla x_i\nabla u_1 + a^i\lambda_1u_1\right) \\
&= -\int_\Omega \phi_i\left(x_i\Delta u_1 + u_1\Delta x_i + 2\nabla x_i\nabla u_1\right) - a^i\lambda_1\int_\Omega \phi_iu_1 \\
&= -\int_\Omega \phi_i\left(x_i\Delta u_1 + u_1\Delta x_i + 2\nabla x_i\nabla u_1\right) \\
&= -\int_\Omega \phi_i\left(-\lambda_1x_iu_1 + u_1\Delta x_i + 2\nabla x_i\nabla u_1\right) \\
&= \lambda_1\int_\Omega \phi_ix_iu_1 - \int_\Omega \phi_i\left(u_1\Delta x_i + 2\nabla x_i\nabla u_1\right) \\
&= \lambda_1\int_\Omega \phi_i^2 - \int_\Omega \phi_i\{(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1\}. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Introduzindo (2.16) em (2.15) ficamos com

$$
(\lambda_{i+1} - \lambda_1)||\phi^i||^2 \leq -\int_\Omega \phi_i\{(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1\} := h_i. \qquad (2.17)
$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz permite concluir que

$$
h_i^2 \leq ||\phi^i||^2||(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1||^2,
$$

donde, multiplicando por $(\lambda_{i+1} - \lambda_1)$ resulta

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{i+1} - \lambda_1)h_i^2 &\leq (\lambda_{i+1} - \lambda_1)||\phi^i||^2||(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1||^2 \\
&\leq h_i||(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1||^2,
\end{aligned}
$$

assim,

$$(\lambda_{i+1}-\lambda_1)h_i \leq ||(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1||^2. \tag{2.18}$$

Agora computamos,

$$\begin{aligned}
h_i &= -\int_\Omega \phi_i\{(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1\}\\
&= -\int_\Omega (x_iu_1 - a^iu_1)\{(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1\}\\
&= a^i\int_\Omega \{(\Delta x_i)u_1^2 + 2u_1\nabla x_i\nabla u_1\} - \int_\Omega (x_iu_1)\{(\Delta x_i)u_1 + 2\nabla x_i\nabla u_1\}\\
&= a^i\int_\Omega \{(\Delta x_i)u_1^2 + \nabla x_i\nabla u_1^2\} - \int_\Omega \{(\Delta x_i)x_iu_1^2 + \frac{1}{2}\nabla x_i^2\nabla u_1^2\}\\
&= a^i\int_\Omega \{(\Delta x_i)u_1^2 + \nabla x_i\nabla u_1^2\}\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(x_i)^2\nabla u_1^2 - \int_\Omega u_1^2x_i\Delta x_i.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Pelo Teorema do Divergente, vemos que

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega u_1^2x_i\Delta x_i &= \int_\Omega \nabla(u_1^2x_i)\nabla x_i\\
&= \int_\Omega |u_1\nabla x_i|^2 + \int_\Omega x_i\nabla x_i\nabla u_1^2\\
&= \int_\Omega |u_1\nabla x_i|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(x_i)^2\nabla u_1^2
\end{aligned} \tag{2.20}$$

e

$$\int_\Omega u_1^2\Delta x_i = -\int_\Omega \nabla x_i\nabla u_1^2. \tag{2.21}$$

Substituindo (2.20) e (2.21) em (2.19) vemos, facilmente, que

$$h_i = \int_\Omega |u_1\nabla x_i|^2 = ||u_1\nabla x_i||^2,$$

que juntando com (2.18) nos dá

$$(\lambda_{i+1} - \lambda_1)||u_1 \nabla x_i||^2 \leq ||u_1 \Delta x_i + 2\nabla x_i \nabla u_1||^2. \tag{2.22}$$

Somando em i de 1 até N e usando o Lema 1.2.4, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} ||u_1 \Delta x_i + 2\nabla x_i \nabla u_1||^2 &= \int_\Omega u_1^2 \sum_{i=1}^{N} (\Delta x_i)^2 + 4 \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} (\nabla x_i \nabla u_1)^2 \\
&\quad + 4 \int_\Omega u_1 \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \nabla x_i \nabla u_1 \\
&\leq n^2 H_0^2 \int_\Omega u_1^2 + 4 \int_\Omega |\nabla u_1|^2 \\
&= n^2 H_0^2 + 4\lambda_1 \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

e

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u_1^2 |\nabla x_i|^2 = n\lambda_1. \tag{2.24}$$

Veja que (2.22), (2.23) e (2.24) mostram

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_{i+1} ||u_1 \nabla x_i||^2 \leq n^2 H_0^2 + (n+4)\lambda_1. \tag{2.25}$$

Já que (2.8) pode ser vista com as coordenadas x_i, temos

$$1 - |\nabla x_i|^2 \geq 0.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \lambda_{i+1}|\nabla x_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1}|\nabla x_i|^2 + \sum_{i=n+1}^{N} \lambda_i|\nabla x_i|^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1}|\nabla x_i|^2 + \lambda_{n+1} \sum_{i=n+1}^{N} |\nabla x_i|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1}|\nabla x_i|^2 + \lambda_{n+1} \left(n - \sum_{i=1}^{n} |\nabla x_i|^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1}|\nabla x_i|^2 + \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - |\nabla x_i|^2\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1}|\nabla x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1} \left(1 - |\nabla x_i|^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1} \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

e o resultado segue de (2.25) e (2.26), concluindo a demonstração.

Obtivemos mais um resultado semelhante que generaliza ainda mais a desigualdade anterior. Antes de mais considerações, precisamos do seguinte lema algébrico. Os primeiros a se utilizarem do lema a seguir para estimativas com autovalores foram Levitin e Parnovski [27].

Lema 2.2.2 *Seja $(E, \langle , \rangle)$ um espaço de Hilbert real, considere H e G operadores auto-adjuntos com domínios D_H e D_G, respectivamente, e suponha que $G(D_H) \subseteq D_H \subseteq D_G$. Se $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base de autofunções ortonormais em E correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ do operador H, então,*

$$
-\frac{1}{2} \langle [[H, G], G]u_j, u_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle [H, G]u_j, u_k \rangle^2}{\lambda_k - \lambda_j}. \qquad (2.27)
$$

Demonstração

Claramente, $[H,G]$ é um operador anti-simétrico, portanto

$$\begin{aligned}\langle G[H,G]u_j, u_j\rangle &= -\langle [[H,G],G]u_j, u_j\rangle + \langle [H,G]Gu_j, u_j\rangle \\ &= -\langle [[H,G],G]u_j, u_j\rangle - \langle Gu_j, [H,G]u_j\rangle \\ &= -\langle [[H,G],G]u_j, u_j\rangle - \langle u_j, G[H,G]u_j\rangle .\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle G[H,G]u_j, u_j\rangle = -\frac{1}{2}\langle [[H,G],G]u_j, u_j\rangle . \tag{2.28}$$

Note que

$$\begin{aligned}\langle [H,G]u_j, u_k\rangle &= \langle HGu_j, u_k\rangle - \langle GHu_j, u_k\rangle \\ &= \langle Gu_j, Hu_k\rangle - \lambda_j \langle Gu_j, u_k\rangle \\ &= \lambda_k \langle Gu_j, u_k\rangle - \lambda_j \langle Gu_j, u_k\rangle \\ &= (\lambda_k - \lambda_j)\langle Gu_j, u_k\rangle ,\end{aligned} \tag{2.29}$$

assim, sempre que $\lambda_k - \lambda_j = 0$ teremos $\langle [H,G]u_j, u_k\rangle = 0$ e podemos escrever

$$\frac{\langle [H,G]u_j, u_k\rangle}{\lambda_k - \lambda_j} = \langle Gu_j, u_k\rangle \tag{2.30}$$

mesmo quando $\lambda_k - \lambda_j = 0$, convencionando $\frac{0}{0} = 0$. Na soma em (2.27) as parcelas inconvenientes serão simplesmente anuladas.

Observe que

$$\begin{aligned}[H,G]u_j &= (HG - GH)u_j \\ &= HGu_j - \lambda_j Gu_j \\ &= (H - \lambda_j)Gu_j\end{aligned}$$

e, como G é auto-adjunto, ficamos com

$$\begin{aligned}
\langle G[H,G]u_j, u_j\rangle &= \langle G(H-\lambda_j)Gu_j, u_j\rangle \\
&= \langle (H-\lambda_j)Gu_j, Gu_j\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (H-\lambda_j)Gu_j, u_k\rangle \langle Gu_j, u_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle Gu_j, (H-\lambda_j)u_k\rangle \langle Gu_j, u_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k-\lambda_j) \langle Gu_j, u_k\rangle^2 . \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Agora junte (2.28), (2.30) e (2.31) para ver

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle [H,G]u_j, u_k\rangle^2}{\lambda_k-\lambda_j} &= \langle G[H,G]u_j, u_j\rangle \\
&= -\frac{1}{2} \langle [[H,G],G]u_j, u_j\rangle
\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração.

Vamos mostrar, em seguida, mais um teorema. Ele apresenta uma generalização nunca vista para variedades riemannianas. Agora, estimamos a soma de quaisquer n autovalores consecutivos, sem precisarmos começar por λ_1. Até onde o autor conhece, esta é a cota mais geral para somas pequenas de autovalores do Laplaciano em variedades. Sua demonstração é a mais supreendente deste trabalho, já que é a única que não faz uso da Desigualdade de Rayleigh. Ela vale tanto para o operador $-\Delta$ bem como para o operador de Schrödinger $-\Delta + V(x)$, sendo $V \geq 0$ uma função potencial. Apresentamos, então, uma demonstração com a segunda opção.

Teorema 2.2.3 *Seja $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ uma variedade riemanniana n-dimensional completa, imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$. Seja Ω um domínio limitado em M^n com fronteira $\partial\Omega$. Suponha que λ_i seja o i-ésimo autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = \lambda u & em \quad \Omega, \\ \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0, \qquad em \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.32}$$

em que a função potencial é contínua no fecho de Ω, não-negativa, $V(x) \geq V_0 \geq 0$. Então vale, para cada l inteiro positivo,

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{l+i} - \lambda_l) \leq 4(\lambda_l - V_0) + n^2 H_0^2 \tag{2.33}$$

em que $H_0^2 := sup_{x\in\Omega}|H|^2$ e $|H|$ é a norma do vetor curvatura média de M.

Demonstração

Vamos utilizar o Lema 2.2.2, adotando $E = L^2(\Omega)$ com $\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv$. Adotamos $H = -\Delta + V$ e $G = x_l$ é o operador de multiplicação pela coordenada x_l de $\mathbb{R}^N$. O conjunto de autofunções $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$, satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_i + Vu_i = \lambda_i u_i, \\ \\ u_i\,|_{\partial\Omega} = 0, \\ \\ \int_\Omega u_i u_j = \delta_{ij}. \end{cases} \tag{2.34}$$

Vamos calcular o termo

$$-\frac{1}{2}\langle[[H, G], G]u_j, u_j\rangle\,.$$

Primeiramente, computamos

$$\begin{aligned}
-[[H,G],G]u_j &= -[H,G]Gu_j + G[H,G]u_j \\
&= -HGGu_j + 2GHGu_j - GGHu_j \\
&= (\Delta - V)(x_l^2 u_j) - 2x_l(\Delta - V)(x_l u_j) + x_l^2(\Delta - V)u_j \\
&= \Delta(x_l^2 u_j) - 2x_l \Delta(x_l u_j) + x_l^2 \Delta u_j \\
&= u_j \Delta(x_l^2) + 2\nabla(x_l)^2 \nabla u_j + 2x_l^2 \Delta u_j \\
&\quad -2x_l\{u_j \Delta x_l + 2\nabla x_l \nabla u_j + x_l \Delta u_j\} \\
&= 2u_j(x_l \Delta x_l + |\nabla x_l|^2) + 2x_l \nabla x_l \nabla u_j + 2x_l^2 \Delta u_j \\
&\quad -2x_l\{u_j \Delta x_l + 2\nabla x_l \nabla u_j + x_l \Delta u_j\} \\
&= 2u_j |\nabla x_l|^2,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\langle [[H,G],G]u_j, u_j\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle 2|\nabla x_l|^2 u_j, u_j\right\rangle \\
&= |\nabla x_l|^2.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Resta estimar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle [H,G]u_j, u_k\rangle^2}{\lambda_k - \lambda_j}$$

e começamos com o numerador:

$$\begin{aligned}
[H,G]u_j &= HGu_j - GHu_j \\
&= (-\Delta + V)(x_l u_j) - x_l(-\Delta + V)u_j \\
&= (-\Delta)(x_l u_j) - x_l(-\Delta)u_j \\
&= u_j(-\Delta)x_l - 2\nabla x_l \nabla u_j,
\end{aligned}$$

assim, com o Lema 1.2.4, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{N} ||[H,G]u_j||^2 &= \sum_{l=1}^{N} ||u_j \Delta x_l + 2\nabla x_l \nabla u_j||^2 \\
&= \int u_j^2 \sum_{l=1}^{N} (\Delta x_l)^2 + 4 \int u_j \sum_{l=1}^{N} \Delta x_l \nabla x_l \nabla u_j \\
&\quad +4 \int \sum_{l=1}^{N} (\nabla x_l \nabla u_j)^2 \\
&\leq n^2 H_0^2 \int u_j^2 + 4 \int |\nabla u_j|^2 \\
&= n^2 H_0^2 + 4 \int u(-\Delta u + Vu - Vu) \\
&\leq n^2 H_0^2 + 4(\lambda_j - V_0). \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Considere, para cada j fixado, a matriz $N \times N$ dada por $A = (a_{lm})$ em que

$$a_{lm} = \langle [H, x_l]u_j, u_{j+m} \rangle$$

e podemos escolher coordenadas x_l convenientes para que A seja uma matriz triangular superior. De fato, pelo Teorema de Eliminação de Gauss existem $B = (b_{ij})$ triangular superior e $T(t_{ij})$ ortogonal tais que

$$B = TA$$

ou seja,

$$b_{im} = \sum_{p=1}^{N} t_{ip} a_{pm} = \left\langle [H, \sum_{p=1}^{N} t_{ip} x_p] u_j, u_{j+m} \right\rangle$$

e escolheríamos novas coordenadas $y_i = \sum_{p=1}^{N} t_{ip} x_p$. Por simplicidade, manteremos a notação com x_l. Então, nessas coordenadas, A será uma matriz triangular superior, ou seja, $a_{lm} = 0$ sempre que $m < l$. Analisamos, agora, o termo

$$\frac{\langle [H,G]u_j,u_k\rangle^2}{\lambda_k-\lambda_j} = \frac{\langle [H,x_l]u_j,u_k\rangle^2}{\lambda_k-\lambda_j} \tag{2.38}$$

Primeiro, se $\lambda_k - \lambda_j < 0$, então (2.38) é não-positivo. Como A é triangular superior, sabemos que (2.38) é zero para $k = j+1, \cdots, j+l-1$. Se $\lambda_k - \lambda_j = 0$ então (2.38) também é zero (veja (2.29)) e esses termos são desprezados no somatório. Portanto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que o primeiro termo do tipo (2.38) positivo ocorre quando $k = j+l$, e assim teremos para todo k inteiro positivo

$$\frac{\langle [H,x_l]u_j,u_k\rangle^2}{\lambda_{j+l}-\lambda_j} \geq \frac{\langle [H,x_l]u_j,u_k\rangle^2}{\lambda_k-\lambda_j}. \tag{2.39}$$

Já que o denominador do lado esquerdo de (2.39) não depende de k é fácil ver que

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\langle [H,x_l]u_j,u_k\rangle^2}{\lambda_{j+l}-\lambda_j} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle [H,x_l]u_j,u_k\rangle^2}{\lambda_k-\lambda_j}. \tag{2.40}$$

Como as funções u_k são uma base de $L^2(\Omega)$ temos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle [H,x_l]u_j,u_k\rangle^2 = ||[H,x_l]u_j||^2.$$

Voltamos à igualdade (2.27) no Lema 2.2.2, segue de (2.36) e (2.40)

$$\begin{aligned}
|\nabla x_l|^2 &= -\frac{1}{2}\langle [[H,G],G]u_j,u_j\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle [H,G]u_j,u_k\rangle^2}{\lambda_k-\lambda_j} \\
&\leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\langle [H,x_l]u_j,u_k\rangle^2}{\lambda_{j+l}-\lambda_j} \\
&= \frac{||[H,x_l]u_j||^2}{\lambda_{j+l}-\lambda_j},
\end{aligned}$$

portanto,

$$(\lambda_{j+l}-\lambda_j)|\nabla x_l|^2 \leq ||[H,x_l]u_j||^2. \tag{2.41}$$

Somando (2.41) para $l = 1, \cdots, N$, teremos, com (2.37)

$$\sum_{l=1}^{N}(\lambda_{j+l} - \lambda_j)|\nabla x_l|^2 \leq 4(\lambda_j - V_0) + n^2 H_0^2. \tag{2.42}$$

Note que $|\nabla x_l|^2 \leq 1$ e assim

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{N} \lambda_{j+l}|\nabla x_i|^2 &= \sum_{l=1}^{n}(\lambda_{j+l} - \lambda_j)|\nabla x_l|^2 + \sum_{l=n+1}^{N}(\lambda_l - \lambda_j)|\nabla x_l|^2 \\
&\geq \sum_{l=1}^{n}(\lambda_{j+l} - \lambda_j)|\nabla x_l|^2 + (\lambda_{j+n} - \lambda_j)\sum_{l=n+1}^{N}|\nabla x_l|^2 \\
&= \sum_{l=1}^{n}(\lambda_{j+l} - \lambda_j)|\nabla x_l|^2 + (\lambda_{j+n} - \lambda_j)\left(n - \sum_{l=1}^{n}|\nabla x_l|^2\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n}(\lambda_{j+l} - \lambda_j)|\nabla x_l|^2 + (\lambda_{j+n} - \lambda_j)\sum_{l=1}^{n}\left(1 - |\nabla x_l|^2\right) \\
&\geq \sum_{l=1}^{n}(\lambda_{j+l} - \lambda_j)|\nabla x_l|^2 + \sum_{l=1}^{n}(\lambda_{j+l} - \lambda_j)\left(1 - |\nabla x_l|^2\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n}(\lambda_{j+l} - \lambda_j). \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

É fácil ver que (2.42) e (2.43) mostram o pedido.

Temos os seguintes óbvios corolários.

Corolário 2.2.4 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.2.3, pondo $V \equiv 0$, concluímos que vale para cada l inteiro positivo,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{l+i} \leq (n+4)\lambda_l + n^2 H_0^2, \tag{2.44}$$

para autovalores do Problema de Dirichlet.

Corolário 2.2.5 *Sob as mesmas hipóteses do Corolário 2.2.4, se $M^n = \mathbb{S}^n(1)$, então vale para cada l inteiro positivo,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{l+i} \leq (n+4)\lambda_l + n^2. \tag{2.45}$$

Corolário 2.2.6 *Sob as mesmas hipóteses do Corolário 2.2.4, se M^n está minimamente imersa em $\mathbb{R}^n$, então vale para cada l inteiro positivo,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{l+i} \leq (n+4)\lambda_l. \tag{2.46}$$

É evidente que o corolário acima generaliza ainda mais (2.6). Não são conhecidas pelo autor outras cotas para somas pequenas de problemas de autovalor em variedades riemannianas que possam começar de um autovalor diferente de λ_1.

2.3 A desigualdade de Yang

Na seção anterior exploramos estimativas sobre somas de autovalores com apenas n parcelas. Para um número arbitrário de parcelas, o grande resultado é de Yang, como foi observado na introdução deste capítulo. Daremos uma demonstração elegante a fim de guiar o leitor para o próximo capítulo.

Teorema 2.3.1 (Desigualdade de Yang) *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave. Então, os autovalores do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad \text{em} \ \ \Omega \\ \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.47}$$

satisfazem, para qualquer k inteiro positivo,

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\lambda_i \tag{2.48}$$

Demonstração Sejam $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ as autofunções do problema de Dirichlet correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, ou seja, satisfazem

$$\begin{cases} (-\Delta)u_i = \lambda_i u_i, \\ \\ u_i \mid_{\partial\Omega} = 0, \\ \\ \int_\Omega u_i u_j = \delta_{ij}. \end{cases} \tag{2.49}$$

Considere $g = x_\alpha$ alguma coordenada do $\mathbb{R}^n$ (isto evitará mais índices no que segue) e defina

$$\phi_i = gu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j$$

com

$$a_{ij} = \int_\Omega g u_i u_j = a_{ji}.$$

É evidente que $\phi_i \mid_{\partial\Omega} = 0$ e para qualquer $m = 1, ..., k$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi_i u_m &= \int_\Omega g u_i u_m - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \int_\Omega u_m u_j \\ &= \int_\Omega g u_i u_m - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \delta_{mj} \\ &= \int_\Omega g u_i u_m - a_{im} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Isso implica que ϕ_i pode ser utilizada na Desigualdade de Rayleigh e

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_i|^2}{||\phi_i||^2}. \tag{2.51}$$

Segue de (2.50) que

$$||\phi_i||^2 = \int_\Omega \phi_i(gu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_j) = \int_\Omega \phi_i g u_i,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\phi_i|^2 &= -\int_\Omega \phi_i \Delta\phi_i \\
&= -\int_\Omega \phi_i(u_i\Delta g + 2\nabla g\nabla u_i + g\Delta u_i) \\
&= -\int_\Omega \phi_i(2\nabla g\nabla u_i - g\lambda_i u_i) \\
&= \lambda_i||\phi_i||^2 - 2\int_\Omega \phi_i\nabla g\nabla u_i. \qquad (2.52)
\end{aligned}$$

Portanto, adotando

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \int_\Omega u_j\nabla g\nabla u_i \\
&= -\int_\Omega u_i\nabla g\nabla u_j \\
&= -b_{ji} \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

e observando (2.51) e (2.52) ficamos com

$$\begin{aligned}
(\lambda_{k+1} - \lambda_i)||\phi_i||^2 &= -2\int_\Omega \phi_i\nabla g\nabla u_i \\
&= -2\int_\Omega gu_i\nabla g\nabla u_i + 2\sum_{j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}. \qquad (2.54)
\end{aligned}$$

É simples notar que

$$
\begin{aligned}
\lambda_j a_{ij} &= \int_\Omega g u_i \lambda_j u_j \\
&= \int_\Omega g u_i(-\Delta u_j) \\
&= \int_\Omega u_j(-\Delta g u_i) \\
&= \int_\Omega u_j(-2\nabla g \nabla u_i + g\lambda_i u_i) \\
&= -2b_{ij} + \lambda_i a_{ij} \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

implica

$$
2b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij}. \qquad (2.56)
$$

Além disso, o Teorema do Divergente e

$$
\Delta x_\alpha^2 = 2
$$

mostram que

$$
\begin{aligned}
-2\int_\Omega g u_i \nabla g \nabla u_i &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla g^2 \nabla u_i^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega u_i^2 \Delta g^2 \\
&= \int_\Omega u_i^2 \\
&= 1, \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

ou seja, (2.54) se torna

$$
(\lambda_{k+1} - \lambda_i)||\phi_i||^2 = 1 + (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij}^2. \qquad (2.58)
$$

Como o termo

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)$$

é anti-simétrico em relação a i e j, temos que o somatório nulo:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i+\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j)+\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2 \end{aligned}$$

implica

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j) = -\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2. \tag{2.59}$$

Multiplique (2.58) por $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2$ e temos, somando para $i=1,...,k$

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^3||\phi_i||^2 = \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2+\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 a_{ij}^2 := h. \tag{2.60}$$

Ademais, elevamos ao quadrado a seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
& -2\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_\Omega \phi_i\nabla g\nabla u_i \\
= \ & \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2+2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 a_{ij}b_{ij} \\
= \ & \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j) \\
= \ & \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2-\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2 \\
= \ & \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2-4\sum_{i,j=1}^{k}b_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i) \\
\equiv \ & h, \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

e obtemos, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e (2.60),

$$
\begin{aligned}
h^2 &= \left(-2\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_\Omega \phi_i\nabla g\nabla u_i\right)^2 \\
&= \left(-2\sum_{i=1}^{k}\int_\Omega \phi_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{3}{2}}\left[\nabla g\nabla u_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{1}{2}}\right]\right)^2 \\
&= \left(-2\sum_{i=1}^{k}\int_\Omega \phi_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{3}{2}}\left[\nabla g\nabla u_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{1}{2}}+\sum_{j=1}^{k}d_{ij}u_j\right]\right)^2 \\
&\leq 4\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^3||\phi_i||^2\sum_{i=1}^{k}\int_\Omega\left[\nabla g\nabla u_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{1}{2}}+\sum_{j=1}^{k}d_{ij}u_j\right]^2 \\
&\leq 4h\sum_{i=1}^{k}\int_\Omega\left[(\nabla g\nabla u_i)^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)+2\sum_{j=1}^{k}d_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{1}{2}}u_j\nabla g\nabla u_i\right] \\
&\quad +4h\sum_{i,j=1}^{k}d_{ij}^2. \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$d_{ij} = -(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^{\frac{1}{2}} b_{ij}$$

e simplificando, (2.62) se torna

$$h \leq 4 \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_{\Omega} (\nabla g \nabla u_i)^2 - 4 \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}^2 (\lambda_{k+1} - \lambda_i). \tag{2.63}$$

Segue de (2.63), (2.60) e (2.61) que

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_{\Omega} (\nabla g \nabla u_i)^2, \tag{2.64}$$

e podemos somar (2.64) para $\alpha = 1, ..., n$, lembrando que $g = x_\alpha$ e

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Omega} (\nabla g \nabla u_i)^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Omega} (\nabla x_\alpha \nabla u_i)^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 = \lambda_i$$

para ver que

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \lambda_i \tag{2.65}$$

que é a Desigualdade de Yang.

O grande passo para conseguir esta estimativa tão famosa está em somar o termo

$$\sum_{j=1}^{k} d_{ij} u_j$$

em (2.62). Já que $\int_\Omega \phi_i u_j = 0$ para $j = 1, ..., k$ estamos somando zero! Entretanto, isso nos permite lidar com outros termos, cancelando alguns deles que são indesejáveis. Este truque ficou conhecido depois que Yang apresentou sua demonstração, e será usado no próximo capítulo, na demonstração do Teorema 3.2.1. Esta foi a inestimável contribuição de Yang para que várias outras estimativas fossem determinadas.

Capítulo 3

Autovalores do Bi-harmônico em Variedades Riemannianas

Neste capítulo, apresentamos algumas considerações sobre o problema do bi-harmônico e citamos alguns resultados conhecidos. Depois, provamos uma desigualdade tipo-Yang, ou seja, uma cota para autovalores de ordem arbitrária para o problema generalizado em domínios limitados de variedades riemannianas completas.

3.1 Introdução

Seja Ω um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^n$. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda u, \quad em \;\; \Omega \\ \\ u \mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

que descreve vibrações características de uma placa fixada em equilíbrio. Ele é chamado de Problema do Bi-harmônico de Dirichlet, ou *clamped plate problem*. Conhecer seus autovalores significa obter informações sobre a resistência de flexibilidade de uma placa metálica sob certas condições experimentais.

Em 1956, Payne, Pólya e Weiberger [31] provaram que autovalores do problema (3.1) satisfazem

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{8(n+2)}{n^2 k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.$$

Como uma generalização, Hile e Yeh [20] obtiveram

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{n^2 k^{\frac{3}{2}}}{8(n+2)} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hook [21], Chen e Qian [9] provaram, independentemente, a seguinte desigualdade

$$\frac{n^2 k^2}{8(n+2)} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \right).$$

Mais recentemente, em 2006, Cheng e Yang [13] obtiveram o seguinte formidável resultado

$$\lambda_{k+1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq \left(\frac{8(n+2)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Como consequência de (3.2), podemos obter uma cota superior para o $(k+1)$-ésimo autovalor em termos dos autovalores anteriores do problema (3.1):

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} \leq & \left(1 + \frac{4(n+2)}{n^2} \right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \\ & + \left\{ \left(\frac{4(n+2)}{n^2} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right)^2 - \frac{8(n+2)}{n^2} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Logo depois, em 2007, Wang e Xia [36] demonstraram que vale, em domínios de uma variedade minimamente imersa em $\mathbb{R}^N$,

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \left(\frac{8(n+2)}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

que implica

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} \;\leq\; & \left(1+\frac{4(n+2)}{n^2}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \\ & + \left\{\left(\frac{4(n+2)}{n^2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - \left(1+\frac{8(n+2)}{n^2}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)\end{aligned}$$

É trivial perceber que (3.5) é mais forte que (3.3). Para domínios limitados em $\mathbb{R}^n$ Wang e Xia provaram, no mesmo artigo,

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Estes são alguns resultados conhecidos em termos de estimativas para autovalores de ordem arbitrária do problema (3.1). Para desigualdades de autovalores de ordem inferior, podemos citar dois resultados anunciados por Ashbaugh [1] e provados posteriormente em [11]

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}^{\frac{1}{2}}-\lambda_1^{\frac{1}{2}}) \leq 4\lambda_1^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1) \leq 24\lambda_1.$$

3.2 Desigualdade tipo-Yang para o Bi-harmônico em Variedades Riemannianas

Como foi afirmado, o problema (3.1) descreve vibrações em equilíbrio de uma placa fixada. Podemos adicionar ao operador bi-harmônico uma função potencial $V(x)$ e considerar que a densidade da placa é dada pela lei $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, não-uniforme. O seguinte problema de autovalores é dito generalizado

$$\begin{cases} \Delta^2 u + V(x)u = \lambda\rho(x)u, \quad em \;\; \Omega \\ \\ u\mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\mid_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

As funções V e ρ são contínuas no fecho de Ω e portanto assumem máximo e mínimo. Consideramos que V_0 seja o valor mínimo de $V(x)$ e, ainda, que m e M sejam o mínimo e máximo de $\rho(x)$, respectivamente. Nosso próximo resultado fornece uma cota similar à Desigualdade de Yang para os autovalores do problema generalizado acima, considerando que Ω é algum domínio limitado de uma variedade riemanniana isometricamente imersa em $\mathbb{R}^N$. Para este problema, sejam u, v vetores arbitrários em $L^2(\Omega)$ e consideramos o seguinte produto interno:

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = \int_\Omega \rho uv$$

que nos dá a norma

$$||u||^2 = \int_\Omega \rho u^2.$$

Conseguimos um resultado que é similar à Desigualdade de Yang.

Teorema 3.2.1 *Seja $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ uma variedade riemanniana n-dimensional completa, imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$. Seja Ω um domínio limitado em M^n, com fronteira $\partial\Omega$ suave. Então, os autovalores do problema*

$$
\begin{cases}
\Delta^2 u + V(x)u = \lambda\rho(x)u, \qquad em \ \ \Omega \\
\\
u \mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid_{\partial\Omega} = 0,
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

em que a função potencial é contínua no fecho de Ω, não-negativa, $V(x) \geq V_0 \geq 0$, e a função densidade é contínua no fecho de Ω, positiva com $0 < m \leq \rho(x) \leq M$, para todo $x \in \Omega$, satisfazem, para qualquer k inteiro positivo,

$$
\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4M^2}{n^2 m}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\frac{n^2H_0^2}{m}+(2n+4)\mu_i\right)\left(\frac{n^2H_0^2}{4}+\mu_i\right), \tag{3.8}
$$

em que $\mu_i = \left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $H_0^2 := sup_{x\in\Omega}|H|^2$ e $|H|$ é a norma do vetor curvatura média de M^n.

Demonstração

Para não carregar a notação com muitos indíces vamos adotar $g = x_\alpha$ alguma coordenada da imersão de M^n em $\mathbb{R}^N$, $\alpha = 1, ..., N$. Sejam $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ as autofunções ortonormais do problema (3.7) correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, ou seja, satisfazem

$$
\begin{cases}
\Delta^2 u_i + V(x)u_i = \lambda_i\rho u_i \qquad em \ \ \Omega \\
\\
u \mid_{\partial\Omega} = u \mid_{\partial\Omega} = 0, \\
\\
\int_\Omega \rho u_i u_j = \delta_{ij}.
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

Para utilizar a Desigualdade de Rayleigh vamos definir

$$
\phi_i = gu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_j,
$$

em que $a_{ij} = \int_\Omega \rho g u_i u_j$. É fácil ver que ϕ_i é ortogonal a u_l sempre que $l \leq k$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho\phi_i u_l &= \int_\Omega \rho g u_i u_l - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \int_\Omega \rho u_l u_j \\
&= \int_\Omega \rho g u_i u_l - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\delta_{lj} \\
&= \int_\Omega \rho g u_i u_l - a_{il} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Seja $S = \Delta^2 + V$, temos que

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\int_\Omega \phi_i S \phi_i}{\int_\Omega \rho\phi_i^2}. \tag{3.10}$$

Estimamos o numerador de (3.10), sabendo que $\int_\Omega \rho\phi_i^2 = \int_\Omega \rho\phi_i g u_i$,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \phi_i S\phi_i &= \int_\Omega \phi_i S(gu_i) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\int_\Omega \phi_i S u_j \\
&= \int_\Omega \phi_i S(gu_i) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\lambda_j \int_\Omega \rho\phi_i u_j \\
&= \int_\Omega \phi_i S(gu_i) \\
&= \int_\Omega \phi_i \Delta^2(gu_i) + \int_\Omega V\phi_i g u_i \\
&= \int_\Omega \phi_i \Delta(u_i\Delta g + 2\nabla g\nabla u_i + g\Delta u_i) + \int_\Omega V\phi_i g u_i \\
&= \int_\Omega \phi_i [u_i\Delta^2 g + 2\nabla u_i \nabla\Delta g + 2\Delta u_i \Delta g \\
&\quad +2\Delta(\nabla g\nabla u_i) + 2\nabla g\nabla\Delta u_i + g\Delta^2 u_i] + \int_\Omega V\phi_i g u_i \\
&= \int_\Omega \phi_i [u_i\Delta^2 g + 2\nabla u_i \nabla\Delta g + 2\Delta u_i \Delta g + 2\Delta(\nabla g\nabla u_i) + 2\nabla g\nabla\Delta u_i] \\
&\quad + \int_\Omega \phi_i g(\Delta^2 + V)u_i \\
&= \int_\Omega \phi_i p_i + \int_\Omega \phi_i g\rho\lambda_i u_i \\
&= \lambda_i \int_\Omega \rho\phi_i^2 + \int_\Omega \phi_i p_i,
\end{aligned}
$$

em que

$$
p_i = u_i\Delta^2 g + 2\nabla u_i\nabla\Delta g + 2\Delta u_i\Delta g + 2\Delta(\nabla g\nabla u_i) + 2\nabla g\nabla\Delta u_i.
$$

Portanto, adotando $w_i = \int_\Omega g u_i p_i$ e $s_{ij} = \int_\Omega u_j p_i$, vale,

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\int_\Omega \rho\phi_i^2 &\le \int_\Omega \phi_i p_i \\
&= w_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}s_{ij}.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

É simples notar que o Teorema do Divergente implica

$$
\begin{aligned}
2\int_\Omega g u_i \nabla u_i \nabla(\Delta g) &= \int_\Omega g \nabla u_i^2 \nabla(\Delta g)\\
&= -\int_\Omega (u_i^2) div(g\nabla(\Delta g))\\
&= -\int_\Omega u_i^2 \nabla g \nabla(\Delta g) - \int_\Omega u_i^2 g \Delta^2 g\\
&= \int_\Omega (\Delta g) div(u_i^2 \nabla g) - \int_\Omega u_i^2 g\Delta^2 g\\
&= \int_\Omega u_i^2 (\Delta g)^2 + \int_\Omega \Delta g \nabla u_i^2 \nabla g - \int_\Omega u_i^2 g \Delta^2 g\\
&= \int_\Omega u_i^2 (\Delta g)^2 + 2\int_\Omega u_i \nabla u_i \nabla g \Delta g - \int_\Omega u_i^2 g\Delta^2 g, \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\int_\Omega g u_i \nabla g \nabla \Delta u_i &= -2\int_\Omega (\Delta u_i) div(g u_i \nabla g)\\
&= -2\int_\Omega |\nabla g|^2 u_i \Delta u_i - 2\int_\Omega g \Delta u_i \nabla u_i \nabla g\\
&\quad -2\int_\Omega g u_i \Delta g \Delta u_i, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
2\int_\Omega g u_i \Delta(\nabla g \nabla u_i) &= 2\int_\Omega \Delta(g u_i) \nabla g \nabla u_i\\
&= 2\int_\Omega u_i \Delta g \nabla g \nabla u_i + 2\int_\Omega g \Delta u_i \nabla g \nabla u_i\\
&\quad +4\int_\Omega (\nabla g \nabla u_i)^2. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Somando os termos de (3.12), (3.13) e (3.14) com

$$
\int_\Omega g u_i^2 \Delta^2 g + 2\int_\Omega g u_i \Delta u_i \Delta g
$$

vemos que alguns termos se cancelam e w_i pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
w_i &= \int_\Omega g u_i^2 \Delta^2 g + 2\int_\Omega g u_i \nabla u_i \nabla \Delta g + 2\int_\Omega g u_i \Delta u_i \Delta g \\
&\quad + \int_\Omega g u_i \Delta(\nabla g \nabla u_i) + 2\int_\Omega g u_i \nabla g \nabla \Delta u_i \\
&= \int_\Omega \left(u_i^2 (\Delta g)^2 + 4 u_i \Delta g \nabla g \nabla u_i - 2|\nabla g|^2 u_i \Delta u_i + 4(\nabla g \nabla u_i)^2 \right). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Agora, calculamos

$$\begin{aligned}
\lambda_j a_{ij} &= \int_\Omega u_i g \rho \lambda_j u_j \\
&= \int_\Omega u_i g (\Delta^2 + V) u_j \\
&= \int_\Omega u_i g \Delta^2 u_j + \int_\Omega V g u_i u_j \\
&= \int_\Omega \Delta^2 (u_i g) u_j + \int_\Omega V g u_i u_j \\
&= \int_\Omega \left(u_i \Delta^2 g + 2\nabla u_i \nabla \Delta g + 2\Delta u_i \Delta g + 2\Delta(\nabla u_i \nabla g) + 2\nabla g \nabla \Delta u_i \right) u_j \\
&\quad + \int_\Omega g u_j (\Delta^2 u_i + V u_i) \\
&= \int_\Omega u_j p_i + \int_\Omega g u_j (\Delta^2 u_i + V u_i) \\
&= s_{ij} + \lambda_i \int_\Omega g u_j \rho u_i \\
&= s_{ij} + \lambda_i a_{ij},
\end{aligned}$$

assim,

$$(\lambda_j - \lambda_i) a_{ij} = s_{ij}. \qquad (3.16)$$

Logo, podemos escrever (3.11) da seguinte forma:

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_\Omega \rho \phi_i^2 \leq w_i + \sum_{j=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}^2. \qquad (3.17)$$

Considere

$$
\begin{aligned}
b_{ij} &= \int_\Omega u_j(\nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2}) \\
&= -\int_\Omega div(u_j \nabla g) u_i + \int_\Omega \frac{u_j u_i \Delta g}{2} \\
&= -\int_\Omega u_i(\nabla u_j \nabla g + u_j \Delta g) + \int_\Omega \frac{u_j u_i \Delta g}{2} \\
&= -\int_\Omega u_i(\nabla g \nabla u_j + \frac{u_j \Delta g}{2}) \\
&= -b_{ji}
\end{aligned}
$$

e

$$c_i = -2\int_\Omega g u_i(\nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2}).$$

Segue diretamente que

$$c_i + 2\sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{ij} = \int_\Omega (-2)\phi_i(\nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2}). \tag{3.18}$$

Multiplicando (3.18) por $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2$ e adotando $\epsilon_i = \delta_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) > 0$ para algum $\delta_i > 0$ a ser determinado, obtemos de (3.17)

$$
\begin{aligned}
& (\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(c_i + 2\sum_{j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}) \\
= \; & (\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \int_\Omega (-2)\sqrt{\rho}\phi_i \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2}) \right) \\
= \; & (\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \int_\Omega (-2)\sqrt{\rho}\phi_i \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2} - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\sqrt{\rho}u_j) \right) \\
\leq \; & \epsilon_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \int_\Omega \rho\phi_i^2 \\
& + \frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2}{\epsilon_i} \int_\Omega \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2} - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\sqrt{\rho}u_j) \right)^2 \\
\leq \; & \delta_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^3 \int_\Omega \rho\phi_i^2 \\
& + \frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta_i} \left(|| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2} ||^2 - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2 + \sum_{j,l=1}^{k} b_{ij}b_{il} \int_\Omega \rho u_j u_l \right) \\
\leq \; & \delta_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 (w_i + \sum_{j=1}^{k}(\lambda_i - \lambda_j)a_{ij}^2) \\
& + \frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta_i} \left(|| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2} ||^2 - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2 \right). \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Lembre que $g = x_\alpha$ e podemos somar a expressão em (3.19) para $\alpha = 1, ..., N$, utilizando o Lema 1.2.4. Note que

$$
\begin{aligned}
c_i &= -2\int_\Omega g u_i (\nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2}) \\
&= -\int_\Omega g \nabla g \nabla (u_i^2) - \int_\Omega g u_i^2 \Delta g \\
&= \int_\Omega u_i^2 div(g \nabla g) - \int_\Omega g u_i^2 \Delta g \\
&= \int_\Omega u_i^2 |\nabla g|^2 \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} c_i &= \sum_{\alpha=1}^{N} \int_\Omega u_i^2 |\nabla x_\alpha|^2 \\
&= n \int_\Omega \frac{\rho u_i^2}{\rho} \\
&\geq \frac{n}{M} \int_\Omega \rho u_i^2 \\
&= \frac{n}{M}. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Observe ainda que (3.15) e

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_i|^2 &= -\int_\Omega u_i \Delta u_i \\
&\leq \left(\int_\Omega u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (\Delta u_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \frac{\rho u_i^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_i \Delta^2 u_i\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} \left(\int_\Omega (u_i \Delta^2 u_i + V u_i^2) - \int_\Omega V u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} \left(\lambda_i - V_0 \int_\Omega \frac{\rho u_i^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

implicam

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} w_i &= \sum_{\alpha=1}^{N} \int_\Omega \left(u_i^2 (\Delta x_\alpha)^2 + 4 u_i \Delta x_\alpha \nabla x_\alpha \nabla u_i - 2|\nabla x_\alpha|^2 u_i \Delta u_i + 4(\nabla x_\alpha \nabla u_i)^2\right) \\
&\leq n^2 H_0^2 \int_\Omega \frac{\rho u_i^2}{\rho} - 2n \int_\Omega u_i \Delta u_i + 4 \int_\Omega |\nabla u_i|^2 \\
&\leq \frac{n^2 H_0^2}{m} + (2n+4) \int_\Omega |\nabla u_i|^2 \\
&\leq \frac{n^2 H_0^2}{m} + (2n+4) \left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Por último, somamos em α o termo

$$||\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla g \nabla u_i + \frac{u_i \Delta g}{2}||^2$$

como segue:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} ||\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla x_\alpha \nabla u_i + \frac{u_i \Delta x_\alpha}{2}||^2 &\leq \frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{N}\int_\Omega \left((\nabla x_\alpha \nabla u_i)^2 + \frac{u_i^2(\Delta x_\alpha)^2}{4}\right) \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{N}\int_\Omega \frac{u_i \nabla u_i \nabla x_\alpha \Delta x_\alpha}{m} \\
&= \frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega u_i^2 n^2 H_0^2 \\
&\leq \frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n^2 H_0^2}{4m}. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Observando (3.21), (3.22) e (3.23) vemos que (3.19), após somada em α se torna

$$\begin{aligned}
&(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \frac{n}{M} + 2(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{ij} \\
\leq\ & \delta_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \left(\frac{n^2 H_0^2}{m} + (2n+4)\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{k}(\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}^2\right) \\
&+ \frac{(\lambda_{k+1} - \lambda_i)}{\delta_i}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n^2 H_0^2}{4m} - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2\right). \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Somamos em $i = 1, 2, ..., k$ e temos

$$
\begin{aligned}
& \frac{n}{M}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 + 2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 a_{ij}b_{ij} \\
\leq \; & \sum_{i=1}^{k}\delta_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\left(\frac{n^2H_0^2}{m} + (2n+4)\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
& + \sum_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta_i}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n^2H_0^2}{4m}\right) \\
& + \sum_{i,j=1}^{k}\delta_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}^2 - \sum_{i,j=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta_i}b_{ij}^2. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Vamos simplificar a expressão acima. Inicialmente, como $a_{ij} = a_{ij}$ e $b_{ij} = -b_{ji}$, note que o termo

$$
a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)
$$

é anti-simétrico. Assim, seu somatório é nulo:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i+\lambda_i-\lambda_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 = -\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j). \qquad (3.26)
$$

Agora defina, para $\delta > 0$

$$
\delta_i = \frac{\delta}{\frac{n^2H_0^2}{m} + (2n+4)\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}}
$$

e temos

$$(\lambda_i - \lambda_j)(\delta_i - \delta_j) \leq 0.$$

Inferimos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)(\delta_i-\delta_j) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{k} \delta_i a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{k} \delta_i a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j) - \sum_{i,j=1}^{k} \delta_i a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2 \end{aligned}$$

implica

$$\sum_{i,j=1}^{k} \delta_i a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j) \leq -\sum_{i,j=1}^{k} \delta_i a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2. \tag{3.27}$$

Considerando (3.26) e (3.27) a expressão (3.25) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &\frac{n}{M}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 - 2\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j) \\ \leq\ &\sum_{i=1}^{k}\delta_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\left(\frac{n^2H_0^2}{m} + (2n+4)\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta_i}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n^2H_0^2}{4m}\right) \\ &- \sum_{i,j=1}^{k}\delta_i a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2 - \sum_{i,j=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta_i}b_{ij}^2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Já que

$$-\sum_{i,j=1}^{k}\left(\sqrt{\delta_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij} + b_{ij}\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_i}{\delta_i}}\right)^2 \leq 0$$

vemos que vale

$$\begin{aligned}
&-2\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)\\
\geq\quad & -\sum_{i,j=1}^{k}\delta_i a_{ij}^2(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2-\sum_{i,j=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta_i}b_{ij}^2. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Assim, estes três termos podem ser retirados de (3.28). Então,

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{M}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\\
\leq\quad & \sum_{i=1}^{k}\delta_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\left(\frac{n^2H_0^2}{m}+(2n+4)\left(\frac{\lambda_i}{m}-\frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&+\sum_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta_i}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_i}{m}-\frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{n^2H_0^2}{4m}\right). \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Lembre que, para algum $\delta > 0$,

$$\delta_i=\frac{\delta}{\frac{n^2H_0^2}{m}+(2n+4)\left(\frac{\lambda_i}{m}-\frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\frac{n}{M}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \quad\leq\quad & \delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\\
&+\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\frac{n^2H_0^2}{m}+(2n+4)\left(\frac{\lambda_i}{m}-\frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&\times\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_i}{m}-\frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{n^2H_0^2}{4m}\right). \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Para minimizar o lado direito de (3.31), escolhemos

$$\delta = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\frac{n^2H_0^2}{m} + (2n+4)\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n^2H_0^2}{4m}\right)}{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e pondo $\mu_i = \left(\frac{\lambda_i}{m} - \frac{V_0}{mM}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} &\frac{n}{M}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \\ \leq\ & 2\left[\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times\left[\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\frac{n^2H_0^2}{m} + (2n+4)\mu_i\right)\left(\frac{1}{m}\mu_i + \frac{n^2H_0^2}{4m}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \\ \leq\ & \frac{4M^2}{n^2m}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\frac{n^2H_0^2}{m} + (2n+4)\mu_i\right)\left(\frac{n^2H_0^2}{4} + \mu_i\right), \end{aligned}$$

que mostra o pedido.

A demonstração segue passos semelhantes àquela de Yang, apresentada no capítulo anterior. Note que na terceira linha de (3.19) somamos uma parcela nula, que nos ajudou a cancelar alguns termos, ou seja, foi usado o mesmo truque de Yang. Temos alguns corolários, dentre os quais o primeiro é um teorema mostrado por Cheng, Ichikawa e Mametsuka em [12]. Como nosso teorema é mais geral, aqui ele aparece como consequência.

Corolário 3.2.2 *Com a mesma notação do Teorema 3.2.1 obtemos que vale, considerando o problema (3.1), considerando $\Omega \subset M^n$, variedade completa*

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(n^2H_0^2 + (2n+4)\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{n^2H_0^2}{4} + \lambda_i^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.32}$$

Demonstração Basta por $V(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 1$ e ver que $\mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}$.

Corolário 3.2.3 *Com a mesma notação do Corolário 3.2.2 temos que vale, supondo um domínio* $\Omega \subset \mathbb{S}^n(1)$,

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(n^2+(2n+4)\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{n^2}{4}+\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.33}$$

Corolário 3.2.4 *Com a mesma notação do Corolário 3.2.2 temos que vale, para* M^n *minimamente imersa em* $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{8(n+2)}{n^2}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i. \tag{3.34}$$

Este útimo corolário mostra que o Teorema 3.2.1 é, de fato, uma generalização de (3.4), em que $M^n = \mathbb{R}^n$.

Poderíamos pensar no problema ganeralizado com o Laplaciano ao invés do Bi-harmônico, a saber,

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda\rho(x)u, & em \;\; \Omega \\ \\ u\mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\nu}\mid_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.35}$$

e combinar os passos da demonstração da Desigualdade de Yang e do Teorema 3.2.1. Com a mesma notação, encontraríamos, analogamente, a seguinte generalização,

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n}\frac{M}{m}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\lambda_i-\frac{V_0}{M}+\frac{n^2H_0^2}{4m}\right). \tag{3.36}$$

Em [37], Wang e Xia apresentaram muitas considerações ao Problema (3.35), inclusive casos particulares de (3.36).

Apenas para deixar registrado, recentemente se encontrou uma estimativa de autovalores de ordem inferior para o Problema (3.1) em variedades riemannianas. Em [10], seguindo as mesmas notações aqui apresentadas, Cheng, Huang e Wei mostraram

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}} \leq \left(4\lambda_1^{\frac{1}{2}}+n^2H_0^2\right)^{\frac{1}{2}}\left((2n+4)\lambda_1^{\frac{1}{2}}+n^2H_0^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

que é a melhor estimativa de autovalores de ordem inferior conhecida para o problema e admite corolários semelhantes aos citados acima.

Capítulo 4

Autovalores do Poli-Harmônico em domínios limitados de $\mathbb{R}^n$

Passamos para o estudo de operadores mais gerais, tais como $(-\Delta)^l$ e $J = (-\Delta)^l + V(x)$, com $l \geq 3$. Seus autovalores satisfazem algumas desigualdades e aproveitamos para mostrar uma cota para somas de autovalores de ordem inferior.

4.1 Introdução

O estudo do Poli-Harmônico é bastante recente, recordemos alguns resultados para somas arbitrárias de seus autovalores. Considere o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u = \lambda u & em \;\; \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}} = 0 & em \; \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que Ω é um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^n$. A desigualdade de Payne-Pólya-Weingerger é dada por (cf. [9])

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4l(n+2l-2)}{n^2k^2} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\frac{1}{l}} \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} \right).$$

Há duas generalizações para a Desigualdade de Yang. Jost, Li-Jost, Wang e Xia provaram em [39]

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \lambda_i^{\frac{1}{l}} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2}$$

enquanto Cheng, Ichikawa e Mametsuka, [11] obtiveram

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4l(n+2l-2)}{n^2} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \lambda_i. \tag{4.3}$$

Note que para $l = 1$ (4.2) e (4.3) se reduzem à Desigualdade de Yang, sendo que a segunda possui visualização mais amigável. Para cotas de autovalores de ordem arbitrária, o Problema parece fechado. Para ordem pequena, Cheng, Ichikawa e Mametsuka, [11] mostraram, ainda,

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{i+1}^{\frac{1}{l}} - \lambda_1^{\frac{1}{l}})^{l-1} \leq (2l)^{l-1} \lambda_1^{\frac{l-1}{l}}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{i+1} - \lambda_1) \leq 4l(2l-1)\lambda_1. \tag{4.4}$$

Para o problema em $\mathbb{R}^n$ esta última estimativa generaliza claramente outras dos capítulos anteriores. Apresentamos, na próxima seção, um resultado mais geral e mais forte do que ela.

4.2 Uma estimativa para autovalores de ordem inferior

Antes do principal teorema, precisamos de dois lemas.

Lema 4.2.1 *Sejam* $\{A_k\}_{k=1}^l$ *e* $\{B_k\}_{k=1}^l$ *duas sequências não-decrescentes. Então, para cada permutação* $\{i_1, ..., i_n\}$ *de* $\{1, ..., n\}$ *vale*

$$\sum_{k=1}^{l} A_k B_{i_k} \geq A_1 B_l + A_2 B_{l-1} + \cdots + A_l B_1.$$

O lema admite uma interpretação probabilística. De fato, se considerarmos uma distribuição de probabilidades A_j, com $\sum_{j=1}^{l} A_j = 1$ com pesos B_j, então o lema afirma que a menor soma ocorre se atribuímos os maiores pesos para as menores probabilidades. Para uma demonstração, veja [17].

Precisamos agora de uma estimativa para algumas integrais, que aparecerão neste e no próximo capítulo, em termos de potências dos autovalores. Isto será dado pelo próximo lema. Para este resultado, devemos supor, ainda, que $1 \leq m \leq \rho(x) \leq M$, para qualquer $x \in \Omega$ pois isso nos dará $\int_\Omega u^2 \leq 1$. Esta hipótese adicional não é tão restritiva, já que podemos tomar a densidade da placa metálicada como tendo densidade mínima normalizada. De fato, normalmente ocorre de a placa ser homogênea (densidade constante, podendo ser $\rho \equiv 1$) e estar suportando alguma carga, regiões em que teríamos $\rho > 1$. A hipótese $0 \leq V_0 \leq V(x)$ permanece inalterada.

Lema 4.2.2 *Seja* $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ *uma variedade riemanniana n-dimensional completa, imersa isometricamente em* $\mathbb{R}^N$*. Seja* Ω *um domínio limitado em* M*, com fronteira* $\partial\Omega$ *suave. Suponha que* $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ *seja uma base ortonormal de autofunções do problema*

$$
\begin{cases}
(-\Delta)^l u + V(x)u = \lambda \rho u & em \quad \Omega \subseteq M^n, \\
\\
u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}} = 0 & em \ \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, *considerando suas multiplicidades, ou seja, satisfazem*

$$
\begin{cases}
(-\Delta)^l u_i + V(x)u = \lambda_i \rho u_i & em \quad \Omega \subseteq M^n, \\
\\
u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} u_i}{\partial \nu^{l-1}} = 0 & em \ \partial\Omega, \\
\\
\int_\Omega \rho u_i u_j = \delta_{ij},
\end{cases}
\tag{4.6}
$$

em que a função potencial é contínua no fecho de Ω, *não-negativa*, $V(x) \geq V_0 \geq 0$, *e a função densidade é contínua no fecho de* Ω, *positiva com* $1 \leq m \leq \rho(x) \leq M$, *para todo* $x \in \Omega$. *Então, para cada* $k = 1, 2, ..., l-1$, *vale*

$$
0 \leq \int_\Omega u_i (-\Delta)^k u_i \leq \left(\lambda_i - \frac{V_0}{M} \right)^{\frac{k}{l}}. \tag{4.7}
$$

Demonstração Vamos começar mostrando que a integral em (4.7) é não-negativa. Se $k \in \{1, 2, ..., l-1\}$ é par, utilizando o Teorema do Divergente, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_i (-\Delta)^k u_i &= \int_\Omega u_i \Delta^k u_i \\
&= \int_\Omega \Delta u_i \Delta^{k-1} u_i \\
&= \cdots \\
&= \int_\Omega (\Delta^{\frac{k}{2}} u_i)^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Para $k \in \{1, 2, ..., l-1\}$ ímpar, calculamos analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i &= -\int_\Omega u_i \Delta^k u_i \\
&= -\int_\Omega \Delta u_i \Delta^{k-1} u_i \\
&= \cdots \\
&= -\int_\Omega (\Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i)\Delta(\Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i) \\
&= \int_\Omega |\nabla(\Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i)|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade do lado esquerdo de (4.7) é verdadeira. Passamos a nos preocupar com a desigualdade do lado direito. Queremos, a princípio, mostrar que vale

$$\left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i\right)^{k+1} \leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1} u_i\right)^k \tag{4.8}$$

e procederemos com indução sobre k. Inicialmente, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, é simples notar que, para $k = 1$

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega u_i(-\Delta)u_i\right)^2 &= \left(\int_\Omega u_i \Delta u_i\right)^2 \\
&\leq \int_\Omega u_i^2 \int_\Omega (\Delta u_i)^2 \\
&\leq \frac{1}{m}\int_\Omega (\Delta u_i)^2 \\
&\leq \int_\Omega u_i \Delta^2 u_i.
\end{aligned}$$

Agora, suponha que (4.8) vale para $k-1$, ou seja,

$$\left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k-1} u_i\right)^k \leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i\right)^{k-1}. \tag{4.9}$$

Quando k é par, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i &= \int_\Omega (\Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i)\Delta(\Delta^{\frac{k}{2}}u_i) \\
&= -\int_\Omega \nabla(\Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i)\nabla(\Delta^{\frac{k}{2}}u_i) \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla(\Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla(\Delta^{\frac{k}{2}}u_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(-\int_\Omega \Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i\Delta^{\frac{k}{2}}u_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\int_\Omega \Delta^{\frac{k}{2}}u_i\Delta^{\frac{k}{2}+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(-\int_\Omega u_i\Delta^{k-1}u_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\int_\Omega u_i\Delta^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

por outro lado, se k é ímpar,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i &= \int_\Omega (-\Delta)^{\frac{k-1}{2}}u_i(-\Delta)^{\frac{k+1}{2}}u_i \\
&\leq \left(\int_\Omega \left((-\Delta)^{\frac{k-1}{2}}u_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left((-\Delta)^{\frac{k+1}{2}}u_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Assim, concluímos que, para todo $k \in \{1, 2, ..., l-1\}$, vale

$$
\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i \leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.10}
$$

Elevando (4.10) à potência $2k$, ficamos com

$$
\left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i\right)^{2k} \leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^{k} \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{k}, \tag{4.11}
$$

e podemos usar nossa hipótese de indução (4.9) em (4.11) para ver que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i\right)^{2k} &\leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k-1} u_i\right)^{k}\left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1} u_i\right)^{k}\\ &\leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k} u_i\right)^{k-1}\left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1} u_i\right)^{k}. \qquad (4.12)\end{aligned}$$

Simplificando (4.12) vemos que (4.8) é verdade e pode ser escrita como

$$\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i \leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1} u_i\right)^{\frac{k}{k+1}}. \qquad (4.13)$$

Utilizando (4.13) sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_i(-\Delta)^k u_i &\leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+1} u_i\right)^{\frac{k}{k+1}}\\ &\leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+2} u_i\right)^{\frac{k}{k+2}}\\ &\leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{k+3} u_i\right)^{\frac{k}{k+3}}\\ &\leq \cdots\\ &\leq \left(\int_\Omega u_i(-\Delta)^{l} u_i\right)^{\frac{k}{l}}\\ &\leq \left(\int_\Omega u_i[(-\Delta)^{l}+V] u_i - V_0\int_\Omega u^2\right)^{\frac{k}{l}}\\ &\leq \left(\lambda_i\int_\Omega \rho u_i^2 - \frac{V_0}{M}\int_\Omega \rho u^2\right)^{\frac{k}{l}}\\ &= \left(\lambda_i - \frac{V_0}{M}\right)^{\frac{k}{l}},\end{aligned}$$

que é o afirmado.

Consideramos, finalmente, um problema de $J = (-\Delta)^l + V(x)$ generalizado com as mesmas notações do Teorema 3.2.1, e as funções $V(x)$ e $\rho(x)$ satisfazendo as mesmas hipóteses do Lema 4.2.2. Temos o seguite teorema.

Teorema 4.2.3 *Seja Ω um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^n$. Então, os autovalores do problema*

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u + V(x)u = \lambda\rho u & em \ \ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}} = 0 & em \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.14}$$

em que a função potencial é contínua no fecho de Ω, não-negativa, $V(x) \geq V_0 \geq 0$, e a função densidade é contínua no fecho de Ω, positiva com $1 \leq m \leq \rho(x) \leq M$, para todo $x \in \Omega$, satisfazem

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1} - \lambda_1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{n-k+2} - \lambda_1) \leq \frac{M^2}{m} 4l(2l-1)\left(\lambda_1 - \frac{V_0}{M}\right). \tag{4.15}$$

Demonstração Seja $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base de autofunções ortonormais do problema (4.14) correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, ou seja, satisfazem

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u_i + V(x)u = \lambda_i \rho u_i, & em \ \ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \\ u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} u_i}{\partial \nu^{l-1}} = 0 & em \ \partial\Omega, \\ \\ \int_\Omega \rho u_i u_j = \delta_{ij}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Gostaríamos que algum sistema de coordenadas x_i para $i = 1, ..., n$ fosse tal que as condições de ortogonalidade

$$\int_\Omega \rho x_i u_1 u_j = 0, \quad 1 \leq j \leq i \leq n \tag{4.17}$$

valessem em Ω. Sejam $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ as coordenadas em $\mathbb{R}^n$. Primeiramente, escolhendo convenientemente a origem do sistema, obtemos

$$\int_\Omega \rho y_i u_1^2 = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{4.18}$$

Para tanto, basta por a origem no centro de massa generalizado, considerando a densidade de Ω distribuída conforme a lei $\rho(x)u_1^2(x)$. Já temos (4.17) para $j = 1$. Agora, considere a matriz $A = (a_{ij})$, $n \times n$, dada por

$$a_{ij} = \int_\Omega \rho y_i u_1 u_{j+1}.$$

O Teorema de Eliminação de Gauss nos fornece matrizes T e B, ortogonal e triangular superior, respectivamente, tais que

$$B = TA,$$

ou seja,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \rho t_{ik} y_k u_1 u_{j+1} = 0,$$

sempre que $1 \leq j < i$. Adotamos novas coordenadas x_i, $i = 1, ..., n$, dadas por

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} y_k$$

e vemos que (4.17) são satisfeitas.

Por conveniência, vamos adotar $u = u_1$ daqui por diante. Haverá um argumento com permutações de índices e esta medida deixará a notação mais leve.

A função experimental a ser utilizada na desigualdade de Rayleigh é

$$\phi = x_i u$$

já que valem

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} \phi}{\partial \nu^{l-1}} = 0, \qquad em\ \partial\Omega$$

e

$$\int_{\Omega} \rho\phi u_j = 0, \quad 1 \leq j \leq i \leq n.$$

É facil ver, que $\Delta x_i = 0$ fornece

$$(-\Delta)^l (x_i u) = x_i (-\Delta)^l u + 2l(-1)^l \nabla x_i \nabla (\Delta^{l-1} u). \tag{4.19}$$

A expressão acima também pode ser verificada por indução.

Assim, temos para o operador $J = (-\Delta)^l + V$

$$\begin{aligned}
\lambda_{i+1} &\leq \frac{\int_\Omega \phi J(\phi)}{||\phi||^2} \\
&= \frac{\int_\Omega x_i u((-\Delta)^l + V)(x_i u)}{\int_\Omega \rho x_i^2 u^2} \\
&= \frac{\int_\Omega x_i u(-\Delta)^l (x_i u) + \int_\Omega V x_i u}{\int_\Omega \rho x_i^2 u^2} \\
&= \frac{\int_\Omega x_i u \left(x_i[(-\Delta)^l u + V u] + 2l(-1)^l \nabla x_i \nabla (\Delta^{l-1} u) \right)}{\int_\Omega \rho x_i^2 u^2} \\
&= \frac{\int_\Omega \lambda_1 \rho x_i^2 u^2 + 2l(-1)^l \int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla (\Delta^{l-1} u)}{\int_\Omega \rho x_i^2 u^2} \\
&= \lambda_1 + \frac{2l(-1)^l \int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla (\Delta^{l-1} u)}{\int_\Omega \rho x_i^2 u^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_{i+1} - \lambda_1 \leq \frac{2l(-1)^l \int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla (\Delta^{l-1} u)}{\int_\Omega \rho x_i^2 u^2}. \tag{4.20}$$

A fração em (4.20) pode ser modificada em seu numerador e denominador. Vamos ao primeiro, observe que estamos trabalhando em $\mathbb{R}^n$ e podemos comutar as derivadas. É claro que

$$\nabla x_i \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

pode ser encarada como uma derivada, logo $\Delta^l(\nabla x_i \nabla u) = \nabla x_i \nabla(\Delta^l u)$. Utilizamos o Teorema do Divergente para estimar $\int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla(\Delta^{l-1}u)$:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla(\Delta^{l-1}u) &= -\int_\Omega (\Delta^{l-1}u) div(x_i u \nabla x_i) \\
&= -\int_\Omega \Delta^{l-1}u \left[u|\nabla x_i|^2 + x_i \nabla x_i \nabla u + x_i u \Delta x_i\right] \\
&= -\int_\Omega \Delta^{l-1}u \left[u + x_i \nabla x_i \nabla u\right]. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla(\Delta^{l-1}u) &= \int_\Omega x_i u \Delta^{l-1}(\nabla x_i \nabla u) \\
&= \int_\Omega (\nabla x_i \nabla u) \Delta^{l-1}(x_i u) \\
&= \int_\Omega \nabla x_i \nabla u \left(x_i \Delta^{l-1}u + 2(l-1)\nabla x_i \nabla(\Delta^{l-2}u)\right). \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Somando (4.21) e (4.22), o termo

$$\int_\Omega x_i \Delta^{l-1}u \nabla x_i \nabla u$$

se cancela e obtemos

$$\int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla(\Delta^{l-1}u) = \int_\Omega \left((l-1)(\nabla x_i \nabla u)(\nabla x_i \nabla(\Delta^{l-2}u)) - \frac{1}{2}u\Delta^{l-1}u\right). \qquad (4.23)$$

Agora podemos nos preocupar com o denominador de (4.20). Observe que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla u &= -\int_\Omega u \nabla x_i \nabla(x_i u) \\
&= -\int_\Omega u^2 - \int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla u
\end{aligned}
$$

implica

$$\int_\Omega u^2 = -2\int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla u.$$

Estimamos, ainda,

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_\Omega u^2 & = & \displaystyle\int_\Omega \frac{\rho u^2}{\rho} \\ & \geq & \displaystyle\frac{\int_\Omega \rho u^2}{M} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{M}.\end{array}$$

Portanto, temos

$$1 \leq -2M\int_\Omega x_i u \nabla x_i \nabla u. \tag{4.24}$$

Elevando (4.24) ao quadrado e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz infere-se

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & \displaystyle 4M^2 \int_\Omega (\nabla u \nabla x_i)^2 \int_\Omega x_i^2 u^2 \\ & = & \displaystyle 4M^2 \int_\Omega (\nabla u \nabla x_i)^2 \int_\Omega \frac{\rho x_i^2 u^2}{\rho} \\ & \leq & \displaystyle 4M^2 \int_\Omega (\nabla u \nabla x_i)^2 \frac{\int_\Omega \rho x_i^2 u^2}{m} \\ & = & \displaystyle 4\frac{M^2}{m} \int_\Omega (\nabla u \nabla x_i)^2 \int_\Omega \rho x_i^2 u^2. \end{array}$$

E o denominador pode ser estimado como

$$\frac{1}{\int_\Omega \rho x_i^2 u^2} \leq 4\frac{M^2}{m}\int_\Omega (\nabla u \nabla x_i)^2. \tag{4.25}$$

Segue de (4.23) e (4.25) que podemos escrever (4.20) como

$$
\begin{aligned}
\lambda_{i+1}-\lambda_1 &\leq \frac{2l(-1)^l\int_\Omega x_i u\nabla x_i\nabla(\Delta^{l-1}u)}{\int_\Omega \rho x_i^2u^2}\\
&\leq \left(2l(-1)^l\int_\Omega\left((l-1)(\nabla x_i\nabla u)(\nabla x_i\nabla(\Delta^{l-2}u))-\frac{1}{2}u\Delta^{l-1}u\right)\right)\\
&\quad\times\left(4\frac{M^2}{m}\int_\Omega(\nabla u\nabla x_i)^2\right)\\
&\leq \left(2l\int_\Omega\left((-1)^l(l-1)(\nabla x_i\nabla u)(\nabla x_i\nabla(\Delta^{l-2}u))+\frac{1}{2}u(-\Delta)^{l-1}u\right)\right)\\
&\quad\times\left(4\frac{M^2}{m}\int_\Omega(\nabla u\nabla x_i)^2\right). \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Defina

$$
c_i=\int_\Omega(-1)^l(\nabla x_i\nabla u)(\nabla x_i\nabla(\Delta^{l-2}u))
$$

e

$$
C=\int_\Omega u(-\Delta)^{l-1}u. \qquad (4.27)
$$

Observe que $\{\nabla x_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica e segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n c_i &= \sum_{i=1}^n\int_\Omega(-1)^l(\nabla x_i\nabla u)(\nabla x_i\nabla(\Delta^{l-2}u))\\
&= \int_\Omega(-1)^l\nabla u\nabla(\Delta^{l-2}u)\\
&= \int_\Omega\nabla u\nabla((-\Delta)^{l-2}u)\\
&= -\int_\Omega u\Delta((-\Delta)^{l-2}u)\\
&= \int_\Omega u(-\Delta)^{l-1}u\\
&= C. \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

Tome alguma permutação $\{i_1,...,i_n\}$ de $\{1,...,n\}$ de tal modo que

$$c_{i_n} \leq c_{i_{n-1}} \leq ... \leq c_{i_1}.$$

Isto e (4.28) implicam que

$$c_{i_k} \leq \frac{1}{k} C, \quad k = 1, ..., n$$

e segue de (4.26) que

$$\begin{aligned}
\lambda_{i_k+1} - \lambda_1 &\leq 8l \frac{M^2}{m} \left(\frac{l-1}{k} C + \frac{C}{2} \right) \int_\Omega (\nabla x_i \nabla u)^2 \\
&= 4l \frac{M^2}{m} \left(\frac{2(l-1)+k}{k} \right) C \int_\Omega (\nabla x_i \nabla u)^2. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

É trivial ver que

$$\begin{aligned}
1 + \frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k} &= \frac{2(l-1)+k+2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k} \\
&= \frac{2(l-1)k+k}{2(l-1)+k} \\
&= \frac{(2l-1)k}{2(l-1)+k},
\end{aligned}$$

e multiplicamos ambos os lados de (4.29) por

$$1 + \frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k},$$

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}\right)(\lambda_{i_k+1} - \lambda_1) &= \left(\frac{(2l-1)k}{2(l-1)+k}\right)(\lambda_{i_k+1} - \lambda_1) \\
&\leq 4l \frac{M^2}{m} (2l-1) C \int_\Omega (\nabla x_{i_k} \nabla u)^2. \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

Somando (4.30) para $k = 1, ..., n$ e lembrando que

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(\nabla x_i \nabla u)^2 = \int_{\Omega}|\nabla u|^2,$$

ficamos com

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1) + \sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{i_k+1}-\lambda_1) \\
= & \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}\right)(\lambda_{i_k+1}-\lambda_1) \\
\leq & \sum_{k=1}^{n} 4l\frac{M^2}{m}(2l-1)C\int_{\Omega}(\nabla x_{i_k}\nabla u)^2 \\
= & \; 4l\frac{M^2}{m}(2l-1)C\int_{\Omega}|\nabla u|^2. \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Passamos a investigar o termo

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{i_k+1}-\lambda_1).$$

Lembre que $\{i_1, ..., i_n\}$ é uma permutação de $\{1, ..., n\}$. Afirmamos que existe uma permutação $\{j_2, j_3, ..., j_n\}$ de $\{1, ..., n-1\}$ tal que

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{i_k+1}-\lambda_1) \geq \sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{j_k+1}-\lambda_1). \qquad (4.32)$$

De fato, se $i_1 = n$, então nada temos a demonstrar. Do contrário, se $i_1 = p \neq n$, então

$$\{i_2, ..., i_n\} = \{1, 2, ..., p-1, p+1, ..., n\}$$

e seja $q \in \{2, ..., n\}$ tal que $i_q = n$. Então, temos

$$\{i_2, ..., i_{q-1}, i_{q+1}, ..., i_n\} = \{1, 2, ..., p-1, p+1, ..., n-1\}.$$

Calculamos, pois

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{i_k+1}-\lambda_1) &= \sum_{k=2,k\neq q}^{n} \frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{i_k+1}-\lambda_1) \\
&\quad + \frac{2(l-1)(q-1)}{2(l-1)+q}(\lambda_{n+1}-\lambda_1) \\
&\geq \sum_{k=2,k\neq q}^{n} \frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{i_k+1}-\lambda_1) \\
&\quad + \frac{2(l-1)(q-1)}{2(l-1)+q}(\lambda_{p+1}-\lambda_1). \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

É óbvio que

$$\{i_2, ..., i_{q-1}, p, i_{q+1}, ..., i_n\} = \{1, 2, ..., p-1, p, p+1, ..., n-1\}$$

e basta por

$$i_2 = j_2, ..., i_{q-1} = j_{q-1}, p = j_q, i_{q+1} = j_{q+1}, ..., i_n = j_n$$

para ver que

$$\{j_2, j_3, ..., j_n\} = \{1, ..., n-1\}$$

é a permutação desejada que permite reescrever (4.33) como (4.32). A afirmação está provada.

Já que

$$\left\{ \frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k} \right\}_{k=2}^{n}$$

e

$$\{\lambda_k - \lambda_1\}_{k=2}^{n}$$

são sequências não-decrescentes, concluímos a partir do Lema 4.2.1 que

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{j_k+1}-\lambda_1)\geq\sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{n-k+2}-\lambda_1). \tag{4.34}$$

Finalizamos observando que (4.34), (4.32), (4.31), (4.27) e o Lema 4.2.2 implicam

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{n-k+2}-\lambda_1) \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{j_k+1}-\lambda_1) \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{i_k+1}-\lambda_1) \\
\leq\ & \frac{M^2}{m}4l(2l-1)C\int_\Omega|\nabla u|^2 \\
=\ & \frac{M^2}{m}4l(2l-1)\int_\Omega u(-\Delta)^{l-1}u\int_\Omega u(-\Delta u) \\
\leq\ & \frac{M^2}{m}4l(2l-1)\left(\lambda_1-\frac{V_0}{M}\right)^{\frac{l-1}{l}}\left(\lambda_1-\frac{V_0}{M}\right)^{\frac{1}{l}} \\
=\ & \frac{M^2}{m}4l(2l-1)\left(\lambda_1-\frac{V_0}{M}\right)
\end{aligned}$$

que é a desigualdade (4.15). A prova está completa.

Podemos voltar ao problema inicial deste capítulo, considerar $V\equiv 0$ e $\rho\equiv 1$ e obter o seguinte corolário. Vale ressaltar que ele é um teorema em [39].

Corolário 4.2.4 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.2.3, vale para o problema*

$$\begin{cases}(-\Delta)^l u=\lambda u & em\ \ \Omega\subseteq\mathbb{R}^n,\\[2ex] u=\frac{\partial u}{\partial\nu}=...=\frac{\partial^{l-1}u}{\partial\nu^{l-1}}=0 & em\ \partial\Omega,\end{cases} \tag{4.35}$$

a seguinte desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{2(l-1)(k-1)}{2(l-1)+k}(\lambda_{n-k+2}-\lambda_1)\leq 4l(2l-1)\lambda_1 \tag{4.36}$$

Claramente, (4.36) é mais forte que (4.4) e nosso teorema a generaliza como havíamos afirmado.

Capítulo 5

Autovalores do Poli-Harmônico em domínios de $\mathbb{S}^n(1)$

Procedemos como no capítulo anterior, mas consideramos domínios em $\mathbb{S}^n(1)$. Mostramos uma cota para autovalores de ordem inferior para o operador $(-\Delta)^l$ similar àquela do Corolário 4.2.4.

5.1 Introdução

Considere o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u = \lambda u & em \;\; \Omega \subseteq \mathbb{S}^n(1), \\ \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}} = 0 & em \; \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

O caso $l = 1$ se enquadra em nosso Capítulo sobre Autovalores do Laplaciano. Para $l = 2$, nossos resultados anteriores mostram

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{i+1} - \lambda_1)^{\frac{1}{2}} \leq \left(4\lambda_1^{\frac{1}{2}} + n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left((2n+4)\lambda_1^{\frac{1}{2}} + n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.2}$$

que foi demonstrada pela primeira vez em [10]. É sabido, para $l = 2$, que se tomamos $\Omega = \mathbb{S}^n$ temos

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{n+1} = n^2.$$

Isto mostra que (5.2) se torna igualdade. Por conta disso, seus autores a chamaram de desigualdade ótima.

Para o caso geral $l \geq 2$, fazendo $\Omega = \mathbb{S}^n$ vale

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{n+1} = (-n)^l. \tag{5.3}$$

Pouco foi estudado sobre o problema quando $l \geq 3$, mas Jost, Li-Jost, Wang e Xia (cf. [39]) encontraram uma desigualdade tipo-Yang, a saber,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \\ \leq \quad & \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2\left(\sum_{j=1}^{l-1}|a_j|\lambda_1^{\frac{j}{l}} + n^l\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\left(n^2 + 4\lambda_1^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

em que os coeficientes a_j serão definidos a seguir (veja (5.9)). Para somas pequenas, recentemente foi mostrada (cf. Huang e Ma [22]) a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1} - \lambda_1)^{\frac{1}{2}} \quad \leq \quad & \left(\left(\lambda_1^{\frac{1}{l}} + n\right)^l - \lambda_1 + 4[2^l - (l+1)]\lambda_1^{\frac{1}{l}}\left(\lambda_1^{\frac{1}{l}} + n\right)^{p-2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times\left(4\lambda_1^{\frac{1}{l}} + n^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Para $l = 2$, (5.5) é simplesmente (5.2). Observemos, ainda, que se $\Omega = \mathbb{S}^n$, temos (5.3) e a desigualdade (5.5) se torna igualdade. Novamente, (5.5) foi chamada ótima por seus autores. Temos uma cota semelhante a (5.5), que também se torna (5.2) para $l = 2$ e que, no sentido apresentado, também é ótima, com $\lambda_1 = 0$. Entretando, se $\lambda_1 \neq 0$ (o que acontece geralmente) podemos comparar os resultados. Daremos exemplos em que nossa desigualdade é mais forte do que (5.5).

5.2 Uma estimativa para autovalores de ordem inferior

Queremos introduzir um polinômio útil para mostrarmos a próxima desigualdade sobre autovalores em domínios esféricos. Seja l algum inteiro positivo e defina, indutivamente, para $p = 0, 1, 2, ...$, os polinômios $F_p(t)$ da seguinte forma:

$$F_0(t) = 1, \qquad F_1(t) = t - n, \tag{5.6}$$

$$F_p(t) = (2t-2)F_{p-1}(t) - (t^2 + 2t - n(n-2))F_{p-2}(t), \quad p \geq 2.$$

É simples notar que F_p é um polinômio de grau p e podemos escrever:

$$F_l(t) = a_l t^l + a_{l-1} t^{l-1} + ... + a_1 t + a_0. \tag{5.7}$$

Vamos verificar, por indução, que $a_l = 1$ e $a_0 = (-n)^l$ para cada l inteiro positivo. De fato, se $l = 1$, então (5.6) mostra o pedido.
Veremos que $a_l = 1$. Desde que estamos interessados apenas no coeficiente líder, escrevemos

$$F_m(t) = a_m t^m + R_{m-1}(t),$$

Em que $R_{m-1}(t)$ é algum polinômio de grau não maior que $m - 1$, representando apenas algum "resto"depois do termo $a_m t^m$. Suponha que $a_l = 1$ vale para $l = p - 1$ e mostraremos que vale para $l = p$. Calculamos

$$
\begin{aligned}
F_p(t) &= (2t-2)F_{p-1}(t) - (t^2+2t-n(n-2))F_{p-2}(t) \\
&= (2t-2)(t^{p-1}+R_{p-2}(t)) - (t^2+2t-n(n-2))(t^{p-2}+R_{p-3}(t)) \\
&= (2t-2)t^{p-1} - (t^2+2t-n(n-2))t^{p-2} + Q_{p-1}(t) \\
&= 2t^p - 2t^{p-1} - t^p - 2t^{p-1} + n(n-2)t^{p-2} + Q_{p-1}(t) \\
&= t^p + R_{p-1}(t),
\end{aligned}
$$

em que Q_p é um polinômio de grau não maior que p.

Agora, suponha que $a_0 = (-n)^l$ vale para $l \leq p-1$ e mostraremos que vale para $l = p$. Escrevemos

$$F_m(t) = [Q_{m-1}(t)]t + a_0,$$

e calculamos

$$
\begin{aligned}
F_p(t) &= (2t-2)F_{p-1}(t) - (t^2+2t-n(n-2))F_{p-2}(t) \\
&= (2t-2)([Q_{p-2}(t)]t + (-n)^{p-1}) - (t^2+2t-n(n-2))([Q_{p-3}(t)]t + (-n)^{p-2}) \\
&= (2t-2)(-n)^{p-1} - (t^2+2t-n(n-2))(-n)^{p-2} + [A_{p-1}(t)]t \\
&= -2(-n)^{p-1} + n(n-2)(-n)^{p-2} + [Q_{p-1}(t)]t \\
&= [Q_{p-1}(t)]t - 2(-n)^{p-1} + n^2(-n)^{p-2} - 2n(-n)^{p-2} \\
&= [Q_{p-1}(t)]t + (-n)^p,
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

em que A_p é algum polinômio de grau não maior que p. Portanto, $a_l = 1$ e $a_0 = (-n)^l$, para todo $l = 1, 2, 3...$, e retificamos

$$F_l(t) = t^l + a_{l-1}t^{l-1} + ... + a_1 t + (-n)^p. \tag{5.9}$$

Lema 5.2.1 *Com a notação acima, vale*

$$\sum_{i=1}^{n+1}\int_\Omega x_iu_1\left((-\Delta)^l(x_iu_1)-x_i(-\Delta)^lu_1\right)\leq\sum_{j=1}^{l-1}|a_j|\lambda_1^{\frac{j}{l}}+n^l, \tag{5.10}$$

em que a_j, $j=1,...,l-1$, são dados por (5.9).

Demonstração

Para quaisquer funções reais f,g, definidas em Ω, a fórmula de Böchner fornece

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= |\nabla^2 f|^2+\langle\nabla f,\nabla(\Delta f)\rangle+Ric(\nabla f,\nabla f) \\ &= |\nabla^2 f|^2+\langle\nabla f,\nabla(\Delta f)\rangle+(n-1)\left\langle\nabla f,\nabla f\right\rangle,\end{aligned} \tag{5.11}$$

em que $Ric(\cdot,\cdot)$ é o tensor de Ricci na esfera $\mathbb{S}^n$, (que tem curvatura de Ricci constante e igual a $n-1$),

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla g|^2=|\nabla^2 g|^2+\langle\nabla g,\nabla(\Delta g)\rangle+(n-1)\left\langle\nabla g,\nabla g\right\rangle, \tag{5.12}$$

e,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla(f+g)|^2 &= |\nabla^2(f+g)|^2+\langle\nabla(f+g),\nabla(\Delta(f+g))\rangle \\ &\quad +(n-1)\left\langle\nabla(f+g),\nabla(f+g)\right\rangle.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Lembre que

$$|\nabla(f+g)|^2=2\left\langle\nabla f,\nabla g\right\rangle+|\nabla f|^2+|\nabla g|^2,$$

e

$$|\nabla^2(f+g)|^2=2\left\langle\nabla^2 f,\nabla^2 g\right\rangle+|\nabla^2 f|^2+|\nabla^2 g|^2,$$

em que

$$\left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g \right\rangle = \sum_{s,t=1}^{n} \nabla^2 f(e_s, e_t) \nabla^2 g(e_s, e_t),$$

sendo $e_1, \ldots, e_n$ um referencial móvel ortonormal localmente definido em Ω.

Subtraímos (5.11) e (5.12) de (5.13), que resulta em

$$\Delta \langle \nabla f, \nabla g \rangle = 2 \left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g \right\rangle + \langle \nabla f, \nabla(\Delta g) \rangle + \langle \nabla g, \nabla(\Delta f) \rangle + 2(n-1) \langle \nabla f, \nabla g \rangle . \quad (5.14)$$

Já sabemos que, para um domínio na esfera unitária, vale

$$\nabla^2 x_i = -x_i \langle \ , \ \rangle ,$$

e

$$\Delta x_i = -n x_i, \quad i = 1, ..., n+1. \quad (5.15)$$

Assim, (5.14) pode ser particularizada tomando $f = x_i$:

$$\begin{aligned}
\Delta \langle \nabla x_i, \nabla g \rangle &= 2 \left\langle \nabla^2 x_i, \nabla^2 g \right\rangle + \langle \nabla x_i, \nabla(\Delta g) \rangle + \langle \nabla g, \nabla(\Delta x_i) \rangle + 2(n-1) \langle \nabla x_i, \nabla g \rangle \\
&= 2 \sum_{s,t=1}^{n} \nabla^2 x_i(e_s, e_t) \nabla^2 g(e_s, e_t) + \langle \nabla x_i, \nabla(\Delta g) \rangle - n \langle \nabla g, \nabla x_i \rangle \\
&\quad + 2(n-1) \langle \nabla x_i, \nabla g \rangle \\
&= -2 \sum_{s,t=1}^{n} x_i \langle e_s, e_t \rangle \nabla^2 g(e_s, e_t) + \langle \nabla x_i, \nabla(\Delta g) \rangle + (n-2) \langle \nabla x_i, \nabla g \rangle \\
&= -2 x_i \sum_{s,t=1}^{n} \delta_{st} \nabla^2 g(e_s, e_t) + \langle \nabla x_i, \nabla(\Delta g) \rangle + (n-2) \langle \nabla x_i, \nabla g \rangle \\
&= -2 x_i \sum_{t=1}^{n} \nabla^2 g(e_t, e_t) + \langle \nabla x_i, \nabla(\Delta g) \rangle + (n-2) \langle \nabla x_i, \nabla g \rangle \\
&= -2 x_i \Delta g + \langle \nabla x_i, \nabla(\Delta g) \rangle + (n-2) \langle \nabla x_i, \nabla g \rangle \\
&= -2 x_i \Delta g + \langle \nabla x_i, \nabla \left((\Delta + (n-2)) g \right) \rangle . \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Podemos calcular, por exemplo,

$$\begin{aligned}\Delta(x_i g) &= g\Delta x_i + x_i\Delta g + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla g\right\rangle \\ &= x_i(\Delta - n)g + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla g\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.17}$$

ou então, com auxílio de (5.16),

$$\begin{aligned}\Delta^2(x_i g) &= \Delta\left(g\Delta x_i + x_i\Delta g + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla g\right\rangle\right) \\ &= \Delta\left(x_i(\Delta - n)g + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla g\right\rangle\right) \\ &= \Delta\left(x_i(\Delta - n)g\right) + 2\Delta\left\langle \nabla x_i, \nabla g\right\rangle \\ &= \Delta x_i(\Delta - n)g + x_i(\Delta^2 - n\Delta)g + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla((\Delta - n)g)\right\rangle \\ &\quad +2\Delta\left\langle \nabla x_i, \nabla g\right\rangle \\ &= (-nx_i)(\Delta - n)g + x_i(\Delta^2 - n\Delta)g + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla((\Delta - n)g)\right\rangle \\ &\quad +2(-2x_i\Delta g + \left\langle \nabla x_i, \nabla\left((\Delta + (n-2))g\right)\right\rangle) \\ &= x_i(-n\Delta + n^2)g + x_i(\Delta^2 - n\Delta)g + x_i(-4\Delta)g \\ &\quad +2\left\langle \nabla x_i, \nabla\left(((\Delta - n)g) + ((\Delta + (n-2))g)\right)\right\rangle \\ &= x_i\left(\Delta^2 - 2(n+2)\Delta + n^2\right)g + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla((2\Delta + 2)g)\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.18}$$

e poderíamos continuar com

$$\Delta^3(x_i g)...$$

Entretanto, já basta para perceber que vale a seguinte sentença:
para cada $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$, infere-se de (5.15) e (5.16) que existem polinômios B_q e C_q de graus não maiores que q tais que

$$\Delta^q(x_i g) = x_i B_q(\Delta)g + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla(C_q(\Delta)g)\right\rangle. \tag{5.19}$$

Para descobrirmos mais sobre os polinômios B_q e C_q devemos investigar alguma relação recursiva em relação a seus graus e coeficientes. Inicialmente, é claro que

$$B_0 = 1, \quad B_1 = t - n, \quad C_0 = 0, \quad C_1 = 1. \tag{5.20}$$

Segue de (5.15), (5.16) e (5.19) que

$$\begin{aligned}
\Delta^q(x_i g) &= \Delta(\Delta^{q-1}(x_i g)) \\
&= \Delta(x_i B_{q-1}(\Delta)g) + 2\Delta \left\langle \nabla x_i, \nabla(C_{q-1}(\Delta)g)\right\rangle \qquad (5.21)\\
&= B_{q-1}(\Delta)g(\Delta x_i) + x_i\Delta(B_{q-1}(\Delta)g) + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla(B_{q-1}(\Delta)g)\right\rangle \\
&\quad +2\left(-2x_i\Delta(C_{q-1}(\Delta)g) + \left\langle \nabla x_i, \nabla\left((\Delta + (n-2))(C_{q-1}(\Delta)g)\right)\right\rangle\right) \\
&= x_i(-nB_{q-1}(\Delta))g + x_i\Delta(B_{q-1}(\Delta)g) + x_i(-4\Delta(C_{q-1}(\Delta))g \\
&\quad +2\left\langle \nabla x_i, \nabla\left((B_{q-1}(\Delta)g) + (\Delta + (n-2))(C_{q-1}(\Delta)g)\right)\right\rangle \\
&= x_i((\Delta - n)B_{q-1}(\Delta) - 4\Delta C_{q-1}(\Delta))g \\
&\quad +2\left\langle \nabla x_i, \nabla\left((B_{q-1}(\Delta) + (\Delta + (n-2))(C_{q-1}(\Delta)))g\right)\right\rangle. \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

Observe que (5.22) nos mostra

$$B_q(\Delta) = (\Delta - n)B_{q-1}(\Delta) - 4\Delta C_{q-1}(\Delta) \tag{5.23}$$

e

$$C_q(\Delta) = B_{q-1}(\Delta) + (\Delta + (n-2))C_{q-1}(\Delta). \tag{5.24}$$

Consequentemente, somos capazes de calcular, para qualquer $q \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
B_q(\Delta) &= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta+n-2)B_{q-1}(\Delta)-4\Delta C_{q-1}(\Delta) \\
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta+n-2)((\Delta-n)B_{q-2}(\Delta)-4\Delta C_{q-2}(\Delta)) \\
&\quad -4\Delta C_{q-1}(\Delta) \\
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta^2+2\Delta-n(n-2))B_{q-2}(\Delta)) \\
&\quad +(\Delta^2+2\Delta-n(n-2))(4\Delta C_{q-2}(\Delta))-4\Delta C_{q-1}(\Delta) \\
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta^2+2\Delta-n(n-2))B_{q-2}(\Delta) \\
&\quad +4\Delta[B_{q-2}(\Delta)+(\Delta+n-2)C_{q-2}(\Delta)-C_{q-1}(\Delta)] \\
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta^2+2\Delta-n(n-2))B_{q-2}(\Delta).
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Note que a última igualdade em (5.25) foi obtida observando que (5.24) implica

$$
B_{q-2}(\Delta)+(\Delta+n-2)C_{q-2}(\Delta)-C_{q-1}(\Delta)=0.
$$

Claramente, (5.20) e (5.25) nos mostram que $B_q = F_q$ para todo $q = 0, 1, 2, \ldots$. Já que (5.19) vale, com o polinômio F_q definido em (5.6), computamos, para $g = u_1$,

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega x_i u_1 \left((-\Delta)^l (x_i u_1) - x_i(-\Delta)^l u_1\right) \\
= & \int_\Omega x_i u_1 \left((-1)^l (x_i B_l(\Delta) u_1 + 2\left\langle \nabla x_i, \nabla(C_l(\Delta)u_1)\right\rangle) - \lambda_1 x_i u_1\right) \\
= & \int_\Omega x_i u_1 \left((-1)^l \left(x_i((\Delta)^l + a_{l-1}(\Delta)^{l-1} + ... + a_1(\Delta) + a_0)u_1\right) - \lambda_1 x_i u_1\right) \\
& \int_\Omega x_i u_1 \left((-1)^l 2\left\langle \nabla x_i, \nabla(C_l(\Delta)u_1)\right\rangle\right) \\
= & \int_\Omega x_i u_1 \left((-1)^l \left(x_i(a_{l-1}(\Delta)^{l-1} + ... + a_1(\Delta) + a_0)u_1\right)\right) \\
& \int_\Omega x_i u_1 \left((-1)^l 2\left\langle \nabla x_i, \nabla(C_l(\Delta)u_1)\right\rangle\right) \\
= & (-1)^l \int_\Omega x_i^2 u_1 (a_{l-1}(\Delta)^{l-1} + ... + a_1(\Delta) + a_0)u_1 \\
& +(-1)^l \int_\Omega u_1 \left\langle \nabla x_i^2, \nabla(C_l(\Delta)u_1)\right\rangle. \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

Para completar a demonstração basta somar (5.26) para $i = 1, 2, ..., n+1$, usar o Lema 4.2.2 e observar que

$$
\nabla\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right) = 0
$$

como segue

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n+1}\int_\Omega x_iu_1\left((-\Delta)^l(x_iu_1)-x_i(-\Delta)^lu_1\right)\\
= & \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^l\int_\Omega x_i^2u_1(a_{l-1}(\Delta)^{l-1}+...+a_1(\Delta)+a_0)u_1\\
& +\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^l\int_\Omega u_1\left\langle \nabla x_i^2,\nabla(C_l(\Delta)u_1)\right\rangle\\
= & (-1)^l\int_\Omega u_1(a_{l-1}(\Delta)^{l-1}+...+a_1(\Delta)+a_0)u_1\\
\leq & \sum_{j=1}^{l-1}|a_j|\int_\Omega u_1(-\Delta)^j(u_1)+|a_0|\int_\Omega u_1^2\\
\leq & \sum_{j=1}^{l-1}|a_j|\lambda_1^{\frac{j}{l}}+n^l. \qquad (5.27)
\end{aligned}
$$

O resultado está provado.

Estamos prontos para o último, e não menos importante, resultado desta tese.

Teorema 5.2.2 *Seja Ω um domínio com fronteira suave em $\mathbb{S}^n(1)$. Então, os autovalores do problema*

$$
\begin{cases}
(-\Delta)^lu=\lambda u & em \quad \Omega\subseteq\mathbb{S}^n(1),\\
\\
u=\frac{\partial u}{\partial\nu}=...=\frac{\partial^{l-1}u}{\partial\nu^{l-1}}=0 & em \ \partial\Omega,
\end{cases}
\qquad (5.28)
$$

satisfazem

$$
\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\leq\left(4\lambda_1^{\frac{1}{l}}+n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{l-1}|a_j|\lambda_1^{\frac{j}{l}}+n^l\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.29)
$$

em que a_j, $j=1,2,...,l-1$, são dados por 5.9.

Demonstração

Sejam $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ as autofunções ortonormais do problema (5.28) correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, ou seja, satisfazem

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u_i = \lambda_i u_i & em \;\; \Omega \subseteq \mathbb{S}^n(1), \\ \\ u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} u_i}{\partial \nu^{l-1}} = 0 & em \; \partial\Omega, \\ \\ \int u_i u_j = \delta_{ij}. \end{cases} \tag{5.30}$$

Seja $y = (y^1, ..., y^{n+1})$ o vetor posição da esfera unitária, considere a matriz $(n+1) \times (n+1)$, $A = (a_{ij})$ dada por

$$a_{ij} = \int y_i u_1 u_{j+1}.$$

O Teorema de Eliminação de Gauss nos fornece matrizes T e B, ortogonal e triangular superior, respectivamente, tais que

$$B = TA,$$

ou seja,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} t_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n+1} \int t_{ik} y_k u_1 u_{j+1} = 0,$$

sempre que $1 \leq j < i$. Adotamos novas coordenadas x_i, $i = 1, ..., n+1$, dadas por

$$x_i = \sum_{k=1}^{n+1} t_{ik} y_k$$

e podemos considerar

$$\phi_i = (x_i - a^i) u_1,$$

como funções-teste apropriadas, definindo

$$a^i = \int x_i u_1^2.$$

Note que as condições de ortogonalidade

$$\int \phi_i u_j = 0,$$

para $1 \leq j \leq i$ são satisfeitas. De fato, o caso $1 < j \leq i$ é confirmado facilmente:

$$\begin{aligned} \int \phi_i u_j &= \int x_i u_1 u_j - a^i \int u_1 u_j \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.31}$$

e para $j = 1$ temos

$$\begin{aligned} \int \phi_i u_1 &= \int x_i u_1^2 - a^i \int u_1^2 \\ &= \int x_i u_1^2 - a^i \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

As condições de fronteira

$$\phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \nu} = ... = \frac{\partial^{l-1} \phi_i}{\partial \nu^{l-1}} = 0, \quad em\ \partial\Omega,$$

também são satisfeitas. Portanto, a desigualdade de Rayleigh-Ritz nos dá

$$\lambda_{i+1} \leq \frac{\int \phi_i (-\Delta)^l \phi_i}{||\phi_i||^2}. \tag{5.33}$$

Calculamos,

$$
\begin{aligned}
\lambda_{i+1}||\phi_i||^2 &\leq \int \phi_i(-\Delta)^l\phi_i \\
&= \int \phi_i(-\Delta)^l(x_iu_1 - a^iu_1) \\
&= \int \phi_i(-\Delta)^l(x_iu_1) - a^i\int \phi_i(-\Delta)^lu_1 \\
&= \int \phi_i(-\Delta)^l(x_iu_1) - a^i\lambda_1\int \phi_iu_1 \\
&= \int \phi_i(-\Delta)^l(x_iu_1) \\
&= \int \phi_i\left([(-\Delta)^l(x_iu_1) - x_i(-\Delta)^lu_1] + \lambda_1x_iu_1\right). \qquad (5.34)
\end{aligned}
$$

Já que

$$
\begin{aligned}
||\phi||^2 &= \int \phi^2 \\
&= \int \phi(x_i - a^i)u_1 \\
&= \int \phi x_iu_1 - a^i\int \phi u_1 \\
&= \int \phi x_iu_1,
\end{aligned}
$$

temos de (5.34)

$$
\begin{aligned}
\lambda_{i+1}||\phi_i||^2 &\leq \int \phi_i\left([(-\Delta)^l(x_iu_1) - x_i(-\Delta)^lu_1] + \lambda_1x_iu_1\right) \\
&= \int \phi_i\ [(-\Delta)^l(x_iu_1) - x_i(-\Delta)^lu_1] + \lambda_1\int \phi x_iu_1 \\
&= \int \phi_i\ [(-\Delta)^l(x_iu_1) - x_i(-\Delta)^lu_1] + \lambda_1||\phi||^2.
\end{aligned}
$$

É fácil integrar por partes e concluir

$$
\begin{aligned}
\int u_1\left((-\Delta)^l(x_iu_1)-x_i(-\Delta)^l u_1\right) &= \int u_1(-\Delta)^l(x_iu_1)-\int u_1x_i(-\Delta)^l u_1\\
&= \int u_1(-\Delta)^l(x_iu_1)-\int(-\Delta)^l(u_1x_i)u_1\\
&= 0, \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

portanto,

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{i+1}-\lambda_1)||\phi_i||^2 &\le \int \phi_i\left((-\Delta)^l(x_iu_1)-x_i(-\Delta)^l u_1\right)\\
&= \int (x_iu_1-a^iu_1)\left((-\Delta)^l(x_iu_1)-x_i(-\Delta)^l u_1\right)\\
&= \int x_iu_1\left((-\Delta)^l(x_iu_1)-x_i(-\Delta)^l u_1\right)\\
&\quad -a^i\int u_1\left((-\Delta)^l(x_iu_1)-x_i(-\Delta)^l u_1\right)\\
&= \int x_iu_1\left((-\Delta)^l(x_iu_1)-x_i(-\Delta)^l u_1\right). \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

Com o Teorema do Divergente, vemos que

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega u_1x_i\langle\nabla x_i,\nabla u_1\rangle &= -\frac{1}{4}\int_\Omega\left\langle\nabla x_i^2,\nabla u_1^2\right\rangle\\
&= \frac{1}{4}\int_\Omega u_1^2\Delta x_i^2\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega u_1^2x_i\Delta x_i+\frac{1}{2}\int_\Omega u_1^2|\nabla x_i|^2. \qquad (5.37)
\end{aligned}
$$

Também é simples observar

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_1\left(\langle\nabla x_i,\nabla u_1\rangle+\frac{1}{2}u_1\Delta x_i\right) &= \int_\Omega u_1\langle\nabla x_i,\nabla u_1\rangle+\int_\Omega\frac{1}{2}u_1^2\Delta x_i\\
&= \int_\Omega u_1\langle\nabla x_i,\nabla u_1\rangle-\int_\Omega\frac{1}{2}\left\langle\nabla x_i,\nabla u_1^2\right\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Note, então, que

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \phi_i(\langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle + \frac{1}{2}u_1\Delta x_i) &= -\int_\Omega (x_i - a^i)u_1(\langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle + \frac{1}{2}u_1\Delta x_i) \\
&= -\int_\Omega u_1 x_i \langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle - \frac{1}{2}\int_\Omega u_1^2 x_i \Delta x_i \\
&\quad + a^i\left(u_1 \int_\Omega (\langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle + \frac{1}{2}u_1\Delta x_i)\right) \\
&= -\int_\Omega u_1 x_i \langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle - \frac{1}{2}\int_\Omega u_1^2 x_i \Delta x_i \\
&= \frac{1}{2}||u_1\nabla x_i||^2. \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

Graças a (5.38) e (5.36) podemos tomar

$$\epsilon = \delta(\lambda_{i+1} - \lambda_1)^{\frac{1}{2}}$$

para algum $\delta > 0$, e obtemos

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{i+1} - \lambda_1)^{\frac{1}{2}}||u_1\nabla x_i||^2 &= (\lambda_{i+1} - \lambda_1)^{\frac{1}{2}}\int_\Omega (-2)\phi_i(\langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle + \frac{1}{2}u_1\Delta x_i) \\
&\leq (\lambda_{i+1} - \lambda_1)^{\frac{1}{2}}\left(\epsilon||\phi_i||^2 + \frac{1}{\epsilon}\left|\left|\langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle + \frac{1}{2}u_1\Delta x_i\right|\right|^2\right) \\
&= \delta(\lambda_{i+1} - \lambda_1)||\phi_i||^2 + \frac{1}{\delta}\left|\left|\langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle + \frac{1}{2}u_1\Delta x_i\right|\right|^2 \\
&\leq \delta\int_\Omega x_i u_1\left((-\Delta)^l(x_i u_1) - x_i(-\Delta)^l u_1\right) \\
&\quad + \frac{1}{\delta}\left|\left|\langle \nabla x_i, \nabla u_1\rangle + \frac{1}{2}u_1\Delta x_i\right|\right|^2. \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

Com o que foi exposto nos Lemas 1.2.4 e 4.2.2 fica claro que

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n+1} \left|\left| \langle \nabla x_i, \nabla u_1 \rangle + \frac{1}{2} u_1 \Delta x_i \right|\right|^2 \\
= & \sum_{i=1}^{n+1} \int_\Omega \left(\frac{1}{4} u_1^2 (\Delta x_i)^2 + \langle \nabla x_i, \nabla u_1 \rangle^2 + \frac{1}{2} \left\langle \Delta x_i \nabla x_i, \nabla (u_1)^2 \right\rangle \right) \\
= & \frac{n^2}{4} + \int_\Omega |\nabla u_1|^2 \\
\leq & \frac{n^2}{4} + \lambda_1^{\frac{1}{l}}. \qquad (5.40)
\end{aligned}
$$

Logo, somamos (5.39) para $i = 1, ..., n+1$ e temos, com o Lema 5.2.1

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_{i+1} - \lambda_1)^{\frac{1}{2}} ||u_1 \nabla x_i||^2 \leq \delta \left(\sum_{j=1}^{l-1} |a_j| \lambda_1^{\frac{j}{l}} + n^l \right) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{n^2}{4} + \lambda_1^{\frac{1}{l}} \right). \qquad (5.41)$$

Para obter o melhor resultado, escolha

$$\delta = \left(\frac{\frac{n^2}{4} + \lambda_1^{\frac{1}{l}}}{\sum_{j=1}^{l-1} |a_j| \lambda_1^{\frac{j}{l}} + n^l} \right)^{\frac{1}{2}},$$

e (5.41) se torna

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_{i+1} - \lambda_1)^{\frac{1}{2}} ||u_1 \nabla x_i||^2 \leq \left(n^2 + 4\lambda_1^{\frac{1}{l}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{l-1} |a_j| \lambda_1^{\frac{j}{l}} + n^l \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5.42)$$

Já está claro que

$$|\nabla x_i|^2 \leq 1$$

é verdade para qualquer ponto da esfera unitária.

Claramente, (5.42) e

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n+1}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}|\nabla x_i|^2 \\
= \; & \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}|\nabla x_i|^2 + (\lambda_{n+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}|\nabla x_{n+1}|^2 \\
= \; & \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}|\nabla x_i|^2 + (\lambda_{n+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\left(n-\sum_{i=1}^{n}|\nabla x_i|^2\right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}|\nabla x_i|^2 + (\lambda_{n+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(1-|\nabla x_i|^2\right) \\
\geq \; & \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}|\nabla x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\left(1-|\nabla x_i|^2\right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.43)
\end{aligned}
$$

finalizam a demonstração.

É fácil ver que se $l = 2$, temos $F_2(t) = (t-n)^2 - 4t = t^2 - (2n+4)t + n^2$ e então (5.29) se torna (5.2). Se $\Omega = \mathbb{S}^n$, vale (5.3), donde (5.29) se torna igualdade e pode ser dita, nesse contexto, ótima. Para a classe de domínios em que $\lambda_1 \neq 0$ vamos explicitar os casos $l = 3$ e $l = 4$. Veremos que para estas particularizações, nosso teorema fornece cotas mais fortes do que (5.5). Conjecturamos que isso deve acontecer para todo $l = 3, 4, ...$

Caso $l = 3$.

(5.5) nos dá

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; & \left((3n+16)\lambda_1^{\frac{2}{3}} + (3n^2+16n)\lambda_1^{\frac{1}{3}} + n^3\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(4\lambda_1^{\frac{1}{3}} + n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

enquanto nós temos

$$F_3(t) = t^3 - (3n+12)t^2 + (3n^2+4n+8)t - n^3$$

com que (5.29) se torna

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}} &\leq \left((3n+12)\lambda_1^{\frac{2}{3}}+(3n^2+4n+8)\lambda_1^{\frac{1}{3}}+n^3\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\left(4\lambda_1^{\frac{1}{3}}+n^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5.45)
\end{aligned}
$$

Caso $l=4$.

(5.5) nos dá

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}} &\leq \left((4n+44)\lambda_1^{\frac{3}{4}}+(6n^2+88n)\lambda_1^{\frac{2}{4}}+(4n^3+44n^2)\lambda_1^{\frac{1}{4}}+n^4\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\left(4\lambda_1^{\frac{1}{4}}+n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.46)
\end{aligned}
$$

enquanto nós temos

$$
F_4(t)=t^4-(4n+24)t^3+(6n^2+16n+48)t^2-(4n^3+8n^2+16)t-n^3
$$

com que (5.29) se torna

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_1)^{\frac{1}{2}} &\leq \left((4n+24)\lambda_1^{\frac{3}{4}}+(6n^2+16n+48)\lambda_1^{\frac{2}{4}}+(4n^3+8n^2+16)\lambda_1^{\frac{1}{4}}+n^4\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\left(4\lambda_1^{\frac{1}{4}}+n^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5.47)
\end{aligned}
$$

É muito simples perceber que (5.45) e (5.47) são mais fortes que (5.44) e (5.46), respectivamente.

Referências Bibliográficas

[1] Ashbaugh, M.S.: Isoperimetric and universal inequalities for eigenvalues. In: Davies, E.B., Safarov, Y. (eds.) Spectral Theory and Geometry (Edinburgh, 1998). London Mathematics Society Lecture Notes, vol. **273**, pp. 95-139. Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[2] Mark S. Ashbaugh and Rafael D. Benguria, Universal Bounds for the low Eingenvalues of Neumann Laplacians in n Dimensions, SIAM J. Math. Anal. Vol. **24**, No 3, pp 557-570, May (1993).

[3] Ashbaugh,M.S., Benguria, R.D., More Bounds on eigenvalue ratios for Dirichlet Laplacians in n Dimensions, SIAM J. Math. Anal. Vol. **24**, pp 1622-1651, May (1993).

[4] Brands, J.J.A.M.:Bounds for the ratios of the first three membrane eigenvalues. Arch. Ration. Mech. Anal. **16**(1964) 265-268.

[5] BREZIS, Haim. Analyse fonctionnelle: Theorie et applications. Paris: Masson, 1987. 233 p.

[6] F. BRICKELL and R. S. CLARK, *Diferentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Co., London 1970, Chap.3.

[7] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.

[8] D. Chen and Q. -M. Cheng, Extrinsic estimates for eigenvalues of the Laplace operator, J. Math. Soc. Japan, **60**(2008), 325-339.

[9] Z.C. Chen, C.L. Qian, Estimates for discrete spectrum of Laplacian operator with any order, J. China Univ. Sci. Tech. **20**(1990) 259-266.

[10] Qing-Ming Cheng, Guangyue Huang and Guoxin Wei, Estimates for lower order eigenvalues of a clamped plate problem - to appear in Calculus of Variations and Partial Differential Equations.

[11] Cheng, Q.-M., Ichikawa, T., Mametsuka, S.: Inequalities for eigenvalues of Laplacian with any order. Commun. Contemp. Math. **11**, 639655 (2009).

[12] Cheng, Q.-M., Ichikawa, T., Mametsuka, S., Estimates for Eigenvalues of a Clamped Plate problem on Riemannian Manifolds, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[13] Q.M. Cheng, H.C. Yang, Inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem, Trans. Amer. Math. Soc. **358**(2006) 2625-2635.

[14] Q. -M. Cheng and H. C. Yang, Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian, Math. Ann., **337** (2007), 159-175.

[15] R. Courant and D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 3rd ed., Springer, 1968.

[16] EVANS, Lawrence C., Partial Differential Equations, Vol. 2, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[17] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, second edition, Cambridge University Press, 1994.

[18] E. M. Harrell II, Commutators, eigenvalue gaps and mean curvature in the theory of Schrödinger operators, Comm. Part. Diff. Eqns., **32** (2007), 401-413.

[19] G.N. Hile, M.H. Protter, Inequalities for eigenvalues of the Laplacian, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980) 523-538.

[20] G.N. Hile, R.Z. Yeh, Inequalities for eigenvalues of the biharmonic operator, Pacific J. Math. **112**(1984) 115-133.

[21] S.M. Hook, Domain independent upper bounds for eigenvalues of ellipitic operator, Trans. Amer. Math. Soc. **318**(1990) 615-642.

[22] G.Y. Huang, B. Ma, Lower order eigenvalues of the poly-Laplacian with any order on spherical domains, to appear eprint arXiv:0910.4096

[23] KAVIAN, Otared. Introduction à la théorie des points critiques: et application aux problèmes elliptiques. Springer-Verlag, France, Paris, 1993.

[24] P. Kröger, Upper Bounds for the Neumann Eigenvalues on a Bounded Domain in Euclidean Space, Journal of Functional Analysis **106**, 353-357 (1992).

[25] Guangyue Huang, Xingxiao Li, Ruiwei Xu, Extrinsic estimates for the eigenvalues of Schrödinger operator, Geometriae Dedicata, **143** (2009) 89-107.

[26] G.Y. Huang, Lower order eigenvalues of Schrödinger operators on submanifolds. To appear.

[27] M. Levitin, L. Parnovski, Commutators, Spectral Trace Identities, and Universal Estimates for Eigenvalues, Journal of Functional Analysis, **192** (2002) 425-445.

[28] Peter Li and Shing-Tung Yau, On the Schrödinger Equation and the Eigenvalue Problem, Commun. Math. Phys. **88**, 309-318 (1983).

[29] Marcellini, P.: Bounds for the third membrane eigenvalue. J.Diff. Equ. **37**(1980)348-443.

[30] [14] J. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math., **63** (1956), 20-63.

[31] L.E. Payne, G. Pólya, H.F. Weiberger, On the ratio of consecutive eigenvalues, J. Math. Phys. **35** (1956) 289-298.

[32] Renato H. L. Pedrosa, Uma introdução à Simetrização em Análise e Geometria, 25 Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Matemáticas, IMPA.

[33] G. Pólya, On the eigenvalues of vibrating membranes, Proc London Math. Soc. (3), **11**, (1961), 419-433.

[34] J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound*, vols. 1, 2, Dover Publications, New York, 1945 (unabridged republication of the second revised editions of 1894 (vol. 1) and 1986 (Vol. 2), Macmillan).

[35] H. Sun, Q.-M. Cheng and H.C. Yang, Lower order eigenvalues of Dirichlet Laplacian, Manuscripta Math. **125** (2008), 139-156.

[36] Q. Wang, C. Xia, Universal bounds for eigenvalues of the biharmonic operator on Riemannian manifolds, J. Funct. Anal. **245** (2007) 334-352.

[37] Q. Wang and C. Xia, Universal bounds for eigenvalues of Schrödinger operator on Riemannian manifolds. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **33** (2008), 319-336.

[38] Q. Wang and C. Xia, Inequalities for Eigenvalues of the Biharmonic Operator with Weight on Riemannian Manifolds, J. Math. Soc. Japan - to appear.

[39] Q. Wang and C. Xia, Universal Bounds for Eigenvalues of the Polyharmonic Operators - to appear.

[40] H. F. Weinberger, An isoperimetric inequality for the n-dimensional free membrane problem, J. Rational Mech. Anal.,**5** (1956), pp.633-636.

[41] WEINBERGER, Hans F. Variational methods for eigenvalue approximation. Philadelphia: Siam.

[42] F. Wu and L. F. Cao, Estimates for eigenvalues of Laplacian operator with any order, Science in China, Seri. A: Math. **50** (2007), 1078-1086.

[43] H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann. **71** (1912) 441-469.

[44] H.C. Yang, an estimate of the difference between consecutive eigenvalues, Preprint IC/91/60 og ICTP, Trieste, 1991.