Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Elípticos Quasilineares com termos Singulares, Superlineares e Convectivos

por

Manuela Caetano Martins de Rezende

Orientador: Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves
Coorientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos

Brasília

2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Elípticos Quasilineares com termos Singulares, Superlineares e Convectivos

por

Manuela Caetano Martins de Rezende *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

24 de fevereiro de 2011

Comissão Examinadora:

____
Prof. Dr. Carlos Alberto P. dos Santos – Coorientador (UnB)

____
Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva (UFG)

____
Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (UnB)

____
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFJF)

____
Prof. Dr. Simone Mazzini Bruschi (UnB)

*A autora foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Em memória de meu pai,

Antolomista Martins de Rezende.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por amparar-me e fortalecer-me a cada dia, iluminando meu caminho e permitindo esta vitória.

Aos meus orientadores, professores Carlos Alberto Pereira dos Santos e José Valdo Abreu Gonçalves, pela dedicação, pela paciência, pela seriedade e pelo profissionalismo com que conduziram este trabalho.

Aos membros da banca examinadora, professores Edcarlos Domingos da Silva, Marcelo Fernandes Furtado, Olímpio Hiroshi Miyagaki e Simone Mazzini Bruschi, assim como ao membro suplente, professor Antônio Luiz de Melo, pela disponibilidade para participar e pelas valiosas sugestões.

Aos meus pais, Antolomista Martins de Rezende e Marlene Caetano Rezende, por toda uma vida de exemplos de amor, de caráter, de luta e determinação; pelo apoio incondicional e irrestrito, alicerce e bálsamo em todas as circunstâncias.

Aos meus irmãos Mayra, Ricardo e Stefania e aos meus cunhados Cíntia, Daniel e Marcelo, por compartilharem as dificuldades e acreditarem no sucesso desta jornada.

Ao meu noivo Elves, pela cumplicidade, pelo companheirismo e pelo incentivo constantes, pela compreensão e pela disposição em estar sempre ao meu lado, encorajando-me e auxiliando-me nos momentos mais difíceis.

Aos amigos do Departamento de Matemática da UnB, pelos incontáveis momentos de estudo partilhado, pelas inúmeras palavras de incentivo e atitudes de solidariedade, pela união e pela harmonia, que contribuíram imensamente para esta conquista.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro durante todo o período.

Resumo

Neste trabalho, estabelecemos existência de soluções positivas para a classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u) \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que Δ_p é o operador p-Laplaciano, $1 < p < \infty$; $\lambda > 0$ e $\mu \geq 0$ são parâmetros reais; $g, f : \Omega \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ e $V : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo hipóteses adequadas e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado regular ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, a condição $u(x) = 0$ quando $x \in \partial\Omega$ significa que $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Nenhuma condição de monotonicidade e (ou) singularidade é exigida das não-linearidades g e f, mas termos singulares e superlineares são incluídos em nossos resultados, que utilizam uma técnica de monotonização-regularização, métodos de sub e supersolução e argumentos de aproximação.

As dificuldades decorrentes da presença do termo convectivo V e da perda de elipticidade do operador p-Laplaciano são contornadas por meio de princípios de comparação, um deles estabelecido neste trabalho.

Palavras-chave: operador p-Laplaciano, problemas singulares, método de sub e supersolução, princípios de comparação, termos superlineares e convectivos.

Abstract

In this work, we establish the existence of positive solutions for the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x, \nabla u) \text{ in } \Omega \\ u > 0 \ \text{ in } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \ \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Δ_p is the p-Laplacian operator, $1 < p < \infty$; λ and μ are real parameters; $g, f : \Omega \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ and $V : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ are continuous functions satisfying appropriated hypotheses and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth bounded domain or $\Omega = \mathbb{R}^N$. When $\Omega = \mathbb{R}^N$, the condition $u(x) = 0$ on $\partial\Omega$ means that $u(x) \to 0$ when $|x| \to \infty$.

No monotonicity conditions and (or) the existence of singularity is required on the nonlinearities g and f, but singular and super linear terms are included in our results, which use a regularization and monotonicity technique, sub and super solutions methods and approximation arguments.

The difficulties arising from the presence of the convective term V and the loss elipticity of the p-Laplacian operator are overcome by comparison principles, one of this principle is established in this work.

Keywords: p-Laplacian operator, singular problems, sub and super solutions method, comparison principles, super linear and convective terms.

Sumário

Notações

Neste trabalho, fazemos uso das seguintes notações:

- $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N :| x |< R\},\ R > 0;$

- $\Delta_p u = div(| \nabla u |^{p-2} \nabla u), 1 < p < \infty$, é o p-Laplaciano da função u;

- $\lambda_{1,\Omega}(\rho)$ é o primeiro autovalor do problema de autovalor com peso ρ

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi = \lambda \rho(x)|\varphi|^{p-2}\varphi & \text{em } \Omega \\ \varphi > 0 & \text{em } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{AV}$$

  em que $\rho : \Omega \to [0,\infty),\ \rho \neq 0$, é uma função conveniente e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado;

- $\lambda_1(\rho) = \lim\limits_{R\to\infty} \lambda_{1,B_R(0)}(\rho);$

- $\varphi_\Omega = \varphi_{1,\Omega}(\rho)$ é uma $\lambda_{1,\Omega}(\rho)$-autofunção positiva de (AV) e $\varphi_R = \varphi_{1,B_R(0)}$;

- $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\sigma(s)}{s^{p-1}} := \sigma_0,\quad \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\sigma(s)}{s^{p-1}} := \sigma_\infty,\quad \lim\limits_{s\to 0} \sigma(s) := \sigma(0)$ e $\lim\limits_{s\to\infty} \sigma(s) := \sigma(\infty)$,
  em que $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é uma função adequada e $\sigma_0, \sigma_\infty, \sigma(0), \sigma(\infty) \in [0,\infty]$;

- $\mu(\Omega)$ é a medida do conjunto Ω;

- $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta,\ \delta > 0\}$;

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω;

- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$;

- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;

- $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup\limits_{x,y\in\Omega, x\neq y} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty \right\}$, com $0 < \beta < 1$, e $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$;

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$, em que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty := \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \ \text{ quase sempre em } \ \Omega\};$$

- Para $1 \leq p < \infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\ g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \ \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ dx = -\int_\Omega g_i \varphi \ dx, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ \text{ e } \ i = 1, \ldots, N \end{array} \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \, dx \right]^{1/p}.$$

Introdução

No presente trabalho, estudamos existência de soluções para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u) \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

em que $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $1 < p < \infty$; $\lambda > 0$ e $\mu \geq 0$ são parâmetros reais; $g, f : \Omega \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ e $V : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo hipóteses adequadas e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado regular ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, a condição $u(x) = 0$ quando $x \in \partial\Omega$ significa que $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Uma função $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ será dita uma solução de (P), no sentido das distribuições, se $u > 0$ em Ω e, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, tenhamos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega [g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u)]\phi dx.$$

Além disso, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, a função u será dita uma solução inteira.

Ressaltamos que nossos resultados não exigem nenhuma condição de monotonicidade e (ou) singularidade das funções g e f, mas estamos particularmente interessados nos casos em que g é positiva, f é não-negativa e satisfazem condições de sublinearidade no zero e superlinearidade no infinito, ou seja,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{g(x,s)}{s^{p-1}} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^{p-1}} = \infty,$$

para cada $x \in \Omega$.

Estes comportamentos permitem, por exemplo, situações em que g e (ou) f são singulares em $s = 0$, no sentido de que $\lim_{s\to 0^+} g(x,s) = \infty$ e (ou) $\lim_{s\to 0^+} f(x,s) = \infty$.

Além disso, (P) resolve o seguinte problema modelo:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)h(u) + \lambda d(x)l(u) + \alpha(x)|\nabla u|^q \text{ em } \Omega \\ u > 0 \ \text{ em } \Omega \ \text{ e } \ u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e nossos resultados permitirão considerar, por exemplo,

$$a(x)h(u) + \lambda d(x)l(u) + |\nabla u|^q = u^n + u^m, \quad -\infty < n < p-1 < m,$$

com enfoque principal à existência de singularidade.

Problemas envolvendo não-linearidades singulares surgem em várias situações físicas, presentes na condutividade elétrica (Fulks & Maybee, 1960 [18]), na teoria dos fluidos pseudoplásticos (Callegari & Nashman, 1980 [5]), em superfícies mínimas singulares (Caffarelli, Hardt & Simon, 1984 [4]), em processos de reação-difusão, na obtenção de diversos índices geofísicos e em processos industriais, entre outros.

O tema relativo à não-linearidade sem termo de convecção, isto é, quando $V \equiv 0$, muito tem sido estudado. Um trabalho pioneiro é o de Crandall, Rabinowitz & Tartar [8], que em 1977 consideraram um operador linear mais geral que o Laplaciano e, sob as hipóteses $\partial\Omega \in C^3$, $f \in C(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(x,t) = \infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, $\sup\limits_{[1,\infty)\times\overline{\Omega}} f < \infty$, obtiveram uma solução generalizada em $W^{2,q}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, para algum $q > N$.

Motivados por este trabalho, Lazer e McKenna [32], em 1991, estabeleceram existência de uma solução clássica para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^{-\gamma} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $a \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $a > 0$ em $\overline{\Omega}$. Sob hipóteses mais fracas sobre a, del Pino 1992 [12] provou a existência de uma única solução fraca positiva de (1).

Em 1997, Lair & Shaker [30] estudaram existência e unicidade de soluções positivas para

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)h(u) \ \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \ \text{ em } \Omega \ \text{ e } \ u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $a(x) > 0$, $\lim\limits_{s\to 0^+} h(s) \to +\infty$ e $h'(s) \leq 0, s > 0$.

Posteriormente, Ghergu & Radulescu [19], em 2003, estabeleceram unicidade de solução, para quaisquer $\lambda, \mu > 0$, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)h(u) = \lambda f(x,u) + \mu b(x) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} a(x) \leq 0$, f é não-decrescente em $s > 0$ e o quociente $f(x,s)/s$ é não-crescente em s, com $\lim\limits_{s \to 0} f(x,s)/s = \infty$, $\lim\limits_{s \to \infty} f(x,s)/s = 0$. Além disso, h é não-crescente, $\lim\limits_{s \to 0} h(s) = \infty$ e $h(s) \leq Cs^{-\alpha}$, para alguns $\alpha \in (0,1)$ e $s > 0$.

Em 2005, Perera & Zhang [38] consideraram

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)u^{-\gamma} + \lambda f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em que $\gamma, \lambda > 0$. Sob hipóteses adequadas na função $a \geq 0$, foi mostrado que existe $\lambda_0 > 0$ tal que (2) tem solução para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Considerando a condição de fronteira em um sentido mais geral, Perera & Silva [37], em 2007, estudaram o problema (2) para a não-linearidade da forma $g(x,u) + \lambda f(x,u)$, permitindo singularidade no termo g.

Acerca do problema (P), suporemos que:

(G) (i) existem funções contínuas $b : \Omega \to [0,\infty)$, $b \neq 0$, e $k : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$g(x,s) \leq b(x)k(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_1 \in (0,1]$ e funções $a : \Omega \to [0,\infty)$, $a \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $h : (0,s_1) \to (0,\infty), h \in C(\Omega)$, tais que

$$g(x,s) \geq a(x)h(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,s_1).$$

(F) (i) existem funções contínuas $c : \Omega \to [0,\infty)$, $c \neq 0$, e $j : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$f(x,s) \leq c(x)j(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_2 \in (0,1]$ e funções $d : \Omega \to [0,\infty)$, $d \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $l : (0,s_2) \to (0,\infty), l \in C(\Omega)$, tais que

$$f(x,s) \geq d(x)l(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,s_2).$$

A função V satisfaz

(V_1) $|V(x,\xi)| \leq \alpha(x)|\xi|^q + \beta(x)$;

(V_2) $|V(x,\xi) - V(x,\eta)| \leq \alpha(x)\,||\xi|^q - |\eta|^q|$;

(V_3) V é continuamente diferenciável em ξ sobre subconjuntos compactos de suas variáveis;

em que $\alpha, \beta : \Omega \to [0,\infty)$ são funções contínuas tais que $\alpha, \beta, \alpha/d, \alpha/a, \beta/a \in L^\infty(\Omega)$.

(M) existe $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_p\,\omega_M = M(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ \omega_M > 0 \text{ em } \Omega \ \text{ e } \ \omega_M = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

em que

$$M(x) := \begin{cases} \max\limits_{\Omega}\{b(x), c(x)\}, \ \text{se } V \lneqq 0 \text{ ou } V \equiv 0 \\ \max\limits_{\Omega}\{2b(x), 2c(x), \alpha(x), \beta(x)\}, \ \text{se } V \gneqq 0. \end{cases}$$

$(K)_{s_0,t_0}$ $\quad \sup\limits_{(s_0,t_0)} \dfrac{k(s)}{s^{p-1}} < \dfrac{\left[1 - \left(\frac{s_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2(p-1)}}{\|\,\omega_M\,\|_\infty^{p-1}}$, $\quad$ para alguns $0 \leq s_0 < t_0 \leq \infty$.

Observação 0.1. *Com respeito à hipótese (M), ressaltamos que:*

1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, (M) ocorre se, por exemplo, $M \in L^\infty(\Omega)$ e $1 < p \leq N$, como pode ser visto em [36] e [26].*

2. *Se $\Omega = \mathbb{R}^N$, segue de [23] que o problema (3) tem solução se M é uma função contínua e satisfaz*

$$M_\infty := \int_0^\infty \left[s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}\hat{M}(t)dt\right]^{\frac{1}{p-1}} ds < \infty,$$

em que $\hat{M}(t) = \max\limits_{|x|=t} M(x)$, $t \geq 0$. A existência implica a regularidade (veja [14]).

Se admitimos $N \geq 3$ e

(i) $\displaystyle\int_1^\infty r^{\frac{1}{p-1}}\hat{M}^{\frac{1}{p-1}}(r)dr < \infty$, *se* $1 < p \leq 2$,

ou

(ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} \hat{M}(r)dr < \infty, \quad se\ p \geq 2,$

então $M_\infty < \infty$.

Pode ser visto em [53] que a recíproca deste fato não é verdadeira.

3. *Com o objetivo de elucidar a hipótese* $(K)_{s_0,t_0}$, *mostraremos, no apêndice deste trabalho, as seguintes equivalências:*

   (a) $(K)_{0,t_0}$ *ocorre se, e somente se,* $k_0 < \dfrac{1}{\|\ \omega_M\ \|_\infty^{p-1}}$;

   (b) $(K)_{s_0,\infty}$ *ocorre se, e somente se,* $k_\infty < \dfrac{1}{\|\ \omega_M\ \|_\infty^{p-1}}$.

Considere também o problema de autovalor com peso ρ

$$\begin{cases} -\Delta_p\, \varphi = \lambda\rho(x)|\varphi|^{p-2}\varphi \ \text{ em } \Omega, \\ \varphi > 0 \text{ em } \ \Omega \quad \text{e} \quad \varphi = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{AV}$$

em que $\rho : \Omega \to [0,\infty)$, $\rho \not\equiv 0$, é dada por $\rho(x) = \min\{a(x), d(x)\}$. Como pode ser visto em [2], desde que $\rho \in L^\infty(\Omega)$, temos que $\varphi_\Omega \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Nossa contribuição, neste contexto, é:

Teorema DL$_0$: *Suponha* $V \equiv 0, (G), (F), (M)$ *e* $(K)_{s_0,t_0}$. *Então existem* $c, \lambda^* > 0$ *e uma função* $u = u_\lambda \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *com* $c\varphi_\Omega \leq u < t_0$, *solução de* (P) *em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\max\left\{0, \frac{\lambda_{1,\Omega}(\rho)-h_0}{l_0}\right\} < \lambda < \lambda^*$, *se* $0 < l_0 < \infty$;

(ii) $0 < \lambda < \lambda^*$, *se* $l_0 = \infty$;

(iii) $0 < \lambda < \lambda^*$, *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > \lambda_{1,\Omega}(\rho)$.

Adicionalmente,

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_0\right), \ se\ s_0 = 0 \quad e \quad \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_\infty\right), \ se\ t_0 = \infty.$$

Observação 0.2. *É importante observar que:*

1. *Podemos considerar $g \equiv 0$ em (P) se tivermos*

$$\lambda < \frac{1}{j_\infty \parallel \omega_M \parallel^{p-1}} \quad ou \quad \lambda < \frac{1}{j_0 \parallel \omega_M \parallel^{p-1}};$$

2. *Podemos encontrar resultado análogo, para o caso em que $g \equiv 0$, em Gonçalves, Rezende & Santos (2011) [25].*

O Teorema DL_0 melhora o resultado de [19], pois trata (P) para o p-Laplaciano e não exige nenhuma monotonicidade e (ou) singularidade em f, g ou em seus quocientes. Além disso, completa os trabalhos de [38] e [25] por permitir não-linearidades mais gerais.

Problemas em que a não-linearidade tem um termo de convecção, isto é, quando $V \neq 0$, surgem em teoria de controle estocástico (Lasry & Lions, 1989 [31]) , no estudo de um campo eletromagnético (Stuart, 1991 [46]), Stuart & Zhou, 1996 [47]), em um meio não-linear, entre outros.

Considerando o problema com $V > 0$ em domínios limitados, citamos Zhang & Yu [55], que em 2000 estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-\alpha} + \lambda + \mu|\nabla u|^q \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{ e } \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

em que $\mu, \lambda \geq 0$, $\alpha > 0$ e $q \in (0, 2]$. Utilizando uma mudança de variáveis, os autores provaram que o problema (4) tem soluções clássicas se $\mu\lambda < \lambda_{1,\Omega}(1)$, se $q = 2$ ou $\mu \in [0, \overline{\mu})$, se $0 < q < 2$, com $\overline{\mu} = \overline{\mu}(q, \lambda)$.

Problemas de Dirichlet, tais como (P), com a presença de um termo convectivo, foram estudados por Ghergu e Radulescu [21], que em 2005 consideraram

$$\begin{cases} -\Delta u = h(u) + \lambda f(x, u) + \mu|\nabla u|^q \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \ \text{ em } \Omega \qquad \text{ e } \qquad u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

sob as condições $f > 0$ em $\overline{\Omega} \times (0, \infty)$, $\partial f / \partial s(x, s) \geq 0$, $s > 0$, $f(x, s)/s$ não-crescente em $s > 0$, $\lim\limits_{s\to\infty} f(x, s)/s = 0$ e $\lim\limits_{s\to 0} h(s) = +\infty$, $h \in C^{0,\alpha}((0, \infty))$, $h > 0$ não-crescente, $\lambda = 1$. Eles provaram que

(i) se $0 < q < 1$, então (5) tem solução para cada $\mu \geq 0$;

(ii) se $1 \leq q \leq 2$, então existe $\mu^* > 0$ tal que (5) tem solução para qualquer $0 \leq \mu < \mu^*$. Além disso, se $1 < q \leq 2$, então $\mu^* < \infty$.

Além de analisarem a importância do termo de convecção $\mu|\nabla u|^q$ em (5), mostraram uma dependência existente entre λ e μ. Por exemplo, se $q = 2$ e $f \equiv 1$, (5) tem solução somente se $\mu(m + \lambda) < \lambda_1$, em que $m = \lim\limits_{s\to\infty} h(s)$.

Recentemente, Alves, Carrião & Faria, 2010 [1] utilizaram o método de Galerkin para estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + \mu V(x,\nabla u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{ e } \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

em que g e V são funções localmente Hölder contínuas, tais que

$$b|s|^{r_1} \leq g(x,s) \leq a_1(x) + a_2(x)|s|^{r_2} + \frac{a_3(x)}{|s|^{r_3}} \quad \text{e} \quad 0 \leq V(x,\xi) \leq a_5(x) + a_4(x)|\xi|^{r_4},$$

sendo $b > 0, r_i \in (0,1)(i = 1, ..., 4)$ constantes e $a_i(i = 1, ..., 5)$ funções contínuas positivas. Sob estas condições, foi mostrado que (6) tem solução para cada $\mu \geq 0$.

Considerando o problema (P) com $V < 0$ em domínios limitados, citamos Ghergu & Radulescu [20], que em 2005 obtiveram existência de solução clássica para

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)h(u) + |\nabla u|^q = \lambda f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \quad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

sob as condições: $\lambda > 0,\ a < 0,\ q \in (0,2],\ f : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ Hölder contínua e não-decrescente na segunda variável, h não-crescente, $\lim\limits_{s\to 0} h(s) = \infty,\ f(x,s)/s$ não-crescente em $s > 0$, $\lim\limits_{s\to 0} f(x,s)/s = \infty$ e $\lim\limits_{s\to\infty} f(x,s)/s = 0$.

Os dois teoremas seguintes tratam do problema (P) em domínio limitado, sendo que o primeiro considera o caso em que $V \gneqq 0$ e o segundo, o caso em que $V \lneqq 0$.

Teorema DL$_+$: *Suponha* $V \gneqq 0, (G), (F), (M), (K)_{s_0,t_0}$ *e* (V_1), *com* $q \in [0,p]$. *Então existem* $\lambda_* \geq 0$ *e* $c, \lambda^* > 0$ *tais que, para cada* $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$ *dado, existem* $\mu^* = \mu^*(\lambda) > 0$ *e uma função* $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *com* $c\varphi_\Omega \leq u < t_0$, *satisfazendo* (P) *em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\lambda_* = \max\left\{0, \frac{\lambda_{1,\Omega}(\rho) - h_0}{l_0}\right\},\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $0 < l_0 < \infty$;

(ii) $\lambda_* = 0,\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $l_0 = \infty$;

(iii) $\lambda_* = 0,\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > \lambda_{1,\Omega}(\rho)$.

Adicionalmente,

(iv) se $q \in [0, p-1]$, *então*

$(iv)_1$ $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$,

$(iv)_2$ $\mu^*(\lambda) \geq \min\left\{\frac{[k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}}, \frac{k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)}{4}\right\}$, *em que* $\gamma_0 = t_0$, *se* $s_0 > 0$, *e* $\gamma_0 = 0$, *se* $s_0 = 0$;

(v) *se* $q \in (p-1, p]$, *então existe um* $\theta_0 \in (1/2, 1)$, *tal que*

$(v)_1$ $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{\theta_0}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{\theta_0}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$,

$(v)_2$ $\mu^* = \infty$, *se* $t_0 = \infty$ *e* $k_\infty > 0$.

Para o caso em que $V \lneqq 0$, relembramos que $h(0) \in [0, \infty]$ denota $\lim_{s\to 0} h(s)$. Além disso, introduzimos um número θ_0, que se fez necessário para a obtenção da subsolução. Para isto, consideremos a seguinte definição, estabelecida através de uma relação entre q e p:

$$\theta_0 := \begin{cases} \dfrac{q}{q-(p-1)}, & \text{se } q \in (p-1, p] \\ \dfrac{p}{p-1}, & \text{se } q = p-1 \text{ ou } q = 0 \\ \tilde{\theta}_0 \in \left(\dfrac{p}{p-1}, \dfrac{p-q}{p-1-q}\right), & \text{se } q \in (0, p-1). \end{cases} \tag{7}$$

Teorema DL$_-$: *Assuma* $V \lneqq 0, (G), (F), (M), (K)_{s_0,t_0}$ *e* (V_1), *com* $q \in [0, p]$. *Suponha que*

$$(a)\ h(0) > 0 \qquad ou \qquad (b)\ \beta \equiv 0.$$

Então existem $\lambda_* \geq 0$ *e* $c, \lambda^* > 0$ *tais que, para cada* $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$ *dado, existem* $\mu^* = \mu^*(\lambda) > 0$ *e uma função* $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *com* $c\varphi_\Omega \leq u < t_0$, *solução de (P) em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$, $0 \leq \mu < \mu^*$, *se* $0 < l_0 < \infty$;

(ii) $0 < \lambda < \lambda^*$, $0 \leq \mu < \mu^*$, *se* $l_0 = \infty$;

(iii) $0 < \lambda < \lambda^*$, $0 \leq \mu < \mu^*$, *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)$,

em que $\theta_0 > 1$, *se ocorrer* (a), *e* θ_0 *é dado por* (7), *se ocorrer* (b).

Adicionalmente,

(iv) $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$;

(*v*) *se* (*a*) *ocorrer, então existe* $c_1 > 0$ *tal que* $\mu^* \geq c_1 h(0)$;

(*vi*) *se* (*b*) *ocorrer e* $q \in [p-1, p]$, *então existem* $c_2, c_3 > 0$ *tais que*

$(vi)_1$ $\mu^* \geq c_2 \lambda l_0$, *se ocorrer* (*i*)(*ii*),

$(vi)_2$ $\mu^* \geq c_3 h_0$, *se ocorrer* (*iii*).

Observação 0.3. *Ressaltamos que, no teorema acima, temos que* $\mu^* = \mu^*(\lambda)$ *apenas nas situações* (*b*)(*i*) *e* (*ii*).

Os teoremas DL_+ e DL_- melhoram os resultados em [21] e [20], respectivamente em vários sentidos, pois tratam o problema para o operador p-Laplaciano, não exigem nenhuma monotonicidade e (ou) singularidade em f, g ou em seus quocientes e consideram $q \in [0, p]$ e os parâmetros $\lambda, \mu \neq 1$. O Teorema DL_+ (iii) também generaliza o principal resultado em [1], pois permite não-linearidades mais gerais e $q \in [0, p]$.

Iniciando o tratamento do problema (P) para o caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, destacamos que existência de soluções inteiras positivas no $\mathbb{R}^N$ para o caso $p = 2$ e $V \equiv 0$ tem sido estudada por vários autores.

Neste contexto, inicialmente citamos Edelson [17], que em 1989 considerou o problema com a não-linearidade $a(x)u^{-\gamma}$, $\gamma \in (0, 1)$; Shaker [44], que em 1993 estendeu este resultado para qualquer $\gamma > 0$; e Lair & Shaker [29], que em 1996 estudaram o mesmo problema com hipóteses mais gerais no termo a.

Em 1997, Zhang [54] estudou o problema com a não-linearidade mais geral $a(x)h(u)$ e estabeleceu existência de solução sob as condições $\lim\limits_{s \to 0} h(s) = \infty$ e $h'(s) < 0$.

Os resultados de Shaker, Lair e Zhang foram estendidos por Cirstea & Radulescu [7], em 1999, e por Dinu [16], em 2006, para o caso de a não-linearidade não ser necessariamente decrescente.

Posteriormente Chai, Niu & Zhao [6], em 2009, também consideraram soluções inteiras para o problema envolvendo o operador p-Laplaciano, mas para não-linearidades mais gerais da forma $\rho a(x)h(u) + \lambda d(x)l(u)$.

Fazendo $\phi(r) = \max\limits_{|x|=r} a(x)$, é importante observar que as condições

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \int_0^\infty r^{\frac{1}{p-1}} \phi(r)^{\frac{1}{p-1}} \, dr < \infty, \quad \text{se } 1 < p \leq 2 \text{ e} \\
&(ii) \quad \int_0^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} \phi(r) \, dr < \infty, \quad \text{se } 2 \leq p < \infty
\end{aligned} \tag{8}
$$

foram admitidas para garantir existência de solução por todos os autores anteriormente citados. Lembremo-nos de que (8) implica a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p\, \omega_a = a(x) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \omega_a > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad \omega_a(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{9}$$

Entretanto, como pode ser visto em Ye & Zhou [53], a recíproca não é verdadeira.

Ainda em 2009, Mohammed [34] estudou o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{10}$$

considerando $g(x,s) \in C^{0,\alpha}$ em $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ e continuamente diferenciável na variável $s > 0$ sob as condições

- $g(x,s) \le b(x)k(s),\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$, em que $k \in C^1$;
- $g(x,s) \ge \lambda a(x)s,\ \ (x,s) \in (0,s_0),\ \ \lambda > \lambda_{1,B_1(0)}(a)$, para algum $s_0 > 0$;
- $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{k(t)}{t} < \dfrac{1}{\|\ \omega_b\ \|_\infty}$.

Além disso, o autor enfraqueceu a hipótese (8) admitindo que existe uma função ω_b satisfazendo (9), com $a = b$.

Este resultado foi completado por Santos [41] (2009), que permitiu não-linearidades superlineares no infinito, isto é, $k_\infty \in [0,\infty]$ e funções a e b não estritamente positivas.

Referimos também ao leitor os trabalhos de Gonçalves, Melo & Santos, 2007 [24] e Mohammed, 2010 [35], que trataram o problema (10) para $p = 2$ e não-linearidades da forma $\eta a(x)h(u) + \lambda d(x)l(u)$ e, para $p \neq 2$, Santos, 2009-2010 [42, 43], Yuan & Yang, 2010 [52] e suas referências.

No próximo resultado, consideramos o número $\lambda_1(\rho) = \lim\limits_{R\to\infty} \lambda_{1,B_R(0)}(\rho)$. Em [43], Santos provou que, se (9), com $a = \rho$, tem solução $\omega_\rho \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N),\ \alpha \in (0,1)$, então $\lambda_1(\rho) \ge 1/\|\omega_\rho\|_\infty^{p-1} > 0$.

Motivados por estes trabalhos, nosso resultado é:

Teorema NL$_0$: *Suponha $V \equiv 0, (G), (F), (M)$ e $(K)_{s_0,t_0}$. Então existe $\lambda^* > 0$ e uma função $u = u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N)$, com $0 < u < t_0$, satisfazendo (P) em cada uma das seguintes situações:*

(*i*) $\max\left\{0, \frac{\lambda_1(\rho)-h_0}{l_0}\right\} < \lambda \le \lambda^*$, *se* $0 < l_0 < \infty$;

(*ii*) $0 < \lambda \leq \lambda^*$, *se* $l_0 = \infty$;

(*iii*) $0 < \lambda \leq \lambda^*$, *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > \lambda_1(\rho)$.

Adicionalmente,

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_0\right), \ se\, s_0 = 0, \quad e \quad \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_\infty\right), \ se\, t_0 = \infty.$$

Este resultado completa os de Mohammed [34] e os de Santos [41] porque trata o problema para o operador p-Laplaciano e permite não-linearidades mais gerais.

No que se refere a problemas no $\mathbb{R}^N$ com a presença do termo convectivo $V > 0$, Ghergu & Radulescu [22], em 2007, mostraram existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)[h(u) + l(u) + |\nabla u|^q] \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{11}$$

em que $q \in (0,1)$, $a > 0$ é $C^{0,\alpha}$, $h \in C^1((0,\infty))$ é positiva, decrescente, $\lim\limits_{s\to 0^+} h(s) = +\infty$ e (8) é satisfeita com $p = 2$. Quanto à função $l : [0,\infty) \to [0,\infty)$, supuseram que

$$l' \geq 0, \ \frac{l(s)}{s} \text{ não-crescente em } s > 0, \ \lim_{s\to 0^+} \frac{l(s)}{s} = +\infty \text{ e } \lim_{s\to\infty} \frac{l(s)}{s} = 0.$$

Ainda em 2007, Xue & Zhang [50] consideraram (11) sem exigir monotonicidade sobre h e l, mas supondo

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{l(s)}{s} = +\infty, \ \lim_{s\to\infty} \frac{l(s)}{s} = 0, \ \lim_{s\to 0^+} \frac{h(s)}{s} = +\infty, \ \lim_{s\to\infty} \frac{h(s)}{s} = 0 \text{ e (8), com } p = 2.$$

Nosso resultado, para este caso, é o seguinte:

Teorema NL$_+$: *Suponha* $V \gneqq 0, (G), (F), (M), (K)_{s_0,t_0}$ *e* (V_1), *com* $q \in [0, p-1]$. *Então existem* $\lambda_* \geq 0$ *e* $\lambda^* > 0$ *tais que, para cada* $\lambda_* < \lambda \leq \lambda^*$ *dado, existem* $\mu^* = \mu^*(\lambda) > 0$ *e uma função* $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\mathbb{R}^N)$, *com* $0 < u < t_0$, *satisfazendo* (P) *em cada uma das seguintes situações:*

(*i*) $\lambda_* = \max\left\{0, \frac{\lambda_1(\rho) - h_0}{l_0}\right\}$, $0 \leq \mu < \mu^*$, *se* $0 < l_0 < \infty$;

(*ii*) $\lambda_* = 0$, $0 \leq \mu < \mu^*$, *se* $l_0 = \infty$;

(*iii*) $\lambda_* = 0$, $0 \leq \mu < \mu^*$, *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > \lambda_1(\rho)$.

Adicionalmente,

(*iv*) $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$;

(*v*) $\mu^*(\lambda) = \min\left\{\frac{[k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}, \frac{k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)}{4}\right\}$, *em que* $\gamma_0 = t_0$, *se* $s_0 > 0$, *e* $\gamma_0 = 0$, *se* $s_0 = 0$.

Este resultado melhora os anteriores porque trata o problema para o operador p-Laplaciano e permite não-linearidades mais gerais, não exigindo qualquer monotonicidade nas funções e (ou) restrição nos valores limites de seus quocientes. Além disso, inclui os casos $q = 0$ e $q = p - 1$ e utiliza a hipótese mais fraca (M).

Para problemas com a presença do termo convectivo $V < 0$, reportamo-nos ao trabalho de T. L. Dinu [15], que em 2003 mostrou existência e unicidade de solução clássica para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x)|\nabla u|^q = a(x)u^{-\gamma} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

sob as condições $\gamma > 0, \alpha, a \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N), a > 0, \alpha \geq 0$ e (8).

Tratando não-linearidades mais gerais, Xue & Shao [51], em 2009, mostraram existência de uma solução $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x)|\nabla u|^q = a(x)h(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

para $q \in (1, 2]$, $\alpha \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\gamma \in (0, 1)$, $\alpha \geq 0$ e uma função positiva $a \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que exista $\omega \in C^{2,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (9). Quanto à função h, admitiram que $h \in C^1((0, \infty), (0, \infty))$, $\lim_{s\to 0^+} h(s)/s = \infty$ e $\lim_{s\to\infty} h(s)/s = 0$.

Apresentamos, a seguir, nossa contribuição neste contexto, ressaltando que, por tratarmos o problema (P) em $\mathbb{R}^N$, exigimos que $\lim_{R\to\infty} \|\nabla\varphi_R\|_{L^\infty(B_R)} < \infty$. Além disso, utilizamos, em (a) e (b), o Teorema 1.5 e, em (c), um argumento que dispensa as hipóteses (V_2) e (V_3), mas, em contrapartida, exige que $a, d \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, $f, g \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega \times (0, \infty))$ e $V \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^N), \alpha \in (0, 1)$.

Teorema NL$_-$: *Assuma* $V \lneqq 0, (G), (F), (V_1), (M)$ *e* $(K)_{s_0,t_0}$. *Suponha que*

(*a*) $1 < p \leq 2, q \in (p-1, p], h(0) > 0$ *e* (V_3); *ou*

(*b*) $p \geq 2, q \in \left[p-1, p\left(1 - \frac{1}{p^*}\right)\right), h(0) > 0$ *e* (V_2); *ou* *(c)* $p = 2, \quad q \in (1, 2]$ *e* $\beta \equiv 0$.

Então existem $\lambda_* \geq 0$ *e* $\lambda^* > 0$ *tais que, para cada* $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$ *dado, existem* $\mu^* = \mu^*(\lambda) > 0$ *e uma função* $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\mathbb{R}^N)$*, com* $0 < u < t_0$*, solução de* (P) *em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\max\left\{0, \frac{3\theta_0^{p-1}\lambda_1(\rho)-h_0}{l_0}\right\} < \lambda \leq \lambda^*,\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $0 < l_0 < \infty$*;*

(ii) $0 < \lambda \leq \lambda^*,\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $l_0 = \infty$*;*

(iii) $0 < \lambda \leq \lambda^*,\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $l_0 = 0,$ *e* $h_0 > 3\theta_0^{p-1}\lambda_1(\rho)$,

em que $\theta_0 > 1$*, se ocorrerem* (a) *ou* (b)*, e* θ_0 *é dado por* (7)*, se ocorrer* (c)*.*

Adicionalmente,

(iv) $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1}} - k_0\right),$ *se* $s_0 = 0,$ *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1}} - k_\infty\right),$ *se* $t_0 = \infty$*;*

(v) existem constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ *tais que* $\mu^* \geq c_1 h(0),$ *para* (a) *ou* (b)*,* $\mu^* \geq c_2\lambda l_0,$ *para* $(c)(i)(ii)$ *e* $\mu^* \geq c_3 h_0,$ *para* $(c)(iii)$*.*

Observação 0.4. *De forma análoga ao observado no Teorema* DL_-*, temos que* $\mu^* = \mu^*(\lambda)$ *apenas nas situações* $(b)(i)$ *e* (ii)*.*

É importante ressaltar que, ao que sabemos, não existem resultados para este tipo de problemas envolvendo o operador p-Laplaciano. Não obstante, mesmo para o caso em que $p = 2$, nossos resultados permitem não-linearidades mais gerais que as tratadas em [15] e [51].

Apesar de os teoremas apresentados guardarem certa semelhança entre si, apresentam um papel crucial o sinal da função V e o expoente q do termo de convecção. Analisando o sinal de V, é curioso atentar para o fato de que as dificuldades encontradas no tratamento de cada caso foram, de certa forma, "simétricas". Enquanto no caso $V \geq 0$ os maiores obstáculos apresentaram-se para $q \in (p-1, p]$, no caso em que $V \leq 0$ ocorreu exatamente o contrário, ou seja, para $q \in [0, p-1)$. Neste contexto, permanecem em aberto as situações em que

- $V \gneqq 0,\ q \in (p-1, p]$ em $\mathbb{R}^N$;
- $V \lneqq 0,\ q \in (0, p-1),\ p \geq 2$ em $\mathbb{R}^N$;
- $V \lneqq 0,\ q \in (0, p-1],\ 1 < p < 2$ em $\mathbb{R}^N$.

De acordo com Lucio Damascelli, 1998 [9], as dificuldades em estender as propriedades das soluções de equações que envolvem operadores estritamente elípticos para as soluções das equações envolvendo o p-Laplaciano devem-se, principalmente, ao seu comportamento nos zeros do gradiente da solução. Tal operador – dito singular, se $1 < p < 2$, ou elíptico degenerado, se $p > 2$ – perde a elipticidade estrita nestes pontos, o que justifica o fato de que princípios de comparação amplamente utilizados para operadores estritamente elípticos não sejam aplicáveis para o p-Laplaciano. Para obter mais detalhes, confira também Damascelli & Sciunzi, 2005 [10], Pucci & Serrin, 2004 e 2007 [39, 40] , assim como suas referências.

Para provar o Teorema NL_{-}, demonstramos um Princípio de Comparação, para o caso $p \geq 2$, em que a não-linearidade envolve o termo gradiente. Este resultado, de interesse independente, vem complementar um trabalho de Pucci & Serrin 2004 [39]– Corolário 10.4, que trata o caso em que $1 < p \leq 2$. Por completude, enunciamos e demonstramos estes resultados num único Teorema, que se encontra no Capítulo 1 deste trabalho.

Para demonstrar os teoremas aqui enunciados, utilizamos argumentos de sub e supersolução, princípios de comparação, métodos de aproximação e, principalmente, uma técnica de monotonização e regularização das não-linearidades. Tal técnica consiste na construção, durante as demonstrações dos resultados, de funções auxiliares que apresentam as propriedades necessárias, e não exigidas, das não-linearidades.

Esta tese encontra-se estruturada da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados preliminares necessários ao desenvolvimento desta tese, tais como teoremas de sub e supersolução e de regularidade, além de princípios de comparação.

No Capítulo 2 demonstramos os teoremas DL_0, DL_+ e DL_-, que tratam o problema (P) em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

As demonstrações dos teoremas NL_0, NL_+ e NL_-, que tratam de soluções do problema (P) em $\mathbb{R}^N$, encontram-se no Capítulo 3. No Capítulo 4, as demonstrações das afirmações feitas e não verificadas no interior dos Capítulos 2 e 3.

Com a intenção de facilitar a leitura desta tese, repetimos, em seus respectivos capítulos e seções, os enunciados dos resultados principais, assim como as hipóteses necessárias em cada caso.

Capítulo

1

Resultados preliminares

Para a demonstração dos teoremas anteriormente enunciados, apresenta caráter primário a utilização de teoremas de sub e supersolução e de princípios de comparação. Iniciaremos este capítulo apresentando o teorema de sub e supersolução que será utilizado neste trabalho, devido a Boccardo, Murat e Puel, 1984 [3].

Antes disso, ressaltamos que há outros resultados existentes na literatura que poderiam ser utilizados em algumas demonstrações, tais como os de [11], [28] e [33], por exemplo. Entretanto, tal escolha justifica-se, em nosso contexto, por seu caráter unificador, pois permite aplicação em todos os teoremas do Capítulo 2.

Um aspecto interessante a ser observado é que, quando a não-linearidade não possui termo gradiente, os teoremas de sub e supersolução exigem, em geral, regularidade $W^{1,p}(\Omega)$ para a sub e a supersolução. No entanto, na presença de um tal termo, estes teoremas parecem mostrar uma interdependência entre a regularidade exigida na sub e na supersolução e o crescimento da não-linearidade que envolve o termo gradiente.

Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory que satisfaça a condição

$$|g(x, s, \xi)| \leq C(|s|)(1 + |\xi|^p), \quad q.t.p.\ x \in \Omega, \text{ para todos } s \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

para alguma função crescente $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Uma função $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é dita uma subsolução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

no sentido das distribuições, se $\underline{u} \leq 0$ em $\partial\Omega$ e

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\phi dx \leq \int_\Omega g(x, \underline{u}, \nabla \underline{u})\phi dx,$$

para cada $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \phi \geq 0$.

Por outro lado, uma função $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é dita uma supersolução de (1.2), no sentido das distribuições, se $\overline{u} \geq 0$ em $\partial\Omega$ e

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\nabla\phi dx \geq \int_\Omega g(x, \overline{u}, \nabla \overline{u})\phi dx,$$

para cada $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \phi \geq 0$.

O seguinte resultado deve-se a [3], e será utilizado na demonstração dos Teoremas DL_0, DL_+ e DL_-.

Teorema 1.1. *Suponha $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição de Carathéodory e (1.1). Sejam $\underline{u}$ e $\overline{u}$, respectivamente, sub e supersolução de (1.2), tais que $\underline{u}, \overline{u} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\underline{u} \leq \overline{u}, q.t.p.\ x \in \Omega$. Então existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \in \Omega$ e*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx = \int_\Omega g(x, u, \nabla u)\phi dx, \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para aplicar o Teorema 1.1, após a obtenção da sub e da supersolução, será necessário compará-las. Para tal fim, utilizaremos o seguinte Princípio de Comparação, devido a Tolksdorf (1983) [48].

Teorema 1.2. *Considere $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-crescente na segunda variável. Sejam $u, w \in W^{1,p}(\Omega)$, satisfazendo as respectivas desigualdades*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx \leq \int_\Omega G(x, u)\phi dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\phi dx \geq \int_\Omega G(x, w)\phi dx,$$

para cada $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \phi \geq 0$.

Se, além disso, $u \leq w$ em $\partial\Omega$, então $u \leq w$ em Ω.

Para obter a solução anunciada nos Teoremas DL_0, DL_+ e DL_-, devemos regularizar a solução fornecida pelo Teorema 1.1, para depois realizarmos um processo de limite diagonal. Tal regularização será feita por meio do seguinte resultado, devido a

DiBenedetto (1983) [14] e Tolksdorf (1984) [49], que trata de regularidade interior para soluções de problemas quasilineares da forma

$$-\Delta_p u = H(x, u, \nabla u), \ x \in \Omega, \tag{1.3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Seja Ω' um subdomínio de Ω, tal que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Teorema 1.3. *Suponha que $|H(x,s,\xi)| \leq \gamma(|s|)(1+|\xi|^p)$, em que γ é uma função contínua e crescente em $\mathbb{R}^+$. Seja $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ uma solução fraca de (1.3). Então $x \to \nabla u(x)$ é localmente Hölder-contínua em Ω', isto é, para todo compacto $D \subset \Omega'$, existem $\alpha > 0$ e uma constante positiva C, dependendo somente de $\gamma, p, N, \|u\|_{L^\infty(D)}$ e D, tais que*

$$|\nabla u(x)| \leq C \quad e \quad |\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \quad x, y \in D.$$

Ao tratar os Teoremas NL_0, NL_+ e NL_-, referentes à resolução do problema (P) no $\mathbb{R}^N$, mostraremos que as anunciadas soluções são obtidas por meio de um processo de limite diagonal. Neste processo, nossa principal preocupação encontra-se na possível singularidade que as funções f e (ou) g possam admitir em $s = 0$. Tal possibilidade torna necessária a existência de uma limitação inferior positiva, e uniforme, para a R-família de soluções do problema (P) em $\Omega = B_R(0)$. Para obter tal limitação, utilizamos, nos Teoremas NL_0 e NL_+, o seguinte resultado, devido a Díaz e Saa (1987) [13].

Teorema 1.4. *Sejam $i, j \in \{1, 2\}$ e $\mathfrak{O} \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Se $\omega_i \in L^\infty(\mathfrak{O})$ satisfaz*

$$\omega_i > 0 \ q.t.p. \ em \ \mathfrak{O}, \omega_1 = \omega_2 \ sobre \ \partial\mathfrak{O}, \omega_i^{\frac{1}{p}} \in W^{1,p}(\mathfrak{O}),$$

$$\Delta_p \, \omega_1^{\frac{1}{p}} \in L^\infty(\mathfrak{O}) \ e \ \omega_i/\omega_j \in L^\infty(\mathfrak{O}).$$

Então

$$\int_{\mathfrak{O}} \left[\frac{-\Delta_p \, \omega_1^{\frac{1}{p}}}{\omega_1^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{\Delta_p \, \omega_2^{\frac{1}{p}}}{\omega_2^{\frac{p-1}{p}}} \right] (\omega_1 - \omega_2) dx \geq 0.$$

Por questões técnicas, o Teorema 1.4 não nos possibilitou encontrar a citada limitação, necessária para resolver o Teorema NL_-. Neste caso, utilizamos um Teorema devido a Pucci e Serrin (2004) [39], no caso em que $1 < p \leq 2$. Completamos este resultado para o caso em que $p \geq 2$, demonstrando o seguinte Princípio de Comparação, que, por completude, engloba as duas situações.

Considere o par de desigualdades

$$-\triangle_p u - B(x, u, \nabla u) \leq 0, \quad u \geq 0 \tag{1.4}$$

e

$$-\triangle_p v - B(x,v,\nabla v) \geq 0, \quad v \geq 0, \tag{1.5}$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, em que a função escalar

$$B(x,s,\xi) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

é contínua em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e não-crescente com respeito a s.

Suporemos ainda que:

(B_1) B é de classe C^1 em relação a ξ sobre subconjuntos compactos de suas variáveis;

(B_2) $|B(x,s,\xi) - B(x,s,\eta)| \leq b(x,s)\,\left||\xi|^q - |\eta|^q\right|,\ \forall\ q \in \left[p-1, p(1-\frac{1}{p^*})\right),\ p^* = \frac{Np}{N-p}$ em que $b(\cdot,s) \in L^\infty(\Omega)$.

Defina $\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty)$ por

$$\alpha(\beta) = \alpha(\beta, M, N) := \inf_{0<s<M} \left\{-B(x,s+\beta,\xi) + B(x,s,\xi)\right\},\ 0 < \beta < N.$$

Teorema 1.5. *Sejam $u, v \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ satisfazendo (1.4) e (1.5), respectivamente. Suponha que $u \leq v$ em $\partial\Omega$ e*

(i) $1 < p \leq 2$ e (B_1); ou

(ii) $p \geq 2, (B_2)$ e $\alpha(\beta, \max\{\| u \|_{L^\infty(\Omega)}, \| v \|_{L^\infty(\Omega)}\}, \| u - v \|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$.

Então, $u \leq v$ em Ω.

Observação 1.6. *Uma situação em que temos (B_2) e $\alpha(M,N) > 0$ é o caso em que*

$$B(x,s,\xi) = a(x)h(s) + b(x)|\xi|^q,\ x \in \Omega,\ s > 0 \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

em que h é função estritamente decrescente em $s > 0$.

Para demonstrar o Teorema 1.5, utilizaremos os seguintes resultados:

Lema 1.7. (*veja Peral* [*36*]) *Seja $p > 1$. Existe uma constante $c_p > 0$ tal que, para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$,*

$$(|\xi_2|^{p-2}\xi_2 - |\xi_1|^{p-2}\xi_1, \xi_2 - \xi_1) \geq \begin{cases} c_p|\xi_2 - \xi_1|^p, & se\ p \geq 2 \\ c_p\dfrac{|\xi_2 - \xi_1|^p}{(|\xi_2| + |\xi_1|)^{2-p}}, & se\ p \leq 2, \end{cases}$$

em que $(.,.)$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$.

Lema 1.8. *Se $a > 1$ e $X \geq a$, então*

$$X^q - 1 \leq \left(\frac{a}{a-1}\right)^{q-1} (X-1)^q + a^{q-1} - 1, \ \forall\ q \geq 1.$$

Demonstração do Lema 1.8: Provar o Lema 1.8 é equivalente a mostrar que

$$X^q(a-1)^{q-1} \leq a^{q-1}(X-1)^q + a^{q-1}(a-1)^{q-1}.$$

Observe que, se $X = a$, então $a^q(a-1)^{q-1} \leq a^{q-1}(a-1)^q + a^{q-1}(a-1)^{q-1}$, donde segue que $a^q \leq a^{q-1}(a-1) + a^{q-1} = a^q - a^{q-1} + a^{q-1} = a^q$.

Defina $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) := a^{q-1}(t-1)^q + a^{q-1}(a-1)^{q-1} - t^q(a-1)^{q-1}.$$

Veja que $g(a) = 0$ e $g'(t) \geq 0,\ t \geq a$ se, e somente se,

$$qa^{q-1}(t-1)^{q-1} \geq qt^{q-1}(a-1)^{q-1},\ t \geq a. \tag{1.6}$$

Definindo $\tau = t/a \geq 1$, (1.6) torna-se $qa^{q-1}(\tau a - 1)^{q-1} \geq q(\tau a)^{q-1}(a-1)^{q-1}$, isto é,

$$(\tau a - 1)^{q-1} \geq \tau^{q-1}(a-1)^{q-1} = (\tau a - \tau)^{q-1},$$

o que é verdadeiro, pois $\tau \geq 1$. Isto conclui a demonstração do Lema 1.8.

Demonstração do Teorema 1.5:

Caso (i) : Demonstração retirada de Pucci e Serrin (2004).

Considere $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(t) = B(x, z, (t\tau_1 + (1-t)\eta_1, t\tau_2 + (1-t)\eta_2, \cdots, t\tau_N + (1-t)\eta_N)).$$

Assim, temos que

$$\rho'(t) = B_{\xi_1}(x, z, t\tau + (1-t)\eta)(\tau_1 - \eta_1) + \cdots + B_{\xi_N}(x, z, t\tau + (1-t)\eta)(\tau_N - \eta_N).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\rho(1)-\rho(0)=\int_0^1\rho'(t)dt$, ou seja,

$$\begin{aligned} B(x,z,\tau)-B(x,z,\eta) &= \int_0^1 B_{\xi_1}(x,z,\cdot)(\tau_1-\eta_1)dt+\cdots+\int_0^1 B_{\xi_N}(x,z,\cdot)(\tau_N-\eta_N)dt \\ &\leq \int_0^1 |B_{\xi_1}(x,z,\cdot)||\tau_1-\eta_1|dt+\cdots+\int_0^1 |B_{\xi_N}(x,z,\cdot)||\tau_N-\eta_N|dt \\ &\leq \nu^*|\tau-\eta|, \end{aligned}$$

pois B é C^1 com respeito a ξ em subconjuntos compactos de suas variáveis. Assim,

$$|B(x,z,\tau)-B(x,z,\eta)|\leq \nu^*|\tau-\eta|,\ x\in\Omega'\subset\subset\Omega,\ \tau,\eta\in\mathbb{R}^N, \tag{1.7}$$

para alguma constante $\nu^*>0$.

Suponha, por contradição, que não tenhamos $u\leq v$ em Ω. Fazendo $\omega(x)=v(x)-u(x)$, $x\in\Omega$, segue que $\overline{\epsilon}=-\inf_\Omega\omega(x)>0$. Considerando $\epsilon\in\left(\frac{\overline{\epsilon}}{2},\overline{\epsilon}\right)$, a função $\omega_\epsilon=\min\{\omega+\epsilon,0\}$ é não-nula exatamente no conjunto $\Sigma=\Sigma_\epsilon=\{x\in\Omega:\omega_\epsilon(x)<0\}$. Desde que $u\leq v$ em $\partial\Omega$, $\omega+\epsilon>0$ em $\partial\Omega$, o que nos permite concluir que $\Sigma\subset\subset\Omega$, isto é, $\overline{\Sigma}$ é compacto em Ω.

Observe que

$$\nabla v-\nabla u=\nabla\omega=0 \ \text{ em } \ E=\{x\in\Omega:\omega(x)=-\overline{\epsilon}\}\subset\Sigma,$$

isto é, nos pontos de Ω em que o ínfimo de ω é atingido. Logo, $\nabla\omega_\epsilon=\nabla\omega=0$ em E.

Considere o conjunto

$$\Gamma=\Gamma_\epsilon=\{x\in\Sigma:\epsilon-\overline{\epsilon}<\omega_\epsilon(x)<0\},$$

em que sabemos que $\epsilon-\overline{\epsilon}=\inf\limits_{\Omega}\omega_\epsilon(x)$.

É claro que os pontos $x\in\Omega$ em que o ínfimo de ω_ϵ é atingido, pertencem ao conjunto E.

Daí, $\Sigma\backslash\Gamma=E$ e então $\nabla\omega_\epsilon=0$ em $\Sigma\backslash\Gamma$.

Observando que $\omega_\epsilon\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\omega_\epsilon\leq 0$, de (1.4) e (1.5) segue que

$$\int_\Omega|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\omega_\epsilon dx\leq\int_\Omega B(x,v,\nabla v)\omega_\epsilon dx \tag{1.8}$$

e

$$\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\omega_\epsilon dx\geq\int_\Omega B(x,u,\nabla u)\omega_\epsilon dx. \tag{1.9}$$

Subtraindo (1.9) de (1.8), utilizando a monotonicidade de B em relação a z e (1.7), temos

que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \{|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\}\nabla\omega_\epsilon dx \leq \int_\Omega \{B(x,v,\nabla v) - B(x,u,\nabla u)\}\omega_\epsilon dx \\
= &\int_\Sigma \{B(x,v,\nabla v) - B(x,u,\nabla u)\}\omega_\epsilon dx \\
\leq &\int_\Sigma \{B(x,u,\nabla v) - B(x,u,\nabla u)\}\omega_\epsilon dx \leq \nu^* \int_\Sigma |\nabla\omega_\epsilon||\omega_\epsilon| dx.
\end{aligned}$$

Do Lema 1.7,

$$C_p \int_\Omega \frac{|\nabla\omega_\epsilon|^2}{(|\nabla v| + |\nabla u|)^{2-p}} dx \leq \int_\Omega \{|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\}\nabla\omega_\epsilon dx.$$

Observe agora que, desde que $\nabla\omega_\epsilon = 0$ em $\Sigma\backslash\Gamma$, reescrevemos

$$C_p \int_\Gamma \frac{|\nabla\omega_\epsilon|^2}{(|\nabla v| + |\nabla u|)^{2-p}} dx \leq \int_\Gamma \{|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\}\nabla\omega_\epsilon dx.$$

Como $u, v \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$, temos que

$$\frac{1}{(|\nabla v| + |\nabla u|)^{2-p}} \geq \frac{1}{(\|\nabla v\|_{L_\infty(\Sigma)} + \|\nabla u\|_{L_\infty(\Sigma)})^{2-p}} := M \quad \text{em } \Gamma,$$

de forma que

$$\begin{aligned}
C_p M \int_\Gamma |\nabla\omega_\epsilon|^2 &\leq \nu^* \int_\Gamma |\nabla\omega_\epsilon||\omega_\epsilon| dx \\
&\leq \nu^* \left(\int_\Gamma |\nabla\omega_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Gamma |\omega_\epsilon|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \mu(\Gamma)^{\frac{2^*-1}{2^*}-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Sobolev,

$$\left(\int_\Omega |\omega_\epsilon|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla\omega_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}} = C\left(\int_\Gamma |\nabla\omega_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde segue que

$$C_p M \int_\Gamma |\nabla\omega_\epsilon|^2 \leq \nu^* \left(\int_\Gamma |\nabla\omega_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}} C \left(\int_\Gamma |\nabla\omega_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}} \mu(\Gamma)^{\frac{2^*-1}{2^*}-\frac{1}{2}},$$

isto é,

$$1 \leq \frac{\nu^* C}{C_p M}\mu(\Gamma)^{\frac{2^*-1}{2^*}-\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

Observe que $\frac{2^*-1}{2^*} - \frac{1}{2} > 0$ e $\mu(\Gamma) \to 0$ quando $\epsilon \to \overline{\epsilon}$, o que contradiz (1.10). Isto conclui a demonstração do Princípio de Comparação no Caso (i).

Caso (ii) : Demonstração baseada em Ahmed Hamydy (2010) [27].

Defina

$$\Upsilon := \{x \in \Omega : u(x) - v(x) > 0\}$$

e suponha, por contradição, que $\mu(\Upsilon) \neq 0$. Para $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, definimos

$$\Upsilon_n := \{x \in \Omega : u(x) - v(x) > \beta_n\} \subset\subset \Omega,$$

em que $\beta_n = \beta - \frac{1}{n}$, com $\beta = \| u - v \|_{L^\infty(\Upsilon)}$.

Considere os conjuntos:

$$\Upsilon_n' := \{x \in \Omega : \nabla u \neq \nabla v, u - v > \beta_n\} \subset \Upsilon_n \subset \Omega;$$

$$G_{(a)} := \{x \in \Upsilon_n' : |\nabla v| \geq a|\nabla u|\} \subset \Upsilon_n';$$

$$\tilde{G}_{(a)} := \{x \in \Upsilon_n' : |\nabla u| \geq a|\nabla v|\} \subset \Upsilon_n';$$

$$L_{(a)} := \{x \in \Upsilon_n' : a|\nabla v| > |\nabla u| > \frac{1}{a}|\nabla v|\} \subset \Upsilon_n',$$

em que $a > 1$ é um parâmetro real.

Assim, temos que $\Upsilon_n' = G_{(a)} \dot\cup \tilde{G}_{(a)} \dot\cup L_{(a)}$ e que

$$\omega(x) := (u - v - \beta_n)^+(x) = \sup\{0, u(x) - v(x) - \beta_n\} \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Fazendo (1.4) - (1.5) e tomando ω como função teste, temos

$$\int_\Omega \{|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\}\nabla\omega dx \geq \int_\Omega \{B(x, v, \nabla v) - B(x, u, \nabla u)\}\omega dx.$$

Como $\nabla\omega \neq 0$ somente em Υ_n' e $\omega \neq 0$ somente em Υ_n, reescrevemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Upsilon_n'} \{|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\}\nabla\omega dx \\
\leq \; & \int_{\Upsilon_n'} \{B(x, u, \nabla u) - B(x, v, \nabla v)\}\omega dx + \int_{\{x\in\Upsilon_n : \nabla u = \nabla v\}} \{B(x, u, \nabla u) - B(x, v, \nabla v)\}\omega dx \\
= \; & \int_{\Upsilon_n'} \{[B(x, u, \nabla u) - B(x, v, \nabla u)] + [B(x, v, \nabla u) - B(x, v, \nabla v)]\}\omega dx \\
+ \; & \int_{\{x\in\Upsilon_n : \nabla u = \nabla v\}} \{[B(x, u, \nabla u) - B(x, v, \nabla u)] + [B(x, v, \nabla u) - B(x, v, \nabla v)]\}\omega dx.
\end{aligned}$$

Lembrando que $u > v + \beta_n$ em Υ_n, da monotonicidade de B com relação a z e de (B_2) segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Upsilon_n'} \{|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\}\nabla\omega dx \\
\leq & \int_{\Upsilon_n' \cup \{x\in\Upsilon_n : \nabla u = \nabla v\}} [B(x, v+\beta_n, \nabla u) - B(x, v, \nabla u)]\omega dx + \int_{\Upsilon_n'} |B(x,v,\nabla u) - B(x,v,\nabla v)|\omega dx \\
\leq & \int_{\Upsilon_n' \cup \{x\in\Upsilon_n : \nabla u = \nabla v\}} [-\alpha(\beta_n)]\omega dx + L\int_{\Upsilon_n'} \left|\, |\nabla u|^q - |\nabla v|^q \right| \omega dx, \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

em que $L = \| \, b(\cdot, s) \, \|_{L^\infty(\Omega)}$.

Pelo Lema 1.7, reescrevemos (1.11) como

$$C_p \int_{\Upsilon_n'} |\nabla\omega|^p dx \leq \int_{\Upsilon_n' \cup \{x\in\Upsilon_n : \nabla u = \nabla v\}} [-\alpha(\beta_n)]\omega dx + L\int_{\Upsilon_n'} \left|\, |\nabla u|^q - |\nabla v|^q \right| \omega dx. \qquad (1.12)$$

Pelo Lema 1.8, se $|\nabla v|/|\nabla u| \geq a > 1$, então

$$|\nabla v|^q - |\nabla u|^q \leq \left(\frac{a}{a-1}\right)^{q-1} (|\nabla v| - |\nabla u|)^q + (a^{q-1} - 1)|\nabla u|^q,$$

ou, ainda,

$$||\nabla v|^q - |\nabla u|^q| \leq \left(\frac{a}{a-1}\right)^{q-1} |\nabla v - \nabla u|^q + (a^{q-1} - 1)|\nabla u|^q.$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Upsilon_n'} \left|\, |\nabla u|^q - |\nabla v|^q \right| \omega dx &= \left(\frac{a}{a-1}\right)^{q-1} \left\{ \int_{G_{(a)}} |\nabla\omega|^q \omega dx + \int_{\tilde{G}_{(a)}} |\nabla\omega|^q \omega dx \right\} + \\
&+ (a^{q-1} - 1)\left\{ \int_{G_{(a)}} |\nabla u|^q \omega dx + \int_{\tilde{G}_{(a)}} |\nabla v|^q \omega dx \right\} \\
&+ \int_{L_{(a)}} \left|\, |\nabla u|^q - |\nabla v|^q \right| \omega dx \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Afirmação 1.1.1: Se $x \in L_{(a)}$, então $|\, |\nabla v|^q - |\nabla u|^q| \leq (a^q - 1)|\nabla u|^q$.

Confira a verificação desta afirmação após a demonstração deste Princípio de Comparação.

Retomando (1.13) e usando a afirmação 1.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Upsilon'_n} |\,|\nabla u|^q - |\nabla v|^q|\,\omega dx &\leq \left(\frac{a}{a-1}\right)^{q-1}\left\{\int_{G_{(a)}} |\nabla\omega|^q\omega dx + \int_{\tilde{G}_{(a)}} |\nabla\omega|^q\omega dx\right\} + \\ &+ (a^{q-1}-1)\left\{\int_{G_{(a)}} |\nabla u|^q\omega dx + \int_{\tilde{G}_{(a)}} |\nabla v|^q\omega dx\right\} \\ &+ (a^q-1)\int_{L_{(a)}} |\nabla u|^q\omega dx\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a}{a-1}\right)^{q-1}\int_{\Upsilon'_n} |\nabla\omega|^q\omega dx + (a^{q-1}-1)\int_{\Upsilon'_n} |\nabla v|^q\omega dx + (a^{q-1}+a^q-2)\int_{\Upsilon'_n} |\nabla u|^q\omega dx. \tag{1.14}$$

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$. Desde que $u, v \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$, $\Upsilon'_{n_0} \subset \Omega$ e $\alpha(\beta_{n_0}) > 0$, podemos afirmar que existe $a_0 > 1$ tal que

$$\Phi(x) := (a_0^{q-1} + a_0^q - 2)L|\nabla u|^q - \alpha(\beta_{n_0}) + (a_0^{q-1} - 1)L|\nabla v|^q \leq 0 \ \text{ em } \Upsilon'_{n_0}. \tag{1.15}$$

Desde que $\beta_n > \beta_{n_0}$, para cada $n > n_0$, segue que

$$\alpha(\beta_n) \geq \alpha(\beta_{n_0}), \tag{1.16}$$

pois $-B(x, s+\beta_n, \xi) \geq -B(x, s+\beta_{n_0}, \xi)$.

Retomando (1.12) e usando (1.14), (1.15) e (1.16) temos, para $n > n_0$ e $a = a_0$,

$$\begin{aligned}C_p\int_{\Upsilon'_n} |\nabla\omega|^p dx &\leq \int_{\Upsilon'_n\cup\{x\in\Upsilon_n:\nabla u=\nabla v\}} [-\alpha(\beta_n)]\omega dx + L\int_{\Upsilon'_n} |\,|\nabla u|^q - |\nabla v|^q|\,\omega dx \\ &\leq \int_{\Upsilon'_n\cup\{x\in\Upsilon_n:\nabla u=\nabla v\}} [-\alpha(\beta_{n_0})]\omega dx + L\left(\frac{a_0}{a_0-1}\right)^{q-1}\int_{\Upsilon'_n} |\nabla\omega|^q\omega dx \\ &+ L(a_0^{q-1}-1)\int_{\Upsilon'_n} |\nabla v|^q\omega dx + L(a_0^{q-1}+a_0^q-2)\int_{\Upsilon'_n} |\nabla u|^q\omega dx \\ &:= \int_{\Upsilon'_n} \Phi(x)\omega dx + L\left(\frac{a_0}{a_0-1}\right)^{q-1}\int_{\Upsilon'_n} |\nabla\omega|^q\omega dx \\ &\leq L\left(\frac{a_0}{a_0-1}\right)^{q-1}\int_{\Upsilon'_n} |\nabla\omega|^q\omega dx \\ &\leq L_{a_0}\left(\int_{\Upsilon'_n} |\nabla\omega|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{\Upsilon'_n} |\omega|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \mu(\Upsilon'_n)^{\frac{p-q}{p}-\frac{1}{p^*}},\end{aligned}$$

em que $L_{a_0} = L\left(\frac{a_0}{a_0-1}\right)^{q-1}$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Portanto,

$$C_p \left(\int_{\Upsilon'_n} |\nabla \omega|^p dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \leq L_{a_0} \left(\int_{\Upsilon'_n} |\omega|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \mu(\Upsilon'_n)^{\frac{p-q}{p} - \frac{1}{p^*}}. \tag{1.17}$$

Pelo Teorema da Imersão de Sobolev,

$$\left(\int_{\Omega} |\omega|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla \omega|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = C \left(\int_{\Upsilon'_n} |\nabla \omega|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.18}$$

Retomando (1.17) e usando (1.18), temos

$$C_p \left(\int_{\Upsilon'_n} |\nabla \omega|^p dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \leq L_{a_0} C \left(\int_{\Upsilon'_n} |\nabla \omega|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \mu(\Upsilon'_n)^{\frac{p-q}{p} - \frac{1}{p^*}},$$

ou seja,

$$\left(\int_{\Upsilon'_n} |\nabla \omega|^p dx \right)^{\frac{p-q-1}{p}} \leq \frac{L_{a_0} C}{C_p} \mu(\Upsilon'_n)^{\frac{p-q}{p} - \frac{1}{p^*}}. \tag{1.19}$$

Observe que

$$\mu(\Upsilon'_n) \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Upsilon'_n} |\nabla \omega|^p dx \to 0 \ \text{ quando } n \to \infty,$$

mas isto nos leva a uma contradição, pois $p - 1 \leq q < p(1 - 1/p^*)$. Isto conclui a demonstração do Princípio de Comparação no Caso (ii).

Verificação da Afirmação 1.1.1:

Se $1/a < X < a$, então $|X^q - 1| \leq a^q - 1$, pois, se $X < a$, então $X^q - 1 < a^q - 1$.

Se $X^q \geq 1$, é claro que $|X^q - 1| = X^q - 1 < a^q - 1$. Agora, se $X^q < 1$, vamos verificar que $|X^q - 1| = 1 - X^q \leq a^q - 1$.

Faça $X = 1/Y$. Daí, de $1/a < X$, obtemos $Y^q < a^q$, ou seja,

$$\left(\frac{1}{X} \right)^q - 1 < a^q - 1, \text{ i.e. } 1 - X^q < (a^q - 1) X^q < a^q - 1.$$

Logo, $|X^q - 1| = 1 - X^q \leq a^q - 1$.

Para obter o afirmado, basta tomar $X = |\nabla v| / |\nabla u|$. Isto conclui a verificação da Afirmação 1.1.1.

Capítulo

2

Existência de soluções positivas em Domínio Limitado

2.1 Problema de Dirichlet não-convectivo

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_0}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é domínio limitado, $\lambda > 0$ é um parâmetro real, $g, f : \Omega \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ são funções contínuas tais que

(G) (i) existem funções contínuas $b : \Omega \to [0,\infty)$, $b \not\equiv 0$, e $k : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$g(x,s) \leq b(x)k(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_1 \in (0,1]$ e funções $a : \Omega \to [0,\infty)$, $a \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $h : (0,s_1) \to (0,\infty), h \in C(\Omega)$, tais que

$$g(x,s) \geq a(x)h(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,s_1).$$

(F) (i) existem funções contínuas $c : \Omega \to [0,\infty)$, $c \not\equiv 0$, e $j : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$f(x,s) \leq c(x)j(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_2 \in (0,1]$ e funções $d : \Omega \to [0,\infty)$, $d \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $l : (0,s_2) \to (0,\infty), l \in C(\Omega)$, tais que

$$f(x,s) \geq d(x)l(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,s_2).$$

(M) existe $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p\, \omega_M = M(x) \qquad \text{em} \quad \Omega \\ \omega_M > 0 \text{ em } \Omega \ \text{ e } \ \omega_M = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $M(x) := \max\{b(x), c(x)\},\ x \in \Omega$.

$$(K)_{s_0,t_0} \quad \sup_{(s_0,t_0)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{\left[1 - \left(\frac{s_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2(p-1)}}{\|\omega_M\|_\infty^{p-1}}, \quad \text{para alguns } 0 \leq s_0 < t_0 \leq \infty.$$

Teorema DL$_0$: *Suponha $V \equiv 0, (G), (F), (M)$ e $(K)_{s_0,t_0}$. Então existem $c, \lambda^* > 0$ e uma função $u = u_\lambda \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, com $c\varphi_\Omega \leq u < t_0$, satisfazendo (P) em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\max\left\{0, \frac{\lambda_{1,\Omega}(\rho) - h_0}{l_0}\right\} < \lambda < \lambda^*,$ *se* $0 < l_0 < \infty$*;*

(ii) $0 < \lambda < \lambda^*,$ *se* $l_0 = \infty$*;*

(iii) $0 < \lambda < \lambda^*,$ *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > \lambda_{1,\Omega}(\rho)$*.*

Adicionalmente,

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_0\right), \ \textit{se } s_0 = 0 \quad \textit{e} \quad \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_\infty\right), \ \textit{se } t_0 = \infty.$$

Para demonstrar este resultado, considere, para alguns $\epsilon, \sigma > 0$ suficientemente pequenos, o problema perturbado

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u \geq g(x, u+\epsilon) + \lambda f(x, u+\epsilon) \text{ em } \Omega \\ u > \sigma \quad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad u = \sigma \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Mostraremos o

Lema 2.1. *Suponha $(G)(i), (F)(i), (M)$ e $(K)_{s_0,t_0}$. Então, para algum $\epsilon_0 > 0$, existem $\lambda^* > 0$ e $v_\sigma = v_{\sigma,\lambda} \in C^1(\overline{\Omega})$, com $\sigma < v_\sigma < t_0$, satisfazendo (2.2), para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 < \epsilon < \epsilon_0$.*

Além disso,

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right), \text{ se } s_0 = 0 \quad e \quad \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right), \text{ se } t_0 = \infty.$$

Observação 2.2. *O caso em que $g \equiv 0$ encontra-se provado em [25].*

2.1.1 Demonstração do Lema 2.1

Demonstração. Com o objetivo de incluir as situações em que $k_\infty = \infty$ e $j_\infty = \infty$, isto é, não-linearidades superlineares no infinito, definimos as funções contínuas

$$\zeta_{k,\gamma}(s) := \begin{cases} k(s), & \text{se } 0 < s \leq \gamma \\ I_k(\gamma)s^{p-1}, & \text{se } s \geq \gamma, \end{cases} \tag{2.3}$$

e

$$\zeta_{j,\gamma}(s) := \begin{cases} j(s), & \text{se } 0 < s \leq \gamma \\ I_j(\gamma)s^{p-1}, & \text{se } s \geq \gamma, \end{cases} \tag{2.4}$$

em que $\gamma > 0$ é um parâmetro real

$$I_k(\gamma) := \frac{k(\gamma)}{\gamma^{p-1}} \quad \text{e} \quad I_j(\gamma) := \frac{j(\gamma)}{\gamma^{p-1}}.$$

Para cada $s > 0$, considere as funções contínuas e monótonas

$$\hat{\zeta}_{k,\gamma}(s) := \sup\left\{\frac{\zeta_{k,\gamma}(t)}{t^{p-1}}, \ t > s\right\}, \quad \hat{\zeta}_{j,\gamma}(s) := \sup\left\{\frac{\zeta_{j,\gamma}(t)}{t^{p-1}}, \ t > s\right\} \tag{2.5}$$

e

$$\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s) = s^{p-1}\hat{\zeta}_{k,\gamma}(s) + \lambda s^{p-1}\hat{\zeta}_{j,\gamma}(s), \ \lambda \geq 0. \tag{2.6}$$

Segue diretamente das definições acima a

<u>Afirmação 2.1.1</u>:

(i) $\dfrac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)}{s^{p-1}}$ é não crescente em $s, \ s > 0$;

(ii) $\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s) \geq \zeta_{k,\gamma}(s) + \lambda\zeta_{j,\gamma}(s), \ s > 0$;

(iii) $\lim_{s\to\infty} \frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)}{s^{p-1}} = I_k(\gamma) + \lambda I_j(\gamma)$.

Definindo

$$H_{\lambda,\gamma}(s) = \frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt}, \; s > 0,$$

afirmamos que tal função satisfaz

Afirmação 2.1.2: (Veja demonstração no Apêndice.)

(i) $H_{\lambda,\gamma} \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$;

(ii) $\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s) \leq [H_{\lambda,\gamma}(s)]^{p-1}, \; s > 0$;

(iii) $\frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s}$ é não-crescente em $s > 0$;

(iv) $\lim_{s\to\infty} \frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s} = (I_k(\gamma) + \lambda I_j(\gamma))^{\frac{1}{p-1}}$.

Em função de $H_{\lambda,\gamma}$, definimos

$$\Gamma_\lambda(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma \frac{t}{H_{\lambda,\gamma}(t)}dt \tag{2.7}$$

e mostramos, no Apêndice deste trabalho, que

Afirmação 2.1.3:

(i) $\lim_{\gamma\to\infty} \Gamma_\lambda(\gamma) = \frac{1}{(k_\infty + \lambda j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}}$, para cada $\lambda \geq 0$;

(ii) $\lim_{\gamma\to 0} \Gamma_\lambda(\gamma) = \frac{1}{(k_0 + \lambda j_0)^{\frac{1}{p-1}}}$, para cada $\lambda \geq 0$;

(iii) Γ_λ é decrescente em $\lambda > 0$.

Afirmação 2.1.4: Existe $\gamma_0 > 0$ tal que $\Gamma_0(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty$.

Verificação da Afirmação 2.1.4: Para demonstrar esta afirmação, utilizaremos $(K)_{s_0,t_0}$.

Primeiro caso: $0 < s_0 < t_0 < \infty$

Tome $\alpha = (s_0/t_0)^{\frac{1}{2}}$ e $\gamma_0 = t_0$. Daí,

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(\gamma_0) &= \frac{1}{\gamma_0}\int_0^{\gamma_0} \frac{t}{H_{0,\gamma_0}(t)}dt > \frac{1}{\gamma_0}\int_{\alpha\gamma_0}^{\gamma_0} \frac{t}{H_{0,\gamma_0}(t)}dt \\
&\geq \frac{1}{\gamma_0}\frac{\alpha\gamma_0}{H_{0,\gamma_0}(\alpha\gamma_0)}\gamma_0(1-\alpha) = \frac{(1-\alpha)}{\alpha\gamma_0}\int_0^{\alpha\gamma_0} \frac{t}{\hat{\zeta}_{0,\gamma_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt \\
&> \frac{(1-\alpha)}{\alpha\gamma_0}\int_{\alpha^2\gamma_0}^{\alpha\gamma_0} \frac{t}{\hat{\zeta}_{0,\gamma_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt \geq \frac{(1-\alpha)}{\alpha\gamma_0}\frac{\alpha^2\gamma_0}{\hat{\zeta}_{0,\gamma_0}(\alpha^2\gamma_0)^{\frac{1}{p-1}}}\alpha\gamma_0(1-\alpha) \\
&= \frac{(1-\alpha)^2\alpha^2\gamma_0}{\alpha^2\gamma_0\hat{\zeta}_{k,\gamma_0}(\alpha^2\gamma_0)^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{(1-\alpha)^2}{\left[\sup\left\{\frac{\zeta_{k,\gamma_0}(t)}{t^{p-1}}, \quad t > \alpha^2\gamma_0 = s_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}} \\
&= \frac{(1-\alpha)^2}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, s_0 < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}} > \frac{(1-\alpha)^2}{\left[\frac{(1-\alpha)^{2(p-1)}}{\|\omega_M\|_\infty^{p-1}}\right]^{p-1}} = \|\omega_M\|_\infty^{\cdot}
\end{aligned}$$

Veja então que, neste caso,

$$\Gamma_0(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty, \text{ para } \gamma_0 = t_0.$$

<u>Segundo caso:</u> $s_0 = 0$, isto é, vale $(K)_{0,t_0}$ para algum $t_0 < \infty$.

Tomando $\alpha \in (0,1)$ arbitrário, pelos cálculos feitos no primeiro caso, tomando $\gamma_0 = t_0$, temos que

$$\Gamma_0(\gamma_0) > \frac{(1-\alpha)^2}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, \alpha^2\gamma_0 < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Daí,

$$\liminf_{\alpha\to 0} \Gamma_0(\gamma_0) \geq \frac{1}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, 0 < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}} > \frac{1}{\left[\frac{1}{\|\omega_M\|_\infty^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}} = \|\omega_M\|_\infty.$$

Logo, existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que

$$\Gamma_0(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty, \text{ para } \gamma_0 = t_0.$$

<u>Terceiro caso:</u> $t_0 = \infty$, isto é, vale $(K)_{s_0,\infty}$, para algum $s_0 > 0$.

Dado $\alpha \in (0,1)$ arbitrário, tome $\gamma_0 = \gamma_0(\alpha) = (s_0+1)/\alpha^2$, donde segue que $\gamma_0 > \alpha^2\gamma_0 = s_0 + 1 > s_0$.

Pelos cálculos feitos no primeiro caso, temos que

$$\Gamma_0(\gamma_0(\alpha)) > \frac{(1-\alpha)^2}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, s_0+1<t\leq\gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Daí, de $\gamma_0 \to \infty$ quando $\alpha \to 0$, segue que

$$\liminf_{\alpha\to 0}\Gamma_0(\gamma_0(\alpha,s_0)) \geq \frac{1}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}},\ s_0+1<t<\infty\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}} > \frac{1}{\left[\frac{1}{\|\omega_M\|_\infty^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}} = \|\omega_M\|_\infty.$$

Logo, existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que

$$\Gamma_0(\gamma_0(\alpha_0,s_0)) > \|\omega_M\|_\infty,\ \text{para } \gamma_0 = (s_0+1)/\alpha_0^2.$$

<u>Quarto caso:</u> $s_0 = 0$ e $t_0 = \infty$, isto é, vale $(K)_{0,\infty}$

Basta tomar $0 < r_0 < \infty$ e $\alpha \in (0,1)$ arbitrários e $\gamma_0 = \gamma_0(\alpha, r_0) = (r_0+1)/\alpha^2$. Procede-se como no caso anterior.

A Afirmação 2.1.4 está verificada, ou seja,

$$\Gamma_0(\gamma_0) = \frac{1}{\gamma_0}\int_0^{\gamma_0}\frac{t}{H_{0,\gamma_0}(t)}dt > \|\omega_M\|_\infty.$$

De agora em diante, fixemos $\gamma = \gamma_0 \leq t_0$.

Desde que $\lim\limits_{\lambda\to 0}\Gamma_\lambda(\gamma_0) = \Gamma_0(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty$ e $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\Gamma_\lambda(\gamma_0) = 0$, existe $\lambda^* = \lambda^*(\Omega) > 0$ tal que

$$\Gamma_{\lambda^*}(\gamma_0) = \|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Dado $0 < \lambda < \lambda^*$, defina

$$\eta_\lambda(s) = \frac{1}{\gamma_0}\int_0^s \frac{t}{H_{\lambda,\gamma_0}(t)}dt,\ s > 0, \tag{2.9}$$

e observe, desde que Γ_λ é decrescente em λ, que $\eta_\lambda(\gamma_0) = \Gamma_\lambda(\gamma_0) > \Gamma_{\lambda^*}(\gamma_0) = \|\omega_M\|_\infty$.

Assim, existe $\bar\sigma = \bar\sigma(\lambda) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\eta_\lambda(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty + \bar\sigma. \tag{2.10}$$

No Apêndice será mostrado que

<u>Afirmação 2.1.5:</u>

(i) $[\bar\sigma, \|\omega_M\|_\infty + \bar\sigma] \subset \mathrm{Im}(\eta_\lambda)$;

(ii) $\eta_\lambda \in C^2((0,\infty), \mathrm{Im}(\eta_\lambda))$ é crescente em $s > 0$;

(iii) $\eta_\lambda^{-1} := \psi_\lambda \in \ C^2((\mathrm{Im}(\eta_\lambda)\backslash\{0\}, (0,\infty))$ é crescente em $s > 0$;

(iv) $\psi_\lambda'(s) = \dfrac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(s))}{\psi_\lambda(s)}, \ s > 0$;

(v) η_λ é decrescente em $\lambda > 0$.

Para cada $\sigma \in (0, \bar{\sigma}]$, defina

$$v_\sigma(x) = v_{\sigma,\lambda}(x) := \psi_\lambda(\omega_M(x) + \sigma), \ x \in \overline{\Omega}. \tag{2.11}$$

Da Afirmação 2.1.5 (iii), segue que v_σ é crescente em σ. Além disso, de $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega}), \ \sigma \in (0, \bar{\sigma}]$ e da Afirmação 2.1.5 (i) e (iii), temos que $v_\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$. Em particular, $v_\sigma \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Veja que, de (2.10), $\omega_M(x) + \bar{\sigma} \leq \|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)} + \bar{\sigma} < \eta_\lambda(\gamma_0)$, donde segue, da Afirmação 2.1.5 (iii), que

$$\psi_\lambda(\omega_M(x) + \bar{\sigma}) < \psi_\lambda(\eta_\lambda(\gamma_0)) = \gamma_0.$$

Daí, $v_{\bar{\sigma}}(x) < \gamma_0 \leq t_0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Logo, $\sup\limits_{\overline{\Omega}} v_{\bar{\sigma}}(x) = \|v_{\bar{\sigma}}\|_\infty < \gamma_0$, o que acarreta a existência de um $\epsilon_0 = \epsilon_0(\bar{\sigma}) > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\|v_{\bar{\sigma}}\|_{L^\infty(\Omega)} < \gamma_0 - \epsilon_0$. Para cada $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ e $0 < \epsilon < \epsilon_0$, temos que

$$\sup_{\overline{\Omega}} v_\sigma(x) \leq \sup_{\overline{\Omega}} v_{\bar{\sigma}}(x) = \|v_{\bar{\sigma}}\|_{L^\infty(\Omega)} < \gamma_0 - \epsilon_0 < \gamma_0 - \epsilon,$$

isto é,

$$\|v_\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} < \gamma_0 - \epsilon, \quad 0 < \sigma < \bar{\sigma}, \ 0 < \epsilon < \epsilon_0. \tag{2.12}$$

De (2.11), temos que $\nabla v_\sigma = \psi_\lambda'(\omega_M + \sigma)\nabla\omega_M$, donde segue que

$$|\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma = [\psi_\lambda'(\omega_M + \sigma)]^{p-1}|\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M.$$

Assim, dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \ \phi \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla\phi dx &= \int_\Omega [\psi_\lambda'(\omega_M) + \sigma]^{p-1}|\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla\phi dx \\
&= \int_\Omega |\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla([\psi_\lambda'(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\phi)dx \\
&- (p-1)\int_\Omega |\nabla\omega_M|^p[\psi_\lambda'(\omega_M + \sigma)]^{p-2}\psi_\lambda''(\omega_M + \sigma)\phi dx
\end{aligned}$$

Afirmação 2.1.6: $[\psi_\lambda'(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. (Veja demonstração no Apêndice.)

Segue desta afirmação, de $\psi_\lambda'' \leq 0$, da hipótese (M), das afirmações 2.1.2 (ii) e 2.1.1 (i), de (2.12) e (2.6), para cada $0 < \epsilon < \epsilon_0,\ 0 < \sigma < \bar{\sigma}$, que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla\phi dx &\geq \int_\Omega M(x)[\psi_\lambda'(\omega_M+\sigma)]^{p-1}\phi dx \\
&= \int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)}\right]^{p-1}\phi dx \qquad (2.13)\\
&\geq \int_\Omega [M(x)]\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)}{(v_\sigma+\epsilon)^{p-1}}\phi dx \geq \int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)}{\gamma_0^{p-1}}\phi dx \\
&\geq \int_\Omega M(x)[\zeta_{k,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)+\lambda\zeta_{j,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)]\phi dx
\end{aligned}$$

e, de (2.3), (2.4), (2.12), $(G)(i)$ e $(F)(i)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla\phi dx &\geq \int_\Omega [M(x)k(v_\sigma+\epsilon)+\lambda M(x)j(v_\sigma+\epsilon)]\phi dx \\
&\geq \int_\Omega [b(x)k(v_\sigma+\epsilon)+\lambda c(x)j(v_\sigma+\epsilon)]\phi dx \\
&\geq \int_\Omega [g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)]\phi dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$-\Delta_p v_\sigma \geq g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon) \quad \text{em } \Omega,$$

para cada $0 < \lambda < \lambda^*,\ 0 < \sigma < \bar{\sigma}, \epsilon \in (0,\epsilon_0)$.

Além disso, $\sigma < v_\sigma < \gamma_0 \leq t_0$ em Ω, $v_\sigma = \sigma$ em $\partial\Omega$ e $v_\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$.

Resta-nos verificar que

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right), \text{ se } s_0 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right), \text{ se } t_0 = \infty.$$

De fato, se $s_0 = 0$, então vale $(K)_{0,t_0}$, o que implica que $k_0 < 1/\|\omega_M\|^{p-1}_\infty$.

Tomando

$$\lambda^* = \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right),$$

da Afirmação 2.1.3 (ii) temos, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ e $\gamma \in (0,t_0]$, que

$$\liminf_{\gamma\to 0}(\Gamma_\lambda(\gamma) - \|\omega_M\|_\infty) = \frac{1}{(k_0+\lambda j_0)^{\frac{1}{p-1}}} - \|\omega_M\|_\infty > \frac{1}{(k_0+\lambda^* j_0)^{\frac{1}{p-1}}} - \|\omega_M\|_\infty = 0.$$

Assim, existe $\gamma_0 = \gamma_0(\lambda)$ tal que

$$\Gamma_\lambda(\gamma_0) > \|\omega_M\|, \ 0 < \lambda < \lambda^*, \tag{2.14}$$

o que verifica (2.8) e (2.9).

Analogamente, se $t_0 = \infty$, então vale $(K)_{s_0,\infty}$, o que implica que $k_\infty < 1/\|\omega_M\|_\infty^{p-1}$.

Tomando

$$\lambda^* = \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right),$$

da Afirmação 2.1.3 (i) temos, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ e $\gamma = \gamma(\alpha) = s_0/\alpha, \ \alpha \in (0,1)$, que

$$\liminf_{\alpha\to 0}(\Gamma_\lambda(\gamma(\alpha)) - \|\omega_M\|_\infty) = \frac{1}{(k_\infty + \lambda j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}} - \|\omega_M\|_\infty > \frac{1}{(k_\infty + \lambda^* j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}} - \|\omega_M\|_\infty = 0.$$

Assim, existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que

$$\Gamma_\lambda(\gamma_0) > \|\omega_M\|, \ 0 < \lambda < \lambda^*, \ \gamma_0 = s_0/\alpha_0, \tag{2.15}$$

o que verifica (2.8) e (2.9). □

2.1.2 Demonstração do Teorema DL$_0$

Demonstração. Do Lema 2.1 temos, para cada $0 < \lambda < \lambda^*, \ 0 < \sigma < \bar{\sigma}$ e $0 < \epsilon < \epsilon_0$ dados, que

$$\begin{cases} -\Delta_p v_\sigma \geq g(x, v_\sigma + \epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma + \epsilon) \text{ em } \Omega \\ v_\sigma > \sigma \ \text{ em } \ \Omega \qquad \text{e} \qquad v_\sigma = \sigma \ \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja φ_Ω uma $\lambda_{1,\Omega}(\rho)$-autofunção de (AV). De Anane (1987) [2], desde que $\rho \in L^\infty(\Omega)$, segue que $\varphi_\Omega \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \ \alpha \in (0,1)$. Em particular, $\varphi_\Omega \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Observamos que não consideramos a autofunção normalizada, embora isto pudesse ser feito.

Vamos mostrar que, para alguma constante $C = C_\Omega > 0$ apropriada, teremos

$$-\Delta_p(C\varphi_\Omega) \leq g(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + \lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) \ \text{ em } \Omega, \tag{2.16}$$

para alguns $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda > 0$ parâmetro real.

No caso (i), devemos ter

$$\lambda \geq \frac{\lambda_{1,\Omega}(\rho) - h_0}{l_0}, \ \text{isto é}, \ \lambda l_0 + h_0 \geq \lambda_{1,\Omega}(\rho),$$

donde segue que, para algum $\epsilon_1 \in (0, \min\{s_1, s_2, \gamma_0\})$,

$$\frac{\lambda l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq \lambda_{1,\Omega}(\rho), \quad \text{para qualquer } s \leq \epsilon_1, \tag{2.17}$$

em que $s_1, s_2 \in (0,1]$ foram dados em $(G)(ii)$ e $(F)(ii)$ e $\gamma_0 > 0$ foi dada na Afirmação 2.1.4 do Lema 2.1.

Tome $C = C(\Omega, \epsilon_1) > 0$ tal que $C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} = \epsilon_1/2$. Daí, para cada $0 < \epsilon < \epsilon_1/2$, temos

$$C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon_1/2 = \epsilon_1. \tag{2.18}$$

Assim, dados $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0$, e $0 < \epsilon < \epsilon_1/2$, segue de (AV), (2.17), $(F)(ii)$ e $(G)(ii)$, que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(C\varphi_\Omega)|^{p-2}\nabla(C\varphi_\Omega)\nabla\phi dx &\leq \lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C\varphi_\Omega + \epsilon)^{p-1}\phi dx \\
&\leq \int_\Omega [\lambda l(C\varphi_\Omega + \epsilon) + h(C\varphi_\Omega + \epsilon)]\rho(x)\phi dx \\
&\leq \int_\Omega [\lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + g(x, C\varphi_\Omega + \epsilon)]\phi dx, \quad (2.19)
\end{aligned}$$

o que verifica (2.16).

No caso (ii), dado $\lambda \in (0, \lambda^*)$, existe $\epsilon_2 = \epsilon_2(\lambda) \in (0, \min\{s_1, s_2, \gamma_0\})$ tal que

$$\frac{\lambda l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq \lambda_{1,\Omega}(\rho), \quad \text{para qualquer } 0 < s \leq \epsilon_2. \tag{2.20}$$

Tome $C = C(\Omega, \epsilon_2) > 0$ tal que $C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} = \epsilon_2/2$. Daí, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$, temos

$$C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon_2/2 = \epsilon_2. \tag{2.21}$$

Assim, dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\phi \geq 0$, segue de (AV), (2.20), $(F)(ii)$ e $(G)(ii)$, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$, que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(C\varphi_\Omega)|^{p-2}\nabla(C\varphi_\Omega)\nabla\phi dx &= \lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C\varphi_\Omega)^{p-1}\phi dx \\
&\leq \lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C\varphi_\Omega + \epsilon)^{p-1}\phi dx \\
&\leq \int_\Omega [\lambda d(x) l(C\varphi_\Omega + \epsilon) + a(x)h(C\varphi_\Omega + \epsilon)]\phi dx \\
&\leq \int_\Omega [\lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + g(x, C\varphi_\Omega + \epsilon)]\phi dx, \quad (2.22)
\end{aligned}$$

o que verifica (2.16).

No caso (iii), devemos ter, para algum $\epsilon_3 \in (0, \min\{s_1, \gamma_0\})$,

$$\frac{h(s)}{s^{p-1}} > \lambda_{1,\Omega}(\rho), \quad \forall\ 0 < s < \epsilon_3. \tag{2.23}$$

Tomando $C = C(\Omega, \epsilon_3) > 0$ tal que $C\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \epsilon_3/2$ temos, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$, que

$$C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon_3/2 = \epsilon_3, \tag{2.24}$$

de (AV), (2.23) e $(G)(ii)$ segue, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0,\ \lambda \in (0, \lambda^*)$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$ dados, que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(C\varphi_\Omega)|^{p-2}\nabla(C\varphi_\Omega)\nabla\phi dx &\leq \lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C\varphi_\Omega + \epsilon)^{p-1}\phi dx \\
&\leq \int_\Omega a(x)h(C\varphi_\Omega + \epsilon)\phi dx \\
&\leq \int_\Omega [\lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + g(x, C\varphi_\Omega + \epsilon)]\phi dx,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

o que verifica (2.16). Tome $\epsilon_4 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \in (0, \min\{s_1, s_2, \gamma_0\})$. Assim, de (2.18), (2.21) e (2.24), temos, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_4/2)$, que

$$C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_4. \tag{2.26}$$

Afirmação 2.1.7: $C\varphi_\Omega(x) \leq v_\sigma(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega}$.

Verificação da Afirmação 2.1.7: De (2.13) temos, no sentido fraco, a validade de

$$-\Delta_p\, v_\sigma \geq M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma^{p-1}} \tag{2.27}$$

e, de $(G)(i), (F)(i)$, (2.3) e (2.26), para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_4/2)$, reescrevemos (2.19), (2.22) e (2.25) como

$$\begin{aligned}
-\Delta_p(C\varphi_\Omega) &\leq \gamma_0^{p-1}b(x)\frac{k(C\varphi_\Omega + \epsilon)}{\gamma_0^{p-1}} + \gamma_0^{p-1}\lambda c(x)\frac{j(C\varphi_\Omega + \epsilon)}{\gamma_0^{p-1}} \\
&\leq \gamma_0^{p-1}b(x)\frac{\zeta_{k,\gamma_0}(C\varphi_\Omega + \epsilon)}{(C\varphi_\Omega + \epsilon)^{p-1}} + \gamma_0^{p-1}\lambda c(x)\frac{\zeta_{j,\gamma_0}(C\varphi_\Omega + \epsilon)}{(C\varphi_\Omega + \epsilon)^{p-1}}
\end{aligned}$$

e, de (2.4) e (2.5), para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_4/2)$, temos

$$\begin{aligned} -\Delta_p(C\varphi_\Omega) &\leq M(x)\gamma_0^{p-1}[\hat{\zeta}_{k,\gamma_0}(C\varphi_\Omega+\epsilon)+\lambda\hat{\zeta}_{j,\gamma_0}(C\varphi_\Omega+\epsilon)] \\ &= M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(C\varphi_\Omega+\epsilon)}{(C\varphi_\Omega+\epsilon)^{p-1}} \leq M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(C\varphi_\Omega)}{(C\varphi_\Omega)^{p-1}}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ou seja, de (2.27) e (2.28), temos que

$$-\Delta_p\, v_\sigma \geq \gamma_0^{p-1}M(x)\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma^{p-1}} \quad \text{e} \quad -\Delta_p\, C\varphi_\Omega \leq \gamma_0^{p-1}M(x)\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(C\varphi_\Omega)}{(C\varphi_\Omega)^{p-1}},$$

em que, pela Afirmação 2.1.1 (i), $\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(s)/s^{p-1}$ é não-crescente em $s>0$.

Desde que $v_\sigma, C\varphi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$ e $C\varphi_\Omega = 0 < \sigma = v_\sigma$ em $\partial\Omega$ segue, pelo Teorema 1.2 de [48], que a Afirmação 2.1.7 é verdadeira.

Defina agora $\hat{F}_\epsilon : \Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ por

$$\hat{F}_\epsilon(x,s) := \begin{cases} g(x,s+\epsilon)+\lambda f(x,s+\epsilon), & s\leq v_\sigma \\ g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon), & s\geq v_\sigma, \end{cases} \tag{2.29}$$

em que $\epsilon \in (0, \min\{\epsilon_0,\epsilon_4\} = \epsilon_5)$ e considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u = \hat{F}_\epsilon(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u>0 \text{ em } \Omega \text{ e } u=0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.30}$$

Afirmação 2.1.8:

(i) $\hat{F}_\epsilon$ é Carathéodory;

(ii) v_σ e $C\varphi$ são, respectivamente, supersolução e subsolução de (2.30);

(iii) $|\hat{F}_\epsilon(x,s)| \leq C(|s|)$ para alguma função crescente $C:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$.

A verificação do item (iii) desta afirmação encontra-se no Apêndice.

Pelo Teorema 1.1 [3], existe $u_{\sigma,\epsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ com $0 < C\varphi \leq u_{\sigma,\epsilon} \leq v_\sigma$ satisfazendo (2.30). Este fato, aliado a (2.29), permite-nos concluir que

$$\int_\Omega |\nabla u_{\sigma,\epsilon}|^{p-2}\nabla u_{\sigma,\epsilon}\nabla\phi dx = \int_\Omega [g(x,u_{\sigma,\epsilon}+\epsilon)+\lambda f(x,u_{\sigma,\epsilon}+\epsilon)]\phi dx,$$

para quaisquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\epsilon \in (0,\epsilon_5/2)$.

Seja $\{\Omega_k\}$ uma sequência de domínios suaves e limitados tais que

$$\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \quad \text{e} \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k.$$

Tomando um inteiro $k \geq 1$ suficientemente grande tal que $supp(\phi) \subset \Omega_k$, temos que

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u_{\sigma,\epsilon}|^{p-2} \nabla u_{\sigma,\epsilon} \nabla \phi dx = \int_{\Omega_k} [g(x, u_{\sigma,\epsilon} + \epsilon) + \lambda f(x, u_{\sigma,\epsilon} + \epsilon)]\phi dx.$$

Pelo Teorema 1.3, existem $\alpha_k \in (0,1)$ e $C_k > 0$ constante real, independentes de ϵ, tais que

$$|\nabla u_{\sigma,\epsilon}(x)| \leq C_k \quad \text{e} \quad |\nabla u_{\sigma,\epsilon}(x) - \nabla u_{\sigma,\epsilon}(y)| \leq C_k |x-y|^{\alpha_k}, \quad x, y \in \Omega_k. \tag{2.31}$$

Fazendo $\epsilon = \frac{1}{n}$ e $u_{\sigma,\epsilon} = u_{\sigma,n}$, segue que $\{u_{\sigma,n}\}$ é sequência limitada em $C^{1,\alpha_k}(\overline{\Omega}_k)$. Logo, existem uma subsequência $\{u^k_{\sigma,n}\} \subseteq \{u_{\sigma,n}\}$ e uma função $u^k_\sigma \in C^{1,\beta_k}(\overline{\Omega}_k)$, $\beta_k < \alpha_k$, tais que

$$u^k_{\sigma,n} \longrightarrow u^k_\sigma, \text{ quando } n \to \infty, \quad \text{em} \quad C^{1,\beta_k}(\overline{\Omega}_k). \tag{2.32}$$

No apêndice deste trabalho, mostraremos que

Afirmação 2.1.9:

(i) $\displaystyle\int_{\Omega_k} |\nabla u^k_{\sigma,n}|^{p-2} \nabla u^k_{\sigma,n} \nabla \phi dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega_k} |\nabla u^k_\sigma|^{p-2} \nabla u^k_\sigma \nabla \phi dx,$

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega_k} [g(x, u^k_{\sigma,n} + \frac{1}{n}) + \lambda f(x, u^k_{\sigma,n} + \frac{1}{n})]\phi dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega_k} [g(x, u^k_\sigma) + \lambda f(x, u^k_\sigma)]\phi dx.$

Portanto,

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u^k_\sigma|^{p-2} \nabla u^k_\sigma \nabla \phi dx = \int_{\Omega_k} [g(x, u^k_\sigma) + \lambda f(x, u^k_\sigma)]\phi dx.$$

Repetindo o mesmo argumento para Ω_{k+1}, temos que existem uma subsequência $\{u^{(k+1)}_{\sigma,n}\} \subseteq \{u^k_{\sigma,n}\}$ em $C^{1,\alpha_{(k+1)}}(\overline{\Omega}_{k+1})$ e uma função $u^{(k+1)}_\sigma$ em $C^{1,\beta_{(k+1)}}(\overline{\Omega}_{k+1})$, $\beta_{(k+1)} < \alpha_{k+1}$, tais que

$$u^{(k+1)}_{\sigma,n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u^{(k+1)}_\sigma \quad \text{em} \quad C^{1,\beta_{(k+1)}}(\overline{\Omega}_{k+1})$$

e

$$\int_{\Omega_{k+1}} |\nabla u^{(k+1)}_\sigma|^{p-2} \nabla u^{(k+1)}_\sigma \nabla \phi dx = \int_{\Omega_{k+1}} [g(x, u^{(k+1)}_\sigma) + \lambda f(x, u^{(k+1)}_\sigma)]\phi dx.$$

Prosseguindo desta forma, temos que existem uma subsequência $\{u^{(k+r)}_{\sigma,n}\} \subseteq \{u^{(k+r-1)}_{\sigma,n}\}$

em $C^{1,\alpha_{(k+r)}}(\overline{\Omega}_{k+r})$ e uma função $u_\sigma^{(k+r)}$ em $C^{1,\beta_{(k+r)}}(\overline{\Omega}_{k+r})$, $\beta_{(k+r)} < \alpha_{(k+r)}$, tais que

$$u_{\sigma,n}^{(k+r)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_\sigma^{(k+r)} \quad \text{em} \quad C^{1,\beta_{(k+r)}}(\overline{\Omega}_{k+r}).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_{k+r}} |\nabla u_\sigma^{(k+r)}|^{p-2}\nabla u_\sigma^{(k+r)}\nabla\phi dx = \int_{\Omega_{k+r}} [g(x,u_\sigma^{(k+r)}) + \lambda f(x,u_\sigma^{(k+r)})]\phi dx.$$

Daí,

$$\begin{array}{cccccccc}
u_{\sigma,1}^{k} & u_{\sigma,2}^{k} & u_{\sigma,3}^{k} & u_{\sigma,4}^{k} & u_{\sigma,5}^{k}\cdots & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & u_\sigma^{k} \text{ em } C^{1,\beta_k}(\overline{\Omega}_k) \\
u_{\sigma,1}^{(k+1)} & u_{\sigma,2}^{(k+1)} & u_{\sigma,3}^{(k+1)} & u_{\sigma,4}^{(k+1)} & u_{\sigma,5}^{(k+1)}\cdots & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & u_\sigma^{(k+1)} \text{ em } C^{1,\beta_{(k+1)}}(\overline{\Omega}_{k+1}) \\
u_{\sigma,1}^{(k+2)} & u_{\sigma,2}^{(k+2)} & u_{\sigma,3}^{(k+2)} & u_{\sigma,4}^{(k+2)} & u_{\sigma,5}^{(k+2)}\cdots & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & u_\sigma^{(k+2)} \text{ em } C^{1,\beta_{(k+2)}}(\overline{\Omega}_{k+2}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
u_{\sigma,1}^{(k+r)} & u_{\sigma,2}^{(k+r)} & u_{\sigma,3}^{(k+r)} & u_{\sigma,4}^{(k+r)} & u_{\sigma,5}^{(k+r)}\cdots & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & u_\sigma^{(k+r)} \text{ em } C^{1,\beta_{(k+r)}}(\overline{\Omega}_{k+r}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

com $\{u_{\sigma,n}^{(k+r)}\} \subseteq \{u_{\sigma,n}^{(k+r-1)}\}$ e $u_\sigma^{(k+r)}|_{\Omega_{(k+r-1)}} = u_\sigma^{(k+r-1)}$.

Defina $u_{\sigma,r} : \Omega \to (0,\infty)$ por

$$u_{\sigma,r}(x) = u_{(\sigma,r+1)}^{(k+r)}(x), \quad x \in \Omega_{(k+r)}, \ r \geq 0.$$

Seja

$$u_\sigma(x) = \lim_{r\to\infty} u_{\sigma,r}(x), \ x \in \Omega.$$

Então, $u_\sigma \in C^1(\Omega)$, $0 < C\varphi_\Omega \leq u_\sigma \leq v_\sigma < \gamma_0$ em Ω e

$$\int_\Omega |\nabla u_\sigma|^{p-2}\nabla u_\sigma\nabla\phi dx = \int_\Omega [g(x,u_\sigma) + \lambda f(x,u_\sigma)]\phi dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observe agora que

$$\lim_{\sigma\to 0} v_\sigma(x) := \lim_{\sigma\to 0} \psi_\lambda(\omega_M(x)+\sigma) = \psi_\lambda(\omega_M(x)) := v(x), \ x \in \overline{\Omega}$$

e, como $\lim\limits_{s\to 0}\eta_\lambda(s) = 0$, da Afirmação 2.1.5 (ii) e de (M), podemos concluir que $v(x) = 0$ em $\partial\Omega$.

Tomando $\sigma = 1/m$ e $u_\sigma = u_m$ consideramos, como antes, uma sequência de domínios suaves e limitados $\{\Omega_k\}$ tais que

$$\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \quad \text{e} \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k,$$

donde segue que existe uma subsequência $\{u_m^k\} \subseteq \{u_m\}$ e uma função $u^k \in C^{1,\beta_k}(\overline{\Omega}_k)$ tais que $u_m^k \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u^k$ em $C^{1,\beta_k}(\overline{\Omega}_k)$. Além disso, dada $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^k \nabla \phi dx = \int_{\Omega_k} [g(x,u^k) + \lambda f(x,u^k)]\phi dx.$$

Repetindo o mesmo argumento nos demais subdomínios, definimos

$$u_r(x) = u_{(r+1)}^{(k+r)}(x), \; x \in \Omega_{k+r}, \; r \geq 0$$

e mostramos, através do processo de limite diagonal utilizado acima, que

$$u(x) = \lim_{r\to\infty} u_r(x), \; x \in \Omega \;\; \text{e} \;\; u(x) = 0, \; x \in \partial\Omega,$$

satisfaz

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx = \int_{\Omega} [g(x,u) + \lambda f(x,u)]\phi dx, \quad \phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

e, além disso, $0 < C\varphi_{\Omega} \leq u \leq v < \gamma_0$ em Ω e $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, pois, se $x_k \to x_0$ em $\partial\Omega$, então $0 \leq \lim_{k\to\infty} u(x_k) \leq \lim_{k\to\infty} v(x_k) = 0 = u(x_0)$. $\square$

2.2 Problema de Dirichlet com convectividade não-negativa

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u) \text{ em } \Omega \\ u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \qquad \text{e} \qquad u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_+}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é domínio limitado, $\lambda > 0$ e $\mu \geq 0$ são parâmetros reais, $g, f : \Omega \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ e $V : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que

(G) (i) existem funções contínuas $b : \Omega \to [0,\infty)$, $b \neq 0$, e $k : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$g(x,s) \leq b(x)k(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_1 \in (0,1]$ e funções $a : \Omega \to [0,\infty)$, $a \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $h : (0,s_1) \to (0,\infty), h \in C(\Omega)$, tais que

$$g(x,s) \geq a(x)h(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,s_1).$$

(F) (i) existem funções contínuas $c : \Omega \to [0,\infty)$, $c \neq 0$, e $j : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$f(x,s) \leq c(x)j(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_2 \in (0,1]$ e funções $d : \Omega \to [0,\infty)$, $d \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $l : (0,s_2) \to (0,\infty), l \in C(\Omega)$, tais que

$$f(x,s) \geq d(x)l(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,s_2).$$

(V_1) $|V(x,\xi)| \leq \alpha(x)|\xi|^q + \beta(x),\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^N,$

em que $\alpha, \beta : \Omega \to [0,\infty)$ são funções contínuas em $L^\infty(\Omega)$ e $q \in [0,p]$.

(M) existe $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p \omega_M = M(x) \qquad \text{em} \quad \Omega \\ \omega_M > 0 \text{ em } \Omega \ \text{ e } \ \omega_M = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.33}$$

em que $M(x) := \max\{2b(x), 2c(x), \alpha(x), \beta(x)\},\ x \in \Omega.$

$$(K)_{s_0,t_0} \quad \sup_{(s_0,t_0)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{\left[1-\left(\frac{s_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2(p-1)}}{\|\omega_M\|_\infty^{p-1}}, \quad \text{para alguns } 0 \leq s_0 < t_0 \leq \infty.$$

Teorema DL$_+$: *Suponha $V \gneqq 0, (G), (F), (M), (K)_{s_0,t_0}$ e (V_1), com $q \in [0,p]$. Então existem $\lambda_* \geq 0$ e $c, \lambda^* > 0$ tais que, para cada $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$ dado, existem $\mu^* = \mu^*(\lambda) > 0$ e uma função $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, com $c\varphi_\Omega \leq u < t_0$, satisfazendo (P) em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\lambda_* = \max\left\{0, \frac{\lambda_{1,\Omega}(\rho)-h_0}{l_0}\right\}, \ 0 \leq \mu \leq \mu^*,$ *se* $0 < l_0 < \infty$;

(ii) $\lambda_* = 0, \ 0 \leq \mu \leq \mu^*,$ *se* $l_0 = \infty$;

(iii) $\lambda_* = 0, \ 0 \leq \mu \leq \mu^*,$ *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > \lambda_{1,\Omega}(\rho)$.

Adicionalmente,

(iv) se $q \in [0, p-1]$, *então*

$(iv)_1$ $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$,

$(iv)_2$ $\mu^*(\lambda) = \min\left\{\frac{[k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}}, \frac{k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)}{4}\right\}$, *em que* $\gamma_0 = t_0$, *se* $s_0 > 0$, *e* $\gamma_0 = 0$, *se* $s_0 = 0$;

(v) se $q \in (p-1, p]$, *então existe um* $\theta_0 \in (1/2, 1)$, *tal que*

$(v)_1$ $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{\theta_0}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{\theta_0}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$,

$(v)_2$ $\mu^* = \infty$, *se* $t_0 = \infty$ *e se* $k_\infty > 0$.

Para demonstrar este resultado considere, para alguns $\epsilon, \sigma > 0$ dados, a ϵ, σ-família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq g(x, u+\epsilon) + \lambda f(x, u+\epsilon) + \mu V(x, \nabla u) \text{ em } \Omega \\ u > \sigma \quad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad u = \sigma \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.34}$$

Mostraremos o

Lema 2.3. *Suponha $V \gneqq 0, (G)(i), (F)(i), (M), (K)_{s_0,t_0}$ e (V_1), com $q \in [0,p]$. Então existe $\lambda^* > 0$ tal que, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ dado, existem $\mu^* = \mu^*(\lambda) > 0$ e $v_\sigma = v_{\sigma,\lambda,\mu} \in C^1(\overline{\Omega})$, ambos independentes de ϵ, satisfazendo (3.12), para cada $0 \leq \mu < \mu^*$. Adicionalmente,* *(i) se* $q \in [0, p-1]$, *então*

$(i)_1$ $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$,

$(i)_2$ $\mu^*(\lambda) = \min\left\{\frac{[k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^q}, \frac{k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)}{4}\right\}$, *em que* $\gamma_0 = t_0$, *se* $s_0 > 0$, *e* $\gamma_0 = 0$, *se* $s_0 = 0$;

(ii) se $q \in (p-1, p]$, *então existe um* $\theta_0 \in (1/2, 1)$, *tal que*

$(ii)_1$ $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{\theta_0}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{\theta_0}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$,

$(ii)_2$ $\mu^* = \infty$, *se* $t_0 = \infty$ *e se* $k_\infty > 0$.

2.2.1 Demonstração do Lema 2.3

Demonstração. Defina as funções contínuas $\zeta_{k,\gamma}, \zeta_{j,\gamma}, \hat{\zeta}_{k,\gamma}, \hat{\zeta}_{j,\gamma}, \hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}$ e $H_{\lambda,\gamma}$ como na demonstração do Lema 2.1 e considere suas propriedades, contidas nas Afirmações 2.1.1 e 2.1.2.

Dividiremos esta demonstração em duas partes, sendo que a primeira corresponderá ao caso em que $q \in [0, p-1]$ e a segunda, ao caso em que $q \in (p-1, p]$.
Primeira parte: $q \in [0, p-1]$

Neste caso, a demonstração segue de forma muito similar à do Lema 2.1. Definimos

$$\Gamma_\lambda(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma \frac{t}{H_{\lambda,\gamma}(t)}dt, \ \gamma > 0,$$

e confirmamos a validade da Afirmação 2.1.3. Como na Afirmação 2.1.4, existe $\gamma_0 > 0$ tal que $\Gamma_0(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty$. Tomamos $\lambda^* > 0$ tal que $\Gamma_{\lambda^*}(\gamma_0) = \|\omega_M\|_\infty$ e definimos, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ dado, a função

$$\eta_\lambda(s) = \frac{1}{\gamma_0}\int_0^s \frac{t}{H_{\lambda,\gamma_0}(t)}dt, \ s > 0.$$

Da monotonicidade de Γ_λ em relação a λ, temos $\eta_\lambda(\gamma_0) = \Gamma_\lambda(\gamma_0) > \Gamma_{\lambda^*}(\gamma_0) = \|\omega_M\|_\infty$.

Como em (2.10), existe $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\lambda) > 0$ suficientemente pequeno tal que $\eta_\lambda(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty + \bar{\sigma}$ e, como em (2.11), definimos, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$, $0 < \sigma < \bar{\sigma}$, a função

$$v_\sigma(x) = v_{\sigma,\lambda}(x) := \psi_\lambda(\omega_M(x) + \sigma), \ x \in \overline{\Omega},$$

obtendo (2.12) e a Afirmação 2.1.6.

Assim, dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0$ temos, como em (2.13), que

$$\int_\Omega |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla\phi dx \geq \int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}\right]^{p-1}\phi dx. \tag{2.35}$$

Para cada $\epsilon \in (0,\epsilon_0),\ 0<\sigma<\bar{\sigma}$, das Afirmações 2.1.2 (ii), 2.1.1(i) e 2.1.1(ii) e da relação (2.12) observe que, por um lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)}\right]^{p-1}\phi dx &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)}{(v_\sigma+\epsilon)^{p-1}}\phi dx\\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)}{(\gamma_0)^{p-1}}\phi dx,\\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)[\zeta_{k,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)+\lambda\zeta_{j,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)]\phi dx.
\end{aligned}$$

Assim, para cada $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ e $0<\lambda<\lambda^*$ dados, segue de (2.12), (2.3), (2.4), da definição de M, de $(G)(i)$ e de $(F)(i)$, que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)}\right]^{p-1}\phi dx &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)[k(v_\sigma+\epsilon)+\lambda j(v_\sigma+\epsilon)]\phi dx\\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega [2b(x)k(v_\sigma+\epsilon)+\lambda 2c(x)j(v_\sigma+\epsilon)]\phi dx\\
&\geq \int_\Omega [g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)]\phi dx. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $0<\lambda<\lambda^*$ dado, tome $\mu_1^* = \mu_1^*(\Omega,\lambda,\gamma_0,\|\nabla\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)})>0$, tal que

$$\mu_1^* = \frac{\gamma_0^{p-1-q}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}}. \tag{2.37}$$

Daí, das Afirmações 2.1.2(iii) e (iv), segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)}\right]^{p-1}\phi dx \geq \frac{1}{4}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]\phi dx \\
+ \quad & \frac{1}{4}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1-q}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)}\right]^{p-1-q}\left[\frac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)}\right]^{q}\phi dx \\
\geq \quad & \frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))}{4}\int_\Omega M(x)\phi dx \\
+ \quad & \frac{\{\gamma_0[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]^{\frac{1}{p-1}}\}^{p-1-q}}{4}\int_\Omega M(x)[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^q\phi dx,
\end{aligned}
$$

e, de (2.37), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)}\right]^{p-1}\phi dx \\
\geq \quad & \frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))}{4}\int_\Omega \beta(x)\phi dx + \mu_1^*\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega M(x)[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^q\phi dx \\
\geq \quad & \frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))}{4}\int_\Omega \beta(x)\phi dx + \mu_1^*\int_\Omega M(x)[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^q|\nabla\omega_M|^q\phi dx.
\end{aligned}
$$

Definindo $\mu^*(\Omega) = \mu^*_\Omega(\Omega,\lambda,\gamma_0,\|\nabla\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$ por

$$
\mu^* = \min\left\{\mu_1^*, \frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))}{4}\right\}, \tag{2.38}
$$

utilizando (V_1) e o fato que $V \geq 0$, reescrevemos, para cada $0 \leq \mu \leq \mu^*$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))}{\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)}\right]^{p-1}\phi dx &\geq \mu^*\int_\Omega \beta(x)\phi dx + \mu^*\int_\Omega \alpha(x)|\nabla v_\sigma|^q\phi dx \\
&\geq \mu\int_\Omega V(x,\nabla v_\sigma)\phi dx. \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

Retomando (2.35), de (2.36) e (2.39) segue, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$e $0 \leq \mu \leq \mu^*$, que

$$
\int_\Omega |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla\phi dx \geq \int_\Omega [g(x, v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)+\mu V(x,\nabla v_\sigma)]\phi dx.
$$

Além disso, desde que $\omega_M(x) = 0$ em $\partial\Omega$, temos $v(x) = \psi_\lambda(\omega_M(x)+\sigma) = \sigma$ em $\partial\Omega$ e, de $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\psi_\lambda \in C^2((Im(\eta_\lambda)\backslash\{0\},(0,\infty)))$, temos que $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Isto conclui a demonstração do Lema 2.3 para o caso em que $q \in [0, p-1]$.

Segunda parte: $q \in (p-1, p]$

Neste caso, precisamos introduzir um parâmetro $\theta \in (0,1)$ e redefinir Γ_λ por

$$\Gamma_{\lambda,\theta}(\gamma) = \frac{\theta}{\gamma}\int_0^\gamma \frac{t^\theta}{H_{\lambda,\gamma}(t^\theta)}dt, \ \gamma > 0.$$

Analogamente ao verificado na Afirmação 2.1.3, podemos mostrar as seguintes propriedades referentes à função $\Gamma_{\lambda,\theta}$:

Afirmação 2.2.1:

(i) $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \Gamma_{\lambda,\theta}(\gamma) = \dfrac{\theta}{(k_\infty + \lambda j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}}$;

(ii) $\lim\limits_{\gamma\to 0} \Gamma_{\lambda,\theta}(\gamma) = \dfrac{\theta}{(k_0 + \lambda j_0)^{\frac{1}{p-1}}}$;

(iii) $\Gamma_{\lambda,\theta}$ é decrescente em λ.

Afirmação 2.2.2: Existem $\gamma_0 > 0$ e $\theta_0 \in (0,1)$ tais que $\Gamma_{0,\theta_0}(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty$.

Verificação da Afirmação 2.2.2:

Primeiro caso: $0 < s_0 < t_0 < \infty$

Tome $\alpha = (s_0/t_0)^{\frac{1}{2}}$ e $\gamma_0 = t_0$. Daí,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,\theta}(\gamma_0) &> \frac{\theta}{\gamma_0}\int_{\alpha\gamma_0}^{\gamma_0} \frac{t^\theta}{H_{0,\gamma_0}(t^\theta)}dt \geq \frac{\theta}{\gamma_0}\frac{(\alpha\gamma_0)^\theta}{H_{0,\gamma_0}((\alpha\gamma_0)^\theta)}\gamma_0(1-\alpha) \\
&> \frac{\theta(1-\alpha)}{(\alpha\gamma_0)^\theta}\int_{\alpha^\theta(\alpha\gamma_0)^\theta}^{(\alpha\gamma_0)^\theta} \frac{t}{\hat{\zeta}_{0,\gamma_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt \\
&\geq \frac{\theta(1-\alpha)(1-\alpha^\theta)(\alpha^2\gamma_0)^\theta}{(\alpha^2\gamma_0)^\theta \hat{\zeta}_{k,\gamma_0}((\alpha^2\gamma_0)^\theta)^{\frac{1}{p-1}}} \\
&= \frac{\theta(1-\alpha)(1-\alpha^\theta)}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, s_0^\theta < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{\theta(1-\alpha)(1-\alpha^\theta)}{A_\theta},
\end{aligned}$$

em que $A_\theta = \left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, s_0^\theta < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}$.

Portanto, da hipótese $(K)_{s_0,t_0}$, é possível escolher $\theta_0 \in (0,1)$ tal que

$$\Gamma_{0,\theta_0}(\gamma_0) > \frac{\theta_0(1-\alpha)(1-\alpha^{\theta_0})}{A_{\theta_0}} \geq \|\omega_M\|_\infty.$$

Segundo caso: $s_0 = 0$, isto é, vale $(K)_{0,t_0}$, para algum $t_0 < \infty$.

Iniciaremos a verificação deste caso observando que, da hipótese $(K)_{0,t_0}$, podemos escolher $\theta_0 \in (0,1)$ tal que $\theta_0 > A\|\omega_M\|_\infty$, em que

$$A = \left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, 0 < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Tomando $\alpha \in (0,1)$ arbitrário, pelos cálculos feitos no primeiro caso, com $\gamma_0 = t_0$, temos que

$$\Gamma_{0,\theta_0}(\gamma_0) > \frac{\theta_0(1-\alpha)(1-\alpha^{\theta_0})}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, (\alpha^2\gamma_0)_0^\theta < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Daí,

$$\Gamma_{0,\theta}(\gamma_0) = \liminf_{\alpha\to 0}\Gamma_{0,\theta_0}(\gamma_0) \geq \frac{\theta_0}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, 0 < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{\theta_0}{A} > \|\omega_M\|_\infty.$$

Desta forma, existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que $\Gamma_{0,\theta}(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty$.
<u>Terceiro caso:</u> $t_0 = \infty$, isto é, vale $(K)_{s_0,\infty}$, para algum $s_0 > 0$.

Novamente segue de $(K)_{s_0,\infty}$ que existe $\theta_0 \in (0,1)$ tal que $\theta_0 > A\|\omega_M\|_\infty$, em que

$$A = [\sup\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, s_0 + 1 < t < \infty\}]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Dado $\alpha \in (0,1)$ arbitrário, tome

$$\gamma_0 = \gamma_0(\alpha, s_0) = \frac{(s_0+1)^{1/\theta_0}}{\alpha^2},$$

donde segue que $\gamma_0 > \alpha^2\gamma_0 = (s_0+1)^{\frac{1}{\theta}} > (s_0+1) > s_0$.

Pelos cálculos feitos no primeiro caso, temos que

$$\Gamma_{0,\theta_0}(\gamma_0) > \frac{\theta_0(1-\alpha)(1-\alpha^{\theta_0})}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, s_0 + 1 < t \leq \gamma_0\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Daí, obtemos que

$$\liminf_{\alpha\to 0}\Gamma_{0,\theta}(\gamma_0(\alpha, s_0)) \geq \frac{\theta_0}{\left[\sup\{\frac{k(t)}{t^{p-1}}, s_0 + 1 < t < \infty\}\right]^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{\theta_0}{A} > \|\omega_M\|_\infty.$$

Como antes, existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que

$$\Gamma_{0,\theta}(\gamma_0(\alpha_0, s_0)) > \|\omega_M\|_\infty.$$

Isto conclui a verificação da afirmação 2.2.2.

A partir de agora, fixemos $\gamma = \gamma_0$ e $\theta = \theta_0$, como nos casos anteriores. Desde que $\lim_{\lambda\to 0} \Gamma_\lambda(\gamma_0) = \Gamma_0(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty$ e $\lim_{\lambda\to\infty} \Gamma_\lambda(\gamma_0) = 0$, existe $\lambda^* > 0$ tal que

$$\Gamma_{\lambda^*}(\gamma_0) = \|\omega_M\|_\infty.$$

Dado $0 < \lambda < \lambda^*$, defina

$$\eta_\lambda(s) = \frac{\theta_0}{\gamma_0}\int_0^s \frac{t^{\theta_0}}{H_{\lambda,\gamma_0}(t^{\theta_0})}dt, \ \ s > 0.$$

Observe que, desde que Γ_λ é decrescente em λ, temos $\eta_\lambda(\gamma_0) = \Gamma_\lambda(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty$.

Como antes, existe $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\lambda) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\eta_\lambda(\gamma_0) > \|\omega_M\|_\infty + \bar{\sigma}. \tag{2.40}$$

Afirmação 2.2.3: (Análoga à prova da afirmação 2.1.5.)

(i) $[\bar{\sigma}, \|\omega\|_\infty + \bar{\sigma}] \subset \mathrm{Im}(\eta_\lambda)$;

(ii) $\eta_\lambda \in C^2((0,\infty), \mathrm{Im}(\eta_\lambda))$ é crescente em $s > 0$;

(iii) $\eta_\lambda^{-1} := \psi_\lambda \in \ C^2((\mathrm{Im}(\eta_\lambda)\backslash\{0\}, (0,\infty))$ é crescente em $s > 0$;

(iv) $\psi_\lambda'(s) = \dfrac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}((\psi_\lambda(s))^{\theta_0})}{\theta_0(\psi_\lambda(s))^{\theta_0}}, \ s > 0$;

(v) η_λ é decrescente em λ.

Desde que $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\partial\omega_M/\partial\nu < 0$ em $\partial\Omega$, segue que $\min_{\partial\Omega} |\nabla\omega_M| > 0$.

Desta forma, existem $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno e $k_0 = k_0(\delta_0) > 0$ tais que

$$|\nabla\omega_M|^p > \frac{k_0(\delta_0)}{2}, \text{ para qualquer } x \in \Omega_{\delta_0}, \tag{2.41}$$

em que $\Omega_{\delta_0} = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta_0\}$.

Tome

$$\tilde{\sigma} = \min\left\{1, \bar{\sigma}, \frac{k_0(\delta_0)}{2\|\nabla\omega_M\|_\infty^q}\right\}. \tag{2.42}$$

Para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ dado considere, para $\sigma \in (0, \tilde{\sigma}]$, a função

$$v_\sigma(x) = v_{\sigma,\lambda,\theta_0}(x) := [\psi_\lambda(\omega_M(x) + \sigma)]^{\theta_0}, \; x \in \overline{\Omega}.$$

Da Afirmação 2.2.3 (iii) e de $\theta_0 \in (0,1)$, observe que v_σ é crescente em σ. Além disso, de $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$, $\sigma \in (0, \tilde{\sigma}]$ e da Afirmação 2.2.3(i) e (iii), temos que $v_\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$. Em particular, $v_\sigma \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Como $\tilde{\sigma} < \bar{\sigma}$, de (2.40), temos que $\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)} + \tilde{\sigma}/2 < \|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)} + \bar{\sigma} < \eta_\lambda(\gamma_0)$, donde segue que

$$\psi_\lambda(\omega_M(x) + \tilde{\sigma}/2) < \psi_\lambda(\eta_\lambda(\gamma_0)) = \gamma_0.$$

Portanto,

$$v_{\frac{\tilde{\sigma}}{2}}(x) < \gamma_0^{\theta_0}, \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}. \tag{2.43}$$

Desta forma, $\sup\limits_{\overline{\Omega}} v_{\tilde{\sigma}/2}(x) = \|v_{\tilde{\sigma}/2}\|_{L^\infty(\Omega)} < \gamma_0^{\theta_0}$, donde segue que existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(\tilde{\sigma}) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|v_{\frac{\tilde{\sigma}}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \gamma_0^{\theta_0} - \epsilon_0. \tag{2.44}$$

Agora, dados $0 < \sigma < \frac{\tilde{\sigma}}{2}$ e $0 < \epsilon < \epsilon_0$, temos que

$$\sup_{\overline{\Omega}} v_\sigma(x) \le \sup_{\overline{\Omega}} v_{\frac{\tilde{\sigma}}{2}} = \|v_{\frac{\tilde{\sigma}}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \gamma_0^{\theta_0} - \epsilon_0 < \gamma_0^{\theta_0} - \epsilon,$$

isto é,

$$\|v_\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} < \gamma_0^{\theta_0} - \epsilon, \; \sigma \in (0, \tilde{\sigma}/2) \text{ e } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Como $v_{\tilde{\sigma}/2} = \tilde{\sigma}/2$ em $\partial\Omega$, existe $\delta_1 = \delta_1(\tilde{\sigma}) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$v_{\tilde{\sigma}/2}(x) < \tilde{\sigma}, \; \text{para qualquer } x \in \Omega_{\delta_1}. \tag{2.45}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ temos, por (2.41), (2.45) e (2.42), que

$$\frac{|\nabla\omega_M(x)|^p}{v_\sigma(x)} > \frac{|\nabla\omega_M(x)|^p}{v_{\tilde{\sigma}/2}(x)} > \frac{k_0(\delta_0)}{2v_{\tilde{\sigma}/2}(x)} > \frac{k_0(\delta_0)}{2\tilde{\sigma}} > \frac{k_0(\delta_0)}{2}\frac{2\|\nabla\omega_M\|_\infty^q}{k_0(\delta_0)} \ge |\nabla\omega_M(x)|^q, \tag{2.46}$$

para cada $x \in \Omega_\delta$.

Considere agora a função $\tau \in C^\infty(\Omega), 0 \le \tau \le 1$, dada por

$$\tau(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega \backslash \Omega_\delta \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_{\frac{\delta}{2}}. \end{cases}$$

Assim, qualquer função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ pode ser escrita como $\phi = \tau\phi + (1-\tau)\phi$.

Com isto, para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0, 0 < \sigma < \tilde{\sigma}/2$, temos

$$\int_\Omega |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla \phi dx = \int_\Omega |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla[\tau\phi + (1-\tau)\phi]dx$$
$$= \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(\tau\phi)dx + \int_{\Omega_\delta} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(1-\tau)\phi dx. \tag{2.47}$$

De (2.11), segue que $\nabla v_\sigma(x) = \theta_0[\psi_\lambda(\omega_M(x)+\sigma)]^{\theta_0-1}\psi'_\lambda(\omega_M(x)+\sigma)\nabla\omega_M(x),\ x \in \Omega$. Trabalharemos inicialmente em $\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}$.

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(\tau\phi)dx$$
$$= \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} {\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-1}|\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla(\tau\phi)dx$$
$$= \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla\{{\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-1}\tau\phi\}dx -$$
$$- (\theta_0-1)(p-1)\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla\omega_M|^p{\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)-1}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^p\tau\phi dx$$
$$- (p-1)\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla\omega_M|^p{\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-2}\psi''_\lambda(\omega_M+\sigma)\tau\phi dx$$
$$\geq \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla\{{\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-1}\tau\phi\}dx.$$

Afirmação 2.2.4: $\{{\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-1}\tau\phi\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

A verificação desta afirmação encontra-se no Apêndice.

Observamos que da Afirmação 2.2.4 temos, por (M) e da Afirmação 2.2.3 (iv), que

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla\tau\phi dx \geq \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x){\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-1}\tau\phi dx$$
$$= \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x){\theta_0}^{p-1}v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1)}{\theta_0}}\frac{\gamma_0^{p-1}}{\theta_0^{p-1}}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}((\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))^{\theta_0})}{(\psi_\lambda(\omega_M+\sigma))^{\theta_0}}\right]^{p-1}\tau\phi dx. \tag{2.48}$$

Da Afirmação 2.1.2 (ii), de (2.43) e de (2.44) temos, por um lado, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$,

que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla\tau\phi dx &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x) v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1)}{\theta_0}} \gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{(v_\sigma)}\right]^{p-1}\tau\phi dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x) v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1)}{\theta_0}} \gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma^{p-1}}\tau\phi dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x)\gamma_0^{(\theta_0-1)(p-1)}\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)}{(v_\sigma+\epsilon)^{p-1}}\tau\phi dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x)\gamma_0^{(p-1)\theta_0}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)}{\gamma_0^{\theta_0(p-1)}}\tau\phi dx
\end{aligned}$$

Segue da Afirmação 2.1.1 (ii), de (2.3), da definição de M, de $(G)(i)$ e $(F)(i)$ que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla\tau\phi dx &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x)[\zeta_{k,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)+\lambda\zeta_{j,\gamma_0}(v_\sigma+\epsilon)]\tau\phi dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} [2b(x)k(v_\sigma+\epsilon)+2\lambda c(x)j(v_\sigma+\epsilon)]\tau\phi dx \\
&\geq \int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} [g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)]\tau\phi dx, \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

para cada $\lambda\in(0,\lambda^*),\ \sigma\in(0,\tilde{\sigma}/2),\ \epsilon\in(0,\epsilon_0]$ dados.

Observe agora que

$$\lim_{\bar{a}\to 0} v_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to 0}[\psi_\lambda(\omega_M(x)+\sigma)]^{\theta_0} = [\psi_\lambda(\omega_M(x))]^{\theta_0} := v(x),\ x\in\overline{\Omega}.$$

Desde que $v_\sigma > v > 0$ em $\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ e $q\in(p-1,p]$, existe $C_2 = C_2(\delta) > 0$, independente de σ, tal que

$$\begin{aligned}
\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^{q-(p-1)} &\leq \left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v)}{v}\right]^{q-(p-1)} \leq \left\|\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v)}{v}\right\|_{L^\infty(\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}})}^{q-(p-1)} \\
&\leq C_2\left[\min_{\overline{\Omega}\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} v\right]^{\frac{(\theta_0-1)(p-1-q)}{\theta_0}} \leq C_2 v^{\frac{(\theta_0-1)(p-1-q)}{\theta_0}} \\
&< C_2 v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1-q)}{\theta_0}},\ \text{para qualquer } x\in\overline{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}},
\end{aligned}$$

isto é, para cada $x \in \Omega \backslash \Omega_{\frac{\delta}{2}}$,

$$\frac{1}{C_2}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^q \leq \left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^{p-1} v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1-q)}{\theta_0}}. \tag{2.50}$$

Tome $\mu_1^* = \mu_1^*(\Omega, \gamma_0, C_2(\delta), \|\nabla\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$, independente de σ, dado por

$$\mu_1^* = \frac{\gamma_0^{p-1-q}}{4C_2\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}}. \tag{2.51}$$

Segue agora das Afirmações 2.1.2 (iii) e (iv), de (2.50) e (2.51) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla \tau\phi dx &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x) v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1)}{\theta_0}} \gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^{p-1}\tau\phi dx \\
= & \ \frac{1}{4}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x) v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1)}{\theta_0}} \gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^{p-1}\tau\phi dx \\
+ & \ \frac{1}{4}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x) v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1)}{\theta_0}} \gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^{p-1}\tau\phi dx \\
\geq & \ \frac{1}{4}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x) \gamma_0^{(\theta_0-1)(p-1)} \gamma_0^{p-1}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]\tau\phi dx \\
+ & \ \frac{1}{4}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x) v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1-q)}{\theta_0}} \gamma_0^{p-1-q}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^{p-1}\frac{\theta_0^q}{\theta_0^q} v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)q}{\theta_0}}\gamma_0^q\tau\phi dx \\
\geq & \ \frac{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]}{4}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x)\tau\phi dx \\
+ & \ \frac{\gamma_0^{p-1-q}}{4C_2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x)\theta_0^q v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)q}{\theta_0}}\frac{\gamma_0^q}{\theta_0^q}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^q\tau\phi dx \\
= & \ \frac{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]}{4}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x)\tau\phi dx \\
+ & \ \mu_1^*\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} M(x)[\theta_0\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)^{\theta_0-1}\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^q\tau\phi dx
\end{aligned}$$

o que produz

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla\tau\phi dx \geq \frac{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]}{4}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \beta(x)\tau\phi dx$$
$$+\ \mu_1^*\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \alpha(x)[\theta_0\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)^{\theta_0-1}\psi_\lambda'(\omega_M+\sigma)|\nabla\omega_M|]^q\tau\phi dx. \tag{2.52}$$

Definindo $\mu^*_{\frac{\delta}{2}} = \mu^*_{\frac{\delta}{2}}(\Omega,\gamma_0,C_2(\delta),\|\nabla\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)},\lambda,\theta_0) > 0$, independente de σ, por

$$\mu^*_{\frac{\delta}{2}} = \min\left\{\frac{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]}{4}, \mu_1^*\right\},$$

utilizando (V_1) e o fato de ser $V \geq 0$ reescrevemos, para cada $0 \leq \mu < \mu^*_{\frac{\delta}{2}}$, (2.52) como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla\tau\phi dx &\geq \mu^*_{\frac{\delta}{2}}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}}[\beta(x)+\alpha(x)|\nabla v_\sigma|^q]\tau\phi dx\\ &\geq \mu\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} V(x,\nabla v_\sigma)\tau\phi dx.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Retomando (2.48), de (2.49) e (2.53) temos que

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla\tau\phi dx \geq \int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}}[g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)+\mu V(x,\nabla v_\sigma)]\tau\phi dx, \tag{2.54}$$

para cada $0<\lambda<\lambda^*,\ 0\leq\mu\leq\mu^*_{\frac{\delta}{2}},\ \epsilon\in(0,\epsilon_0]$ dados.

Trabalharemos agora no anel Ω_δ.

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\delta}|\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla(1-\tau)\phi dx\\
&= \theta_0{}^{p-1}\int_{\Omega_\delta}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi_\lambda'(\omega_M+\sigma)]^{p-1}|\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla(1-\tau)\phi dx\\
&= \int_{\Omega_\delta}|\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla\{\theta_0{}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi_\lambda'(\omega_M+\sigma)]^{p-1}(1-\tau)\phi\}dx\\
&-(\theta_0-1)(p-1)\int_{\Omega_\delta}|\nabla\omega_M|^p\theta_0{}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)-1}[\psi_\lambda'(\omega_M+\sigma)]^p(1-\tau)\phi dx \quad (2.55)\\
&-\ (p-1)\int_{\Omega_\delta}|\nabla\omega_M|^p\theta_0{}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi_\lambda'(\omega_M+\sigma)]^{p-2}\psi_\lambda''(\omega_M+\sigma)(1-\tau)\phi dx.\end{aligned}$$

De forma análoga ao feito para obter (2.49), temos, por um lado, que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(1-\tau)\phi dx \\
\geq\ & \frac{{\theta_0}^{p-1}}{2}\int_{\Omega_\delta} M(x)[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-1}(1-\tau)\phi dx \\
\geq\ & \int_{\Omega_\delta}[g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)](1-\tau)\phi dx, \qquad (2.56)
\end{aligned}$$

para cada $0\lambda \in (0,\lambda^*)$, $\sigma \in (0,\tilde{\sigma}/2)$, $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ dados.

Observe agora que, desde que $v_\sigma < 1$ em Ω_δ (por (2.42)), $q < p$ e $\theta_0 < 1$, temos que $v_\sigma^p < v_\sigma^q$, donde segue que

$$[v_\sigma(x)]^{\frac{(\theta_0-1)p}{\theta_0}} > [v_\sigma(x)]^{\frac{(\theta_0-1)q}{\theta_0}}, \text{ para cada } x \in \Omega_\delta. \qquad (2.57)$$

Além disso, desde que $H_{\lambda,\gamma_0}(s)/s$ é não-crescente para $s > 0$, temos que

$$\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma} \geq \frac{H_{\lambda,\gamma_0}(1)}{1} = H_{\lambda,\gamma_0}(1),$$

o que nos leva a

$$[H_{\lambda,\gamma_0}(1)]^{p-q}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^q \leq \left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^p, \; x \in \Omega_\delta. \qquad (2.58)$$

Por outro lado, de (2.55), das Afirmações 2.2.3 (iv), 2.2.4 e de (M), temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(1-\tau)\phi dx \\
=\ & \frac{1}{4}\int_{\Omega_\delta} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(1-\tau)\phi dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega_\delta} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(1-\tau)\phi dx \\
\geq\ & -\frac{(\theta_0-1)(p-1)}{4}\int_{\Omega_\delta} |\nabla\omega_M|^p\theta_0^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)-1}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^p(1-\tau)\phi dx \\
+\ & \frac{1}{4}\int_{\Omega_\delta} |\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla\{{\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-1}(1-\tau)\phi\}dx \\
=\ & \frac{(1-\theta_0)(p-1)}{4}\int_{\Omega_\delta} |\nabla\omega_M|^p\theta_0^{p-1}v_\sigma^{\frac{p(\theta_0-1)-\theta_0}{\theta_0}}\frac{\gamma_0^p}{\theta_0^p}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^p(1-\tau)\phi dx \\
+\ & \frac{1}{4}\int_{\Omega_\delta} M(x){\theta_0}^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{p-1}(1-\tau)\phi dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(1-\tau)\phi dx \\
= \quad & \frac{(1-\theta_0)(p-1)}{4}\int_{\Omega_\delta} \frac{|\nabla\omega_M|^p}{v_\sigma}\frac{\theta_0^{p-1}}{\theta_0^{p-1}} v_\sigma^{\frac{p(\theta_0-1)}{\theta_0}}\gamma_0^p\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^p(1-\tau)\phi dx \\
+ \quad & \frac{1}{4}\int_{\Omega_\delta} M(x){\theta_0}^{p-1} v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)(p-1)}{\theta_0}}\frac{\gamma_0^{p-1}}{\theta_0^{p-1}}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^p(1-\tau)\phi dx.
\end{aligned}
$$

De (2.46), das Afirmações 2.1.2 (iii) e (iv), reescrevemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(1-\tau)\phi dx \\
\geq \quad & \frac{(1-\theta_0)(p-1)}{4}\int_{\Omega_\delta} |\nabla\omega_M|^q v_\sigma^{\frac{p(\theta_0-1)}{\theta_0}}\gamma_0^p\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^p(1-\tau)\phi dx \\
+ \quad & \frac{1}{4}\int_{\Omega_\delta} M(x)\gamma_0^{(\theta_0-1)(p-1)}\gamma_0^{p-1}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)](1-\tau)\phi dx
\end{aligned}
$$

e, de (2.57) e (2.58),

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} |\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma \nabla(1-\tau)\phi dx \\
> \quad & \frac{(1-\theta_0)(p-1)}{4}\int_{\Omega_\delta} |\nabla\omega_M|^q v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)q}{\theta_0}}\gamma_0^{p-q}\gamma_0^q\frac{\theta_0^q}{\theta_0^q}[H_{\lambda,\gamma_0}(1)]^{p-q}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma}\right]^q(1-\tau)\phi dx \\
+ \quad & \frac{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]}{4}\int_{\Omega_\delta} M(x)(1-\tau)\phi dx \\
= \quad & \frac{(1-\theta_0)(p-1)[\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(1)]^{p-q}}{4}\int_{\Omega_\delta} \theta_0^q v_\sigma^{\frac{(\theta_0-1)q}{\theta_0}}\left[\frac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{\theta_0 v_\sigma}\right]^q|\nabla\omega_M|^q(1-\tau)\phi dx \\
+ \quad & \frac{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]}{4}\int_{\Omega_\delta} M(x)(1-\tau)\phi dx.
\end{aligned}
$$

Definindo $\mu_\delta^* = \mu_\delta^*(\Omega,\theta_0,\gamma_0,\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$ por

$$
\mu_\delta^* = \min\left\{\frac{(1-\theta_0)(p-1)[\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(1)]^{p-q}}{4}, \frac{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]}{4}\right\},
$$

finalmente obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta}|\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla(1-\tau)\phi dx &\geq \mu_\delta^*\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega_\delta}|\nabla v_\sigma|^q(1-\tau)\phi dx+\mu_\delta^*\int_{\Omega_\delta}M(x)(1-\tau)\phi dx\\ &\geq \mu_\delta^*\int_{\Omega_\delta}[\alpha(x)|\nabla v_\sigma|^q+\beta(x)](1-\tau)\phi dx\\ &\geq \mu\int_{\Omega_\delta}V(x,\nabla v_\sigma)(1-\tau)\phi dx, \qquad (2.59)\end{aligned}$$

para qualquer $0 \leq \mu < \mu_\delta^*$, sendo que a última desigualdade segue de (V_1) e do fato de que $V \geq 0$.

Retomando (2.55), de (2.56) e (2.59), temos que

$$\int_{\Omega_\delta}|\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla(1-\tau)\phi dx \geq \int_{\Omega_\delta}[g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)+\mu V(x,\nabla v_\sigma)](1-\tau)\phi dx, \qquad (2.60)$$

para cada $0<\lambda<\lambda^*,\ 0\leq\mu<\mu_\delta^*,\ \sigma\in(0,\tilde{\sigma}/2),\ \epsilon\in(0,\epsilon_0)$ dados.

Assim, de (2.54) e (2.60) em (2.47), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla\phi dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}}|\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla\tau\phi dx+\int_{\Omega_\delta}|\nabla v_\sigma|^{p-2}\nabla v_\sigma\nabla(1-\tau)\phi dx\\ &\geq \int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}}[g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)+\mu V(x,\nabla v_\sigma)]\tau\phi dx\\ &+ \int_{\Omega_\delta}[g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)+\mu V(x,\nabla v_\sigma)](1-\tau)\phi dx\\ &= \int_\Omega[g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)+\mu V(x,\nabla v_\sigma)]\tau\phi dx\\ &+ \int_\Omega[g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)+\mu V(x,\nabla v_\sigma)](1-\tau)\phi dx\\ &= \int_\Omega[g(x,v_\sigma+\epsilon)+\lambda f(x,v_\sigma+\epsilon)+\mu V(x,\nabla v_\sigma)]\phi dx,\end{aligned}$$

para cada $0<\lambda<\lambda^*,\ 0\leq\mu<\mu^*,\ \epsilon\in(0,\epsilon_0)$ dados, em que $\mu^*=\min\{\mu_{\frac{\delta}{2}}^*,\mu_\delta^*\}$. Além disso, desde que $\omega_M(x)=0$ em $\partial\Omega$, temos $v_\sigma(x)=[\psi_\lambda(\omega_M(x)+\sigma)]^{\theta_0}=\sigma$ em $\partial\Omega$ e, pela regularidade das funções envolvidas, $v_\sigma\in C^1(\overline{\Omega})\subset W^{1,\infty}(\Omega)$.

Para concluir a demonstração do Lema 2.3, resta-nos verificar as estimativas dadas em (i) e (ii). Se $q\in[0,p-1]$, a verificação de que

$$\lambda^*\geq\frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}}-k_0\right),\ \text{se } s_0=0,\ \text{e } \lambda^*\geq\frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}}-k_\infty\right),\ \text{se } t_0=\infty$$

é análoga à demonstração do Lema 2.1. Vamos agora mostrar que

$$\mu^*(\lambda) = \min\left\{\frac{[k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}}, \frac{k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)}{4}\right\},$$

em que $\gamma_0 = t_0$ se $s_0 > 0$ e $\gamma_0 = 0$ se $s_0 = 0$. De fato, se $s_0 = 0$, tome

$$\mu^* = \min\left\{\frac{[k(0)+\lambda j(0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}}, \frac{k(0)+\lambda j(0)}{4}\right\},$$

relembrando que $k(0) = \lim\limits_{s\to 0} k(s)$ e $j(0) = \lim\limits_{s\to 0} j(s)$.

Dado $0 < \mu < \mu^*$, temos

$$\mu < \lim_{s\to 0} \frac{s^{p-1-q}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_\infty}\left[\frac{k(s)}{s^{p-1}} + \lambda\frac{j(s)}{s^{p-1}}\right]^{\frac{p-1-q}{p-1}} \quad \text{e} \quad \mu < \lim_{s\to 0}\frac{s^{p-1}}{4}\left[\frac{k(s)}{s^{p-1}} + \lambda\frac{j(s)}{s^{p-1}}\right].$$

Assim, existem $s_1(\mu), s_2(\mu) > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$\mu < \frac{s^{p-1-q}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_\infty}\left[I_k(s)+\lambda I_j(s)\right]^{\frac{p-1-q}{p-1}},\ s < s_1 \ \text{ e } \ \mu < \frac{s^{p-1}}{4}[I_k(s)+\lambda I_j(s)],\ s < s_2.$$

Tomando $\tilde{\gamma}_0 = \min\{s_1, s_2, \gamma_0\}$, em que γ_0 foi dado por (2.14), temos que

$$\mu < \frac{\tilde{\gamma}_0^{p-1-q}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_\infty}\left[I_k(\tilde{\gamma}_0)+\lambda I_j(\tilde{\gamma}_0)\right]^{\frac{p-1-q}{p-1}} \quad \text{e} \quad \mu < \frac{\tilde{\gamma}_0^{p-1}}{4}[I_k(\tilde{\gamma}_0)+\lambda I_j(\tilde{\gamma}_0)].$$

Analogamente, se $t_0 = \infty$, relembramos que $k(\infty) = \lim\limits_{s\to\infty} k(s)$, $j(\infty) = \lim\limits_{s\to\infty} j(s)$ e consideramos

$$\mu^* = \min\left\{\frac{[k(\infty)+\lambda j(\infty)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\Omega)}}, \frac{k(\infty)+\lambda j(\infty)}{4}\right\},$$

donde segue que existem $s_1(\mu), s_2(\mu) > 0$ suficientemente grandes tais que

$$\mu < \frac{s^{p-1-q}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_\infty}\left[I_k(s)+\lambda I_j(s)\right]^{\frac{p-1-q}{p-1}},\ s > s_1 \ \text{ e } \ \mu < \frac{s^{p-1}}{4}[I_k(s)+\lambda I_j(s)],\ s > s_2.$$

Tomando $\tilde{\gamma}_0 = \max\{s_1, s_2, \gamma_0(\alpha_0)\}$, em que $\gamma_0(\alpha_0)$ foi dado por (2.15), obtemos a conclusão desejada.

Agora, se $q \in (p-1, p]$, mostramos que

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{\theta_0}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_0\right) \text{ se } s_0 = 0 \text{ e } \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{\theta_0}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}} - k_\infty\right) \text{ se } t_0 = \infty,$$

por analogia ao feito na demonstração do Lema 2.1. □

2.2.2 Demonstração do Teorema DL_+

Demonstração. Do Lema 2.3, existe $v_\sigma = v_{\sigma,\lambda,\mu}$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_p v_\sigma \geq g(x, v_\sigma + \epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma + \epsilon) + \mu V(x, \nabla v_\sigma) \text{ em } \Omega \\ v_\sigma > \sigma \quad \text{em } \Omega \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad v_\sigma = \sigma \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para cada $0 < \lambda < \lambda^*$, $0 \leq \mu < \mu^*$ dados, $\sigma \in (0, \tilde{\sigma}/2)$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ foram obtidos na demonstração do Lema 2.3.

Seja φ_Ω uma $\lambda_{1,\Omega}(\rho)$-autofunção de (AV). Vamos mostrar que, para alguma constante $C = C_\Omega > 0$ apropriada, teremos

$$-\Delta_p(C\varphi_\Omega) \leq g(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + \lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + \mu V(x, \nabla C\varphi_\Omega) \text{ em } \Omega,$$

para alguns $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 \leq \mu < \mu^*$ dados.

No caso (i), devemos ter

$$\lambda \geq \frac{\lambda_{1,\Omega}(\rho) - h_0}{l_0}, \text{ isto é, } \lambda l_0 + h_0 \geq \lambda_{1,\Omega}(\rho),$$

donde segue que, para algum $\epsilon_1 \in (0, \min\{s_1, s_2, \gamma_0, \gamma_0^{\theta_0}\})$,

$$\frac{\lambda l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq \lambda_{1,\Omega}(\rho), \quad \text{para qualquer } s \leq \epsilon_1,$$

em que $s_1, s_2 \in (0, 1]$ foram dados em $(G)(ii)$ e $(F)(ii)$.

Tome $C = C(\Omega, \epsilon_1) > 0$ tal que $C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} = \epsilon_1/2$. Daí, para cada $0 < \epsilon < \epsilon_1/2$, temos

$$C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon_1/2 = \epsilon_1. \tag{2.61}$$

Assim, dados $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0$ obtemos, de forma semelhante a (2.19), que

$$\int_\Omega |\nabla(C\varphi_\Omega)|^{p-2}\nabla(C\varphi_\Omega)\nabla\phi dx \leq \int_\Omega [\lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + g(x, C\varphi_\Omega + \epsilon)]\phi dx.$$

No caso (ii), dado $\lambda \in (0, \lambda^*)$, existe $\epsilon_2 = \epsilon_2(\lambda) \in (0, \min\{s_1, s_2, \gamma_0, \gamma_0^{\theta_0}\})$ tal que

$$\frac{\lambda l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq \lambda_{1,\Omega}(\rho), \quad \text{para qualquer } s \leq \epsilon_2.$$

Tome $C = C(\Omega, \epsilon_2) > 0$ tal que $C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} = \epsilon_2/2$. Daí, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$, temos

$$C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon_2/2 = \epsilon_2. \tag{2.62}$$

Assim, dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0$ obtemos, de maneira análoga a (2.22), que

$$\int_\Omega |\nabla(C\varphi_\Omega)|^{p-2}\nabla(C\varphi_\Omega)\nabla\phi dx \leq \int_\Omega [\lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + g(x, C\varphi + \epsilon)]\phi dx.$$

No caso (iii), devemos ter, para algum $\epsilon_3 \in (0, \min\{s_1, \gamma_0\, \gamma_0^{\theta_0}\})$,

$$\frac{h(s)}{s^{p-1}} > \lambda_{1,\Omega}(\rho), \quad \forall\ 0 < s < \epsilon_3.$$

Tomando $C = C(\Omega, \epsilon_3) > 0$ tal que $C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} = \epsilon_3/2$ temos, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$, que

$$C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon_3/2 = \epsilon_3, \tag{2.63}$$

e, de forma similar a (2.25), para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0,\ \lambda \in (0, \lambda^*)$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$ dados, temos que

$$\int_\Omega |\nabla(C\varphi_\Omega)|^{p-2}\nabla(C\varphi_\Omega)\nabla\phi dx \leq \int_\Omega [\lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + g(x, C\varphi_\Omega + \epsilon)]\phi dx.$$

Tome $\epsilon_4 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \in (0, \min\{s_1, s_2, \gamma_0, \gamma_0^{\theta_0}\})$.

Desde que $V \geq 0$, temos, em qualquer dos casos,

$$\int_\Omega |\nabla(C\varphi_\Omega)|^{p-2}\nabla(C\varphi_\Omega)\nabla\phi dx \leq \int_\Omega [g(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + \lambda f(x, C\varphi_\Omega + \epsilon) + \mu V(x, \nabla C\varphi_\Omega)]\phi dx,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_4/2),\ 0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 < \mu > \mu^*$ dados.

Afirmação 2.2.5: $C\varphi(x) \leq v_\sigma(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega}$.

Verificação da Afirmação 2.2.5: Na primeira parte da demonstração do Lema 2.3, definimos, para o caso em que $q \in [0, p-1]$, $v_\sigma = \psi_\lambda(\omega_M + \sigma)$. Neste caso, esta desigualdade é obtida utilizando raciocínio análogo ao da Afirmação 2.1.7 do Lema 2.1.

Para o caso em que $q \in (p-1, p]$, definimos, na segunda parte da demonstração do Lema 2.3, $v_\sigma = [\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{\theta_0}$, para algum $\theta_0 \in (0, 1)$.

Dos cálculos feitos temos, no sentido fraco, a validade de

$$-\Delta_p\, v_\sigma \geq M(x)\gamma_0^{(p-1)\theta_0}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma^{p-1}},\ x \in \Omega, \tag{2.64}$$

e de (2.61), (2.62) e (2.63), temos que

$$C\|\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_4. \tag{2.65}$$

De $(G)(i), (F)(i)$, (2.3), (2.4) e (2.65), para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_4/2)$, reescrevemos

$$\begin{aligned} -\Delta_p(C\varphi_\Omega) &\leq \gamma_0^{(p-1)\theta_0} b(x)\frac{k(C\varphi_\Omega+\epsilon)}{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}} + \gamma_0^{(p-1)\theta_0}\lambda c(x)\frac{j(C\varphi_\Omega+\epsilon)}{\gamma_0^{(p-1)\theta_0}} \\ &\leq \gamma_0^{(p-1)\theta_0} b(x)\frac{\zeta_{k,\gamma_0}(C\varphi_\Omega+\epsilon)}{(C\varphi_\Omega+\epsilon)^{p-1}} + \gamma_0^{(p-1)\theta_0}\lambda c(x)\frac{\zeta_{j,\gamma_0}(C\varphi_\Omega+\epsilon)}{(C\varphi_\Omega+\epsilon)^{p-1}} \end{aligned}$$

e, de (2.5) e (2.6), para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_4/2)$, temos

$$\begin{aligned} -\Delta_p(C\varphi_\Omega) &\leq M(x)\gamma_0^{(p-1)\theta_0}[\hat{\zeta}_{k,\gamma_0}(C\varphi_\Omega+\epsilon) + \lambda\hat{\zeta}_{j,\gamma_0}(C\varphi_\Omega+\epsilon)] \\ &= M(x)\gamma_0^{(p-1)\theta_0}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(C\varphi_\Omega+\epsilon)}{(C\varphi_\Omega+\epsilon)^{p-1}} \leq M(x)\gamma_0^{(p-1)\theta_0}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(C\varphi_\Omega)}{(C\varphi_\Omega)^{p-1}}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Isto é, de(2.64) e (2.66) temos que

$$-\Delta_p v_\sigma \geq \gamma_0^{(p-1)\theta_0} M(x)\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v_\sigma)}{v_\sigma^{p-1}} \quad \text{e} \quad -\Delta_p(C\varphi_\Omega) \leq \gamma_0^{(p-1)\theta_0} M(x)\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(C\varphi_\Omega)}{(C\varphi_\Omega)^{p-1}},$$

em que, pela Afirmação 2.1.1 (i), $\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(s)/s^{p-1}$ é não-crescente em $s > 0$.

Desde que $v_\sigma, C\varphi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$ e $C\varphi_\Omega = 0 < \sigma = v_\sigma$ em $\partial\Omega$ segue, pelo Teorema 1.2, que a Afirmação 2.2.5 é verdadeira.

Definimos $\hat{F}_\epsilon$ como em (2.29) e consideramos o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \hat{F}_\epsilon(x,u) + \mu V(x,\nabla u) \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.67}$$

Por definição de $\hat{F}_\epsilon$, segue que v_σ e $C\varphi_\Omega$ são, respectivamente, supersolução e subsolução de (2.67). Faça

$$\hat{G}_\epsilon(x,s,\xi) := \hat{F}_\epsilon(x,s) + \mu V(x,\xi).$$

Afirmação 2.2.6: (Veja demonstração de (ii) no Apêndice.)

(i) $\hat{G}_\epsilon$ é Carathéodory;

(ii) Existe um função crescente $D(.)$ tal que $|\hat{G}_\epsilon(x,s,\xi)| \leq D(|s|)(1+|\xi|^p),\ x \in \Omega$.

Após esta afirmação, segue do Teorema 1.1 que existe $u_{\sigma,\epsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $0 < C\varphi_\Omega \leq u_{\sigma,\epsilon} \leq v_\sigma$ satisfazendo (2.67).

Como $u_{\sigma,\epsilon} \leq v_\sigma$, segue que

$$\hat{F}_\epsilon(x, u_{\sigma,\epsilon}) = g(x, u_{\sigma,\epsilon} + \epsilon) + \lambda f(x, u_{\sigma,\epsilon} + \epsilon),$$

o que implica que, para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_{\sigma,\epsilon}|^{p-2} \nabla u_{\sigma,\epsilon} \nabla \phi dx = \int_\Omega [g(x, u_{\sigma,\epsilon} + \epsilon) + \lambda f(x, u_{\sigma,\epsilon} + \epsilon) + \mu V(x, \nabla u_{\sigma,\epsilon})] \phi dx,$$

para quaisquer $\epsilon \in (0, \epsilon_4/2),\ 0 < \sigma < \tilde{\sigma},\ 0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 < \mu < \mu^*$.

Seja $\{\Omega_k\}$ uma sequência de domínios suaves e limitados tais que

$$\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \quad \text{e} \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k.$$

Procedendo como no caso não-convectivo, conclui-se a demonstração do Teorema DL_+. $\square$

2.3 Problema de Dirichlet com o termo convectivo não-positivo

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u) \text{ em } \Omega \\ u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \qquad \text{e} \qquad u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_-}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é domínio limitado, $\lambda > 0$ e $\mu \geq 0$ são parâmetros reais, $g, f : \Omega \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ e $V : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que

(G) (i) existem funções contínuas $b : \Omega \to [0,\infty)$, $b \not\equiv 0$, e $k : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$g(x,s) \leq b(x)k(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_1 \in (0,1]$ e funções $a : \Omega \to [0,\infty)$, $a \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $h : (0,s_1) \to (0,\infty), h \in C(\Omega)$, tais que

$$g(x,s) \geq a(x)h(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,s_1).$$

(F) (i) existem funções contínuas $c : \Omega \to [0,\infty)$, $c \not\equiv 0$, e $j : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$f(x,s) \leq c(x)j(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_2 \in (0,1]$ e funções $d : \Omega \to [0,\infty)$, $d \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $l : (0,s_2) \to (0,\infty), l \in C(\Omega)$, tais que

$$f(x,s) \geq d(x)l(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \Omega \times (0,s_2).$$

(V_1) $|V(x,\xi)| \leq \alpha(x)|\xi|^q + \beta(x)$,

em que $\alpha : \Omega \to [0,\infty)$, $\beta : \Omega \to [0,\infty)$ são funções contínuas tais que $\alpha, \beta, \alpha/d, \alpha/a, \beta/a \in L^\infty(\Omega)$ e $q \in [0,p]$.

(M) existe $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p \omega_M = M(x) \qquad \text{em} \quad \Omega \\ \omega_M > 0 \text{ em } \Omega \;\text{ e }\; \omega_M = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.68}$$

em que $M(x) := \max\{b(x), c(x)\},\ x \in \Omega$.

$$(K)_{s_0,t_0} \quad \sup_{(s_0,t_0)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{\left[1 - \left(\frac{s_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2(p-1)}}{\|\omega_M\|_\infty^{p-1}}, \quad \text{para alguns } 0 \leq s_0 < t_0 \leq \infty.$$

Introduziremos, no que segue, um número θ_0, necessário à obtenção da subsolução. Para isto, consideremos a definição, estabelecida por meio de uma relação entre q e p:

$$\theta_0 := \begin{cases} \dfrac{q}{q-(p-1)}, & q \in (p-1, p] \\ \dfrac{p}{p-1}, & q = p-1 \text{ ou } q = 0 \\ \tilde{\theta}_0 \in \left(\dfrac{p}{p-1}, \dfrac{p-q}{p-1-q}\right), & q \in (0, p-1). \end{cases} \tag{2.69}$$

Teorema DL$_-$: *Assuma* $V \lneqq 0, (G), (F), (M), (K)_{s_0,t_0}$ *e* (V_1), *com* $q \in [0,p]$. *Suponha que*

$$(a)\ h(0) > 0 \qquad ou \qquad (b)\ \beta \equiv 0.$$

Então existem $\lambda_* \geq 0$ *e* $c, \lambda^* > 0$ *tais que, para cada* $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$ *dado, existem* $\mu^* = \mu^*(\lambda) > 0$ *e uma função* $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *com* $c\varphi_\Omega \leq u < t_0$, *solução de (P) em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\lambda_* < \lambda < \lambda^*,\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $0 < l_0 < \infty$;

(ii) $0 < \lambda < \lambda^*,\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $l_0 = \infty$;

(iii) $0 < \lambda < \lambda^*,\ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)$,

em que $\theta_0 > 1$, *se ocorrer* (a), *e* θ_0 *é dado por* (2.69), *se ocorrer* (b).

Adicionalmente,

(iv) $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$;

(v) se (a) *ocorrer, então existe* $c_1 > 0$ *tal que* $\mu^* \geq c_1 h(0)$;

(vi) se (b) *ocorrer e* $q \in [p-1, p]$, *então existem* $c_2, c_3 > 0$ *tais que*

$(vi)_1$ $\mu^* \geq c_2 \lambda l_0,$ *se ocorrer* $(i)(ii)$,

$(vi)_2$ $\mu^* \geq c_3 h_0,$ *se ocorrer* (iii).

Observação 2.4. *Ressaltamos que, no teorema acima, temos que* $\mu^* = \mu^*(\lambda)$ *apenas nas situações* $(b)(i)$ *e* (ii).

Para demonstrar este resultado considere, para alguns $\epsilon, \sigma > 0$ dados, a ϵ-família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq g(x, u+\epsilon) + \lambda f(x, u+\epsilon) + \mu V(x, \nabla u) \text{ em } \Omega \\ u > \sigma \quad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad u = \sigma \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.70}$$

Mostraremos o

Lema 2.5. *Suponha* $V \lneqq 0, (G)(i), (F)(i), (M), (K)_{s_0,t_0}$ *e* (V_1)*, com* $q \geq 0$*. Então, existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que, para cada* $0 < \epsilon < \epsilon_0$ *dado, existem* $\lambda^* > 0$ *e* $v_\sigma = v_{\sigma,\lambda,\mu} \in C^1(\overline{\Omega})$*, todos independentes de* ϵ*, satisfazendo* (2.70)*, para quaisquer* $0 < \lambda < \lambda^*$*,* $\mu \geq 0$*. Adicionalmente,*

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_0\right), \ \text{se } s_0 = 0, \ \text{e } \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}} - k_\infty\right), \ \text{se } t_0 = \infty.$$

Antes de iniciarmos as demonstrações desta seção, ressaltamos que ϵ_i e C_i, $i = 1, 2, 3, ...$ representarão sempre constantes positivas.

2.3.1 Demonstração do Lema 2.5

Demonstração. No Lema 2.1, mostramos que existe $v_\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p v_\sigma \geq g(x, v_\sigma+\epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma+\epsilon) \text{ em } \Omega \\ v_\sigma > \sigma \quad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad v_\sigma = \sigma \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ dados, em que λ^*, σ e ϵ_0 foram dados por (2.8), (2.11) e (2.12), respectivamente.

Desde que $V \leq 0$, para cada $\mu \geq 0$ vale a desigualdade

$$-\Delta_p v_\sigma \geq g(x, v_\sigma+\epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma+\epsilon) + \mu V(x, \nabla v_\sigma), \ \text{em } \Omega,$$

o que conclui a demonstração do Lema 2.5. $\square$

2.3.2 Demonstração do Teorema DL$_-$

Demonstração. A demonstração do Teorema DL$_-$ será dividida em duas partes, sendo que na primeira delas será considerado o caso em que $h(0) > 0$ e, na segunda, o caso em que esta hipótese não é exigida, mas $\beta \equiv 0$.

Seja φ_Ω a $\lambda_{1,\Omega}(\rho)$-autofunção positiva de (AV) em que, como antes, $\rho : \Omega \to (0, \infty)$ é dada por $\rho(x) = \min\{a(x), d(x)\},\ x \in \Omega$.

Mostraremos que, para qualquer $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$, teremos

$$-\Delta_p(C\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq g(x, C\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) + \lambda f(x, C\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) + \mu V(x, \nabla(C\varphi_\Omega^{\theta_0})),\ \text{em } \Omega,$$

em que $\overline{\epsilon}$ e $C = C(\Omega, \theta_0, \overline{\epsilon})$ serão fixadas.

Demonstração de $(a) - (i)$: $h(0) > 0$ e $0 < l_0 < \infty$.

Tome

$$\lambda_* = \max\left\{0, \frac{3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho) - h_0}{l_0}\right\} \geq 0$$

e

$$\mu^* = \min\left\{\frac{h(0)}{3\|\frac{\beta}{a}\|_{L^\infty(\Omega)}}, \frac{h(0)}{3\theta_0^q\|\frac{\alpha}{a}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q\|\varphi^{(\theta_0-1)q}\|_{L^\infty(\Omega)}}\right\} > 0. \tag{2.71}$$

Dados $\lambda > \lambda_*$ e $\mu < \mu^*$, existem $\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$\lambda\frac{l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho),\ \text{para qualquer } 0 < s \leq \tau_1; \tag{2.72}$$

$$h(s) \geq 3\mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_{L^\infty(\Omega)},\ \text{para qualquer } 0 < s \leq \tau_2; \tag{2.73}$$

$$h(s) \geq 3\mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q\|{\varphi_\Omega}^{(\theta_0-1)q}\|_{L^\infty(\Omega)},\ \text{para qualquer } s \leq \tau_3. \tag{2.74}$$

Tome $\epsilon_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, s_1, s_2\}$ e $C_1 = C_1(\Omega, \epsilon_1, \theta_0)$ tais que

$$C_1\|{\varphi_\Omega}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \epsilon_1/2 \quad \text{e} \quad C_1\|\varphi_\Omega\|_\infty^{\theta_0-1} \leq C_0,$$

em que C_0 é a constante da subsolução do caso não-convectivo.

Assim, para cada $0 < \epsilon < \epsilon_1/2$, temos

$$C_1\|{\varphi_\Omega}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_1\ \text{ e }\ C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi_\Omega(x),\ x \in \Omega. \tag{2.75}$$

Assim, dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx + \mu\int_\Omega \beta(x)\phi dx \\
= & \int_\Omega (\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}|\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega (\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^q|\nabla\varphi_\Omega|^q\alpha(x)\phi dx + \mu\int_\Omega \beta(x)\phi dx \\
= & \int_\Omega |\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}\phi]dx \\
- & (\theta_0-1)(p-1)\int_\Omega |\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega(\theta_0 C_1)^{p-1}\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)(p-1)-1}\nabla\varphi_\Omega\phi dx \\
+ & \mu\int_\Omega \frac{a(x)}{a(x)}(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^q|\nabla\varphi_\Omega|^q\alpha(x)\phi dx + \mu\int_\Omega \frac{a(x)}{a(x)}\beta(x)\phi dx \\
\leq & \int_\Omega |\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}\phi]dx \\
+ & \mu\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \theta_0^q\|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_\infty\|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_\Omega a(x)\phi dx + \mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_\infty\int_\Omega a(x)\phi dx
\end{aligned}$$

De maneira semelhante à demonstração das Afirmações 2.1.6 e 2.2.4, mostramos a Afirmação 2.3.1: $[(\theta_0 C_1\varphi^{\theta_0-1})^{p-1}\phi] \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Desta afirmação, de (AV), (2.73) e (2.74) segue, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$, que

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx + \mu\int_\Omega \beta(x)\phi dx \\
\leq & \int_\Omega \lambda_{1,\Omega}(\rho)\rho(x)\varphi_\Omega^{p-1}(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}\phi dx \\
+ & \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_\infty\|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_\Omega a(x)\phi dx + \mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_\infty\int_\Omega a(x)\phi dx \\
\leq & \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})^{p-1}\phi dx + \frac{1}{3}\int_\Omega a(x)h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \frac{1}{3}\int_\Omega a(x)h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando (2.72), $(F)(ii)$ e $(G)(ii)$, reescrevemos a última desigualdade como

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx + \mu\int_\Omega \beta(x)\phi dx \\
\leq & \frac{1}{3}\rho(x)[\lambda l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)]\phi dx + \frac{2}{3}\int_\Omega a(x)h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx \\
< & \lambda\int_\Omega d(x)l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_\Omega a(x)h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx \\
\leq & \lambda\int_\Omega f(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_\Omega g(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx.
\end{aligned}$$

Desta forma, segue de (V_1) que

$$\begin{aligned} -\Delta_p(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}) &\leq \lambda f(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + g(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu[-\alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q - \beta(x)] \\ &\leq \lambda f(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + g(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega, \end{aligned}$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$, $\lambda_* < \lambda \leq \lambda^*$, $\leq \mu < \mu^*$ dados.

Demonstração de $(a)-(ii)$: $h(0) > 0$ e $l_0 = \infty$

De $l_0 = \infty$, temos que existe $\tau_4 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\lambda \frac{l(s)}{s^{p-1}} \geq \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho), \text{ para qualquer } 0 < s \leq \tau_4. \tag{2.76}$$

Definimos agora $\mu^* > 0$ como em (2.71) e tomamos $\epsilon_2 = \min\{\tau_2, \tau_3, \tau_4, s_1, s_2\}$ e $C_2 = C_2(\Omega, \epsilon_2, \theta_0)$ tais que

$$C_2\|{\varphi_\Omega}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \epsilon_2/2 \quad \text{e} \quad C_2\|\varphi_\Omega\|_\infty^{\theta_0-1}(x) \leq C_0,$$

em que C_0 é a constante da subsolução do caso não-convectivo.

Assim, para cada $0 < \epsilon < \epsilon_2/2$, temos

$$C_2\|{\varphi_\Omega}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_2 \text{ e } C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi_\Omega(x), \ x \in \Omega. \tag{2.77}$$

Então, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$ dados, segue de (AV), (2.73), (2.74), (2.76), $(F)(ii)$ e $(G)(ii)$ que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx + \mu\int_\Omega \beta(x)\phi dx \\ &\leq \lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(\theta_0 C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})^{p-1}\phi dx \\ +&\quad \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_\infty\|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_\Omega a(x)\phi dx + \mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_\infty\int_\Omega a(x)\phi dx \\ <&\quad \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\phi dx + \frac{2}{3}\int_\Omega a(x)h(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx \\ \leq&\quad \lambda\int_\Omega \rho(x)l(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \frac{2}{3}\int_\Omega a(x)h(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx \\ \leq&\quad \lambda\int_\Omega f(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_\Omega g(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx. \end{aligned}$$

Usando (V_1), como antes, temos que

$$-\Delta_p(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq \lambda f(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + g(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$, $\lambda_* < \lambda \leq \lambda^*$, $0 \leq \mu < \mu^*$ dados.

Demonstração de $(a) - (iii)$: $h(0) > 0, l_0 = 0$ e $h_0 > 3\theta_0 \lambda_{1,\Omega}(\rho)$

De $h_0 > 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)$, segue que existe $\tau_5 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho), \text{ para qualquer } 0 < s \leq \tau_5. \tag{2.78}$$

Definindo $\mu^* > 0$ como em (2.71), tomamos $\epsilon_3 = \min\{\tau_2, \tau_3, \tau_5, s_1, s_2\}$ e $C_3 = C_3(\Omega, \epsilon_3, \theta_0)$ tais que, por analogia com os casos anteriores, satisfazem, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$ dado,

$$C_3\|\varphi_\Omega{}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_3 \;\text{ e }\; C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi_\Omega(x),\; x \in \Omega. \tag{2.79}$$

Daí, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$ dados, de (AV), (2.73), (2.74), (2.78) e $(G)(ii)$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx + \mu\int_\Omega \beta(x)\phi dx\\
\leq\;& \lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(\theta_0 C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})^{p-1}\phi dx\\
+\;& \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_\infty\|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_\Omega a(x)\phi dx + \mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_\infty\int_\Omega a(x)\phi dx\\
<\;& \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\phi dx + \frac{2}{3}\int_\Omega a(x)h(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx\\
\leq\;& \frac{1}{3}\int_\Omega \rho(x)h(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \frac{2}{3}\int_\Omega a(x)h(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx\\
\leq\;& \lambda\int_\Omega f(x, C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_\Omega g(x, C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx.
\end{aligned}$$

Como antes,

$$-\Delta_p(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq \lambda f(x, C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + g(x, C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$, $0 < \lambda \leq \lambda^*$, $0 \leq \mu < \mu^*$ dados.

Tome agora

$$\bar{\epsilon} = \min\left\{\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_2}{2}, \frac{\epsilon_3}{2}\right\} \;\text{ e }\; C = C_\Omega = \min\{C_1, C_2, C_3\}.$$

Assim temos, em qualquer dos casos,

$$-\Delta_p(C\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq g(x, C\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \lambda f(x, C\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ dado.

Tomando $\epsilon^- = \min\{\epsilon_0, \overline{\epsilon}\}$, do Lema 2.3 e do exposto acima, temos que

$$-\Delta_p v_\sigma \geq g(x, v_\sigma + \epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma + \epsilon) + \mu V(x, \nabla v_\sigma), \text{ em } \Omega$$

e

$$-\Delta_p (C\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq g(x, C\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) + \lambda f(x, C\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) + \mu V(x, \nabla(C\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para $\epsilon \in (0, \epsilon^-)$, $0 \leq \mu \leq \mu^*$, $0 < \lambda \leq \lambda^*((ii), (iii))$ ou $\lambda_* < \lambda \leq \lambda^*((i))$.

De (2.75) (2.77), (2.79) e da Afirmação 2.1.8, temos que

$$0 < C\varphi^{\theta_0}(x) \leq C_0 \varphi(x) \leq v_\sigma(x) \text{ em } \Omega.$$

Definindo $\hat{F}_\epsilon$ como em (2.29) e $\hat{G}_\epsilon$ como em (2.67), reafirmamos a validade das Afirmações 11 e 12 da seção 2.2.

O restante da demonstração segue de forma semelhante à do Teorema DL_+. A demonstração da primeira parte do Teorema DL_- está concluída.

Analisaremos agora a situação em que não exigimos que $h(0) > 0$, mas, em contrapartida, devemos ter $\beta \equiv 0$. Neste caso, a demonstração será dividida em três casos: $q \in (p-1, p]$, $q = p-1$ e $q \in [0, p-1)$, em que verificaremos, em cada um deles, os itens $(i), (ii)$ e (iii) do teorema.

Primeiro Caso: $q \in (p-1, p]$, $\theta_0 = q/[q-(p-1)]$.

Demonstração de $(b)-(i)$: $\beta \equiv 0$ e $0 < l_0 < \infty$

Tome

$$\lambda_* = \max\left\{0, \frac{2\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho) - h_0}{l_0}\right\} \geq 0$$

e

$$\mu^* = \mu_\lambda^*(\Omega) = \frac{\lambda l_0}{2\theta_0^q \|\frac{\alpha}{d}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q} > 0. \tag{2.80}$$

Dados $\lambda > \lambda_*$ e $\mu \leq \mu^*$, existem $\tau_1, \tau_2 > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$\lambda \frac{l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq 2\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho), \text{ para qualquer } s \leq \tau_1; \tag{2.81}$$

$$\lambda \frac{l(s)}{s^{p-1}} \geq 2\mu\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q, \text{ para qualquer } s \leq \tau_2. \tag{2.82}$$

Tomamos $\epsilon_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, s_1, s_2\} > 0$ e $C_1 = C_1(\Omega, \epsilon_1, \theta_0) > 0$ tais que, por analogia à primeira parte da demonstração, satisfazem, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$ dado,

$$C_1 \|\varphi_\Omega{}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_1 \ \text{ e } \ C_1 \varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0 \varphi_\Omega(x), \ x \in \Omega. \tag{2.83}$$

Além disto, segue desta construção que $C_1^q < C_1^{p-1}$ e

$$(\theta_0 - 1)q = \frac{(q - q + p - 1)}{q - (p-1)} q = (p-1) \frac{q}{q - (p-1)} = (p-1)\theta_0.$$

Assim, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$, segue das observações anteriores, de (2.81) e (2.83) que

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2} \nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}) \nabla\phi dx + \mu \int_\Omega \alpha(x) |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q \phi dx \\
< \ & \theta_0^{p-1} \lambda_{1,\Omega}(\rho) \int_\Omega \rho(x) (C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1} \phi dx + \mu\theta_0^q \left\| \frac{\alpha}{d} \right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q \int_\Omega d(x) (C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})^{p-1} \phi dx \\
\leq \ & \frac{1}{2} \int_\Omega [\lambda l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) + h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)] \rho(x) \phi dx + \mu\theta_0^q \left\| \frac{\alpha}{d} \right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q \int_\Omega d(x) (C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1} \phi dx.
\end{aligned}$$

Usando (2.82), $(F)(ii)$ e $(G)(ii)$, reescrevemos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2} \nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}) \nabla\phi dx + \mu \int_\Omega \alpha(x) |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q \phi dx \\
\leq \ & \frac{\lambda}{2} \int_\Omega d(x) l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) \phi dx + \frac{1}{2} \int_\Omega a(x) h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) \phi dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega d(x) l(C_1\varphi^{\theta_0} + \epsilon) \phi dx \\
\leq \ & \lambda \int_\Omega f(x, C_1\varphi^{\theta_0} + \epsilon) \phi dx + \int_\Omega g(x, C_1\varphi^{\theta_0} + \epsilon) \phi dx.
\end{aligned}$$

Logo, de (V_1) temos

$$-\Delta_p(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq \lambda f(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) + g(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon) + \mu V(x, \nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$, $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$, $0 \leq \mu < \mu^*$.

Demonstração de $(b) - (ii)$: $\beta \equiv 0$ e $l_0 = \infty$

De $l_0 = \infty$ temos, para cada $\lambda, \mu > 0$ dados, que existem $\tau_3, \tau_4 > 0$ suficientemente pequenos, tais que

$$\lambda \frac{l(s)}{s^{p-1}} \geq 2\theta_0^{p-1} \lambda_{1,\Omega}(\rho), \text{ para qualquer } s \leq \tau_3; \tag{2.84}$$

$$\lambda \frac{l(s)}{s^{p-1}} \geq 2\mu\theta_0^q \left\| \frac{\alpha}{d} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q, \text{ para qualquer } s \leq \tau_4. \tag{2.85}$$

Tome $\epsilon_2 = \min\{\tau_3, \tau_4, s_1, s_2\} > 0$ e $C_2 = C_2(\Omega, \epsilon_2, \theta_0) > 0$ tais que, por analogia ao feito antes, satisfazem, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$ dado,

$$C_2\|\varphi_\Omega{}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_2 \ \text{ e } \ C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi_\Omega(x), \ x \in \Omega.$$

Analogamente ao feito na demonstração de (i), de (2.84), (2.85), $(F)(ii)$ e $(G)(ii)$, temos, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$ dados,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx \\
\leq\ & \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\phi dx + \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q \int_\Omega d(x)(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\phi dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_\Omega [\lambda l(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + h(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)]\rho(x)\phi dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda d(x) l(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx \\
\leq\ & \lambda\int_\Omega f(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_\Omega g(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx.
\end{aligned}$$

Assim, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$, $\lambda > 0$ e $0 \leq \mu < \infty$, temos

$$-\Delta_p(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq \lambda f(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + g(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega.$$

Demonstração de $(b)-(iii)$: $\beta \equiv 0, l_0 = 0$ e $h_0 > 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)$.

De $h_0 > 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)$, segue que existe $\tau_5 > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq 2\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho), \ \text{para qualquer } 0 < s \leq \tau_5. \tag{2.86}$$

Tome

$$\mu^*(\Omega) = \frac{h_0}{2\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \|\nabla\varphi\|_\infty^q} > 0. \tag{2.87}$$

Dado $\lambda > 0$ e $\mu < \mu^* = \mu^*(\Omega)$, existe $\tau_6 > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\lambda\frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq 2\mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q, \ \text{para qualquer } 0 < s \leq \tau_6. \tag{2.88}$$

Tomando $\epsilon_3 = \min\{\tau_5, \tau_6, s_1, s_2\} > 0$ e $C_3 = C_3(\Omega, \epsilon_3, \theta_0) > 0$ temos, como antes,

$$C_3\|\varphi_\Omega{}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_3 \ \text{ e } \ C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi_\Omega(x), \ x \in \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$ dado.

Observando que $C_3^q < C_3^{p-1}$ e $(\theta_0 - 1)q = (p-1)\theta_0$, de (2.86), (2.88) e $(G)(ii)$ temos, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega),\ \phi \geq 0$ dado,

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx \\
\leq\ & \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_\Omega \rho(x)(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\phi dx + \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_\Omega a(x)(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\phi dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)h(C_3\varphi^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)h(C_3\varphi^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx \\
\leq\ & \int_\Omega g(x, C_3\varphi^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx \leq \lambda\int_\Omega f(x, C_3\varphi^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_\Omega g(x, C_3\varphi^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx.
\end{aligned}$$

Isto verifica $(b)-(iii)$.

Tomando agora

$$\epsilon^{(1)} = \min\left\{\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_2}{2}, \frac{\epsilon_3}{2}\right\} \quad \text{e} \quad C^{(1)} = \min\{C_1, C_2, C_3\}$$

, temos, em qualquer dos casos,

$$-\Delta_p(C^{(1)}\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq g(x, C^{(1)}\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \lambda f(x, C^{(1)}\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C^{(1)}\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon^{(1)})$ dado, em que λ, μ foram dados em cada item.

Isto conclui a demonstração do teorema para o primeiro caso.

Segundo Caso: $q = p-1$.

Desde que $\dfrac{\partial\varphi_\Omega}{\partial\nu} < 0$ em $\partial\Omega$ (cf. [2]), temos que $\min|\nabla\varphi_\Omega(x)| > 0$ em $\partial\Omega$. Desta forma, existem $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno e $k_0 = k_0(\delta_0) > 0$, tais que

$$\min_{\overline{\Omega}_{\delta_0}} |\nabla\varphi_\Omega|^p = k_0(\delta_0),$$

em que $\Omega_{\delta_0} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta_0\}$.

Observando que, neste caso, $(\theta_0 - 1)q = 1$, é possível tomar, para cada $\mu > 0$ dado, um $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\mu\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}(x)\|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k_0(\delta_0) \text{ em } \Omega_{\delta_1}. \tag{2.89}$$

A partir de agora, tomaremos $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$.

Demonstração de $(b)-(i)(ii)$: $\beta \equiv 0$ e $0 < l_0 \leq \infty$

Se $0 < l_0 < \infty$, tome

$$\lambda_* = \max\left\{0, \frac{2\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho) - h_0}{l_0}\right\} \geq 0$$

e

$$\mu^* = \mu^*_\lambda = \frac{\lambda l_0 \min\limits_{\Omega\backslash\Omega_\delta} \varphi_\Omega^{p-1}(x)}{2\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi_\Omega\|^q_{L^\infty(\Omega)}} > 0.$$

Dados $\lambda > \lambda_*$ e $\mu \le \mu^*$, existem $\tau_1, \tau_2 > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$\lambda \frac{l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} \ge 2\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho), \text{ para qualquer } 0 < s \le \tau_1 \tag{2.90}$$

e

$$\lambda \frac{l(s)}{s^{p-1}} \ge 2\mu\theta_0^q \frac{\left\|\frac{\alpha}{d}\right\| \|\nabla\varphi_\Omega\|^q_{L^\infty(\Omega)}}{\min\limits_{\Omega\backslash\Omega_\delta} \varphi_\Omega^{p-1}(x)}, \text{ para qualquer } 0 < s \le \tau_2. \tag{2.91}$$

Observe que, se $l_0 = \infty$, as relações (2.90) e (2.91) permanecem válidas, para cada $\lambda, \mu > 0$.

Tomando $\epsilon_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, s_1, s_2\} > 0$ e $C_1 = C_1(\Omega, \epsilon_1, \theta_0) > 0$, temos que

$$C_1\|{\varphi_\Omega}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_1 \;\text{ e }\; C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \le C_0\varphi_\Omega(x),\; x \in \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$ dado, em que C_0 é a constante da subsolução do caso não-convectivo.

Considere agora a função $\tau \in C^\infty(\Omega), 0 \le \tau \le 1$, dada por

$$\tau(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega\backslash\Omega_\delta \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_{\frac{\delta}{2}}. \end{cases}$$

Assim, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \ge 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx \\
= & \int_\Omega |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla[\tau\phi + (1-\tau)\phi]dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q[\tau\phi + (1-\tau)\phi]dx \\
= & \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\tau\phi dx + \int_{\Omega_\delta} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla(1-\tau)\phi dx \\
+ & \mu\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\tau\phi dx + \mu\int_{\Omega_\delta} \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q(1-\tau)\phi dx.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

No que segue consideremos, inicialmente, o subdomínio $\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}$.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\tau\phi dx + \mu\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\tau\phi dx \\
\leq & \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}\tau\phi]dx + \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^q\tau\phi dx \\
= & \lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \rho(x)\varphi_\Omega^{p-1}(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}\tau\phi dx + \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}\tau\phi dx \\
< & \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \rho(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
+ & \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)\frac{(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}}{(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})^{p-1}}(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}\tau\phi dx.
\end{aligned}$$

De (2.90), (2.91), $(F)(ii)$ e $(G)(ii)$ reescrevemos, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\tau\phi dx + \mu\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\tau\phi dx \\
\leq & \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} [\lambda l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)]\rho(x)\tau\phi dx \\
+ & \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)\frac{(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}}{\varphi_\Omega^{p-1}}\tau\phi dx \\
\leq & \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx \\
+ & \frac{\mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q}{\min\limits_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}}\varphi_\Omega^{p-1}(x)}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
< & \lambda\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} f(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} g(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx. \qquad (2.93)
\end{aligned}$$

Trabalharemos agora no anel Ω_δ. Neste caso,

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\delta} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla(1-\tau)\phi dx + \mu\int_{\Omega_\delta} \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q(1-\tau)\phi dx \\
= & \int_{\Omega_\delta} |\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}(1-\tau)\phi]dx + \mu\int_{\Omega_\delta}(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^q|\nabla\varphi_\Omega|^q\alpha(x)(1-\tau)\phi dx \\
- & \underbrace{(\theta_0-1)(p-1)}_{1}(\theta_0 C_1)^{p-1}\int_{\Omega_\delta}|\nabla\varphi_\Omega|^p\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)(p-1)-1}(1-\tau)\phi dx \\
\leq & \int_{\Omega_\delta} |\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0 C_1\varphi^{\theta_0-1})^{p-1}(1-\tau)\phi]dx \\
+ & \int_{\Omega_\delta}(\theta_0 C_1)^q[\mu\|\alpha\|_\infty\varphi_\Omega(x)\|\nabla\varphi\|_\infty^q - \min_{\overline{\Omega_{\delta_0}}}|\nabla\varphi_\Omega|^p](1-\tau)\phi dx
\end{aligned}
$$

Assim, de (2.89), (AV) e (2.90), reescrevemos, para cada $\epsilon\in(0,\epsilon_1/2)$,

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\delta} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla(1-\tau)\phi dx + \mu\int_{\Omega_\delta}\alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q(1-\tau)\phi dx \\
\leq & \int_{\Omega_\delta}|\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}(1-\tau)\phi]dx \\
< & \ \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega_\delta}\rho(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}(1-\tau)\phi dx \\
< & \ \lambda\int_{\Omega_\delta} d(x)l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)(1-\tau)\phi dx + \int_{\Omega_\delta} a(x)h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)(1-\tau)\phi dx \\
\leq & \ \lambda\int_{\Omega_\delta} f(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)(1-\tau)\phi dx + \int_{\Omega_\delta} g(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)(1-\tau)\phi dx.
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

Das relações (2.92), (2.93) e (2.94), temos, para cada $\epsilon\in(0,\epsilon_1/2)$, que

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_{\Omega}\alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx \\
= & \ \lambda\int_\Omega f(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_\Omega g(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx,
\end{aligned}
$$

donde segue, utilizando (V_1), que

$$
-\Delta_p(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq \lambda f(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + g(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x,\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})),
$$

para cada $\epsilon\in\left(0,\frac{\epsilon_1}{2}\right)$, $\lambda>\lambda_*$ e $0\leq\mu<mu^*$ dados.

Isto conclui a demonstração de $(i)(ii)$.

Demonstração de $(b)-(iii)$: $\beta\equiv 0, l_0=0$ e $h_0>3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)$

De $h_0 > 2\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)$, segue que existe $\tau_3 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq 2\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho), \text{ para qualquer } 0 < s \leq \tau_3. \tag{2.95}$$

Tome

$$\mu^* = \frac{h_0 \min\limits_{\Omega\backslash\Omega_\delta} \varphi_\Omega^{p-1}(x)}{2\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{a}\right\| \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q} > 0.$$

Dado $\lambda > 0$ e $\mu < \mu^*$, existe $\tau_4 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq \frac{2\mu\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q}{\min\limits_{\Omega\backslash\Omega_\delta} \varphi_\Omega^{p-1}(x)}, \text{ para qualquer } 0 < s \leq \tau_4. \tag{2.96}$$

Considere $\epsilon_3 = \min\{\tau_3, \tau_4, s_1, s_2\}$ e $C_3 = C_3(\Omega, \epsilon_3, \theta_0)$ que satisfaçam, como nos casos anteriores,

$$C_3\|\varphi_\Omega{}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_3 \text{ e } C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi_\Omega(x), \ x \in \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$ dado.

Como feito em (2.92), dividiremos o domínio Ω em dois subconjuntos, a saber, $\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ e Ω_δ. No subdomínio $\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}$, de (2.95), (2.96) e $(G)(ii)$ temos, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$, que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\tau\phi dx + \mu\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \alpha(x)|\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\tau\phi dx \\
< \ & \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \rho(x)(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
+ \ & \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)\frac{(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1}}{(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})^{p-1}}(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^q\tau\phi dx \\
\leq \ & \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)h(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)\tau\phi dx + \frac{\mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty\|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q}{\min\limits_{\Omega\backslash\Omega_\delta}\varphi_\Omega^{p-1}(x)}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
\leq \ & \frac{1}{2}\int_{\Omega-\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)h(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)\tau\phi dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)h(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)\tau\phi dx \\
\leq \ & \lambda\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} f(x, C_3\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)\tau\phi dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} g(x, C_3\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)\tau\phi dx.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

No anel Ω_δ temos, dos cálculos feitos para a obtenção de (2.94), de (2.95) e de $(G)(ii)$,

que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\delta} |\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla(1-\tau)\phi dx + \mu\int_{\Omega_\delta} \alpha(x)|\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{q}(1-\tau)\phi dx \\
\leq\ & \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega_\delta} \rho(x)(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}(1-\tau)\phi dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} a(x)h(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)(1-\tau)\phi dx \leq \int_{\Omega_\delta} g(x,C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)(1-\tau)\phi dx \\
\leq\ & \lambda\int_{\Omega_\delta} f(x,C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)(1-\tau)\phi dx + \int_{\Omega_\delta} g(x,C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)(1-\tau)\phi dx. \qquad (2.98)
\end{aligned}$$

Retomando (2.92), de (2.97) e (2.98) temos, para cada $\epsilon\in(0,\epsilon_3/2)$ dado, que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} |\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_{\Omega} \alpha(x)|\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{q}\phi dx \\
=\ & \lambda\int_{\Omega} f(x,C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_{\Omega} g(x,C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx,
\end{aligned}$$

donde segue, para cada $\epsilon\in(0,\epsilon_3/2)$, $\lambda>0$ e $0\leq\mu<\mu^*$, que

$$-\Delta_p(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq \lambda f(x,C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + g(x,C_3\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x,\nabla(C_3\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega.$$

Isto verifica $(b)-(iii)$.

Tomando agora $\epsilon^{(2)}=\min\{\epsilon_1/2,\epsilon_3/2\}$ e $C^{(2)}=\min\{C_1,C_3\}$, temos, em qualquer dos casos,

$$-\Delta_p(C^{(2)}\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq g(x,C^{(2)}\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \lambda f(x,C^{(2)}\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x,\nabla(C^{(2)}\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para cada $\epsilon\in(0,\epsilon^{(2)})$ e λ,μ dados em cada item.

Isto conclui a demonstração do segundo caso: $q=p-1$.

Terceiro Caso: $q\in[0,p-1)$.

Demonstração de $(b)-(i)(ii)$: $\beta\equiv 0$ e $0<l_0<\infty$

Defina

$$\lambda_* = \max\left\{0, \frac{3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)-h_0}{l_0}\right\}\geq 0.$$

Assim, para cada $\lambda>\lambda_*$ dado, existe $\tau_1>0$ suficientemente pequeno tal que

$$\lambda\frac{l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} > 2\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho), \text{ para qualquer } 0<s\leq\tau_1. \qquad (2.99)$$

Analogamente ao feito antes, tomamos $\epsilon_1=\min\{\tau_1,s_1,s_2\}>0$ e $C_1=C_1(\Omega,\epsilon_1,\theta_0)>0$

tais que

$$C_1\|{\varphi_\Omega}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_1 \ \text{ e } \ C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi_\Omega(x), \ x \in \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_3/2)$ dado, em que C_0 é a constante da subsolução do caso não-convectivo.

Desde que $\dfrac{\partial \varphi_\Omega}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$, (cf. [2]), temos que $\min|\nabla\varphi_\Omega(x)| > 0$ em $\partial\Omega$. Desta forma, existem $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, e $k_0 = k_0(\delta_0) > 0$ tais que

$$\min_{\overline{\Omega}_{\delta_0}} |\nabla\varphi_\Omega|^p = k_0(\delta_0).$$

Se $q \in (0, p-1)$, temos

$$0 < (\theta - 1)(p-1) - 1 < (\theta - 1)q.$$

Por outro lado, se $q = 0$, então $(\theta_0 - 1)(p-1) - 1 = 0$.

Portanto, em ambos os casos $[\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}]/[\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)(p-1)-1}] \in L^\infty(\Omega_{\delta_0})$, o que deixa bem definido o número

$$\mu_1^* = \frac{(\theta_0 - 1)(p-1)(\theta_0 C_1)^{p-1}k_0(\delta_0)}{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}{\theta_0}^q C_1^q \left\| \frac{\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}}{\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)(p-1)-1}} \right\|_{L^\infty(\Omega_{\delta_0})} \|\nabla\varphi_\Omega\|^q_{L^\infty(\Omega)}} > 0. \tag{2.100}$$

Logo, dado $\mu \leq \mu_1^*$, temos

$$\mu\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}{\theta_0}^q C_1^q \left\| \frac{\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}}{\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)(p-1)-1}} \right\|_{L^\infty(\Omega_{\delta_0})} \|\nabla\varphi_\Omega\|^q_{L^\infty(\Omega)} \leq (\theta_0 - 1)(p-1)(\theta_0 C_1)^{p-1}k_0(\delta_0). \tag{2.101}$$

Desde que $l_0 > 0$ e $l(s) > 0, s > 0$ tome, para cada $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$,

$$\mu_2^* = \mu_2^*(\lambda) = \lambda l_0 \frac{C_1 \min\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \varphi_\Omega^{\theta_0(p-1)}(x)}{2\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{d}\right\| \|\nabla\varphi_\Omega\|^q_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_{L^\infty(\Omega)}}.$$

Logo, para cada $\mu < \mu_2^*$, temos que existe $\tilde{\epsilon_1} = \tilde{\epsilon_1}(\mu) < \epsilon_1$ tal que

$$\lambda \frac{l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)}{(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1}} \geq 2\mu \frac{\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{d}\right\| \|\nabla\varphi_\Omega\|^q_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_{L^\infty(\Omega)}}{C_1 \min\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \varphi_\Omega^{\theta_0(p-1)}(x)}. \tag{2.102}$$

Observe que, se $l_0 = \infty$, as relações (2.101) e (2.102) permanecem válidas.

Fazendo $\mu^* = \min\{\mu_1^*, \mu_2^*\} > 0$, procederemos como no caso em que $q = p-1$, trabalhando separadamente no subdomínio $\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ e no anel Ω_δ. Para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$ dado, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\tau\phi dx + \mu\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\tau\phi dx \\
\leq\ & \lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \rho(x)\varphi_\Omega^{p-1}(\theta_0 C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}\tau\phi dx + \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_\infty\|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^q\tau\phi dx \\
<\ & \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\rho(x)\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} (C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
+\ & \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_\infty\|\nabla\varphi_\Omega\|_\infty^q\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)\frac{(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}}{(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})^{p-1}}(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^q\tau\phi dx.
\end{aligned}$$

De (2.99) e (2.102), reescrevemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\tau\phi dx + \mu\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\tau\phi dx \\
\leq\ & \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \rho(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
+\ & \mu\theta_0^q\frac{\left\|\frac{\alpha}{d}\right\|\,\|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q\|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\min\limits_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} C_1\varphi_\Omega^{\theta_0(p-1)}(x)}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} [\lambda d(x)l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + a(x)h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)]\tau\phi dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} d(x)l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx \\
\leq\ & \int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} g(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx + \lambda\int_{\Omega\backslash\Omega_{\frac{\delta}{2}}} f(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

No anel Ω_δ, para cada $0 \leq \mu < \mu^*$ dado, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\delta} |\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla(1-\tau)\phi dx + \mu\int_{\Omega_\delta}\alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q(1-\tau)\phi dx\\
&= \int_{\Omega_\delta} |\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}(1-\tau)\phi]dx + \mu\int_{\Omega_\delta}(\theta_0C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^q|\nabla\varphi_\Omega|^q\alpha(x)(1-\tau)\phi dx\\
&-(\theta_0-1)(p-1)(\theta_0C_1)^{p-1}\int_{\Omega_\delta}|\nabla\varphi_\Omega|^p\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)(p-1)-1}(1-\tau)\phi dx\\
&\leq \int_{\Omega_\delta} |\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}(1-\tau)\phi]dx\\
&+\int_{\Omega_\delta}\left[\mu\|\alpha\|_\infty{\theta_0}^q\frac{C_1^q\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}}{\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)(p-1)-1}}\|\nabla\varphi_\Omega\|^q-(\theta_0-1)(p-1)(\theta_0C_1)^{p-1}k_0(\delta_0)\right]\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)(p-1)-1}(1-\tau)\phi dx.
\end{aligned}$$

De (2.99) e (2.101), reescrevemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\delta}|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla(1-\tau)\phi dx+\mu\int_{\Omega_\delta}\alpha(x)|\nabla(C_1\varphi^{\theta_0})|^q(1-\tau)\phi dx\\
\leq\ &\int_{\Omega_\delta}|\nabla\varphi_\Omega|^{p-2}\nabla\varphi_\Omega\nabla[(\theta_0C_1\varphi_\Omega^{\theta_0-1})^{p-1}(1-\tau)\phi]dx\\
<\ &\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega_\delta}\rho(x)(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}(1-\tau)\phi dx\\
\leq\ &\frac{1}{2}\int_{\Omega-\Omega_{\frac{\delta}{2}}}[\lambda d(x)l(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)+a(x)h(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)]\tau\phi dx\\
\leq\ &\int_{\Omega-\Omega_{\frac{\delta}{2}}}g(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx+\lambda\int_{\Omega-\Omega_{\frac{\delta}{2}}}f(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx. \qquad (2.104)
\end{aligned}$$

Segue, das relações (2.103) e (2.104), para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$, que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx+\mu\int_\Omega\alpha(x)|\nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx\\
=\ &\lambda\int_\Omega f(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx+\int_\Omega g(x,C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx,
\end{aligned}$$

o que nos leva a

$$-\Delta_p(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq \lambda f(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + g(x, C_1\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C_1\varphi_\Omega^{\theta_0})),$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1/2)$, $\lambda > \lambda_*$ e $0 \leq \mu < \mu^*$ dados.

Demonstração de $(b) - (iii)$: $\beta \equiv 0, l_0 = 0$ e $h_0 > 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)$

É claro que existe $\tau_2 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{h(s)}{s^{p-1}} \geq 3\theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho), \text{ para qualquer } 0 < s \leq \tau_2.$$

De forma análoga ao feito antes, consideramos $\epsilon_2 = \min\{\tau_2, s_1, s_2\}$ e $C_2 = C_2(\Omega, \theta_0, \epsilon_2)$ tais que

$$C_2\|\varphi_\Omega{}^{\theta_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon < \epsilon_2 \text{ e } C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi_\Omega(x), \; x \in \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$ dado, em que C_0 é a constante da subsolução do caso não-convectivo.

Vamos considerar $\mu_1^* > 0$ como em (2.100) e, para cada $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$, definir

$$\mu_2^* = \lambda h_0 \frac{C_2 \min\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \varphi_\Omega^{\theta_0(p-1)}(x)}{2\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{a}\right\| \|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q \|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_{L^\infty(\Omega)}}.$$

Daí, para cada $\mu < \mu_2^*$ e $\tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon_2}(\mu) < \epsilon_2$, temos

$$\lambda\frac{h(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)}{(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1}} \geq 2\mu\frac{\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{a}\right\| \|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q \|\varphi_\Omega^{(\theta_0-1)q}\|_{L^\infty(\Omega)}}{C_2 \min\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \varphi_\Omega^{\theta_0(p-1)}(x)}.$$

Fazendo $\mu^* = \min\{\mu_1^*, \mu_2^*\}$ e procedendo de maneira análoga ao feito em $(b) - (i)(ii)$, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\tau\phi dx + \mu\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \alpha(x)|\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\tau\phi dx \\
\leq\;& \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \rho(x)(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
+\;& \mu\theta_0^q \frac{\left\|\frac{\alpha}{a}\right\| \|\nabla\varphi_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)}^q \|\varphi_\Omega(\theta_0 - 1)q\|_{L^\infty(\Omega)}}{C_2 \min\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \varphi_\Omega^{\theta_0(p-1)}(x)} \int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)^{p-1}\tau\phi dx \\
\leq\;& \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)h(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)]\tau\phi dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} a(x)h(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)\tau\phi dx \\
\leq\;& \int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} g(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)\tau\phi dx + \lambda\int_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\delta}{2}}} f(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0} + \epsilon)\tau\phi dx. \qquad (2.105)
\end{aligned}$$

Por outro lado, no anel Ω_δ obtemos, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$, que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\delta} |\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla(1-\tau)\phi dx + \mu\int_{\Omega_\delta} \alpha(x)|\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q(1-\tau)\phi dx \\
< \;& \theta_0^{p-1}\lambda_{1,\Omega}(\rho)\int_{\Omega_\delta} \rho(x)(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)^{p-1}(1-\tau)\phi dx \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} a(x)h(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)]\tau\phi dx \\
\leq \;& \int_{\Omega_\delta} g(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx + \lambda\int_{\Omega_\delta} f(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\tau\phi dx. \qquad (2.106)
\end{aligned}$$

Retomando (2.105) e (2.106), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_\Omega \alpha(x)|\nabla(C_2\varphi_\Omega^{\theta_0})|^q\phi dx \\
= \;& \lambda\int_\Omega f(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx + \int_\Omega g(x, C_2\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon)\phi dx,
\end{aligned}$$

o que acarreta

$$-\Delta_p(C_2\varphi^{\theta_0}) \leq \lambda f(x, C_2\varphi^{\theta_0}+\epsilon) + g(x, C_2\varphi^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C_2\varphi^{\theta_0})),$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_2/2)$, $\lambda > \lambda_*$ e $0 \leq \mu < \mu^*$ dados.

Isto verifica $(b)-(iii)$.

Tomando agora $\epsilon^{(3)} = \min\{\epsilon_1/2, \epsilon_2/2\}$ e $C^{(3)} = \min\{C_1, C_2\}$, temos, em qualquer dos casos,

$$-\Delta_p(C^{(3)}\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq g(x, C^{(3)}\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \lambda f(x, C^{(3)}\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C^{(3)}\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon^{(3)})$ dado.

Para concluir a demonstração, tomamos $\bar{\epsilon} = \min\{\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \epsilon^{(3)}\}$ e $C = \min\{C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}\}$ e $\epsilon^- = \min\{\epsilon_0, \bar{\epsilon}\}$ e então, do Lema 2.5 e dos cálculos anteriores, segue que

$$-\Delta_p v_\sigma \geq g(x, v_\sigma+\epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma+\epsilon) + \mu V(x, \nabla v_\sigma), \text{ em } \Omega$$

e

$$-\Delta_p(C\varphi_\Omega^{\theta_0}) \leq g(x, C\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \lambda f(x, C\varphi_\Omega^{\theta_0}+\epsilon) + \mu V(x, \nabla(C\varphi_\Omega^{\theta_0})) \text{ em } \Omega,$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon^-)$ dado, em que λ e μ foram dados em cada caso.

De (2.75) (2.77), (2.79) e da Afirmação 2.1.8 , temos que

$$C\varphi^{\theta_0}(x) \leq C_0\varphi(x) \leq v_\sigma(x) \text{ em } \Omega.$$

Definindo $\hat{F}_\epsilon$ como em (2.29) e $\hat{G}_\epsilon$ como em (2.67), reafirmamos a validade das Afirmações 11 e 12 do 2.2.

O restante da demonstração segue de maneira análoga à do Teorema DL$_+$. A demonstração da segunda parte do Teorema DL$_-$ está concluída. $\square$

Capítulo

3

Existência de soluções inteiras positivas que se anulam no infinito

3.1 Problema sem o termo de convecção

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{P_0}$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro real, $g, f : \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ são funções contínuas tais que

(G) (i) existem funções contínuas $b : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$, $b \neq 0$, e $k : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$g(x,s) \leq b(x)k(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_1 \in (0,1]$ e funções $a : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$, $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $h : (0,s_1) \to (0,\infty), h \in C(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$g(x,s) \geq a(x)h(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,s_1).$$

(F) (i) existem funções contínuas $c : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$, $c \neq 0$, e $j : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$f(x,s) \leq c(x)j(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_2 \in (0,1]$ e funções $d : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$, $d \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $l : (0, s_2) \to (0,\infty), l \in C(\mathbb{R}^N)$, tais que

$$f(x,s) \geq d(x)l(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,s_2).$$

(M) existe $\omega_M \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p \, \omega_M = M(x) \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \omega_M > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } \omega_M(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $M(x) := \max\{b(x), c(x)\}$ $x \in \mathbb{R}^N$.

$$(K)_{s_0,t_0} \quad \sup_{(s_0,t_0)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{\left[1 - \left(\frac{s_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2(p-1)}}{\| \, \omega_M \, \|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}, \quad \text{para alguns } 0 \leq s_0 < t_0 \leq \infty.$$

Consideremos, como antes, o problema de autovalor com peso ρ, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_p \, \varphi = \lambda \rho(x) |\varphi|^{p-2}\varphi \text{ em } \ \Omega \\ \varphi > 0 \text{ em } \ \Omega \quad \text{e} \quad \varphi = 0 \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{AV}$$

em que $\rho : \Omega \to (0,\infty)$ é dada por $\rho(x) = \min\{a(x), d(x)\}, x \in \mathbb{R}^N$. Observamos que não consideramos a autofunção normalizada, embora isto pudesse ser feito.

Teorema NL$_0$: *Suponha $V \equiv 0, (G), (F), (M)$ e $(K)_{s_0,t_0}$. Então existe $\lambda^* > 0$ e uma função $u = u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N)$, com $0 < u < t_0$, satisfazendo (P) em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\max\left\{0, \frac{\lambda_1(\rho) - h_0}{l_0}\right\} < \lambda \leq \lambda^*$, *se* $0 < l_0 < \infty$*;*

(ii) $0 < \lambda \leq \lambda^*$, *se* $l_0 = \infty$*;*

(iii) $0 < \lambda \leq \lambda^*$, *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > \lambda_1(\rho)$.

Adicionalmente,

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_0\right), \ se \ s_0 = 0, \quad e \quad \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_\infty\right), \ se \ t_0 = \infty.$$

Para demonstrar este resultado, considere, para algum $\epsilon > 0$ dado, a ϵ-família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq g(x, u+\epsilon) + \lambda f(x, u+\epsilon) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Mostraremos o

Lema 3.1. *Suponha* $V \equiv 0, (G)(i), (F)(i), (M)$ *e* $(K)_{s_0,t_0}$. *Então, dado* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existem* $\lambda^* > 0$ *e* $v = v_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N)$, *ambos independentes de* ϵ, *satisfazendo* (3.2) *para cada* $0 < \lambda \leq \lambda^*$ *dado. Além disso,*

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_0\right), \ \textit{se } s_0 = 0, \quad \textit{e} \quad \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_\infty\right), \ \textit{se } t_0 = \infty.$$

3.1.1 Demonstração do Lema 3.1

Demonstração. A demonstração deste resultado é análoga à do Lema 2.1 do caso não-convectivo em domínio limitado.

Definimos as funções $\zeta_{k,\gamma}, \zeta_{j,\gamma}, \hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}, H_{\lambda,\gamma}$ e Γ_λ como em (2.3)-(2.7) e consideramos suas propriedades, demonstradas nas Afirmações 2.1.1 a 2.1.3 do Lema 2.1.

Como feito na Afirmação 2.1.4, mostra-se que existe $\gamma_0 > 0$ tal que $\Gamma_0(\gamma_0) > \|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. De forma análoga a (2.8), existe $\lambda^* = \lambda^*(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\Gamma_{\lambda^*}(\gamma_0) = \|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.3}$$

Denotando por ω_{M,B_R} e $\omega_{M,\mathbb{R}^N}$ as soluções de (2.1) e (3.1), respectivamente, desde que $\|\omega_{M,B_R}\|_{L^\infty(B_R)} \leq \|\omega_{M,\mathbb{R}^N}\|_{L^\infty(B_R)} \leq \|\omega_{M,\mathbb{R}^N}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, da monotonicidade de Γ_λ em relação a λ e das relações (2.8) e (3.3), temos que $\lambda^*(\mathbb{R}^N) \leq \lambda^*(B_R)$, para cada $R \geq 1$.

Definindo η_λ como em (2.9), temos que $\eta_\lambda(\gamma_0) > \|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, para cada $0 < \lambda < \lambda^* = \lambda^*(\mathbb{R}^N)$ dado. De maneira análoga à demonstração da Afirmação 2.1.5, temos que

(i) $[0, \|\omega\|_\infty] \subset \mathrm{Im}(\eta_\lambda)$;

(ii) $\eta_\lambda \in C^2((0,\infty), \mathrm{Im}(\eta_\lambda))$ é crescente em $s > 0$;

(iii) $\eta_\lambda^{-1} := \psi_\lambda \in \ C^2((\mathrm{Im}(\eta_\lambda)\backslash\{0\}, (0,\infty))$ é crescente em $s > 0$;

(iv) $\psi'_\lambda(s) = \dfrac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(s))}{\psi_\lambda(s)}, \ s > 0$;

(v) η_λ é decrescente em λ.

Lembrando que $\omega_M > 0$ em $\mathbb{R}^N$, mostraremos que, para cada $0 < \lambda \leq \lambda^*$ dado, a função definida por

$$v(x) = v_\lambda(x) = \psi_\lambda(\omega_M(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

será a solução de (3.2).

Veja que

$$\omega_M(x) \leq \|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \eta_\lambda(\gamma_0), \ x \in \mathbb{R}^N$$

donde segue, da Afirmação 5(ii)-(iii), que $\psi_\lambda(\omega_M(x)) < \psi_\lambda(\eta_\lambda(\gamma_0)) = \gamma_0$, isto é, $0 < v(x) < \gamma_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = \psi_\lambda(\lim\limits_{|x|\to\infty} \omega_M(x)) = \psi_\lambda(0) = 0$. Assim,

$$\sup_{\mathbb{R}^N} v(x) = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \gamma_0,$$

o que leva à existência de um $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \gamma_0 - \epsilon, \ \forall \ \epsilon \in (0, \epsilon_0].$$

Da definição de v, temos que $\nabla v = \psi'_\lambda(\omega_M)\nabla\omega_M$, donde segue que

$$|\nabla v|^{p-2}\nabla v = [\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-1}|\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M,$$

e, assim, para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\phi \geq 0$ dada, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\phi dx &= \int_{\mathbb{R}^N} [\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-1}|\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla\phi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla([\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-1}\phi)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M(p-1)[\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-2}\psi''_\lambda(\omega_M)\nabla\omega_M\phi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega_M|^{p-2}\nabla\omega_M\nabla([\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-1}\phi)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega_M|^{p}(p-1)[\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-2}\psi''_\lambda(\omega_M)\phi dx,
\end{aligned}$$

pois, como mostrado na Afirmação 2.1.6 do Lema 2.1, temos que $[\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-1}\phi \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $\psi''_\lambda(\omega_M) \leq 0$, segue de (M), para cada $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla \phi dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N} M(x)[\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-1}\phi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{p-1}\phi dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} [M(x)]\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v)}{v^{p-1}}\phi dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} [M(x)]\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v+\epsilon)}{(v+\epsilon)^{p-1}}\phi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v+\epsilon)}{\gamma_0^{p-1}}\phi dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} M(x)[\zeta_{k,\gamma_0}(v+\epsilon) + \lambda\zeta_{j,\gamma_0}(v+\epsilon)]\phi dx
\end{aligned} \tag{3.4}$$

e, dessa forma, usando (2.3), (2.4), (2.12), $(G)(i)$ e $(F)(i)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla \phi dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N} [b(x)k(v+\epsilon) + \lambda c(x)j(v+\epsilon)]\phi dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} [g(x, v+\epsilon) + \lambda f(x, v+\epsilon)]\phi dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$-\Delta_p v \geq g(x, v+\epsilon) + \lambda f(x, v+\epsilon) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

para cada $0 < \lambda < \lambda^*$, $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ dados. Isto prova o Lema 3.1. □

3.1.2 Demonstração do Teorema NL$_0$

Demonstração. Inicialmente observemos que, desde que $\omega_{M,B_R} \leq \omega_{M,\mathbb{R}^N}$ (cf. Lema A.0.7 [36]), segue da monotonicidade da função ψ_λ que $v_{B_R} \leq v_{\mathbb{R}^N}$, em que tais funções denotam as soluções dos problemas (2.2) e (3.2), dadas pelos Lemas 2.1 e 3.1, respectivamente.

Do Teorema DL$_0$, temos que existe $u_R \in C^1(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_p u_R = g(x, u_R) + \lambda f(x, u_R) \text{ em } B_R \\ u_R > 0 \text{ em } B_R \quad \text{e} \quad u_R = 0 \text{ em } \partial B_R, \end{cases} \tag{3.5}$$

para cada $R > 0$ e $0 < \lambda < \lambda^*(B_R)$ dado e, além disso,

$$0 < C_R\varphi_R \leq u_R \leq v_{B_R} \leq v_{\mathbb{R}^N} < \gamma_0 \ \text{ em } B_R,$$

em que $\varphi_R = \varphi_{B_R(0)}$. Relembrando que $\lambda^*(\mathbb{R}^N) \leq \lambda^*(B_R)$, vamos considerar, de agora em diante, $0 < \lambda < \lambda^*(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $\lambda_1(\rho) = \lim_{R\to\infty} \lambda_{1,B_R(0)}(\rho)$ e $0 < l_0 < \infty$, dado $\lambda > [\lambda_1(\rho) - h_0]/l_0$, segue que existe $L_1 > 0$ suficientemente grande tal que $\lambda_{1,B_{L_1}}(\rho) < \lambda l_0 + h_0$.

Isto é, existe $\delta_1 = \delta_1(L_1) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\lambda\frac{l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} > \lambda_{1,B_{L_1}}(\rho), \quad \text{para qualquer } s \in (0, \delta_1).$$

Desde que $\lambda_{1,B_R}(\rho) \leq \lambda_{1,B_{L_1}}(\rho),$ para todo $R \geq L_1$, segue que

$$h(s) + \lambda l(s) > \lambda_{1,B_R}(\rho)s^{p-1}, \text{ para todo } s \in (0, \delta_1) \text{ e } R \geq L_1. \tag{3.6}$$

Se $l_0 = \infty$, é claro que (3.6) é válida.

Em (iii) temos, por hipótese, $h_0 > \lambda_1(\rho)$, donde segue que existe $L_2 > 0$ suficientemente grande tal que $\lambda_{1,B_{L_2}}(\rho) < h_0 = h_0 + \lambda l_0$, para qualquer $\lambda > 0$.

Para tal L_2, existe $\delta_2 = \delta_2(L_2) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\lambda\frac{l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} > \lambda_{1,B_{L_2}}(\rho), \quad \text{para qualquer } s \in (0, \delta_2).$$

Novamente deduzimos, pela monotonicidade do primeiro autovalor em relação ao domínio, que

$$h(s) + \lambda l(s) > \lambda_{1,B_R}(\rho)s^{p-1}, \text{ para todo } s \in (0, \delta_2) \text{ e } R \geq L_2. \tag{3.7}$$

Tome agora $L_0 = \max\{L_1, L_2\}$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Desta forma temos, em qualquer das situações, que

$$\lambda\frac{l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} > \lambda_{1,B_R}(\rho), \quad \text{para quaisquer } s \in (0, \delta),\ R \geq L_0. \tag{3.8}$$

Agora, escolhamos $C = C(\delta) \in (0, C_{L_0})$ suficientemente pequeno tal que

$$0 < C \parallel \varphi_{L_0} \parallel_{L^\infty(B_{L_0})} < \delta, \tag{3.9}$$

em que C_{L_0} é a constante da subsolução de (3.5) em B_{L_0}.

Afirmação 3.1.1: $C\varphi_{L_0}(x) \leq u_R(x),\ x \in B_{L_0},$ para todo $R > L_0$.

Verificação: Suponha, por contradição, que existam $x_0 \in B_{L_0}$ e $R_0 > L_0$ tais que $C\varphi_{L_0}(x_0) > u_{R_0}(x_0)$. Assim, o conjunto aberto

$$A_{R_0,L_0} := \{x \in B_{L_0} : C\varphi_{L_0}(x) > u_{R_0}(x)\}$$

é não-vazio.

Relembrando que $C\varphi_{L_0}$ e u_R satisfazem (AV) e (3.5), respectivamente, segue de $(G)(ii)$, $(F)(ii)$, (3.8) e Teorema 1.4, que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{A_{R_0,L_0}} \left[\frac{-\Delta_p(C\varphi_{L_0})}{(C\varphi_{L_0})^{p-1}} + \frac{\Delta_p\, u_{R_0}}{(u_{R_0})^{p-1}} \right] [(C\varphi_{L_0})^p - (u_{R_0})^p] dx \\
&= \int_{A_{R_0,L_0}} \left[\frac{\lambda_{1,B_{L_0}}(\rho)\rho(x)(C\varphi_{L_0})^{p-1}}{(C\varphi_{L_0})^{p-1}} - \frac{[g(x,u_{R_0}) + \lambda f(x,u_{R_0})]}{(u_{R_0})^{p-1}} \right] [(C\varphi_{L_0})^p - (u_{R_0})^p] dx \\
&\leq \int_{A_{R_0,L_0}} \left[\lambda_{1,B_{L_0}}(\rho)\rho(x) - a(x)\frac{h(u_{R_0})}{(u_{R_0})^{p-1}} - \lambda d(x)\frac{l(u_{R_0})}{(u_{R_0})^{p-1}} \right] [(C\varphi_{L_0})^p - (u_{R_0})^p] dx \\
&\leq \int_{A_{R_0,L_0}} \rho(x) \left[\lambda_{1,B_{L_0}}(\rho) - \frac{h(u_{R_0})}{(u_{R_0})^{p-1}} - \lambda\frac{l(u_{R_0})}{(u_{R_0})^{p-1}} \right] [(C\varphi_{L_0})^p - (u_{R_0})^p] dx < 0,
\end{aligned}
$$

o que é um absurdo. Portanto, $A_{R_0,L_0} = \emptyset$ e a Afirmação 3.1.1 está verificada.

Disso, concluímos que

$$0 < C\varphi_{L_0}(x) \leq u_R(x) \leq v(x), \quad \text{para quaisquer } x \in B_{L_0},\ R > L_0.$$

Pelo Teorema 1.3, dada $B_{L_0-1} \subset\subset B_{L_0}$, existem $\alpha_{L_0-1} \in (0,1)$ e $C_{L_0-1} > 0$, ambos independentes de R, tais que

$$|\nabla u_R(x)| \leq C_{L_0-1} \quad \text{e} \quad |\nabla u_R(x) - \nabla u_R(y)| \leq C_{L_0-1}|x-y|^{\alpha_{L_0-1}},\ x,y \in B_{L_0-1},$$

e segue, da compacidade da imersão $C^{1,\alpha_{L_0-1}}(\overline{B}_{L_0-1}) \hookrightarrow C^1(\overline{B}_{L_0-1})$, que existe uma subsequência $\{u_{R_{L_0-1}}\} \subseteq \{u_R\}$ em $C^{1,\alpha_{L_0-1}}(\overline{B}_{L_0-1})$ tal que $u_{R_{L_0-1}} \to u^{L_0-1}$ em $C^1(\overline{B}_{L_0-1})$, quando $R_{L_0-1} \to \infty$.

Desde que, para qualquer $\phi \in C_0^\infty(B_{L_0-1})$, temos

$$\int_{B_{L_0-1}} |\nabla u_{R_{L_0-1}}|^{p-2} \nabla u_{R_{L_0-1}} \nabla\phi dx = \int_{B_{L_0-1}} [g(x,u_{R_{L_0-1}}) + \lambda f(x,u_{R_{L_0-1}})]\phi dx$$

e que as convergências, quando $R_{L_0-1} \to \infty$,

$$\int_{B_{L_0-1}} |\nabla u_{R_{L_0-1}}|^{p-2} \nabla u_{R_{L_0-1}} \nabla\phi dx \to \int_{B_{L_0-1}} |\nabla u^{L_0-1}|^{p-2} \nabla u^{L_0-1} \nabla\phi dx$$

e

$$\int_{B_{L_0-1}} [g(x,u_{R_{L_0-1}}) + \lambda f(x,u_{R_{L_0-1}})]\phi dx \to \int_{B_{L_0-1}} [g(x,u^{L_0-1}) + \lambda f(x,u^{L_0-1})]\phi dx$$

ocorrem (veja situação análoga na Afirmação 2.1.9 do Teorema DL_0), segue que

$$\int_{B_{L_0-1}} |\nabla u^{L_0-1}|^{p-2}\nabla u^{L_0-1}\nabla\phi dx \to \int_{B_{L_0-1}} [g(x,u^{L_0-1})+\lambda f(x,u^{L_0-1})]\phi dx,\ \phi\in C_0^\infty(B_{L_0-1}).$$

Repetindo este argumento para as bolas $B_{L_0+k}\subset\subset B_{L_0+k+1},\ k\geq 1$ e $R>L_0+k+1$, obtemos uma subsequência $\{u_{R_{L_0+k}}\}\subseteq\{u_{R_{L_0+k-1}}\}$ em $C^{1,\alpha_{L_0+k}}(\overline{B}_{L_0+k})$ tal que $u_{R_{L_0+k}}\to u^{L_0+k}$ em $C^1(\overline{B}_{L_0+k})$, quando $R_{L_0+k}\to\infty$ e

$$\int_{B_{L_0+k}} |\nabla u^{L_0+k}|^{p-2}\nabla u^{L_0+k}\nabla\phi dx = \int_{B_{L_0+k}} [g(x,u^{L_0+k})+\lambda f(x,u^{L_0+k})]\phi dx,\ \phi\in C_0^\infty(B_{L_0+k}).$$

Isto é, para cada $L_0,\ k\geq 1$ e $R>L_0+k+1$, obtemos

$$\begin{array}{ccccccc}
u_{R_{(L_0-1)}} & u_{(R+1)_{(L_0-1)}} & u_{(R+2)_{(L_0-1)}} & u_{(R+3)_{(L_0-1)}} \cdots & \longrightarrow & u^{(L_0-1)} \text{ em } C^1(\overline{B}_{(L_0-1)}) \\
u_{R_{L_0}} & u_{(R+1)_{L_0}} & u_{(R+2)_{L_0}} & u_{(R+3)_{L_0}} \cdots & \longrightarrow & u^{L_0} \text{ em } C^1(\overline{B}_{L_0}) \\
u_{R_{(L_0+1)}} & u_{(R+1)_{(L_0+1)}} & u_{(R+2)_{(L_0+1)}} & u_{(R+3)_{(L_0+1)}} \cdots & \longrightarrow & u^{(L_0+1)} \text{ em } C^1(\overline{B}_{(L_0+1)}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & & \vdots \\
u_{R_{(L_0+k)}} & u_{(R+1)_{(L_0+k)}} & u_{(R+2)_{(L_0+k)}} & u_{(R+3)_{(L_0+k)}} \cdots & \longrightarrow & u^{(L_0+k)} \text{ em } C^1(\overline{B}_{(L_0+k)}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & & \vdots
\end{array}$$

com

$$\{u_{R_{(L_0+k+1)}}\}\subseteq\{u_{R_{(L_0+k)}}\}\quad \text{e}\quad u^{(L_0+k+1)}|_{B_{(L_0+k)}}=u^{(L_0+k)},\ \text{para qualquer } k\geq 1.$$

Defina $u_k:\mathbb{R}^N\to(0,\infty)$ para cada $k\geq 1$, por

$$u_k(x)=u_{(R+k)_{(L_0+k)}}(x),\ x\in B_{(L_0+k)} \text{ e } u_k(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^N\backslash B_{L_0+k},$$

e $u:\mathbb{R}^N\to[0,\infty)$ por

$$u(x)=\lim_{k\to\infty}u_k(x),\ x\in\mathbb{R}^N.$$

Disto segue que $u\in C^1(\mathbb{R}^N),\ 0<C\varphi_L(x)\leq u(x)\leq v(x)$, para $x\in B_L$, para cada $L>0$, isto é, $u>0$ em $\mathbb{R}^N,\ u(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$ e, para cada $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx=\int_{\mathbb{R}^N}[g(x,u)+\lambda f(x,u)]\phi dx. \tag{3.10}$$

De fato, dada $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $K>0$ tal que $supp(\phi)\subset B_K$. Daí, para qualquer

$j \geq K$,

$$\int_{B_K(0)} |\nabla u_j|^{p-2} \nabla u_j \nabla \phi dx = \int_{B_K(0)} [g(x, u_j) + \lambda f(x, u_j)] \phi dx.$$

Mostrando-se as convergências necessárias, temos que

$$\int_{B_K(0)} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx = \int_{B_K(0)} [g(x, u) + \lambda f(x, u)] \phi dx,$$

donde se obtém (3.10). $\square$

3.2 Problema com convectividade não-negativa

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad u \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{P_+}$$

em que $\lambda > 0,\ \mu \geq 0$ são parâmetros reais, $g, f : \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ e $V : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que

(G) (i) existem funções contínuas $b : \mathbb{R}^N \to [0,\infty),\ b \not\equiv 0$, e $k : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$g(x,s) \leq b(x)k(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_1 \in (0,1]$ e funções $a : \mathbb{R}^N \to (0,\infty),\ a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $h : (0,s_1) \to (0,\infty), h \in C(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$g(x,s) \geq a(x)h(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,s_1).$$

(F) (i) existem funções contínuas $c : \mathbb{R}^N \to [0,\infty),\ c \not\equiv 0$, e $j : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$f(x,s) \leq c(x)j(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_2 \in (0,1]$ e funções $d : \mathbb{R}^N \to (0,\infty),\ d \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $l : (0,s_2) \to (0,\infty), l \in C(\mathbb{R}^N)$, tais que

$$f(x,s) \geq d(x)l(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,s_2).$$

(V_1) $|V(x,\xi)| \leq \alpha(x)|\xi|^q + \beta(x)$,

em que $\alpha : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ e $\beta : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ são funções contínuas em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $q \in [0,p]$;

(M) existe $\omega_M \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|\nabla\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty$ e

$$\begin{cases} -\Delta_p \omega_M = M(x) \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \omega_M > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } \omega_M(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

em que $M(x) := \max\{2b(x), 2c(x), \alpha(x), \beta(x)\},\ x \in \mathbb{R}^N$;

$$(K)_{s_0,t_0} \quad \sup_{(s_0,t_0)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{\left[1-\left(\frac{s_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2(p-1)}}{\| \omega_M \|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}, \quad \text{para alguns } 0 \leq s_0 < t_0 \leq \infty.$$

Teorema NL$_+$: *Suponha $V \gneqq 0, (G), (F), (M), (K)_{s_0,t_0}$ e (V_1), com $q \in [0, p-1]$. Então existem $\lambda_* \geq 0$ e $\lambda^* > 0$ tais que, para cada $\lambda_* < \lambda \leq \lambda^*$ dado, existem $\mu^* = \mu^*(\lambda) \geq 0$ e uma função $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\mathbb{R}^N)$, com $0 < u < t_0$, satisfazendo (P) em cada uma das seguintes situações:*

(i) $\lambda_* = \max\left\{0, \frac{\lambda_1(\rho)-h_0}{l_0}\right\}, \ 0 \leq \mu \leq \mu^*,$ *se* $0 < l_0 < \infty$;

(ii) $\lambda_* = 0, \ 0 \leq \mu \leq \mu^*,$ *se* $l_0 = \infty$;

(iii) $\lambda_* = 0, \ 0 \leq \mu \leq \mu^*,$ *se* $l_0 = 0$ *e* $h_0 > \lambda_1(\rho)$.

Adicionalmente,

(iv) $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$;

(v) $\mu^*(\lambda) = \min\left\{\frac{[k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}, \frac{k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)}{4}\right\}$, *em que* $\gamma_0 = t_0$, *se* $s_0 > 0$, *e* $\gamma_0 = 0$, *se* $s_0 = 0$.

Para demonstrar este resultado, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, considere a ϵ-família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq g(x, u+\epsilon) + \lambda f(x, u+\epsilon) + \mu V(x, \nabla u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad u \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Mostraremos o

Lema 3.2. *Suponha $V \gneqq 0, (G)(i), (F)(i), (M), (K)_{s_0,t_0}$ e (V_1), com $q \in [0, p-1]$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\lambda^* > 0$ tal que, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$, existem $\mu^* = \mu^*(\lambda) \geq 0$ e uma função $v = v_{\lambda,\mu} \in C^1(\mathbb{R}^N)$, todos independentes de ϵ, satisfazendo (3.12) para cada $0 \leq \mu < \mu^*$. Além disso,*

(i) $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$;

(ii) $\mu^*(\lambda) = \min\left\{\frac{[k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}, \frac{k(\gamma_0)+\lambda j(\gamma_0)}{4}\right\}$, *em que* $\gamma_0 = t_0$, *se* $s_0 > 0$, *e* $\gamma_0 = 0$, *se* $s_0 = 0$.

3.2.1 Demonstração do Lema 3.2

Demonstração. A demonstração deste resultado é análoga à demonstração da primeira parte do Lema 2.3, isto é, definimos as funções $\zeta_{k,\gamma}, \zeta_{j,\gamma}, \hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}, H_{\lambda,\gamma}$ e Γ_λ como em (2.3)-(2.7) e usamos suas propriedades, demonstradas nas Afirmações 2.1.1 a 2.1.3 do Lema 2.1.

Como feito na Afirmação 2.1.4, mostra-se que existe $\gamma_0 > 0$ tal que $\Gamma_0(\gamma_0) > \|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Agora, tomamos $\lambda^* = \lambda^*(\mathbb{R}^N) > 0$ tal que $\Gamma_{\lambda^*}(\gamma_0) = \|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Observe que, se considerarmos a restrição da função ω_M, dada em (3.11), à bola B_R, é claro que $\lambda^*(\mathbb{R}^N) \leq \lambda^*(B_R)$, para cada $R \geq 1$.

Definimos η_λ como em (2.9), obtendo $\eta_\lambda(\gamma_0) > \|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, para cada $0 < \lambda < \lambda^* = \lambda^*(\mathbb{R}^N)$ dado. De forma análoga ao demonstrado na Afirmação 2.1.5, temos que

(i) $[0, \|\omega\|_\infty] \subset \mathrm{Im}(\eta_\lambda)$;

(ii) $\eta_\lambda \in C^2((0,\infty), \mathrm{Im}(\eta_\lambda))$ é crescente em $s > 0$;

(iii) $\eta_\lambda^{-1} := \psi_\lambda \in \ C^2((\mathrm{Im}(\eta_\lambda)\backslash\{0\}, (0,\infty))$ é crescente em $s > 0$;

(iv) $\psi'_\lambda(s) = \dfrac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(s))}{\psi_\lambda(s)}, \ s > 0$;

(v) η_λ é decrescente em λ.

Lembrando que $\omega_M > 0$ em $\mathbb{R}^N$ mostraremos que a função definida por

$$v(x) = v_\lambda(x) = \psi_\lambda(\omega_M(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

satisfaz $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $0 < v(x) \leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \gamma_0$, $x \in \mathbb{R}^N$, pois

$$\omega_M(x) \leq \|\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \eta_\lambda(\gamma_0),$$

donde segue, da Afirmação 2.1.5(ii)-(iii), que $\psi_\lambda(\omega_M(x)) < \psi_\lambda(\eta_\lambda(\gamma_0)) = \gamma_0$, isto é, $\sup\limits_{\mathbb{R}^N} v(x) = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \gamma_0$.

Ou seja, existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \gamma_0 - \epsilon, \ \forall\ \epsilon \in (0, \epsilon_0]. \tag{3.13}$$

Assim, dada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \phi \geq 0$ temos, como em (3.4), que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \phi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} M(x) \gamma_0^{p-1} \left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M))}\right]^{p-1} \phi dx. \tag{3.14}$$

Assim, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $0 < \lambda < \lambda^*$, segue das Afirmações 2.1.2 (ii), 1(i),(ii) e da relação (3.13) que, por um lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{p-1}\phi dx &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v)}{v^{p-1}}\phi dx\\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v+\epsilon)}{(v+\epsilon)^{p-1}}\phi dx\\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma_0}(v+\epsilon)}{(\gamma_0)^{p-1}}\phi dx,\\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)[\zeta_{k,\gamma_0}(v+\epsilon)+\lambda\zeta_{j,\gamma_0}(v+\epsilon)]\phi dx,
\end{aligned}$$

isto é, de (3.13), (2.3), da definição de M, de $(G)(i)$ e $(F)(i)$, temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{p-1}\phi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N}[g(x,v+\epsilon)+\lambda f(x,v+\epsilon)]\phi dx. \quad (3.15)$$

Por outro lado, defina $\mu_1^* = \mu_1^*(\lambda, \gamma_0, I_k(\gamma_0), I_j(\gamma_0), \|\nabla\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) > 0$ por

$$\mu_1^* = \frac{\gamma_0^{p-1-q}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}},\ 0<\lambda<\lambda^*. \quad (3.16)$$

Das Afirmações 2.1.2(iii), (iv) e (3.16), temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{p-1}\phi dx\\
= &\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{p-1}\phi dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{p-1}\phi dx\\
\geq &\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]\phi dx\\
+ &\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1-q}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{p-1-q}\left[\frac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{q}\phi dx\\
\geq &\frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))}{4}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\phi dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1-q}[I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0)]^{\frac{p-1-q}{p-1}}[\psi'_\lambda(\omega_M)]^q\phi dx\\
\geq &\frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\beta(x)\phi dx + \mu_1^*\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)[\psi'_\lambda(\omega_M)]^q\phi dx\\
\geq &\frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0)+\lambda I_j(\gamma_0))}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\beta(x)\phi dx + \mu_1^*\int_{\mathbb{R}^N} M(x)[\psi'_\lambda(\omega_M)]^q|\nabla\omega_M|^q\phi dx.
\end{aligned}$$

Definindo $\mu^*(\mathbb{R}^N) = (\lambda, \gamma_0, I_k(\gamma_0), I_j(\gamma_0), \|\nabla\omega_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) > 0$ como

$$\mu^*(\mathbb{R}^N) = \min\left\{\mu_1^*, \frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0) + \lambda I_j(\gamma_0))}{4}\right\},$$

utilizando (V_1) e o fato que $V \geq 0$, reescrevemos a desigualdade anterior, para cada $0 \leq \mu < \mu^* = \mu^*(\mathbb{R}^N)$, como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} M(x)\gamma_0^{p-1}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(\omega_M))}{\psi_\lambda(\omega_M)}\right]^{p-1}\phi dx &\geq \mu^*\int_{\mathbb{R}^N}\beta(x)\phi dx + \mu^*\int_{\mathbb{R}^N}\alpha(x)|\nabla v|^q\phi dx \\ &\geq \mu\int_{\mathbb{R}^N} V(x,\nabla v)\phi dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Daí, substituindo (3.15) e (3.17) em (3.14) segue, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 \leq \mu < \mu^*$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\phi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N}[g(x, v+\epsilon) + \lambda f(x, v+\epsilon) + \mu V(x,\nabla v)]\phi dx$$

e, como visto, $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$, $v \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

A obtenção das estimativas dadas em (i) e (ii) é feita de maneira semelhante à dos Lemas 2.1 e 2.3. Isto prova o Lema 3.2.

□

3.2.2 Demonstração do Teorema NL$_+$

Demonstração. De forma análoga à demonstração do Teorema DL$_+$, com $\sigma = 0$, ou seja, $v_\sigma = v$, mostra-se que existe $u_R \in C^1(B_R)\cap C(\overline{B}_R)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_p u_R = g(x,u_R) + \lambda f(x,u_R) + \mu V(x,\nabla u_R) \text{ em } B_R \\ u_R > 0 \qquad \text{em } \ B_R, \end{cases} \tag{3.18}$$

para cada $R \geq 1,\ 0 < \lambda < \lambda^*(B_R),\ 0 \leq \mu < \mu^*(B_R)$ dados, com

$$\mu^*(B_R) = \mu^*(B_R) = \min\left\{\frac{\gamma_0^{p-1-q}(I_k(\gamma_0) + \lambda I_j(\gamma_0))^{\frac{p-1-q}{p-1}}}{4\|\nabla\omega_M\|^q_{L^\infty(B_R)}}, \frac{\gamma_0^{p-1}(I_k(\gamma_0) + \lambda I_j(\gamma_0))}{4}\right\},$$

sendo que aqui consideramos a restrição da função ω_M, dada em (3.11), à bola B_R. Além disso,

$$0 < C_R\varphi_R \leq u_R \leq v_{\mathbb{R}^N} < \gamma_0 \ \text{ em } B_R.$$

Do exposto anteriormente temos que $\lambda^*(\mathbb{R}^N) \leq \lambda^*(B_R)$, para cada $R \geq 1$.

Como feito na demonstração do Teorema NL_0, tomamos $L_0 = \max\{L_1, L_2\}$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ como em (3.6) e (3.7), ambos independentes de $R > 0$, obtendo, em qualquer das situações,

$$\lambda\frac{l(s)}{s^{p-1}} + \frac{h(s)}{s^{p-1}} > \lambda_{1,B_R}(\rho), \quad \text{para quaisquer } s \in (0,\delta),\ R > L_0.$$

Como em (3.9), escolhemos $C = C(\delta) \in (0, C_{L_0})$ suficientemente pequeno tal que $0 < C\|\varphi_{L_0}\|_{L^\infty(B_{L_0})} < \delta$, em que C_{L_0} é a constante da subsolução de (3.18) em B_{L_0}.

Com este C assim escolhido, temos, de forma análoga à demonstração da Afirmação 3.1.1 do Teorema NL_0, usando a não-negatividade do termo V, que

$$C\varphi_{L_0}(x) \le u_R(x),\ x \in B_{L_0} \text{ e para todo } R > L_0.$$

Seguindo raciocínio semelhante àquele da demonstração do Teorema NL_0, construímos uma função $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\mathbb{R}^N)$ com $0 < C\varphi_L \le u \le v < \gamma_0$ em $\mathbb{R}^N$, para cada $L \ge L_0 > 0$, que satisfaz, para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 \le \mu < \mu^*$ dados,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} [g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u)]\phi dx,\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

$u > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e $u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Isto finaliza a demonstração do Teorema NL_+. $\square$

Na próxima seção, consideramos o problema (P) para o caso $V \lneqq 0$.

3.3 Problema com termo de convecção não-positivo

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u(x) \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{P_-}$$

em que $\lambda > 0$, $\mu \ge 0$ são parâmetros reais, $g, f : \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ e $V(x,\xi) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que

(G) (i) existem funções contínuas $b : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$, $b \not\equiv 0$, e $k : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$g(x,s) \le b(x)k(s),\ \text{para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_1 \in (0,1]$ e funções $a : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$, $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $h : (0,s_1) \to (0,\infty), h \in C(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$g(x,s) \geq a(x)h(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,s_1);$$

(F) (i) existem funções contínuas $c : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$, $c \neq 0$, e $j : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tais que

$$f(x,s) \leq c(x)j(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty);$$

(ii) existem $s_2 \in (0,1]$ e funções $d : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$, $d \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $l : (0,s_2) \to (0,\infty), l \in C(\mathbb{R}^N)$, tais que

$$f(x,s) \geq d(x)l(s), \text{ para quaisquer } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (0,s_2);$$

(V_1) $|V(x,\xi)| \leq \alpha(x)|\xi|^q + \beta(x)$;

(V_2) $|V(x,\xi) - V(x,\eta)| \leq \alpha(x)\,||\xi|^q - |\eta|^q|$;

(V_3) V é continuamente diferenciável em ξ sobre subconjuntos compactos de suas variáveis,

em que $\alpha,\beta : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ são funções contínuas tais que $\alpha,\beta,\alpha/d,\alpha/a,\beta/a \in L^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e $q \in [0,p]$;

(M) existe $\omega_M \in C^1(\mathbb{R}^N)$, com $|\nabla\omega_M| \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p\,\omega_M = M(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \omega_M > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } \omega_M(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

em que $M(x) := \max\{b(x), c(x)\},\ x \in \mathbb{R}^N$;

$$(K)_{s_0,t_0} \quad \sup_{(s_0,t_0)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{\left[1 - \left(\frac{s_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2(p-1)}}{\|\,\omega_M\,\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}, \quad \text{para alguns } 0 \leq s_0 < t_0 \leq \infty.$$

Ao pensar em estender o Teorema DL$_-$ para o $\mathbb{R}^N$ através de um processo de limite, devido à possível singularidade que as funções f e (ou) g possam admitir em $s = 0$, torna-se necessária a existência de uma limitação inferior positiva, e uniforme, para a R-família de soluções do problema (P_-), em $\Omega = B_R(0)$.

Tal limitação será obtida por meio do Teorema 1.5, cuja aplicação varia de acordo com o valor de p. Quando $p = 2$, será possível utilizar uma "ferramenta" alternativa para este fim, o que dispensa as hipóteses (V_2) e (V_3), mas, em contrapartida, exige que $a, d \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, $f, g \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega \times (0,\infty))$ e $V \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^N), \alpha \in (0,1)$.

Como na prova do Teorema DL$_-$, a construção de uma subsolução foi possível por meio da introdução de uma potência da primeira autofunção do problema (AV), estabelecida por meio de um número θ_0, apropriadamente escolhido. Por tratar o problema (P) em $\mathbb{R}^N$, exigimos que $\lim\limits_{R\to\infty} \|\nabla\varphi_R\|_{L^\infty(B_R)} < \infty$. No resultado a seguir tomamos, quando $p = 2$, o número

$$\theta_0 := \begin{cases} \dfrac{q}{q-1}, & \text{se } q \in (1,2] \\ \\ 2, & \text{se } q = 1. \end{cases} \tag{3.19}$$

Teorema NL$_-$: *Assuma $V \lneqq 0, (G), (F), (V_1), (M)$ e $(K)_{s_0,t_0}$. Suponha que*

(a) $1 < p \leq 2, q \in (p-1, p], h(0) > 0$ *e* (V_3); *ou*

(b) $p \geq 2, q \in \left[p-1, p\left(1 - \frac{1}{p^*}\right)\right), h(0) > 0$ *e* (V_2); *ou*

(c) $p = 2, \quad q \in (1,2]$ *e* $\beta \equiv 0$.

Então existem $\lambda_* \geq 0$ e $\lambda^* > 0$ tais que, para cada $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$ dado, existem $\mu^* = \mu^*(\lambda) > 0$ e uma função $u = u_{\lambda,\mu} \in C^1(\mathbb{R}^N)$, com $0 < u < t_0$, solução de (P) em cada uma das seguintes situações:

(i) $\max\left\{0, \frac{3\theta_0^{p-1}\lambda_1(\rho) - h_0}{l_0}\right\} < \lambda \leq \lambda^*, \ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $0 < l_0 < \infty$;

(ii) $0 < \lambda \leq \lambda^*, \ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $l_0 = \infty$;

(iii) $0 < \lambda \leq \lambda^*, \ 0 \leq \mu < \mu^*,$ *se* $l_0 = 0$, *e* $h_0 > 3\theta_0^{p-1}\lambda_1(\rho)$,

em que $\theta_0 > 1$, se ocorrerem (a) ou (b), e θ_0 é dado por (7), se ocorrer (c).

Adicionalmente,

(iv) $\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_0\right)$, *se* $s_0 = 0$, *e* $\lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_\infty\right)$, *se* $t_0 = \infty$;

(v) existem constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ tais que $\mu^* \geq c_1 h(0)$, para (a) ou (b), $\mu^* \geq c_2\lambda l_0$, para $(c)(i)(ii)$ e $\mu^* \geq c_3 h_0$, para $(c)(iii)$.

Observação 3.3. *Ressaltamos que*

(1) de forma análoga ao observado no Teorema DL$_-$, temos que $\mu^* = \mu^*(\lambda)$ apenas nas situações $(b)(i)$ e $(b)(ii)$;

(2) uma situação em que $\lim\limits_{R\to\infty} \|\nabla\varphi_R\|_{L^\infty(B_R)} < \infty$ *é, por exemplo, quando o peso* ρ *do problema de autovalor* (AV) *é tal que* $\rho(x) = \rho(|x|)$ *e, além disso,* $\int_0^\infty \rho(t)dt < \infty$ *ou* $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho(r) < \infty$.

Devido às possíveis singularidades nas funções g e (ou) f considere, para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o problema perturbado

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq g(x, u+\epsilon) + \lambda f(x, u+\epsilon) + \mu V(x, \nabla u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u(x) \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{3.20}$$

Mostraremos o

Lema 3.4. *Suponha* $V \lneqq 0, (G)(i), (F)(i), (M)$ *e* $(K)_{s_0,t_0}$. *Então, dado* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existem* $\lambda^* > 0$ *e* $v = v_{\lambda,\mu} \in C^1(\mathbb{R}^N)$, *ambos independentes de* ϵ, *satisfazendo* (3.20) *para cada* $0 < \lambda < \lambda^*$, $\mu \geq 0$ *dados. Além disso,*

$$\lambda^* \geq \frac{1}{j_0}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_0\right), \ \textit{se } s_0 = 0 \quad \textit{e} \quad \lambda^* \geq \frac{1}{j_\infty}\left(\frac{1}{\|\omega_M\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} - k_\infty\right), \ \textit{se } t_0 = \infty.$$

3.3.1 Demonstração do Lema 3.4

Demonstração. No Lema 3.1, mostramos que existe $v = v_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N), v$ independente de ϵ, tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p v \geq g(x, v+\epsilon) + \lambda f(x, v+\epsilon) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad v(x) \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \to \infty, \end{cases}$$

para qualquer $0 < \lambda < \lambda^* = \lambda^*(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $V \leq 0$, para qualquer $\mu \geq 0$ vale a desigualdade

$$-\Delta_p v \geq g(x, v+\epsilon) + \lambda f(x, v+\epsilon) + \mu V(x, \nabla v), \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Isto conclui a demonstração do Lema 3.4. □

3.3.2 Demonstração do Teorema NL$_-$

Demonstração. Relembrando que $v_{B_R} \leq v_{\mathbb{R}^N}$ e $\lambda^*(B_R) \geq \lambda^*(\mathbb{R}^N)$, do Teorema DL$_-$, existe $u_R \in C^1(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_p u_R = g(x, u_R) + \lambda f(x, u_R) + \mu V(x, \nabla u_R) \text{ em } B_R \\ u_R > 0 \text{ em } B_R \quad \text{e} \quad u_R = 0 \text{ em } \partial B_R, \end{cases}$$

para cada $R \geq 1,\ 0 < \lambda < \lambda^*(B_R)$(em particular, $0 < \lambda < \lambda^*(\mathbb{R}^N)$), e $0 \leq \mu < \mu^*(B_R)$ dados e, além disso,

$$0 < C_R\varphi_R \leq u_R \leq v_{B_R} \leq v_{\mathbb{R}^N} < \gamma_0 \ \text{ em } B_R.$$

Nosso objetivo, no que segue, é mostrar que existe uma limitação inferior positiva, independente do raio R, para a família de soluções u_R do problema acima.

Demonstração de (a) e (b):

Desde que $h(0) > 0$ e $h(s) > 0$, segue que $\min\limits_{0<s<s_1} h(s) > 0$, e que

$$h_d(s) = \frac{\min\limits_{0<s<s_1} h(s)}{2} - \frac{\min\limits_{0<s<s_1} h(s)}{4s_1}s,\ 0 \leq s \leq s_1$$

é uma função contínua, decrescente e positiva com $h_d(s) < h(s),$ para qualquer $s \in (0, s_1)$, em que s_1 foi dado na hipótese $(G)(ii)$.

Em seguida, defina

$$\mu^*(\mathbb{R}^N) = \min\left\{\frac{h(0)/4}{3\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}, \frac{h(0)/4}{3\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \lim\limits_{R\to\infty} \| \nabla\varphi_R \|^q_{L^\infty(B_R)} \lim\limits_{R\to\infty} \| \varphi_R^{(\theta_0-1)q} \|_{L^\infty(B_R)}}\right\}.$$

Assim, dado $0 \leq \mu < \mu^*(\mathbb{R}^N)$, existem $\delta_1, \delta_2, \sigma_1, \sigma_2 > 0$ suficientemente pequenos e $L_0 > 0$ suficientemente grande, tais que

$$h(s) - \sigma_1 > 12\mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\quad 0 < s \leq \delta_1 \tag{3.21}$$

e

$$12\mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \| \nabla\varphi_R \|^q_{L^\infty(B_R)}\| \varphi_R^{(\theta_0-1)q} \|_{L^\infty(B_R)} < h(s) - \sigma_2,\ 0 < s \leq \delta_2 \text{ e } R \geq L_0. \tag{3.22}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, de (3.21) e (3.22) temos para $R \geq L_0$ e $0 < s \leq \delta$ que

$$12\mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \min_{s\in(0,\delta]} h(s) - \sigma_1 < \min_{s\in(0,\delta]} h(s) \tag{3.23}$$

e

$$12\mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \| \nabla\varphi_R \|^q_{L^\infty(B_R)}\| \varphi_R^{(\theta_0-1)q} \|_{L^\infty(B_R)} \leq \min_{s\in(0,\delta]} h(s) - \sigma_2 < \min_{s\in(0,\delta]} h(s). \tag{3.24}$$

Observe que, para cada $R > L_0$ e $0 \le \mu < \mu^*(\mathbb{R}^N)$, temos que $0 \le \mu < \mu^*(B_R)$, em que $\mu^*(B_R)$ foi dado em (2.71).

Tome agora $\tilde{C}_{L_0} = \tilde{C}_{L_0}(\theta_0, s_1, \delta) \in (0, C_{L_0})$ tal que

$$\tilde{C}_{L_0} \parallel \varphi_{L_0}^{\theta_0} \parallel_{L^\infty(B_{L_0})} < \min\left\{\frac{s_1}{4}, \delta, \frac{1}{\theta_0(12\lambda_{1,B_{L_0}}(a))^{\frac{1}{p-1}}}\left(\min_{s\in(0,\delta]} h(s)\right)^{\frac{1}{p-1}}\right\}, \tag{3.25}$$

em que C_{L_0} é a constante da subsolução do problema (P_-), com $\Omega = B_{L_0}$, dada na primeira parte da demonstração do Teorema DL$_-$.

Assim, para cada $\phi \in C_0^\infty(B_{L_0})$, $\phi \ge 0$ temos, de (3.23), (3.24) e (3.25), que

$$\begin{aligned}
& \int_{B_{L_0}} |\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})|^{p-2}\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_{B_{L_0}} \alpha(x)|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})|^q\phi dx + \mu\int_{B_{L_0}} \beta(x)\phi dx \\
\le \;& \theta_0^{p-1}\lambda_{1,B_{L_0}}(a)\int_{B_{L_0}} a(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})^{p-1}\phi dx \\
+ \;& \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \parallel \nabla\varphi_{L_0} \parallel_\infty^q \int_{B_{L_0}} a(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0-1})^q\phi dx + \mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_\infty \int_{B_{L_0}} a(x)\phi dx \\
\le \;& \theta_0^{p-1}\lambda_{1,B_{L_0}}(a)[\tilde{C}_{L_0} \parallel \varphi_{L_0}^{\theta_0} \parallel_{L^\infty(B_{L_0})}]^{p-1}\int_{B_{L_0}} a(x)\phi dx \\
+ \;& \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_\infty \parallel \nabla\varphi_{L_0} \parallel_\infty^q \parallel \varphi_{L_0}^{(\theta_0-1)q} \parallel_\infty \int_{B_{L_0}} a(x)\phi dx + \mu\left\|\frac{\beta}{a}\right\|_\infty \int_{B_{L_0}} a(x)\phi dx \\
< \;& \frac{\min\limits_{s\in(0,\delta]} h(s)}{12}\int_{B_{L_0}} a(x)\phi dx + \frac{\min\limits_{s\in(0,\delta]} h(s)}{12}\int_{B_{L_0}} a(x)\phi dx + \frac{\min\limits_{s\in(0,\delta]} h(s)}{12}\int_{B_{L_0}} a(x)\phi dx \\
= \;& \frac{\min\limits_{s\in(0,\delta]} h(s)}{4}\int_{B_{L_0}} a(x)\phi dx \le \int_{B_{L_0}} a(x)h_d(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx.
\end{aligned}$$

Logo, de (V_1) temos

$$-\Delta_p(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) \le a(x)h_d(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) + \mu V(x, \nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})) \text{ em } B_{L_0}.$$

Afirmação 3.3.1: $\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x) \le u_R(x)$, para quaisquer $x \in B_{L_0}$, $R > L_0$.

Verificação: Suponha, por contradição, que existam $x_0 \in B_{L_0}$ e $R_0 > L_0$ tais que $\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0) > u_{R_0}(x_0)$.

Considere o conjunto aberto não-vazio

$$A_{R_0,L_0} = \{x \in B_{L_0} : \tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x) > u_{R_0}(x)\} \subset\subset B_{L_0}.$$

e observe que, se $x \in A_{R_0,L_0}$, então $u_{R_0}(x) < \tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x) < s_1$ em A_{R_0,L_0}.

Assim, para cada $0 \leq \mu < \mu^*(\mathbb{R}^N)$ dado, temos

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_{R_0} &= g(x,u_{R_0}) + \lambda f(x,u_{R_0}) + \mu V(x,\nabla u_{R_0}) \\ &\geq a(x)h(u_{R_0}) + \mu V(x,\nabla u_{R_0}) \\ &> a(x)h_d(u_{R_0}) + \mu V(x,\nabla u_{R_0}) \text{ em } A_{R_0,L_0}. \end{aligned}$$

Agora, defina a função contínua $B(x,s,\xi) : A_{R_0,L_0} \times [0,s_1] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$B(x,s,\xi) := a(x)h_d(s) + \mu V(x,\xi),$$

e observe que

- B é decrescente em $s \in [0,s_1]$;
- $-\Delta_p(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) \leq B(x,\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0},\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}))$ em A_{R_0,L_0};
- $-\Delta_p u_{R_0} \geq B(x,u_{R_0},\nabla u_{R_0})$ em A_{R_0,L_0};
- $\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x) = u_{R_0}(x)$ em A_{R_0,L_0}.

  Assim, se ocorrer (a), temos que B satisfaz (B_1) do Teorema 1.5, se ocorrer (b), então B satisfaz (B_2) do Teorema 1.5 e, além disso,

- $\alpha(M,N) = \inf\limits_{0<s<M}\{-B(x,s+t,\xi) + B(x,s,\xi),\ 0 < t < N\} > 0$, em que os números Me N são tais que $M < s_1/4$ e $N < s_1/2$.

Portanto, pelo Teorema 1.5, concluímos que

$$\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x) \leq u_{R_0}(x) \text{ em } A_{R_0,L_0},$$

o que é um absurdo, donde segue que $A_{R_0,L_0} = \emptyset$.

Para concluir a verificação da Afirmação 3.3.1, basta demonstrar que $\alpha(M,N) > 0$, o que de fato ocorre, pois, desde que h_d é decrescente, temos, para quaisquer $0 < s < M$ e $0 < t < N$, que

$$\inf_s\{h_d(s) - h_d(s+\beta)\} > 0,\ 0 \leq s < s+\beta \leq s_1.$$

Como uma consequência da definição de B, temos

$$\begin{aligned} -B(x,s+t,\xi) + B(x,s,\xi) &= -a(x)h_d(s+t) - \mu V(x,\xi) + a(x)h_d(s) + \mu V(x,\xi) \\ &= a(x)[h_d(s) - h_d(s+t)] \geq \min_{\overline{B}_L} a(x)[h_d(s) - h_d(s+t)], \end{aligned}$$

donde segue que

$$\inf_s\{-B(x,s+t,\xi)+B(x,s,\xi)\} \geq \min_{\overline{B}_L} a(x) \inf_s\{h_d(s)-h_d(s+t)\} > 0$$

para quaisquer $0 < s < M,\ 0 < t < N$, pois $a > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Isto conclui a verificação da Afirmação 3.3.1.

Utilizando um argumento diagonal, mostra-se, como na prova do Teorema NL_0, que existe $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ com $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, $0 < \tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0} \leq u \leq v$ em $\mathbb{R}^N$ e, para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} [g(x,u)+\lambda f(x,u)+\mu V(x,\nabla u)]\phi dx.$$

Demonstração de (c): Defina as funções

$$\begin{aligned} \hat{h}(t) &= \inf\left\{\frac{h(s)}{s},\ 0 < s \leq t\right\},\ 0 < t < s_1, \\ \hat{l}(t) &= \inf\left\{\frac{l(s)}{s},\ 0 < s \leq t\right\},\ 0 < t < s_2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

e observe que

- $\hat{h}(t) \to h_0$ e $\hat{l}(t) \to l_0$, quando $t \to 0$,
- $\hat{h}$ e $\hat{l}$ são funções não-crescentes.

Verificação de (i) − (ii): Se $0 < l_0 < \infty$ (observe que se $l_0 = \infty$, o procedimento é análogo), para cada $\lambda > \lambda_* = \max\left\{0, \frac{3\theta_0\lambda_1(\rho)-h_0}{l_0}\right\}$ dado, temos

$$\lambda l_0 + h_0 > 3\theta_0\lambda_1(\rho).$$

É claro que existem $\sigma_1 = \sigma_1(\lambda)$ e $\delta_1 = \delta_1(\lambda,\sigma_1) > 0$ suficientemente pequenos e $L_1 > 0$ suficientemente grande, tais que

$$3\theta_0\lambda_{1,B_R}(\rho) < (\lambda l_0 + h_0) - 2\sigma_1, \quad \text{se } R \geq L_1, \tag{3.27}$$

e

$$\lambda\frac{l(s)}{s} + \frac{h(s)}{s} > (\lambda l_0 + h_0) - \sigma_1, \quad 0 < s \leq \delta_1. \tag{3.28}$$

Portanto, segue de (3.27) e (3.28) que

$$3\theta_0\lambda_{1,B_R}(\rho) < (\lambda l_0 + h_0) - \sigma_1 - \sigma_1 < \lambda\frac{l(s)}{s} + \frac{h(s)}{s} - \sigma_1,$$

para todo $R \geq L_1$ e $0 < s \leq \delta_1$. Em particular, vale a desigualdade

$$\begin{aligned} 3\theta_0\lambda_{1,B_R}(\rho) &\leq \lambda \inf\left\{\frac{l(s)}{s},\ 0 < s \leq \delta_1 < s_2\right\} + \inf\left\{\frac{h(s)}{s},\ 0 < s \leq \delta_1 < s_1\right\} - \sigma_1 \\ &= \lambda\hat{l}(\delta_1) + \hat{h}(\delta_1) - \sigma_1 < \lambda\hat{l}(\delta_1) + \hat{h}(\delta_1). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Agora, dado $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*]$, defina

$$\mu^*(\mathbb{R}^N) = \mu^*_\lambda(\mathbb{R}^N) = \left\{\frac{\lambda l_0}{2\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \lim\limits_{R\to\infty} \parallel \nabla\varphi_R \parallel^q_{L^\infty(B_R)}}\right\} > 0.$$

Assim, para cada $0 \leq \mu < \mu^*(\mathbb{R}^N))$ dado, existem $\delta_2, \sigma_2 > 0$ suficientemente pequenos e $L_2 > 0$ suficientemente grande, tais que

$$\lambda l_0 - 2\sigma_2 > 2\mu\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \lim_{R\to\infty} \parallel \nabla\varphi_R \parallel^q_{L^\infty(B_R)} .$$

e

$$\lambda\frac{l(s)}{s} > \lambda l_0 - \sigma_2, \quad 0 < s \leq \delta_2.$$

Portanto, destas relações segue que

$$2\mu\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \parallel \nabla\varphi_R \parallel^q_{L^\infty(B_R)} < \lambda l_0 - \sigma_2 - \sigma_2 < \lambda\frac{l(s)}{s} - \sigma_2,$$

para todo $R \geq L_2$ e $0 < s \leq \delta_2$. Em particular, vale a desigualdade

$$\begin{aligned} 2\mu\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{d}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \parallel \nabla\varphi_R \parallel^q_{L^\infty(B_R)} &\leq \lambda \inf\left\{\frac{l(s)}{s},\ 0 < s \leq \delta_2 < s_2\right\} - \sigma_2 \\ &= \lambda\hat{l}(\delta_2) - \sigma_2 < \lambda\hat{l}(\delta_2). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Observe que, para cada $R > L_2$ e $0 \leq \mu < \mu^*(\mathbb{R}^N)$, temos que $0 \leq \mu < \mu^*(B_R)$, em que $\mu^*(B_R)$ foi dado em (2.80).

Em qualquer dos casos, tomando $L_0 = \max\{L_1, L_2\}$, $\epsilon_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, s_1, s_2\}$ e fixando $\tilde{C}_{L_0} = \tilde{C}_{L_0}(\epsilon_0) \in (0, C_{L_0})$ tal que $\tilde{C}_{L_0} \parallel \varphi_{L_0}^{\theta_0} \parallel^q_{L^\infty(B_{L_0})} < \epsilon_0$, segue, de (3.29) e (3.30), para cada $\phi \in C_0^\infty(B_{L_0}),\ \phi \geq 0$, que

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_{L_0}} \nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu \int_{B_{L_0}} \alpha(x)|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})|^q \phi dx \\
\leq\ & \theta_0 \lambda_{1,B_{L_0}}(\rho) \int_{B_{L_0}} \rho(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx + \mu\theta_0^q \left\| \frac{\alpha}{d} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \parallel \nabla\varphi_{L_0} \parallel_{L^\infty(B_{L_0})}^q \int_{B_{L_0}} d(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx \\
<\ & \frac{1}{3}\int_{B_{L_0}} [\lambda\hat{l}(\delta_1) + \hat{h}(\delta_1)]\rho(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx + \frac{\lambda}{2}\int_{B_{L_0}} \hat{l}(\delta_2) d(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx.
\end{aligned}
$$

Desde que $\tilde{C}_{L_0} \parallel \varphi_{L_0}^{\theta_0} \parallel_{L^\infty(B_{L_0})}^q < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $\hat{h}, \hat{l}$ são não-crescentes, segue que

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_{L_0}} \nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu \int_{B_{L_0}} \alpha(x)|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})|^q \phi dx \\
<\ & \frac{\lambda}{3}\int_{B_{L_0}} \hat{l}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) d(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx + \frac{1}{3}\int_{B_{L_0}} \hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) a(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx \\
+\ & \frac{\lambda}{2}\int_{B_{L_0}} \hat{l}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) d(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx \\
<\ & \lambda\int_{B_{L_0}} d(x)\hat{l}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx + \int_{B_{L_0}} a(x)\hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx.
\end{aligned}
$$

Logo, em B_{L_0}, temos

$$
-\Delta(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) < a(x)\hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) + \lambda d(x)\hat{l}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) - \mu\alpha(x)|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})|^q. \tag{3.31}
$$

Sabemos que $\varphi_{L_0} \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_{L_0}), \alpha \in (0,1)$ e, por hipótese, $\rho \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_{L_0})$, então de $-\Delta\varphi_{L_0} = \lambda\rho(x)\varphi_{L_0}$, segue pelo Teorema de Schauder que $\varphi_{L_0} \in C^{2,\alpha}(B_{L_0})$.

Como $\theta_0 > 1$ e $\varphi_{L_0} > 0$ em B_{L_0}, concluímos que $\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0} \in C^2(B_{L_0})$.

Do Teorema DL$_-$, temos que $u_R \in C^1(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$. Como $f, g \in C_{loc}^{0,\alpha}(B_R \times (0,\infty))$ e $V \in C_{loc}^{0,\alpha}(B_R \times \mathbb{R}^N)$, temos que

$$
-\triangle u_R = g(x, u_R) + \lambda f(x, u_R) + \mu V(x, \nabla u_R) := G(x) \in L_{loc}^\infty(B_R).
$$

Pelo Teorema B.2 [45], segue que $u_R \in W_{loc}^{2,p}(B_R),\ 1 < p < \infty$ e, pela imersão de Sobolev, $u_R \in C_{loc}^{1,\alpha}(B_R),\ \alpha \in (0,1)$. Logo, $G(x) \in C_{loc}^{0,\alpha}(B_R)$, donde segue que $G(x) \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_{L_0})$, se $R > L_0$. Pelo Teorema de Schauder, $u_R \in C^{2,\alpha}(B_{L_0})$.

Desta análise, concluímos que $\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}, u_R \in C^2(B_{L_0}),\ R > L_0$, o que nos permitirá utilizar um argumento pontual na verificação da afirmação abaixo.

<u>Afirmação 3.3.2:</u> $\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x) \leq u_R(x),\ x \in B_{L_0},\ R > L_0$.

Verificação: Suponha, por contradição, que existam $x_0 \in B_{L_0}$ e $R_0 > L_0$ tais que

$$\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0) > u_{R_0}(x_0), \tag{3.32}$$

isto é, $\ln(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)) > \ln(u_{R_0}(x_0))$. Desde que

$$\lim_{|x|\to L_0}\{\ln(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x)) - \ln(u_{R_0}(x))\} < 0,$$

temos que existe e é positivo o

$$\sup_{x\in B_{L_0}}\{\ln(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x)) - \ln(u_{R_0}(x))\}.$$

Sem perda de generalidade, suponha que tal supremo seja atingido em x_0, isto é,

$$\frac{\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))}{\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)} = \frac{\nabla(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} \quad \text{e} \quad \triangle\{\ln(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)) - \ln(u_{R_0}(x_0))\} \leq 0, \tag{3.33}$$

o que, de (3.33), (3.31) e do Teorema DL$_-$, nos dá

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\frac{|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))|^2}{(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))^2} + \frac{\triangle(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))}{\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)} + \frac{|\nabla(u_{R_0}(x_0))|^2}{(u_{R_0}(x_0))^2} - \frac{\triangle(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} \\
&= \frac{\triangle(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))}{\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)} - \frac{\triangle(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} \\
&> -a(x_0)\hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)) - \lambda d(x_0)\hat{l}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)) + \frac{\mu\alpha(x_0)|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))|^q}{(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))} \\
&+ \frac{g(x_0, u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} + \frac{\lambda f(x_0, u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} + \frac{\mu V(x_0, \nabla(u_{R_0}(x_0)))}{u_{R_0}(x_0)}.
\end{aligned}$$

Por $(V_1), (F)(i)$ e $(G)(i)$, reescrevemos a desigualdade anterior como

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{\triangle(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))}{\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)} - \frac{\triangle(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} \\
&> -a(x_0)\hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)) - \lambda d(x_0)\hat{l}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)) + \frac{\mu\alpha(x_0)|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))|^q}{\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)} \\
&+ a(x_0)\frac{h(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} + \lambda d(x)\frac{l(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} - \frac{\mu\alpha(x_0)|\nabla(u_{R_0}(x_0))|^q}{u_{R_0}(x_0)}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Desde que $q \geq 1$, então $[\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)]^{q-1} \geq [u_{R_0}(x_0)]^{q-1}$, pela hipótese de contradição.

Assim de (3.33), temos

$$\frac{|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))|^q}{\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)} = \frac{|\nabla(u_{R_0}(x_0))|^q}{[u_{R_0}(x_0)]^q}\frac{[\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)]^q}{\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)} \geq \frac{|\nabla(u_{R_0}(x_0))|^q}{u_{R_0}(x_0)}. \tag{3.35}$$

Usando (3.35), (3.32), (3.26) e a monotonicidade de $\hat{h}$ e $\hat{l}$ em (3.34), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\triangle(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))}{\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0)} - \frac{\triangle(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} \\ &> a(x_0)\left[\frac{h(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} - \hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))\right] + \lambda d(x)\left[\frac{l(u_{R_0}(x_0))}{u_{R_0}(x_0)} - \hat{l}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))\right] \\ &\geq a(x_0)[\hat{h}(u_{R_0}(x_0)) - \hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))] + \lambda d(x)[\hat{l}(u_{R_0}(x_0)) - \hat{l}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x_0))] \geq 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Se $l_0 = \infty$ então, relembrando as definições de λ_* e $\mu^*_{\mathbb{R}^N}$ mostramos, de maneira análoga, que as relações (3.29) e (3.30) permanecem válidas, para todo $\lambda, \mu > 0$.

Verificação de (iii)**:** De maneira semelhante à demonstração de (3.29), existem números positivos $\delta_1, \delta_2, L_1, L_2 > 0$ tais que

$$3\theta_0\lambda_{1,B_R}(\rho) < \hat{h}(\delta_1),\ R \geq L_1 \text{ e } 0 < s \leq \delta_1, \tag{3.36}$$

e

$$2\mu\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \lim_{R\to\infty} \|\nabla\varphi_R\|^q_{L^\infty(B_R)} < \hat{h}(\delta_2),\ R \geq L_2 \text{ e } 0 < s \leq \delta_2, \tag{3.37}$$

em que $0 \leq \mu < \mu^*(\mathbb{R}^N)$, com

$$\mu^*_{\mathbb{R}^N} = \left\{\frac{h_0}{2\theta_0^q \left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \lim_{R\to\infty} \|\nabla\varphi_R\|^q_{L^\infty(B_R)}}\right\}.$$

Tomando L_0, ϵ_0 e $\tilde{C}_{L_0}$ como no caso anterior, obtemos, para cada $\phi \in C_0^\infty(B_{L_0}),\ \phi \geq 0,$

que

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_{L_0}} \nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\nabla\phi dx + \mu\int_{B_{L_0}} \alpha(x)|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})|^q\phi dx \\
\leq\ & \theta_0\lambda_{1,B_{L_0}}(\rho)\int_{B_{L_0}} \rho(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx + \mu\theta_0^q\left\|\frac{\alpha}{a}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \| \nabla\varphi_{L_0} \|_{L^\infty(B_{L_0})}^q \int_{B_{L_0}} a(x)(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx \\
<\ & \frac{1}{3}\int_{B_{L_0}} a(x)\hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx + \frac{1}{2}\int_{B_{L_0}} a(x)\hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx \\
<\ & \int_{B_{L_0}} a(x)\hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})\phi dx,
\end{aligned}
$$

em que usamos, nas desigualdades anteriores, (3.36) e (3.37).

Assim,

$$-\Delta(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) < a(x)\hat{h}(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}) - \mu\alpha(x)|\nabla(\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0})|^q \text{ em } B_{L_0}.$$

De maneira análoga ao caso anterior, mostra-se que

$$\tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0}(x) \leq u_R(x), \text{ para quaisquer } x \in B_{L_0},\ R > L_0.$$

Utilizando um argumento diagonal , como na prova do Teorema NL_0, construímos uma função $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ com $0 < \tilde{C}_{L_0}\varphi_{L_0}^{\theta_0} \leq u \leq v$ em $\mathbb{R}^N$, satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} [g(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu V(x,\nabla u)]\phi dx,\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Em particular. $0 < u < t_0$ e $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. $\square$

Capítulo 4

Apêndice

Neste Capítulo apresentaremos as demonstrações da maioria das afirmações e observações feitas e não verificadas nos capítulos anteriores.

Iniciaremos estas demonstrações pela Observação 0.1 feita na introdução deste trabalho.

1. $(K)_{0,t_0}$ ocorre se, e somente se, $k_0 < \dfrac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}}$.

   De fato, se $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{k(s)}{s^{p-1}} < \dfrac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}}$, temos que existe $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}} + k_0\right], \ s \in (0, t_0).$$

   Daí,

$$\sup_{(0,t_0)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}} + k_0\right] < \frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}}, \text{ que é } (K)_{0,t_0}.$$

   Por outro lado, de $(K)_{0,t_0}$ segue que

$$k_0 = \lim_{s\to 0} \frac{k(s)}{s^{p-1}} \leq \sup_{(0,t_0)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}}.$$

2. $(K)_{s_0,\infty}$ ocorre se, e somente se, $k_\infty < \dfrac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}}$.

De fato, se $\lim_{s\to\infty} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}}$, temos que existe $s_0 > 0$ tal que

$$\frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}} + k_\infty\right], \; s \in (s_0, \infty).$$

Daí,

$$\sup_{(s_0,\infty)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}} + k_\infty\right] < \frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}}, \text{ que é } (K)_{s_0,\infty}.$$

Por outro lado, de $(K)_{s_0,\infty}$ segue que

$$k_\infty = \lim_{s\to\infty} \frac{k(s)}{s^{p-1}} \leq \sup_{(s_0,\infty)} \frac{k(s)}{s^{p-1}} < \frac{1}{\| \omega_M \|_\infty^{p-1}}.$$

Passemos agora às Afirmações feitas no Capítulo 2, seção 2.1.

<u>Afirmação 2.1.2</u>:

(i) $H_{\lambda,\gamma} \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$;

(ii) $\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s) \leq [H_{\lambda,\gamma}(s)]^{p-1}$;

(iii) $\frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s}$ é não-crescente em s, $s > 0$;

(iv) $\lim_{s\to\infty} \frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s} = (I_k(\gamma) + \lambda I_j(\gamma))^{\frac{1}{p-1}}$.

Demonstração. **(i)**

$$\frac{d}{ds}H_{\lambda,\gamma}(s) = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt}\right] = \frac{2s\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt - s^2\frac{s}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)^{\frac{1}{p-1}}}}{\left[\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\right]^2}.$$

Desde que as funções envolvidas nesta expressão são contínuas, $d/dsH_{\lambda,\gamma}(s)$ é contínua, donde segue que $H_{\lambda,\gamma} \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$.

(ii) Da Afirmação 2.1.1(i), segue que

$$H_{\lambda,\gamma}(s) = \frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt} \geq \frac{s^2}{\frac{s}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)^{\frac{1}{p-1}}}s} = \hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Logo, $[H_{\lambda,\gamma}(s)]^{p-1} \geq \hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)$.

(iii) Novamente da Afirmação 2.1.1(i), segue que

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s}\right] \leq \frac{\dfrac{s}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)^{\frac{1}{p-1}}}s - s\dfrac{s}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)^{\frac{1}{p-1}}}}{\left[\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\right]^2} = 0.$$

(iv) Por um lado, da Afirmação 2.1.1(i),(iii), temos que

$$\lim_{s\to\infty}\frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s} \geq \lim_{s\to\infty}\frac{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(s)^{\frac{1}{p-1}}}{s} = [I_k(\gamma)+\lambda I_j(\gamma)]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Por outro lado, para $\beta \in (0,1)$ dado arbitrariamente segue, da Afirmação 2.1.1(iii), que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}\frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s} &\leq \lim_{s\to\infty}\frac{s}{\displaystyle\int_{\beta s}^s \frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt} \\ &\leq \lim_{s\to\infty}\frac{s}{\dfrac{\beta s}{[\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(\beta s)]^{\frac{1}{p-1}}}s(1-\beta)} = \frac{[I_k(\gamma)+\lambda I_j(\gamma)]^{\frac{1}{p-1}}}{(1-\beta)}.\end{aligned}$$

Daí,

$$[I_k(\gamma)+\lambda I_j(\gamma)]^{\frac{1}{p-1}} \leq \lim_{s\to\infty}\frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s} \leq \frac{[I_k(\gamma)+\lambda I_j(\gamma)]^{\frac{1}{p-1}}}{(1-\beta)}.$$

Como $\beta \in (0,1)$ foi tomado arbitrariamente,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{H_{\lambda,\gamma}(s)}{s} = [I_k(\gamma)+\lambda I_j(\gamma)]^{\frac{1}{p-1}}.$$

□

Afirmação 2.1.3:

(i) $\displaystyle\lim_{\gamma\to\infty}\Gamma_\lambda(\gamma) = \frac{1}{(k_\infty+\lambda j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}}$;

(ii) $\displaystyle\lim_{\gamma\to 0}\Gamma_\lambda(\gamma) = \frac{1}{(k_0+\lambda j_0)^{\frac{1}{p-1}}}$;

(iii) Γ_λ é decrescente em λ.

Demonstração. **(i)** Para $\beta \in (0,1)$ dado arbitrariamente, das Afirmações 2.1.1(i) e

2.1.2(iii), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to\infty}\Gamma_\lambda(\gamma) &\geq \lim_{\gamma\to\infty}\left(\frac{1}{\gamma}\int_{\beta\gamma}^{\gamma}\frac{t}{H_{\lambda,\gamma}(t)}dt\right) \geq \lim_{\gamma\to\infty}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\beta\gamma}{H_{\lambda,\gamma}(\beta\gamma)}\gamma(1-\beta)\right)\\
&= \lim_{\gamma\to\infty}\frac{(1-\beta)}{\beta\gamma}\int_0^{\beta\gamma}\frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt \geq \lim_{\gamma\to\infty}\frac{(1-\beta)}{\beta\gamma}\int_{\beta^2\gamma}^{\beta\gamma}\frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\\
&\geq \lim_{\gamma\to\infty}\left[\frac{(1-\beta)}{\beta\gamma}\frac{\beta^2\gamma}{[\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(\beta^2\gamma)]^{\frac{1}{p-1}}}\beta\gamma(1-\beta)\right].
\end{aligned}$$

De (2.3)-(2.6), segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to\infty}\Gamma_\lambda(\gamma) &\geq \lim_{\gamma\to\infty}\frac{(1-\beta)^2\beta^2\gamma}{[(\beta^2\gamma)^{p-1}\hat{\zeta}_{k,\gamma}(\beta^2\gamma)+\lambda(\beta^2\gamma)^{p-1}\hat{\zeta}_{j,\gamma}(\beta^2\gamma)]^{\frac{1}{p-1}}}\\
&= \lim_{\gamma\to\infty}\frac{(1-\beta)^2}{\left[\sup\left\{\frac{\zeta_{k,\gamma}(t)}{t^{p-1}},\quad t>\beta^2\gamma\right\}+\lambda\sup\left\{\frac{\zeta_{j,\gamma}(t)}{t^{p-1}},\quad t>\beta^2\gamma\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}}\\
&= \frac{(1-\beta)^2}{(k_\infty+\lambda j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, das Afirmações 2.1.2(iii), 2.1.1(i) e das definições (2.3)-(2.6), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to\infty}\Gamma_\lambda(\gamma) &\leq \lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{\gamma}\frac{\gamma}{H_{\lambda,\gamma}(\gamma)}\gamma = \lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma}\frac{t}{\hat{\zeta}_{\lambda,\gamma}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\\
&\leq \lim_{\gamma\to\infty}\frac{\gamma}{\gamma\hat{\zeta}_{k,\gamma}(\gamma)^{\frac{1}{p-1}}+\lambda^{\frac{1}{p-1}}\gamma\hat{\zeta}_{j,\gamma}(\gamma)^{\frac{1}{p-1}}}\\
&= \lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{\left[\sup\left\{\frac{\zeta_{k,\gamma}(t)}{t^{p-1}},\quad t>\gamma\right\}+\lambda\sup\left\{\frac{\zeta_{j,\gamma}(t)}{t^{p-1}},\quad t>\gamma\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}}\\
&= \frac{1}{(k_\infty+\lambda j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{(1-\beta)^2}{(k_\infty+\lambda j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}} \leq \lim_{\gamma\to\infty}\Gamma_\lambda(\gamma) \leq \frac{1}{(k_\infty+\lambda j_\infty)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Fazendo $\beta\to 0$, segue o afirmado.

(ii) Analogamente ao feito no item (i),

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to 0}\Gamma_\lambda(\gamma) &\geq \lim_{\gamma\to 0}\frac{(1-\beta)^2}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}},\ \beta^2\gamma<t\leq\gamma\right\}+\lambda\sup\left\{\frac{j(t)}{t^{p-1}},\ \beta^2\gamma<t\leq\gamma\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}}\\ &= \frac{(1-\beta)^2}{(k_0+\lambda j_0)^{\frac{1}{p-1}}}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to 0}\Gamma_\lambda(\gamma) &\leq \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\left[\sup\left\{\frac{k(t)}{t^{p-1}},\ \gamma<t\leq\gamma\right\}+\lambda\sup\left\{\frac{j(t)}{t^{p-1}},\ \gamma<t\leq\gamma\right\}\right]^{\frac{1}{p-1}}}\\ &= \frac{1}{(k_0+\lambda j_0)^{\frac{1}{p-1}}}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{(1-\beta)^2}{(k_0+\lambda j_0)^{\frac{1}{p-1}}}\leq\lim_{\gamma\to 0}\Gamma_\lambda(\gamma)\leq\frac{1}{(k_0+\lambda j_0)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Fazendo $\beta\to 0$, segue o afirmado.

(iii) Segue diretamente das definições das funções envolvidas. □

Afirmação 2.1.5:

(i) $[\bar{a},\|\omega\|_\infty]+\bar{a}\subset \mathrm{Im}(\eta_\lambda)$;

(ii) $\eta_\lambda\in C^2((0,\infty),\mathrm{Im}(\eta_\lambda))$ é crescente em $s>0$;

(iii) $\eta_\lambda^{-1}:=\psi_\lambda\in\ C^2((\mathrm{Im}(\eta_\lambda)\backslash\{0\},(0,\infty))$ é crescente em $s>0$;

(iv) $\psi_\lambda'(s)=\dfrac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(s))}{\psi_\lambda(s)},\ s>0$;

(v) η_λ é decrescente em $\lambda>0$.

Demonstração. As verificações dos itens (i), (iii) e (v) são imediatas. Vamos então mostrar os itens (ii) e (iv).

(ii) Da Afirmação 2.1.2(i), temos que $H_{\lambda,\gamma_0}\in C^1((0,\infty),(0,\infty))$, donde segue que $\eta_\lambda\in C^2((0,\infty),\mathrm{Im}(\eta_\lambda))$.

Além disso,

$$\frac{d}{ds}\eta_\lambda(s)=\frac{1}{\gamma_0}\frac{s}{H_{\lambda,\gamma_0}(s)}>0,\ s>0.$$

(iv) Por definição, temos

$$\eta_\lambda(\psi_\lambda(s)) = \frac{1}{\gamma_0}\int_0^{\psi_\lambda(s)} \frac{t}{H_{\lambda,\gamma_0}(t)}dt = s,$$

donde segue que

$$\frac{d}{ds}\eta_\lambda(\psi_\lambda(s)) = \frac{1}{\gamma_0}\frac{\psi_\lambda(s)}{H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(s))}\psi'_\lambda(s) = 1.$$

Desta forma,

$$\psi'_\lambda(s) = \frac{\gamma_0 H_{\lambda,\gamma_0}(\psi_\lambda(s))}{\psi_\lambda(s)}.$$

□

Afirmação 2.1.6: $[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-1}\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. De fato, desde que $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$, $\omega_M > 0$ em Ω e $\omega_M = 0$ em $\partial\Omega$, temos que

$$0 < \bar{a} \leq \omega_M(x) + \bar{a} \leq \|\omega_M\|_\infty + \bar{a} \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}. \tag{4.1}$$

Da Afirmação 2.1.5(i) e (iii), temos que $\psi_\lambda \in C^2(\mathrm{Im}(\eta_\lambda)\backslash\{0\}, (0,\infty))$ e $[\bar{a}, \|\omega_M\|_\infty + \bar{a}] \subset \mathrm{Im}(\eta_\lambda)$, donde segue que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|\psi'_\lambda(t)| \leq C_1, \quad \forall\ t \in [\bar{a}, \|\omega_M\|_\infty + \bar{a}]. \tag{4.2}$$

Se $x \in \overline{\Omega}$, por (4.1) e (4.2), temos que $|\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})|^{p-1} \leq C_1^{p-1}$, o que nos dá

$$[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-1}\phi \ \in \ L^\infty(\Omega).$$

Além disso,

$$\nabla\{[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-1}\phi\} = [\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-1}\nabla\phi + \phi\nabla\{[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-1}\}.$$

Veja que, pelo argumento utilizado acima, $[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-1}\nabla\phi \ \in \ L^\infty(\Omega)$. Por outro lado,

$$\phi\nabla\{[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-1}\} = \phi(p-1)[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-2}\psi''_\lambda(\omega_M + \bar{a})\nabla\omega_M.$$

Temos duas situações a considerar:

- se $p \geq 2$, pelo argumento anterior temos que $\phi(p-1)[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-2}\psi''_\lambda(\omega_M + \bar{a}) \in L^\infty(\Omega)$. Como $\nabla\omega_M \ \in \ L^p(\Omega)$, segue que

$$\phi(p-1)[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-2}\psi''_\lambda(\omega_M + \bar{a})\nabla\omega_M \ \in \ L^p(\Omega).$$

- se $1 < p < 2$, temos que existe uma constante $C_3 > 0$ tal que $|\psi'_\lambda(t)| > C_3 > 0$ em $0 < \bar{a} \leq t \leq \|\omega_M\| + \bar{a}$, donde segue que $|\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})| > C_3, \quad \forall\ x \in \overline{\Omega}$.

  Agora, como $\psi''_\lambda(t)$ é contínua em $0 < \bar{a} \leq t \leq \|\omega_M\| + \bar{a}$, existe uma constante $C_4 > 0$ tal que
$$|\psi''_\lambda(t)| \leq C_4, \quad 0 < \bar{a} \leq t \leq \|\omega_M\| + \bar{a}.$$

  Por (4.1), $|\psi''_\lambda(\omega_M + \bar{a})| \leq C_4, \quad \forall\ x \in \overline{\Omega}$.

  Assim, $\{\phi(p-1)[\psi'_\lambda(\omega_M+\bar{a})]^{p-2}\psi''_\lambda(\omega_M+\bar{a})\} \in L^\infty(\Omega)$ e, desde que $|\nabla\omega_M| \in L^p(\Omega)$, segue que
$$|\phi(p-1)[\psi'_\lambda(\omega_M + \bar{a})]^{p-2}\psi''_\lambda(\omega_M + \bar{a})\nabla\omega_M| \quad \in \quad L^p(\Omega).$$

□

Afirmação 2.1.8:

(i) $\hat{F}_\epsilon$ é Carathéodory;

(ii) v_σ e $C\varphi$ são, respectivamente, supersolução e subsolução de (2.30);

(iii) $|\hat{F}_\epsilon(x,s)| \leq C(|s|)$ para alguma função crescente $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Demonstração. **(iii)** *Primeiro caso*: $s \geq \|v_\sigma\|_\infty := \max v_\sigma(x),\ x \in \overline{\Omega}$.

Neste caso, temos
$$s \geq \|v_\sigma\|_\infty \geq v_\sigma(x) \Rightarrow \hat{F}_\epsilon(x,s) := g(x, v_\sigma + \epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma + \epsilon).$$

Desde que $g(x, s+\epsilon)$ e $f(x, s+\epsilon)$ são contínuas no compacto $\overline{\Omega} \times [0, \|v_\sigma\|_\infty]$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que
$$|\hat{F}_\epsilon(x,s)| := |g(x, v_\sigma + \epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma + \epsilon)| \leq C_1, \quad \forall\ s \geq \|v_\sigma\|_\infty.$$

Segundo caso: $0 \leq s \leq \|v_\sigma\|_\infty$.

Neste caso, podemos ter duas situações:

(i) $0 \leq s < v_\sigma(x) \Longrightarrow \hat{F}_\epsilon(x,s) := g(x, s+\epsilon) + \lambda f(x, s+\epsilon)$.

Daí, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que
$$|\ \hat{F}_\epsilon(x,s)\ | := |\ g(x, s+\epsilon) + \lambda f(x, s+\epsilon)\ | \leq C_2, \quad \forall\ s < v_\sigma(x),$$
desde que $g(x, s+\epsilon)$ e $f(x, s+\epsilon)$ são contínuas no compacto $\overline{\Omega} \times [0, \|v_\sigma\|_\infty]$.

(ii) $v_{\bar{a}}(x) \leq s \leq \|v_\sigma\|_\infty \Longrightarrow \hat{F}_\epsilon(x,s) := g(x, v_\sigma + \epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma + \epsilon)$.

Daí, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$|\hat{F}_\epsilon(x,s)| := |g(x, v_\sigma + \epsilon) + \lambda f(x, v_\sigma + \epsilon)| \leq C_3, \quad \forall\ s \in [v_\sigma(x), \|v_\sigma\|_\infty].$$

Portanto, tomando $\tilde{C} = \min\{C_1, C_2, C_3\}$, temos que $|\hat{F}_\epsilon(x,s)| \leq \tilde{C} \leq \tilde{C} + |s|$, $\forall\ s \geq 0$. $\square$

Afirmação 2.1.9:

(i) $\displaystyle\int_{\Omega_k} |\nabla u^k_{\sigma,n}|^{p-2}\nabla u^k_{\sigma,n}\nabla\phi dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega_k} |\nabla u^k_\sigma|^{p-2}\nabla u^k_\sigma \nabla\phi dx,$

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega_k} [g(x, u^k_{\sigma,n} + \frac{1}{n}) + \lambda f(x, u^k_{\sigma,n} + \frac{1}{n})]\phi dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega_k} [g(x, u^k_\sigma) + \lambda f(x, u^k_\sigma)]\phi dx.$

Demonstração. **(i)** Com efeito, de (2.32), temos que $\|\nabla u^k_{\sigma,n} - \nabla u^k_\sigma\|_{C(\overline{\Omega}_k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Logo, para cada $x \in \Omega_k$, obtemos

$$(|\nabla u^k_{\sigma,n}|^{p-2}\nabla u^k_{\sigma,n}\nabla\phi)(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (|\nabla u^k_\sigma|^{p-2}\nabla u^k_\sigma\nabla\phi)(x).$$

Além disso, por (2.31) segue que

$$\begin{aligned} \big||\nabla u^k_{\sigma,n}|^{p-2}\nabla u^k_{\sigma,n}\nabla\phi\big| &\leq |\nabla u^k_{\sigma,n}|^{p-2}|\nabla u^k_{\sigma,n}||\nabla\phi| \\ &\leq (\max_{\overline{\Omega}_k}|\nabla u^k_{\sigma,n}|^{p-1})|\nabla\phi| \ \leq C_k^{p-1}|\nabla\phi| \in L^1(\Omega_k). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (i).

(ii) Desde que g e f são contínuas em $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$, de (2.32) segue que, para cada $x \in \Omega_k$,

$$[g(x, u^k_{\sigma,n}(x) + 1/n) + \lambda f(x, u^k_{\sigma,n}(x) + 1/n)]\phi(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} [g(x, u^k_\sigma(x) + \lambda f(x, u^k_\sigma(x))]\phi(x).$$

Desde que $u^k_{\sigma,n}$ é limitada em $\overline{\Omega}_k$, b, c e k, j são contínuas, segue de $(G)(i)$ e $(F)(i)$ que

$$\begin{aligned} &\big|[g(x, u^k_{\sigma,n}(x) + 1/n) + \lambda f(x, u^k_{\sigma,n}(x) + 1/n)]\phi(x)\big| \\ \leq\ & |b(x)k(u^k_{\sigma,n}(x) + 1/n)| + \lambda|c(x)j(u^k_{\sigma,n} + 1/n)]||\phi(x)| \leq C|\phi(x)| \in L^1(\Omega_k). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (ii). $\square$

Passemos agora à demonstração das Afirmações feitas na seção 2.2.

Afirmação 2.2.4: $\{\theta_0^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0 - 1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\tau\phi\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. De fato, desde que $\omega_M \in C^1(\overline{\Omega})$, $\omega_M > 0$ em Ω e $\omega_M = 0$ em $\partial\Omega$, temos que

$$0 < \sigma \leq \omega_M(x) + \sigma \leq \|\omega_M\|_\infty + \sigma, \quad \forall\ x \in \overline{\Omega}. \tag{4.3}$$

Sabemos que $\psi_\lambda \in C^2(\mathrm{Im}(\eta_\lambda)\backslash\{0\}, (0,\infty))$ e $[\sigma, \|\omega_M\|_\infty + \sigma] \subset \mathrm{Im}(\eta_\lambda)$, donde segue que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|\psi_\lambda(t)| > C_1 \quad \text{e} \quad |\psi'_\lambda(t)| \leq C_2 \text{ em } 0 < \sigma \leq t \leq \|\omega_M\| + \sigma.$$

Assim sendo, se $x \in \overline{\Omega}$, por (4.3) e de $\theta_0 < 1$, temos que

$$|\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)| > C_1,\ i.e,\ |\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)|^{(\theta_0-1)(p-1)} < C_1^{(\theta_0-1)(p-1)}$$

e $|\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)|^{p-1} \leq C_2^{p-1}$.

Logo,

$$\{\theta_0^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\tau\phi\} \ \in \ L^\infty(\Omega).$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} & \nabla\{\theta_0^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\tau\phi\} \\ = \ & \theta_0^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\nabla(\tau\phi) \\ + \ & \theta_0^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}\tau\phi\nabla\{[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\} \\ + \ & \theta_0^{p-1}[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\tau\phi\nabla\{[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}\}. \end{aligned}$$

Veja que, pelo argumento utilizado na demonstração da Afirmação 2.1.6, temos que

$$\{\theta_0^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M)]^{(\theta_0-1)(p-1)}[\psi'_\lambda(\omega_M)]^{p-1}\nabla(\tau\phi)\} \ \in \ L^\infty(\Omega)$$

e, além disso,

$$\theta_0^{p-1}[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}\tau\phi\nabla\{[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\} \ \in \ L^\infty(\Omega).$$

Veja agora que

$$\begin{aligned} & \theta_0^{p-1}[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\tau\phi\nabla\{[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}\} \\ = \ & \theta_0^{p-1}[\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{p-1}\tau\phi(\theta_0 - 1)(p-1)[\psi_\lambda(\omega_M + \sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)-1}\psi'_\lambda(\omega_M + \sigma)\nabla\omega_M. \end{aligned}$$

Como $\theta_0 < 1$, temos que $(\theta_0 - 1)(p-1) - 1 < 0$ para qualquer $1 < p < N$. Desde que $\nabla\omega_M \in L^p(\Omega)$, utilizando novamente o argumento empregado na verificação da Afirmação

2.1.6, concluímos que

$$\theta_0^{p-1}[\psi_\lambda'(\omega_M+\sigma)]^{p-1}\tau\phi\nabla\{[\psi_\lambda(\omega_M+\sigma)]^{(\theta_0-1)(p-1)}\} \in \ L^\infty(\Omega).$$

□

Afirmação 2.2.6:

(i) $\hat{G}_\epsilon$ é Carathéodory;

(ii) Existe um função crescente $D(.)$ tal que $|\hat{G}_\epsilon(x,s,\xi)| \leq D(|s|)(1+|\xi|^p), \ x \in \Omega.$

Demonstração. **(ii)** Na verificação da Afirmação 2.1.8(ii), foi mostrado que existe $C > 0$ constante tal que

$$|\ \hat{F}_\epsilon(x,s)\ | \leq \tilde{C}, \quad \forall\ s \geq 0.$$

Temos, então, para constantes $\tilde{C}, \hat{C}, C > 0$, que

$$\begin{aligned} |\ \hat{G}_\epsilon(x,s,\xi)\ | &\leq\ |\ \hat{F}_\epsilon(x,s)\ | + \mu\ |\ V(x,\xi)\ | \leq \tilde{C} + \mu[\alpha(x)\ |\ \xi\ |^q + \beta(x)] \\ &\leq\ \tilde{C} + \mu \max_{x\in\overline{\Omega}}\{\alpha(x),\beta(x)\}(|\ \xi\ |^q + 1) \leq \tilde{C} + \hat{C}(|\ \xi\ |^p + 1) \\ &\leq\ \max\{\hat{C}, \hat{C}+\tilde{C}\}(|\xi|^p+1) \leq (C+|s|)(|\xi|^p+1). \end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C. O., Carrião, P. C. and Faria, L. F. O.; *Existence of solutions to singular elliptic equations with convection terms via the galerkin method*; El. Journal Diff. Eq. 12 (2010) 1-12.

[2] Anane, A.; *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris t.305 Série I (1987) 725-728.

[3] Boccardo, L., Murat, F. and Puel, J. P.; *Resultats d'existence pour certains problemes elliptiques quasilineaires*, Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa 2 (1984) 213-235.

[4] Caffarelli, L., Hardt, R. and Simon, L.; *Minimal surfaces with isolated singularities*, Manuscripta Math. 48 (1984) 1-18.

[5] Callegari, A. and Nashman, A.; *A nonlinear singular boundary-value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM J. Appl. Math. 38 (1980) 275-281.

[6] Chai, X., Niu, W. and Zhao, P.; *The existence and non-existence of positive solutions to a singular quasilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$; Nonlinear Analysis 71 (2009) 3257-3266.

[7] Cîrstea, F-C. S. and Radulescu, V. D.; *Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 229 (1999) 417-425.

[8] Crandall, M. G.; Rabinowitz, P. H. and Tartar, L.; *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 2 (1977) 193-222.

[9] Damascelli, L.; *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*, Ann. Inst. Henri Poincaré 15 (1998) 493-516.

[10] Damascelli, L. and Sciunzi, B.; *Harnack inequalities, maximum and comparison principles, and regularity of positive solutions of m-Laplace equations*, Calc. Var. (2005) 25(2): 139-159.

[11] de Figueiredo, D. G., Gossez, J-P. and Ubilla, P.; *Local "superlinearity"and "sublinearity"for the p-Laplacian*, Journal of Functional Analysis 257 (2009) 721-752.

[12] del Pino, M. A.; *A global estimate for the gradient in a singular elliptic boundary value problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 122 (1992) 341-352.

[13] Díaz, J. I. and SAA, J. E.; *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris t.305 Série I (1987) 521-524.

[14] DiBenedetto, E.; $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis 7 no.8 (1983) 827-850.

[15] Dinu, T.-L.; *Entire positive solutions of the singular Emden-Fowler equation with nonlinear gradient term*, Results Math. 43 (2003) 96-100.

[16] Dinu, T.-L.; *Entire solutions of sublinear elliptic equations in anisotropic media*; J. Math. Anal. Appl. 322 (2006) 382-392.

[17] Edelson, A. L.; *Entire solutions of singular elliptic equations*, J. Math. Analysis Applic. 139 (1989) 523-532.

[18] Fulks, W. and Maybee, J. S.; *A singular nonlinear equation*, Osaka Math. J. 12 (1960) 1-19.

[19] Ghergu, M. and Radulescu, V.; *Sublinear singular elliptic problems with two parameters*, J. Differential Equations 195 (2003) 520-536.

[20] Ghergu, M. and Radulescu, V.; *On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term*, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005) 635-646.

[21] Ghergu, M. and Radulescu, V.; *Multi-parameter bifurcation and asymptotics for the singular Lane-Emden-Fowler equation with a convection term*, Proc. Royal Soc. of Edinburgh 135A (2005) 61-83.

[22] Ghergu, M. and Radulescu, V.; *Ground state solutions for the singular Lane-Emden-Fowler equation with sublinear convection term*, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 265-273.

[23] Gonçalves, J. V. and Santos, C. A.; *Positive solutions for a class of quasilinear singular equations*, Eletronic Journal of Differential Equations 56 (2004) 1-15.

[24] Gonçalves, J. V., Melo, A. L. and Santos, C. A.; *On existence of L^∞-ground states for singular elliptic equations in the presence of a strongly nonlinear term*, Adv. Nonlinear Studies 7 (2007) 475-490.

[25] Gonçalves, J.V.A., Rezende, M.C. and Santos, C.A.; *Positive solutions for a mixed and singular quasilinear problem*, Nonlinear Analysis 74 (2011) 132-140.

[26] Guedda, M. and Veron, L.; *Quasilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, Nonlinear Analysis 13 (1989) 879-902.

[27] Hamydy, A.; *Existence and uniqueness of nonnegative solutions for a boundary blow-up problem*, J. Math. Anal. Appl. 371 (2010) 534-545.

[28] Kura, T.; *The weak supersolution-subsolution method for second order quasilinear elliptic equations*, Hiroshima Math. J. 19 (1989) 1-36.

[29] Lair, A. V. and Shaker, A.W.; *Entire solution of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996) 498-505.

[30] Lair, A. V. and Shaker, A. W.; *Classical and weak solutions of singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 211 (1997) 371-385.

[31] Lasry, J.M. and Lions, P.-L.; *Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints; the model problem*, Math. Ann. 283 (1989). 583-630.

[32] Lazer, A. C. and McKenna, P. J.; *On a singular nonlinear elliptic boundary value problem*, Proceedings of the American Mathematical Society 111 (1991) 721-730.

[33] Leon, M. C., *Existence results for quasilinear problems via ordered sub and supersolutions*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse (1997) 591-608.

[34] Mohammed, A; *Ground state solutions for singular semi-linear elliptic equations*, Nonlinear Analysis 71 (2009) 1276-1280.

[35] Mohammed, A; *On ground state solutions to mixed type singular semi-linear elliptic equations*, Adv. Nonlinear Studies 10 (2010), 231-244.

[36] Peral, I.; *Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian*, Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations (1997).

[37] Perera, K. and Silva, E. A. B.; *On singular p-laplacian problems*, Differential Integral Equations 20 (2007) 105-120.

[38] Perera, K. and Zhang, Z.; *Multiple positive solutions of singular p-Laplacian problems by variational methods*, Boundary Value Problems (3) (2005) 377-382.

[39] Pucci, P. and Serrin, J.; *The strong maximum principle revisited*, J. Differential Equations 196 (2004) 1-66.

[40] Pucci, P. and Serrin, J.; *The Maximum Principle*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 73 Springer Verlag 1^a edição (2007).

[41] Santos, C. A.; *On ground state solutions for singular and semi-linear problems including super-linear terms at the infinite*, Nonlinear Analysis TMA 71 (2009) 6038-6043.

[42] Santos, C. A.; *Entire solutions for a quasilinear problem in the presence of sublinear and super-linear terms*, Boundary Value Problems (2009).

[43] Santos, C. A.; *Non-existence and existence of entire solutions for a quasi-linear problem with singular and super-linear terms*, Nonlinear Analysis 72 (2010) 3813-3819.

[44] Shaker, A. W.; *On singular semilinear elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. 173 (1993) 222-228.

[45] Struwe, M.; *Variational Methods*, Applications to Nonlinear Partial Diff. Eq. and Hamiltonian Systems, Springer-Verlag (2000).

[46] Stuart, C. A.; *Self-trapping of an electromagnetic field and bifurcation from the essential spectrum*, Arch. Rational Mech. Anal. 113 (1991) 65-96.

[47] Stuart, C.A. and Zhou, H-S.; *A variational problem related to self-trapping of an electromagnetic field*, Math. Methods Appl. Sci. 19 (1996) 1397-1407.

[48] Tolksdorf, P., *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. in Partial Differential Equations 8(7) (1983) 773-817.

[49] Tolksdorf, P., *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, Journal of Diff. Equations 51 (1984) 126-150.

[50] Xue, H. and Zhang, Z.; *A remark on ground state solutions for Lane-Emden-Fowler equations with a convection term*, Electronic Journal of Differential Equations 53 (2007) 1-10.

[51] Xue, H. and Shao, X.; *Existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic problem with a gradient term*, Nonlinear Analysis 71 (2009) 3113-3118.

[52] Yuan, J. and Yang, Z.; *Existence and asymptotic behavior of radially symmetric ground states of quasilinear singular elliptic equations*, Applied Math and Comp. 216 (2010) 213-220.

[53] Ye, D. and Zhou, F.; *Invariant criteria for existence of bounded positive solutions*, Discrete Contin. Dynam. Syst. 12 (2005), 413-424.

[54] Zhang, Z., *A remark on the existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 215 (1997) 579-582.

[55] Zhang, Z. and Yu, J.; *On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term*, SIAM J. Math. Anal. 4 (2000) 916-927.