UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

PROBLEMAS DE LÓGICA COMO MOTIVADORES NO FAZER MATEMÁTICA NO SEXTO ANO

Cristiane Dorst Mezzaroba

Brasília, 2009

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

PROBLEMAS DE LÓGICA COMO MOTIVADORES NO FAZER MATEMÁTICA NO SEXTO ANO

Cristiane Dorst Mezzaroba

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília/UnB como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Brasília, 2009

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROBLEMAS DE LÓGICA COMO MOTIVADORES DO FAZER MATEMÁTICA NO SEXTO ANO

CRISTIANE DORST MEZZAROBA

COMISSÃO EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz – UnB: Faculdade de Educação

Membro: Prof. Dra. Maria Terezinha Jesus Gaspar – UnB: Departamento de Matemática

Membro: Prof. Dr. Antonio Villar Marques de Sá – UnB: Faculdade de Educação

Suplente: Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo – UnB: Faculdade de Educação

Brasília, 05 de novembro de 2009.

À Valmir, minha alma gêmea.

AGRADECIMENTOS

Ao educador e orientador Cristiano Alberto Muniz pelas contribuições acadêmicas, pelos momentos em que, com a sabedoria de um pai, acalmou, aconselhou, incentivou, corrigiu, contribuindo para o meu aperfeiçoamento intelectual, pessoal e espiritual.

Aos trinta e oito alunos matriculados no sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Palmas/TO por me mostrarem o seu fazer matemática.

Aos professores doutores da banca examinadora pelas valiosas contribuições desde a concepção do projeto até a finalização dessa pesquisa: Antonio Villar Marques de Sá, Cleyton Hércules Gontijo e Maria Terezinha Jesus Gaspar.

A Fundação Universidade do Tocantins – Unitins pela oportunidade de cursar um Mestrado.

Aos professores doutores do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Brasília pelos preciosos ensinamentos, sem os quais esse trabalho não teria se concretizado: Albertina Mitjáns Martínez, Cristiano Alberto Muniz, Elizabeth Tunes, Maria Carmen Villela Rosa Tacca, Maria Helena da Silva Carneiro, Raquel de Almeida Moraes e Wivian Weller.

Aos colegas de mestrado do programa Minter UnB/Unitins e do Edem (Grupo de pesquisa em Educação Matemática FE/UnB), pelos momentos de aprendizagem e descontração.

A todos os amigos que incentivaram, apoiaram, consolaram e comemoram comigo nesses dois anos de caminhada.

A Nossa Senhora Aparecida pela vida, intervenção junto ao Pai, proteção e momentos em que a fé trouxe perguntas e respostas.

RESUMO

O propósito desta pesquisa é investigar a resolução de problemas de lógica como estratégia metodológica do ensino de matemática para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, com a participação de 38 alunos matriculados em uma escola pública de Palmas/TO, divididos em dois ambientes empíricos: a monitoria e a sala de aula. Fundamentados na Epistemologia genética de Piaget (1973), Teoria das Situações de Brousseau (1986), da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) e com as contribuições de Almouloud (2007), Dante (2003), Dias e Silva (2008), Fávero (2005), Muniz (1999; 2008), Pais (2002), Pólya (1995), Ponte e Santos (2002), dentre outros, realizamos uma pesquisa de campo na qual propusemos a resolução de problemas de lógica, incentivando o registro escrito das soluções, para analisarmos as ações mentais mobilizadas na construção de resposta para esses problemas. A análise das produções dos alunos, nesse estudo, divididas em cinco categorias de análise de dados: aprendizagem de alguns alunos, caminhos e respostas inusitadas, dificuldades/surpresa acerca das capacidades da criança, motivação na resolução e interações favorecidas, nos mostrou que os problemas de lógica são grandes motivadores para despertar o fazer matemática, pois devido ao seu forte caráter adidático, o aluno, concebido no estudo como ser matemático, sente-se livre para levantar suas hipóteses, criar suas estratégias, argumentar junto aos seus pares, autoavaliar sua produção e refazê-la se necessário. A análise dos esquemas de ação permitem ao professor verificar quais conceitos matemáticos precisam ser revistos ou aprofundados para a consolidação dos esquemas matemáticos, permitindo uma readequação da organização do trabalho pedagógico, onde o aluno é o sujeito principal do processo de ensino e aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, problemas de lógica, motivação, fazer matemática.

ABSTRACT

This paper aims to study solving logic problems, as a methodological strategy for teaching mathematics for Elementary School students in sixth grade. We took a sample from 38 students enrolled in a Public School in Palmas/TO. These students were divided into two experiential environments: monitoring groups and the classroom itself. Genetic Epistemology by Piaget (1973), Theory of Didactical Situations by Brousseau (1986), Conceptual Fields Theory by Vergnaud, 1990 and contributions from Almouloud (2007), Dante (2003), Dias e Silva (2008), Fávero (2005), Muniz (1999; 2008), Pais (2002), Pólya (1995), Ponte e Santos (2002), among others, are the theories we research to support this studies. We have done a fieldwork in which we propose solving logic problems. The students were encouraged to do a database of these problems results in order to analyze mental actions that were done to get to that result. For the purpose of analyzing data from the students five categories were defined: learning level of some students, ways of getting the results and unexpected results, difficulties/surprising about abilities of children, motivation to solve problems and interactions favored. It showed that logic problems are outstanding motivational factor to raise will to study mathematics, due to its adidactic character, students, in their mathematics studying process, feel free to arouse their own hypothesis, create their own strategies, argue with their partners, do self-evaluation e do the exercise again if they think it is necessary. Analyses of action schema allow teachers to check which mathematics concepts need to be revised to reinforce mathematics schema, this enables to reorganize pedagogical work, where students are the main characters of teaching learning process.

KEY WORDS: Mathematics Education, logic problems, motivation, mathematics study.

SUMÁRIO

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE PROBLEMAS DE LÓGICA

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

DC – Diário de campo
EF – Ensino Fundamental
EJA – Educação de Jovens e Adultos
NCTM - National Council of Teachers of Mathematics
OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OTP – Organização do Trabalho Pedagógico
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
QI – Quociente de Inteligência
OTP – Organização do Trabalho Pedagógico
SBM – Sociedade Brasileira de Matemática
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFT – Universidade Federal do Tocantins
ULBRA – Universidade Luterana do Brasil
UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
UNITINS – Fundação Universidade do Tocantins
ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal

APRESENTAÇÃO

“A matemática desenvolve o raciocínio lógico”. “Aprender a resolver problemas é fundamental para viver o cotidiano”. Essas frases já incorporaram o vocabulário popular, entretanto em muitas escolas essa ainda é uma realidade distante. Se busca ensinar matemática a partir da memorização de procedimentos e suas aplicações em exercícios de repetição e treinamento. Consciente de que aprender matemática é essencialmente resolver problemas e isso vai além da aplicação de métodos e técnicas, esta pesquisa envolve a resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico como estratégias metodológicas que podem colaborar para a construção de esquemas matemáticos, por meio do que denominamos de problemas de lógica.

No capítulo um apresentamos uma breve retomada histórica, cultural e acadêmica do sujeito pesquisador com o intuito de expor como chegamos à delimitação do objeto de pesquisa: a resolução de problemas de lógica como motivadores no fazer matemática dos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental e a constituição dos objetivos propostos para este trabalho de pesquisa. Embora o que conceituamos como problemas de lógica seja presente e desperte a atenção de muitas crianças e adultos, sendo encontrados em jornais, revistas, sítios eletrônicos entre outros meios, na escola esses problemas são por vezes ignorados.

Em nosso referencial teórico, abordado no capítulo dois, recorremos a um trabalho de ordem epistemológica na busca de conceitos de problema de lógica na aprendizagem matemática. Abordamos os problemas como fonte de construção do conhecimento e fundamentado em autores renomados, tais como: Dante (2003), Dias e Silva (2008), Muniz (1999; 2008), Onuchic (2004), Rabelo (2002), Ponte e Santos (2002), entre outros que definem um problema e também explicitamos a situação-problema e o jogo-problema a fim de adentrarmos no campo dos problemas de lógica, que carregam características destas duas categorias de problemas. Na perspectiva dos problemas de lógica enquanto estratégia de metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática, procuramos estabelecer relações com a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) e a Teoria das Situações (BROUSSEAU, 1986). Entendemos que os conceitos matemáticos ultrapassam os conteúdos propostos no currículo escolar, sendo possível a construção desses conceitos de forma lúdica, valorizando a produção do aluno, capacitando-o para ser sujeito da construção do conhecimento.

No capítulo três explicitamos nossa proposta metodológica para a condução dessa pesquisa, com a intenção de atingirmos os objetivos propostos. Nossos fundamentos metodológicos se alicerçam em uma pesquisa que envolva ativamente os sujeitos envolvidos: pesquisador e aluno, cada qual com seu papel dentro do processo, mas todos de igual importância para a concretização da proposta de trabalho. Apresentamos de forma detalhada, o método, os participantes, as atividades, os instrumentos, os procedimentos e a proposta de análise dos dados colhidos no campo de pesquisa no primeiro semestre de 2009.

De posse dos protocolos de resolução dos alunos e do conteúdo das entrevistas, no quarto capítulo, abordamos a descrição da monitoria e da sala de aula, ambos ambientes empíricos de coleta de dados, os critérios de seleção das situações e a definição das cinco categorias de análise: aprendizagens de alguns alunos, caminhos e respostas inusitadas, surpresa da pesquisadora acerca das capacidades dos alunos, motivação para a resolução e interações favorecidas. Desta forma, procedemos à descrição e às análises das resoluções selecionadas para a evidenciação das categorias propostas e compreensão dos esquemas de ação utilizados nos momentos de resolução. Destas análises, emergiram os frutos de nossa intervenção com os problemas de lógica em uma turma do sexto ano do ensino fundamental, tais como a constituição do novo fazer matemática por parte dos seres matemáticos envolvidos por uma situação adidática, o que caracteriza uma mudança, ainda que particular, da organização do trabalho pedagógico.

Nas considerações finais, encerramos com uma reflexão sobre a nossa caminhada e apontamos novas propostas de estudo e pesquisa.

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Iniciando nossa caminhada de superação e conquistas, farei um breve histórico da minha vida pessoal, acadêmica e profissional para melhor compreensão das escolhas e motivações que influenciaram na delimitação do objeto e dos objetivos propostos para esta pesquisa acadêmica, que não visa somente à obtenção do título de Mestre em Educação, mas também elaborar contribuições pertinentes à Educação Matemática.

1.1 Historicidade da pesquisadora na delimitação do objeto de pesquisa: “a resolução de problemas de lógica como motivadores no fazer matemática dos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental”

Minha vida profissional e acadêmica sempre esteve voltada para a Educação, em especial para a disciplina de matemática. Durante todo o curso de magistério trabalhei com aulas particulares de matemática para alunos do Ensino Fundamental e substituí professores no colégio onde estudava. Ainda no último ano do magistério fui aprovada em um concurso público municipal para professores. Minha primeira turma foi de educação de jovens e adultos (EJA), especificamente a de alfabetização. No ano seguinte, já tendo concluído o magistério fui trabalhar com duas turmas de terceira série, onde fiquei por quatro anos. Trabalhava e cursava, à noite, Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), campus de Cascavel, a 90 km da cidade onde morava. Durante esse período sempre participei da elaboração de projetos, planejamentos e capacitações de Matemática para professores das séries iniciais na Secretaria de Educação do município onde trabalhava. Muitas foram as capacitações envolvendo os processos de ensino e aprendizagem que estive presente, tanto no âmbito profissional quanto no acadêmico.

Em 2002, mudei para o Tocantins, terminei minha graduação no Centro Universitário Luterano de Palmas (Ulbra), fiz especialização em Educação Matemática na Universidade Federal do Tocantins (UFT) e comecei a trabalhar em uma escola particular com terceira e quarta séries, atualmente quarto e quinto anos do Ensino Fundamental. Após dois anos na escola, fui convidada para assumir turmas das séries finais do Ensino Fundamental, onde trabalhei até o final de 2007, quando tive que me afastar para cursar o mestrado em 2008. No início de 2007, participei de uma seleção de professores na Fundação Universidade do Tocantins (Unitins), fui aprovada e, atualmente, desempenho minhas funções profissionais nos cursos de Administração, Ciências Contábeis, Licenciatura em Matemática, Pedagogia e Normal Superior trabalhando com as disciplinas na área de Matemática: Métodos Quantitativos, Fundamentos da Matemática II e III, Desenho Geométrico, Matemática Financeira, Estatística, Matemática Básica e Pensamento Matemático e a Construção de Conceitos. A Universidade também me proporcionou a experiência de trabalhar na elaboração de material pedagógico de Metodologia do Ensino da Matemática para o Ensino Fundamental e Médio e História da Matemática disciplinas ministradas no curso de Matemática.

Como dito anteriormente, sempre estive envolvida com a educação e tinha convicção, desde o magistério e depois na graduação em Matemática, que seguiria minha vida acadêmica voltada para a Educação Matemática, por isso, minhas salas de aula sempre foram meus grandes laboratórios, onde procurei entender e aplicar o aprendizado adquirido na academia, nos livros, nos artigos científicos, nos cursos de capacitação, entre outros; adotando uma postura crítica, buscando sempre aprender mais, questionando o porquê dos fracassos que sempre permeiam a prática educativa.

No decorrer da minha atuação profissional, duas coisas sempre me inquietaram: a ênfase que se dá para a alfabetização da língua materna, o mesmo não acontecendo com a Matemática; e a outra, que mais refleti até hoje, é o fato de alunos que têm certa resistência às aulas de Matemática, devido a sua história com a disciplina ser permeada pelo fracasso, adorarem os famosos jogos, desafios ou problemas de lógica, presentes nas revistas, nas páginas da web, denominados, por eles mesmos, de “passatempos”.

Essa reflexão permeou minha prática, visto que, a concepção da maioria destes problemas serem fundamentados nos princípios matemáticos e lógicos. Então por que essa contradição envolvendo as aulas de matemática e os “passatempos”? Afinal, alunos com facilidade de aprender Matemática gostarem de problemas de desafio é perfeitamente compreensível. No entanto, por que os alunos rotulados de “com dificuldades” também se envolvem nestas atividades se propondo a construir as soluções por meio da exploração das possibilidades, da experimentação das hipóteses, do voltar atrás em um caminho e tentar outro e de validar suas construções explicando e discutindo com seus amigos, sem medo, sem intimidação? Acredito que os problemas de lógica propiciem o ato de buscar ideias que se conformem à natureza do problema, de rejeitar aquelas que não se ajustam à estrutura total da questão e possibilitem, como bem assevera Muniz (2006, p.151), “a oferta de situações de desafio, desafio gerador de desestabilização afetiva e cognitiva, fazendo com que a criança se lance à aventura de superação da dificuldade proposta pelo educador, e, assim realizando atividades matemáticas". Muniz (2006, p. 151) complementa que, "infelizmente o planejamento escolar acaba por privilegiar a seleção ou produção de problemas (ditos matemáticos) que são apresentados por meio de textos escritos (via enunciados textuais) e de contextos nem sempre significativos aos alunos".

Incomoda-me observar que na resolução dos tradicionais problemas propostos nas aulas de Matemática os alunos tendem somente a repetir os métodos de resolução apresentados pelo professor, sem sequer questionar a validade dos resultados obtidos. Mas, também me encanta quando nos jogos, desafios ou problemas de lógica, geralmente aplicados como simples passatempos ou nas famosas gincanas de Matemática, ousam criar seus próprios métodos, produzindo seus próprios corolários e processos de validação dos resultados, modificando suas estruturas cognitivas em prol do conhecimento, desenvolvendo o famoso raciocínio lógico-dedutivo, tão importante para as situações não programadas do cotidiano. Diria mais, que nestas situações, como bem expõe Gonzáles Rey (2006, p. 39), o aluno se torna "sujeito de sua aprendizagem quando é capaz de desenvolver um roteiro diferenciado em relação ao que aprende a se posicionar crítica e reflexivamente em relação à aprendizagem (...) quando ele é capaz de gerar sentidos subjetivos em relação ao que aprende".

Diante dessas observações, fica difícil compreender porque algo tão perceptível é simplesmente desprezado pela maioria dos professores nas suas práticas pedagógicas diárias, ao mesmo tempo em que há muitas reclamações sobre a falta de motivação dos alunos na produção do conhecimento matemático. Acredito que esta realidade escolar não seja tão somente em função da atuação pedagógica dos professores, mas de todo um sistema educativo, alicerçado numa educação mecanicista, da produção em série, que pouco está relacionado com a atual realidade que necessita cada vez mais de pessoas reflexivas, que saibam resolver problemas de forma coerente e precisa, além da competência básica de trabalhar em equipe.

Para ilustrar esta pequena reflexão, recorro a um fato curioso que aconteceu em 2007 quando fui convidada por um cursinho preparatório para concursos para ministrar aulas de raciocínio lógico. Embora meu tempo estivesse todo comprometido, não podendo aceitar o convite, resolvi folhear o material das aulas. Para minha surpresa, muitos dos problemas propostos eram parecidos com aqueles que eu estava acostumada a trabalhar com alunos de quarto e quinto ano do Ensino Fundamental, chamados pela turma de problemas de lógica. Já em Brasília, em uma conversa com minha colega mestranda Raquel, mãe de um garoto de nove anos, estudante do quinto ano do Ensino Fundamental que frequenta um cursinho preparatório para o Colégio Militar de Brasília, me chamou atenção o fato de que o referido cursinho oferece aulas específicas de lógica, com uma apostila muito similar àquela vista por mim no cursinho preparatório para concursos.

Diante de tal situação, refleti o porquê da necessidade de aprender lógica ou o raciocínio lógico ser tão enfatizado fora da escolarização formal e ainda, por que estavam cobrando lógica formal nos concursos para técnicos administrativos ou mesmo no vestibulinho do Colégio Militar? Será que o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos está sendo contemplado adequadamente pelo programa atual de Matemática? Por que os alunos ousam inovar diante de problemas de lógica, mas não fazem o mesmo com problemas do cotidiano escolar? Isso sem mencionar as Olimpíadas Brasileiras de Matemática, que tenho acompanhado desde 2005, desenvolvendo um projeto de incentivo para participação dos alunos com aulas extras de resolução das provas de anos anteriores. Percebi nestas aulas, que a maioria dos alunos recorre muito pouco às formalizações e modelos de resolução aprendidos na escola e tem dificuldades para entender os gabaritos comentados, ou seja, formalizados, disponibilizados no sítio eletrônico da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Utilizam o conhecimento matemático, mas criam seus próprios esquemas, tabelas e sistematizações, muitas vezes até dissertativos de resolução.

Diante dessas experiências e reflexões sobre a resolução de problemas de lógica, que para mim não se limitam àqueles que formalmente se embasam na lógica formal, mas aqueles que propiciem a oportunidade do aluno inovar, criar, se divertir e fazer matemática. Quando surgiu a oportunidade do mestrado e para a seleção deveria elaborar uma proposta de pesquisa, recorri a estas reflexões e na oportunidade de compreender melhor toda essa situação, aprofundar meus conhecimentos teóricos e, quem sabe, contribuir com uma proposta metodológica para tornar as aulas de Matemática mais significativas para os alunos e até para os professores.

A maioria dos professores de matemática ainda são formados em um modelo de licenciatura com mais ênfase na matemática pura, do que propriamente com a sua formação pedagógica, o que é percebido claramente na hora do estágio supervisionado. Os futuros professores sabem muita matemática, mas pouco sobre a sala de aula, onde realmente vão exercer sua profissão. Essa desigualdade e, por vezes, disputa entre as disciplinas puras e as disciplinas pedagógicas acabam por vitimar inúmeros estudantes em cada ano letivo.

Aprendemos, com alguns autores (BOYER, 2001; GARBI, 2007) que a matemática é a rainha das ciências, dona de uma lógica admirável, o que nos fez acreditar e até repetir para nossos alunos que a matemática é sempre exata. Para um observador superficial, a verdade científica (e matemática é uma delas) não está sujeita a dúvidas, já que a lógica é uma ciência infalível. Tal concepção acaba por criar nas pessoas a ideia criticada por Poincaré (1902/1985, p. 15), "que as verdades matemáticas derivam de um pequeno número de proposições evidentes por uma cadeia de raciocínios impecáveis". Acredita o autor (p. 16) que muitas das hipóteses formuladas "não passam de definições ou de convenções disfarçadas". Isso não quer dizer que toda a Matemática construída pela humanidade deva ser ignorada, mas que a matemática é uma construção humana, portanto, não podemos privar o aluno dessa construção, transmitindo-lhe os conhecimentos prontos e acabados, tornando-o apenas reprodutor de métodos e técnicas arbitrários de resolução de exercícios desprovidos de qualquer compreensão ou significado.

Poincaré em seu livro "A ciência e a hipótese" (1902/1985, cap. III) faz uma pequena explanação sobre as geometrias não-euclidianas, mais especificamente a geometria de Lobatchevsky e Riemann para exemplificar que "nenhuma geometria pode ser mais verdadeira do que a outra; o que ela pode é ser mais cômoda (p. 54)". Acredito ser este o pensamento válido para as demais áreas da Matemática, ou seja, métodos não convencionais, mas logicamente encadeados, podem ter aplicações válidas na matemática tradicional, mais especificamente, na resolução de problemas, desde que se estabeleça um contrato didático possibilitando a validação de uma determinada construção de resolução por parte do aluno diante de seus pares e que sua invalidação seja tratada como algo pertinente e natural ao processo, sem constrangimentos. Precisamos admitir e valorizar que o aluno também é capaz de produzir seus próprios métodos ainda que diferentes da matemática acadêmica que estamos acostumados.

Piaget em seu livro "A epistemologia genética" (1973) aborda a questão da produção matemática da criança como semelhante à produção de um matemático, diante da "construção contínua, intencional e refletida de operações e as primeiras sínteses ou coordenações que permitem a construção dos saberes matemáticos (p. 79)". Também Pais (2002, p. 35) compartilha com o epistemólogo suíço, afirmando que o trabalho do aluno não é diretamente comparável ao trabalho do professor ou do matemático. Entretanto, essas atividades mentais guardam correlações. E, quando o aluno é estimulado a pesquisa (idem, p. 35), "sua atividade intelectual guarda semelhanças com o trabalho do matemático, sem, no entanto, identificar-se com ele". Assim, tendo como objeto de pesquisa: a resolução de problemas de lógica como motivadores no fazer matemática dos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Minha proposta é de

investigar quais estratégias os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental utilizam na construção de resoluções para os problemas de lógica.

Diante dessa perspectiva de pesquisa, algumas perguntas de ordem epistemológica são pertinentes no contexto da Educação Matemática, a saber:

- O que é um problema? E um problema de lógica?
- O que significa resolver um problema?
- Os métodos de resolução propostos nos livros didáticos são os únicos fundamentos aceitáveis pelo professor como verdadeiro na resolução de um problema?
- Quais estratégias os alunos utilizam na construção de resoluções para os problemas de lógica?
- Os desafios de lógica podem fazer parte do cotidiano das aulas de Matemática; quais são seus potenciais e limites?
- Quais são as dificuldades de ordem didática e curricular para sua utilização na organização do trabalho pedagógico?

Temos clareza de que quando falamos em Educação Matemática muitos são os paradigmas a serem rompidos, tendo como exemplos a extrema preocupação com a quantidade de conteúdos transmitidos, ao invés da qualidade dos conceitos aprendidos pelos alunos; e da formalização, tão característica da Matemática. Romper com esses paradigmas é uma tarefa difícil, pois implica na mudança de pensamento na função da educação escolar na formação do sujeito realmente cidadão, capaz de atuar crítica e argumentativamente na sociedade na qual está inserido. Assim faz-se necessário que a construção do conhecimento matemático vá além da repetição de simbologias, fórmulas e técnicas de resolução, mas que venha a promover a construção do raciocínio lógico-matemático. Para que isso, além de possibilitar a produção de respostas para os problemas da matemática escolar, possa ser transposto para os problemas da realidade de qualquer ser humano. Portanto, o que visualizamos atualmente é que os problemas de matemática não conseguem romper os muros escolares, ou seja, a matemática aprendida na escola está pouco (ou quase nada) relacionada às necessidades cotidianas da vida real, onde não há fórmulas prontas para resolver problemas.

1.2 Objetivos

Frente ao exposto, pressupomos que a práxis da matemática escolar precisa ser revista e os problemas de lógica podem ser um caminho possível (dentre outras) para algumas mudanças, pois eles podem permitir ao aluno investigar, formular hipóteses, testar suas estratégias, discutir com seus pares, validar ou reformular suas estratégias em busca da solução mais adequada para o problema proposto, prática esta indispensável para a resolução de problemas da vida real.

Temos consciência que muitos são os estudos referentes à abordagem da resolução de problemas enquanto estratégia da didática da matemática como os de Dante (2003), Dias e Silva (2008), Muniz (2006), Onuchic e Allevatto (2004), Pais (2002), Pólya (1995) Ponte (2002), Rabelo (2002) e que fundamentarão nossa pesquisa. Entretanto a maioria desses estudos aborda a resolução de problemas vinculada aos conteúdos matemáticos do currículo. Não se trata de desmerecer tal abordagem, mas de complementá-la, investigando como os alunos resolvem problemas de lógica, que tipo de estratégias produzem, bem como as potencialidades e as limitações do seu uso no cotidiano da sala de aula visto estes não trabalharem diretamente conteúdos curriculares, mas conceitos matemáticos amplos.

Diante das considerações acima, estabelecemos como objetivo geral: **investigar quais estratégias os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental utilizam na construção de resoluções para os problemas de lógica.** Tendo como objetivos específicos:

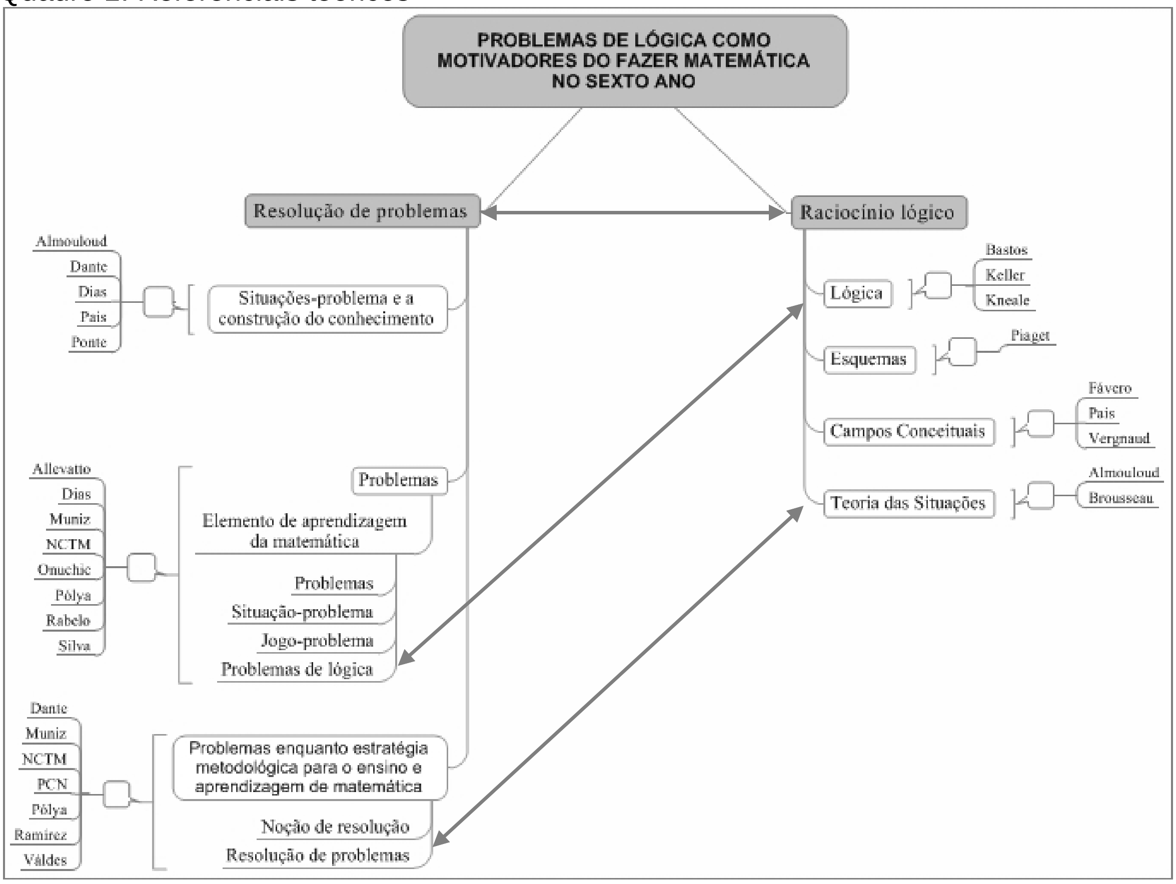
- analisar teoricamente as concepções acerca das diferenças entre problemas e problemas de lógica;
- investigar as potencialidades e limites do uso de problemas de lógica enquanto metodologia do ensino da matemática;
- investigar a resolução de problema de lógica como estratégia metodológica do ensino de matemática para alunos do sexto ano.

Na busca de atingir tais objetivos, apresentaremos no próximo capítulo nosso referencial teórico, com o intuito de promovermos uma reflexão para compreender alguns conceitos imprescindíveis para o avanço dessa pesquisa.

CAPÍTULO 2: REFERENCIAIS TEÓRICOS: NA BUSCA DE CONCEITOS DE PROBLEMA E LÓGICA NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Em prol das compreensões necessárias para a concretização e construção de respostas das questões dessa pesquisa utilizaremos como eixo norteador o quadro dos referenciais teóricos descrito a seguir, construído ao longo das pesquisas bibliográficas realizadas a partir da busca de conceitos centrais do estudo, tendo por base os objetivos da investigação:

Quadro 1: Referenciais teóricos



Fonte: Organizado pela pesquisadora, 2008.

Como se pode observar no esquema dos referenciais teóricos descrito acima, trabalharemos com um estudo multireferencial, interligando a resolução de problemas e o raciocínio-lógico na busca de construir uma definição para os problemas de lógica, bem como fundamentar essa pesquisa quanto às contribuições, dificuldades e limites dos problemas de lógica enquanto metodologia do ensino da matemática. O referencial em questão foi aperfeiçoado no decorrer de toda a pesquisa para que a articulação dessas diversas perspectivas teóricas possibilitasse um estudo de qualidade.

2.1 Resolução de problemas e a construção do conhecimento

Conforme nos mostra a história, a humanidade trilhou o caminho que conhecemos devido à necessidade de resolver problemas. É do senso comum dizer que “todos têm problemas”, sejam eles simples ou complexos, práticos ou teóricos. Cada indivíduo os encara de maneira diferente, dependendo da sua história de vida, da sua subjetividade e, por necessidade, elabora ações cognitivas a fim de solucionar as situações que geram conflitos, que o desestabilizam. No entanto, mesmo tendo vasta experiência em resolver problemas, pode-se chegar a soluções mal sucedidas.

No cotidiano, resolver problemas, ainda que de forma incorreta, parece não incomodar tanto as pessoas quanto nas situações apresentadas nas atividades escolares, onde o caráter positivo de resolver problemas é por vezes ignorado. Esquecendo-se que é por meio da resolução de problemas que o sujeito constrói o seu conhecimento, ou seja, os problemas ou resolver problemas, devido ao seu caráter desestabilizador, se constitui na base da construção da aprendizagem.

Se a função da escola é promover a aprendizagem do educando, seria de sua responsabilidade ativar cognitivamente o sujeito, lançando-o em situação de desestabilização afetiva e cognitiva, tal como abordaremos mais adiante. Vale ressaltar desde já, que não nos referimos a problema como aquele do texto do livro didático, ou aquele passado pelo professor no quadro para o aluno copiar, ou a questão da avaliação (prova), mas o problema gerador de ação cognitiva, o problema interiorizado pelo sujeito.

Nesta perspectiva, o primeiro papel do professor é gerar uma boa situação, capaz de gerar ação no educando. Para isso, o professor, detentor inicial do problema, precisa proporcionar ao aluno a oportunidade de interiorizar o problema, para tanto, faz-se necessário a incorporação de um processo denominado devolução, definida por Brousseau (2008, p. 91) como “o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática[1]) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência”.

[1] Pertencente a Teoria das Situações (1986), é definida por Brousseau (2008, p. 35) como uma situação em que o aluno aceita o problema como seu e produz uma resposta sem qualquer interferência do professor. O aluno sabe que o problema foi intencionalmente escolhido pelo professor para que ele adquira um conhecimento novo, mas sabe também que esse conhecimento se justifica pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para

De posse do problema, o sujeito tende a mobilizar e inter-relacionar os vários esquemas, definidos por Vergnaud (1990, citado por MUNIZ, 2008, p. 45) como sendo a organização de condutas para uma classe de situações dadas, ou seja, o encadeamento de ações realizadas em uma série de situações vivenciadas pelo aluno; e conceitos, definidos como categorias que nos permitem tirar informações pertinentes a situação ou problema em questão. Segundo Vergnaud (citado por FÁVERO, 2005, p. 245), “é por meio das situações e dos problemas a serem resolvidos que um conceito adquire sentido para o sujeito”.

Compartilhando da teoria de Vergnaud, Muniz (2008, p. 45) afirma que:

> buscar identificar os esquemas mentais produzidos por alunos numa dada situação é tarefa vital do professor que pretende colocar-se como mediador do processo de aprendizagem matemática: é identificando, descrevendo e analisando os esquemas mentais apresentados de forma oral ou escritos pelo aluno que poderemos compreender seus processos de construção conceitual e os teoremas utilizados na situação.

Diante do exposto neste início de reflexão, concordamos com Pais (2002, p. 57) de que os problemas se constituem o passo inicial para lançar as bases do conhecimento, pois é por meio da resolução de problemas que ativamos nossos esquemas mentais em busca da construção de uma resposta apropriada, o que propicia o desenvolvimento cognitivo.

2.2 Problema: elemento de aprendizagem matemática

A Educação Matemática é um ramo ainda muito jovem da ciência matemática, visto que as grandes discussões e debates aprofundam-se apenas na década de oitenta, fundamentados na necessidade de reformulação do ensino da matemática, vinculando-o ao estudo da matemática como construção humana e, portanto, relacionada ao contexto sociocultural do ser humano. Tal visão vem contrapor o período denominado de Matemática Moderna caracterizado por uma matemática extremamente formal com um fim em si mesma totalmente desvinculada das questões socioculturais do homem, quando não havia de fato preocupação com a transposição didática.

É neste contexto que os estudos relativos à resolução de problemas começam a se intensificar como questão de reflexão crítica e de processo metodológico em várias partes do mundo com o intuito de buscar melhores formas de ensinar e aprender

---

construí-lo. O saber somente terá sido adquirido a partir do momento em que se consiga usá-lo fora do contexto escolar e sem nenhuma intencionalidade.

matemática. Para Onuchic e Allevatto (2004, p. 215), a caracterização da Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, "reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas, que a configuravam como um conjunto de fatos, como o domínio de procedimentos algorítmicos ou como um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental".

Nesta perspectiva, a resolução de problemas passa a ser, como diz Stewart (citado por MUNIZ, 1999, p. 146), "o motor da aprendizagem matemática", tanto na escola quanto na academia. Logo, muitos autores se dedicaram e se dedicam a estudar e escrever sobre a resolução de problemas em três perspectivas diferentes, como escreve Onuchic (1999, citado por OLIVEIRA, 2007, p. 53): "1 – Ensinar sobre resolução de problemas; 2 – Ensinar a resolver problemas; e 3 – Ensinar matemática através da resolução de problemas". Os livros didáticos também passaram por modificações, no lugar de somente listas de exercícios mecânicos passaram a explorar a resolução de problemas.

Estudos como os da National Council of Teachers of Mathematics[2] (NCTM, 1994) prelecionam que aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar, produzir e aprender matemática. No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, BRASIL, 1998) apontam a resolução de problemas como o ponto de partida da construção do saber matemático. Atrelado a este enfoque, ressalta-se que a solução de problemas precisa estar associada a propostas que se constituam um real desafio, propulsor da necessidade de verificação, para que o processo de resolução seja validado. Desta forma, exercícios de aplicação e de repetição de procedimentos não podem ser considerados como problemas, pois como bem ensina Echeverría (1998, p. 48) "os exercícios servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para posterior solução de problemas". O autor prossegue na reflexão afirmando que os exercícios "dificilmente podem trazer alguma ajuda para que essas técnicas sejam usadas em contextos diferentes daqueles onde foram apreendidas ou exercitadas, ou dificilmente podem servir para a aprendizagem e compreensão de conceitos". São os mais comuns nos livros didáticos.

A palavra "problema" é entendida por muitos como algo negativo, que foge a tranquilidade da rotina, seja na escola, seja em situações do cotidiano. Na escola esta situação tende a ser complicada na perspectiva do aluno por nossa realidade ainda estar vinculada no conteúdo de matemática como um fim em si mesmo. Ou seja, na maioria

---

[2] O NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) é uma organização não governamental, fundada em 1920, sem fins lucrativos, responsáveis pelas orientações para o ensino de Matemática nos EUA.

das vezes os problemas são adaptados aos conteúdos que o professor pretende ensinar, tornando-os meros instrumentos de treinamento de técnicas e métodos relacionados a determinado conteúdo, sem qualquer vínculo com a realidade social, política ou cultural do aluno, sendo desvinculados da vida fora dos muros escolares, quando na realidade o conteúdo matemático é, nas palavras de Muniz (no prelo), “uma ferramenta do pensamento humano quando da realização e utilização de instrumentos culturais para a resolução de situações significativas”. Contudo, não podemos desconsiderar o problema com algo positivo, enquanto mola propulsora da atividade cognitiva, como fonte do desequilíbrio necessário para a aprendizagem, como aborda Piaget. O problema desequilibra o sujeito, que em seu estado natural está em equilíbrio. Então, ontologicamente, o indivíduo busca o reequilíbrio, que se dá por meio da aprendizagem, que existe devido ao desenvolvimento de um esquema, que é a resposta a uma situação antes considerada problema.

Mas então, o que vem a ser um problema? A palavra problema tem muitas concepções e sentidos. Nossa primeira fonte é o dicionário de língua portuguesa Rideel (2007), que traduz esse substantivo masculino como:

> 1. Questão matemática proposta para se achar a solução. 2. Questão. 3. Proposta duvidosa, que pode ter muitas soluções. 4. O que é difícil de resolver ou explicar. 5. Qualquer questão que origina hesitação ou perplexidade, por ser difícil de explicar e de resolver. 6. Psic. Conflito afetivo que impede ou afeta o equilíbrio psicológico do indivíduo.

Percebemos que logo na primeira definição proposta pelo dicionário já aparece o problema atrelado a matemática, mostrando como é forte essa relação, destacando-se também o aspecto negativo evidenciado nas três últimas definições explicitadas. Ironicamente, parece termos o sentido de que a matemática é um problema como pensam muitos alunos, pois se aprender matemática é resolver problemas e problema é difícil de resolver então, aprender matemática é difícil. Culturalmente, essa é a percepção que ainda habita a sala de aula, muito diferente do que propomos que é o problema como elemento de aprendizagem matemática.

Sobre a definição de problema, Ponte e Santos (2002, p. 31) asseveram que:

> Um problema é uma dificuldade, não trivial, que se pretende ultrapassar. A noção de problema, no entanto, pode ser encarada de diversas maneiras. Alguns autores tomam como referência a relação do indivíduo com a situação, enquanto que outros concentram a sua atenção nas características da própria tarefa. No primeiro caso, o foco é o indivíduo – uma dada situação pode ser um problema para uma pessoa e não o ser para outra. Esta abordagem é subscrita por Saviani (1985), que identifica a necessidade/intencionalidade como a essência do problema, e também

> por Schoenfeld (1985) e Kantowski (1980), que privilegiam o fato da pessoa ter de lidar com uma situação para si desconhecida. No segundo caso, uma dada situação será um problema se possuir um conjunto de características que se presumem problemáticas para todos os membros de um certo grupo relativamente alargado de indivíduos. Neste caso, a situação é um problema independentemente do indivíduo ou da sua experiência pessoal passada. Podemos incluir neste grupo Smith (1991), que refere as atividades mentais que a tarefa implica no indivíduo (análise e raciocínio), Shulman e Tamir (1973) e Borasi (1986), que partem de critérios associados à própria tarefa**.**

Numa perspectiva, digamos, "mais matemática", Dias e Silva (2008, p. 25) apresentam uma interessante reflexão sobre o uso da palavra problema em diferentes situações dentro do contexto escolar quando afirmam que, mesmos estudiosos do assunto:

> às vezes eles utilizam termos adicionais para ressaltar certas características do que está sendo considerado um problema: "problemas abertos" (com mais de uma resposta possível), "problemas de dois ou mais passos" (requerendo duas ou mais operações para sua solução), "problemas realistas" (contextualizados em situações reais), "problemas não-rotineiros" ou "problemas-processo" (enfatizando que o real problema é encontrar o caminho da solução, e não a resposta), "problemas-desafio" ou "problemas tipo *puzzle*", "problemas mal-estruturados" (que não contém em seu enunciado todas as informações necessárias para sua resolução).

Muniz (no prelo) assevera que para ser um problema, "além da inexistência de uma solução pronta, requer que exista por parte das pessoas envolvidas um interesse em produzir uma solução assim como a crença na sua capacidade em resolvê-lo". As palavras de Muniz nos deixam uma pista sobre porque muitos alunos não gostam das aulas de matemática, em especial da resolução de problemas. Na maioria das vezes os alunos não têm interesse em produzir uma solução, apenas reproduzem algum método para fornecer a resposta, de preferência correta, ao professor. Desta forma, são os interesses do professor que estão em destaque e não os do aluno. Estes ainda são resquícios da Matemática Moderna, onde prevalecia o destaque para a formalização e a resposta correta, não importando as diferentes estratégias construídas pelos alunos, o raciocínio envolvido, ou seja, as situações eram puramente didáticas, isto é, o aluno realiza atividades por uma necessidade aparente do professor ou da escola.

Pólya, famoso matemático ao discorrer sobre o tema em questão, em seu livro "Mathematical Discovery" (1981), propõe que uma pessoa tem um problema quando procura conscientemente uma ação apropriada para obter um objetivo claramente concebido, mas não atingível de maneira imediata. Saviani (2002, p. 14) afirma que a essência do problema é a necessidade, uma questão em si não caracteriza um problema, nem mesmo aquele cuja resposta é desconhecida, mas uma questão cuja resposta se desconhece e se necessita conhecer. Vila e Callejo (2006, citado por MEDEIROS JUNIOR, 2007, p. 32) reservam o termo problema para:

> designar uma situação, proposta como finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita de um processo que identifique automaticamente os dados com a inclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova.

Já para Charles e Lester (1984, citado por MEDEIROS JUNIOR, 2007, p. 32), um problema é uma tarefa para a qual: “1. o indivíduo, que com ela se confronta, quer e precisa encontrar uma solução; 2. o indivíduo não tem procedimento prontamente disponível para achar a solução; 3. o indivíduo deve fazer uma tentativa para encontrar a solução”.

À definição estabelecida por Charles e Lester (1984) podemos associar a ideia da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) desenvolvido por Vigotski na teoria histórico-cultural. A ZDP indica a distância entre o desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial. Para a criança atingir o desenvolvimento potencial é necessário que se instaure um processo de colaboração e ajuda mútua com outros sujeitos, por meio de ações partilhadas na ZDP. Assim, se temos um problema é porque o nosso desenvolvimento real acerca daquela situação ainda não é suficiente para saber prontamente uma resposta, caso contrário, não seria um problema. No entanto os conhecimentos preexistentes servem de alicerce, que juntamente com a interação com o outro (professor, colega, livro didático, etc), permitem a construção de uma resposta (desenvolvimento potencial). Essa concepção traz implicações decisivas para a prática pedagógica: qualquer relação pedagógica deve, necessariamente, estar centrada na interajuda e no processo dialógico professor-aluno e alunos entre si.

Associado a ideia de aprendizagem, o “problema” precisa se destacar como elemento interno do sujeito e não externo a ele. Incorporar o problema, tomando-o como seu é imprescindível para que o sujeito se torne promotor de ações cognitivas. Fazer com que um problema, em um primeiro momento do professor, torne-se do aluno perpassa pelo processo de devolução, já abordado anteriormente.

Poderíamos aqui discorrer várias outras definições atribuídas à palavra problema, entretanto, acreditamos que as definições apresentadas já nos bastam para compreender as características de um problema. De qualquer forma, percebemos que em nenhuma das definições encontramos como característica uma situação que se reduz a aplicação de um conteúdo matemático aprendido na aula. Percebemos também pelas definições apresentadas que a principal característica de um problema é o caráter desafiador, capaz de gerar, nas palavras de Muniz (2006, p. 151), “uma desestabilização cognitiva e afetiva”. Consequentemente, podemos destacar o caráter individual de um problema, pois, nas palavras de Ponte e Santos (2002, p. 31), “o que representa um problema para um indivíduo pode não ser para outro”.

Rabelo (2002, p. 79) considera três características elementares em um problema: “1. que o problema a ser resolvido esteja num estado dado; 2. que se deseja que ele esteja num outro estado; 3. que não há, de imediato, uma maneira óbvia, clara de realizar tal mudança”. O autor continua suas reflexões, explanando sobre as características apresentadas anteriormente, a saber:

> 1. Dados ou estado inicial: o problema começa num certo estado, com certas condições, objetos, peças de informações que são partes do problema e podem ser reconhecidas com certa facilidade.
> 2. Metas ou questões: o estado desejado ou final do problema requer pensamento para transformá-lo, as partes que são desconhecidas e trazem dificuldades a serem solucionadas.
> 3. Obstáculos ou questões escondidas: o pensador tem, à sua disposição, certos caminhos, mas não sabe, de imediato, a resposta correta, a sequência correta do que deve ser feito.

Na perspectiva da Educação Matemática, um bom problema pode instigar o gosto pelo trabalho mental se proporcionar ao estudante o prazer pela descoberta da resolução, desenvolvendo, desta forma, a criatividade e aprimorando o raciocínio.

Após essa sucinta discussão sobre a definição e tipos de problema, passaremos a abordar outras concepções, talvez menos conhecidas, mas de fundamental importância para a concretização deste trabalho: as situações-problema, os jogos-problema e, mais adiante, a construção da nossa concepção de problemas de lógica.

2.2.1 Situações-problema

Pactuando com a ideia de que ensinar e aprender matemática não se resume a simples utilização de métodos, técnicas e algoritmos convencionais, mas sim que a matemática é um instrumento para o desenvolvimento do pensamento numa perspectiva histórico, social e cultural que vai além dos conteúdos curriculares, faz-se necessário ampliar o conceito de problema, mesmo sendo comum encontrarmos professores e pesquisadores que utilizam as expressões “problema” e “situações-problema” como sinônimas.

Nesse sentido, Muniz (no prelo) sabiamente expõe que o conteúdo matemático passa a ser de fundamental importância, não mais como tópicos curriculares a serem vencidos/cumpridos, mas um conteúdo com forte significado de ferramenta do pensamento humano quando da realização e utilização de instrumentos culturais para a resolução de situações significativas.

Macedo (2002, p. 114) defende que as situações-problema caracterizam-se por recortes de um domínio complexo, cuja realização implica mobilizar recursos, tomar decisões e ativar esquemas. São fragmentos relacionados com o nosso trabalho, nossa interação com as pessoas, nossa realização de tarefas, nosso enfrentamento de conflitos.

Para Dante (2003, p. 20):

> Situações-problema são problemas de aplicação que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos. Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc. Em geral, são os problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse.

Por meio das situações-problema é que a matemática rompe os muros escolares e passa a fazer parte do mundo real de um modo mais significativo, privilegiando o desenvolvimento de novos esquemas mentais e o aprimoramento dos já existentes, transformando a resolução de problemas em uma competência, muito além da reprodução dos conteúdos curriculares. Sob este prisma, os conteúdos curriculares atuam como instrumentos, logo as situações-problema não são propostas a partir de um conteúdo matemático em específico, mas por sua relevância e significação para os agentes envolvidos no processo. Então uma situação proposta em uma determinada classe, que promoveu a motivação e o envolvimento dos aprendizes e, consequentemente o sucesso da atividade com seus fins pedagógicos pode ter um resultado totalmente contrário em outra turma até mesmo da mesma escola. Isto significa que não existe um manual de situações-problema. Elas representam um trabalho coletivo, que pode surgir tanto da sensibilidade do professor quanto do interesse dos alunos, que pode variar de grupo para grupo, de momento para momento dentro do mesmo grupo.

Maldaner e Isaia (2001, p. 110), enfatizam que a contextualização das situações propostas pode dar-se por meio de experiências concretas do aluno no seu respectivo contexto social ou por meio da referência e (ou) da reconstrução, na escola, de experiências significativas que já fazem parte do mundo cultural das crianças, tais como: medição, situações de comércio, jogos, etc.

Sobre as situações-problema elaboradas a partir de um jogo, interessante é a reflexão proposta por Macedo, Petty e Passos (2000, p. 49):

> Situações-problema são questões elaboradas que têm como referência momentos significativos do jogo. Representam pontos de impasse durante as partidas e exigem decisões importantes para garantir um bom resultado. Têm como objetivo principal desencadear vários tipos de análise, propiciando um maior domínio da estrutura do jogo, tentando assim unir conhecimento e aprendizagem.

Percebemos que os autores enfatizam a análise e a tomada de decisão como pontos fundamentais para dominar a estrutura de um jogo e garantir um bom resultado, ou seja, as mesmas estruturas necessárias para resolver os problemas do cotidiano nas suas mais variadas versões, mesmo os que não estejam diretamente relacionados com a matemática escolar. No momento que o aluno interioriza o problema, o assume como seu e o resolve, desenvolve a capacidade de crítica e autocrítica, diferentemente do que acontece quando resolve um problema simplesmente para a correção do professor.

Entretanto, cabe ressaltar, como bem prelecionam Dias e Silva (2008, p. 37), não basta estar vinculado a uma situação real para caracterizar uma situação-problema. Um problema tradicional pode usar o contexto do mundo real, mas ser estruturado pelo professor de forma a fornecer as informações já organizadas para a sua solução. As situações-problema muitas vezes não têm resposta única. Cada decisão tomada quanto aos aspectos do problema que se encontra em aberto define um caminho diferente para uma solução.

Trabalhar com situações-problema implica também em uma postura diferenciada por parte do professor, visto que nesse contexto ele deixa de ser o detentor do caminho e da única resposta correta, como acontece nos problemas tradicionais, para assumir uma posição dialógica e reflexiva junto aos aprendizes. A postura necessita ser aberta, porém reflexiva, afinal não são todas as respostas produzidas que são válidas. Não é o simples fazer diferente. A validade perante os pares, tanto do caminho percorrido, quanto da resposta construída, em um ambiente dialógico, continua sendo essencial para a efetiva aprendizagem matemática, tal qual abordaremos no desenvolver deste trabalho sob o prisma da produção dos alunos e sua validade científica no campo da aprendizagem matemática.

2.2.2 Jogo-problema

Os jogos matemáticos já são bem conhecidos na perspectiva da didática da matemática, com diversos estudos comprovando sua relevância no processo de ensino e aprendizagem. Muniz (1999, p. 213) expõe que:

> Duas relações entre jogo e matemática são bastante difundidas atualmente. São fundadas nas noções de discussão/argumentação matemática, e também sobre a produção científica da matemática como uma espécie de jogo: um jogo produzido e reservado aos sábios. São jogos onde as regras se confundem com as regras formais da matemática: jogos de reflexão pura e jogos matemáticos.

Também Macedo (1994, p. 138), compartilha desse fundamento, afirmando que os jogos permitem a criança observar seus erros, enfrentar conflitos, experimentar alternativas, problematizar ou criticar pontos de vista, tudo isso realizado, obviamente, pela mediação do professor ou de seus colegas.

Abordaremos aqui, por acreditar ser esta uma reflexão fundamental na busca de um conceito para os problemas de lógica, os jogos de reflexão pura, que se caracterizam como jogos de recreação pura. Para Reysset (1995, citado por MUNIZ, 1999, p. 214) os jogos de reflexão pura são os representantes de uma criação lúdica muito particular, fruto da genialidade dos homens e dos povos à colocarem em cena suas faculdades de dedução e de inteligência. Esses jogos são tão antigos quanto a história da humanidade e desenvolvidos pelas mais variadas civilizações, cada uma à sua maneira. No papiro Rhind, um dos mais famosos documentos matemáticos, com mais de 3.500 anos, há registros de situações desse nível.

O jogo de reflexão pura consiste, na definição proposta por Caillois (1967, citado por MUNIZ, 1999, p. 214) "em jogos de competição, jogados entre dois participantes, na maioria dos casos sobre uma plataforma. Não há diferenciação entre o jogo proposto para o adulto e aquele proposto para a criança". Competências equivalentes são exigidas dos jogadores, sejam eles adultos ou crianças.

Muniz (1999, p. 214) continua, retomando Reysset (1995), ressaltando as características fundamentais dos problemas de reflexão pura. Sendo este o ponto que mais nos interessa, visto compreendermos ser este o elo entre os problemas de reflexão pura e os problemas de lógica. São jogos criados sobre estruturas racionais profundamente enraizadas nas lógicas matemáticas. Os simpáticos aos jogos de reflexão pura estimam que se trata de jogos que favorecem o raciocínio abstrato e lógico. São jogos que integram o prazer pela competição e aqueles da dedução e da criatividade pura.

E mais (MUNIZ, 1999, p. 215):

> Os jogos de reflexão pura não possuem necessariamente um conteúdo matemático, mas a atividade é ligada por competências transversais aos processos de matematização. Os jogos de reflexão permitem a possibilidade de favorecer para as crianças ocasiões de se avaliarem à eles mesmos, ou em relação aos outros, num contexto de regras que ele aceita, e de despender nesta ocasião uma energia latente que se transformará em prazer lúdico e em mecanismos intelectuais adquiridos.

Essas características nos remetem tanto aos fundamentos elementares para ser um bom matemático: resolução de um problema e a construção de uma teoria; quanto para a Educação Matemática, que privilegia a capacidade de resolver problemas como competência básica para viver no mundo contemporâneo. Essa competência ultrapassa a memorização de métodos e técnicas, ou seja, consiste em construir uma resposta que nada mais é do que a elaboração de uma teoria para uma determinada situação.

Quando falamos em jogo-problema nos remetemos às características apresentadas por Criton (1997, citado por MUNIZ, 1999, p. 216): “1. que seja acessível ao maior número de pessoas; 2. que seu enunciado intrigue, surpreenda, coloque um desafio àquele que o lê; 3. que a resolução do problema possa divertir, distrair, surpreender aquele que se invista”.

Aprimorando nossa reflexão não podemos deixar de mencionar que a diferenciação entre um problema matemático e o jogo-problema é a ludicidade deste segundo, que conforme Criton (1997, citado por MUNIZ, 1999, p. 217) deve ser garantido a partir de três pontos. A saber:

> 1. na sua aparência: a redação do enunciado pode ser divertido, humorístico, ele pode imitar a atualidade. Ele pode também ser colocado em forma de poema, de enigma, ou utilizar jogo de palavras e trocadilhos; 2. na sua característica curiosa: inabitual, estranho e surpreso; e 3. no desafio que ele pode ter.

No entendimento do autor esses pontos seriam suficientes para garantir a relação entre o sujeito e o lúdico. Contudo, não podemos ignorar a subjetividade envolvida no processo, o que significa que o que é lúdico para um, pode não ser para o outro.

Embora os jogos-problema impliquem teorias de lógica, de permutações, de organização, de combinação, de probabilidades, de gráficos, de aritmética, de álgebra, de geometria, que esboçam nosso interesse nessa pesquisa, eles se destinam a sujeitos pré-dispostos ao gosto pela matemática. Na história, representaram uma forma de desafio entre os matemáticos. As Olimpíadas de Matemática, amplamente difundidas e atualmente parte da política educacional pública brasileira, seguem esse preceito. Vejamos o que diz no sítio eletrônico das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Figura 1: OBMEP

Problemas da 15na

Alunos, professores e apreciadores;

Bem-vindos ao *Problemas da 15na*. Nessa seção, apresentamos problemas que desafiam a sagacidade dos leitores. A cada quinzena são postados 3 problemas classificados em 3 níveis de escolaridade - da mesma forma como acontece nas provas da OBMEP -, e as soluções dos problemas da quinzena anterior.

Você pode ou não conseguir resolver esses problemas, mas vale a pena se esforçar... *não desista* da primeira vez! Persistência é essencial! Assim você aguça o seu raciocínio, e tem a alegria de acertar ou de descobrir os seus erros - *bom humor é fundamental!* É assim que se *faz* Matemática.

Você também pode enviar sua solução ou propor um problema para essa sessão. Fique atento ao calendário.

Em arquivos estão os problemas anteriores com suas soluções.

Confira aqui as soluções dos problemas da 8ª 15na!

Comissão do Problemas da 15na

Fonte: sítio eletrônico das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), 2009.

Ao pensarmos nessa pesquisa partimos da concepção de que a matemática, uma ciência universal, não deve ser acesso de poucos 'iluminados', mas que todos podem aprender matemática e se tornarem bons resolvedores de problemas, não somente no contexto escolar, mas no seu cotidiano. Desta forma, após essa reflexão sobre a definição de problema, de situação-problema e de jogo-problema, nos propomos a construir nossa definição de problemas de lógica.

2.2.3 Problemas de lógica

Nas abordagens anteriores procuramos definir, com fundamento em alguns autores a definição de problema. Neste momento, para substanciarmos nossa definição de problemas de lógica, faremos uma retomada rápida do que vem a ser “lógica”. Não aprofundaremos o tema por esse ser um assunto extremamente amplo e não ser o objetivo principal desse estudo.

“É lógico!” Essa expressão é constantemente usada no discurso das pessoas para justificar situações óbvias, que parecem evidentes ou que se têm uma opinião fácil de sustentar. Em nosso cotidiano, fazemos afirmações e suposições de vários tipos e efetuamos conclusões sobre acontecimentos o tempo todo, sendo a maioria dessas conclusões fundamentadas na nossa intuição, experiência ou a partir de comparações com outras situações vivenciadas anteriormente. Para exemplificar essa noção cotidiana de lógica recorremos ao exemplo de Machado (2000, p. 5):

Figura 2: É lógico!

Mal acabara de tocar o sinal para começar a aula, a professora Paula entrou na sala.

Fábio imediatamente perguntou:

– Para quando foi adiada a prova de hoje?

Todos arregalaram os olhos. Até mesmo dona Paula ficou surpresa com a pergunta.

De fato, ela achara mais proveitoso fazer uma revisão da matéria com os alunos e transferir a prova para a semana seguinte. Mas não havia falado com ninguém a respeito disso e ainda tinha nas mãos o pacote de folhas impressas para a prova.

– Como é que você concluiu isso, Fábio?

– É lógico que não haverá prova hoje! – respondeu ele. – Sempre que é dia de prova, a senhora chega um pouco antes do sinal e hoje não chegou. Além disso, trouxe a caixa de giz de cor, embora não seja de costume trazê-la em dias de prova. Havíamos combinado que faríamos a prova com consulta e que cada um utilizaria o material que desejasse. Quando isso acontece, a senhora geralmente traz um livro para ler durante a prova, e não estou vendo livro algum... Elementar, minha cara mestra...

Surpresa, dona Paula admitiu que Fábio tinha razão.

– É verdade... – disse. – A prova foi adiada para a próxima semana.

Fonte: Machado, 2000, p. 5.

Como exposto na história, nossas ações cotidianas são lógicas, quem nos conhece ou convive muito conosco consegue “prever” nossas atitudes futuras fundamentado nas evidências que deixamos nas ações passadas, ainda que de forma inconsciente, como bem expõe a história do aluno (um excelente observador) com a professora.

Entretanto, é muito comum nos depararmos com discursos infundados, ditos “sem lógica”, o que nos faz perceber que nem sempre isso é suficiente. Para provar alguma coisa, sustentar ou defender uma concepção ou convicção é preciso argumentar, é necessário apresentar justificativas suficientemente fundamentadas para convencer o interlocutor.

É fundamentado nessa perspectiva que construiremos nossa definição de problemas de lógica. Mas antes abordaremos um pouco da história da lógica matemática que embora corriqueira, contém uma história, uma ciência e muita controvérsia. Sabe-se, como exemplifica Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005, p. 10), que na primeira metade do século XIX a lógica não tinha o menor prestígio, nem nos meios científicos, nem entre o grande público. Entretanto, nos últimos cem anos teve um brilhante desenvolvimento, constituindo-se como o estudo dos meios de demonstração.

Etimologicamente o mais comum é encontrar a palavra lógica como derivado do grego *logiké*, que significa arte de raciocinar ou de argumentar. Nesse sentido o nome de Aristóteles (384-322 a.C) surge quase que automaticamente, mesmo quando se tem a clareza que a palavra lógica não foi por ele utilizada. Na obra *Organon* (que significa instrumento), publicada pelos seguidores de Aristóteles após sua morte, foram reunidos seus escritos sobre o raciocínio. Organizado em cinco livros, *Categoriae, Topica, De interpretatione, Analytica Priora e Analytica Posteiora*, fica claro, como expõe Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005, p. XII) que:

> Evidentes, para Aristóteles, são as proposições que por si mesmas garantem a própria certeza, ao passo que prováveis são as que enunciam opiniões aceitas por todos, pela maioria ou pelos sábios [...]. não se nota, no pensamento aristotélico, qualquer sugestão de hierarquia entre essas duas maneiras [analítico e dialético] de raciocínio: elas não se excluem mutuamente, não se sobrepõem, não substituem uma à outra.

A lógica aristotélica serviu de referência para os estudos de lógica até meados do século XIX, mais especificamente, os estudos se restringiram a transmissão da produção de Aristóteles. Embora a lógica grega seja a mais conhecida, Moraes (2007, p. 6) assevera que:

> Podemos dizer que no mundo ocidental a lógica surge na Grécia, mas existem também contribuições dos chineses e principalmente dos indianos. No caso da China, foram encontrados métodos de discussão e uma sofística, mas não foi desenvolvida uma lógica como a do grego Aristóteles ou do indiano Dignãga (~480 – 540).
> Segundo Bochenski (1970), a lógica formal se desenvolveu na Índia, assim como na Grécia, a partir de métodos de discussão sistematizados no século II d.C. na obra Nyãya-sutra. Esta obra foi pivô de controvérsias entre os lógicos budistas e brahmánicos durante cerca de 500 anos e, entre os pensadores mais importantes deste período, merece destaque Dignãga, o maior nome da lógica indiana.

Vários outros autores merecem destaque por suas contribuições na transmissão do pensamento lógico antigo, entre eles Cícero (106 – 43 a.C), Alexandre de Afrodisias (~170 – 230) o primeiro a usar o termo “lógica”, Porfírio (~232 – 304). Moraes (2007, p. 13 – 19) destaca João Escoto Erígena (~810 – 877) como o primeiro a usar métodos silogísticos de raciocínio, Leibniz (1646 – 1716) reconhecido como um dos maiores lógicos da história, Bernard Bolzano (1781 – 1848), considerado o primeiro a separar a lógica psicológica da lógica retórica, caracterizando em seus trabalhos o que hoje é chamado de dedução, George Boole (1815 – 1864) famoso pelo desenvolvimento da lógica formal, entre outros tantos que contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento da lógica até os dias atuais.

Aristóteles, segundo Chauí (1994, p. 38), define lógica como a ciência da razão, na qual o raciocínio é o instrumento pelo qual o homem é capaz de adquirir e possuir a verdade. Nesse sentido, o raciocínio é tomado como um tipo de operação do pensamento que consiste em encadear logicamente as ideias para tirar uma conclusão, ou seja, a lógica fornece as leis, regras ou normas ideais de pensamento e o modo de aplicá-las para demonstrar a verdade. Nas palavras de Chauí (1994, p. 44) “a lógica também estabelece os fundamentos necessários para as demonstrações pois, dada uma certa hipótese, a lógica permite verificar quais são as suas consequências; dada uma certa conclusão, permite verificar se ela é verdadeira ou falsa”.

Lalande (1999, p. 630) define lógica como “a ciência que tem por objeto determinar, por entre todas as operações intelectuais que tendem para o conhecimento do verdadeiro, as que são válidas, e as que o não são”.

Bastos e Keller (1994, p. 13) reúnem algumas definições, a saber:

> A lógica formal é uma ciência que determina as formas corretas (ou válidas) de raciocínio (J. Dopp).
> Lógica é a ciência das formas de pensamento (L. Liard).
> Lógica é a linguagem que estrutura as linguagens descritivas (L. Hegenberg).
> Lógica é a ciência da argumentação, enquanto esta é diretiva da operação de raciocinar (G. Telles Junior).

Dentre as definições dadas percebemos como ponto comum a exaltação das formas de pensamento, da linguagem descritiva do pensamento, das leis da argumentação e raciocínio, dos métodos e princípios que regem o pensamento humano. Para Kneale e Kneale (1962, p. 3) “a lógica não é apenas um argumento válido, mas também reflexão sobre os princípios da validade”. Nesse sentido, Silva (1940, p. 26) sabiamente contribui com essa reflexão quando afirma:

> A linguagem é um aparelhamento cheio de peias e quem não tiver a ciência de sua estrutura e fim, cairá fatalmente em suas armadilhas. Eis então, o motivo da importância do estudo da lógica. Nesta, sob um ponto de vista especial, o raciocínio estuda o raciocínio, desvenda-lhe os mistérios, analisa-lhe as partes; a definição é definida, ajuíza-se sobre os juízos.

Refletir e propor uma solução que possa ser defendida, argumentada. Eis na nossa compreensão, a lógica de resolver problemas para aprender matemática. A mobilização e organização de esquemas mentais diante de uma situação desconhecida a fim de vencê-la constitui o desenvolvimento do que chamamos de raciocínio lógico. Nesse momento, convém perguntar: a lógica não é uma característica de todos os problemas matemáticos? Temos consciência que sim. Afinal a lógica, enquanto ciência do raciocínio é uma das características da ciência matemática e resolver problemas, tema que refletiremos mais adiante, faz parte dessa ciência. Justifica-se assim adotar como nomenclatura a expressão problemas de lógica e não problemas lógicos, visto que entendemos que para ser um problema é preciso seja possível prever uma solução a partir dos dados fornecidos.

Apesar de encontramos na literatura diferentes subclassificações para diferentes tipos de problema, sentimos a necessidade de definir o que denominamos problemas de lógica com fundamentos nos conceitos de problema, situação-problema e jogo-problema, abordados anteriormente.

Embora não se caracterizam como situações-problema, pois na maioria das vezes não estão interligados a uma situação real, os problemas de lógica favorecem o desenvolvimento de novas estruturas de pensamento, pois cada problema, assim como nas situações-problema é único, não há modelo a ser seguido, mas uma recorrência às estruturas já formadas como forma de subsídio para a formação de novas estruturas. Não se trata de aprimorar a memória, mas o desenvolvimento de uma competência fundamental na sociedade atual e cada vez mais em evidência no mercado de trabalho que é a de buscar soluções para problemas nada convencionais do cotidiano, sendo muitas vezes soluções alternativas, criativas e inovadoras a partir de premissas dadas.

Na perspectiva do jogo-problema, mais especificamente, nos jogos de reflexão pura os problemas de lógica fornecem aos seus jogadores, como expõe Muniz (1999, p. 217) o gosto do esforço e da dificuldade, o sentido da ordem, o respeito aos outros, o interesse pela concentração, o treinamento da memória, o controle de si, além da lógica e imaginação dedutiva: competências bem ligadas à matemática.

Assim, classificamos como problemas de lógica, os problemas matemáticos de caráter lúdico e desafiador, não ligados diretamente a um conteúdo matemático escolar ou pelo menos um conteúdo não conhecido formalmente até o momento pela criança, mas que envolvam esquemas mentais matemáticos, isto é, os raciocínios de sequência, ordem, classificação, seriação, composição, decomposição, numérico, geométrico, métrico, proporcionalidade, regularidade e operacional, entre outros tantos exigidos na resolução de um problema. Destaca-se também o descompromisso com o uso de métodos e técnicas formalizadas na escola, o que privilegia, segundo Muniz (1999, p. 217), o raciocínio próprio dos jogadores e as diferentes maneiras que ele utiliza para resolver a situação dada. Podendo significar uma forma especial de educação libertadora, possibilitando a consciência de que a lógica é fruto da organização do raciocínio humano, onde a matemática foi gerada no decorrer da história da humanidade, não sendo fruto de um homem só, logo, todos podem fazer parte dessa construção.

Sob este prisma, elencaremos alguns critérios para que uma situação seja, neste estudo, considerada um problema de lógica:

- seja um problema e não somente um exercício;
- o enunciado, seja ele verbal ou imagético, tenha caráter lúdico, curioso e adidático (cabe-nos buscar no estudo em que se constitui tal caráter);
- seja capaz de instigar e desafiar, podendo motiva o indivíduo a resolvê-lo;
- não sejam visíveis, diretamente, números ou símbolos matemáticos;
- a matemática envolvida não seja explícita, isto é, não esteja vinculada diretamente a um conteúdo matemático escolar ou pelo menos que o aluno não tenha tido contato na sua vida escolar;
- que exija a formulação de hipóteses por meio da ativação de campos conceituais já desenvolvidos pelo indivíduo como alicerce para o desenvolvimento de novos esquemas mentais;
- que seja possível construir caminhos para solução a partir de evidências fornecidas nos enunciados;
- que haja possibilidade de diferentes estratégias de resolução.

Os problemas de lógica devem incentivar o educando, sujeito ativo do processo de ensino e aprendizagem a ser, conforme ensinamentos de Becker (2003, p. 25) “um sujeito operativo, de decisão, de iniciativa, cognitivo, coordenador e diferenciador, capaz de aumentar sua capacidade extraindo das próprias ações ou operações, novas possibilidades”. É a espontaneidade cognitiva, pois não se constitui ordem de alguém, mas auto-organização, quebrando-se assim, o paradigma de que o único método de resolução existente é o ensinado pelo professor.

Nossa opinião difere de Silveira (2001), que no sítio eletrônico da UFRGS, diz que “torna-se cada vez mais comum nos depararmos com desafios matemáticos nos livros-didáticos de matemática”. No entanto, o referido autor discorda da utilização desses desafios, que para ele “nem chegam a ser problemas, como material de ensino, pois visam apenas o entretenimento e um bom problema matemático além de representar um desafio, tanto para matemáticos como ao poder da disciplina por eles criada, ‘mexe’ com a matemática”. Para o autor um bom problema de matemática é muito mais do que uma charada, fertiliza as teorias matemáticas. Respeitamos a opinião do autor por entendermos que a concepção de matemática dele seja diferente da nossa. Compreendemos a matemática muito além da aplicação de conteúdos ou teorias impostas pelo currículo escolar (sem desmerecê-los) para resolver problemas, mas como uma construção humana, acessível a todos, além de um importante instrumento na construção do raciocínio-lógico. Entendemos os problemas de lógica como parte da matemática, logo não podem ficar à margem da escola.

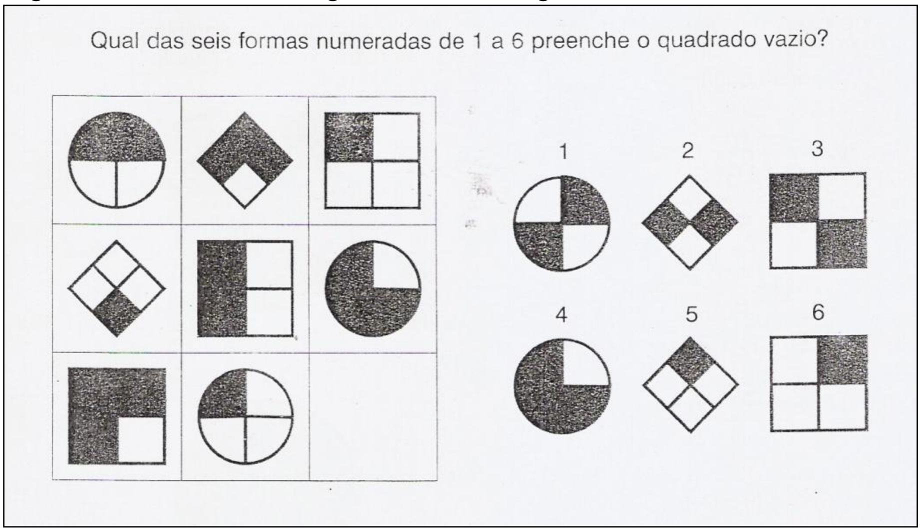
Para melhor expor nossa definição de problemas de lógica, ilustraremos algumas dessas situações:

Figura 3: Problema de lógica – O lobo, a ovelha e a couve

Um fazendeiro precisa atravessar de canoa um rio levando os seguintes itens: um lobo, uma ovelha e um monte de capim. Porém existe o problema que na canoa só cabe o fazendeiro com um dos itens acima. Sabendo-se a canoa pode dar várias viagens, que a ovelha não pode ficar sozinha com o capim, pois ela o come, o lobo não pode ficar sozinho com a ovelha, pois ele a mata, qual a solução?

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

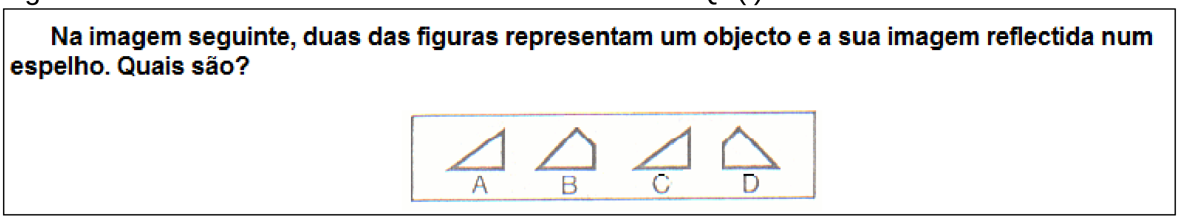
Figura 4: Problema de lógica – Pintando geometria



Fonte: Hercun, 2004, p. 7.

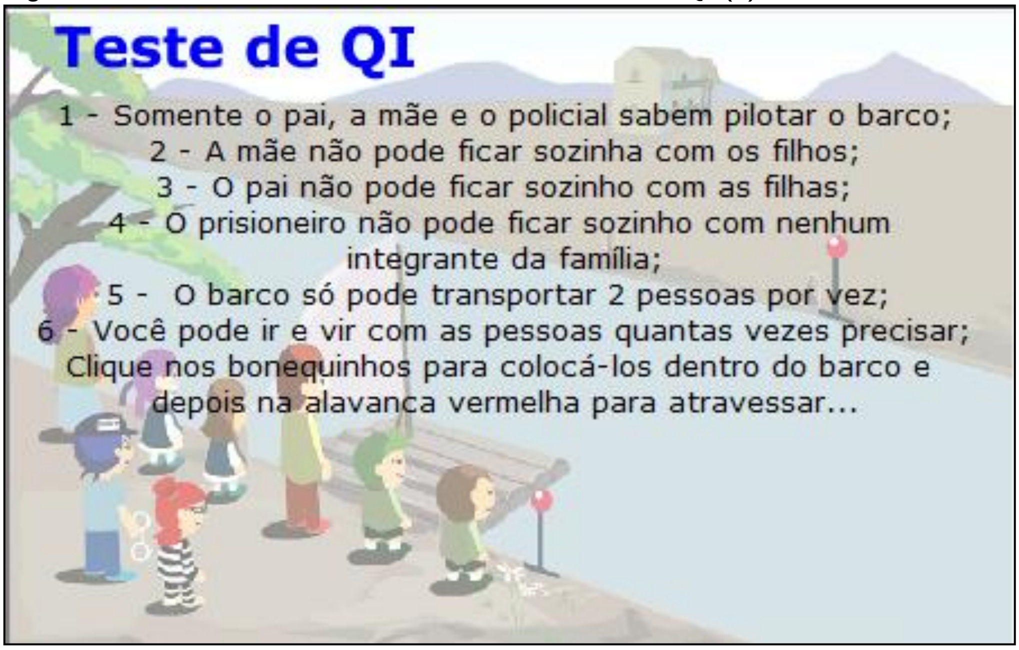
É verdade que esses problemas não são novos, basta uma pesquisa rápida, digitando “desafios + lógica”, em um sítio de busca que mais cinco milhões de referências aparecem. Muitos dos desafios disponíveis não atendem a nossa definição, mas nos dão uma ideia de quanto os problemas que envolvem esquemas mentais matemáticos são procurados. É comum encontrarmos nesses sítios expressões como: “melhore sua lógica matemática”, “desafios que necessitam de muito raciocínio”, “resolver problemas de lógica é diversão e desafio”.

Figura 5: Modelo de atividade realizada em testes de QI (I)



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora..

Figura 6: Modelo de atividade realizada em teste de QI (II)



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Embora continuem sendo usados e aperfeiçoados esses testes perderam força, principalmente depois de estudos que comprovaram a existência de outras inteligências como a interpessoal, intrapessoal, musical, espacial, verbal o corporal, tão importantes quanto a inteligência matemática.

Ressaltamos que alguns dos problemas utilizados neste estudo podem até ser encontrados em testes dessa natureza, como é o caso do problema “O lobo, a ovelha e a couve”, muito semelhante ao problema apresentado na figura seis. Entretanto nosso estudo não objetiva mensurar a inteligência de nenhum estudante, pelo contrário, nosso foco encontra-se nas estratégias que ele utiliza para resolver tais problemas, independente do tempo que leva para resolver um problema ou da forma como ocorre o registro dessas estratégias. Nosso interesse é auxiliar o desenvolvimento de esquemas mentais matemáticos a partir da resolução de problemas de lógica e não de mensurá-los.

2.3 Resolver problemas enquanto estratégia metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática

Uma das perspectivas para ensinar e aprender matemática é utilizar os problemas como ferramenta didática. Vamos abordar a partir deste ponto, a noção de resolução, ou seja, como os estudiosos da área compreendem a resolução de um problema e como os problemas podem caracterizar uma estratégia metodológica poderosa para a formação de um indivíduo resolvedor de problemas para além dos muros escolares.

2.3.1 Noção de resolução no contexto da aprendizagem matemática

Como dissemos na parte inicial da nossa reflexão, resolver problemas é o motor da aprendizagem não somente matemática, mas da produção do conhecimento em si. Destarte consideramos importante tecer algumas considerações a respeito do assunto.

Iniciaremos nossas considerações tomando por base os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 40):

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Percebemos claramente que a resolução de problemas proposta nos PCN abrange muito mais do que a aplicação de técnicas específicas para resolver problemas. Infelizmente, a maioria dos professores continua a entender a resolução de problemas como uma verificação de aplicação dos conteúdos matemáticos. Por exemplo, se o conteúdo em questão é sistemas de equações de primeiro grau, os problemas propostos serão para montar e resolver, utilizando um dos métodos ensinados, um sistema de equações de primeiro grau. Desta forma, o aprendiz já sabe que a resolução está vinculada ao conteúdo estudado. No entanto, quando ultrapassam os muros escolares onde os problemas não estão com o conteúdo a “tira-colo”, os problemas tornam-se indecifráveis. Dando a impressão que a matemática aprendida na escola não tem lugar no mundo real.

Os PCN (BRASIL, 1998, p. 40) prelecionam que como eixo norteador do ensino e aprendizagem a resolução de problemas deve seguir os seguintes princípios:

- a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
- um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e ano um conceito isolado em resposta a um problema particular;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Percebemos que estes princípios buscam possibilitar o desenvolvimento da resolução de problemas como habilidade básica não somente no contexto escolar, mas também no contexto sócio-histórico e cultural-econômico em que o educando está inserido, de forma que possa compreender uma informação dada, identificar as características críticas e suas inter-relações, construir ou aplicar uma representação externa, resolver uma determinada situação, avaliar, justificar e comunicar adequadamente.

Partilhamos com Valdés e Ramírez (2000), quando afirmam que o professor deve proporcionar ao aluno no momento da resolução:

- a ajuda necessária para compreender o enunciado, para que possa exercitar sua capacidade de refletir sobre o seu próprio processo de pensamento, afim de melhorá-lo conscientemente;
- o estímulo necessário para que o aluno confie em si mesmo e use a criatividade, no intuito de que explore e descubra novas estratégias de resolução;
- preparação para resolver outras situações que não sejam apenas na escola, mas sim no seu cotidiano;
- dar o tempo necessário para que o aprendiz elabore seu pensamento para a busca de soluções frente à situação apresentada;
- deixar que o aluno pense e crie suas próprias estratégias de resolução.

Dentro das considerações expostas pelos autores, tomaremos a liberdade de acrescentar: possibilitar o diálogo entre os alunos das estratégias produzidas, com intuito de promover a validação e correções de forma coletiva. Entendemos que tão importante quanto criar estratégias de resolução é a oportunidade de defendê-las como válida e discutir as alterações necessárias sem medos, sem constrangimentos. Muito mais do que a correção como certo ou errado, a validação é parte da construção da resposta. De nada adianta criar novas estratégias de resolução se essas não terão a aceitação do grupo. Brousseau (1986, citado por ALMOULOUD, 2007, p. 38) defende a dialética de formulação e da validação. Na dialética da formulação o aluno troca informações com os colegas, proporcionando o desenvolvimento de uma linguagem compreensível por todos, enquanto que na validação o aprendiz deve mostrar a validade do seu modelo, da sua resolução, submetendo ao julgamento de um interlocutor, que também ao rejeitar as construções deve fazê-lo argumentativamente. Desta forma, a teoria da validação funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como *milieu*[3] de estabelecer provas ou de refutá-las. Contudo o outro em questão não pode ser somente o professor, visto estendermos que um ambiente efetivo de aprendizagem é permeado pela solidariedade onde, como explica Muniz (no prelo):

> caso não nos sintamos seguros quanto nossa capacidade de produzirmos sozinhos a soluções, a resolução implica na busca de parcerias, estabelecendo-se uma atividade psicologicamente coletiva, onde, o importante em termos educacionais, não é a aquisição de uma resposta pronta para o problema ofertado por outrem, mas a realização de um trabalho em equipe para que juntos encontre-se a solução para o impasse.

Percebemos nas palavras de Muniz a importância do outro na construção do conhecimento. O aluno não mais produz para a correção do professor, ou seja, o problema deixa de ser do professor para ser do aluno e, a partir do momento que o problema é interiorizado pelo aluno, gerando desestabilização cognitiva e afetiva é que o conhecimento passa a ser realmente produzido. Não nos referimos aqui somente aos conteúdos, mas aos raciocínios envolvidos como um todo, transpondo a ciência matemática, para adentrar no campo dos valores também necessários para o convívio social: saber ouvir, respeitar o próximo, saber falar, expor as ideias sem ofensas, aceitar opiniões divergentes, entre outras.

Neste sentido, entendemos que resolver um problema é mais do que a aplicação de fórmulas. Pólya (1994, citado por GONTIJO, 2007, p. 57) afirma que, “a resolução de problemas é uma arte prática que todos devem aprender, é a arte de fazer matemática”.

[3] A noção de *milieu* foi introduzida por Brousseau (1986/2008) para analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos ou saberes e as situações e, por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações.

Significa ter a capacidade para resolver problemas não apenas rotineiros, mas problemas que requerem algum grau de originalidade e criatividade. Cabe, portanto, expor as fases de resolução de um problema desenvolvidas por Pólya (1995):

1º: Compreensão do problema;
2º: Estabelecimento de um plano;
3º: Execução do plano;
4º: Retrospecto.

Fazendo um breve comentário das fases desenvolvidas por Pólya podemos ressaltar que compreender o problema vai além da simples leitura, pressupõe a análise das informações dadas, a relevância dos dados, a relação entre eles. Se faltar a compreensão o aluno não terá interesse em resolver. Para Pólya (1995, p. 4) "é uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja".

Compreendido o problema (o que este solicita), passa-se para a segunda fase, onde se dá a concepção de um plano de resolução, que pode ser rápido ou demorado. A ideia de como solucionar o impasse pode surgir, como afirma Pólya (1995, p. 5), gradualmente, ou então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ideia brilhante. É importante que esse plano surja do aprendiz, que seja uma tentativa dele em resolver o problema, que ele não esteja vinculado ao que o professor deseja, que a resposta construída não seja para o professor. O que geralmente acontece nessa fase, como já abordado anteriormente, é que o plano coincide com a aplicação das técnicas que envolvem o conteúdo que está sendo estudado. Muitas vezes, o sujeito não tem a oportunidade e o hábito de pensar no problema. Apenas quer ter a tarefa cumprida.

Com o plano de ação em mente, cabe a etapa da execução das estratégias. É uma etapa mais fácil do que a anterior, desde que, o aluno tenha realmente concebido o plano, mesmo que com ajuda. Quando estamos concentrados somos capazes de ordenar nosso raciocínio a ponto de promover as correções necessárias até que estejamos convencidos da clareza dos passos a serem seguidos. O risco nessa etapa, para Pólya (1995, p. 9) é de que "o estudante esqueça o plano, o que pode ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor".

A última etapa consiste em fazer um retrospecto das etapas anteriores, isto é, consiste em validar a construção na resposta como um todo, desde a compreensão do problema até a resposta final. O que percebemos com a experiência de sala de aula é que muitas vezes os estudantes avaliam apenas a execução do plano, esquecendo de avaliar se o plano desenvolvido realmente atende ao questionamento do problema. Cabe ao professor planejar esse momento para desenvolver o hábito nos aprendizes. Não como julgador oficial, mas no planejamento de estratégias que permitam ao aprendiz discutir com seus colegas, expondo seu plano e fazendo que seja válido coletivamente. Essa, com certeza, não é uma tarefa fácil, principalmente no tocante a variável tempo. Não há como todos os estudantes explanarem suas construções. Mas, é possível desenvolver essa etapa em pequenos grupos, ou na medida em que o plano vai sendo executado, já categorizar os tipos de planos concebidos e chamar um representante de cada categoria para o quadro. Com o tempo o hábito do retrospecto vai incorporando o processo de resolução de um problema e os próprios aprendizes ao terminarem, cada um a seu tempo, já tendem a procurar um colega que também tenha terminado para discutir a validação de ambos.

Várias são as variáveis a serem consideradas na resolução de um problema que se constitui em contexto complexo. Uma delas é a motivação, que pode ser intrínseca ou extrínseca. A inclusão ativa do aprendiz no processo de resolução de um problema requer, por parte do professor, concebê-lo como um sujeito do seu próprio ensino, incentivando a sua atividade independente. Dentre os muitos fatores relacionados à motivação para a resolução de problemas podemos destacar desde a curiosidade individual até o medo das consequências de uma solução incorreta, como, por exemplo, em uma prova. No entanto uma consideração fundamental deve ser a maneira como o problema é formulado e proposto aos aprendizes. O problema precisa primeiramente despertar o espírito desafiador do aluno. Ele precisa querer resolver o problema. Isso não significa que os problemas precisam ser mirabolantes. Pólya (1995, p. 5) afirma que “o problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta”.

Sobre os fatores que interferem na competência de resolução de problemas, Dias e Silva (2008, p. 30) destacam que durante o processo de resolução são mobilizados conhecimentos, habilidades de criar estratégias para a resolução do problema e monitoração, atitudes e a afetividade.

Nesse contexto, os problemas de lógica por serem desafiadores e adidáticos por natureza possibilitam despertar no aprendiz o interesse pela resolução de problemas. Além de estimularem a curiosidade, entendemos que nos problemas de lógica os fatores estimuladores do desenvolvimento dessa competência tão relevante no mundo contemporâneo encontram-se presente em sua totalidade. Por serem formulados de modo desafiador são motivadores para aprendizes de todas as faixas etárias, valorizam a criatividade[4] a partir do momento que incentivam a produção de estratégias, promovem a aplicação de diversos conceitos matemáticos (sem necessariamente estar vinculado a um conteúdo específico do currículo escolar), desenvolvem atitudes e afetos quando consideramos o ambiente de coletividade e a quarta etapa da resolução proposta por Pólya.

2.3.2 A resolução de problemas e a apropriação de conceitos matemáticos

No ensino de matemática, uma parte significativa da carga horária das aulas deveria ser destinada para a resolução de problemas. Embora seja reservado tempo das aulas para resolver problemas, tem-se constatado um baixo rendimento dos estudantes quando submetidos a exames avaliativos, sejam eles internacionais como o PISA[5], onde, em uma escala que vai até seis, 73% dos brasileiros estão situados no nível um ou abaixo disso. Significa, por exemplo, que só conseguem responder questões com contextos familiares e perguntas definidas de forma clara, ou seja, não conseguem nem resolver problemas simples; sejam eles nacionais como a Prova Brasil, onde a avaliação de matemática também tem seu foco na resolução de problemas, o resultado amplamente divulgado pelos meios de comunicação foi a média de 4,2 entre os alunos que fizeram a avaliação.

Vários documentos oficiais tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ministério da Educação brasileiro e as Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar do National Council of Teachers of Mathematics ressaltam a importância e propõem objetivos da resolução de problemas para o ensino e aprendizagem por parte dos alunos. Entretanto, não abordaram como desenvolver esse trabalho na sala de aula, isto é, como utilizar essa estratégia a fim de formar um aluno resolvedor de problemas para além do contexto escolar. Com isso, embora extremamente valorizado, Dante (2003, p. 8) explica que este tem sido um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. É muito comum os alunos saberem efetuar todos os algoritmos e não conseguirem resolver um problema.

---

[4] Adotamos o conceito de criatividade numa perspectiva histórico-cultural como o desenvolvimento de algo novo e com valor.

[5] Programa Internacional de Avaliação de Aluno. E um programa de avaliação comparada, cuja principal finalidade é produzir indicadores sobre a efetividade dos sistemas educacionais, avaliando o desempenho de alunos na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. Os alunos brasileiros obtiveram em 2006 médias que os colocam na 53ª posição em matemática (entre 57 países).

Para Dias e Silva (2008, p. 29):

> Ensinar via resolução de problemas significa olhar o problema como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento matemático. Sob este enfoque, problemas são propostos ou formulados para contribuir na formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática. É a necessidade de resolver o problema que leva o aluno a elaborar ou a se apropriar coletivamente dos instrumentos intelectuais que serão necessários à construção de uma solução. Isto não significa que o problema seja utilizado apenas como um ponto de partida motivador que dá lugar à exposição dos conceitos necessários à sua solução. A resolução do problema, nesta abordagem, é o próprio caminho ao longo do qual os conceitos vão sendo construídos. É na ação de resolver um problema particular que conhecimentos e procedimentos são elaborados. A institucionalização destes conhecimentos (generalização, reconhecimento pelo grupo) é que ocorre após a resolução do problema.

Percebemos no enfoque anterior a importância da resolução de problemas enquanto estratégia de construção e não de treinamento do conhecimento ou dos conteúdos curriculares. Talvez essa seja uma dica para entender o porquê das dificuldades apresentadas pelos aprendizes ao resolver problemas se eles estão presentes no cotidiano escolar. Assumir perante a didática da matemática a resolução de problemas como estratégia metodológica implica em adotar uma postura de professor reflexivo, agente da sua prática, capaz de compreender que a matemática é um caminho para o desenvolvimento e aprimoramento do pensar, e não mero reprodutor do institucionalizado nos livros didáticos. Wanderer (2005, p. 42) elencou algumas características de um professor reflexivo, de onde destacamos:

> - luta por alternativas viáveis e comprometidas com a especificidade e o valor do trabalho docente e com uma educação que fomente as crianças a potencialidades de inventar e lançar as bases de um mundo diferente do já esboçado;
> - que deseja pensar sobre as dimensões sociais e políticas da educação e do contexto em que ela se insere;
> - não fica preso a uma só perspectiva, examina criteriosamente as alternativas que a ele se apresenta como viáveis, como também aqueles que lhe parecem distantes da solução, com o mesmo rigor, seriedade e persistência;
> - atitudes de abertura da mente, responsabilidade e dedicação juntamente com a formulação de questionamentos e habilidades na observação e análise;
> - desenvolve as suas teorias práticas à medida que reflete “na” e “sobre” a ação, sobre o seu ensino e as condições sociais que o produzem.

Deste modo, a resolução de problemas configura-se como um instrumento de vital importância para o professor avaliar a sua prática pedagógica na busca da constante reorganização no ambiente de aprendizagem, de forma a criar no aprendiz o hábito e a atitude de encarar a aprendizagem como um problema para o qual se tem que produzir respostas.

Reforçando nossa reflexão, Pólya (1995, p. 64) lembra-nos de que

> a Matemática não é um esporte para espectadores; não se pode desfrutar dela nem aprendê-la sem a participação ativa; por isso o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, professores de matemática, especialmente se considerarmos como nosso principal objetivo, o primeiro de nossos objetivos, o de ensinar o estudante a pensar.

E prossegue:

> A primeira obrigação de um professor de matemática é usar essa grande oportunidade; ele deveria fazer o máximo possível para desenvolver a habilidade de resolver problemas em seus alunos. Primeiro, ele deveria estabelecer a classe certa de problemas para os seus alunos: não muito difíceis, nem fáceis demais, naturais e interessantes que desafiem sua curiosidade, adequados ao seu conhecimento. (...). Depois, o professor deveria ajudar seus alunos convenientemente. Não muito pouco, senão não há progresso. Não demais, senão o aluno não terá o que fazer. Não ostensivamente, senão os alunos adquirem aversão ao problema, em cuja solução o professor ficou com a maior parte.

Nesse sentido, enquanto estratégia metodológica do ensino e aprendizagem da matemática os problemas de lógica podem estimular os aprendizes a realizar um trabalho voltado para a iniciação científica, onde a atividade intelectual desenvolvida é semelhante à desenvolvida pelo matemático, tal qual menciona Piaget (1973, p. 79):

> (...) não obstante a irreverência que possa haver em comparar-se um matemático a uma criança,é difícil negar que exista algum parentesco entre esta contínua construção intencional e refletida de operações sobre operações e as primeiras sínteses ou coordenações inconscientes que permitem a construção dos números ou das medidas, das adições ou multiplicações, proporções, etc.

Pais (2002, p. 35) aborda a valorização do uso pedagógico da resolução de problemas enquanto pressuposto de que seja possível o aluno se sentir motivado pela busca do conhecimento. É nesta concepção que ressaltamos a importância de abordar nas estratégias metodológicas de matemática os problemas ricos em situações adidáticas, tal como os problemas de lógica.

2.4 Os problemas de lógica e o desenvolvimento do raciocínio lógico

Na busca de aperfeiçoar nossa definição de problemas de lógica, bem como suas contribuições, dificuldades e limites, necessitamos compreender um pouco sobre a construção do pensamento humano, dos esquemas que possibilitam a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio-lógico. Para isso buscaremos apoio teórico em Piaget, Vergnaud e Brousseau, entre outros.

2.4.1 O raciocínio lógico na definição de Piaget

Faz parte do senso comum a afirmação de que a matemática desenvolve o raciocínio das pessoas, sendo de comum acordo entre educadores e leigos que resolver problemas é uma competência fundamental para viver na atual sociedade, onde as mudanças acontecem de forma muito rápida e as decisões precisam ser tomadas quase que instantaneamente, onde o raciocínio lógico é imprescindível.

Nesse sentido, paramos para questionar o que vem a ser o raciocínio e em especial o raciocínio lógico desenvolvido pela aprendizagem da matemática.

Raciocinar é uma característica humana, uma reação do pensamento de natureza complexa, ou seja, uma ação mental com encadeamento aparentemente lógico de juízos, argumentos ou pensamento com o objetivo de obter uma conclusão considerada válida. A lógica, como mencionado anteriormente, é a exaltação das formas de pensamento, da linguagem descritiva do pensamento, das leis da argumentação e raciocínio corretos, dos métodos e princípios que regem o pensamento humano. Percebemos que raciocínio e lógica estão amplamente relacionados já pelas suas definições.

Mas, como se dá o raciocínio lógico na perspectiva da aprendizagem e do desenvolvimento? Recorreremos ao epistemólogo suíço Jean Piaget e seus estudos sobre epistemologia genética para tentar compreender essa relação.

Primordialmente é necessário considerar a teoria piagetiana sobre a gênese do conhecimento. Aduz Piaget (1973, p. 7) que “o conhecimento não poderia ser concebido como algo predeterminado nas estruturas internas do indivíduo, pois que estas resultam de uma construção efetiva e contínua, nem nos caracteres preexistentes do objeto, pois que estes só são conhecidos graças à mediação necessária dessas estruturas”. Fica claro que o conhecimento não é inato, mas construído a partir das vivências do indivíduo com o meio, entendido como tudo que se dispõe para o sujeito enquanto desafio a sua inteligência, isto é, tudo que deve ser conhecido. A concepção piagetiana de meio é diferente da concepção da teoria histórico-cultural de Vigotski. Ressalta-se também que foi somente nos anos 70 que Piaget passou a adotar o termo “construtivismo”, que se tornou sua marca registrada.

Fávero (2005, p. 108) ressalta que o ponto-chave para compreender a teoria é compreender que na concepção de Piaget “o conhecimento não se encontra nem no sujeito, nem no objeto, mas na ação de que este sujeito exerce sobre o objeto”. Portanto, continua a autora (p. 109) citando Piaget (1973), “a não ser que o sujeito aja sobre o objeto e o transforme, ele não compreenderá sua natureza e retornará ao nível da mera descrição”.

Em suas explicações sobre a gênese do conhecimento humano Piaget faz menção aos estágios de desenvolvimento: sensório-motor, pré-operatório, operações concretas e das operações formais. Piaget (1983, citado por FÁVERO, 2005, p. 110) resume esses estágios:

> em primeiro lugar, num período sensório-motor, anterior à linguagem, constitui-se uma lógica de ações (relações de ordem, concatenação de esquemas, intersecções, estabelecimentos de correspondência, etc), fecunda em descobertas e mesmo em invenções (objetos permanentes, organização do espaço, causalidade, etc). Dos dois aos sete anos, há uma conceptualização das ações, logo, representações com descoberta de funções entre as co-variações de fenômenos, identidades, etc. Estas duas últimas constituem-se nas operações concretas (7-10 anos), de agrupamentos logicamente estruturados, mas ainda ligados à manipulação de objetos. Finalmente, por volta dos 11-12 anos, constitui-se uma lógica proporcional hipotético-dedutiva, sem combinatório, conjunto de partes, grupos de quaternidade, etc.

Vasconcelos (2002, p. 31) apresenta a lógica, na perspectiva piagetiana, como um processo resultante da formação contínua de esquemas produzidos por meio da adaptação (assimilação e acomodação) e organização. Explica também que para Piaget (1977) a “inteligência é resultado de construções ou de gêneses que se sucedem por reequilibrações majorantes e que ao se analisar as condutas cognitivas das crianças por meio de provas operatórias, pode-se deduzir com quais instrumentos cognitivos ela está operando”. Continua o autor:

> “no ensino da matemática, essa ideia pode ser aplicada na viabilização da aprendizagem de estruturas lógicas, por intermédio da observação, do acompanhamento e a análise do processo de aprendizagem, levando o professor a uma condição de mediador no sentido de intervir no nível operatório do aluno, o que resultaria em processos cognitivos permanentes”.

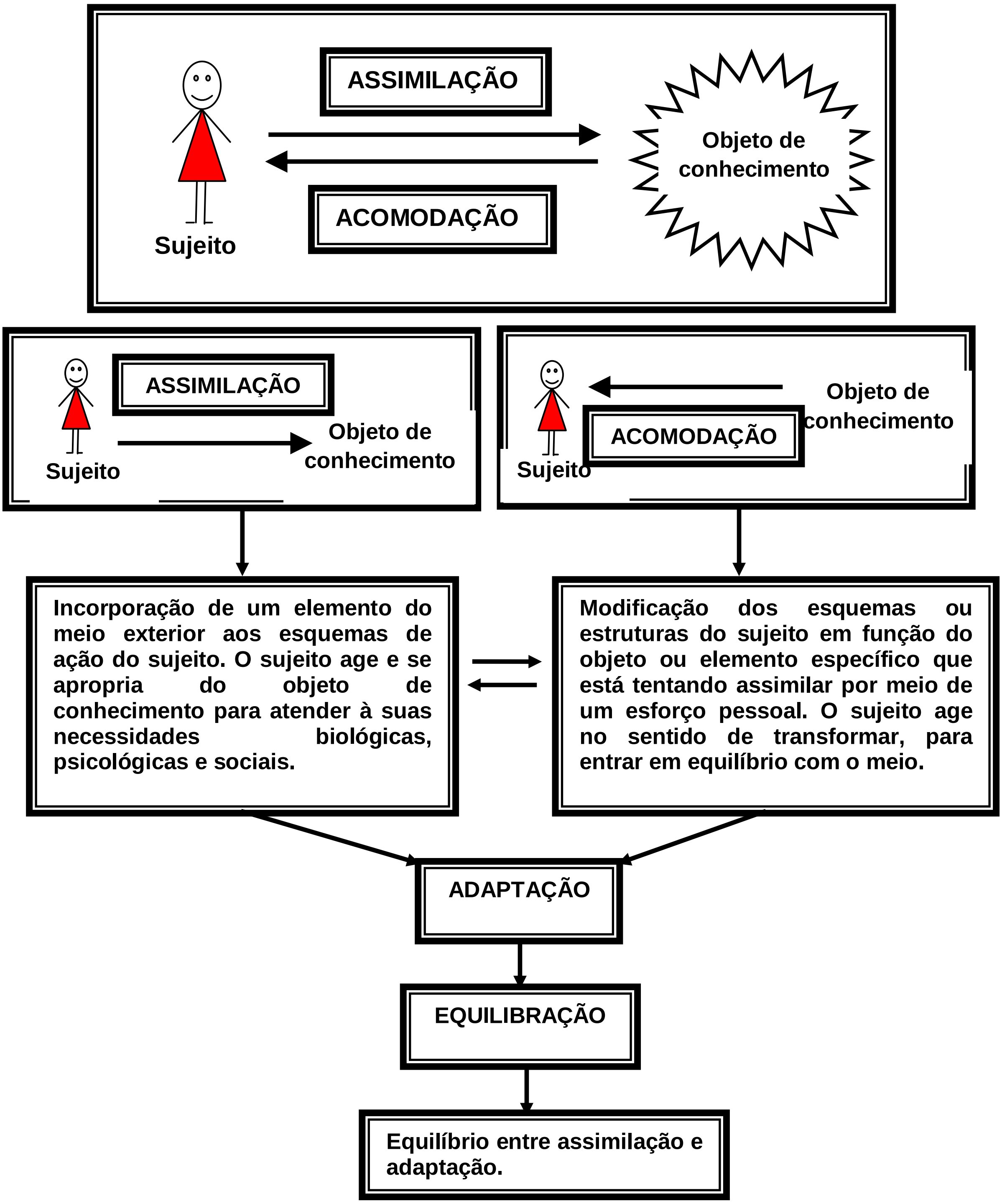
A teoria construtivista elaborada por Piaget é fundamentada na noção de equilibração, ou seja, nas palavras de Almouloud (2007, p. 23), “o processo pelo qual um esquema existente é transformado para adequá-lo a um novo objeto mais complexo”. Esse processo foi descrito por Almouloud (2007, p. 24) da seguinte maneira:

> - o sujeito interpreta os dados de seu ambiente e reage em função dos esquemas, ou seja, dos modelos de comportamento de que dispõe;
> - dados não-familiares provocam uma perturbação no funcionamento do esquema mobilizado;
> - o sujeito reage a essa perturbação por um processo de compensação que pode ser decomposto em três fases, que não devem ser confundidas com estágios:
> - a fase α, em que o sujeito negligencia e evita o que o perturba;
> - a fase β, em que o sujeito modifica seu esquema para assimilar novos dados. No curso desta fase, pode-se distinguir a assimilação de um novo dado como parte complementar e o estabelecimento de relações entre as partes complementares;
> - a fase γ, em que o sujeito integra os novos dados a um sistema hierárquico.

Desta forma, a construção de novos esquemas se dá pela desestabilização dos antigos e posterior reconstrução. A construção dos conhecimentos, como fenômenos de desenvolvimento, é uma reorganização de estruturas de nível inferior em superior.

Zacharias (2007) resume os processos de assimilação e acomodação e equilibração no quadro seguinte:

Quadro 2: Os processos de assimilação e acomodação



Fonte: Zacarias, 2007 (com adaptações da pesquisadora).

Em se tratando dos problemas de lógica, essa desestabilização pode ser constante, pois não existem métodos prontos para resolução e cada problema é único, o que significa que o resolvedor irá recorrer aos seus esquemas mentais, definido por Fávero (2005, p. 126) como “a estrutura de uma ação que, quando é fixada, torna-se receptível e, portanto aplicável, por assimilação, a situações diferentes daquelas que conduziram, inicialmente, à construção desse esquema”. Ao buscar a resolução de um problema de lógica o aprendiz já possui vários conceitos relativos ao raciocínio lógico-matemático, que irá utilizar como base no processo de construção de uma resposta. Sobre a elaboração desses conceitos passaremos a uma breve análise da Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud, que nos servirá de fundamento para analisarmos as resoluções dos alunos, visto que pretendemos identificar os esquemas mentais utilizados.

2.4.2 Teoria dos Campos Conceituais: aprendizagem conceitual na matemática

Pensar na escola é lembrar o conjunto de conteúdos pré-estabelecidos que os alunos precisam aprender. No entanto tem-se percebido que mesmo abordando todos os conteúdos previstos, poucos “ficam” de um ano para o outro, provando que não é a memorização dos conteúdos que garante a aprendizagem para além da prova mensal ou bimestral, mas sim a formação de conceitos matemáticos.

Como proposta de repensar as condições de aprendizagem conceitual, de forma que essa se torne mais significativa para o aluno, o psicólogo e pesquisador francês Gérard Vergnaud desenvolveu, após anos de estudo sobre os caminhos percorridos pelas crianças ao resolver problemas matemáticos básicos, a Teoria dos Campos Conceituais. O termo “campo conceitual”, segundo o pesquisador em entrevista à revista Nova Escola (14/10/2008), “afasta a ideia de conceito único e fechado e traz a dimensão das inúmeras relações feitas por um indivíduo que avança na compreensão dos conhecimentos matemáticos”. Só na adição e na subtração, segundo Vergnaud, abrem-se seis tipos de problemas, com graus distintos de complexidade, nos quais podem variar o estado inicial (o que se tem), a transformação (a operação em jogo) e o estado final (onde se chega).

Segundo Pais (2002, p. 51) a teoria dos campos conceituais foi desenvolvida para estudar as condições de compreensão do significado do saber escolar pelo aluno. Trata-se de buscar as possibilidades de filiações e rupturas entre as ideias iniciais da matemática, levando em consideração as ações realizadas e compreendidas pelo aluno. O autor (p. 53) destaca ainda a existência dos chamados espaços de situações-problema, cuja utilização adequada facilita ao aluno a percepção das conexões existentes entre os vários conceitos, destacando a dimensão da operacionalidade entre eles. Na diversidade desse espaço de problemas são estruturadas as condições ideais para que ocorra uma aprendizagem significativa.

Ao se deparar com um problema, seja dentro ou fora do contexto escolar, o indivíduo utiliza de ações mentais no intuito de solucioná-lo. Nesse sentido, Fávero (2005, p. 246) distingui duas classes de situações para estas ações:

> A primeira são aquelas para as quais o sujeito dispõe no seu repertório das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato de uma situação, a um momento dado do seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias. A segunda são aquelas para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão, de hesitações, de tentativas abortadas, e o conduz, eventualmente, tanto ao sucesso como ao fracasso.

Na perspectiva de analisar as ações do sujeito, Vergnaud (1990, 1994, 2001, citado por FÁVERO, 2005, p. 247) retoma o conceito de esquema de Piaget como "a organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas". É nesses esquemas que se devem procurar os "conhecimentos-em-ato", ou seja, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória.

Os esquemas atuam como operadores centrais do processo de adaptação das estruturas cognitivas, isto é, da assimilação e da acomodação. Os esquemas baseiam-se nos conceitos. Entretanto um conceito, nas palavras de Muniz (2008, p. 46), "não pode ser visto como uma "ilha", como se cada conceito tivesse vida própria e autônoma (...). Cada conceito participa e define uma espécie de rede conceitual, ou um campo conceitual, que dá sentido e vida ao conceito em referência".

Assim, detectar os conhecimentos ou esquemas utilizados no ato da construção de uma resposta pode trazer importantes contribuições para o professor, na perspectiva que mais importante que o certo ou o errado é compreender o processo mental utilizado pelo aluno, se necessário for, criar estratégias que possibilitem a construção de um novo esquema ou conceito matemático que venham a abranger determinadas situações. Muniz (2008, p. 2) assevera que:

> Vislumbrar a complexa rede de conceitos mobilizada na atividade, o papel que cada conceito desempenha na determinação do procedimento, os significados atribuídos a cada estratégia resolutiva e o poder de auto-regulação da atividade realizada pelo aluno são temas inevitáveis das ciências da educação. A revelação, o reconhecimento, a análise e a valorização dos esquemas que sustentam as estratégias de ação podem trazer nova luz à postura pedagógica do professor, pois é por meio deles que podemos melhor compreender os conhecimentos em ação, as potencialidades, as incompletudes, os desvios e os atalhos, as ressignificações, os erros e os obstáculos quase sempre presentes nas produções matemáticas em sala de aula.

Considerando a necessidade de levar-se em conta o campo conceitual na construção da aprendizagem, é a resolução dos problemas que permite a união de diversos conceitos, interligando-os, reorganizando-os, combinando-os na busca da construção de uma solução válida.

2.4.3 Teoria das Situações: o didático e o adidático

A Teoria das Situações foi desenvolvida pelo pesquisador francês Guy Brousseau (1986) e busca criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o meio no qual a aprendizagem deve se desenrolar.

Brousseau (2008, p. 35) expõe que

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção sensata dos "problemas" que propõe – as adequações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, e fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação denomina-se adidática.

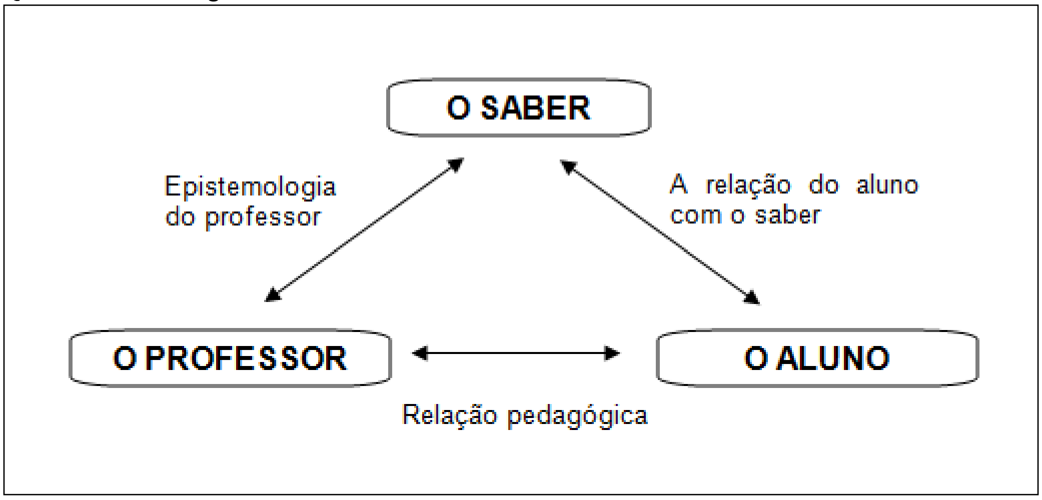
Para Brousseau (1975, citado por ALMOULOUD, 2007, p. 31),

> um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamento de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos.

Deste modo, o objeto central dessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas as modificações que o sujeito realiza no seu comportamento por intermédio de situações didáticas que proporcionem a interação entre o professor e o aluno, sendo essa interação mediada pelo saber. Como percebemos no esquema do triângulo didático (BROUSSEAU, 2008, p. 17) a seguir, assim como um triângulo precisa dos vértices e arestas para existir, para que haja aprendizagem é fundamental que o vértice saber, esteja ligado aos vértices aluno e professor por intermédio das situações propostas pelo professor ao aluno. Situações estas que vão carregar não somente o saber matemático que se deseja ser ensinado, mas as concepções ideológicas e filosóficas do professor. É essa relação pedagógica/dialógica entre o professor e o aluno que vai determinar o quanto o aluno vai aceitar a situação como sua para então atuar sobre ela, refletindo, falando, desenvolvendo suas próprias estratégias a fim de evoluir e se apropriar do saber e conseguir utilizá-lo fora do contexto de ensino.

É apoiado nessa tríade que os problemas de lógica devem ocupar o espaço escolar, desta forma, cada problema selecionado e aplicado carregará as intenções propostas pelo esquema de Brousseau, deixando de ser um passatempo, como classificam alguns autores anteriormente citados, para tornar-se situação de aprendizagem de esquemas matemáticos.

Quadro 3: Triângulo didático



Fonte: Brousseau, 2008, p. 17

A teoria desenvolvida por Brousseau apóia-se em três hipóteses, descritas por Almouloud (2007, p. 32) como:

> 1. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* (meio) que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem.
> 2. O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.
> 3. O *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Almouloud (2007, p. 33) acrescenta ainda uma quarta hipótese, extraída diretamente de Bachelard (1996, p. 17), “no fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização".

Dois são os contextos que envolvem a teoria das situações: as didáticas e as adidáticas. Nas situações didáticas, a produção do aluno é controlada pelo professor, ou seja, o aluno produz de acordo com normas pré-estabelecidas em um contrato didático[6]. Geralmente as produções didáticas envolvem métodos e técnicas já formalizados e aceitos academicamente. Já nas situações adidáticas, como assevera Muniz (no prelo):

> "o sujeito é livre, ele se vê e se sente livre, tendo como critério de validação e correção de sua produção suas próprias estruturas e conhecimento. Ele nesta situação não se sente controlado pelo professor, e não está preocupado em produzir para o outros, mas para resolver uma situação-problema que a ele pertence".

Nas situações adidáticas o professor é um mediador, ele cria situações que propiciem ao aluno refletir, organizar, criar suas estratégias, agir e validar sua resposta, mesmo que suas estratégias não sejam formalmente aceitas. Assim, as maneiras de resolver problemas de matemática vão além de modelos propostos, revelam a criatividade, além de carregar sentidos e significados para quem os resolve.

A diferenciação entre as situações didáticas e adidáticas devem ser consideradas pelo professor enquanto mediador do processo de aprendizagem matemática, pois a prática pedagógica envolvida será completamente distinta.

No caso dos problemas de lógica, pode-se afirmar que eles devem se constituir como situações adidáticas por natureza, principalmente por não envolverem, para o aluno em um primeiro momento, os conteúdos curriculares, mas campos conceituais matemáticos, o que produz o efeito de liberdade. Não é preciso seguir modelos de resolução ensinados pelo professor. E esse descompromisso com a formalização possibilita produzir métodos próprios para resolver um problema. Favorecendo a quebra de um paradigma presente na maioria das escolas quando se trata da resolução de problemas.

Muitos alunos ao se depararem com os problemas matemáticos têm a preocupação de "descobrir" qual a operação ou a fórmula a ser aplicada para encontrar a solução do problema, o que gera nos alunos a sensação de que o professor é o único que sabe. É intrínseca a cultura da hipervalorização do saber formalizado pelo professor,

---

[6] Definido por Brousseau (1980/2008) como o conjunto de comportamentos específicos do professor esperados pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos esperado pelo professor.

que normalmente nega qualquer outro tipo de produção, sem oferecer ao menos a oportunidade do aluno explicar seu raciocínio. Como bem expõe Muniz (2006, p. 149), “quando a produção do aluno contradiz as expectativas do professor, uma vez que o aluno apresenta uma produção muito distante daquilo que na escola considera-se como conhecimento matemático, constituímos o que denominamos ‘situação de dificuldade’”.

Todavia, muitos dos alunos considerados em situação de dificuldade são apenas os que produzem seus próprios métodos de resolução de problemas. Acreditamos que a comprovação de que os alunos são capazes de produzir estratégias próprias são os aqui denominados problemas de lógica envoltos em uma situação adidática, em que o aluno é livre para refletir, planejar, testar e validar socialmente suas hipóteses. Infelizmente as situações que permitem ao educando a construção de suas próprias estratégias são pouco utilizadas na sala de aula, sendo aceitas, geralmente apenas em situações lúdicas, de entretenimento. Por isso, a proposta de inserir os problemas de lógica como estratégia metodológica no cotidiano da sala de aula, pois quando o aluno é encorajado a explicar seus procedimentos e o professor deixa sua posição de ser o único capaz de ensinar para assumir a posição de quem também aprende, rompe-se uma barreira não dialógica. Estabelece-se, então, uma nova relação onde o aluno é encorajado a expor seus raciocínios e procedimentos. Dessa forma, os conceitos passam a ter significado para o educando, pois ao expô-los este se vê obrigado a repensá-los, a estabelecer relações e generalizações sobre eles, buscando pontos de apoio para sustentá-los e situações semelhantes para garanti-los. Tais ações consistem em uma aprendizagem significativa. Como ressalta Almouloud (2007, p. 32), a transformação do comportamento do aluno, que caracteriza a aquisição de determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa.

Transpondo a ideia da matemática enquanto atividade humana para a sala de aula, percebemos a importância de incentivar e valorizar os métodos próprios desenvolvidos pelos alunos na resolução de problemas e vemos os problemas de lógica como possível ponto de partida para a consolidação desse processo.

Nesse sentido, bem prelecionam Carraher e Schliemann (2006, p. 12) que,

> a matemática praticada na sala de aula é uma atividade humana porque o que interessa é a aprendizagem do aluno. (...). A atividade que conduz a aprendizagem é a atividade de um sujeito humano construindo seu conhecimento. Ainda que a matemática formal proíba demonstrações por processos indutivos, a aprendizagem de conceitos matemáticos pode exigir a observação de eventos no mundo.

Assim, à medida que se coloca em discussão as diferentes perspectivas de se fazer matemática, também o erro deixa de lado seu caráter punitivo, para ocupar seu lugar de maneira positiva na construção do conhecimento, pois passa a ser visto como um obstáculo a ser transposto e não como uma barreira intransponível que caracteriza os “menos inteligentes”.

Para Piaget (1970, citado por MUNIZ, 2006, p. 165), muito da atividade realizada pela criança se assemelha à atividade realizada pelo matemático. Tais semelhanças não estão atreladas ao formalismo, mas no que tange ao processo de construção do conhecimento matemático, ou seja, a desestabilização afetiva e cognitiva, que faz com que o sujeito se lance à aventura da superação da dificuldade, ao fazer matemática.

Defende-se, portanto que do mesmo modo que a validação da produção dos matemáticos se dá diante dos seus pares, ou seja, para que haja o reconhecimento como conhecimento científico é necessário a aceitação da comunidade acadêmica, na sala de aula. Cabe ao professor, enquanto mediador, propiciar um ambiente favorável a discussão e validação dos métodos alternativos desenvolvidos pelos alunos, para que, naquele ambiente de aprendizagem, a produção de conhecimento seja validada ou retificada, adquirindo o caráter científico. Tal atitude demonstrará para os alunos que todos têm potencial para desenvolver novas técnicas ou teorias e de que a construção do conhecimento não é privilégio de poucos, solidificando a concepção de que a matemática é fruto da atividade humana.

É nessa perspectiva que pretendemos conduzir a pesquisa de campo. Entretanto, somos cientes de que como a realidade escolar é instável, exigindo planejamentos flexíveis do professor. Também na proposta de uma pesquisa, muitos obstáculos surgem no caminho. Sendo assim, a concepção de uma proposta metodológica, abordada no próximo capítulo, é fundamental para amenizar o impacto desses obstáculos no desenvolvimento da pesquisa e na qualidade dos dados coletados.

CAPÍTULO 3: PROPOSTA METODOLÓGICA

Desenvolver uma pesquisa não é uma tarefa fácil, se faz necessário um rigoroso, porém flexível, planejamento dos passos a serem desenvolvidos na busca da concretização dos objetivos propostos. Nosso planejamento, ou seja, os fundamentos metodológicos estão descritos no quadro seguinte.

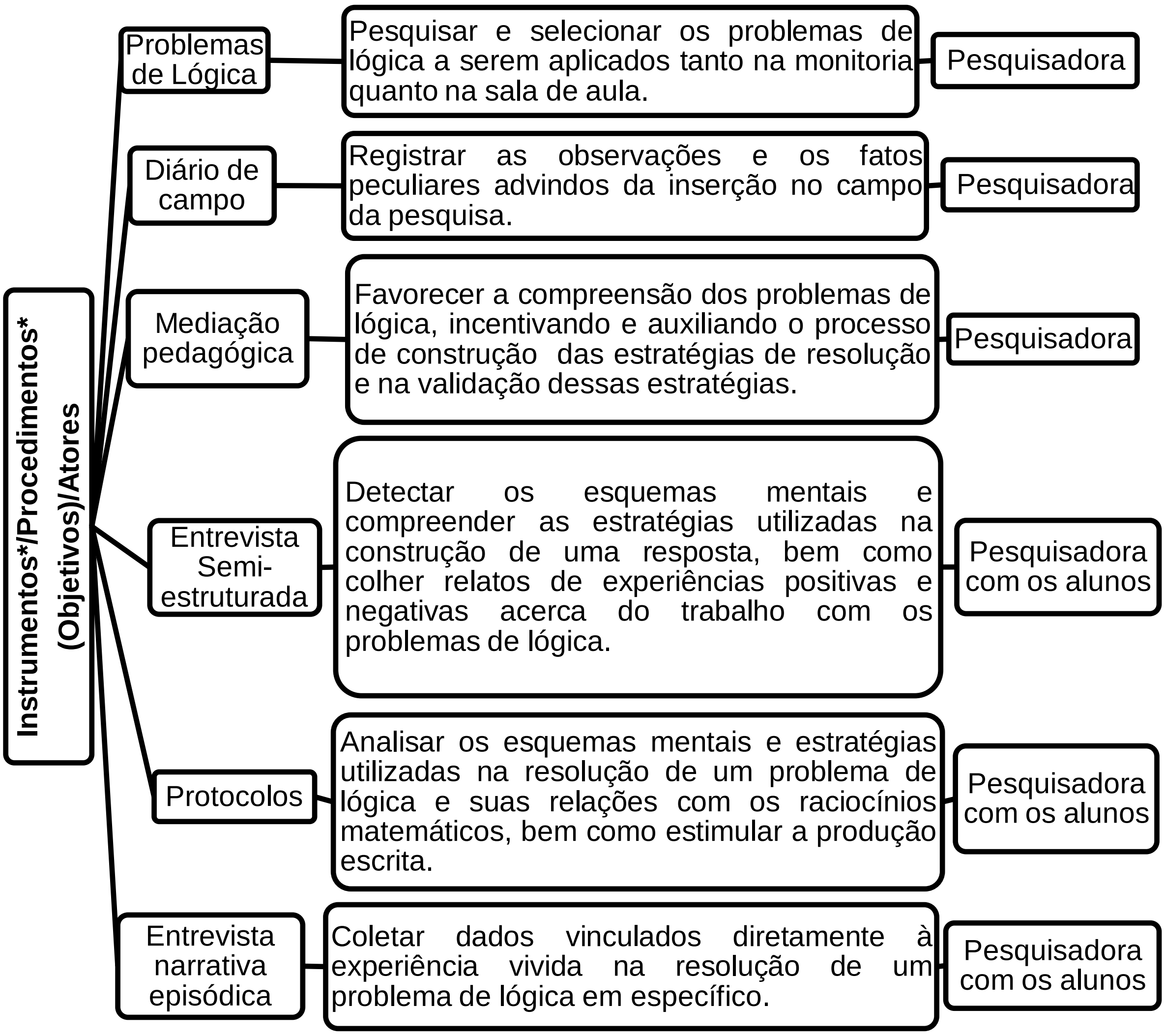
Quadro 4: Proposta metodológica

PROPOSTA METODOLÓGICA	
Método	Pesquisa qualitativa, participante e colaborativa
Participantes	Estudantes do sexto ano do E.F. de uma escola pública municipal de Palmas/TO
Atividades	Problemas de Lógica selecionados pela pesquisadora, de acordo com critérios descritos
Instrumentos (*)	Entrevista semiestruturada, entrevista narrativa episódica, observação participante, protocolos dos pesquisados
Procedimentos	(*)
Análise dos dados	Análise microgenética

Fonte: Organizado pela pesquisadora, 2008.

Os procedimentos metodológicos adotados, os sujeitos envolvidos e o objetivo norteador do uso de cada procedimento estão descritos no esquema seguinte:

Quadro 5: Procedimentos e instrumentos metodológicos, objetivos e atores

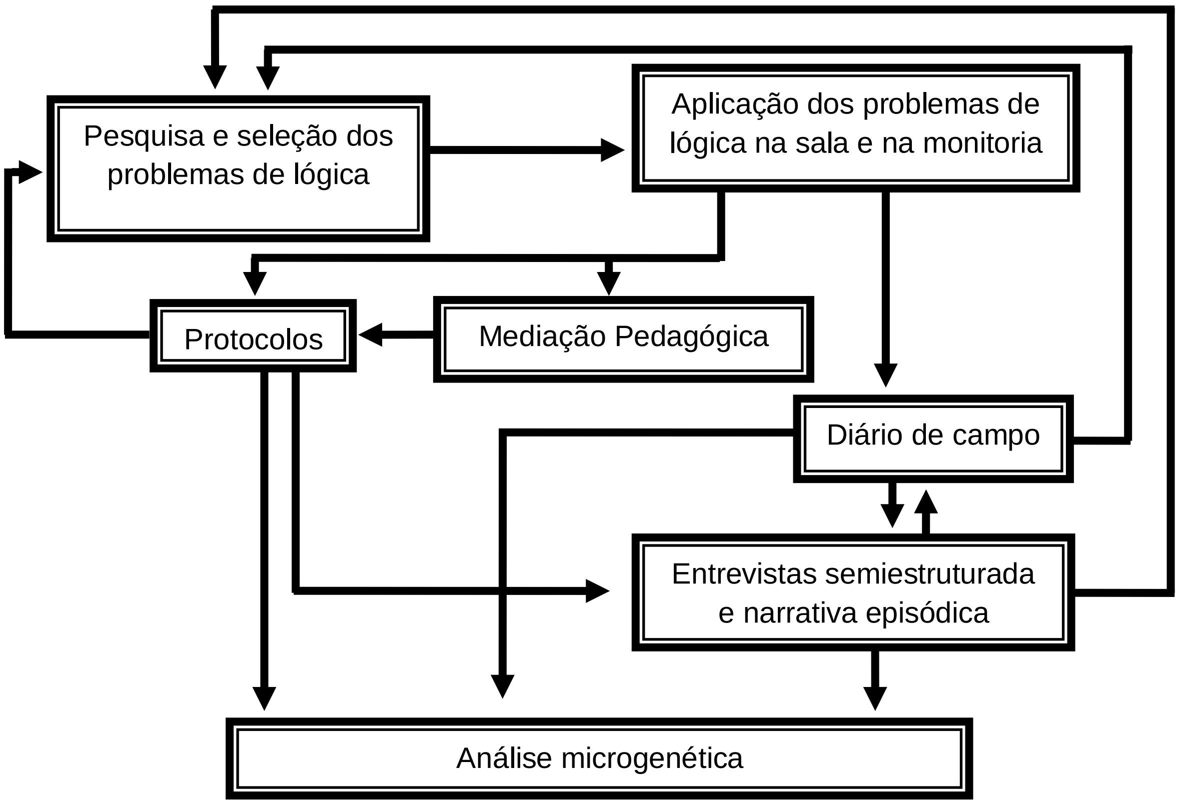


Fonte: Organizado pela pesquisadora, 2009.

Cada instrumento foi cuidadosamente selecionado com o intuito de que cada coleta de dados nos forneça subsídios para o planejamento da próxima coleta e para a investigação da resolução de problemas de lógica como estratégia metodológica do ensino de matemática. O quadro anterior descreve quais são esses instrumentos, qual o objetivo do procedimento de cada um e o foco principal de sua atuação (ator). O processo de seleção dos problemas de lógica ficou sob responsabilidade da pesquisadora, tendo em vista o rompimento da parceria com o professor colaborador que será descrito mais adiante, sendo os mesmos aplicados tanto na monitoria quanto na sala de aula. Analogamente, por meio do diário de campo, coube a pesquisadora registrar as peculiaridades de cada intervenção e do processo de mediação pedagógica na sala de aula e na monitoria, bem como, especificidades das entrevistas realizadas com os alunos pesquisados, no intuito de colher informações e esquemas não presentes nos protocolos, onde cada aluno registrou seus processos de resolução.

Em uma pesquisa, cada instrumento adotado tem sua função, seu objetivo, como visto no esquema anterior. Entretanto, é imprescindível que os instrumentos interajam entre si, uns subsidiando os outros a fim de nortear cada passo da pesquisa. A interatividade dos instrumentos dessa pesquisa estão expostos no quadro seguinte:

Quadro 6: Interatividade dos instrumentos



Fonte: Organizado pela pesquisadora, 2009.

Cada um dos problemas selecionados para a aplicação na monitoria e na sala de aula geraram, a partir da mediação pedagógica, os protocolos das produções dos alunos envolvidos e as anotações no diário de campo da pesquisadora, que por sua vez, foram utilizados como norteadores para as entrevistas e também forneceram dados para registro no diário de campo. O diário de campo, as entrevistas e os protocolos dos alunos foram imprescindíveis para a seleção de novos problemas de lógica, em um processo cíclico de coleta de dados que, por meio da análise microgenética constituíram o corpo de análise dessa pesquisa. Em síntese, a aplicação de um problema de lógica é o fator norteador de todo o processo de coleta de dados, considerando que a análise dos protocolos em conjunto com a leitura das anotações do diário de campo, permitem a tomada de consciência de como está se desenrolando o processo tanto na sala de aula, quanto na monitoria. Esse procedimento permite a tomada de decisão para a próxima seleção de problemas, por exemplo, se haverá troca de categoria ou continuação da mesma, num contínuo ato de investigação por parte da pesquisadora.

Mesmo elaborando um criterioso planejamento para coleta e análise de dados, temos a clareza que pesquisar implica em uma série de desafios de ordem epistemológica, metodológica, temporal e pessoal. Sendo o pesquisador um sujeito sócio-histórico, carrega consigo uma ideologia, uma formação acadêmica, uma série de crenças, de ilusões, de vivências, de recursos personológicos que podem viciar a pesquisa. Diante disso, cada palavra, cada instrumento, cada procedimento necessita ser cuidadosamente planejado para não comprometer os resultados e a seriedade da pesquisa. Não se pressupõe a neutralidade do pesquisador diante do seu objeto e campo de pesquisa, mas na possibilidade de desenvolver uma pesquisa de qualidade, capaz de contribuir positivamente para o mundo acadêmico e profissional.

Frente ao objetivo proposto para a nossa pesquisa: **investigar quais estratégias os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental utilizam na construção de resoluções para os problemas de lógica**, muitos são os desafios a serem superados, por se tratar de uma pesquisa no campo educacional, muitos são os aspectos envolvidos: desde a estrutura funcional da escola, tais como horários de aula, grade curricular das disciplinas, até problemas de ordem política como a autorização para frequentar o ambiente escolar. Em muitos casos o pesquisador não é visto como um colaborador, mas como um intruso, que está lá para apontar os problemas da prática pedagógica. Acredita-se ser esse obstáculo, nesse tipo de pesquisa, o primeiro a ser transposto: adentrar o ambiente escolar de forma a dar segurança mínima quanto ao desenvolvimento do projeto em campo. Ser compreendido como alguém interessado em contribuir para a educação matemática como um todo, adquirindo credibilidade e confiança tanto dos profissionais ali envolvidos, quanto dos estudantes. Como forma de superação deste primeiro obstáculo além de adotar uma postura de humildade acadêmica, de diálogo, de aprendizagem junto ao grupo, realizou-se um pré-contato com a escola e a coordenadora pedagógica ainda na fase de projeto para qualificação.

Credibilidade e confiança também são fatores fundamentais para conseguir a colaboração dos pesquisados quando da prática dos procedimentos metodológicos planejados. Somente com isso é possível investigar as estratégias de resolução desenvolvidas pelos pesquisados, uma vez, que implica em tentar compreender o raciocínio, a construção dos esquemas mentais, o pensamento em si, tendo a serenidade e a sensibilidade para perceber o que tais esquemas têm a revelar sobre o processo de resolução de problemas. Pesquisas que envolvem os processos cognitivos tendem a ser mais complexas, por se tratar de algo abstrato. Embora o registro do aluno seja peça fundamental da pesquisa, o próprio processo de registro é subjetivo, visto a maioria dos alunos estarem acostumados apenas com registros próprios da matemática (linguagem formal) e nos problemas de lógica o registro principal ser dos esquemas mentais.

Estamos adaptados a uma concepção escolar onde o professor tem sempre a resposta, adotada como a única correta, cabendo ao aprendiz, adaptar-se aos métodos e técnicas escolhidos pelo professor. Partindo do pressuposto que o aprendiz é o autor da sua aprendizagem e o professor um colaborador dentro da complexa relação entre o aprendiz e o saber, adentramos em um campo de novidades tanto para os aprendizes quanto para o professor, que é o da validação da produção do aprendiz. Os desafios dessa concepção, especialmente em relação aos problemas de lógica, implicam em um processo de construção dos campos conceituais pertinentes a matemática.

Mesmo diante de um mundo pouco conhecido, que é o mundo da pesquisa acadêmica, intencionamos que o método, os instrumentos, as atividades e os procedimentos descritos a seguir, permitam uma análise clara e segura a fim de atingirmos os objetivos propostos neste estudo.

3.1 Método: pesquisa qualitativa, participante e colaborativa

Adotamos a pesquisa qualitativa, participante e colaborativa (FLICK, 2004; GONZÁLES REY, 2005; IBIAPINA, 2008) por entender que a pesquisa é uma epistemologia de construção e não somente de respostas. Como bem expõe Rey (2005, p. 4) "as construções do sujeito diante de situações pouco estruturadas produzem uma informação qualitativamente diferente da produzida pelas respostas a perguntas fechadas". Desta forma, pesquisador e pesquisado encontram-se interagindo no campo de pesquisa, com o pesquisado participando ativamente do processo, tendo a possibilidade não somente de fornecer dados ao pesquisador, mas de se assumir como autor da história. Enquanto o processo de pesquisa acontece, considerando que ele não é linear e nem totalmente previsível, pesquisador e pesquisado tem a oportunidade de aprender, de desenvolver e reforçar esquemas mentais. Ao adotar esse método de pesquisa temos a consciência de que o pesquisado necessita sentir-se como parte atuante do processo, pois como este estudo se propõe a valorizar a construção do raciocínio lógico a partir da resolução de problemas de lógica é fundamental que o pesquisado sinta-se a vontade para expor, por meio de registros ou oralmente, seus pensamentos, seus esquemas mentais.

3.2 Participantes da pesquisa

Participaram ativamente deste trabalho, a pesquisadora e um grupo de 38 estudantes, sendo 23 meninos e 15 meninas, devidamente matriculados e frequentando das aulas do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, de tempo integral, com sete aulas de matemática semanais, de Palmas/TO. Quanto ao professor licenciado em Matemática regente da disciplina, proposto nos fundamentos metodológicos dessa pesquisa, o mesmo foi convidado a participar, entretanto no desenvolvimento dos trabalhos colaborou apenas cedendo uma de suas aulas semanais de matemática para o desenvolvimento das atividades, não se envolvendo efetivamente nelas, conforme explicitaremos mais adiante.

Embora a escola tenha, em seu discurso pedagógico, a preocupação com o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos e desenvolva oficinas com esse intuito, os alunos do sexto ano ainda não passaram por nenhuma experiência nesse sentido, por isso optou-se por eles.

Inicialmente, em conversa com a coordenadora pedagógica foi indicado, entre as três turmas de sexto ano, a turma em que a professora regente era experiente com crianças de 10 anos e vários anos de atuação no sexto ano, visto que o intuito inicial era a participação efetiva da regente no processo de pesquisa, em um trabalho de cooperação e parceria entre a pesquisadora e a professora, tanto na seleção dos problemas de lógica, quanto na aplicação dos problemas na turma, bem como na análise parcial dos registros produzidos. Entretanto, após duas semanas de aula, devido a uma reestruturação na carga horária dos professores, a professora pré-selecionada foi transferida de turma. Como o trabalho já havia iniciado e, considerando os alunos atores principais da pesquisa, optou-se por permanecer na mesma turma com outro professor.

Diante da mudança, iniciou-se um diálogo com o novo professor da turma, que apesar de muita experiência docente, admitiu preferir turmas de Ensino Médio e só ter assumido o sexto ano para completar sua carga horária. Não impôs resistência em ceder uma aula de matemática para a aplicação das atividades, mas não demonstrou interesse em acompanhar o processo tal qual a regente inicial da turma.

3.3 Atividades selecionadas para investigação

As atividades, isto é, os problemas de lógica (objeto desta pesquisa), que conceituamos no estudo epistemológico anterior de construção conceitual, desenvolvidos com os estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental foram selecionados no decorrer do processo de pesquisa, com o intuito de possibilitarmos a adaptação dos problemas quanto:

- tipo textual: verbal, imagético;
- conteúdo matemático: números, medidas, geometria, lógica;
- nível de dificuldade: fácil, médio, difícil e muito difícil;
- grau de autonomia de resolução: pouca, médio e muito;
- estratégia de resolução vinculada: seleção da informação ou padrão visual.

Ressaltando que a seleção ocorreu de acordo com a parceria entre as exigências dos alunos, enquanto participantes ativos do processo, nossas reflexões enquanto pesquisador e as exigências de análise para a concretização deste trabalho, buscando desta forma uma pesquisa dinâmica, refletida e construída ao longo do processo.

Além de um banco particular de problemas de lógica, destacamos que os alunos pesquisados foram convidados a colaborar com o banco de problemas, de modo a instigar o gosto pela pesquisa de novos desafios e a construção coletiva do conhecimento, pois pretendemos que eles também assumam a postura de pesquisadores, propondo novos problemas aos colegas, participando da construção da resolução, bem como dialogando e intervindo na compreensão e validação das resoluções construídas.

3.4 Instrumentos para coleta de dados

Nossos instrumentos de pesquisa (FLICK, 2004; GONZÁLEZ REY, 2005) representam a mediação entre os sujeitos da pesquisa (pesquisadora e alunos) para que, por meio dessas interações, as representações dos significados possam emergir de forma significativa. Desta forma, foram selecionados, a entrevista semiestruturada, entrevista narrativa episódica, diário de campo e protocolos. Com exceção do diário de campo e dos protocolos, os demais instrumentos foram utilizados quando conveniente para esclarecimentos acerca das produções e mobilizações de esquemas de pensamento.

Com a entrevista semiestruturada, apoiada nos protocolos produzidos, buscou-se estabelecer um diálogo para captar o ponto de vista ou a compreensão do sujeito entrevistado, seja o professor colaborador, seja o aluno pesquisado. Em um primeiro momento, o entrevistado foi o professor colaborador, a fim de conhecermos um pouco do seu perfil profissional e suas perspectivas acerca dos problemas de lógica como estratégia metodológica do ensino e aprendizagem de matemática e sua disposição em participar dessa pesquisa. No decorrer da pesquisa foi necessário aplicar esse instrumento metodológico, com algumas adaptações, com alguns alunos pesquisados com base nos protocolos emitidos com o intuito de detectar os esquemas mentais utilizados na construção de uma resposta, bem como colher relatos de experiências positivas e negativas acerca do trabalho com os problemas de lógica.

Utilizou-se a entrevista narrativa episódica para coletar dados vinculados diretamente a experiência vivida pelo aluno pesquisado na resolução de um problema de lógica.

Os protocolos, ou seja, as produções realizadas pelos alunos na busca de resolução das situações propostas, além de servirem de base para as entrevistas, constituíram um dos mais valiosos instrumentos dessa pesquisa. Por meio dos protocolos procurou-se analisar os esquemas mentais utilizados na resolução de um problema de lógica e suas relações com os raciocínios matemáticos, bem como estimular o aluno à produção escrita, tanto para ele, quanto para o outro, buscando favorecer o processo de validação perante os pares na situação (colegas, pesquisador e professor).

Como o método proposto para esse trabalho é o da pesquisa participante, uma vez que existe a interação entre a pesquisadora e os alunos, na medida em que a pesquisadora propõe, realiza com os alunos e avalia o desenvolvimento das propostas de resolução para os problemas de lógica, o diário de campo do pesquisador assumiu, juntamente com os protocolos, a peça chave da coleta de dados. Por meio do diário de campo, os registros diários advindos da participação e observação efetiva do pesquisador, contribuíram para as reflexões, planejamento, seleção de problemas de lógica, análise dos protocolos e organização de tópicos abordados em entrevistas, bem como serviram de base para a análise microgenética dos dados selecionados para a composição da pesquisa.

3.5 Procedimentos

A princípio, planejamos a coleta de dados no campo entre os meses de fevereiro e maio de 2009, totalizando, aproximadamente, 16 semanas, com duas coletas semanais de 50 minutos cada, totalizando 32 horas aula de coletas diretas e 16 horas de planejamento em conjunto com o professor colaborador, com o objetivo de inserir efetivamente os problemas de lógica na práxis e não apenas uma atividade isolada do contexto geral da sala de aula, e entrevistas com os alunos no decorrer do processo de pesquisa.

Entretanto, o planejamento teve que ser reestruturado logo na segunda semana com a troca do professor regente e diagnóstico da turma, pois percebemos que o contexto geral da sala de aula era muito diferente do que havíamos imaginado. Não tínhamos a idealização de uma sala de aula perfeita, mas esperávamos, apoiados nas conversas com a coordenação e com os próprios professores quando negociávamos a possibilidade de pesquisa nessa escola, um planejamento didático-pedagógico para além do proposto pelo livro didático, uma sequência organizada (ainda que mínima) e pré-determinada do trabalho pedagógico, organização do caderno do aluno, motivação tanto do professor quanto dos alunos para o desenvolvimento das atividades propostas e validação das mesmas e a preocupação com formação de um cidadão capaz de atuar crítico, reflexiva e eticamente na sociedade em que atua.

Reorganizamos a coleta de dados de fevereiro a junho, totalizando, aproximadamente, 21 semanas com um encontro semanal em aula regular de 50 minutos, em um total de 1050 minutos e um encontro de monitoria extraclasse de, aproximadamente, 60 minutos, em um total de 1260 minutos. Desta forma, obtivemos um total geral de 2310 minutos ou 46,2 horas/aula de pesquisa em campo. Processo esse que discorreremos mais detalhadamente nas próximas seções.

Como o método adotado é a pesquisa participante, onde todos os envolvidos participam ativamente dentro do universo da pesquisa, acreditamos ser conveniente iniciar essa caminhada em busca de algumas respostas conversando (entrevista semiestruturada) com o professor colaborador. Perguntamos/investigamos sobre suas concepções a respeito do nosso objeto de estudo, ou seja, os problemas de lógica, dando ênfase ao entendimento sobre resolução de problemas, desenvolvimento do raciocínio lógico, os problemas de lógica no contexto das aulas de matemática, sua relevância ou limitações para o desenvolvimento cognitivo, entre outras que surgiram no decorrer da entrevista.

Inicialmente, após o estabelecimento da parceria com a professora colaboradora e assistir (observação participante) algumas aulas de matemática em turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, tínhamos o intuito de identificar alguns critérios de seleção para o grupo de alunos pesquisados, tais como estudantes com dificuldades de aprendizagem, estudantes que gostem de desafios, estudantes que se prontifiquem a participar, estudantes com interesse em participar das Olimpíadas de Matemática, estudantes que não gostem da disciplina, estudantes em defasagem de idade e série, equilíbrio entre o número de meninas e meninos, dentre outras possibilidades que somente eram possíveis detectar quando em contato direto com o campo de pesquisa. A princípio, procurava-se que os alunos selecionados para pesquisa pudessem constituir dois grupos heterogêneos entre si. No entanto, como dito anteriormente, após essas observações todo o processo precisou ser revisto e decidiu-se trabalhar com todos os 38 alunos matriculados na turma.

Percebemos então a dificuldade de acompanhar, como planejado, o desenvolvimento individual dos alunos, visto o grande número de envolvidos. Como forma de agilizar o processo convidamos cinco alunos, número flexibilizado no decorrer da coleta de dados, que vinham se destacando para participarem de uma monitoria, cujas particularidades serão abordadas em seção própria, onde resolveriam os problemas de lógica antecipadamente à sala de aula e quando da aplicação na turma exerceriam a função de monitores auxiliando a pesquisadora.

Nas observações tivemos a oportunidade de perceber os sentimentos dos pesquisados em relação as atividades propostas pelo professor e a própria matemática. Como as atividades diárias tinham, em sua maioria, o caráter de exercício, aplicamos nas três primeiras aulas de lógica, problemas com função diagnóstica para perceber qual tipo de problema despertava maior interesse, com isso, com o decorrer dos encontros, objetivou-se criar um ambiente acolhedor, incentivador, de respeito e confiança mútua, sem medos ou constrangimentos, onde os erros sejam apenas mais uma das muitas possibilidades de aprendizagem, sendo, mais importante do que a resposta correta, a possibilidade de construção de uma resposta de forma cooperativa e solidária.

Além dos protocolos de registro de cada participante nos cadernos individuais, as peculiaridades do processo foram registradas no diário de campo, ao final de cada aula ou monitoria. Desta forma, buscamos acompanhar o desenvolvimento dos alunos também no decorrer das aulas regulares de matemática, com alguns relatos de experiências por parte dos alunos. Assim, tivemos a oportunidade de colher mais dados e compreender melhor as contribuições, dificuldades e limitações da aplicação de problemas de lógica como estratégia metodológica para aprendizagem.

No decorrer de cada encontro, o trabalho foi realizado com o intuito de observar os procedimentos de resolução adotados pelos pesquisados de forma individual, incentivando a argumentação de seus raciocínios e registros perante os colegas, bem como as possíveis discordâncias dos procedimentos adotados pelos demais, visto um de nossos objetivos ser o de incentivar e investigar os métodos próprios de resolução e sua validação no campo da produção matemática.

3.6 Critérios e fontes de seleção dos problemas de lógica

Inicialmente, foram selecionados três problemas de lógica, de acordo com nossa definição já explicitada. Conforme quadro oito, o primeiro deles é um clássico, categorizado como textual verbal[7] e textual imagético[8], o segundo puramente imagético e o terceiro puramente textual verbal. A aplicação destes problemas teve o objetivo de diagnosticar qual a primeira reação dos estudantes frente aos problemas de lógica, bem como qual categoria despertaria maior interesse de resolução.

A partir do diagnóstico foram sendo, quinzenalmente, selecionados os demais problemas, pois o critério principal de seleção foi o registro dos alunos, juntamente com a observação e mediação pedagógica da pesquisadora no dia da aplicação. Desta forma, tal como proposto no referencial metodológico, a seleção foi sendo construída ao longo da coleta dos dados, buscando a constante motivação dos alunos, proporcionando a superação das dificuldades para o posterior aumento no grau de dificuldade e mudança de categoria, visto que a resolução de problemas, de maneira geral, não se caracterizou como metodologia de ensino adotada pelo professor regente, o que caracterizou um dos obstáculos a ser superado no percurso dessa pesquisa, ocasionando aumento do tempo da coleta dos dados.

Nesse momento, faz-se necessário a apresentação dos problemas de lógica aplicados aos sujeitos dessa pesquisa: alunos do 6º ano do Ensino Fundamental nos

---

[7] Quando o homem se utiliza da palavra, ou seja, da linguagem oral ou escrita, dizemos que ele está utilizando uma linguagem verbal, pois o código usado é a palavra. Tal código está presente, quando falamos com alguém, quando lemos, quando escrevemos. A linguagem verbal é a forma de comunicação mais presente em nosso cotidiano. “[...] Desta forma, compreende-se que a língua(gem) é uma atividade essencialmente humana, histórica e social” (MURRIE, 1995, p. 24).

[8] Texto imagético: “Os esquemas imagéticos (representativos) construídos por signos (imagens) são estruturas abstratas e genéricas advindas de experiências sensório-motoras, facultadas pelas características da espécie humana”... “[...] o ser humano vive num mundo de signos não porque vive na natureza, mas porque, mesmo quando está sozinho, vive na sociedade” (ECO, 1973, p. 11).

ambientes empíricos da monitoria e sala de aula. Optamos por apresentá-los na ordem cronológica em que foram aplicados, para dar sentido a escolha de cada um no seu momento específico.

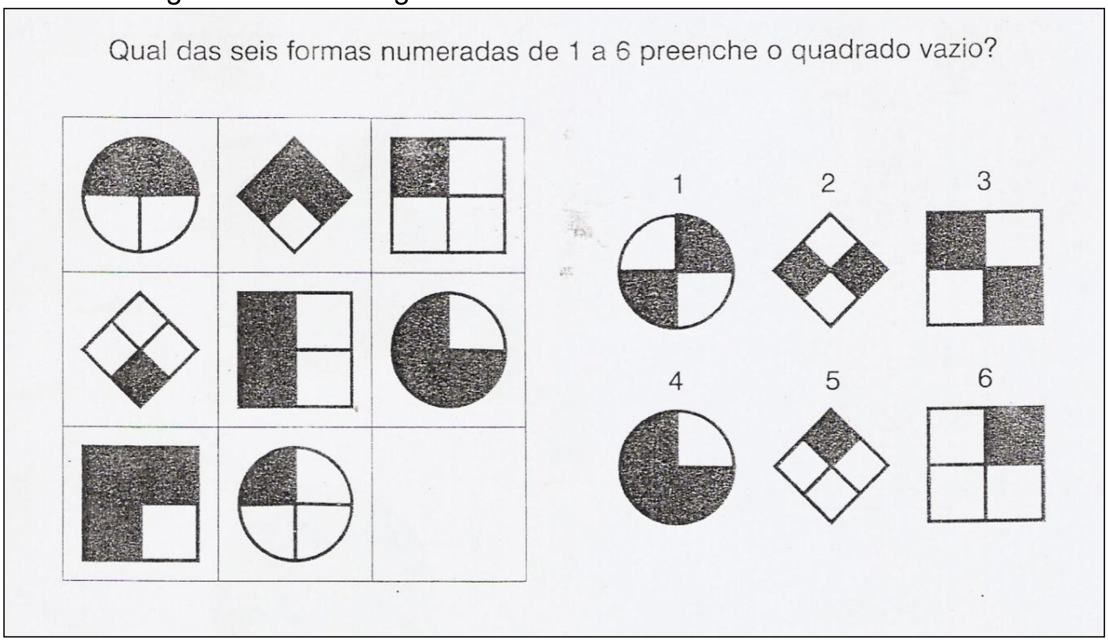
Problema de lógica 1: “O lobo, a ovelha e a couve”

Um fazendeiro precisa atravessar de canoa um rio levando os seguintes itens: um lobo, uma ovelha e um monte de capim. Porém existe o problema que na canoa só cabe o fazendeiro com um dos itens acima. Sabendo-se a canoa pode dar várias viagens, que a ovelha não pode ficar sozinha com o capim, pois ela o come, o lobo não pode ficar sozinho com a ovelha, pois ele a mata, qual a solução?

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Foi selecionado tendo em vista seu caráter clássico, ainda que encontrado com algumas variações dos personagens envolvidos, encontra-se, por exemplo, disponível na internet várias versões. Desta forma, nosso intuito era avaliar, também, o nível de contato dos alunos com esses problemas, bem como, o nível de aceitação a esse tipo de situação, além do objeto principal desse estudo, que são as resoluções propostas pelos alunos. Seu conteúdo predominantemente é a lógica, envolvendo organização de raciocínio diante das regras apresentadas.

Problema de lógica 2: “Pintando geometria”



Fonte: Hercun, 2004, p. 7.

Problema predominantemente imagético, também foi selecionado com o objetivo diagnóstico, diante da observação da dificuldade de leitura e falta de hábito dos alunos para com a resolução de problemas escritos. Envolve a diferenciação das figuras planas e também o conceito de representação fracionária na forma geométrica, ainda que de maneira bem elementar.

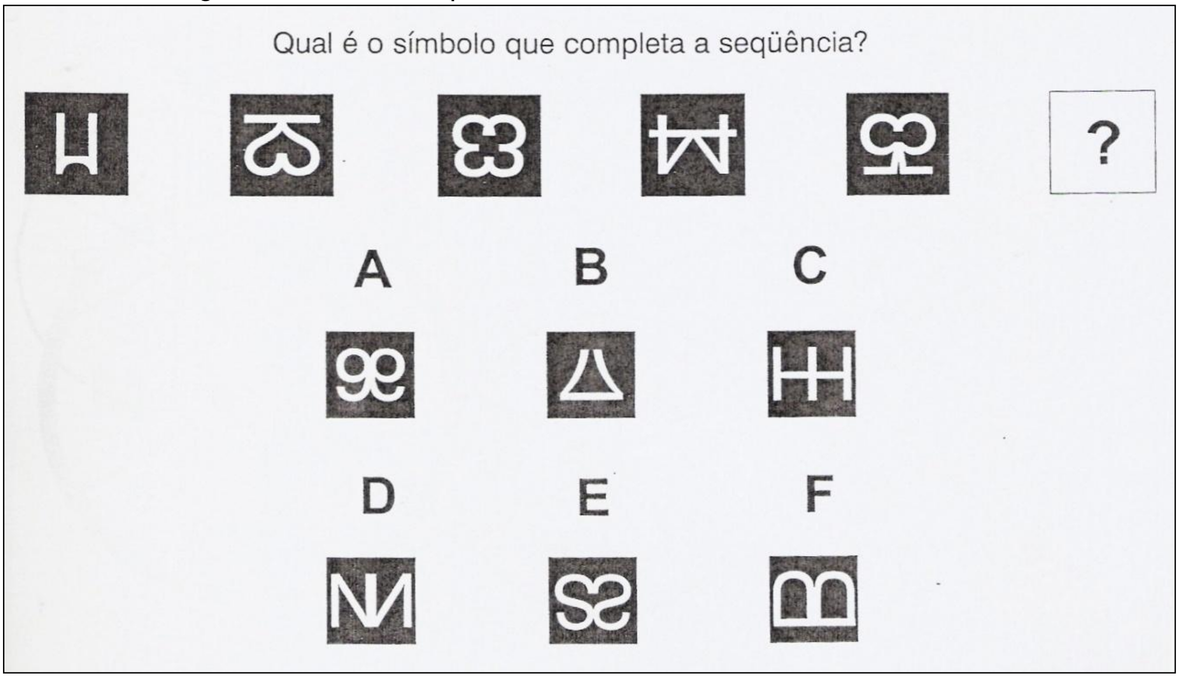
Problema de lógica 3: Os músicos e seus instrumentos

Três músicos, João, Antonio e Francisco tocam flauta, violino e piano. Contudo não se sabe quem toca o quê. Sabe-se que o Antonio não é pianista, mas o pianista ensaia sozinho na terça-feira. O João ensaia com o violinista as quintas. Quem toca o quê? Registre seu raciocínio.

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

O intuito inicial dessa pesquisa era evoluir até os problemas de lógica, classificados por nós como puramente textuais, sem qualquer auxílio de ilustração ou esquema, mesmo tendo observado as dificuldades e a falta de gosto pela leitura, um problema desta natureza foi selecionado e aplicado. Com conteúdo também voltado para a lógica, buscamos detectar se os alunos perceberiam algum tipo de relação com o problema “O lobo, a ovelha e a couve” e se esquemas mobilizados anteriormente seriam acionados, de forma consciente na resolução desse problema, ainda que com grau de dificuldade mais elevado.

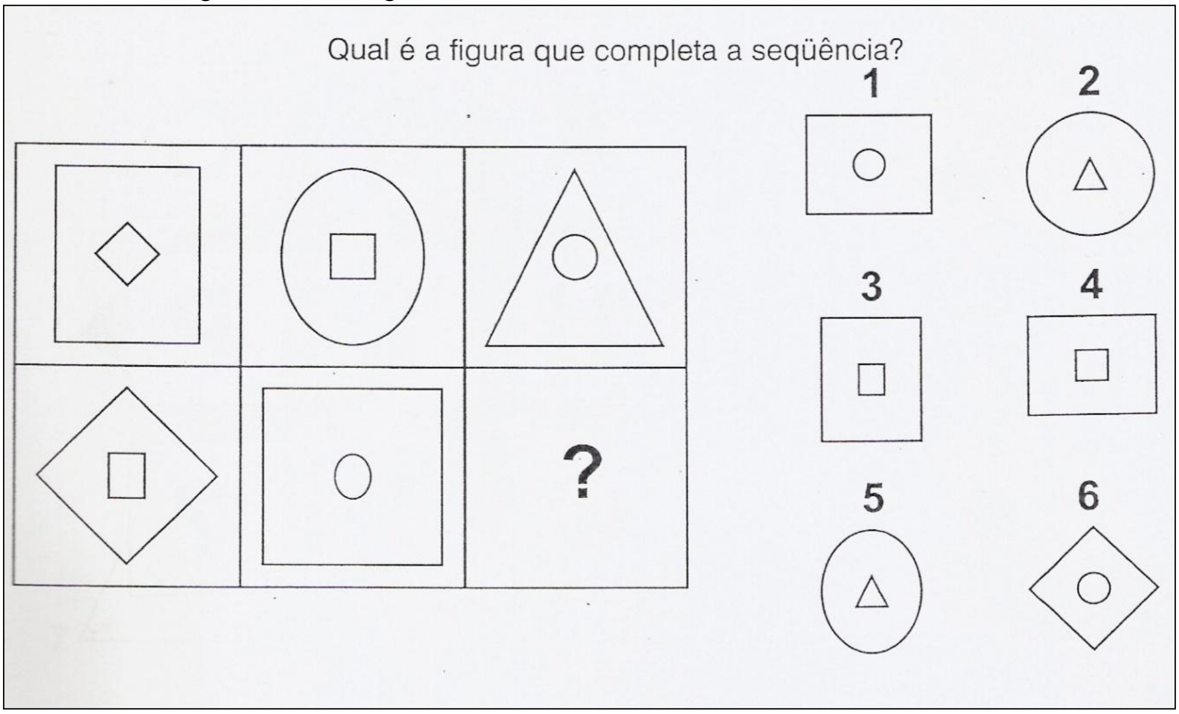
Problema de lógica 4: Números espelhados



Fonte: Hercun, 2004, p.15.

Problema selecionado a partir do diagnóstico da preferência por problemas de lógica predominantemente visuais. Buscamos com esse problema uma sequência simples (os alunos estavam trabalhando com sequências numéricas) e organizada linearmente, bem como uma maneira diferenciada de visualizar os números, mesmo tendo consciência que essa visualização não é imediata, pelo contrário, faz parte do processo de resolução.

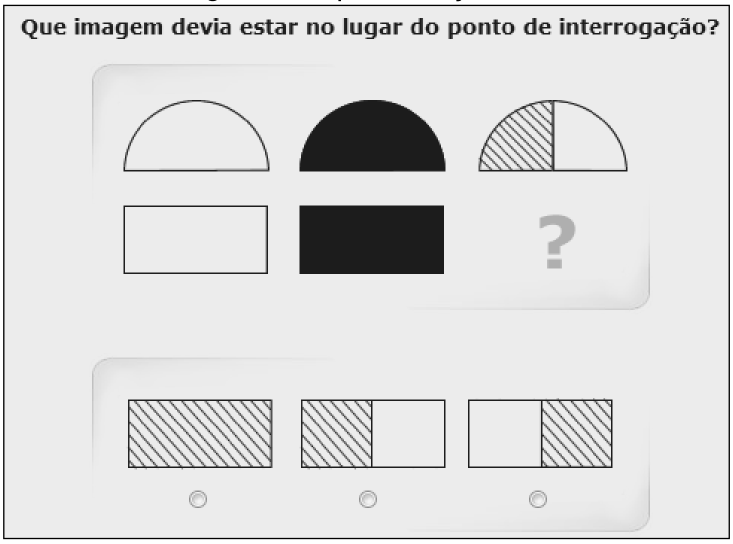
Problema de lógica 5: Fusão geométrica I



Fonte: Hercun, 2004, p. 19.

Selecionado a partir do entendimento de que os problemas de lógica, predominantemente textuais imagéticos, poderiam motivar e promover a autoconfiança, visto os alunos terem demonstrado mais facilidade de compreensão e construção de respostas. Quanto ao conteúdo, utiliza as formas geométricas elementares, ponto em que foi detectado dificuldade de identificação em atividade anterior. Desta forma, também almejávamos perceber se no ato de resolução seria feita alguma ligação com o problema anterior.

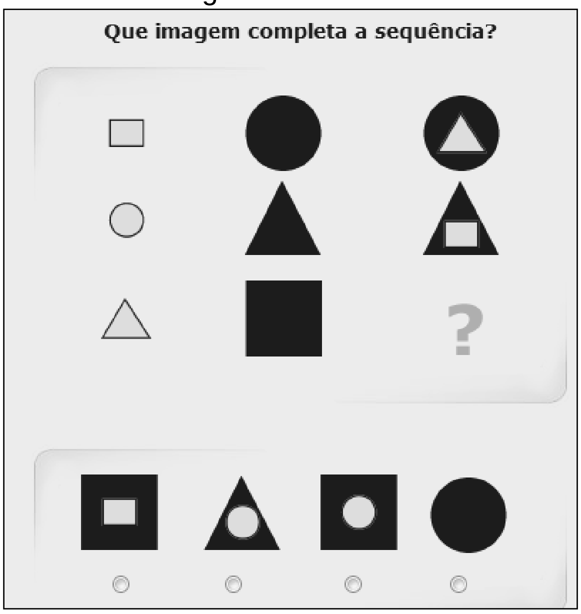
Problema de lógica 6: Representação fracionária



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Selecionado por envolver figuras geométricas (conteúdo que também estava sendo trabalhado nas demais aulas pelo professor regente) e também conceitos fracionários elementares, mas principalmente por permitir mais de uma regra para resolução. Assim, buscávamos promover no momento da validação a discussão tanto dos diferentes caminhos, como das diferentes respostas, incentivando a argumentação dos diferentes pontos de vista diante dos pares, na tentativa de transpor tal visão para a resolução de problemas de maneira geral.

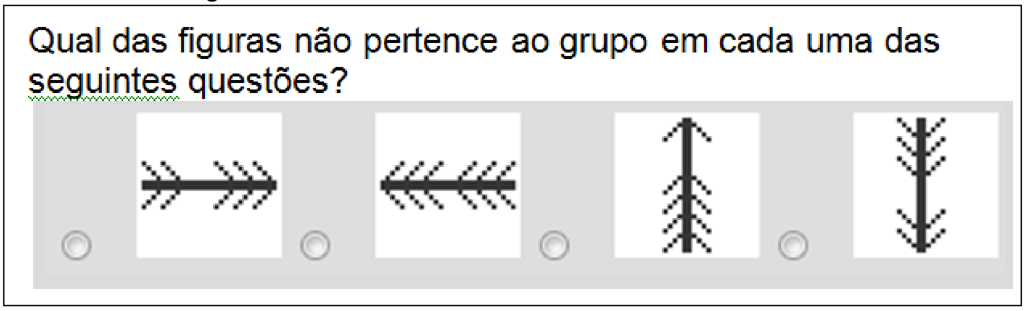
Problema de lógica 7: Fusão fracionária II



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Da mesma maneira que no problema de lógica 5, envolve figuras geométricas planas e fusão de duas figuras para formar uma terceira. Também buscamos averiguar o quanto a resolução do problema Fusão geométrica I interferiria na resolução do problema atual.

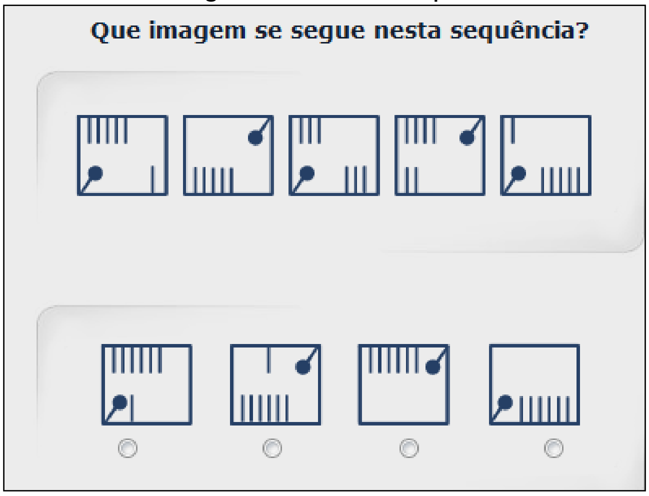
Problema de lógica 8: Flechas marcadas



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

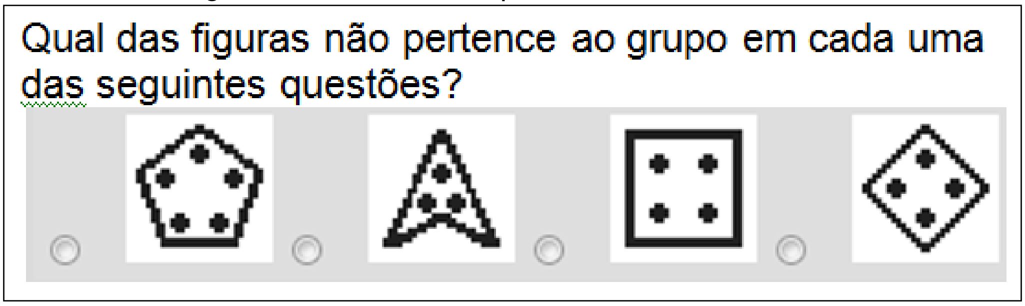
Representa o início de uma nova etapa a ser analisada nas produções de resposta: a identificação dos elementos que não pertencem ao conjunto. Ainda predominantemente textual imagético, o problema envolve os conceitos de conjunto e contagem.

Problema de lógica 9: Contando palitinhos



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

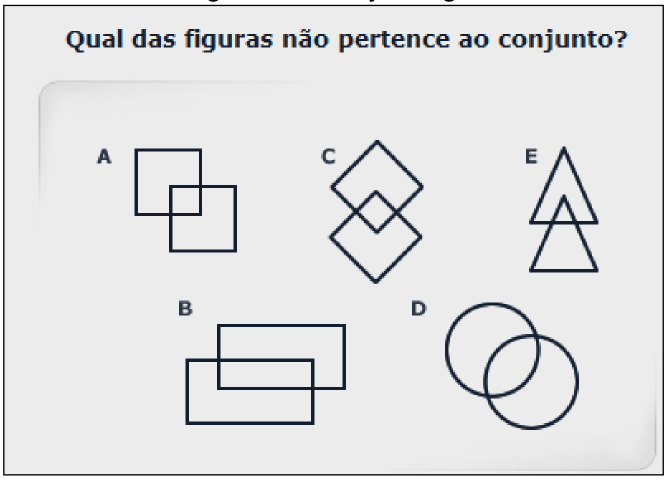
Problema de lógica 10: Geometria de pontinhos



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Selecionado por envolver dois conceitos explorados anteriormente: conjuntos, contagem e figuras planas. Favorecendo, desta forma, avaliar o quanto a resolução do problema anterior é importante para a resolução do atual.

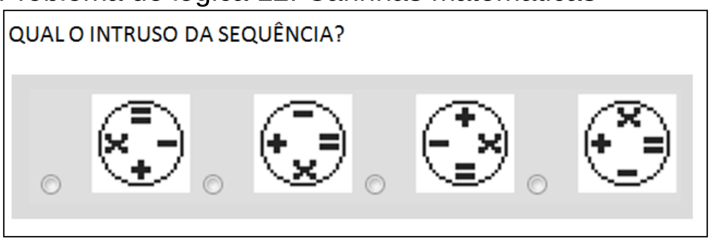
Problema de lógica 11: Conjunto geométrico



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Selecionado por possibilitar aos alunos a percepção de classificação geométrica de figuras composta por retas e pontas, ou seja, características básicas para fazer parte de um determinado grupo (conjunto), no caso, uma percepção necessária para posterior conceitualização de polígonos.

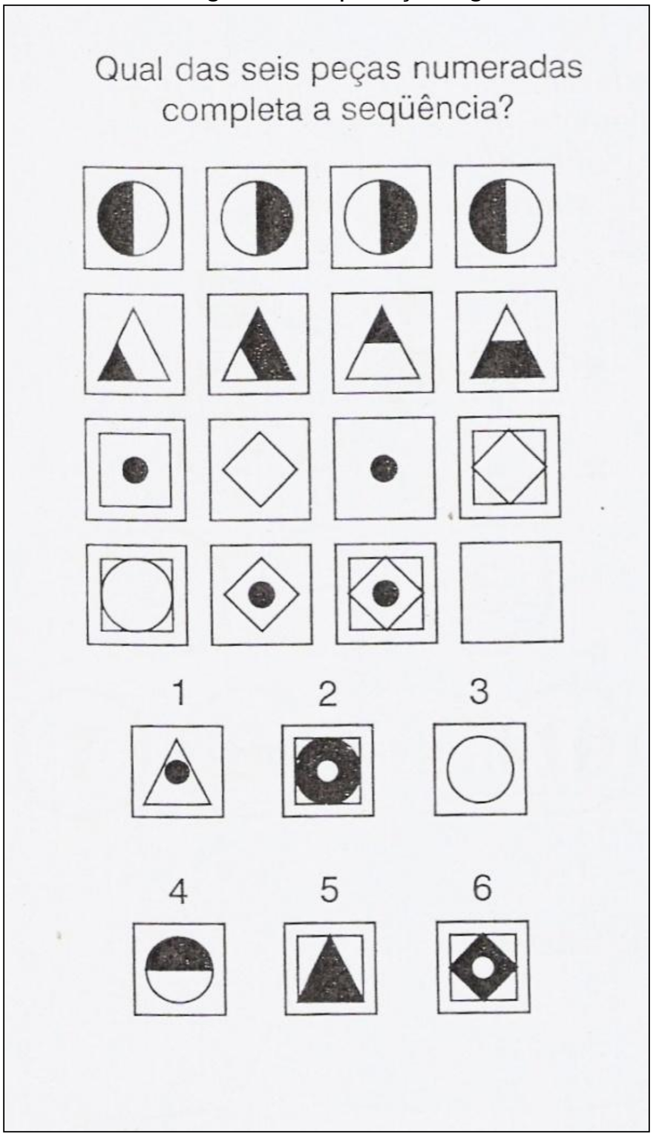
Problema de lógica 12: Carinhas matemáticas



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Além da presença do conceito de conjunto, envolve também a percepção do conceito de rotação de figuras.

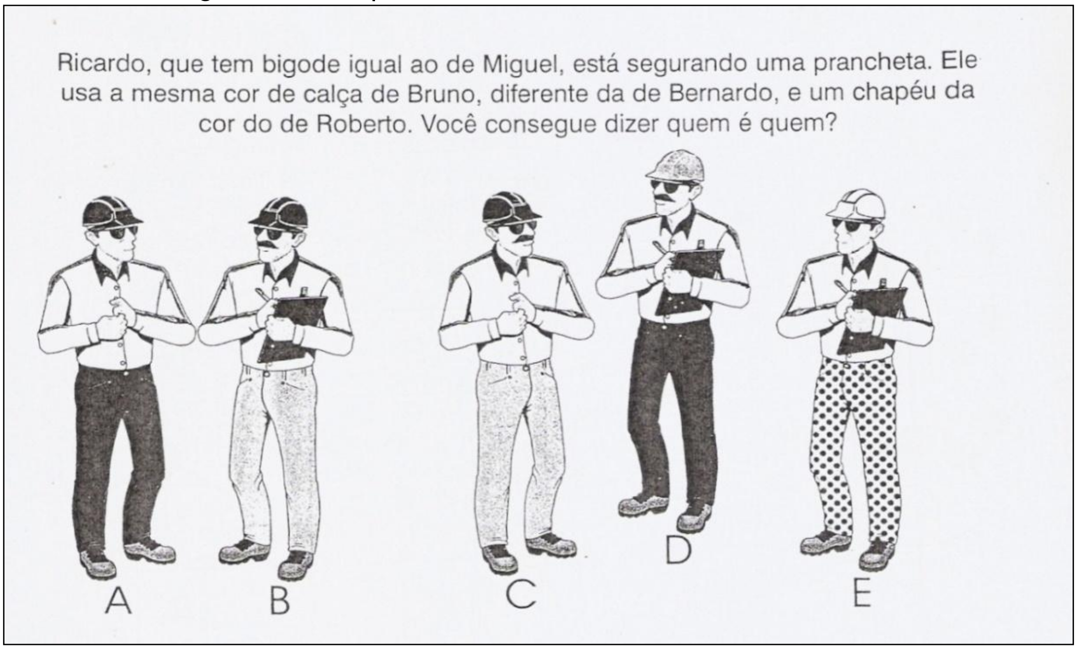
Problema de lógica 13: Operações geométricas



Fonte: Hercun, 2004, p. 44.

Problema selecionado a partir da percepção de amadurecimento dos alunos frente aos problemas de lógica e para consolidar a classe dos problemas predominantemente visuais. De nível mais avançado, exige a mobilização de esquemas relativos às operações matemáticas de adição e subtração, aliado a uma boa percepção geométrica de composição de figuras.

Problema de lógica 14: Os operários



Fonte: Hercun, 2004, p. 46.

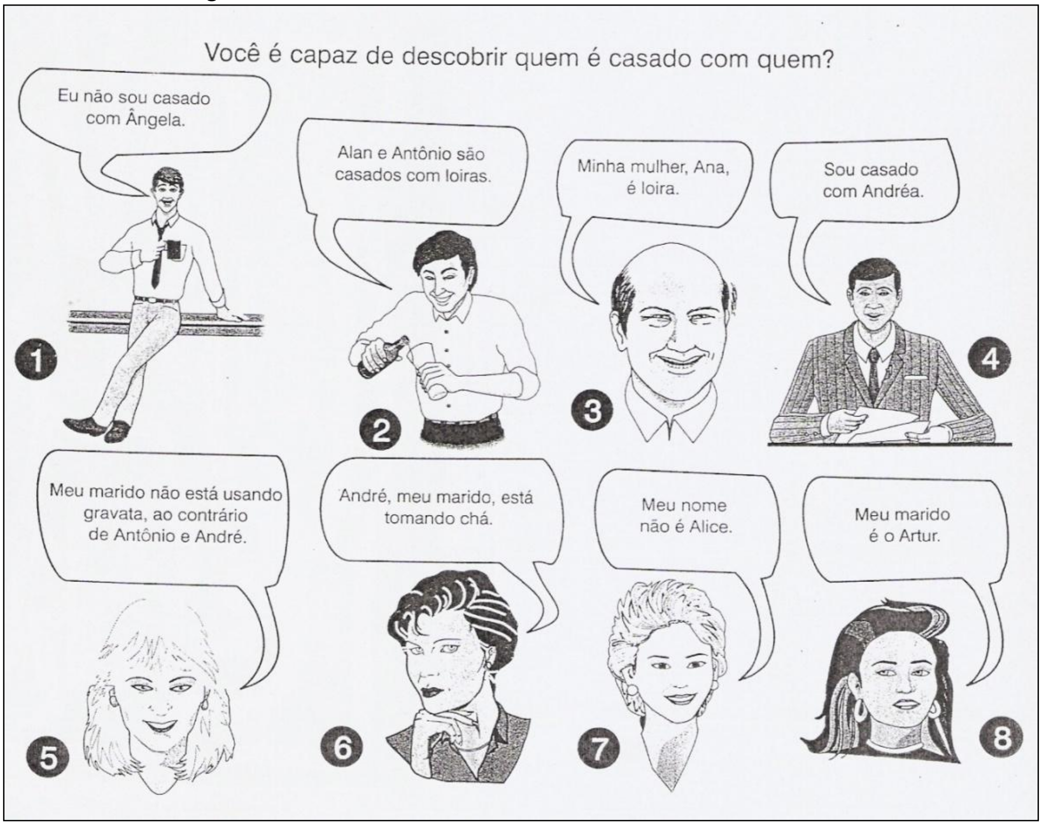
Selecionado para marcar o início de uma nova etapa: problemas de lógica visuais com textos pequenos ou médios, isto é, o texto e o desenho se complementam enquanto enunciado do problema, facilitando a produção da resposta. Envolve o conteúdo de lógica matemática.

Problema de lógica 15: Meninos e suas roupas

Fonte: Hercun, 2004, p. 62.

Selecionado por contemplar, assim como o anterior, conteúdos de lógica matemática, e obedecer a categoria de texto adicionado de figura que compõe o enunciado do problema proposto. Buscamos, da mesma forma que em problemas anteriores, analisar o quanto a resolução de um problema de mesma categoria influencia na resolução de um semelhante.

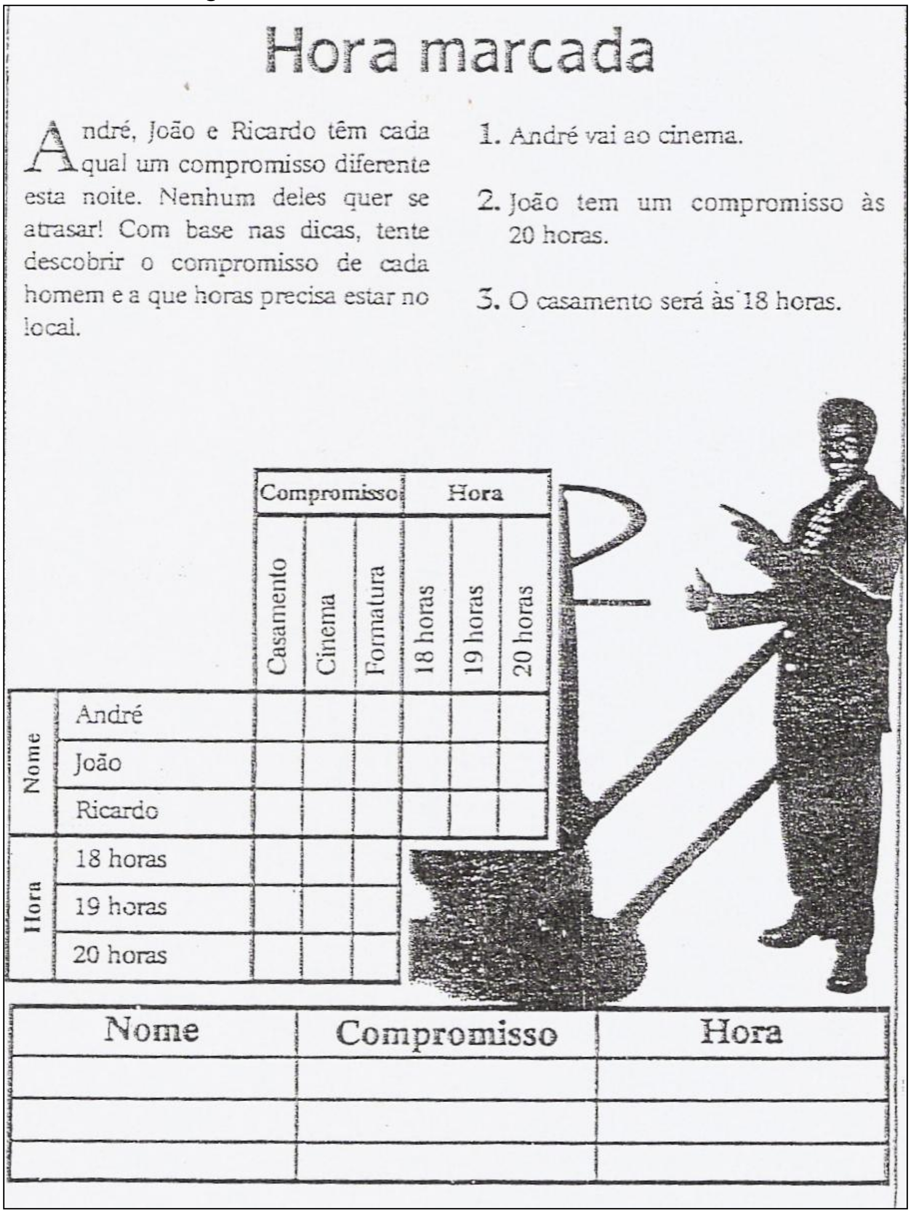
Problema de lógica 16: Os casais



Fonte: Hercun, 2004, p. 52.

Mais complexo que os anteriores, entretanto obedecendo a mesma categorização e o mesmo conteúdo: lógica matemática. Foi selecionado no intuito de observarmos mais especificamente a aprendizagem na produção de respostas para essa categoria de problema de lógica, bem como seriam os registros de justificativa das respostas.

Problema de lógica 17: Hora marcada



Hora marcada

André, João e Ricardo têm cada qual um compromisso diferente esta noite. Nenhum deles quer se atrasar! Com base nas dicas, tente descobrir o compromisso de cada homem e a que horas precisa estar no local.

1. André vai ao cinema.
2. João tem um compromisso às 20 horas.
3. O casamento será às 18 horas.

		Compromisso			Hora		
		Casamento	Cinema	Formatura	18 horas	19 horas	20 horas
Nome	André						
	João						
	Ricardo						
Hora	18 horas						
	19 horas						
	20 horas						

Nome	Compromisso	Hora

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Selecionada para marcar uma nova etapa da coleta de dados, em que a parte imagética do enunciado é abandonada, dando lugar ao problema com enunciado puramente textual verbal. Como forma de auxiliar na produção de uma resposta, mas perfeitamente dispensável, é sugerido um esquema de organização dos dados, visto o problema tratar do conteúdo lógica matemática.

Problema de lógica 18: Música folclórica

Música folclórica

Semana passada, aconteceram cinco shows do Festival de Música Folclórica Regional, com músicos de todo o mundo. A partir das dicas abaixo, descubra em que noite ocorreu cada apresentação, o país de origem dos músicos e onde foi o evento.

1. O show de quinta-feira foi realizado por um grupo, mas não aconteceu no Teatro Moinho; o Grupo Floristas se apresentou na Igreja dos Santos e o Grupo Flautistas vem da Irlanda.
2. A apresentação norte-americana não foi feita por Rui Moraes e nenhuma dessas apresentações aconteceu na quarta-feira ou no Teatro Moinho.
3. Rui Moraes não se apresentou no sábado à noite.
4. A apresentação canadense aconteceu no Bar Du Co, mas nem este bar ou o Teatro Moinho foi palco para o show de Ricardo Duarte.
5. O show de sexta-feira no Amplo Hall não foi australiano.
6. A apresentação de Bruno Cortes aconteceu na terça-feira.
7. A apresentação no Mercado Central não foi no sábado.

		Músico					País					Local				
		Bruno Cortes	Ricardo Duarte	Rui Moraes	Grupo Floristas	Grupo Flautistas	Austrália	Canadá	Irlanda	Reino Unido	Estados Unidos	Igreja dos Santos	Mercado Central	Amplo Hall	Bar Du Co	Teatro Moinho
Apresentação	Terça-feira															
	Quarta-feira															
	Quinta-feira															
	Sexta-feira															
	Sábado															
Local	Igreja dos Santos															
	Mercado Central															
	Amplo Hall															
	Bar Du Co															
	Teatro Moinho															
País	Austrália															
	Canadá															
	Irlanda															
	Reino Unido															
	Estados Unidos															

Apresentação	Músico	País	Local

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

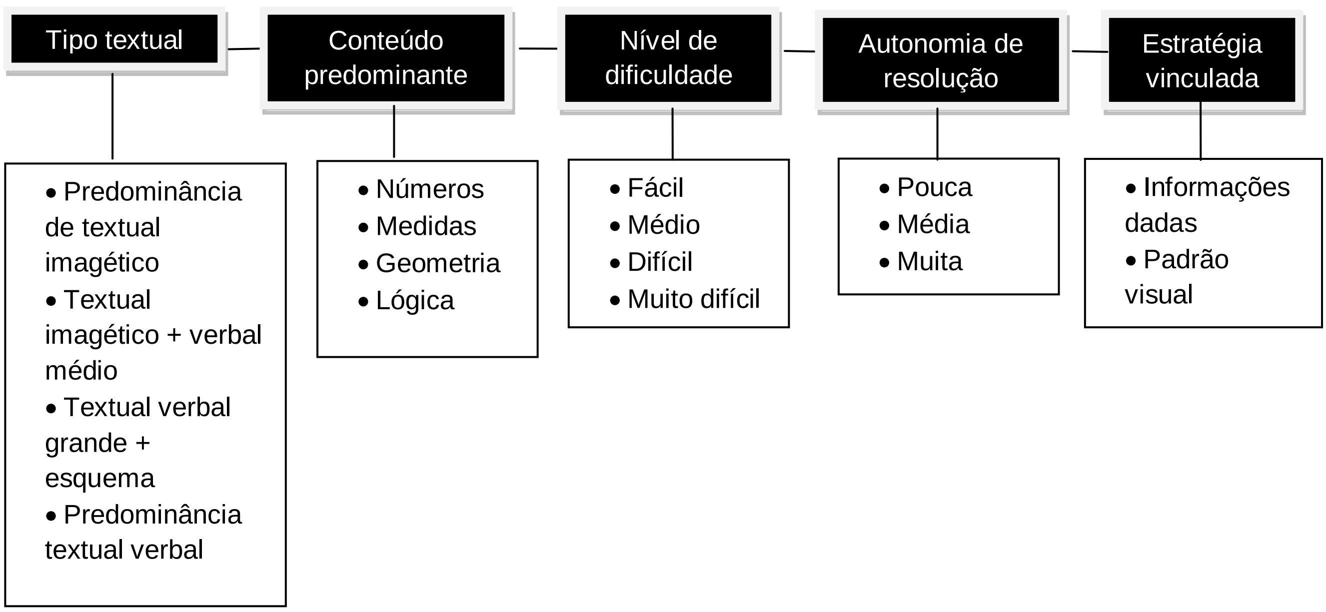
Último dos problemas selecionados. Aborda um problema puramente textual, de lógica matemática, fechando o ciclo que iniciou com problemas predominantemente visuais. Outro fator de destaque que interferiu na seleção deste problema foi o fato de ser aplicado na época das festas juninas, evento que mobiliza toda a escola.

Finalizada a apresentação dos problemas aplicados nos ambientes empíricos descritos na seção 4.1, passaremos a categorização dos problemas de lógica selecionados de acordo com o tipo textual, o conteúdo predominante, o nível de dificuldade e a autonomia de resolução do aluno diante da situação proposta.

3.7 Categorização dos problemas de lógica

Cada problema de lógica selecionado foi categorizado a priori de ser aplicado ao aluno, tendo como pressuposto a experiência da professora pesquisadora. Foram elencados nessa pré-categorização elementos constitutivos do problema como o tipo textual e o conteúdo matemático predominante, e elementos subjetivos, considerando a idade dos alunos e a realidade da turma envolvida, como o nível de dificuldade e o grau de autonomia de resolução, tal como ilustra o quadro seguinte:

Quadro 7: Elementos de categorização dos problemas de lógica



Fonte: Organizado pela pesquisadora, 2009.

Cada elemento foi cuidadosamente pensado com o intuito de estabelecermos um processo gradativo de apresentação de cada problema aos alunos, principalmente quanto ao tipo textual e nível de dificuldade, visto que nossas observações no ambiente da sala de aula detectaram resistência por parte dos alunos a atividades que envolviam trechos longos de leitura e estratégias de resolução com vários procedimentos. Desta forma, categorizamos o **tipo textual** como:

- predominância textual imagético: problemas em que apenas o comando de ação, máximo de uma linha, é textual verbal, sendo o restante estritamente imagético. É a leitura das imagens que possibilita a compreensão do problema e consequentemente a produção de uma resposta.
- imagético + textual verbal médio: problemas em que parte do enunciado é textual verbal, de três a cinco linhas, e parte é textual imagético, isto é, o imagético é parte do enunciado do problema de lógica proposto. Sem a imagem não é possível resolver o problema.
- textual verbal grande + esquema: problemas em que a parte textual verbal é maior do que cinco linhas e todos as informações necessárias para resolver o problema estão disponibilizadas. O esquema tem caráter auxiliar na organização dos dados do problema, mas a falta dele não impossibilita a resolução.
- predominância textual verbal: problemas em que o enunciado é todo textual verbal. Todo recurso que o aluno desejar utilizar para auxiliar na resolução, como por exemplo, desenho ou esquema, será de sua iniciativa. Não há uma limitação de linhas.

Quanto à categorização envolvendo o elemento **conteúdo matemático**, adotamos nessa pesquisa:

- números: entende-se que o problema proposto terá conteúdo predominante numérico quando a ação de resolução necessitar da estrutura de número, da identificação de quantidades, dos diferentes conjuntos numéricos, teoria dos conjuntos, da realização de operações, da identificação simbólica dos sistema indoarábico de numeração, sequência.
- geométrico: entende-se que o problema proposto terá conteúdo predominantemente geométrico quando envolver identificação e diferenciação de figuras planas, área, rotação, identificação do número de vértices e lados de um polígono.
- lógica: entende-se que o problema proposto terá conteúdo predominantemente lógico quando necessitar da constituição de argumentos a fim de elencar as informações do problema para construção da conclusão, ou seja, encadear logicamente as ideias fornecidas pelo enunciado para tirar uma conclusão.

Quanto à categorização envolvendo o **nível de dificuldade** para compreensão e resolução que, tendo em vista o perfil da turma e a experiência da pesquisadora, visto que tal categorização foi realizada a priori, está diretamente ligado ao **grau de autonomia** que o problema proporciona a maioria dos alunos envolvidos no processo. Temos a clareza, assim como o que significa problema para um não necessariamente é problema para outro, que o nível de dificuldade e o grau de autonomia são critérios bastante subjetivos, mas que julgamos de essencial importância, para não desmotivar os alunos, tanto pela apresentação de problemas muito difíceis, quanto por problemas extremamente fáceis, que não tenham o caráter desafiador. Desta forma, somente a análise das produções dos alunos podem nos dar a certeza quanto as dificuldades ou facilidades de resolução.

Os problemas de lógica escolhidos também foram categorizados quanto a **estratégia de resolução** vinculada para a resolução do problema proposto, que nesse estudo foram utilizadas as seguintes:

- informações dadas: a estratégia de resolução está vinculada a interpretação, seleção e organização das informações contidas no enunciado do problema, sejam elas predominantemente verbais ou verbais e imagéticas.
- padrão visual: a estratégia está vinculada a identificação e seleção de padrões visuais presentes nos textos imagéticos.

Tendo como fundamento a categorização explicitada, os problemas de lógica aplicados ao longo do semestre na turma de sexto ano do Ensino Fundamental selecionados para essa pesquisa, foram, a priori, assim categorizados:

Quadro 8: Categorização dos problemas de lógica

Problema	Tipo textual	Conteúdo	Nível de dificuldade	Autonomia de resolução	Estratégia de resolução
O lobo, a ovelha e a couve	Texto verbal médio + ilustração	Lógica	Médio	Média	Informação dada
Representações fracionárias	Predominância de texto imagético	Números/Geometria	Fácil	Média	Padrão visual
Os músicos e seus instrumentos	Predominância de texto verbal	Lógica	Difícil	Pouca	Informação dada
Números espelhados	Predominância de texto imagético	Números	Fácil	Muita	Padrão visual
Fusão geométrica	Predominância de texto imagético	Geometria	Médio	Média	Padrão visual
Representações fracionárias	Predominância de texto imagético	Números/geometria	Fácil	Muita	Padrão visual
Fusão geométrica II	Predominância de texto imagético	Geometria	Médio	Muita	Padrão visual
Flechas marcadas	Predominância de texto imagético	Números	Fácil	Muita	Padrão visual
Contando palitinhos	Predominância de texto imagético	Números	Fácil	Muita	Padrão visual
Geometria de pontinhos	Predominância de texto imagético	Geometria	Médio	Média	Padrão visual
Conjunto geométrico	Predominância de texto imagético	Geometria	Fácil	Muita	Padrão visual
Carinhas matemáticas	Predominância de texto imagético	Geometria	Fácil	Muita	Padrão visual
Operações geométricas	Predominância de texto imagético	Geometria/Números	Muito difícil	Pouca	Padrão visual
Os operários	Imagético + texto verbal médio	Lógica	Muito difícil	Média	Informação dada
Meninos e suas roupas	Imagético + texto verbal médio	Lógica	Difícil	Pouca	Informação dada
Os casais	Imagético + texto verbal médio	Lógica	Difícil	Média	Informação dada
Hora marcada	Texto verbal grande + esquema	Lógica	Difícil	Média	Informação dada
Música folclórica	Texto verbal grande + esquema	Lógica	Muito difícil	Pouca	Informação dada

Fonte: Organizado pela pesquisadora, 2009.

Tendo explicitado a metodologia adotada para a coleta de dados dessa pesquisa, é necessário abordarmos o método de análise de dados que será utilizado, a fim de atingirmos os objetivos propostos.

3.8 Análise microgenética

A dimensão microgenética de análise tem sido explorada em inúmeros estudos porque, por meio dela, se busca compreender os passos do desenrolar das ações dos sujeitos e explicar suas construções e transformações cognitivas ao engendrar soluções para um problema. Como o objeto proposto para esse estudo evidencia a atividade mental desenvolvida pelo pesquisado nos processos resolutivos, intencionamos identificar os passos do desenrolar do pensamento do sujeito na produção de respostas para problemas de lógica. Desta forma, a dimensão microgenética de análise possibilita ao mediador da aprendizagem, no caso o pesquisador, aumentar a precisão dos desafios a serem propostos ao aprendiz para que avance em suas hipóteses e modifique os procedimentos até alcançar o objetivo proposto, possibilitando acompanhar e compreender os processos cognitivos e suas peculiaridades, como por exemplo, as construções heurísticas do sujeito.

Por meio do método microgenético é possível compreender os mecanismos de mudança no desenvolvimento cognitivo de modo muito peculiar, inclusive das condições que permeiam as mudanças. Ele envolve, de acordo com Leão (2004, p. 65),

> a) observações dos sujeitos individualmente, ao longo do período de mudança;
> b) alta densidade de observações relativas à quantificação da mudança naquele período;
> c) análises intensivas a cada tentativa (passo a passo) com o objetivo de inferir os processos que deram origem à mudança.

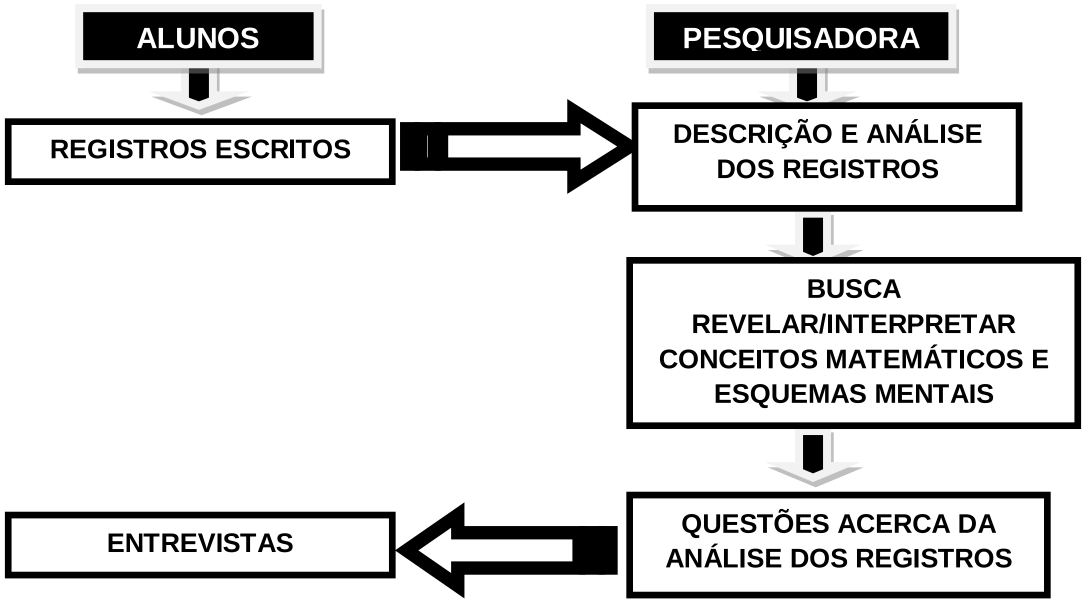
Especificamente nesse estudo, a análise microgenética foi desenvolvida a partir de quatro pilares, a saber:

1. Os alunos produzem soluções com registro escrito (protocolos), isto é, a cada aplicação de um problema de lógica, os alunos eram incentivados a registrar não somente a resposta do problema, mas o caminho percorrido para construção da resposta, registro esse feito em caderno específico e personalizado para as aulas de lógica;

2. a pesquisadora, a partir dos registros realizados nos cadernos, descreve e analisa os registros produzidos, na busca de conceitos matemáticos e esquemas mentais mobilizados;
3. a pesquisadora levanta questões acerca da análise destas produções;
4. a partir das questões, a pesquisadora conduz entrevistas narrativas episódicas com os autores dos registros, sempre que possível as entrevistas foram realizadas logo após o processo de resolução, evitando-se assim o esquecimento por parte do aluno.

Em síntese, esse processo pode ser descrito como:

Quadro 9: Pilares da análise microgenética nesse estudo



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 2009.

É na análise minuciosa das produções dos alunos, dialogada com seus autores, que buscaremos evidências das construções e transformações cognitivas durante todo o processo de observações, organizando essas evidências em categorias de análise que serão descritas no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4: ANÁLISE DOS DADOS

Fundamentando-se no princípio de que por meio do diálogo e do registro dos sujeitos é possível um olhar sobre como vivenciam, significam, vinculam, se apropriam e registram suas estratégias de resolução dos problemas de lógica é que se tomou a análise microgenética como base para a análise de dados desse estudo. Desta forma, iniciaremos nossa caminhada pela descrição dos ambientes empíricos, que em muito interferiram nas resoluções dos problemas de lógica.

4.1 Descrição dos ambientes empíricos

Embora nosso projeto inicial previsse apenas a sala de aula como ambiente empírico, no decorrer do processo surgiu a necessidade de adaptarmos um novo ambiente denominado de monitoria. Descreveremos esses dois contextos:

4.1.1 Sala de aula

Composta por 38 alunos matriculados, sendo 23 meninos e 15 meninas, mas muito faltosos, a turma de sexto ano do Ensino Fundamental definida como campo dessa pesquisa, chamou a atenção desde o primeiro contato. Logo que chegamos à sala, juntamente com a professora regente, que depois foi remanejada para outra turma, percebemos algumas peculiaridades que por ora me causaram angústia e desespero, ora alegria e satisfação. Peculiaridades essas que resolvemos descrever com mais detalhes o primeiro encontro, que de certa maneira, resumem o perfil da turma e como se desenvolviam as aulas de matemática, mesmo com a troca de professor.

A primeira das surpresas foi descobrir três alunos portadores de necessidades especiais: um auditivo, um com pouca visão e outra com Síndrome de Down, todos na mesma turma, sem qualquer acompanhamento especial ou intérprete de libras no caso do deficiente auditivo ou formação do professor para tal realidade, ficando os três deslocados da turma. A professora até que tentava dar atenção aos três, mas com necessidades diferentes, ela ficava indo de um lado para outro na tentativa de atendê-los, enquanto os demais deveriam fazer uma atividade passada no quadro. Dos alunos restantes, pouquíssimos realmente se propuseram a fazer a atividade, a maioria andava pela sala, brincava ou discutia com algum colega, produzindo um barulho ensurdecedor. Para ser ouvida a professora usava um tom de voz altíssimo, mas poucos ouviam, tanto que ela acabava de falar alguma coisa e já estava rodeada de alunos perguntando o que ela havia falado. A correção da atividade não foi feita e assim findou a aula e nosso primeiro contato com a turma. Confesso que mesmo com mais de uma década de sala de aula, passando por todas as instâncias do ensino, fiquei apavorada, pois nunca havia me deparado com uma situação como aquela em uma sala de aula.

No dia do planejamento, conversamos com a professora sobre a situação vivida na sala e traçamos algumas estratégias para promover um ambiente disciplinado e propício a concentração e aprendizagem. Passamos a acompanhar todas as aulas de matemática, de maneira a nos inserir naquele contexto, na tentativa de auxiliar no processo educacional daquelas crianças. Adotamos a função de ajudar no atendimento individual na hora das atividades, basicamente as do livro didático adotado pela escola, tendo a maioria das atividades o perfil de exercício. Com a troca do professor o perfil das aulas continuou o mesmo.

Depois da primeira semana no ambiente da sala de aula e já familiarizada com os alunos, conversamos com eles sobre os problemas de lógica e explicamos como seria a dinâmica dessa aula semanal. Com isso, concebem-se no processo os problemas de lógica como possibilidade de colaboração neste contexto educativo. Distribuímos um caderno personalizado para cada aluno para ser usado nas aulas de lógica (assim denominada por eles no decorrer do processo) e aplicamos o primeiro problema diagnóstico: da ovelha, do lobo e da couve (p. 73). Todos tentaram resolver, mas sentimos que no primeiro momento todos escreviam a ordem e levantavam para mostrar o resultado na busca da nossa validação e quando questionados sobre a ordem, a resposta mais comum era, *“ih, ta errado!”* ou simplesmente *“mas ta certo ou ta errado?”*. Percebemos que o objetivo deles, tal como nas atividades corriqueiras das aulas, era terminar a atividade para ficar com o tempo livre, ou seja, as atividades eram resolvidas para o professor corrigir, bem diferente do que propõe a Teoria das Situações (1986), abordada em nosso referencial teórico.

Como planejado, iniciamos a discussão coletiva no quadro, tentando não somente a validação de uma resposta, mas a construção de uma resposta justificada, de modo a incentivar o registro dos raciocínios envolvidos. Foi uma confusão, todos gritando ao mesmo tempo, envolvidos, mas de pé, uns me puxando pelo braço, outros pegando o pincel da minha mão e escrevendo no quadro, outro chamando o colega de “burro”, mostrando o desconhecimento da sala de aula enquanto ambiente de aprendizagem coletiva, de construção do saber, de interação e respeito entre os sujeitos envolvidos.

Entretanto, conseguimos, além de escrever uma resposta coletiva, justificar o porquê da inveracidade de outras respostas sugeridas.

Nas duas semanas seguintes, dando continuidade ao diagnóstico proposto, foram resolvidos os outros dois problemas previstos (Pintando geometria e os Músicos e seus instrumentos). Providenciamos os problemas em tamanho de folha A4 para o aluno com deficiência visual para que pudesse acompanhar a aula com sua lupa. As dificuldades em promover a validação coletiva aumentaram. As aulas foram se tornando cada vez mais difíceis, a indisciplina aumentou, bem como o descaso dos alunos com a aprendizagem matemática. Os alunos continuaram desorganizados quanto ao seu caderno de matemática e realização de atividades propostas pelo professor, estas foram variáveis não presentes no momento de conceber a investigação.

Como era de se esperar, a primeira avaliação foi um fracasso, um aluno conseguiu nota 8,5, os demais notas abaixo de 6,0, sendo a maioria com notas entre 4,0 e 5,0. No intuito de elevar as notas o professor pediu para que todos refizessem as questões da avaliação e entregassem em forma de trabalho escrito, sendo que quem fizesse esse trabalho atingiria média 7,0, ou seja, o mínimo exigido.

Percebemos, por meio do diagnóstico, que os problemas de lógica que mais despertaram interesse foram os categorizados como predominante textual imagético, provavelmente por exigir a leitura verbal de apenas uma linha, pois notamos nas observações resistência às atividades textuais verbais longas, especialmente, situações-problema e atividades com muitos procedimentos (geralmente operações) para resolução.

Diante do contexto de sala de aula descrito é que pensamos na inserção da monitoria, experiência já vivida por nós quando regente de sala de aula, como forma de organizar a sala de aula para aplicação dos problemas de lógica e até contribuir para a práxis do professor. Contexto esse que será descrito a seguir. Assim o projeto sobre problemas de lógica acaba por inserir em seus objetivos, contribuir com a construção de uma nova práxis pedagógica, por meio do despertar da motivação dos alunos em torno dos problemas de lógica.

4.1.2 Monitoria

A monitoria foi desenvolvida semanalmente na biblioteca da escola, primeiramente com um grupo de alunos convidados a partir do interesse pelas aulas de matemática e problemas de lógica e também pela disponibilidade na quarta ou na sexta-feira livres do horário regular de aula, visto ser a escola de tempo integral, os alunos frequentam as aulas regulares na segunda, terça e quinta-feira pela manhã e todas as tardes.

Na monitoria os alunos resolviam os problemas que seriam aplicados na turma na semana seguinte. Assim, durante a aplicação na sala assumiam a função de monitores, cada um responsável por uma fila, onde distribuíam os cadernos, colavam as atividades e auxiliavam os colegas, evitando o corre-corre dos alunos pela sala. Com isso, eu conseguia ficar mais livre para ouvir individualmente os alunos, ajudá-los no registro, pois, devido à falta de hábito de registrar os processos de resolução, muitos conseguiam falar, mas não escreviam, então, por diversos momentos atuei como escriba, processo esse que será melhor explicitado em seção própria desse estudo.

Como relatado, no início da monitoria um pequeno grupo de cinco alunos, sendo três meninas e dois meninos, foi convidado a participar, entretanto, para a nossa surpresa e alegria, com o passar do tempo, outros alunos me procuraram para se candidatar a monitor, inclusive alunos com histórico de dificuldade e notas baixas nas aulas regulares de matemática. Dentre, estes, o caso mais impressionante foi o da aluna em que tivemos que ser escriba nas primeiras aulas de lógica, mas que passou a produzir registros belíssimos e participar brilhantemente como monitora da turma.

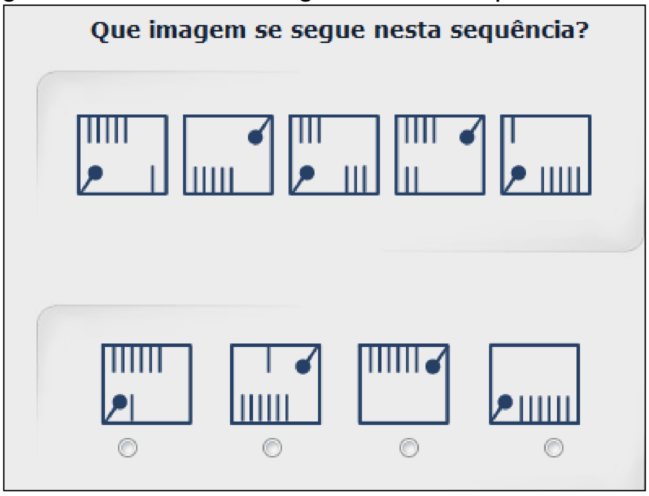
A monitoria chegou a contar com 10 alunos (6 meninas e 4 meninos), em algumas semanas, mas devido essa ser uma das únicas manhãs livres, outras atividades também aconteciam nesse mesmo período, o que causou a desistência de alguns monitores. Outro fator responsável pela falta dos monitores foi a monitoria acontecer no período chuvoso, bem como a falta às aulas era uma constante de grande parte dos alunos. Mesmo com essas variáveis, o ambiente da monitoria permitiu a coleta de dados tal qual havíamos proposto no início, ou seja, nos possibilitou acompanhar com melhor especificidade os registros e os esquemas mentais utilizados em cada processo resolutivo, bem como promover o processo de validação coletiva de forma participativa, tranquila e com respeito mútuo entre os sujeitos envolvidos.

Os monitores tentaram transferir o clima do ambiente da monitoria para a sala de aula, cada qual para a sua fila (paradigma que não conseguimos quebrar), pois chegaram a conclusão que um ambiente mais calmo, nas palavras de um deles “é bem melhor para organizar o pensamento e escrever, pois daí a gente não esquece o que tava pensando”. Percebemos pela fala da monitora, rotulada várias vezes como aluna com dificuldade de aprendizagem, a preocupação com o ambiente da sala de aula, o quanto a sua atuação na monitoria estava vinculada à sala de aula, em uma tentativa constante de não deixar dúvidas em relação à compreensão do problema e na produção de registro rico em detalhes.

A cada início de monitoria promovíamos uma discussão sobre a atuação deles na turma, pois a monitoria geralmente ocorria um dia depois da aplicação do problema anterior na sala de aula. Assim, diante das discussões levantadas, o grupo apontava soluções e até “repressões” ao comportamento dos colegas, sempre enfocando a próxima atuação na sala, em um movimento cíclico, isto é, a atuação na monitoria estava diretamente ligada a ação na sala de aula e a ação na sala de aula vinculada à resolução dos problemas de lógica na monitoria.

À medida que esses alunos foram se vinculando ao processo e assumindo seu papel de monitores, a autonomia e influência na turma se tornou significativa, sendo utilizados pelo professor nas aulas de matemática para auxiliar os colegas com maiores dificuldades, inclusive em termos de disciplina. No caso das aulas de lógica o envolvimento chegou ao nível de discussão e decisão de quais problemas seriam relevantes à aplicação na turma e quais deveriam permanecer na monitoria, como o exemplo a seguir, que na avaliação do grupo de monitores, intencionalmente proporcionada, havia erro o que tornaria a aplicação na turma tumultuada. Com isso, independentemente da discussão das produções matemáticas a partir da proposição do problema de lógica, vimos a oportunidade da pesquisa oferecer uma efetiva e imediata contribuição para a reorganização do trabalho pedagógico, mesmo não sendo esse o objetivo inicial do nosso projeto.

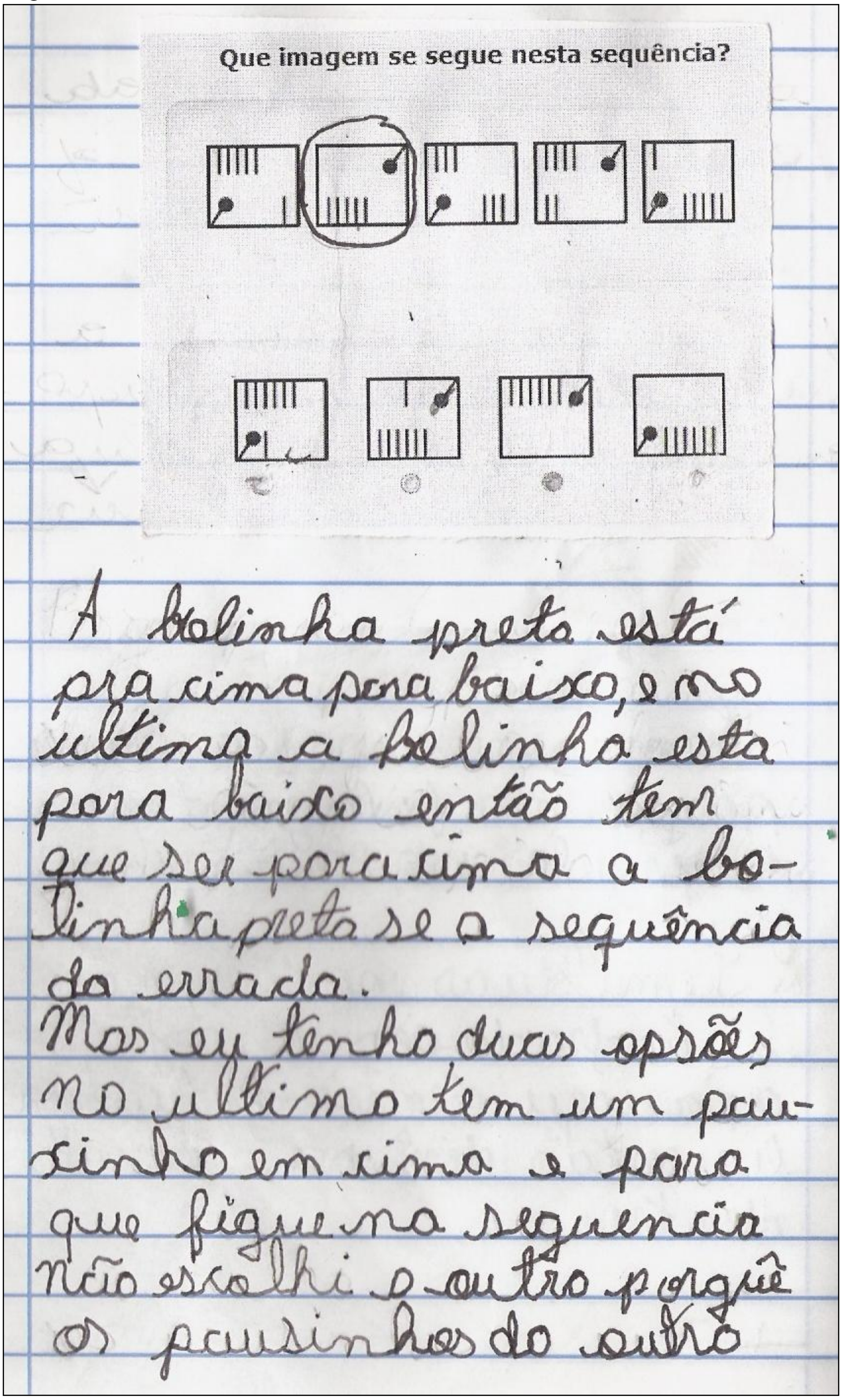
Figura 7: Problema de lógica Contando palitinhos



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

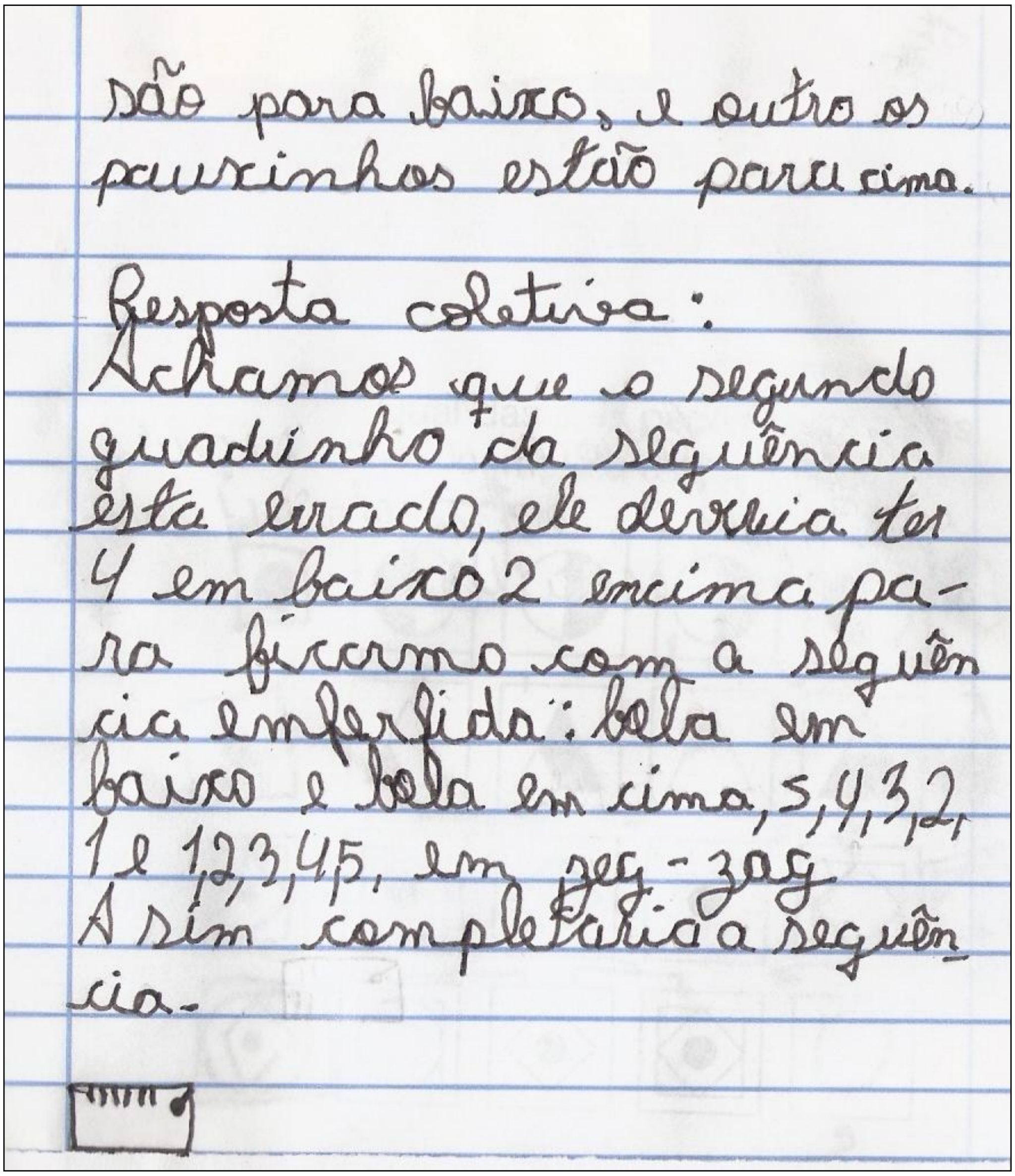
Problema corrigido pelos monitores:

Figura 8: Autonomia dos monitores



Que imagem se segue nesta sequência?

A bolinha preta está
pra cima para baixo, e no
ultima a bolinha esta
para baixo então tem
que ser para cima a bo-
linha preta se a sequência
da errada.
Mas eu tenho duas opsões
no ultimo tem um pau-
sinho em cima e para
que fique na sequencia
não escolhi o outro porquê
os pausinhos do outro



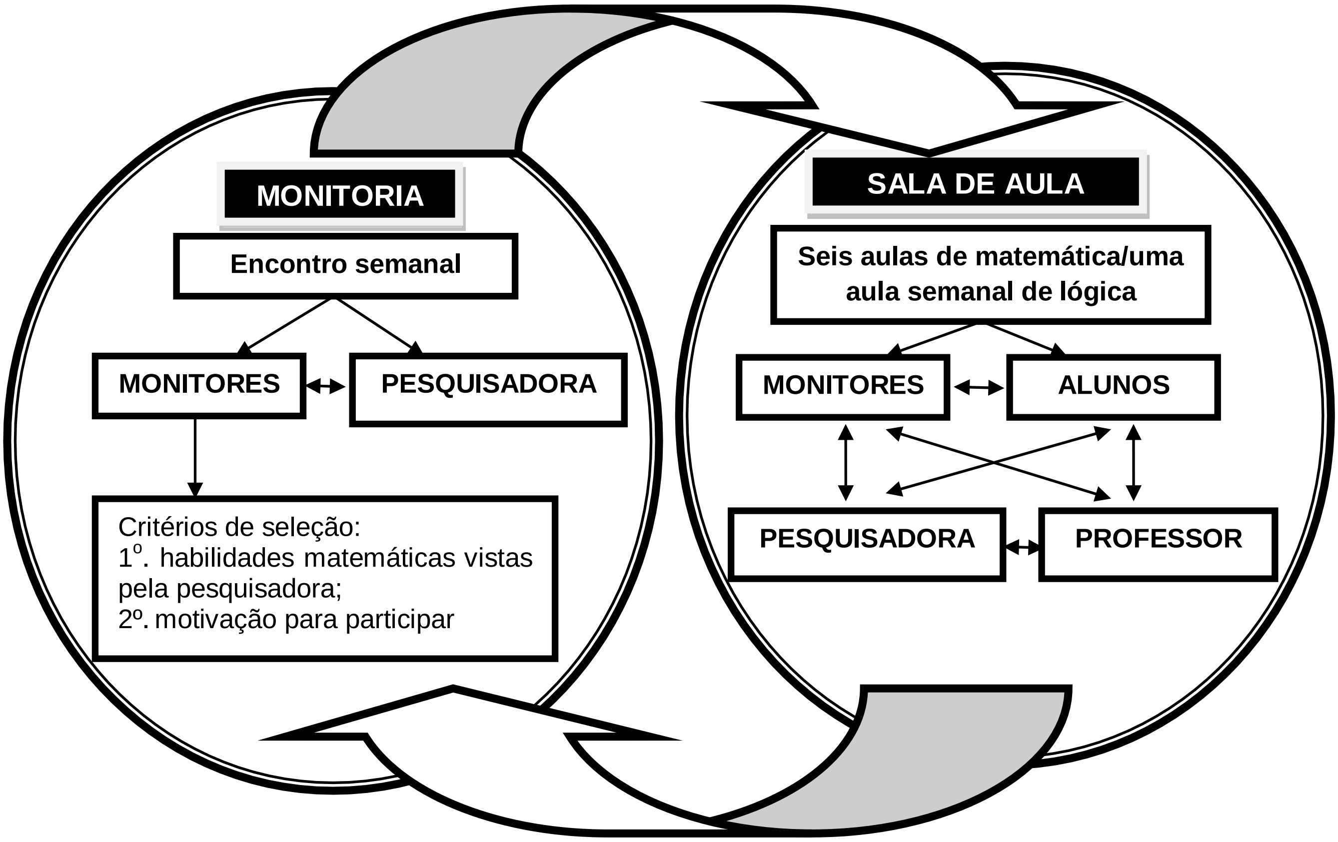
são para baixo, e outro os
pauzinhos estão para cima.

Resposta coletiva:
Achamos que o segundo
quadinho da sequência
esta errado, ele deveria ter
4 em baixo 2 encima pa-
ra ficarmo com a sequên
cia emferfida: bola em
baixo e bola em cima, 5,4,3,2,
1 e 1,2,3,4,5, em zeg-zag
A sim completaria a sequên
cia.

Fonte: Produção do aluno (mar. 2009)

Diante do exposto, podemos esquematizar os ambientes empíricos desse estudo da seguinte maneira:

Quadro 10: Organização dos ambientes empíricos



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 2009.

Os ambientes propostos possuem como característica principal a interatividade, ou seja, a partir das reflexões, discussões e resoluções da monitoria ocorre o planejamento de como será a aplicação do problema na sala de aula. Do mesmo modo, os fatos ocorridos na sala de aula alimentam as reflexões, discussões e resoluções da monitoria, numa perspectiva dinâmica e cíclica entre todos os sujeitos envolvidos: pesquisadora, alunos e monitores, que também são alunos, mas nas aulas de lógica assumem a postura de mediadores, juntamente com a pesquisadora.

4.2 Quadro geral de resultados: visão macro das produções suscitadas pelos problemas de lógica propostos

Quadro geral de resultados (análise dos problemas de lógica dos cadernos):

- Monitoria x Situação
- Alunos x Situação

Quadro 11: Resultados gerais: visão macro das produções

Problema de lógica	Monitoria	Sala de aula
O lobo, a ovelha e a couve	Não aplicado	Problema diagnóstico. Dificuldades para compreender, até em termos de leitura, o problema proposto. Ansiedade para produzir a resposta correta. Grandes dificuldades de registro. Validação coletiva das poucas respostas produzidas na aula seguinte.
Pintando geometria	Não aplicado	Problema diagnóstico. Melhor aceitação do que o anterior. Alguns se preocuparam em registrar a regra utilizada para escolher, entre as opções, a resposta julgada adequada. Novamente a validação foi bastante tumultuada, com alunos gritando e em pé, mas foi possível, além de analisar as respostas produzidas, elaborar uma resposta coletiva, como forma de ajudar aqueles com dificuldades de registro.
Os músicos e seus instrumentos	Não aplicado	Problema diagnóstico. Por ser puramente textual verbal alguns nem se propuseram a ler o problema, reclamando do tamanho do problema. Outros leram, mas não se dispuseram a responder. Após muita conversa e incentivo, com alguns registros no quadro, poucos, os mais entusiasmados com a matemática, resolveram e a validação foi individual.
Números espelhados	Não aplicado	Teve maior aceitação entre os alunos, embora alguns ainda se dedicaram a copiar a resposta do colega para considerar a tarefa concluída do que a resolvê-la, o mesmo acontecendo nas aulas de matemática ministradas pelo professor. Por ser um problema fácil e de registro simples, além de praticamente sem leitura verbal, despertou maior interesse. A validação foi oral, pois não houve questionamento.

Problema de lógica	Monitoria	Sala de aula
Fusão geométrica	Primeiro encontro da monitoria. Embora também de predominância textual imagético, os monitores sentiram dificuldade de resolvê-lo, principalmente no registro, sendo que o que mais chamou a atenção foi o desconhecimento do nome das formas geométricas envolvidas. A discussão foi rica, virando quase uma aula de geometria, devido à preocupação de saber os nomes certos para o dia da aplicação na turma, já que previam que os colegas também desconheciam os nomes.	As dificuldades da sala foram muito semelhantes às dificuldades dos monitores. O registro já apresentou evolução em relação aos problemas anteriores, fomos (a pesquisadora e os monitores) escriba de alguns alunos no processo de registro.
Representações fracionárias	Como já haviam resolvido um semelhante anteriormente, não tiveram dificuldades em resolver. Isso os motivou, pois começaram a perceber que todos têm capacidade para resolver problemas de lógica e que a prática é importante, pois o conhecimento utilizado em um problema pode vir a ser útil em outro.	Não tiveram dificuldades em resolver. Dedicamos maior parte do tempo para discutir os registros individualmente, já que o coletivo é sempre complicado pelo perfil da turma.
Fusão geométrica II	Assim, como no anterior, os entraves com a geometria são evidentes (embora estivessem estudando esse conteúdo nas demais aulas de matemática), o que acaba por confundir o pensamento e a organização do que querem registrar. Os registros iniciais foram confusos.	Facilidade em analisar o problema e organizar o raciocínio. O registro ainda necessita de ajuda, alguns para escrever, outros apenas para organizar o pensamento, mas conseguem escrever sozinhos.
Flechas marcadas	Representam o início de novos tipos de problemas de lógica, a análise da imagem que não pertence ao conjunto. Os monitores, já mais confiantes, se sentiram mais à vontade e com facilidade de resolução e de registro.	Como todas as figuras eram flechas, no começo houve dificuldades em perceber que a regra do conjunto estava nas marcas feitas nas flechas. Não houve maiores dificuldades de resolução e de registro.

Problema de lógica	Monitoria	Sala de aula
Contando palitinhos	Primeiramente cada um tentou resolver isoladamente, até que um dos monitores levantou a hipótese de que não havia solução entre as opções e explicou para os demais, que concordaram com o raciocínio. Solicitamos que ele registrasse o que havia pensado. Enquanto ele escrevia, foi proposto aos demais que elaborassem uma resposta coletiva para o problema justificando a decisão do grupo. Terminado o registro iniciamos a discussão de como seria na sala de aula. Ainda com certo receio perante o olhar da pesquisadora, um deles levantou a possibilidade de não aplicar na sala de aula, sob o argumento que causaria muita confusão. Diante da anuência dos colegas monitores e da pesquisadora, ficou decidido que esse problema não seria aplicado na sala de aula.	Não aplicado em sala por decisão dos monitores.
Geometria de pontinhos	Resolução e registro sem dificuldades. Começam a identificar e diferenciar figuras planas. Um dos monitores usou a expressão “o triângulo que não é triângulo” para falar do pentágono com três pontinhos no interior. Conseguiram associar o número de lados com o número de vértices.	A maioria resolveu e registrou rapidamente. Novamente, a discussão coletiva não atingiu o objetivo inicial, ficando as discussões no plano individual.
Conjunto geométrico	Resolução e registro sem dificuldades. Identificaram com facilidade que a figura com contornos circulares não fazia parte do conjunto, visto que todas as demais figuras “tinham pontas”.	A maioria resolveu e registrou rapidamente utilizando o mesmo critério dos monitores.

Problema de lógica	Monitoria	Sala de aula
Carinhas matemáticas	Discutiram coletivamente cada sugestão de resposta, pois nenhum tinha convicção da resposta produzida. Após chegarem em acordo, o de que havia várias possibilidades de regras para exclusão, cada um produziu a sua resposta. Já mais confiantes da autonomia enquanto monitores, julgaram o problema confuso e inadequado para a sala de aula, onde o ambiente não propicia a discussão que tiveram a oportunidade de realizar no ambiente da monitoria antes do registro.	Não aplicado em sala por decisão dos monitores.
Operações geométricas	Dedicaram muito tempo pensando no problema, rabiscando, sem querer qualquer tipo de ajuda. Chegaram a discutir coletivamente o problema, mas não chegaram a um consenso. Uma das monitoras resolveu o problema. Pediram então uma dica. De posse da dica, um dos monitores conseguiu resolver. Os outros não queriam saber a resposta, queriam mais uma dica, que foi dada pelo monitor. Assim os outros conseguiram. Como julgaram o problema difícil, discutiram uma estratégia para aplicar na sala de aula.	Alguns alunos conseguiram resolver sem dicas. Usaram o raciocínio contrário, isto é, analisaram cada uma das opções de resposta e foram descartando as julgadas inadequadas. Mas não conseguiram explicar o motivo da escolha final. Outros, da mesma forma que na monitoria, conseguiram usando as dicas dadas pelos monitores e alguns desistiram, ficando com a resposta do colega que havia resolvido.

Problema de lógica	Monitoria	Sala de aula
Os operários	Marca o início de uma nova fase, os problemas com texto verbal e imagético. Os problemas com a pontuação na hora da leitura dificultaram sua compreensão inicial. Houve a necessidade de ajudar na leitura e interpretação do problema. Para o registro optaram por primeiro discutir a resposta e após alguns questionamentos cada um produziu seu registro, que ficaram um pouco confusos, mas tiveram a preocupação de escrever muito, praticamente uma redação. Inicialmente o próprio problema fui utilizado como protocolo.	Os alunos gostaram do problema e se interessaram em resolver, mesmo parte do problema ser escrita. Os registros foram pobres, mas as discussões individuais foram bem produtivas.
Meninos e suas roupas	A maioria optou pelo caminho da tentativa e erro, fixando um dos nomes dos meninos e adequando os outros, na própria folha do problema. Quando não conseguiam mais aplicar as características mencionadas no texto, apagavam e começavam novamente. Não houve registro escrito a parte do protocolo do problema. A discussão foi oral e questionada pela pesquisadora.	Seguiram basicamente o método de tentativa e erro, tal como na monitoria. Alguns alunos foram individualmente entrevistados sobre o caminho de resolução.
Os casais	Resolveram com facilidade, mas por ser um problema complexo, o registro foi simplificado, a maioria no próprio protocolo do problema e algumas indicações de raciocínio registrado em entrevista narrativa episódica.	Utilizaram o processo de tentativa e erro, fazendo pequenos registros no próprio protocolo do problema. Alguns foram entrevistados individualmente enquanto resolviam.

Problema de lógica	Monitoria	Sala de aula
Hora marcada	Problema de lógica textual verbal com ajuda de esquemas para resolução. Desta forma, os alunos resolveram rapidamente e acharam mais fácil do que os textuais verbais + imagéticos. Discutimos a questão que “ter muita coisa escrita” pode ser positivo, pois a quantidade de informações é maior.	Utilizaram o esquema para resolver, mas alguns tiveram dificuldade de compreender sua própria marcação, foi necessário o registro em etapas para construir a resposta total. Muito brevemente, discutimos a questão do tamanho do texto verbal e sua importância para a compreensão do problema.
Música folclórica	Não tiveram dificuldades de compreensão do problema, mas demoraram para resolver por se tratar de um problema extenso. Foram resolvendo e dialogando, favorecendo uma resposta coletiva, mas sem intuito de cópia, mas em uma construção descontraída, motivados pelo problema.	Não aplicado em sala, devido ao encerramento do semestre letivo.

Fonte: Organizado pela pesquisadora, 2009.

4.3 Critérios de seleção das situações e definição das categorias de análise

Como explicitado anteriormente, os diálogos e registros coletados tanto na monitoria quanto na sala de aula consistem nas ferramentas principais para estudar a constituição dos sujeitos envolvidos, conhecer seus movimentos de recuo e avanço, seus limites e suas significações no que se refere aos problemas de lógica e a sua formação como ser matemático.

As informações registradas no diário de campo e nos protocolos assinalaram para a necessidade de analisar tanto o registro das resoluções construídas, quanto a especificidade dos sujeitos que reproduziram a si mesmos no ato da resolução dos problemas de lógica.

Sendo assim, se faz necessário uma categorização dos pontos a serem abordados a partir dos dados coletados. González Rey (2005, p. 118) assevera que “o desenvolvimento dos indicadores conduz necessariamente ao desenvolvimento de conceitos e categorias novas no curso de uma pesquisa, o que é, talvez, um dos momentos mais criativos e delicados da pesquisa”, pois como explica o referido autor no momento da coleta de dados as categorias utilizadas são mais gerais, enquanto que na análise, as categorias permitem, nas palavras de González Rey (2005, p. 119) “conceituar questões e processos que aparecem em seu curso, os quais não podem ser conceituados nos marcos rígidos e a *priori* de nenhuma hipótese ou teoria geral”. Optamos por utilizar cinco categorias de análise de dados, descritas a seguir: aprendizagem de alguns alunos, caminhos e respostas inusitadas, dificuldades/surpresa acerca das capacidades da criança, motivação na resolução e interações favorecidas. Ressaltando que as evidências serão abordadas na seção 4.4 desse estudo.

4.3.1 Aprendizagens de alguns alunos

Conforme explicitado anteriormente, resolver problemas, não constituía uma prática constante na sala de aula, o que acarretou em vários entraves no desenvolvimento dessa pesquisa, como por exemplo, desmotivação para leitura e para o registro detalhado das resoluções. Entretanto, tal realidade nos proporcionou uma riqueza de dados que não merece ser desprezada.

Essa categoria objetiva analisar o processo de aprendizagem de alguns alunos na resolução de problemas de lógica, visto que essa foi uma realidade acrescentada ao cotidiano da sala de aula. Mais do que analisarmos respostas corretas, busca-se aqui evidenciar a aprendizagem do ser matemático, àquele que, em uma perspectiva construtivista (PIAGET, 1973), conseguiu avançar, por meio dos problemas de lógica, tanto na produção oral e escrita quanto na atuação nas demais aulas de matemática. Aquele, que mesmo em situação de dificuldade, desejou seguir em frente e por meio do seu esforço, conseguiu se destacar.

4.3.2 Caminhos e respostas inusitadas

Embora os problemas de lógica abordados nesse estudo tenham respostas ditas “fechadas”, os caminhos percorridos para se chegar a resposta foram algumas vezes inusitados, chamando a atenção para o potencial criativo e inovador quando ele se sente sujeito ativo do processo de ensino e aprendizagem. A ação efetiva de compreender os problemas para então buscar uma resposta sem vínculo com um conteúdo recém explicado pelo professor, ou mencionado no livro didático, permitem ao aluno a livre imaginação, o virar e desvirar o caderno, a observação dos diferentes ângulos de um problema predominantemente imagético, além dos seus próprios rabiscos e esquemas escritos e mentais na busca pela sua própria construção, o que vai muito além de apontar a resposta correta. Nesse sentido, essa categoria tem por objetivo evidenciar essas construções como advindas de um aluno pesquisador, capaz de formular, validar e até negar suas hipóteses.

As respostas inusitadas têm a função de revelar também os conceitos matemáticos que precisam ser revistos ou consolidados. Um olhar cuidadoso do professor permite avaliar e planejar sua prática para superar as dificuldades encontradas ou até mesmo rever conceitos que tenham ficado no passado por não terem sido devidamente compreendidos pelos alunos.

4.3.3 Surpresa da pesquisadora acerca das capacidades dos alunos

Uma das preocupações iniciais dessa pesquisa foi constituir um ambiente no qual os alunos tivessem a liberdade de explicitar suas descobertas, discutir com os colegas, acompanhar o raciocínio do outro. Nem tudo que planejamos se concretizou, entretanto conseguimos na aula de lógica, um ambiente tipicamente adidático (BROUSSEAU, 2008). Assim, quando se deixa um aluno livre para pensar, organizar seus pensamentos e seus registros são muitas as surpresas acerca de sua capacidade, causando algumas vezes dificuldade de compreensão por parte do pesquisador, sendo necessário um diálogo individual para compreender os esquemas mentais (VERGNAUD, 1990, citado por FÁVERO, 2005) mobilizados na hora da resolução.

As surpresas evidenciam o quanto é importante considerar o aluno o sujeito principal do processo de ensino e aprendizagem. Ele não está ali para receber informações e conceitos prontos para aplicação em exercícios de fixação, mas para construir o conhecimento matemático com a contribuição do professor e dos colegas. Alunos considerados em situação de dificuldade de aprendizagem, quando se sentem livres dos protocolos formais de resolução produzem tanto quanto os alunos considerados ótimos em matemática. Além, depois do tempo necessário para adaptação a essa nova realidade, sentem-se a vontade até com o erro, o contrário do que acontece nas demais aulas, em que se sente inibido para expor suas respostas.

4.3.4 Motivação para a resolução

Outro fator a ser considerado na análise dos dados é a motivação para a resolução dos problemas de lógica construída ao longo do processo, pois como já relatado, no início os alunos tiveram um pouco de resistência, como por exemplo, no problema “Os músicos e seus instrumentos”.

A valorização da produção (e não do erro) e da cooperação entre os alunos como sujeitos produtores de conhecimento matemático (PIAGET, 1973) e resolvedores de problemas, foi um dos fatores contribuintes para transformar a resistência em motivação, aquém do que esperávamos, mas além da realidade existente.

Analogamente podemos citar o trabalho da monitoria, que passou do convite por parte da pesquisadora para procura dos próprios alunos que se sentiam valorizados, seja pelas produções, seja pelo acompanhamento na sala de aula.

Valorizados no sentido de serem ouvidos em um ambiente em que todos podiam ouvir e falar, sem ninguém gritando ou apontando o erro, como era comum acontecer nas tentativas de correção coletiva de atividades realizadas pelo professor. E, do sentir-se professor por uma hora, inicialmente com a ideia daquele que detém o conhecimento para a posterior compreensão que o professor não é aquele que tem a resposta, mas aquele que orienta, que faz o aluno pensar, despertou a motivação não somente para a resolução, mas também para a reflexão de como conduzir o processo na sala de aula, inclusive da importância da disciplina para aprendizagem, um dos maiores problemas da turma.

Na sala de aula, em virtude do curto período da pesquisa e do número de alunos, a motivação foi menor, porém não ausente. Considerando que foi, por exemplo, as atividades desenvolvidas na sala de aula que motivaram alguns alunos a se candidatarem a monitores.

4.3.5 Interações favorecidas

Na sala de aula, a motivação foi mais perceptível nos processos de interação tanto entre os monitores e os alunos, quanto entre os próprios alunos, rompendo-se a dinâmica inicial da cópia da resposta correta para a proposta de construção de uma resposta, com destaque para as “dicas” trocadas.

A interação esteve extremamente presente nos processos de validação, realizados com o colega de trás, da fila ao lado, com o monitor, visto que, infelizmente, a organização dos alunos em filas foi um dos paradigmas da sala de aula que não conseguimos romper, bem como a construção de um processo de validação coletiva, ficando estas reduzidas a grupos pequenos.

Na monitoria a interação entre os monitores foi a mola propulsora de todas as discussões, como relatado no quadro 11, no problema “Operações geométricas” em que um dos monitores conseguiu resolver o problema e os demais não queriam a resposta, apenas uma dica que permitisse mobilizar o raciocínio em torno da situação proposta, o mesmo acontecendo em situações da sala de aula.

Não podemos deixar de destacar os momentos em que a interação desencadeou processos de competição, de apoio e até de proteção, mediados pelo carinho entre os membros do grupo. O mais importante não era saber mais, mas compartilhar, ensinando, desta forma, muito mais que matemática: valores para a vida.

4.4 Descrição e análise das resoluções selecionadas

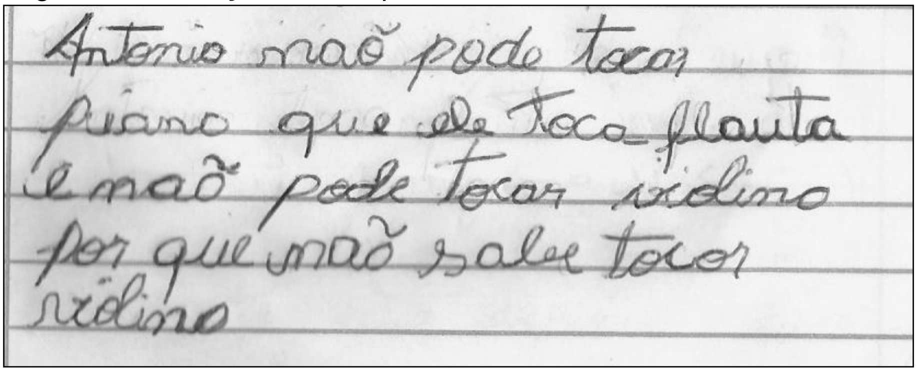
De acordo com as categorias descritas para análise das resoluções de problemas de lógica produzidas pelos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, será abordado nesta seção algumas dessas resoluções e suas contribuições para o cumprimento dos objetivos estabelecidos para esse estudo. Vale ressaltar que os nomes originais dos alunos aqui citados foram preservados e substituídos por nomes fictícios.

4.4.1 Categoria aprendizagens de alguns alunos: Ana e a conquista de ser monitora

Nas aulas de matemática, Ana era mais uma aluna interessada em cumprir as tarefas solicitadas, nem que para tal precisasse copiar dos colegas a resposta correta, do que interessada em aprender matemática. Tal comportamento não foi diferente nas primeiras aulas de resolução dos problemas de lógica.

Sem muito interesse em participar, quando questionada sobre suas respostas, reagia sempre na defensiva, com exclamações do tipo "*ta respondido, não ta?*" ou "*a resposta ta errada?*" (DC, fev. 2009). Um dos exemplos de como a falta de interesse era evidente está na resposta abaixo, referente ao problema predominantemente textual verbal "Os músicos e seus instrumentos".

Figura 9: Resolução de Ana para "os músicos e seus instrumentos


Antonio naõ pode tocar
piano que ele toca flauta
e naõ pode tocar violino
por que naõ sabe tocar
violino

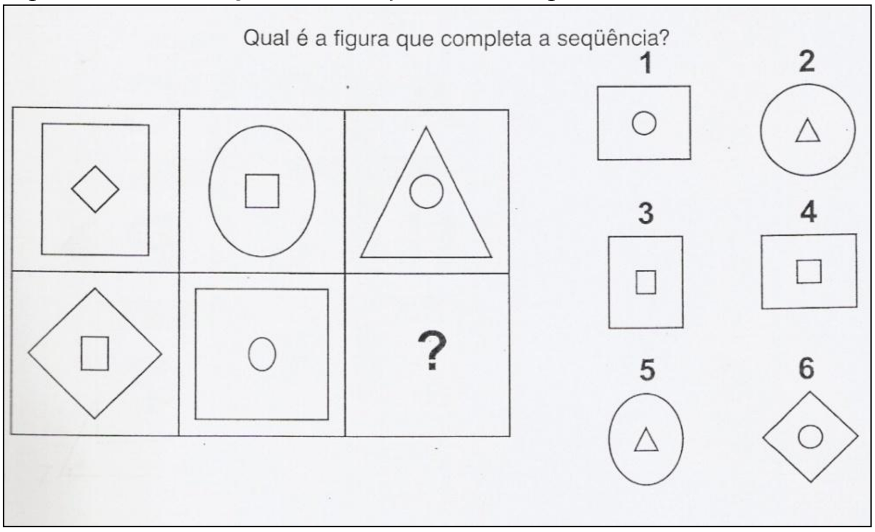
Fonte: Protocolo da aluna (fev. 2009).

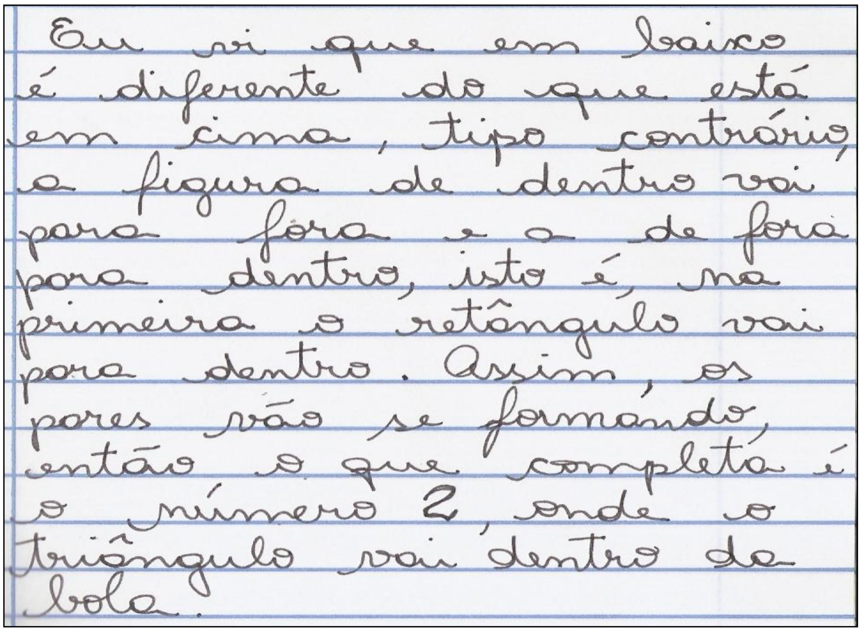
Na resolução, Ana até mostra um interesse inicial no registro, pois quando escreve que "*Antonio não pode tocar piano*" demonstra que leu e interpretou adequadamente o problema, visto que esta informação consta no texto. No entanto, quando tenta justificar que ele toca flauta ao invés do violino, percebemos que ela desiste do problema, mas não deixa evidências do porquê da desistência.

Entretanto, acompanhando as aulas de matemática, percebemos, que essa era a maneira que ela encontrava de esconder as dificuldades perante as atividades. Observamos que ela lia e até tentava alguma resolução, mas logo desistia, parecia não compreender o significado do que estava fazendo ou deveria fazer. É importante considerar de que tal fato revela que o desenvolvimento da atividade cognitiva tem um estatuto diferente da tarefa de comunicar suas ideias, pois este requerer uma reelaboração do pensamento atrelada à necessidade de tomada de consciência de suas estruturas mentais presentes na produção de uma solução matemática para o problema proposto.

Com o intuito de conhecê-la melhor, fomos nos aproximando e nos propusemos a ajudá-la com as operações de divisão, conteúdo que estava sendo abordado no momento. Com isso, logo na aula seguinte de lógica, ela teve coragem de me chamar e dizer "*eu até sei como pensar, mas não consigo escrever*" (DC, fev. 2009). Propusemos então que ela diria como estava pensando e eu faria o registro, para depois avaliarmos juntas (VALDÉS; RAMÍREZ, 2000).

Figura 10: Resolução de Ana para “fusão geométrica I”





Eu vi que em baixo é diferente do que está em cima, tipo contrário, a figura de dentro vai para fora e a de fora para dentro, isto é, na primeira o retângulo vai para dentro. Assim, os pares vão se formando, então o que completa é o número 2, onde o triângulo vai dentro da bola.

Fonte: Protocolo da aluna (mar. 2009).

Enquanto ela expressava seu raciocínio tinha dificuldade em identificar, por meio da nomenclatura, as figuras envolvidas, fato que demonstra a necessidade de aprendizagem de conteúdos matemáticos para a resolução de problemas de lógica, associando conceitos e terminologias, mesmo que esse não tenha sido o objetivo inicial do projeto, mas atendendo as recomendações dos PCN (1998), ainda que isso não tenha sido impedimento para desenvolver a atividade proposta.

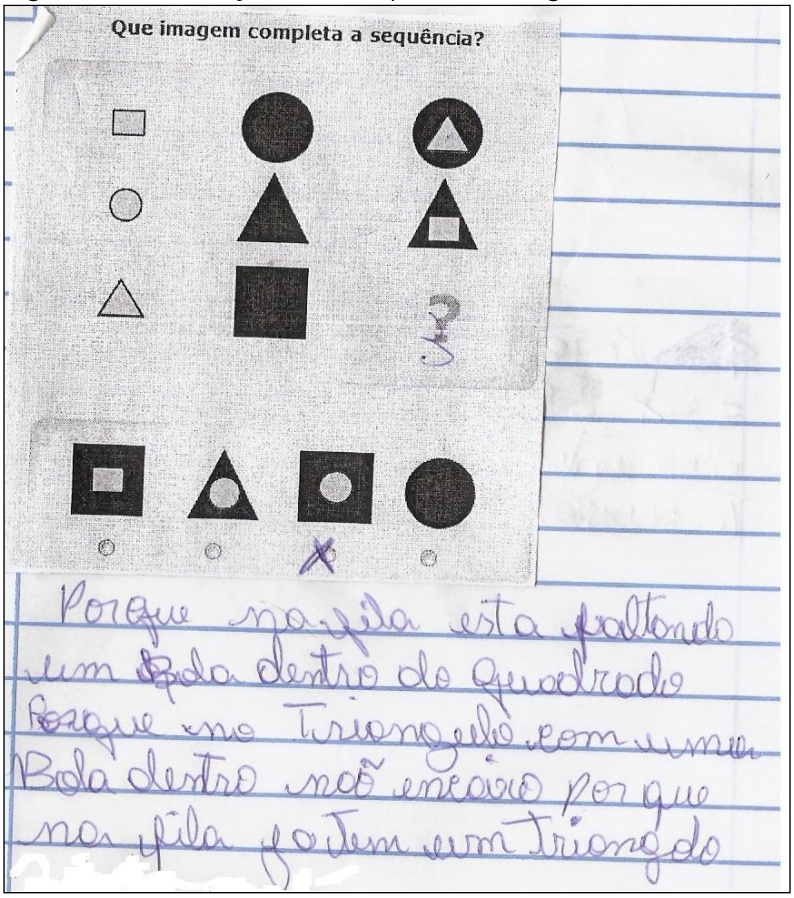
Prosseguindo o diálogo enfatizamos que escrevemos exatamente o que ela falou, que com o passar do tempo vamos sempre melhorando, aprendendo os nomes corretos, que o importante no momento era escrever o que ela pensava. Pedimos para que deixasse no caderno como nós havíamos escrito para que nos próximos ela pudesse ler e tentar escrever sozinha.

Com o início da monitoria, em um dos dias em que estávamos lembrando, durante a aula de matemática, aos monitores do nosso encontro na manhã seguinte, Ana nos olhou e perguntou se poderia participar, enfatizando "*eu não sei muita matemática, mas posso ver como é a monitoria?"* (DC, mar., 2009), fato que demonstra que Ana pode vir a aceitar a possibilidade de uma situação de aprendizagem como bem define Brousseau (2008) em sua Teoria das Situações (1986) abordado em nosso referencial teórico.

Com a participação na monitoria (onde Ana compareceu a todos os encontros) seu interesse em registrar e participar ativamente das discussões foi crescendo à medida que se sentiu confiante de sua capacidade. Na sala de aula, trabalhava orgulhosa tanto nas aulas de lógica como nas demais aulas de matemática. Seu comprometimento com as atividades se destacou, merecendo inclusive elogios do professor regente. Ana não se tornou uma excelente aluna de matemática, nem uma exímia resolvedora de problemas de lógica, mas resgatou a capacidade de acreditar no seu potencial, que dificuldades existem, mas que com ajuda é possível superá-las.

A seguir, alguns exemplos da trajetória de Ana pelos problemas de lógica.

Figura 11: Resolução de Ana para “fusão geométrica II”



Fonte: Protocolo da aluna (mar. 2009).

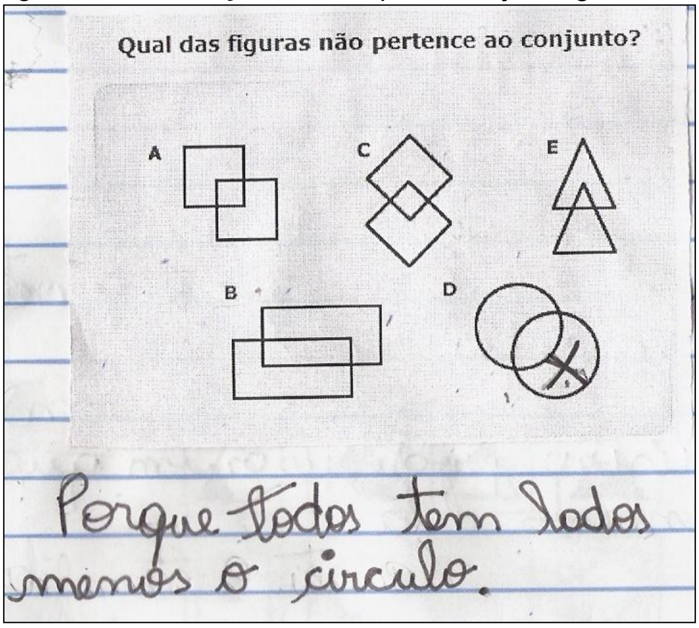
Ana demonstrou a preocupação com a terminologia das figuras geométricas envolvidas no problema, ponto de dificuldade no problema anterior, o que demonstra a preocupação em aprender o conteúdo matemático e conseguiu registrar como organizou seletivamente seus esquemas mentais (VERGNAUD, 1990, citado por FÁVERO, 2005) para diminuir as possibilidades de resposta e escolher, pela dedução lógica, a possibilidade correta. Ao organizar o raciocínio de Ana percebemos que mesmo não tendo qualquer conhecimento a respeito do autor, a aluna desenvolve as fases de resolução de problemas proposta por Pólya (1995):

1. Inicialmente, admite como verdade que a última coluna é formada pela fusão das figuras presentes nas colunas um e dois, embora o seu registro não justifique a regra dessas fusões.
2. No registro indica preocupação inicial com a figura menor. Desta forma, identifica que o círculo menor deve estar no interior de uma das figuras maiores.

3. Abandona o enunciado do problema e passa a analisar as opções de resposta. Verifica assim que, dentre as opções com círculo interno, tem-se o triângulo e o quadrado.
4. Partindo do pressuposto que tanto as figuras menores quanto as maiores não se repetem, descarta o triângulo, ficando com a opção do quadrado com o círculo dentro.

A construção lógica de Ana, ainda que registrada de forma resumida, faz constatar um avanço na aprendizagem. Para uma aluna, considerada com dificuldade de aprendizagem em matemática e que precisou de escriba para registrar suas ideias em outro problema, ela conseguiu construir sozinha sua resposta.

Figura 12: Resolução de Ana para "conjunto geométrico"



Fonte: Protocolo da aluna (mar. 2009).

Em sua resposta Ana utiliza corretamente a terminologia "*círculo*[9]" (ao contrário do problema anterior em que utiliza bola), inclusive com grafia correta. Utiliza a expressão "lado", comunicando a ideia de que assumiu as figuras como polígonos. Desta forma, a partir da escrita de Ana é possível reconhecer o que ela quis comunicar em termos de lógica de pensamento, apesar da imprecisão terminológica. Há preocupação na

[9] Embora tenhamos a clareza que as características apresentadas na imagem do problema designam, matematicamente, uma circunferência, consideramos correta a terminologia círculo utilizada pelos alunos, por considerar um grande progresso diferenciarem bola de círculo. E, por acreditar que muitas correções acabariam por inibir as produções, foco principal desse estudo. Desta forma, acredita-se que o rigor da linguagem matemática é importante, mas não fundamental nesse momento.

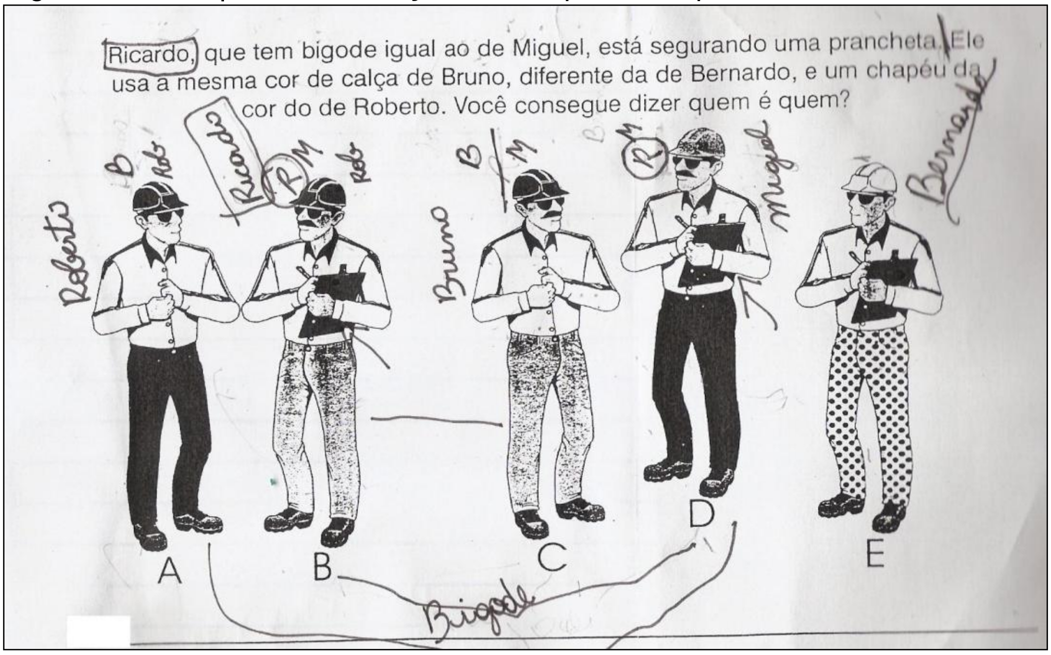
mediação realizada na pesquisa que o rigor na linguagem matemática não seja obstáculo ao engajamento na atividade cognitiva.

Outro fato de destaque é a apropriação de uma propriedade dos polígonos para classificar as figuras do conjunto e excluir o elemento que não atende as características.

Percebe-se na análise dos protocolos de Ana que os problemas de lógica desencadearam a motivação para aprender os conteúdos matemáticos, acarretando uma aprendizagem significativa, tal como propõe Muniz (no prelo), do abandono dos problemas para a participação efetiva na monitoria.

O próximo exemplo mostra que Ana, que no início precisou de escriba, passa a utilizar o próprio problema como protocolo para registrar seus raciocínios acerca do problema proposto.

Figura 13: Exemplo 3 – Resolução de Ana para “os operários"



Fonte: Protocolo da aluna (abr. 2009).

No registro de Ana temos a indicação de Ricardo, logo no início da parte textual verbal do problema. Conforme vai lendo, a aluna vai marcando no texto imagético a letra inicial do nome, conforme indicações do texto verbal, por exemplo, quando o texto verbal diz que “Ricardo, que tem bigode igual ao de Miguel...” ela escreve “R” e “M” nos personagens com Bigode. Seguindo o mesmo procedimento para as demais informações. Ligou os personagens B/C duas vezes e em uma delas escreveu a palavra “bigode” e A/D, provavelmente sendo a outra marcação dos que estão de calça igual. Por fim, nomeia cada um dos personagens: A – Roberto; B – Ricardo; C – Bruno; D – Miguel;

E – Bernardo. Assim observa-se que neste contexto que os registros, mais do que a função de comunicação de processos e respostas, tem como objetivo apoiar a construção de procedimentos resolutivos, ou seja, construir esquemas mentais na busca de resolução do problema de lógica proposto.

A resolução de Ana, além de correta, exemplifica as tentativas de resolução e de quanto se dedicou na busca da resposta, sendo visíveis marcas de que utilizou a borracha, mostrando mais uma vez o cumprimento das fases de um processo de resolução. Para resolver esse problema Ana se isolou do grupo para "*pensar melhor*". A cada tentativa finalizada buscou ajuda para a validação, que era feita por meio da leitura do enunciado por partes, sendo uma das dificuldades foi identificar o sujeito principal de quem eram fornecidas as características. Quando Ana conseguiu compreender que Ricardo era o sujeito principal conseguiu resolver o problema. O protocolo indica os procedimentos mentais de Ana, mesmo ela não tendo feito registro em forma de texto verbal (redação), sendo possível detectar as premissas lógicas utilizadas para elaborar a conclusão final, isto é, nomear as personagens como solicitava o problema:

1. B/C/D tem bigode (ela liga essas personagens), então podem ser Ricardo (Ana marca a letra R nessas personagens), mas Ricardo segura um prancheta, então não pode ser C (verifica-se no protocolo o R apagado). Se ele usa calça igual a Bruno (ela liga os personagens de calça igual), entre os personagens com bigode, B/C tem calça igual. Logo, B que tem bigode e segura uma prancheta é Ricardo (ela escreve o nome) e C é Bruno (também escreve o nome).
2. Como Bruno tem calça diferente de Bernardo, Bernardo pode ser A/D/E. Mas se Ricardo (B) tem chapéu da mesma cor de Roberto, dentre as opções o único de chapéu igual é A. Ela escreve o nome Roberto na personagem A.
3. O outro de bigode é D, portanto só pode ser Miguel e, restando E, com a calça diferente de Bruno é Bernardo. Assim:
   - A: Roberto
   - B: Ricardo
   - C: Bruno
   - D: Miguel
   - E: Bernardo

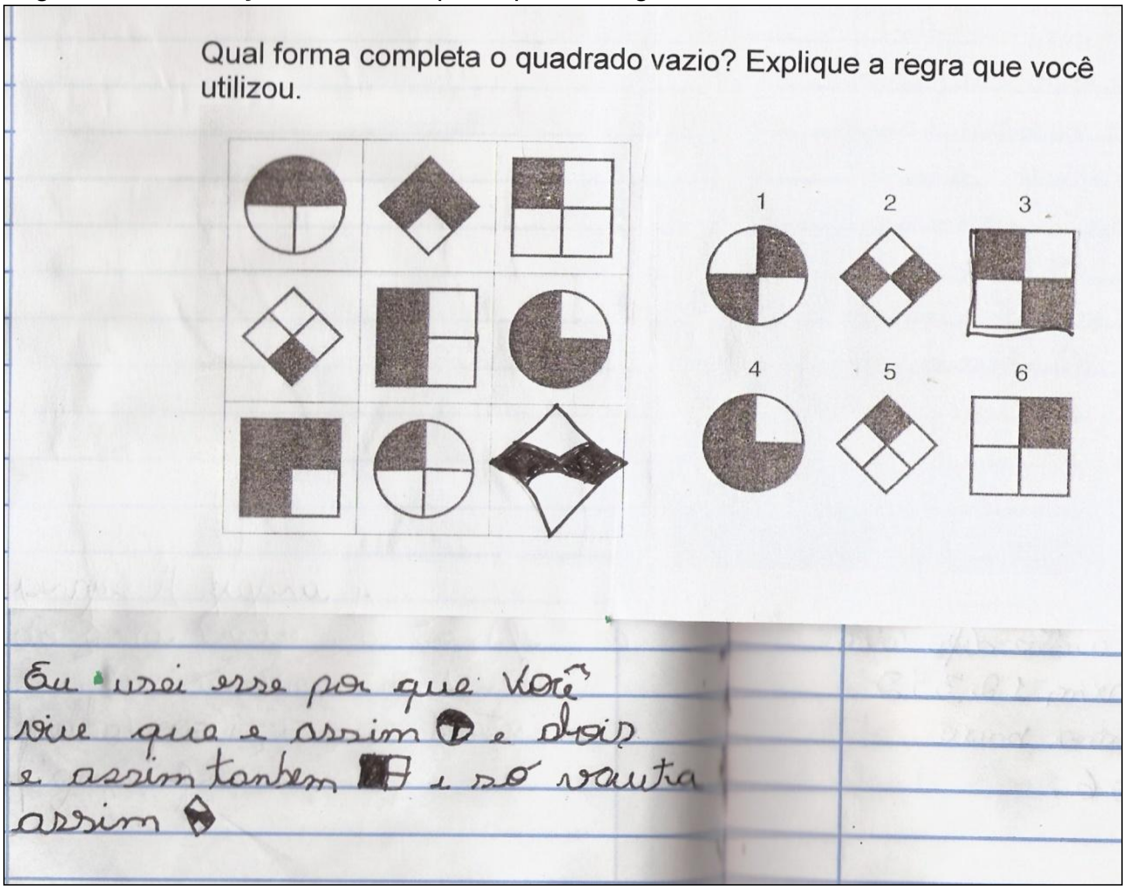
Esse foi o maior exemplo de persistência de uma menina que no início buscava apenas cumprir as tarefas solicitadas, sem a preocupação com o significado de cada passo, da valorização de cada pensamento. Em uma das entrevistas episódicas realizadas durante as resoluções na monitoria Ana afirmou que é *"muito melhor pensar primeiro e registrar depois, assim não precisa ficar apagando"* (DC, maio 2009), as palavras de Ana revelam que seu fazer matemática é um processo refletido, de construção intencional, assim como o fazer dos matemáticos (PIAGET, 1973).

Além do processo evolutivo, por meio de seus registros, Ana revela que quando em situação adidática é capaz de superar seus limites, de ir em busca da solução para suas dificuldades, ou seja, ela precisa sentir-se útil, motivada e valorizada, como ser matemático que é neste contexto.

4.4.2 Caminhos e respostas inusitadas: as revelações de Beatriz

Beatriz é uma aluna dedicada, que sempre procura realizar as atividades propostas pelo professor. Em situação de dificuldade levanta e procura o professor para perguntar, mas muitas vezes não consegue compreender a explicação para a atividade, volta para a mesa e apaga tudo o que fez para iniciar novamente. O mesmo comportamento foi percebido nas aulas de lógica. Beatriz, como indicam seus registros, comete erros ortográficos e tem dificuldades de registrar a nomenclatura das figuras, por isso opta pelo texto imagético em consonância com o texto verbal, como na produção seguinte:

Figura 14: Resolução de Beatriz para “pintando geometria”



Fonte: Protocolo da aluna (fev. 2009).

O registro de Beatriz não deixa claro porque utilizou a análise da diagonal para aferir a figura que completa a sequência. O que fica evidente é que ela, assim como Ana, tem dificuldades com a nomenclatura de figuras geométricas, preferindo desenhar as necessárias para o seu registro do que tentar defini-las.

Beatriz antes de desenhar no quadro em branco da sequência, risca, como mostra o protocolo a figura três, o que nos faz acreditar que ela deduz que falta um quadrado com duas partes pintadas e que essas partes não são consecutivas. Depois, analisa melhor e percebe que o quadrado maior já faz parte da sequência, assim como o círculo, optando assim pelo quadrado menor (que ela não reconhece como sendo também um quadrado rotacionado 90 graus).

Beatriz ainda não consolidou os esquemas mentais (VERGNAUD, 1990, citado por FÁVERO, 2005) relativos ao conceito fracionário. Do mesmo modo, percebe as diferentes figuras geométricas envolvidas, mas não identifica as imagens como representações geométricas de frações, embora isso não tenha impedido a resolução, por ser apenas um dos caminhos a serem percorridos para a construção da resposta.

A resposta da aluna, além de revelar o que ela sabe, permite ao professor observar o que ainda precisa ser revisto e os esquemas a serem consolidados. Tendo consciência que a aluna cursou os anos iniciais do Ensino Fundamental, onde os conteúdos de frações e geometria plana fazem parte do currículo é, no mínimo preocupante e merece ser investigado, porque a aluna não identificou as imagens como representações fracionárias de um quarto, dois quartos e três quartos, bem como nomeá-las. Investigar o motivo dessa falha no esquema da aluna vai permitir ao professor identificar o que precisa fazer parte do seu planejamento.

Mais livres para produzir, os alunos não demonstram preocupações com os conteúdos matemáticos em si, a não ser que lhes sejam úteis no momento da resolução, sendo essa uma das principais características que tem se revelado nos problemas de lógicas por estes não estarem ancorados nos conteúdos recém explicados pelo professor. No entanto, analisar as respostas dos alunos frente aos problemas de lógica, essencialmente adidáticos (BROUSSEAU, 2008) por mais inusitadas que sejam, vai muito além da análise da resposta correta, permite detectar o nível de conhecimento dos conteúdos matemáticos, bem como a aplicação desses conteúdos com situações diferentes daquelas em que são geralmente utilizados (MUNIZ, 2008), como por exemplos, em exercícios de fixação. O aluno pode saber o conteúdo matemático, mas este encontra-se em um esquema mental isolado, desprovido de significado, que faz com que o aluno não consiga transportá-lo para outras situações, condição essencial para a aprendizagem de conceitos como prelecionam os PCN (1998).

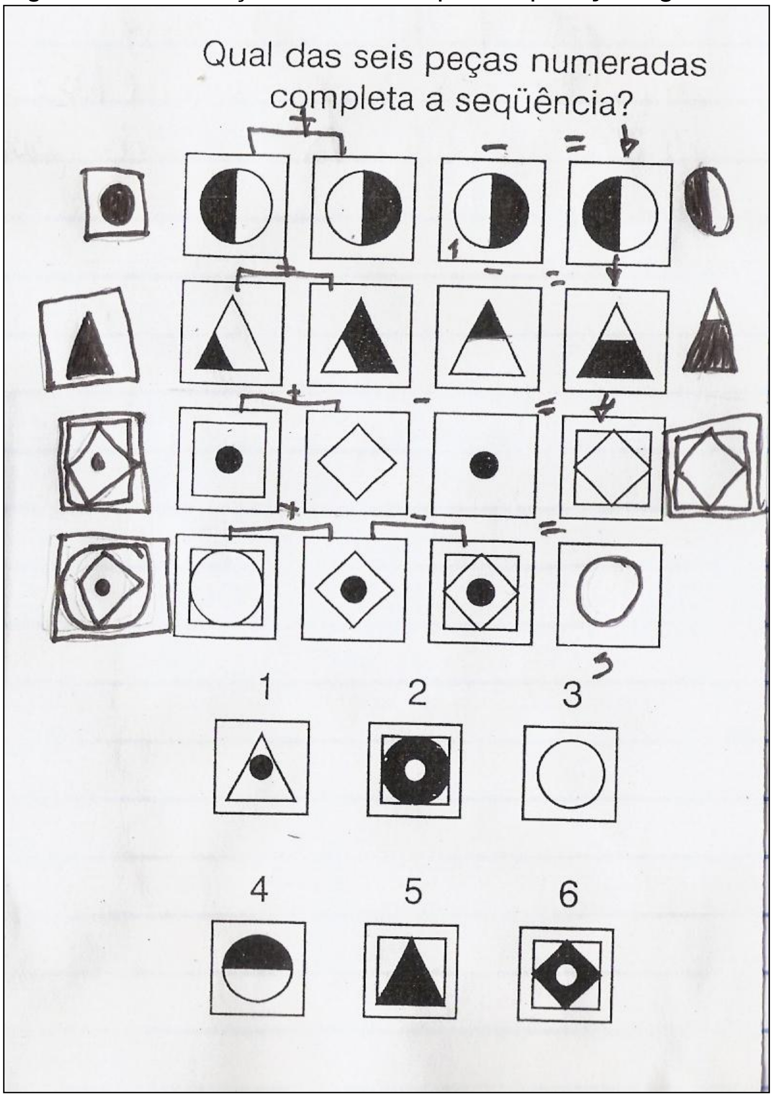
No caso de Beatriz, o professor, precisa identificar qual ponto está falho na consolidação do campo conceitual (VERGNAUD, 1990, citado por FÁVERO, 2005), se é o desconhecimento do conteúdo ou a falta de significado, para organizar o trabalho pedagógico com o objetivo de consolidar esse conceito, pois esse provavelmente não é problema somente de Beatriz.

4.4.3 Surpresa da pesquisadora acerca das capacidades dos alunos: Cláudia e Daniel

Cláudia foi uma grande surpresa na turma. Sempre sentada, pouco participativa, quase imperceptível. Conhecendo melhor a turma, percebemos uma aluna bem humorada, organizada, paciente e ótima em matemática, talvez por isso imperceptível dentro de uma turma de alunos deslocados das aulas de matemática.

Convidada para ser monitora aceitou prontamente. Destacou-se dentre os demais, servindo de motivação para alunas como Ana, sua amiga. Dentre as respostas produzidas por Cláudia, com certeza uma merece grande destaque, não somente por ter resolvido em menos tempo do que os demais, mas pelo registro impecável do seu raciocínio:

Figura 15: Resolução de Cláudia para "operações geométricas"



Fonte: Protocolo da aluna (abr. 2009).

Como esse foi um dos últimos problemas aplicados, os registros, de maneira geral, se aperfeiçoaram bastante, mas o de Cláudia merece destaque pela complexidade e clareza das informações. Analisando o protocolo da aluna, percebemos na primeira linha da sequência a ligação entre os dois primeiros elementos, com o sinal da adição (+) sobre esses elementos. Do lado esquerdo, Cláudia desenhou o que parece ser o resultado da soma efetuada. Sobre o terceiro elemento da linha, coloca o sinal de subtração (-), desenhando do lado direito o que talvez seja o resultado da operação realizada com as figuras. Sobre o quarto e último elemento da linha, coloca o sinal de igualdade (=) e uma seta (↓) apontando para ele, supostamente, como a resposta da operação realizada, por ser este equivalente ao desenho da direita.

A estratégia de resposta adotada por Cláudia pode ser resumida como sendo o quarto elemento fruto da soma dos dois primeiros elementos, subtraindo-se o terceiro. Estratégia adotada para as demais linhas, até completar a última peça da sequência.

Cláudia resolve o problema sem precisar das possibilidades de resposta. Ao ser questionada sobre o processo resolutivo, visto que o registro não possui marcas de apagados, a aluna disse que como percebeu que as figuras de cada linha eram diferentes, descartou a análise das colunas e se ateve a primeira linha, em buscar relações entre as figuras. Primeiro percebeu que as duas primeiras se completavam, tanto na primeira quanto na segunda linha. Como achou as duas últimas linhas mais difíceis porque não eram coloridas, deixou-as de lado.

O passo seguinte foi "*ficar visualizando na cabeça*" (DC, abr. 2009) a nova figura advinda da soma das duas primeiras e ficou imaginando qual relação havia com a terceira até perceber que era parte da figura total, dali em diante, *"ficou fácil, foi só olhar para a última"* (DC, abr., 2009) relatou Cláudia, que continuou: *"achei então que tinha descoberto a regra, testei na segunda linha e deu certo. As duas últimas foram mais difíceis, por isso resolvi desenhar para ver melhor"* (DC, abr. 2009).

Como os colegas monitores ainda não haviam resolvido o problema, mesmo depois de diversas tentativas e diálogo entre eles, Cláudia se propôs a dar uma dica, já que os demais não queriam saber a resposta, sua dica foi "*pensem nas operações matemáticas, talvez a gente possa somar outras coisas além de números"* (DC, abr. 2009).

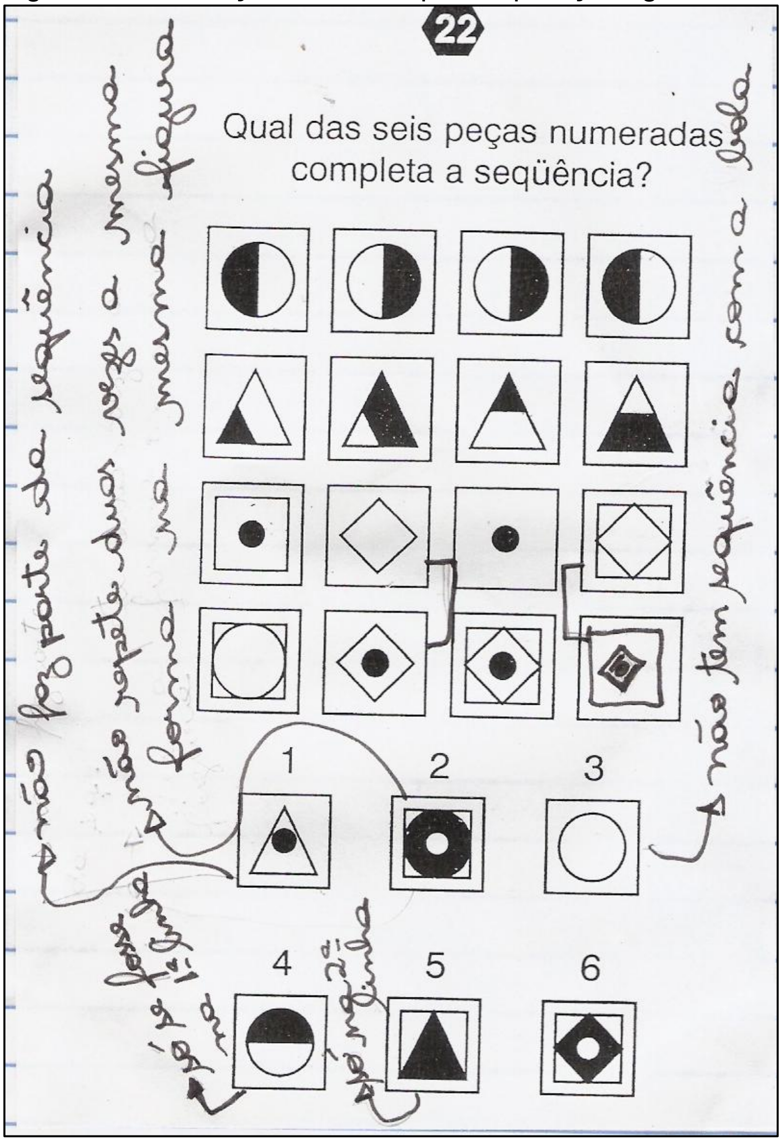
A dica de Cláudia aos colegas demonstrou o quão surpreendente é a capacidade de mobilização de esquemas mentais (VERGNAUD, 1990, citado por FÁVERO, 2005) de uma criança de 11 anos quando é motivada a confiar e valorizar sua capacidade. Do mesmo modo é a demonstração dos colegas de monitoria que mesmo não conseguindo resolver não desejavam a resposta pronta, mas sim uma ajuda que funcionasse como auxílio dos seus raciocínios. Prova de que haviam se apropriado do problema, em uma típica situação adidática (BROUSSEAU, 2008). Não interessava mostrar à pesquisadora a resposta correta, mas sim construí-la por si, superar os próprios limites, mostrando que a efetivação de parcerias (MUNIZ, no prelo) é fundamental na superação dos obstáculos individuais.

Além da aluna e monitora Cláudia, o aluno Daniel também construiu uma resposta inusitada e surpreendente.

Daniel é um dos melhores alunos de matemática, lembrando que esse não é o caso de Ana, Beatriz ou Bianca, foi o autor da melhor nota na avaliação, anteriormente mencionada, realizada pelo professor. Foi um dos primeiros alunos convidados a participar da monitoria, participou de apenas dois encontros, mas desistiu, alegando que não tinha paciência para ensinar os alunos da sala. Nas atividades de maneira em geral, o raciocínio de Daniel é muito rápido, mas ele não gosta de registrar, apenas mostra a resposta correta. Como na sala o professor não costuma cobrar os processos de resolução, os registros de Daniel são mínimos, o mesmo acontecendo com os problemas de lógica.

Daniel é o aluno que quando se interessa por determinada atividade ‘mergulha’ no que está fazendo, consegue se desligar do barulho, das inquietações dos colegas para se dedicar ao seu objetivo. Embora sua resposta não esteja correta, é interessante investigar o caminho percorrido por Daniel para construção de sua resposta, como mostra o registro a seguir, com as respostas de uma entrevista episódica realizada pela pesquisadora:

Figura 16: Resolução de Daniel para “operações geométricas”



Fonte: Protocolo do aluno (abr. 2009).

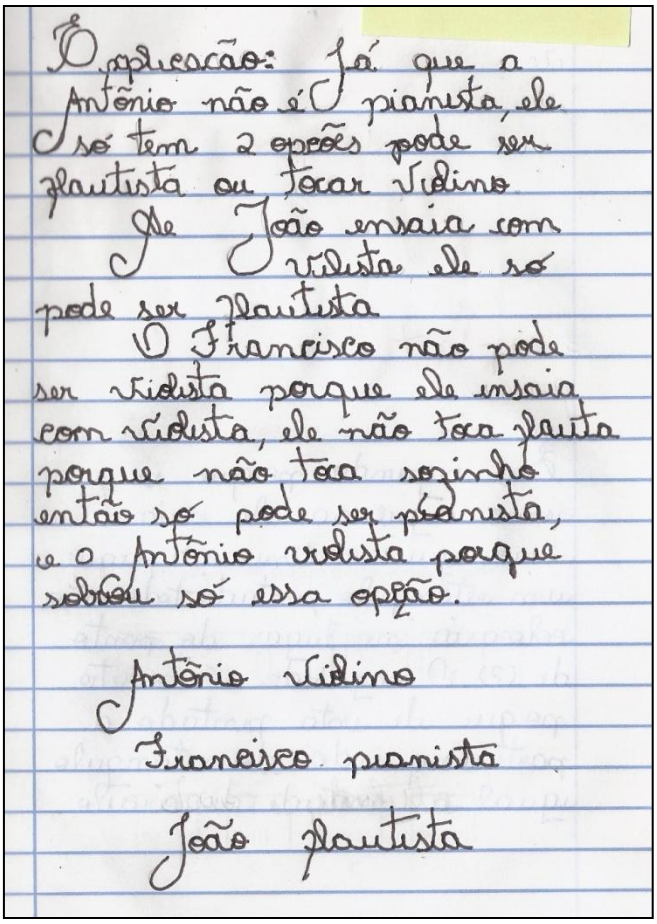
Daniel não observou a sequência como um todo, observou somente as duas últimas linhas, como mostram as marcas no seu registro, em que apenas liga o segundo elemento da terceira linha com o segundo elemento da quarta linha. Repete o procedimento para os quartos elementos destas mesmas linhas, desenhando no último o que seria sua resposta.

Optou por analisar as possibilidades de resposta, usando suas concepções de análise para descartar uma a uma até selecionar a julgada correta e desenhá-la no quadro em branco da sequência.

Na entrevista narrativa episódica efetuada logo após a resolução, resumidamente exposta pela pesquisadora no próprio protocolo, percebemos que as justificativas de Daniel não são infundadas, no entanto, não seguem um padrão, uma lei de formação válida para todos os elementos da sequência, como pressupõe o conceito de sequência matemática. Observa-se que Daniel escolheu a última opção como correta, por exclusão das demais, mas quando questionado quais características da opção escolhida a ligavam a sequência ele não soube responder.

Como dito, Daniel não tem apreço por registros escritos. Todavia, um de seus registros referente a problema diagnóstico ‘Os músicos e seus instrumentos’ surpreendeu até o professor regente, pela riqueza dos detalhes da explicação.

Figura 17: Resolução de Daniel para “os músicos e seus instrumentos”


Explicação: Já que o Antônio não é pianista, ele só tem 2 opções pode ser flautista ou tocar violino

Se João ensaia com violista ele só pode ser flautista

O Francisco não pode ser violista porque ele ensaia com violista, ele não toca flauta porque não toca sozinho então só pode ser pianista, e o Antônio violista porque sobrou só essa opção.

Antônio violino

Francisco pianista

João flautista

Fonte: Protocolo do aluno (fev. 2009).

De acordo com a produção escrita de Daniel, podemos dividir o seu raciocínio em sete etapas, entre premissas e conclusões:

1. Antonio não é pianista;
2. Antonio pode ser pianista ou violinista;
3. João ensaia com violinista;
4. João é flautista;

5. Francisco não pode ser violinista porque ensaia com violinista;
6. Francisco não toca flauta porque não toca sozinho;
7. Antonio é violinista.

Analisando de forma mais detalhada o raciocínio de Daniel percebemos que as etapas um e três estão presentes no enunciado do problema de lógica, enquanto a etapa dois é consequência do enunciado. A etapa quatro em que conclui que João é flautista, provavelmente por considerar, ainda que não tenha registrado, outra informação presente no enunciado de que “João ensaia com o violinista” e, “o pianista ensaia sozinho”.

Nas etapas cinco e seis notamos uma confusão de registro, até então impecável, considerando que este foi o terceiro problema de lógica aplicado para a turma. Já em fase de conclusão da resolução, já tendo atribuído a João a flauta, Daniel parece ter Francisco em mente, mas escreve características atribuídas a João, com o intuito de justificar sua conclusão de que Francisco é o pianista, que inclusive escreve em destaque.

Na etapa sete, conclui, por exclusão, estratégia utilizada em outros problemas, que Antonio é o violinista.

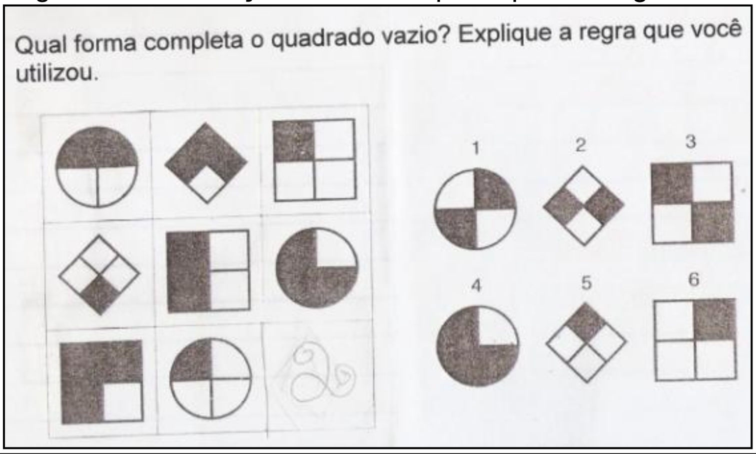
As estratégias de resolução apresentadas por Daniel nos mostram que se o professor apenas corrigir o certo ou o errado estará comprometendo o desenvolvimento de um aluno (MUNIZ, 2008) com ótimo raciocínio lógico, mas que se atrapalha no registro escrito, devido à disparidade entre a agilidade de raciocínio e de escrita. Desta forma, a análise cuidadosa das respostas evidencia outros aspectos que precisam ser considerados no seu processo de ensino e aprendizagem, como o incentivo de outras formas de registro, para não esquecer o que pensou na hora de escrever, indo muito além dos conteúdos matemáticos.

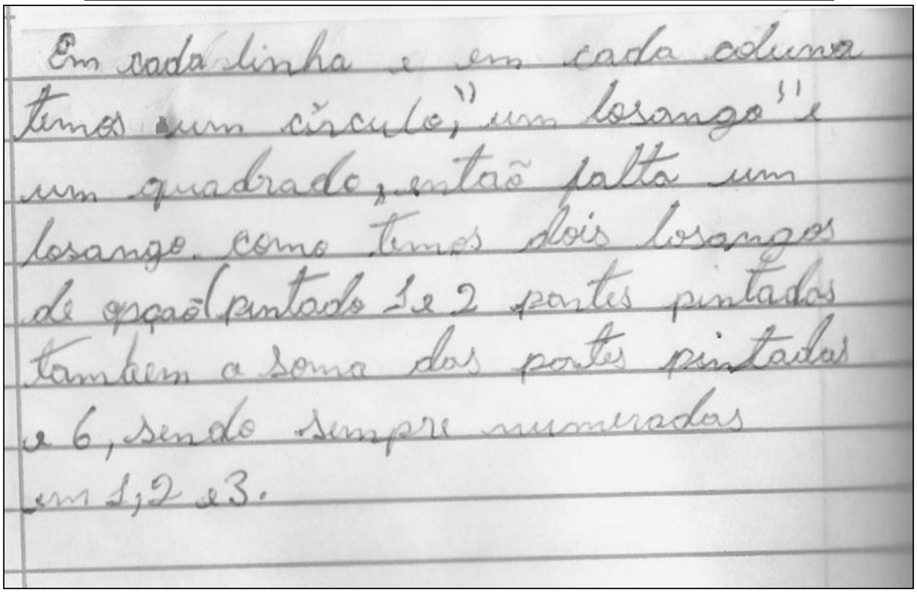
4.4.4 Motivação para a resolução: o que nos revela Bianca

Bianca é uma aluna bastante inquieta. Sua forma de chamar atenção é agredir verbalmente (com palavrões) e aos gritos qualquer colega que atravessa o seu caminho, esbarra na sua carteira, mexe no seu material, ou seja, está sempre envolvida em alguma encrenca na sala. Observando seu rendimento nas aulas de matemática percebemos que dificilmente ela termina uma atividade, começa a fazer, mas logo se envolve em algum conflito, abandonando a atividade. Quando o professor cobra a atividade copia rapidamente de alguma colega para mostrar ao professor e receber o "visto". Tal comportamento era transpassado para as aulas de lógica, onde sua participação também foi mínima.

Com o passar do tempo, notamos que seu comportamento era uma maneira de disfarçar as dificuldades em resolver as atividades, principalmente os algoritmos da divisão, ou seja, ao se sentir impotente diante de uma situação, se envolve em alguma confusão para o tempo passar. A aluna na verdade clama por atenção e uma dessas evidências está na resolução demonstrada a seguir em um dos dias em que nos propusemos a sentar do seu lado e ajudar na construção da resposta do problema "Pintando geometria". Cabe ressaltar que a turma já havia resolvido o problema em questão em outra aula, mas como o seu estava sem responder propusemos que voltássemos e resolvêssemos:

Figura 18: Resolução de Bianca para "pintando geometria"




Em cada linha e em cada coluna temos um circulo" um losango" e um quadrado, então falta um losango. como temos dois losangos de opção (pintado 1 e 2 partes pintadas também a soma das partes pintadas é 6, sendo sempre numeradas em 1, 2 e 3.

Fonte: Protocolo da aluna (mar. 2009).

Para resolução combinamos que eu escreveria o que ela fosse dizendo para depois lermos. Bianca solicitou que fosse escrito em um rascunho, pois ela queria escrever no seu caderno depois, por isso a linguagem mais elaborada, como o uso de aspas e parênteses. O protocolo acima é do caderno da aluna, com sua própria letra.

Podemos, a partir do protocolo da aluna, dividir seu raciocínio em quatro partes:

1. A percepção que cada linha e cada coluna contém um círculo, um quadrado e um quadrado menor.
2. Falta na terceira coluna um quadrado menor.
3. Percebe que nas opções há dois quadrados menores, mas que em um deles está pintado um quarto e no outro dois quartos.
4. Sente a necessidade de buscar outra característica para concluir a resolução, que faz, somando as partes pintadas em cada linha e em cada coluna.

Percebe-se na resposta de Bianca um raciocínio bem elaborado, da sequência toda, desenvolvido por um caminho diferente da maioria dos colegas à época da resolução da turma. Bianca enfatizou as figuras geométricas, embora tenha necessitado de ajuda para nomeá-las, por exemplo, para o quadrado menor designou "losângulo", então escrevi losango entre aspas, pois o intuito no momento não era corrigi-la, mas deixá-la livre para pensar. Também utilizou a parte fracionária representada em cada uma, ainda que não tenha utilizando a linguagem padrão. A lei de formação elaborada por Bianca foi coerente para todos os elementos da sequência, dificuldade apresentada por muitos de seus colegas.

Assim, há evidências, de que o que Bianca precisa é de motivação, de ajuda para os momentos de dificuldades, precisa de auxílio para se apropriar do problema, para torná-lo seu e resolver para suprir sua necessidade e não do professor, em uma situação tipicamente adidática (BROUSSEAU, 2008).

Infelizmente, as aulas de lógica não conseguiram motivar suficientemente Bianca para participar ativamente de todas as aulas, nem de matemática, nem de lógica, mas deixaram indícios de que muitas vezes os alunos clamam pelo atendimento individual, pela atenção, muito mais para suprir suas carências afetivas do que para resolver as atividades propriamente ditas. Aprender está vinculado diretamente ao bom estado emocional do aluno, mas como esse não é o tema primordial desse trabalho, não entraremos nessa seara.

4.4.5 Interações favorecidas: a presença e valorização do outro nos processos de resolução

As interações dirigem-se muito para a construção e validação individual dos processos resolutivos, não claramente evidenciadas nos protocolos, visto por meio da observação e mediação no campo de pesquisa. Muitas interações puderam ser identificadas, fundamentado na experiência da pesquisadora enquanto professora.

Os processos interativos observados se identificam em diferentes perspectivas: monitor/monitor, monitor/pesquisadora, aluno/monitor, aluno/pesquisadora, aluno/aluno.

Na perspectiva monitor/monitor a maior evidência da veracidade das interações se deu no processo de resolução do problema de lógica denominado de “operações geométricas”, onde a monitora Cláudia é a primeira a resolver um problema e, ao contrário da interação que frequentemente acontecia (e continua acontecendo em algumas situações) na sala de aula, da cópia da resposta correta por parte dos demais colegas para que a atividade seja concluída, os demais monitores solicitaram a contribuição de Cláudia para auxiliá-los por meio de uma “dica” que facilitasse a construção do seu caminho de resolução.

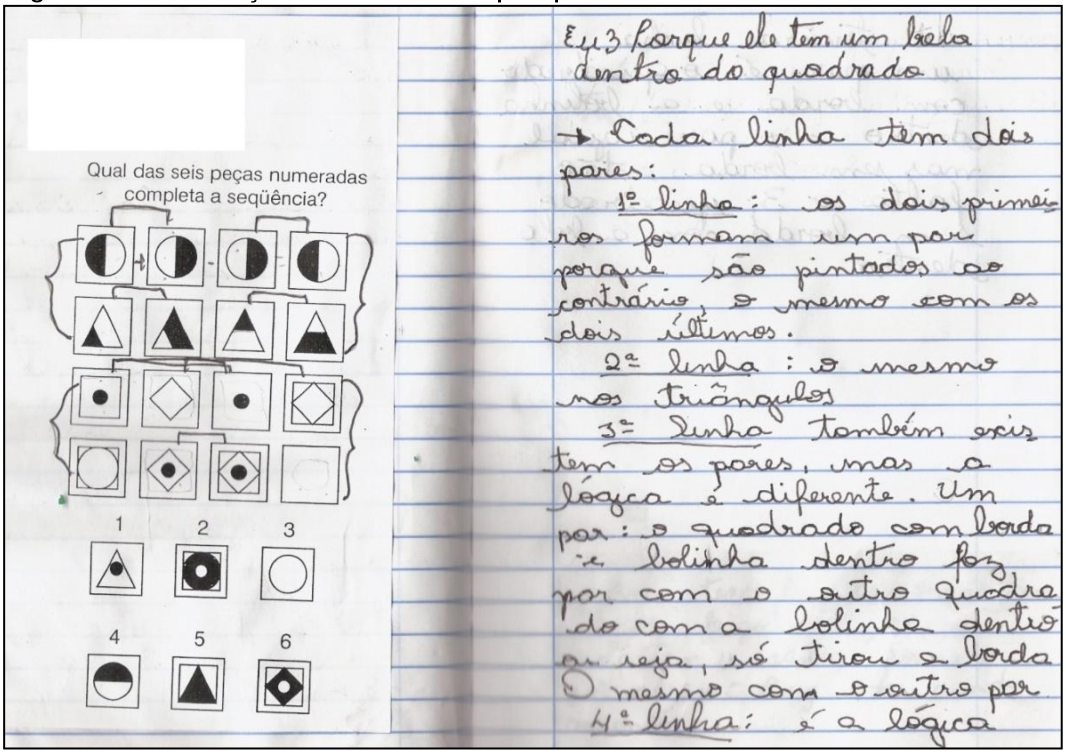
Outros momentos que evidenciam tal interação aconteceram com a monitora Ana, aluna que, como descrito anteriormente, mesmo com dificuldades de acompanhamento das atividades quis ser monitora, e precisou muito da ajuda dos colegas monitores para resolver os problemas de lógica. Ressalta-se também que tais interações aconteceram de maneira solidária, em situação de apoio e não de mensuração de conhecimentos por parte de um ou de outro, visto que não houve no processo, de modo geral, um monitor de grande destaque sobre os demais, ou seja, ora um terminava a resolução primeiro, ora outro; ora um acertava sem qualquer intervenção, ora outro, o que acabou por desmistificar que alguns sempre são bons em matemática e outros sempre têm dificuldades. Ou seja, as situações de dificuldade e de facilidade se revesaram ao longo do processo.

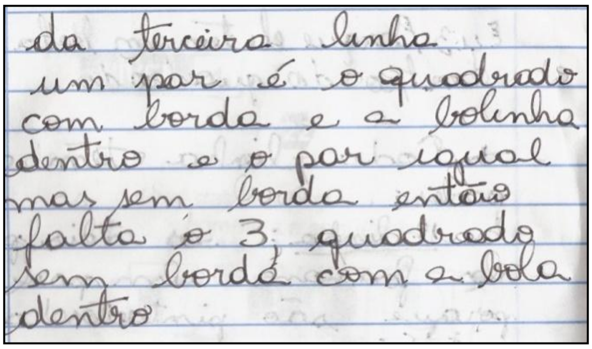
Na perspectiva monitor/pesquisadora e aluno/pesquisadora as interações aconteceram em sua maioria nos processos mais elementares de validação das construções. De maneira mais específica podemos sintetizar esse processo da seguinte maneira: devido à ansiedade e até empolgação diante dos problemas de lógica, tanto os monitores quanto os alunos sentiram a necessidade de constatação da validade da resposta construída. Desta forma, a necessidade da autoridade do professor na validação dos processos e respostas surge como um dos fatores promotores da interação dos participantes com o professor. Entretanto, constata-se também esse tipo de mediação na busca junto ao professor de ferramentas para o início da compreensão do problema e ou produção de uma solução. Por exemplo, nas vezes que a resolução de um ocorria em menor tempo que os outros, a primeira discussão sobre a resposta aconteceu em processo dialógico com a pesquisadora, momento em que as pesquisas narrativas episódicas eram realizadas.

Nesses momentos, nossa preocupação não foi somente em promover a validação por meio do diálogo entre aluno e pesquisadora, mas que esse diálogo de defesa da resposta produzida promovesse a reflexão para que ele seja capaz de sozinho perceber equívocos e sentir a necessidade da reformulação, seja de parte da resposta ou da resposta como um todo.

Outro momento singular foi no caso em que trabalhamos como escriba, valorizando a construção do pensamento e não somente o protocolo. Como no caso de Julio, que evidenciaremos a seguir:

Figura 19: A interação entre João e a pesquisadora




da terceira linha
um par é o quadrado
com borda e a bolinha
dentro e o par igual
mas sem borda então
falta o 3, quadrado
sem bordá com a bola
dentro

Fonte: Protocolo do aluno (abr. 2009).

Em seu protocolo inicial João, apenas registra *"É o três porque ele tem uma bola dentro do quadrado".* As demais marcas no protocolo são secundárias, realizadas primeiramente na interação com a pesquisadora no processo de validação e outros são realizados somente no momento da validação coletiva.

Em entrevista narrativa episódica, João descreve oralmente seu processo de resolução, ele registra no protocolo as chaves que unem as duas primeiras linhas e depois as duas últimas linhas e os colchetes que utiliza, em cada linha separadamente, para mostrar os pares compostos no caminho escolhido para resolução. Paralelamente, fomos registrando sua fala no próprio caderno do aluno.

Ao finalizarmos o relato concluímos que estava um pouco confuso e que ele iria tentar construir um caminho em que a mesma regra fosse utilizada em todas as linhas para ter certeza da resposta apontada. João tentou, mas não apresentou outro registro.

No momento da validação coletiva, em que Cláudia, assim como na monitoria, expôs sua proposta de resolução, Julio acompanhou o raciocínio e na primeira linha adiciona ao seu protocolo, na primeira linha, o sinal da adição (+) entre as duas primeiras imagens, o sinal da subtração (-) entre a segunda e a terceira imagem e a igualdade (=) entre a terceira e a quarta imagem.

O exemplo de João demonstra que as interações não são isoladas com outro sujeito, em um mesmo problema de lógica, várias interações são favorecidas em etapas diferentes do processo de resolução.

Na perspectiva aluno/aluno e aluno/monitor essas interações foram um pouco diferentes. Orientados e estimulados desde o primeiro encontro de que tão importante quanto a resposta correta é mostrar o raciocínio empregado, pois desta forma é possível perceber o momento da falha ou do equívoco do raciocínio, não sendo necessário, na maioria das vezes, voltar o início, ao "apagar tudo", processo comum quando apenas tem-se a resposta final, acreditamos que por falta de experiência, afinal eles são alunos e não professores, as interações foram menos provocativas e mais emocionais e afetivas.

Envoltos na sensibilidade de ajudar o outro a resolver corretamente, foi observado momentos em que a orientação já fornecia fortes indícios do caminho a ser percorrido para a produção da resposta correta. Entretanto não condenamos tal atitude, pois ela indica um processo de maturidade na constituição do sujeito enquanto ser humano, em oposição a individualidade constante da sala de aula.

4.5 Os frutos da intervenção nos dois ambientes

A inclusão dos problemas de lógica, primeiramente na sala de aula, depois simultaneamente na sala e na monitoria, sendo cada ambiente com suas especificidades como descrito anteriormente, despertaram alguns aspectos até então adormecidos na rotina dos alunos/sujeitos dessa pesquisa, como a motivação, a autoimagem, a autoavaliação e a sua constituição como seres matemáticos diante da resolução dos problemas propostos, como descreveremos a seguir.

4.5.1 Motivação, autoimagem e autoavaliação: seres matemáticos

Resolver problemas além de não ser o foco principal da aprendizagem matemática nesta sala de aula, o que contraria os fundamentos da Educação Matemática, como enfatizado em nosso aporte teórico, era motivo de repulsas por parte dos alunos, que preferiam exercícios, mais rápidos e menos complexos, visto que determinam apenas a aplicação correta de procedimentos de resolução, ou seja, os alunos decoram os procedimentos ensinados, sem alcançar qualquer compreensão real. Por exemplo, os alunos preferiam uma lista de operações de divisão do que a resolução de um problema, aumentando a rejeição caso o problema tivesse que ser copiado do quadro para o caderno, sendo que com os exercícios propostos no livro didático, bastava enumerar e resolver e muitos apenas colocavam a resposta final, proposta no gabarito no final do livro, o que levou o professor a retirar tais páginas de muitos alunos.

Essa realidade esteve presente nas primeiras aulas de lógica, visível especialmente no problema “Os músicos e seus instrumentos”, fato que ao mesmo tempo nos desmotivou e nos incentivou a querer contribuir. Desmotivou no sentido de que esperávamos uma práxis pedagógica voltada para a resolução de problemas, o que nos facilitaria atingir uma mudança mais global, pois teríamos que incorporar os problemas de lógica como mais um tipo de problema presente na sala de aula, atingindo mais os problemas de lógica predominantemente textuais verbais. Entretanto, a situação vivida também nos motivou para a transformação desse contexto para um ambiente de produção de conhecimento matemático e desenvolvimento do raciocínio lógico.

Um dos caminhos construídos na pesquisa foi a valorização da individualidade, da produção de cada um, no sentido de motivá-los a demonstrar suas potencialidades, o fazer matemática por meio da resolução de problemas, dando sentido aos conceitos matemáticos, como expõe a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990, citado por FÁVERO, 2005) no nosso referencial teórico.

Partimos neste estudo do princípio que toda criança é um ser matemático, nasce com todas as potencialidades para aprender matemática, mas se no decorrer dos anos ela passa a detestar matemática é porque foi imposto a ela que a matemática escolar é a única e correta forma de se fazer matemática, o que não permitiu a ela investigar as situações propostas, criar seus padrões de resolução, testar suas hipóteses e validá-las ou reformulá-las com auxílio do professor ou dos colegas, seres matemáticos como ele.

Por meio dos problemas de lógica, como evidenciam os registros, procurou-se resgatar o ser matemático de cada aluno, propiciando um ambiente livre para permitir que o aluno tomasse o problema para si, como propõe a Teoria das Situações. Percebeu-se também que quando estavam no ambiente de resolução dos problemas de lógica, se viam mais confiantes, mais responsáveis, argumentando na defesa de seus processos de resolução, tanto junto à pesquisadora quanto frente a seus pares, lembrando Piaget (1973) e a epistemologia da matemática.

A motivação que no primeiro momento foi da pesquisadora foi assimilada pelos alunos que, em sua maioria, passaram a se apropriar dos problemas de lógica, em um novo fazer matemática, que vai além da resolução de operações, da fixação de métodos e técnicas de resolução, mas um fazer que busca valorizar o raciocínio, as estruturas de pensamento na busca de construção de respostas para resolução de problemas, competência indispensável na sociedade atual.

4.5.2 Novo fazer matemática

Como dito anteriormente, o fazer matemática no espaço escolar precisa ter um significado bem mais amplo do que decorar definições e procedimentos de resolução.

O fazer matemático do aluno, em um contexto de resolução de problemas, deve incluir a ação efetiva do aluno na busca de soluções próprias de reais desafios.

Quando adentramos o contexto escolar havia uma práxis vigente, resumida com o professor ensinando como se faz e os alunos tentando aplicar os ensinamentos do professor em exercícios de fixação. Quando introduzimos os problemas de lógica enfrentamos resistência e rejeição por parte dos alunos, afinal, estávamos apresentando uma nova perspectiva de fazer matemática, bem mais complexa, que exigiria mais raciocínio, mais dedicação para produzir soluções. Desta forma, tivemos que optar pela criação de um novo ambiente de aprendizagem: a monitoria.

A monitoria foi introduzida como ambiente empírico não somente para favorecer a pesquisa, mas principalmente para favorecer o trabalho pedagógico na sala de aula, tendo em vista que nosso intuito era que todos os alunos da turma fossem sujeitos e tivessem a oportunidade de trabalhar com problemas de lógica como forma de aprendizagem de conceitos matemáticos e desenvolvimento do raciocínio lógico.

Com um número menor de alunos, a monitoria mostrou-se desde o primeiro encontro um ambiente empírico favorável à organização do trabalho pedagógico, tanto para a pesquisa quanto para a prática pedagógica envolvendo os problemas de lógica, por favorecer as discussões, a autoavaliação, o trabalho em parceria, já que as atividades, mesmo cada um respondendo o seu problema, eram desenvolvidas em uma mesa redonda, permitindo dessa forma, a troca de ideias, a ajuda ao outro, os momentos de proteção e de confronto e a autonomia frente aos processos de resolução. Com o auxílio dos monitores reorganizamos a práxis da sala de aula, embora alguns paradigmas, como por exemplo, as filas, não foram superados, a resistência e rejeição foram diminuindo, dando lugar a um novo fazer matemática.

Assim, com adaptações e mudanças, conseguimos a promoção de um ambiente escolar em que os alunos envolvidos nesse estudo tivessem a oportunidade, por meio dos problemas de lógica, de lançar-se no processo de fazer matemática à medida que se encorajaram a fazer tentativas, se permitiram errar para reconstruir, levantaram hipóteses, criaram estratégias, argumentaram, ora por escrito, ora oralmente, mobilizando seus esquemas de ação, construindo campos conceituais (VERGNAUD, 1990, citado por FÁVERO, 2005).

4.5.3 Relação procedimento-registro

Muitos dos problemas de lógica, quando vistos pela primeira vez, isto é sem semelhança com outro que envolva o mesmo raciocínio, requerem que o resolvedor lance também como estratégia de resolução a intuição, como bem explicou Poincaré (1902/1985) em nosso referencial teórico. Utilizar a intuição como etapa do processo de resolução, para muitos alunos, ressignifca o processo de registro na resolução o que faz com que o registro para construir uma resposta torne-se dispensável, diferentemente do professor ou do pesquisador que necessitam do registro para analisar os esquemas de ação mobilizados.

Uma evidência de como a intuição está presente na resolução dos problemas de lógica é o aluno Daniel, abordado em nossas análises, quem embora ótimo em matemática, tem dificuldade de articular o pensamento com o tempo da escrita, o que produz vácuos na produção escrita, dando a impressão de falta de coesão entre uma ideia e outra exposta no texto verbal, o que acarretou em um trabalho de interpretação do pesquisador para compreender o processo lógico na sua integralidade. No entanto, muitas vezes essa interpretação pode se distanciar da forma como realmente o raciocínio foi mobilizado, justificando-se assim a necessidade das entrevistas narrativas episódicas e da valorização dos registros no próprio protocolo dos problemas de lógica.

Percebemos, diante dessa realidade, que em alguns momentos a necessidade do registro era mais nossa do que do aluno, pois conseguiam organizar todos os esquemas de ação sem qualquer registro, como também relatou a aluna Ana, considerada em situação de dificuldade em matemática, quando afirmou que "*é muito melhor pensar primeiro e registrar depois, assim não precisa ficar apagando*" (DC, maio 2009), evidenciando que ela registrava por se tratar de uma solicitação nossa.

Em outros momentos, variando também de aluno para aluno e do grau de dificuldade do problema, somente a ancoragem no registro permitiam o avanço nas etapas da resolução ou a validação e discussão da resposta com o outro.

Diante disso, cabe refletir, enquanto educadora matemática até que ponto temos que obrigar o aluno a registrar se ele não precisa do registro para construir sua solução? Qual o papel do registro na produção matemática na escola? Ou seria melhor considerar essa como uma das variáveis pertinentes na escolha dos problemas de lógica, de modo que o registro se torne parte importante do processo resolutivo para ele, aluno, e não para o professor ou pesquisador?

4.5.4 Situação adidática

Enfatizamos em nosso referencial teórico, com o auxílio de Brousseau (2008) que os problemas de lógica são típicas atividades adidáticas, em que o aluno tem a oportunidade de se libertar do método ensinado pelo professor, de resolver para o professor, para incorporá-lo como seu, como um desafio único, disposto a superá-lo por vontade própria e não por imposição de alguém.

Essa perspectiva, inexistente no início da nossa intervenção, foi mudando com o decorrer do desenvolvimento das atividades, tanto na monitoria quanto na sala de aula. As evidências desse fato são presentes em diversas situações, desde momentos de resolução em que a ânsia pela resposta correta é substituída pelo pedido de “dicas” e o estabelecimento de parcerias (MUNIZ, no prelo) para continuar em busca da construção da resposta, até momento em que alunos pediram para levar o caderno de lógica para casa, para compartilhar com os pais, ou pediram sobras de cópias para levar e aplicar os problemas de lógica para irmãos, inclusive mais velhos.

Percebe-se pelas evidências mencionadas, que ao contrário das tarefas de casa, houve intenção em levar problemas de lógica para casa, buscando envolver a família nas resoluções. Fato que revela a autoconfiança e a motivação diante da resolução dos problemas de lógica, ou seja, a absorção do problema como seu.

A intervenção dos problemas de lógica na realidade existente nesse contexto escolar nos propiciou uma ressignificação da posição do professor no processo de mediação, ou seja, não é mais o professor que está no quadro dizendo como fazer para resolver determinada categoria de atividades matemáticas relacionadas a determinado conteúdo, o que implicou na mudança da organização do trabalho pedagógico.

4.5.5 Mudança na organização do trabalho pedagógico (OTP)

Ao adentrarmos o ambiente escolar logo no início do ano letivo uma rotina pedagógica já havia se estabelecido, rotina essa que não se alterou mesmo com a troca do professor regente. Ao tentarmos nos inserir nessa rotina, mas com outra proposta de trabalho, verificamos logo nas primeiras aulas que não obteríamos sucesso.

Na busca de alternativas para modificar a realidade existente quanto à evolução da pesquisa e do compromisso com os alunos, optou-se por instaurar um ambiente extra-classe, em que alguns alunos seriam convidados para resolver os problemas de lógica antes da aplicação para a turma toda, para quando da aplicação na sala de aula auxiliassem a pesquisadora no processo de mediação pedagógica. A esse espaço chamamos de monitoria.

A monitoria, como já abordado, além de propiciar um novo fazer matemática, protagonizou uma mudança singular na organização do trabalho pedagógico também na sala de aula. A estrutura para a monitoria foi intencionalmente organizada, fundamentada na experiência da pesquisadora como professora, de modo a oportunizar reflexões acerca dos problemas desenvolvidos, em uma prática bem diferente da existente na sala de aula nas atividades propostas pelo professor regente e planejar como seria a aplicação dos mesmos na sala de aula, visto que os monitores assumiram o papel de mediadores, logo deviam ser preparados para tal função.

Na sala de aula, as mudanças se restringiram ao contexto das resoluções dos problemas de lógica e com algumas restrições, tais como, os alunos continuaram sentados em fila, resolvendo individualmente e as discussões em sua maioria reduzidas a pequenos grupos formados com o colega da frente, de trás, do lado, o monitor e ou a pesquisadora. Essa realidade nos fez refletir se a estrutura da monitoria poderia ser implantada de forma integral na sala de aula, considerando o número de alunos, o tempo pré-determinado de cada aula, os conteúdos a serem vencidos, a avaliação formal? Precisaríamos de mais tempo de intervenção para responder.

Desta forma, tenho a consciência de que não consegui realizar uma mudança no trabalho pedagógico de forma geral, pois as aulas de lógica foram uma realidade a parte do contexto geral das aulas de matemática, mas consegui realizar uma mudança na perspectivas do sujeito, do indivíduo, conforme a análise revela. Como dito, para mudanças em nível mais geral seria necessário maior tempo de intervenção para atingir o grupo como um todo e o professor.

4.5.6 Limites e dificuldades da inserção dos problemas de lógica na OTP

Conforme explicitado por meio da análise dos protocolos dos alunos, os problemas de lógica revelam-se como motivadores no fazer matemática dos alunos envolvidos. Entretanto, a inserção desses problemas na sala de aula implica em alguns limites e dificuldades, os quais não poderiam ser excluídos desse estudo.

Como o próprio nome sugere, a OTP – Organização do trabalho pedagógico – envolve o planejamento das atividades a serem desenvolvidas na sala de aula e, com os problemas de lógica, não poderia ser diferente. O planejamento, necessariamente, acaba por requerer, segundo apontou este estudo, três aspectos importantes no processo de aplicação de problemas de lógica neste 6º ano do E.F.: a resolução, a validação e o registro. Ressaltando que nossa proposta de inserção dos problemas de lógica é no cotidiano da práxis pedagógica, não em aulas específicas, como o processo de pesquisa, em que por não sermos a professora regente de turma, tivemos que assumir.

No aspecto da resolução, isto é, a organização da turma para aplicar um problema de lógica, a dificuldade encontrada é relativa a gerenciar a ansiedade dos alunos em compreender o problema ou mostrar a sua resolução, principalmente se os alunos estiverem acostumados a resolver atividades vinculadas a um caminho específico de resolução, ou seja, o professor explica o conteúdo e eles resolvem exercícios ou problemas que envolvem o conteúdo explicado. E, como por definição, os problemas de lógica não estão vinculados explicitamente a um conteúdo matemático, muitos podem, em um primeiro momento, se sentirem inseguros, necessitando da presença e mediação pedagógica do professor. Foi o que aconteceu conosco e nos levou a formação da monitoria para auxiliar os demais alunos nesse primeiro contato com os problemas de lógica. O trabalho de monitoria, inicialmente não concebida no procedimento da pesquisa, mostrou-se ser um espaço que não se trata de explicar o problema para o aluno ou indicar o caminho de resolução, mas de acolhê-lo afetiva e cognitivamente enquanto ser matemático e encorajá-lo no fazer matemática. Outra possibilidade é promover o trabalho em pequenos grupos (duplas ou trios), assim, a interação entre os alunos e entre alunos e professor também é favorecida.

No aspecto da validação, como enfatizamos ao longo do estudo e das categorias de análise apresentadas, mesmo tendo soluções fechadas, os problemas de lógica permitiram a exploração de diversas estratégias de resolução, que como vimos, tem muito a revelar ao professor. Desta forma, não se trata de corrigir o certo e o errado, mas de promover o diálogo e a reflexão com os alunos, o que envolve planejamento e uma boa dose de cooperação dos alunos, pois a dificuldade para o professor, assim como foi para a pesquisadora, é ouvir e analisar todas as produções, por isso, estabelecer um ambiente cooperativo e de respeito mútuo é essencial, para que as validações possam ser realizadas de forma coletiva no quadro, em que todos tenham a oportunidade de ouvir e falar. Considerando que embora haja caminhos diferentes, eles não serão muitos, permitindo a organização para que o aluno tenha a oportunidade de dizer “eu pensei diferente” e expor aos seus colegas, para juntos validarem ou fazerem as considerações necessárias, sem constrangimento ou inibição, afinal, fazer matemática, seja no campo acadêmico, seja na sala de aula, é um processo ora de avanços, ora de recuos e que o professor não é o único capaz de avaliar ou corrigir uma atividade matemática. O estudo revelou que a construção dessa rotina é importante para a validação de todas as atividades da aula de matemática, pois valorizam as diferentes formas de raciocínio lógico e de fazer matemática.

E, por último, o aspecto do planejamento envolveu o registro dos alunos. Como apresentamos nas análises, a resolução dos problemas de lógica envolveu a intuição, desta forma, para o resolvedor, o registro nem sempre é um estatuto necessário. Mas para nós, professores e pesquisadores da área de educação matemática, detectarmos os esquemas utilizados na resolução necessitamos do registro ou do relato oral do aluno, o que em uma turma com muitos alunos acarreta em um limite para o professor. Assim, o registro revela-se como instrumento tanto para a interpretação da produção cognitiva como para a efetivação da mediação pedagógica. Para minimizar essa dificuldade da interpretação dos esquemas mentais subjacentes aos registros dos procedimentos resolutivos e não torná-la impedimento para a inserção dos problemas de lógica na práxis da sala de aula, a validação coletiva revelou-se como um excelente recurso para o professor, pois o processo de análise dos esquemas é otimizado, diminuindo consideravelmente as análises individuais.

Percebemos que em todas as situações de dificuldade apresentadas o fator temporal está presente, visto que a resolução, a validação e a análise dos esquemas mentais utilizados envolve um tempo considerável da aula, por isso a importância de incorporar os problemas de lógica às demais atividades da aula. Desta forma o tempo é otimizado devido a diversidade de etapa de resolução, isto é, alguns alunos estarão resolvendo uma atividade, outros outra, facilitando o atendimento individual por parte do professor.

Assim que os problemas forem incorporados pelos alunos como parte integrante da aprendizagem de fazer matemática, essas dificuldades tendem a amenizar ou até desaparecer e os problemas de lógica participarão da rotina da sala de aula, tal qual as demais atividades de matemática.

Assim, encerramos nossas conclusões frente aos resultados e à relação entre a pesquisa e o aporte teórico. Passaremos a uma reflexão sobre a nossa caminhada e apontaremos novas propostas de estudo e pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não há como negar a alegria de chegar a esta etapa da construção dos resultados, da transformação do projeto em pesquisa, em uma dissertação.

A caminhada foi longa e mesmo com uma proposta metodológica delineada que previu muitos obstáculos, outros surgiram aliados a angústias e, por vezes, desespero. Previmos, por exemplo, em nossa proposta metodológica, o quão difícil seria a aceitação pelo professor e alunos da intervenção, ou seja, como adentrar o espaço escolar e não ser vista como uma intrusa no processo. Entretanto, o que eu não supunha era a minha dificuldade em adentrar o espaço do outro, aceitando a organização dos alunos estabelecida pelo professor regente, a maneira de mediar o processo de ensino e aprendizagem. Vivi o dilema, até então desconhecido, ser educadora versus ser pesquisadora, visto que até então todos os meus projetos de pesquisa foram realizados em turmas em que eu era a regente. A organização, a condução do processo, os alunos, o planejamento, o tempo, a avaliação, tudo era meu e agora nada me pertencia. Quanta vontade de pegar o pincel da mão do professor, de controlar a disciplina, de reorganizar os cadernos, reformular o mapeamento dos alunos, modificar o planejamento, enfim, mudar a sala de aula, alterar a OTP. Que aprendizado! Isso já valeria o mestrado.

Por inúmeras vezes, principalmente nos primeiros encontros, vi minha proposta engessada, devido à dura realidade encontrada, 38 alunos, sendo três com necessidades especiais, o que gerou a pergunta: como atingi-los? Lembro da vez que conversei com a orientadora pedagógica e me flagrei cobrando dela um posicionamento frente àquela realidade e a inesquecível resposta dela para mim: “professora, infelizmente essa é a pior turma de sexto ano, eu ia avisar a senhora, mas como a senhora escolheu eles eu não quis interferir”. Percebi que nossas intenções estavam trocadas, eu preocupada com a aprendizagem da turma e ela com a minha pesquisa.

E, foi em um desses dias de reflexão, me apegando aos anos de experiência na busca de respostas de como readaptar o projeto, que resolvi recorrer à monitoria, tal qual havia feito, com sucesso, por diversos anos, fazer dos próprios alunos mediadores, que me auxiliassem a conduzir as já batizadas, aulas de lógica, não queria trabalhar apenas com um pequeno grupo, como até cheguei a cogitar, afinal estava em xeque todo um discurso de que não queria nunca pesquisar apenas um pequeno grupo, costumava dizer que “se for para dar certo, tem que ser para a turma inteira”, afinal sou responsável pela aprendizagem de todos e não de um pequeno grupo.

Instaurada a monitoria em consonância com as aulas regulares, finalmente a pesquisa começou a produzir frutos, os objetivos começaram a ser atingidos. É verdade que não da maneira que havíamos planejado, mas muito diferente das primeiras aulas.

Embora meu olhar sempre tenha sido para a turma toda, a produção da monitoria sempre foi muito maior, mais rica em discussões, em autonomia por parte dos monitores do que a produção da sala de aula, mas para mim era importante manter a sala de aula como campo de pesquisa, por isso a insistência e persistência.

Aos poucos a realidade foi mudando, os problemas de lógica foram conquistando seu espaço junto aos alunos. Nossos seres matemáticos, que até então estavam adormecidos, se sentiram motivados a fazer matemática, por meio de suas hipóteses, estratégias, argumentações e conclusões, o que atribuímos aos problemas de lógica serem essencialmente adidáticos e não vinculados diretamente ao conteúdo matemático escolar, definido no currículo oficial. Desta forma, mesmo alunos em situação de dificuldade de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, lançaram-se à aventura do desafio e obtiveram sucesso, recuperando a autoestima e a motivação para aprender a matemática escolar e utilizá-la como ferramenta para a resolução dos problemas de lógica.

Outro fato que merece destaque é a questão do registro escrito, que mesmo não sendo hábito na sala de aula e muitas vezes dispensável para a resolução dos problemas de lógica, mas necessários para nós, não nos negaram em momento algum, demonstrando o compromisso e a responsabilidade com que as resoluções eram feitas, bem diferente das primeiras aulas, onde a preocupação com o certo e o errado excluía qualquer diálogo sobre os esquemas mobilizados.

Na perspectiva da Educação Matemática, para nós, esses são pequenos exemplos de um semestre de pesquisa que demonstram contribuições imediatas para a mudança do contexto de aprendizagem matemática que os problemas de lógica podem proporcionar quando inseridos na práxis educativa, visto que para os alunos participantes da pesquisa, o resultado foi a valorização da intuição, do senso investigativo, resgatando a beleza de fazer matemática, permitindo que fossem sujeitos ativos, além de proporcionar o desenvolvimento da capacidade de argumentação, de autoavaliação, de respeito e ajuda ao próximo, sem considerar o melhor ou pior em matemática.

Temos a clareza de que para a estrutura alcançada da monitoria possa adentrar a sala de aula, considerando o número de alunos, o tempo, os conteúdos do currículo, a avaliação formal, entre outras tantas variáveis que permeiam o contexto escolar, precisaríamos de mais tempo de pesquisa, além da contribuição do professor regente, para que os problemas de lógica não se restringissem à aula de lógica, mas fossem inseridos na práxis do professor, tais quais os conteúdos previstos para o ano letivo.

Devido ao nosso replanejamento de pesquisa frente ao diagnóstico inicial e à realidade da sala de aula algumas de nossas expectativas não foram satisfeitas, como por exemplo, a inserção dos problemas puramente textuais verbais, que eram o alvo principal no início da concepção dessa pesquisa. Do mesmo modo, fica em aberto a questão se os esquemas mentais mobilizados ou o raciocínio lógico envolvido para resolver problemas de lógica interferem na resolução de situações-problema que envolvam conceitos pertinentes a conteúdos matemáticos mais específicos?

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BASTOS, C. L; KELLER, V. **Aprendendo lógica.** 3. ed. Petrópolis: Vozes, 1994.

BECKER, F. **A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2003.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad.: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática (5ª a 8ª série). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. Trad.: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero.** 14. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

CHAUÍ, M. **Introdução à história da filosofia:** dos pré-socráticos a Aristóteles. São Paulo: Brasiliense, 1994.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática.** 12. ed. São Paulo: Ática, 2003.

DIAS, A. L.; SILVA, E. B. Resolução de situação-problema como estratégia na formação de professores. In: BRASIL, MEC. **Formação de professores em língua portuguesa e matemática.** Programa Salto para o Futuro. v. 18, n. 17, p. 21-39, set. 2008.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P. A solução de problemas em Matemática. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Trad.: Beatriz Afonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 42-65.

ECO, Umberto. **Signo**. Lisboa: Presença, 1997.

FÁVERO, M. H. **Psicologia e conhecimento:** subsídios da psicologia do desenvolvimento para a análise de ensinar e aprender. Brasília: Edunb, 2005.

FLICK, U. **Uma introdução à pesquisa qualitativa.** Trad.: Sandra Netz. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GONTIJO, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio.** Brasília: UnB – Instituto de Psicologia, 2007. 194 p. Tese (doutorado) orientação: Denise de Souza Fleith.

GONZÁLEZ REY, F. **Pesquisa qualitativa e subjetividade:** os processos de construção da informação. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

______. **Pesquisa qualitativa em psicologia:** caminhos e desafios. Trad.: Marcel A. F. Silva. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

______. O Sujeito que aprende: desafios do desenvolvimento do tema da aprendizagem na psicologia e na prática pedagógica. In: TACCA, M. C. V. R. (Org.). **Aprendizagem e trabalho pedagógico**. Campinas: Alínea, 2006.

HERCUN, D. (Org.). **Aumente seu QI:** testes desafiadores para desenvolver sua capacidade. Trad.: Martha Kuhl. São Paulo: Marco Zero, 2004.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa Colaborativa:** investigação, formação e produção de conhecimentos. v. 17. Brasília: Liber Livros, 2008. Série pesquisa.

KNEALE, W.; KNEALE, M. **O desenvolvimento da lógica.** Trad.: M. S. N. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1962.

LALANDE, A. **Vocabulário técnico e crítico da filosofia.** Trad.: Fátima Sá Correia (org.). 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

LEÃO, D. M. M. A questão do método na psicologia do desenvolvimento humano. In: **Revista Múltipla.** Brasília, ano IX, vol. 10, n. 16, p. 57-69, jun. 2004.

MACEDO, L. Situação-problema: forma e recurso de avaliação, desenvolvimento de competências e aprendizagem escolar. In: PERRENOUD, P. (Org.). **As competências para ensinar no século XXI:** a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002. p. 113-135.

______. **Ensaios construtivistas.** São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

______. PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema.** Porto Alegre: Artmed, 2000.

MACHADO, N. J. **Lógica? É lógico!** São Paulo: Scipione, 2000. Coleção Vivendo a matemática.

MALDANER, A.; ISAIA, S. de A. A problematização dos conceitos numéricos como um caminho para a resolução de problemas: desafio para os professores de séries iniciais. **Revista do PPGE.** Santa Maria, v. 2, n. 1, p. 105-116, 2001.

MEDEIROS JUNIOR., R. J. **Resolução de problemas e ação didática em matemática no ensino fundamental.** Curitiba: UFPR – Instituto de Educação, 2007. 172p. Dissertação (mestrado) orientação: Ettiène Guerrios.

MORAES, C. R. de. **Uma história da lógica no Brasil.** Rio Claro: Unesp – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2007. 136p. Tese (doutorado) orientação: Sérgio Roberto Nobre.

MUNIZ, C. A. Mediação e conhecimento matemático. In: TACCA, M. C. V. R (Org.). **Aprendizagem e trabalho pedagógico.** Campinas: Alínea, 2006.

______. **Jeux de société etl'activité mathématique chez l'enfant.** Paris: Université Paris Nord, 1999. 736 p. Tese (doutorado) orientação: Gilles Brougére.

MUNIZ, C. A. **Jogo e educação matemática:** aproximações teóricas possíveis e aproximações desejáveis. (no prelo).

______. **Noção de esquema na Teoria dos Campos Conceituais e suas contribuições na compreensão da aprendizagem da matemática.** (no prelo).

______. BERTONI, N. E. Conhecimento matemático em ação. In: BRASIL, MEC. **Formação de professores em língua portuguesa e matemática.** Programa Salto para o Futuro. v. 18, n. 17, p. 40-58, set. 2008.

MURRIE, Z. F. **Universos da palavra:** da alfabetização à literatura. São Paulo: Iglu, 1995.

NCTM, National council of teachers of mathematics. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.** Trad.: Eduardo Veloso. 2. ed. Lisboa: Associação de professores de matemática e Instituto de inovação educacional, 1994.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. Coleção Tendências em Educação Matemática.

PERELMAN, C.; OLBRECHTS-TYTECA, L. **Tratado da argumentação:** a nova retórica. 2. ed. Trad.: Maria Ermantina de Almeida Prado Galvão. São Paulo: Martins Pontes, 2005.

PIAGET, J. **A epistemologia genética.** 2. ed. Petrópolis: Vozes, 1973.

POINCARÉ, H. **A ciência e a hipótese.** Trad.: Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Edunb, 1985. Coleção Pensamento Científico, 19. (Publicação original em 1902).

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Trad.: H. L. Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

______. **Mathematical discovery.** 3. ed. New York: John Wiley, 1981. (Publicação original em 1962).

PONTE, J. P; SANTOS, L. A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário. **Quadrante.** Lisboa, v. 11, n. 2, 29-54, 2002.

OLIVEIRA, E. A. **Concepções de professores e alunos sobre resolução de problemas abertos como estratégia de ensino e aprendizagem da matemática na educação de jovens e adultos:** um estudo de caso de uma escola em Ceilândia – DF. Brasília, UCB – Instituto de Educação, 2007. 201 p. Dissertação (mestrado) orientação: Robert Kenyon Waller.

ONUCHIC, L. de L. R; ALLEVATTO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V; BORBA, M. C. **A educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

RABELO, E. H. **Textos matemáticos:** produção, interpretação e resolução de problemas. 3. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

REVISTA NOVA ESCOLA (on line). **A matemática de Gérard Vergnaud.** Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/premiovc/reportagem/semana-victor-civita/matematica-gerard-vergnaud-391178.shtml>. Acesso em: out. 2008.

RIDEEL. **Dicionário de língua portuguesa.** São Paulo: Rideel, 2007.

SAVIANI, D. **Educação do senso comum à consciência filosófica.** 14. ed. Campinas: Autores Associados, 2002. p. 9-24. Coleção Educação Contemporânea.

SILVA, V. **Elementos de lógica matemática.** São Paulo: Cruzeiro do Sul, 1940.

SILVEIRA, J. F. P. **O que é um problema matemático?** 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html>. Acesso em: set. 2008.

VALDÉS, J. E. N.; RAMÍREZ, M. C. La resolución de problemas en la escuela: algunas reflexiones. **Educação Matemática em Revista – RS**. v. 2, n. 2, p. 51-65, nov. 2000.

VASCONCELOS, M. C. **Um estudo sobre o incentivo e desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, através da estratégia de resolução de problemas.** Florianópolis: UFSC – Instituto de Engenharia da Produção, 2002. 93p. Dissertação (mestrado) orientação: Elizabeth Sueli Specialski.

WANDERER, G. **A matemática na formação do pedagogo de séries iniciais:** um caso no DF. Brasília: UnB – Instituto de Educação, 2005. 275p. Dissertação (mestrado) orientação: Cristiano Alberto Muniz.

ZACHARIAS, V. L. C. **O desenvolvimento da inteligência.** 2007. Disponível em: <http://www.centrorefeducacional.com.br/intelig.html>. Acesso em: out. 2008.

BRASIL, MEC. 5ª Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (OBMEP 2009). **Problemas da 15na.** Disponível em: <http://www.obmep.org.br/problemas_da_quinzena/problemas_da_quinzena.html>. Acesso em: ago. 2009.