

Pedro Ivo Odon

Sobre a Origem das Simetrias Internas

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília, para obtenção do título de mestre em Física Teórica.

Orientador:

Prof.Dr. Marcos Duarte Maia

Co-orientador:

Prof.Dr. Marco César Barbosa Fernandes

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília

setembro de 2006

Melhor é o fim das coisas do que o seu princípio.

Eclesiastes 7:8

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus pela oportunidade de estar envolvido em um mestrado, a minha família por ter me dado suporte, e aos meus amigos, principalmente Nanderson por ter sempre me escutado nos momentos de dificuldade e Abraão por ter me auxiliado e até socorrido na minha tese.

Resumo

Como uma geometria imersa, a geometria das branas é necessariamente mais rica que a geometria riemanniana satisfazendo a equação de Einstein. De fato, em lugar de contarmos apenas com a métrica, uma geometria imersa inclui também os elementos da geometria extrínseca, como a curvatura extrínseca, ou respectivamente a segunda forma fundamental, e a terceira fundamental, que aparece sempre quando a subvariedade não é uma superfície.

As equações de movimentos de uma brana contém estes novos elementos geométricos e conseqüentemente necessitam de uma interpretação física. Enquanto que a segunda forma fundamental tem sido incorporada à física em diversas ocasiões, inclusive na cosmologia de branas em cinco dimensões, a terceira forma fundamental não aparece quando a subvariedade é apenas uma hiper-superfície (ou seja, com apenas uma dimensão extra). Como a maioria dos modelos estruturada até o presente se concentra em cinco dimensões, o significado físico desta forma fundamental não é geralmente discutido nesses modelos.

O objetivo principal desta tese é mostrar que a terceira forma fundamental tem as características de um campo de calibre com respeito a transformações do grupo de rotações do espaço complementar. A possibilidade de que as simetrias entre as dimensões extras em um espaço de imersão possam ser geradoras das simetrias internas foi proposta por Ne'eman em um seminário de 1965, o que não fazia muito sentido já que a relatividade geral é uma teoria riemanniana. Entretanto com o advento da teoria das cordas e da teoria M como uma teoria de variedades imersas, as branas surgiram como sendo objetos dinâmicos e imersos. Nesse caso, no contexto de branas-mundo, a terceira forma fundamental aparece como um campo de calibre fornecendo embasamento teórico para a conjectura de Ne'eman.

Abstract

Like an immersed geometry, the brane geometry is necessarily richer than Riemannian geometry, satisfying the Einstein's equation. In fact, instead of using only the metric, an immersed geometry also includes the elements of an extrinsic geometry, with an extrinsic curvature, or respectively second fundamental form, and the third fundamental form. The latter always appearing when the subvariety is not just a surface.

The kinematics equations of a brane contain these new geometric elements that brings the necessity of a new physical interpretation. While the second fundamental form has been incorporated to physics in many occasions, including the cosmology of branes in five dimensions, the third fundamental form doesn't appear when there is only one extra dimension. Most models nowadays focus in five dimensions, the physical meaning of this fundamental form is not discussed in these models.

The objective of this thesis is to show that the third fundamental form of the brane-world has the characteristics of a gauge field with respect to the transformations of the rotational group of the complementary space. The possibility that the symmetries between the extra dimensions in an immersed space can generate internal symmetries was originally proposed by Ne'eman in a seminar of 1965. At that time the idea didn't make much sense, since general relativity is a Riemannian geometry. However with the uprising of string and M theories as theories of immersed varieties, branes became an immersed dynamical object. In this case, the third fundamental form appears as a gauge field in brane theory, an agreement with Ne'eman's conjecture.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução	p. 9
1 Física e Geometria	p. 11
1.1 A geometria de Euclides	p. 11
1.2 A necessidade de uma teoria unificada	p. 14
2 A teoria de Yang-Mills	p. 16
2.1 A Teoria de Weyl e de Yang-Mills	p. 16
2.2 Teorema de Noether	p. 18
3 Imersões de Variedades	p. 26
3.1 Teoria de Imersões	p. 26
3.2 Equações de Gauss, Codazzi e Ricci	p. 28
3.3 Variedades Imersas	p. 35
4 As Branas-Mundo	p. 41
4.1 Teoria de Branas-Mundo	p. 41
4.2 As equações de movimento das branas	p. 44
4.3 Origem da Simetria e dos Campos de Calibre na Teoria de Branas-Mundo	p. 51
5 Exemplos de Simetrias Internas em Branas-Mundo	p. 54
5.1 O caso de Schwarzschild	p. 55

Conclusão

p. 61

Referências

p. 63

Lista de Figuras

1	parametrização de Monge	p. 28
2	conjectura de Schlaefli	p. 30
3	teorema de Nash	p. 36
4	branas-mundo	p. 42
5	postulado de branas	p. 43
6	conjectura de Ne'eman	p. 52

Introdução

A imersão como fonte de simetria interna foi o principal objetivo do seminário promovido por Avner Friedman em 1965 [1–6], mas ele não foi conclusivo por dois motivos: Primeiro pelo quase desconhecido teorema de Nash que caracteriza a imersão de um espaço-tempo por meio perturbativo. Segundo porque não se chamou a atenção, talvez por desconhecimento, de que a teoria de Yang-Mills é completa em 4-dimensões, no sentido que os potenciais A_μ e o tensor de curvatura $F_{\mu\nu}$ são consistentes apenas em 4-dimensões, dispensando dimensões extras.

A descrição dos potenciais e da força eletromagnética, por exemplo, são todas definidas em 4 dimensões e, de fato, foi dessa propriedade que surgiu a teoria 4-dimensional de Einstein, Minkowsky, Lorentz e outros. Isso não impede que se possa imaginar um campo de Yang-Mills em 5, 6, ... m dimensões. Pode até ser um exercício matemático interessante, apesar de não ter motivação física para isso. Evidentemente esse quadro pode mudar com a eminente descoberta do Higgs em 2007/2008. De fato, nos anos 80, houve alguma discussão sobre a origem dos campos de Higgs [7, 8] e é possível mostrar que este campo pode ser gerado por um campo de Yang-Mills de dimensão superior a 4.

Como se sabe, o tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ vem de uma conexão A_μ a qual resulta da representação adjunta de um grupo de calibre local. A existência de simetria de calibre ou interna motivou o surgimento do esquema de grande unificação. Por que o mundo seria dividido em uma parte interna e outra externa? Poderia ser esta simetria parte de um único grupo? Qual grupo? O chamado modelo-padrão de unificação é fundamentado no grupo

$$P_4 \times U(1) \times SU(2) \times SU(3)$$

Uma possível explicação para a origem das simetrias, como foi ressaltado por Ne'eman [6], é a imersão do espaço-tempo, a qual cria novos graus de liberdade. Entretanto a teoria de Einstein não requer ou não prevê imersões do espaço-tempo. A conjectura de Ne'eman no seminário de 1965 carecia de sentido, em face aos fundamentos da relatividade geral, que é uma teoria riemanniana. Entretanto ela faz sentido no contexto de branas-mundo, que se fundamenta na teoria de variáveis imersas. Encontramos que, de fato, se o espaço de imersão

for maior ou igual a 6, então as dimensões extras geram uma simetria interna local para um potencial de Yang-Mills confinado e de origem geométrica. Dirac foi o único que escreveu um texto de relatividade geral afirmando que o espaço-tempo seria uma variedade imersa [9].

Os teoremas conhecidos de imersão de variedade afirmam que para qualquer variedade riemanniana existe uma espaço de imersão. Em 1998 surgiu a idéia de brana-mundo, em parte motivada pela teoria de cordas (ou teoria M) e em parte pela teoria de Kaluza-Klein. O princípio básico dessa teoria é que o espaço-tempo 4-dimensional é imerso num espaço maior, o qual seria uma solução das equações de Einstein.

Com isto em mente, o propósito deste trabalho é re-examinar a proposta do seminário de Friedman de 1965, notadamente a conjectura de Ne'eman no contexto de teoria de branas-mundo. No Capítulo 1 veremos um pouco da história da influência dos métodos geométricos na física. No Capítulo 2 mostraremos como os campos de potencial agem como uma conexão. No Capítulo 3 deduziremos as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso geral. No Capítulo 4 usaremos essas equações para deduzirmos as equações de movimento das branas e, finalmente, no Capítulo 5 faremos uma aplicação ao exemplo do espaço-tempo de Schwarzschild visto como brana-mundo, associando a conexão com um grupo de calibre.

1 *Física e Geometria*

A geometria riemanniana tem exercido uma forte influência na física desde o início do século XX. Tanto é assim que os estudantes de física aprofundam seus conhecimentos de geometria através da geometria riemanniana. No entanto, ela não é a única opção disponível para a física como veremos a seguir.

1.1 A geometria de Euclides

A referência mais antiga de um sistema de medida organizado vem dos antigos babilônios, que desenvolveram métodos de pesquisar terras através do cálculo de áreas de figuras geométricas simples e arcos de círculos. Daí o surgimento da palavra geometria, cujo significado é "medida da terra". Tales de Mileto foi quem deu os primeiros passos para a sistematização da geometria, foi ele quem manteve o nome egípcio de "medida da terra" para sua matemática, mas sendo grego, usou a palavra geometria. Ele foi o primeiro a demonstrar os teoremas de geometria do tipo que, séculos mais tarde, Euclides juntaria nos seus livros *Elementos* [10,11].

Euclides é mais conhecido pelo seu livro *Elementos* que é dividido em treze capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar.

O objetivo de Euclides era que o seu sistema fosse livre de suposições baseadas na intuição ou conjecturas. Ele formulou 23 definições, 5 postulados geométricos e 5 noções comuns. A partir dessa base, ele demonstrou 465 teoremas, os quais eram todo o conhecimento geométrico de sua época.

Aqui discutiremos o quinto postulado de Euclides, conhecido como o postulado das paralelas, que só pode ser violado se não existirem retas paralelas ou, se existir mais de uma reta paralela à uma outra passando por algum ponto externo, algo que era inconcebível naquela época.

No final do século XVIII, Gauss, aos 12 anos, começou a sua crítica a respeito dos Elementos,

de Euclides. Como outros matemáticos, ele se focalizou no postulado das paralelas. Aos 15 anos, Gauss foi o primeiro matemático na história a aceitar a idéia de que poderia existir uma geometria consistente onde o postulado das paralelas de Euclides não seria válido.

No início do século XIX, entre 1813 e 1816, como professor na Universidade de Göttingen, Gauss fez o rompimento e desenvolveu o que hoje é denominado geometria hiperbólica. No dia 6 de novembro de 1824, Gauss escreveu para Taurinus, um advogado amigo que estudava matemática: "A suposição de que a soma dos três ângulos é menor que do que 180° leva a uma geometria especial, bem diferente da nossa, que é absolutamente consistente, e que eu desenvolvi de modo bem satisfatório para mim mesmo..." [12]. Gauss nunca publicou sua nova descoberta, e insistiu com Taurinus e outros para que não tornassem públicas suas idéias. O motivo desse receio era a presença marcante dos filósofos seculares.

Na *Crítica da Razão Pura*, Kant chama o espaço euclideano de "uma necessidade inevitável do pensamento". Kant, percebendo que os geômetras daquele tempo usavam o senso comum e figuras geométricas nas suas demonstrações, adotou a intuição geométrica como base para o desenvolvimento da geometria, que na sua opinião deveria prevalecer sobre a formalidade matemática [13, 14]. Gauss era de uma linha oposta acreditando que o rigor matemático era necessário para a geometria.

Após ler o livro de Kant, Gauss rejeitou a obra, apesar de não ter publicado suas descobertas. Outros matemáticos da época, como Lobachevsky e Bolyai, persistiram no desenvolvimento de geometrias não-euclidianas e publicaram suas obras.

Em 1823, Nicolai Lobachevsky explorou as conseqüências para a quebra do quinto postulado de Euclides dizendo que "nenhuma prova rigorosa de ser verdadeiro fora jamais descoberto" [11]. Em 1826 Lobachevsky apresentou diversos teoremas sobre o assunto e três anos mais tarde, publicou seu trabalho, *Sobre os Princípios da Geometria*, numa desconhecida revista russa, chamada *O mensageiro de Kazan*, da Universidade de Kazan onde era professor. O ano de 1826 marcava o nascimento oficial da geometria não-euclidiana. Nos três anos seguintes, Lobachevsky tinha ficado absolutamente convencido de que o quinto postulado de Euclides não podia ser provado com base nos outros quatro e, em um artigo de 1829, tornou-se o primeiro matemático a publicar uma geometria não-euclidiana baseada na quebra do quinto postulado, intitulada por ele de "geometria imaginária".

Outro matemático que persistiu na geometria não-euclideana foi János Bolyai, filho de um amigo matemático de Gauss, Wolfgang Bolyai. Em 1823, ele escreveu a seu pai dizendo que tinha "criado um mundo novo e diferente, a partir do nada". Ele se referia à criação de

um espaço não-euclidiano. Seu trabalho sobre geometria hiperbólica, que chamou de *Ciência Absoluta do Espaço*, foi publicado em 1832 num apêndice de um dos livros de seu pai, *Tentamen*.

Após a morte de Gauss, especialistas encontraram em suas anotações correspondências e pesquisas sobre o espaço não-euclidiano, bem como trabalhos de Bolyai e Lobachevsky. Gauss soube das contribuições de Lobachevsky à geometria não-euclidiana através do seu segundo livro. A reação de Gauss ao *Ciência Absoluta de Espaço* de Bolyai foi à mesma que teve a Lobachevsky, aprovação, mas não apoio impresso. Em 1867, os trabalhos de Bolyai e Lobachevsky foram incluídos na segunda edição do influente livro de Richard Baltzer, *Elementos da Matemática* [10]. Logo, eles se tornaram referência-padrão entre os que trabalhavam com novas geometrias. A descoberta e o desenvolvimento da geometria não-euclidiana foi um golpe na filosofia kantiana.

O espaço descoberto por Gauss, Bolyai e Lobachevsky chamado de espaço hiperbólico, é o espaço onde o postulado das paralelas é substituído pela suposição de que, para qualquer reta, não existe apenas uma, mas muitas retas paralelas passando por qualquer ponto externo dado. Isso implica que a soma dos ângulos internos de um triângulo dado é menor que 180° e que não existem triângulos semelhantes.

Nem Gauss, nem Bolyai, nem Lobachevsky conseguiram visualizar o espaço hiperbólico de uma forma simples. Isso foi feito por Beltrami, e de uma forma mais simples ainda por Henri Poincaré.

Enquanto a evolução do espaço hiperbólico não era completada, por volta de 1853 Riemann estava almejando uma posição de conferencista em Göttingen. Após ter defendido sua tese de doutorado em 1851, o único obstáculo era dar uma conferência como teste onde os professores escolhiam um tema entre os três entregues pelo palestrante. Gauss escolheu para Riemann o terceiro tópico, o tema *Sobre as Hipóteses que formam os Fundamentos da Geometria*. O motivo de Gauss ter escolhido o terceiro tópico foi que nos dez anos a partir de 1816, Gauss fez um levantamento geodésico de certas áreas da Alemanha. Gauss observou que bastavam medidas tangenciais para descrever a topografia do condado e assim, produziu um mapa bidimensional a partir de dados tridimensionais. O conceito inovador de Gauss de que a geometria de uma superfície curva pode ser estudada sem a referência a um espaço euclidiano de dimensão superior foi extremamente importante na teoria da relatividade de Einstein. Como resultado a palestra descrevia outro tipo de espaço não-euclidiano, o espaço elíptico.

Da mesma forma que o espaço hiperbólico, o espaço elíptico também se baseia na quebra do quinto postulado de Euclides: as retas paralelas não existem, e como Poincaré, Riemann

deu sua interpretação para os termos ponto, reta e plano. Como plano, ele escolheu a superfície da esfera. Seus pontos, como os de Poincaré, continuavam sendo as posições descritas por Descartes. As retas de Riemann eram os círculos máximos, as geodésicas sobre a esfera.

O problema do espaço de Riemann era que além de ser inconsistente com o 5º postulado de Euclides, ele também era inconsistente com dois outros postulados de Euclides. Ele reinterpretou o 2º postulado que dizia que qualquer linha pode ser prolongada indefinidamente em qualquer direção, declarando que este apenas garantia que as retas não tivessem limites. Entretanto Riemann não foi tão feliz em solucionar os problemas do espaço elíptico com o 1º postulado de Euclides. Apesar disso sua obra e a necessidade de quebrar outros postulados além do postulado das paralelas causou um impacto na matemática do final do século XIX.

1.2 A necessidade de uma teoria unificada

Para descrever sua teoria gravitacional Einstein precisava de uma nova geometria que descrevesse a gravitação como uma distorção do espaço. Foi um amigo de Einstein, Marcel Grossmann que descobriu a obra de Riemann e de outros sobre geometria diferencial. As obras de Gauss e Riemann permitiram que Einstein as aplicasse a qualquer campo gravitacional. Foi quando ele teve o embasamento matemático para o princípio da equivalência.

A idéia dada por Einstein de que o espaço era curvo não era nova, ela foi proposta pela primeira vez em 1854, pelo próprio Riemann: "A questão da validade da geometria... está relacionada com a questão da base interna das relações métricas do espaço... nós devemos procurar a base de suas relações métricas fora dele, nas forças de ligação que agem nele..." [9]. Mais tarde, em 1870, ela foi novamente proposta por William Kingdon Clifford, que apresentou o artigo *Sobre a Teoria Espacial da Matéria* para a Sociedade Filosófica de Cambridge. Ele escreveu: "Na verdade, eu mantenho que: (1) as pequenas porções do espaço são de uma natureza análoga aos pequenos montes numa superfície que é, na média, plana; (2) a propriedade de ser curvo ou distorcido é transmitida continuamente de uma porção de espaço para outra como uma onda; (3) esta variação da curvatura do espaço é realmente o que acontece naquele fenômeno que chamamos de movimento da matéria..." [15]. Mas coube a Einstein a realização deste pensamento.

Em 1915, Einstein apresentou o artigo *As Equações do Campo Gravitacional* à Academia de Ciências da Prússia [16]. Cinco dias antes, em 20 de novembro, Hilbert apresentou uma dedução das mesmas equações à Academia Real de Ciências em Göttingen. Sua produção era

independente da de Einstein e apesar de ser superior em alguns aspectos, ele reconheceu a teoria como sendo criação de Einstein, a quem ele admirava muito: "Einstein é quem fez o trabalho, e não os matemáticos" [16].

Logo após Einstein ter completado seu artigo em 1915, a resposta à crítica de Kant sobre o caráter não intuitivo das geometrias não-euclidianas, que parece ter sido atribuída ao próprio Riemann, se torna realizável. Riemann argumentou que se a intuição é a base da verdade geométrica, atribuindo formas e comparações, então isto é de fato algo que tem a ver com a física, já que ela depende de medidas e instrumentos.

Einstein começou a pensar nas possíveis consequências de sua nova teoria para o estudo do universo como um todo. Já que as equações da relatividade geral descrevem a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de matéria, se a distribuição de toda a massa do universo fosse conhecida, as equações poderiam, em princípio, ser resolvidas para determinar a geometria do universo. Einstein estava atrás de uma teoria unificada.

Tal idéia, que pode-se dizer, constitui o objetivo maior da física, é bem mais antiga. Possivelmente ela teve sua origem no pensamento de Pierre Maupertuis, quando sugeriu que toda a natureza pode ser explicada por um princípio matemático. Entretanto, quando pensamos que esse princípio seja realizável através de uma geometria a resposta dada pela relatividade geral parece ser parcial pois apenas uma componente física (gravitação) é geometrizada na teoria de Einstein.

A conjectura de Ne'eman era uma tentativa de incluir na relatividade geral outras componentes da física, a saber as simetrias de calibre. Entretanto, paradoxalmente ela partia da noção de um espaço-tempo imerso, o que representa um retorno ao ponto de vista de Kant. Esse paradoxo conceitual deixa de existir com o conceito de branas-mundo, onde o espaço-tempo físico passa a ser uma variedade imersa. Mas antes de entrar nesse assunto, no próximo capítulo faremos uma breve revisão sobre os campos de potencial de calibre e sobre as conexões.

2 *A teoria de Yang-Mills*

Como foi discutido, na teoria de Einstein a geometria é identificada com o campo gravitacional apenas. O próximo passo foi dado pela teoria de Yang-Mills que teve sua origem com duas idéias independentes. A primeira delas foi uma tentativa de construir uma teoria geométrica para o eletromagnetismo, proposta por Hermann Weyl. A segunda foi o desenvolvimento de teoremas que descrevem observáveis de uma teoria física, desenvolvidos por Emmy Noether em 1918.

2.1 A Teoria de Weyl e de Yang-Mills

Com o desenvolvimento da teoria da relatividade geral, Hermann Weyl [17] em 1919 considerou a possibilidade de que o campo eletromagnético fosse também geometrizado. Generalizando os conceitos de que todas as medidas físicas são relativas, Weyl propôs que a magnitude e a norma de um vetor também deveriam ser relativas, dependendo apenas de sua localização no espaço-tempo. Uma conexão seria necessária para relacionar os comprimentos do vetor em suas diferentes posições, baseando-se na propriedade local. Essa noção ficou conhecida como invariância de calibre.

Weyl foi um passo além da teoria da relatividade geral quando questionou se os efeitos do campo gravitacional podiam ser descritos através de uma conexão, e se isso for possível, se ao eletromagnetismo também podem ser associadas conexões similares. Ele alterou a condição $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ para $g_{\mu\nu;\rho} = \frac{-1}{2}A_\rho g_{\mu\nu}$, onde A_ρ é o potencial eletromagnético.

Entretanto, na teoria de Weyl a gravitação e o eletromagnetismo se manifestam classicamente, enquanto as interações de calibre são consistentes apenas do ponto de vista quântico. Em consequência, as condições de calibração perdem a invariância, e podem ter diferentes expressões em cada ponto. Isto é, dois observadores em pontos distintos do novo espaço-tempo poderiam atribuir diferentes condições de calibração e consequentemente obter soluções diferentes das equações de Maxwell. Isto fez com que Weyl abandonasse sua teoria de calibre.

A solução desse conflito veio com o desenvolvimento da mecânica quântica. Em 1927, Weyl, Fock e London [18–20] perceberam que outro significado poderia ser dado a teoria original de Weyl. As mudanças de escala de um vetor foram substituídas pela idéia de uma mudança de fase da função de onda.

Usando a mudança de fase como variável local, a teoria quântica para o eletromagnetismo não apresenta conflitos com a observação, já que na mecânica quântica apenas as normas são observáveis. Com tal interpretação, em 1929 Weyl retomou a sua teoria generalizando o conceito de transformação de calibre local, com parâmetros dependentes das coordenadas e que fosse compatível com os observáveis em uma teoria quântica [18]. Entretanto, naquela época não haviam dados experimentais suficientes na mecânica quântica que pudessem dar maior suporte a nova proposta de Weyl. Em 1945, com a descoberta de novas partículas com propriedades internas, as transformações de calibre passaram a ser vista não como uma transformação de coordenadas, mas como uma transformação interna local, que transformaria os potenciais da teoria.

Aqui entra a outra contribuição para a teoria de Yang-Mills. Em 1919, Emmy Noether desenvolveu teoremas que mostram como calcular as quantidades conservadas de uma teoria física partindo de sua lagrangeana e do conhecimento de qualquer de suas simetrias de coordenadas ou de calibre. Como toda teoria física deve especificar uma coleção de observáveis, invariantes sob estas simetrias, os teoremas de Noether tornam-se uma ferramenta importante para a determinação dos observáveis da teoria. Assim, pode-se perguntar quais seriam os observáveis da teoria de Weyl deduzidos pelos teoremas de Noether [21].

Por volta de 1951, o grupo de calibre local $U(1)$ consolidou-se como o grupo que caracteriza a eletrodinâmica quântica. A interação entre as partículas é feita por intermédio de fótons cuja função de onda possui uma variação de fase local [22]. E em 1952 a força nuclear fraca foi definida pelo grupo $SU(2)$ como um grupo de simetria interna, semelhante à transformações de calibre [23].

Em 1954, Chen Ning Yang e Robert Mills [24] propuseram que a interação nuclear fraca poderia ser descrita por uma teoria de campo da mesma forma que o eletromagnetismo. Eles postularam que o grupo de calibre local era o $SU(2)$. Essa idéia revolucionária mudava o conceito de identidade de uma partícula, pois agora, a escolha da direção do spin das partículas era arbitrário em cada ponto e assim, uma conexão era necessária para comparar esses pontos. Um novo potencial foi postulado por Yang-Mills em analogia com o potencial eletromagnético. Esta idéia levou à unificação da força fraca com o eletromagnetismo na teoria eletrofraca [25].

Em meados da década de 70 foi inventada uma teoria quântica de campos para a força forte com o grupo $SU(3)$. Assim, as três interações fundamentais: eletromagnetismo, força fraca e força forte incorporam um único formato que é o mesmo desenvolvido por Yang-Mills.

Com a consolidação da teoria de Yang-Mills estamos diante de uma situação nova: existe uma geometria afim, baseada em uma conexão, para as 3 interações de calibre. Mas esta geometria não é idêntica àquela da 4ª força, que é a gravitação. Esta diferença deve-se à natureza da simetria que caracteriza as conexões. No caso da gravitação, a simetria é definida pelas transformações de coordenadas do espaço-tempo, portanto tem uma definição fundamentada na própria evolução conceitual da geometria do espaço-tempo. Por outro lado, no caso das interações de calibre o espaço onde a simetria de calibre atua é o espaço interno, onde atua a força nuclear. Entretanto, esta simetria não tem origem geométrica como é o caso do espaço-tempo. Este espaço interno não é acessível diretamente pela observação.

A identificação do espaço interno é uma necessidade da unificação das interações via geometria, ou via grupo (GUT). Por exemplo o chamado modelo-padrão de unificação seria algo como $P_4 \times U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ que, por ser um produto cartesiano em espaços diferentes, um deles é o espaço-tempo, o outro é o espaço interno. Mas se juntarmos estes espaços onde os diversos grupos internos atuam teremos algo como $4 + 7 = 11$ dimensões no mínimo [26].

2.2 Teorema de Noether

A visão moderna da teoria quântica é que as partículas da matéria (férmions) das três forças fundamentais, com exceção da gravitação, não interagem entre si, mas possuem cargas que trocam partículas virtuais (bósons), e estes são os intermediadores das interações. No modelo-padrão, são três os tipos de bósons de calibre: fótons, bósons W e Z, e gluons. Cada um corresponde a uma das três interações do modelo-padrão: fótons são bósons de calibre da interação eletromagnética, bósons W e Z da interação fraca e gluons da interação forte. Este acoplamento de matéria (férmions carregados) pela força através de partículas mediadoras (bósons de calibre) é o resultado das simetrias fundamentais da natureza. Matematicamente, este acoplamento é visto através do teorema de Noether.

Considere um campo genérico $\psi(x)$, podendo o mesmo ser escalar, vetorial, tensorial ou espinorial. O campo tem sua equação obtida de um princípio variacional com uma lagrangeana L , a qual depende de $\psi(x)$ e suas derivadas primeiras,

$$L = L(\psi, \psi_{,\lambda}, x).$$

Considerando a variação da lagrangeana resultante de uma transformação de calibre local,

$$\delta L = L(\psi'(x)) - L(\psi(x)),$$

variação da ação será

$$\delta A = A(\psi', \Omega) - A(\psi, \Omega)$$

onde Ω é uma região qualquer fechada do espaço-tempo descrito pelas coordenadas x^μ onde ψ está definido. A ação é integrada num elemento de volume dv do espaço-tempo. Assim, temos

$$A(\psi, \Omega) = \int_{\Omega} \delta L dv$$

e

$$\delta A = \int_{\Omega} [A(\psi', \Omega) - A(\psi, \Omega)] dv.$$

Sabendo que

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} \delta \psi_{,\lambda},$$

usando a equação de Euler-Lagrange e considerando que $\delta \psi$ se anula no contorno $\delta \Omega$ de Ω ,

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} \right),$$

e admitindo ainda que a transformação considerada é uma simetria do sistema, obtemos uma variação total nula

$$\delta A = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} \right) \delta \psi + \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} \delta \psi_{,\lambda} \right) dv = 0.$$

Usando a relação

$$\delta \psi_{,\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \delta \psi$$

e o fato que a variação do campo pode ser escrita como [27]

$$\delta\psi = F_a(x, \psi)\delta\theta^a,$$

onde $F_a(x, \psi)$ é uma função que é conhecida mas que depende da natureza de cada campo, isso resulta em

$$\delta A = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} \right) \delta\psi + \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \delta\psi \right) dv = 0,$$

ou

$$\delta A = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} \right) \delta\psi \right) dv = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} \right) F_a(x, \psi) \delta\theta^a \right) dv = 0.$$

Observe que $\delta\theta^a$ não pode ser retirado da derivada pois o mesmo depende de x . Entretanto, calculando a derivada da expressão acima, ou seja

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a \right) \delta\theta^a + \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a \frac{\partial \theta^a}{\partial x^\lambda} \right] dv = 0,$$

e subtraindo e adicionando o termo

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a A_{\lambda b}^a \delta\theta^b,$$

onde $A_{\lambda b}^a$ são as componentes de uma matriz A_λ , obtemos

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a \right) \delta\theta^a + \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a \frac{\partial \theta^a}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a A_{\lambda c}^a \delta\theta^b - \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a A_{\lambda c}^a \delta\theta^b \right] dv = 0. \quad (2.1)$$

Impondo a condição

$$\frac{\partial \theta^a}{\partial x^\lambda} - A_{\lambda b}^a \delta\theta^b = 0, \quad (2.2)$$

a expressão (2.1) da integral acima fica

$$\int_{\Omega} \sum_a \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a + \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_b A_{\lambda a}^b \right) \delta\theta^a dv = 0,$$

onde $\delta\theta^a$ foi excluído da derivada. A integral pode portanto ser re-escrita como

$$\sum_a \int_{\Omega} \left[(\partial_{\lambda} \delta_b^a + A_{\lambda b}^a) \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_b \right) \right] \theta^b dv = 0. \quad (2.3)$$

Introduzindo

$$D_{\lambda b}^a = \delta_b^a \partial_{\lambda} + A_{\lambda b}^a$$

e denotando a quantidade de Noether

$$N_a^{\lambda} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\lambda}} F_a, \quad (2.4)$$

a eq. (2.2) fica

$$\int_{\Omega} (D_{\lambda b}^a N_a^{\lambda}) \delta \theta^b dv = 0.$$

Assumindo que todo o integrando é diferenciável e que a região Ω é fechada e arbitrária, isto resulta que a integral é nula

$$(D_{\lambda b}^a N_a^{\lambda}) \delta \theta^b = 0.$$

Portanto se $\delta \theta^b$ são parâmetros localmente independentes, então

$$D_{\lambda b}^a N_a^{\lambda} = 0.$$

Podemos escrever esta expressão na representação adjunta da álgebra de Lie do grupo G . A representação matricial de um grupo G é um homomorfismo $R : G \rightarrow \tilde{G}$ onde \tilde{G} é um grupo de transformações lineares de um espaço vetorial V , chamado de espaço de representação.

Em particular, podemos usar o próprio espaço da álgebra de Lie de G , de base $\{X_a\}$. A representação de um elemento X_a da base é dado por um operador $R(X_a)$ que atua na própria álgebra de Lie da seguinte maneira

$$R(X_a)X_b = [X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c; \quad (2.5)$$

então esta é a chamada representação adjunta da álgebra de Lie de G . Multiplicando a condição de Noether (2.2) por X_a obtemos

$$A_{\mu b}^a \theta^b X_a = \theta_{,\mu}^a X_a. \quad (2.6)$$

Definindo os coeficientes A_μ^c por

$$C_{bc}^a A_\mu^c = -A_{\mu b}^a$$

e substituindo-os em (2.5), temos

$$-C_{bc}^a A_\mu^c \theta^b X_a = \theta_{,\mu}^a X_a.$$

Utilizando (2.4) obtemos

$$-[X_b, X_c] A_\mu^c \theta^b = \theta_{,\mu}^a X_a.$$

Rearranjando os termos,

$$[A_\mu^c X_c, X_b] \theta^b = \theta_{,\mu}^a X_a,$$

obtemos

$$R(A_\mu) X_b \theta^b = \theta_{,\mu}^a X_a, \quad (2.7)$$

onde $R(A_\mu)$ é a representação de $A_\mu = A_\mu^c X_c$ na representação adjunta. Trata-se de uma matriz $n \times n$ na base de $\{X_a\}$ da álgebra de Lie tal que

$$\begin{aligned} R(A_\mu) X_b &= [A_\mu, X_b] = [A_\mu^a X_a, X_b] \\ &= A_\mu^a [X_a, X_b] = A_\mu^a C_{ab}^c X_c \\ &= A_{\mu b}^c X_c, \end{aligned} \quad (2.8)$$

ou seja, os coeficientes introduzidos por Noether $A_{\mu b}^c$ são as componentes da matriz A_μ na representação adjunta da álgebra de Lie do grupo de simetria .

Adicionando a (2.8) o operador $I\partial_\mu$ onde I é o operador identidade correspondente à matriz identidade $R(I)$, temos

$$\begin{aligned} R(A_\mu + I\partial_\mu)X_b &= A_{\mu b}^c X_c + \delta_b^c \partial_\mu X_c \\ &= (A_{\mu b}^c + \delta_b^c \partial_\mu)X_c. \end{aligned}$$

contudo o lado direito é o termo que aparece em (2.3), ou seja, é a representação do operador

$$D_\mu = A_\mu + I\partial_\mu.$$

A expressão caracteriza uma derivada covariante com relação à conexão A_μ , definida na representação adjunta da álgebra de Lie do grupo G . Assim, diz-se que A_μ é um campo vetorial no espaço-tempo, com valores na álgebra de Lie do grupo de calibre. Do ponto de vista geométrico A_μ define uma conexão afim na variedade.

Para entender a curvatura associada à conexão A_μ lembramos que o diferencial de uma função em uma variedade M é uma forma diferencial ou 1-forma e é dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu;$$

e como vimos no teorema de Noether, a variação de um campo é dado por $\delta\psi = F_a(x, \psi)\delta\theta^a$. Se θ^a depende das coordenadas x , então o diferencial de θ é $\delta\theta^a = a_\mu^a dx^\mu$. Assim, $\delta\psi$ fica

$$\delta\psi = F_a(x, \psi)a_\mu^a dx^\mu,$$

que é também uma forma diferenciável. Portanto a variação $\delta\psi$ de um campo ψ é naturalmente definida no espaço de formas diferenciáveis sobre M , ou seja no fibrado dual $(M \times \tilde{G}^*, \pi, M)$.

Denotando por X^a a base de \tilde{G}^* , dual de X_a (isto é tal que $X^a(X_b) = \delta_b^a$), então o campo dual ψ se escreve como

$$\psi = \psi_a X^a,$$

que é equivalente a $\psi = \psi^a X_a$.

A derivada exterior covariante $D \wedge \psi$ é a generalização da derivada exterior $d\psi = d\psi_a \wedge X^a$, que leva em conta a dependência local da base da álgebra de Lie, e é definida por uma aplicação $D : \tilde{G}^* \rightarrow \tilde{G}^* \wedge \tilde{G}^*$ com as seguintes propriedades

$$1-D \wedge (a\psi + b\psi') = aD \wedge \psi + bD \wedge \psi',$$

$$2-D \wedge (f\psi) = df \wedge \psi + fD \wedge \psi,$$

$$3-D \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2) = (D \wedge \psi_1) \wedge \psi_2 + \psi_1 \wedge (D \wedge \psi_2).$$

Portanto temos

$$D \wedge \psi = D \wedge (\psi_a X^a) = d\psi_a \wedge X^a + \psi_a D \wedge X^a.$$

A curvatura da conexão A é uma 2-forma diferencial definida pela derivada exterior covariante de A

$$F = D \wedge A.$$

Das propriedades acima segue que

$$F = D \wedge A = \frac{1}{2} \sum (D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (2.9)$$

onde o fator $1/2$ foi incluído para eliminar a dupla contagem dos índices que ocorrem devido ao fato que a soma percorre todos os valores possíveis dos mesmos. Denota-se

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Nessa linguagem a teoria de Maxwell pode ser escrita como uma teoria de conexão do grupo de calibre $U(1)$, onde a conexão é o próprio potencial eletromagnético. Neste caso $[A_\mu, A_\nu] = 0$ pelo fato que o grupo de calibre $U(1)$ ser abeliano e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

O tensor de Maxwell F é então interpretado geometricamente como sendo a curvatura da conexão do grupo $U(1)$.

De fato, podemos entender o tensor $F_{\mu\nu}$ como sendo uma curvatura associada à conexão A_μ , o que se assemelha a teoria de Einstein. A sugestão para essa formulação aparece no teorema de Noether para simetrias de calibres locais. Isto é feito de tal forma que A_μ modifica o operador da derivada e caracteriza uma conexão afim e, portanto, uma geometria.

Uma geometria que contenha em seus fundamentos todas as interações deve conter informações que permitam acessar os observáveis quânticos. Estes observáveis são dados pelo

teorema de Noether. Entretanto, para um grupo de calibre mais geral, o potencial A_μ é uma matriz e o teorema de Noether não explica a natureza física ou mesmo geométrica para esta matriz, que entra apenas como uma correção para a derivada. Mas, existe uma explicação geométrica para o mesmo? De onde vem este grupo usado no teorema de Noether? Para responder a essas perguntas precisamos detalhar a conjectura de Ne'eman como será feito no próximo capítulo.

3 *Imersões de Variedades*

Uma possível explicação para a origem da simetria interna é a imersão do espaço-tempo; idéia que foi ressaltada por Ne'eman no seminário de 1965 [1–6]. Entretanto, a conjectura de Ne'eman carecia de sentido pois foi feita no contexto da relatividade geral, que não requer ou não prevê imersão. Porém ela faz sentido no contexto de branas-mundo, que se fundamenta na teoria de imersões.

3.1 Teoria de Imersões

Antes de 1850, uma superfície de duas dimensões era sempre vista como imersa em espaços euclidianos planos, isto é, a geometria das superfícies era simplesmente imersa num espaço de dimensão maior. O conceito abstrato de uma variedade Riemanniana, definida intrinsicamente, foi formulada por Riemann em sua tese de 1850, como foi discutido no capítulo 1.

Com a abstração do conceito de variedade, surgiu a dúvida se uma variedade Riemanniana tem a mesma forma que aquela de uma geometria imersa em um espaço euclidiano, tal como uma superfície. Hoje sabe-se que toda variedade Riemanniana definida intrinsicamente pode ser imersa isometricamente, localmente ou globalmente, em um espaço Euclidiano de dimensões apropriadas. Schlaefli conjecturou que uma variedade riemanniana chata (que não possui curvatura) com métrica analítica e definida positiva pode ser imersa localmente e isometricamente como uma subvariedade em um espaço Euclidiano E^m onde $m = n(n + 1)/2$. Isto é, uma variedade riemanniana 4-dimensional está imersa em um espaço euclidiano de $m = 4(4 + 1)/2 = 10$ dimensões [28].

Em 1926, Janet [29] usou um método de prova baseado num desenvolvimento de séries de potência positivas convergentes, ou seja, analítico. Janet notou que sua prova estava incompleta, pois ela apenas resolve o problema local para variedades riemannianas imersas bi-dimensionais com métrica analítica. Cartan [30], em 1927, estendeu o resultado para uma variedade n -dimensional, mas a métrica ainda era analítica. A dimensionalidade necessária para a imersão

foi a mesma encontrada por Schlaefli ($m = n(n + 1)/2$).

Em 1931, Burstín [31] completou a prova de Janet-Cartan e estendeu o resultado para o caso em que o espaço imerso é uma variedade riemanniana V_n com métrica analítica e definida positiva. As equações de Gauss, Codazzi e Ricci, que são equações diferenciais que definem as derivadas das funções da imersão, foram usadas por Burstín como condição de integrabilidade desta imersão.

Em 1954, Nash [32] mostrou que uma variedade C^1 (derivadas parciais de primeira ordem de $g_{\mu\nu}$ existem e são contínuas) pode ser imersa em espaço euclidianos de $2n$ dimensões e em 1956, tratou o caso de C^k para $3 \leq k \leq \infty$. Ele demonstrara como fazer a imersão local de uma variedade diferenciável mantendo sua regularidade, não necessitando mais de uma métrica analítica. Greene estendeu o teorema de Nash para métricas não-positivas [33].

A dimensão m do espaço-ambiente para uma imersão isométrica e local de uma variedade V_n depende das funções de imersão. Se utilizarmos o teorema de Janet-Cartan-Burstín com funções analíticas, o espaço-total terá o número de dimensões $m \leq n(n + 1)/2$. Entretanto, funções analíticas são muito restritas quando comparadas a funções diferenciáveis para descrever processos de altas energias. Portanto se utilizarmos o teorema de Nash-Greene com funções diferenciáveis, então o número de dimensões do espaço-ambiente cresce para $m \leq n(n + 3)/2$.

No ano de 1965, em um seminário sobre o problema de imersões, Ne'eman e outros conjecturaram que as dimensões extras podiam ser uma fonte de simetrias de partículas elementares. O primeiro artigo do seminário é de Friedman [1], e ele discute sobre os diversos casos de imersões globais e locais, fazendo um breve resumo sobre o que Nash havia discutido quase dez anos antes e também o que havia sido descoberto até então [34]. O artigo de Rosen [2] mostra vários casos de imersões de espaços relativísticos Riemannianos.

Penrose [3] chama a atenção para o problema de imersões globais, dizendo que nem sempre uma variedade Riemanniana poderá ser imersa num espaço Euclideo como Nash havia afirmado em 1956. Ele faz o exemplo para as métricas de ondas planas, mas recentemente mostrou-se que de fato isto não era uma dificuldade desde que se considere a dinâmica das imersões [35].

Fronsdal [4] discute os limites entre espaços chatos e espaços curvos para uma dada teoria física. Joseph [5] trata da imersão do espaço-tempo num espaço pseudo-Euclideo. Para ele, espaços pseudo-Euclidianos de dimensão maior podem ser considerados uma arena em que a relatividade geral e a mecânica quântica possam ser trabalhadas simultaneamente.

Yuval Ne’man estuda [6] a cinemática de interações fortes. O quadro geral naquela época era que as simetrias concordavam com as interações fracas, mas não podiam ser estendidas para as interações fortes. Ne’eman sugere que o uso de um espaço local imerso resulta nas simetrias internas, ou seja, as simetrias internas teriam uma origem geométrica. Ele conclui que o uso de imersões do espaço-tempo pode oferecer um programa de unificação das forças onde as conexões passam a ser vistas como propriedades do espaço-tempo.

A conjectura de Ne’eman era uma tentativa de incluir na relatividade geral outras componentes da física, a saber as simetrias de calibre. Com isto em mente vamos detalhar o estudo de imersões [36, 37].

3.2 Equações de Gauss, Codazzi e Ricci

Considere uma superfície onde cada um dos seus pontos pode ser definida por uma parametrização de Monge $\mathcal{X} : R^2 \rightarrow R^3$,

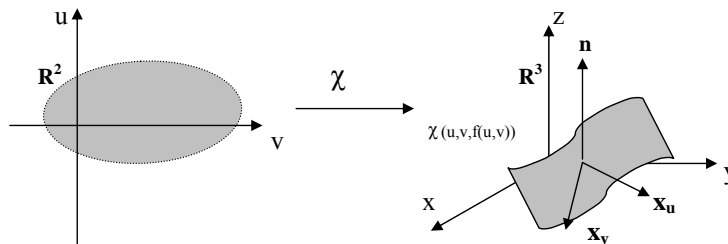


Figura 1: parametrização de Monge

$$\mathcal{X}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (3.1)$$

onde $u = x$ e $v = y$ e $f(u, v)$ é uma função diferenciável. Essa parametrização é caracterizada pela equação

$$g(x, y, z) = cte, \quad (3.2)$$

e $g(x, y, z) : R^3 \rightarrow R^2$ é uma função diferenciável e regular. A regularidade permite usar o teorema das funções implícitas para extrair uma função diferenciável

$$z = f(x, y), \quad (3.3)$$

e com ela construir a parametrização de Monge acima. O vetor normal unitário da superfície pode ser obtido com

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, \quad (3.4)$$

de onde conclui-se que

$$dg = \langle \nabla g, dl \rangle = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = 0, \quad (3.5)$$

sendo $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ tangente à superfície. Variando a direção do vetor tangente, pode-se obter uma noção da forma local da superfície observando como a normal varia, ou equivalentemente como a superfície se afasta do plano tangente local. As direções de variação máxima e mínima k_1 e k_2 de \mathbf{n} são usadas para calcular a variação de \mathbf{n} em qualquer direção através da fórmula de Euler

$$k(u) = k_1 \cos(\theta) + k_2 \sin(\theta). \quad (3.6)$$

O teorema egregium de Gauss diz que $K = k_1 k_2$ (curvatura gaussiana) é uma propriedade invariante e intrínseca da superfície, ou seja, não depende da normal. Mas a curvatura gaussiana não é suficiente para descrever a forma local da superfície. De fato, pela fórmula de Euler acima, são necessários 2 números, enquanto que o valor de K nos fornece somente um número. Para completar, agrega-se ao cálculo a curvatura média $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ e então pode-se obter o outro valor necessário para descrever a forma local. Ou seja, pode-se determinar a forma local da superfície conhecendo-se K e H em lugar de k_1 e k_2 . Entretanto, contrariamente ao K , a curvatura média H não é intrínseca. Para sua definição necessita-se do vetor normal \mathbf{n} [36].

Por outro lado na geometria de Riemann tudo deriva do produto escalar local

$$g_{\mu\nu} = \langle e_\mu, e_\nu \rangle, \quad (3.7)$$

onde $\{e_\mu\}$ é uma base do espaço tangente da superfície. O formato local da superfície abstrata de Riemann é definido pelo tensor de curvatura definido por

$$R(U, V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U, V]} W;$$

ou, em uma base $\{e_\mu\}$ do espaço tangente,

$$\mathcal{R}(e_\mu, e_\nu)e_\rho = \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\delta e_\delta. \quad (3.8)$$

Aplicando a uma superfície do R^3 obtém-se apenas uma componente independente $\mathcal{R}_{1212} = K$. Portanto a curvatura de Riemann não é suficiente para determinar a forma local de uma superfície de Riemann. Para recuperar a forma local torna-se necessário fazer uma imersão da superfície riemanniana em R^3 para obter H , ou melhor, as curvaturas principais k_1 e k_2 .

A conjectura de Schlaefli representa uma extensão desse raciocínio para uma variedade riemanniana V_n de dimensão n com forma quadrática¹

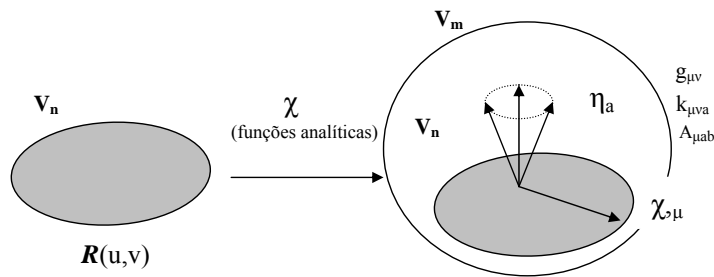


Figura 2: conjectura de Schlaefli

$$\phi = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.9)$$

imersa num espaço V_m . A imersão \mathcal{X} é uma aplicação $\mathcal{X} : V_n \rightarrow V_m$, local e isométrica, com componentes $\mathcal{X}^A = f^A(x^1, \dots, x^n)$ que associa a cada ponto de V_n um ponto de V_m de coordenada \mathcal{X}^A , tal que

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \mathcal{G}_{AB} d\mathcal{X}^A d\mathcal{X}^B.$$

Consequentemente,

$$g_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B, \quad (3.10)$$

onde os $\mathcal{X}_{,\alpha}^A$ são componentes de vetores tangentes à V_n . Além disso devemos ter $m - n$ vetores normais à V_n . Se η^A denotam as componentes desses vetores, então elas satisfazem a equação de ortogonalidade

¹Todas os índices gregos vão de 1 a n . Os índices em latim minúsculas vão de $n+1$ a m e os índices em latim maiúsculas vão de 1 a m .

$$\mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\mu}^A\eta_b^B = 0. \quad (3.11)$$

Finalmente escolhendo os vetores η_a^A como sendo mutuamente ortogonais e de norma ± 1 , temos também a condição

$$\mathcal{G}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B = g_{ab} = \epsilon_a\delta_{ab}, \quad (3.12)$$

onde $\epsilon_a = \pm 1$ são os sinais relacionados a duas possíveis assinaturas das dimensões extras. As equações(3.10), (3.11) e (3.12) são as equações básicas de imersão, cuja solução nos dá as coordenadas \mathcal{X}^A de imersão. Para saber se podemos determinar as componentes \mathcal{X}^A da imersão \mathcal{X} a partir dessas equações, devemos determinar as condições de integrabilidade das mesmas.

Aqui apenas seguiremos as deduções clássicas de Eisenhart [37]. Diferenciando (3.10) covariantemente com respeito à $g_{\mu\nu}$, temos

$$\frac{\partial\mathcal{G}_{AB}}{\partial\mathcal{X}^C}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B\mathcal{X}_{,\gamma}^C + \mathcal{G}_{AB}(\mathcal{X}_{,\alpha\gamma}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B + \mathcal{X}_{,\beta\gamma}^B\mathcal{X}_{,\alpha}^A) = 0. \quad (3.13)$$

Subtraindo desta equação a soma das equações obtidas trocando α por γ , e β por γ , obtemos (usando $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ e o fato que \mathcal{G}_{AB} é função de x^μ via \mathcal{X}^A , e finalmente notando que cada \mathcal{X}^A é um escalar em V_n apesar de ser um vetor em V_m)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\mathcal{G}_{CB}}{\partial\mathcal{X}^A}\mathcal{X}_{,\gamma}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B\mathcal{X}_{,\alpha}^C + \mathcal{G}_{AB}(\mathcal{X}_{,\gamma\alpha}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B + \mathcal{X}_{,\beta\alpha}^B\mathcal{X}_{,\gamma}^A) + \\ & + \frac{\partial\mathcal{G}_{AC}}{\partial\mathcal{X}^B}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\mathcal{X}_{,\gamma}^B\mathcal{X}_{,\beta}^C + \mathcal{G}_{AB}(\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A\mathcal{X}_{,\gamma}^B + \mathcal{X}_{,\gamma\beta}^B\mathcal{X}_{,\alpha}^A) + \\ & - \frac{\partial\mathcal{G}_{AB}}{\partial\mathcal{X}^C}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B\mathcal{X}_{,\gamma}^C - \mathcal{G}_{AB}(\mathcal{X}_{,\alpha\gamma}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B + \mathcal{X}_{,\beta\gamma}^B\mathcal{X}_{,\alpha}^A) = 0. \end{aligned}$$

Usando a definição $\Gamma_{ABC} = \frac{1}{2}(\mathcal{G}_{AC,B} + \mathcal{G}_{BC,A} - \mathcal{G}_{AB,C})$, chegamos a

$$\mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\gamma}^A\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^B + \Gamma_{ABC}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B\mathcal{X}_{,\gamma}^C = 0.$$

A equação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\gamma}^A(\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A + \Gamma_{DE}^A\mathcal{X}_{,\alpha}^D\mathcal{X}_{,\beta}^E) = 0, \quad (3.14)$$

onde $\mathcal{G}_{AB}\Gamma_{DE}^A = \Gamma_{ABC}$. Para qualquer solução da imersão $\mathcal{X} : V_n \rightarrow V_m$, a segunda forma fundamental de componentes $k_{a\alpha\beta}$ é definida por

$$k_{a\alpha\beta}\eta_a^A = \mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A + \Gamma_{DE}^A \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E.$$

Portanto a expressão (3.14) pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} k_{a\alpha\beta} \underbrace{\mathcal{G}_{AB}\eta_a^A \eta_b^B}_{=g_{ab}} &= \mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A \eta_b^B + \Gamma_{BDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B \\ \epsilon_a k_{a\alpha\beta} &= \mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A \eta_b^B + \Gamma_{BDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A função Γ_{BDE} é invariante sobre as transformações de coordenadas x_a de V_n mas não de V_m . $\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A$ são as componentes de um tensor simétrico covariante de segunda ordem com relação a x e $\mathcal{X}_{,\alpha}^D$ são componentes de um vetor. Assim, para cada valor do índice A as quantidades $k_{a\alpha\beta}$ são componentes de um tensor simétrico em V_n .

Agora diferenciando (4.11) covariantemente com respeito a $g_{\mu\nu}$, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{AB}}{\partial \mathcal{X}^C} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \eta_b^B \mathcal{X}^{C,\beta} + \mathcal{G}_{AB} (\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A \eta_b^B + \mathcal{X}_{,\alpha}^A \eta_{b,\beta}^B).$$

Usando (3.11) e (3.15), temos

$$\mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \eta_{b,\beta}^B = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} - \Gamma_{BDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B. \quad (3.16)$$

A 3ª forma fundamental de componentes $A_{ab\beta}$ é definida por

$$A_{ab\beta} = \mathcal{G}_{AB} \eta_a^A \eta_{b,\beta}^B + \Gamma_{DEB} \mathcal{X}_{,\beta}^D \eta_b^E \eta_a^B. \quad (3.17)$$

Então para cada valor dos índices a e b , as quantidades $A_{ab\beta}$ são componentes de um vetor.

Para concluir, diferenciando (3.12) covariantemente com respeito a $g_{\mu\nu}$, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{AB}}{\partial \mathcal{X}^C} \eta_a^A \eta_b^B \mathcal{X}^{C,\alpha} + \mathcal{G}_{AB} \eta_{a,\alpha}^A \eta_b^B + \mathcal{G}_{AB} \eta_a^A \eta_{b,\alpha}^B = 0;$$

e usando novamente (3.11) a expressão acima resulta em

$$\mathcal{G}_{AB}\eta_{a,\alpha}^A\eta_b^B + \mathcal{G}_{AB}\eta_a^A\eta_{b,\alpha}^B = 0.$$

Juntando este resultado com (3.17), obtemos

$$A_{ab\beta} = -A_{ba\beta} \quad (3.18)$$

$$A_{aa\beta} = 0. \quad (3.19)$$

Portanto, a geometria imersa é determinada pela solução das equações (3.10), (3.11) e (3.12) que definem a métrica $g_{\mu\nu}$ da variedade imersa, e também a quantidades extrínsecas $k_{a\mu\nu}$ (2^a forma fundamental) e $A_{ab\mu}$ (3^a forma fundamental). Resta saber se existe tal solução. Para mostrar essa existência devemos calcular as condições de integrabilidade de (3.10), (3.11) e (3.12). Assim, para um dado valor de índice B as derivadas $\eta_{a,\beta}^B$ dos vetores podem ser escritas na base $\{\mathcal{X}_{,\gamma}^B, \eta_b^B\}$, isto é

$$\eta_{b,\beta}^B = C_{b\beta}^\gamma \mathcal{X}_{,\gamma}^B + B_{b\beta}^a \eta_a^B, \quad (3.20)$$

onde os coeficientes C 's podem ser determinados pela substituição desta expressão em (3.16), ou seja usando (3.11) obtemos

$$\mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\mathcal{X}_{,\gamma}^B C_{b\beta}^\gamma = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} - \Gamma_{BDE}\mathcal{X}_{,\alpha}^D\mathcal{X}_{,\beta}^E\eta_b^B;$$

e usando (3.10), chega-se a

$$C_{b\beta}^\gamma g_{\alpha\gamma} = k_{b\alpha\beta} - \Gamma_{BDE}\mathcal{X}_{,\alpha}^D\mathcal{X}_{,\beta}^E\eta_b^B. \quad (3.21)$$

Os coeficientes B 's são determinados do seguinte modo. Substituindo a expressão (3.20) em (3.17), temos

$$A_{ab\beta} = \mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\gamma}^B\eta_a^A C_{b\beta}^\gamma + \mathcal{G}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B B_{b\beta}^a + \Gamma_{DEB}\mathcal{X}_{,\beta}^D\eta_b^E\eta_a^B$$

e usando (3.11) e (3.12) chegamos a

$$B_{b\beta}^a = A_{ab\beta} - \Gamma_{DEB}\mathcal{X}_{,\beta}^D\eta_b^E\eta_a^B. \quad (3.22)$$

Multiplicando (3.21) por $g^{\alpha\sigma}$ e somando para α , temos

$$C_{b\beta}^{\sigma} = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} - \Gamma_{BDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B g^{\alpha\sigma}.$$

Se $\lambda_{\delta}^{\alpha}$ são componentes de quaisquer vetores mutuamente ortogonais unitários em V_n , então

$$\sum \lambda_{\delta}^{\alpha} \lambda_{\delta}^{\sigma} = g^{\alpha\sigma}.$$

Por sua vez, se η_{δ}^A são as componentes desses vetores com respeito a \mathcal{X} ,

$$\eta_{\delta}^A = \lambda_{\delta}^{\alpha} \mathcal{X}_{,\alpha}^A;$$

conseqüentemente,

$$C_{b\beta}^{\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^F = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^F - \Gamma_{BDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^F.$$

Substituindo a expressão acima e (3.22) de volta em (3.20), encontramos

$$\eta_{b,\beta}^B = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^B - \Gamma_{FDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^F g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^B + B_{b\beta}^a \eta_a^B;$$

e por fim chegamos a

$$\eta_{b,\beta}^B = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^B - \Gamma_{FG}^B g_{\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^G \eta_b^F + A_{ab\beta} \eta_a^B. \quad (3.23)$$

Para obter um dado \mathcal{X}^A , vale a identidade de Ricci

$$\mathcal{X}_{,\alpha\beta\gamma}^A - \mathcal{X}_{,\alpha\gamma\beta}^A = \mathcal{X}_{,\sigma}^A g^{\sigma\delta} R_{\delta\alpha\beta\gamma}, \quad (3.24)$$

onde os símbolos de Riemann $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ são formados com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$ de V_n . Derivando covariantemente a definição de $k_{a\alpha\beta}$ e fazendo uso de (3.23) e da definição de $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{X}_{,\beta}^A g^{\theta\delta} (R_{\delta\alpha\beta\gamma} - g^{ab} (k_{a\delta\beta} k_{b\alpha\gamma} - k_{b\delta\gamma} k_{a\alpha\beta})) - \eta_a^A g^{ab} (k_{a\alpha\beta;\gamma} - k_{a\alpha\gamma;\beta} - g^{ab} (A_{ab\gamma} k_{b\alpha\beta} - A_{ab\delta} k_{b\alpha\gamma})) \\ & - \mathcal{R}_{DEF}^A \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \mathcal{X}_{,\gamma}^F = 0, \end{aligned}$$

onde \mathcal{R}_{DEF}^A são os tensores de Riemann de V_m . Se a equação for multiplicada por $\mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\sigma}^B$ e

somada para o índice a e novamente para $\mathcal{G}_{AB}\eta_a^B$, obtemos as equações

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = g^{ab}(k_{a\alpha\gamma}k_{b\sigma\beta} - k_{a\alpha\sigma}k_{b\beta\gamma}) + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B\mathcal{X}_{,\gamma}^C\mathcal{X}_{,\sigma}^D, \quad (3.25)$$

$$k_{a\alpha\beta;\gamma} - k_{a\alpha\gamma;\beta} = g^{cd}(A_{cd\gamma}k_{c\alpha\beta} - A_{cd\beta}k_{c\alpha\gamma}) + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\eta_a^B\mathcal{X}_{,\beta}^C\mathcal{X}_{,\gamma}^D. \quad (3.26)$$

Como $\eta_{a,\alpha\beta}^B = \eta_{a,\beta\alpha}^B$, trocando α por β e usando (3.26), a equação (3.23) pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} (A_{ba\beta;\gamma} - A_{ba\gamma;\beta})\eta_b^B &= -g^{cd}(A_{cb\beta}A_{da\gamma} - A_{da\gamma}A_{cb\beta})\eta_b^B - g^{cd}(k_{c\gamma\beta}k_{d\beta\gamma} - k_{c\beta\gamma}k_{d\gamma\beta})\eta_b^B \\ &\quad - \mathcal{R}_{FDE}^B\mathcal{X}_{,\beta}^D\mathcal{X}_{,\gamma}^E\eta_b^F + g^{\sigma\delta}\mathcal{X}_{,\sigma}^B\mathcal{R}_{AFDE}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\mathcal{X}_{,\beta}^D\mathcal{X}_{,\gamma}^E\eta_a^F. \end{aligned}$$

Multiplicando por η_b^B e somando para B , temos

$$A_{ba\gamma;\delta} - A_{ba\delta;\gamma} = g^{cd}(A_{cb\delta}A_{da\gamma} - A_{da\gamma}A_{cb\delta}) + g^{cd}(k_{c\gamma\delta}k_{d\delta\gamma} - k_{c\delta\gamma}k_{d\gamma\delta}) + \mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\mathcal{X}_{,\gamma}^C\mathcal{X}_{,\delta}^D. \quad (3.27)$$

As equações (3.25), (3.26) e (3.27) são chamadas de equação de Gauss, Codazzi e Ricci respectivamente. O significado destas equações é o seguinte: considerando $g_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu a}$ e $A_{\mu ab}$ como variáveis básicas satisfazendo essas equações, podemos substituir e resolver na equação de imersão para obter \mathcal{X}^A e η_a^A . Entretanto, são equações diferenciais fortemente não-lineares e de difícil solução. Como já mencionamos na seção anterior, é possível resolver estas equações com a imposição de que \mathcal{X}^A são funções analíticas. Entretanto a prova mais geral sem assumir a analiticidade é feita pelo teorema de Nash.

3.3 Variedades Imersas

A garantia de que qualquer variedade riemanniana V_n é imersível em V_m sem usar de analiticidade foi obtida por Nash com o conceito de perturbação ortogonal de uma geometria imersa. Pode-se fazer uma imersão *local* e *isométrica* com a aplicação $\bar{\mathcal{X}}^A : \bar{V}_n \rightarrow V_m$ em que \bar{V}_n é uma superfície inicial, particular, imersa em V_m . A idéia de Nash consiste em deformar \bar{V}_n ao longo das $N = m - n$ dimensões extras de modo à obter qualquer outra variedade imersa.

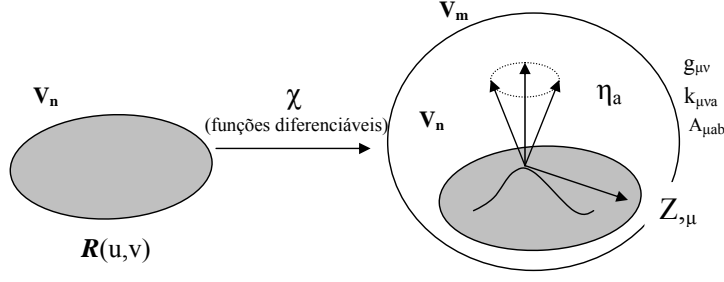


Figura 3: teorema de Nash

A variedade não-perturbada \bar{V}_n é descrita em V_m pelas coordenadas de imersão $\bar{\mathcal{X}}^A$, enquanto a variedade perturbada V_n é descrita em V_m pelas coordenadas de imersão \mathcal{Z}^A . A perturbação ao longo de uma direção η arbitrária pode ser escrita como

$$\mathcal{Z}^A = \bar{\mathcal{X}}^A + (\mathcal{L}_\eta \bar{\mathcal{X}})^A = \bar{\mathcal{X}}^A + [\bar{\mathcal{X}}, \eta]^A,$$

ou

$$\mathcal{Z}^A = \bar{\mathcal{X}}^A + y^a \eta_a^A, \quad (3.28)$$

onde y^a são as coordenadas medida nas dimensões extras. Por outro lado, podemos perturbar os vetores normais como

$$\eta_a^A = \bar{\eta}_a^A + (\mathcal{L}_\eta \bar{\eta})_a^A = \bar{\eta}_a^A + [\bar{\eta}, \eta]_a^A = \bar{\eta}_a^A.$$

Sob a suposição que \mathcal{Z}^A deve definir uma nova geometria riemanniana V_n imersa em V_m , as equações de imersão para \mathcal{Z}^A devem satisfazer equações semelhantes às (3.10), (3.11) e (3.12) de tal forma que

$$\mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu b}, \quad (3.30)$$

$$\eta_a^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g_{ab} = \epsilon_a \delta_{ab}. \quad (3.31)$$

Escrevendo as componentes de um vetor contravariante em V_m , como foi feito em (3.20),

$$\eta_{a,\mu}^A = \alpha_{a\mu}^\nu \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A + \beta_{\mu a}^b \eta_b^A;$$

e como na eq. (3.20), encontramos $\alpha_{a\mu}^\nu$ é $-\bar{k}_{\mu\rho a} \bar{g}^{\rho\nu}$ e $\beta_{\mu a}^b$ é $\bar{A}_{\mu ac} g^{cb}$. Note que esta é uma expressão consistente, já que reproduz as equações para $\bar{k}_{\mu\rho a}$ e $\bar{A}_{\mu ac}$ para \bar{V}_n não-deformado. De fato, para $\bar{k}_{\mu\rho a}$ pode-se fazer uma contração com a métrica \mathcal{G}_{AB} e a coordenada não-deformada $\bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B$

$$\bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} = -\bar{k}_{\mu\rho a} \bar{g}^{\rho\nu} \bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A \mathcal{G}_{AB} + \beta_{\mu a}^b \bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B \eta_b^A \mathcal{G}_{AB},$$

pelos eqs.(3.10) e (3.11). A expressão para $\bar{k}_{\mu\sigma a}$ fica

$$\bar{k}_{\mu\sigma,a} = -\bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} \quad (3.32)$$

que é a 2^a forma fundamental não-deformada ou curvatura extrínseca.

Para $\bar{A}_{\mu ac}$ procederemos de modo análogo. Contraindo com a métrica \mathcal{G}_{AB} e a componente normal η_d^B

$$\eta_{a,\mu}^A = \alpha_{a\mu}^\nu \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A + \beta_{\mu a}^b \eta_b^A$$

$$\eta_d^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} = \alpha_{a\mu}^\nu \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A \eta_c^B \mathcal{G}_{AB} + A_{\mu ac} g^{cb} \eta_b^A \eta_d^B \mathcal{G}_{AB}$$

. Pela equação (3.11),

$$\bar{A}_{\mu ad} = \eta_d^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB},$$

chega-se a expressão para a 3^a forma fundamental não-deformada, mostrando que a variedade não perturbada é um caso particular da variedade perturbada.

Agora vamos encontrar expressões para a métrica e a 2^a e 3^a forma fundamental deformadas. Das equações (3.28), (3.29) e (3.30) segue que

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}.$$

Como em termos dimensionais $m = n + N$, então podemos escrever isso como

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathcal{G}^{AB} \mathcal{G}_{AB} - g^{ab} g_{ab};$$

assim concluímos que

$$g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B = \mathcal{G}^{AB} - g^{ab} \eta_a^A \eta_b^B. \quad (3.33)$$

Usando as equações (3.28) e (3.29), escreve-se a equação (3.30) como

$$\begin{aligned} g_{\mu b} &= \mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = (\bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A + y^a \eta_{a,\mu}^A) \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} \\ &= \underbrace{\bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A \bar{\eta}_b^B \mathcal{G}_{AB}}_{=0} + y^a \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} \\ g_{\mu b} &= y^a \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = y^a A_{\mu ba}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Como $\eta^A = \bar{\eta}^A$, então segue que

$$A_{\mu ba} = \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{\eta}_{a,\mu}^A \bar{\eta}_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{A}_{\mu ba}; \quad (3.35)$$

mostrando que a 3ª forma fundamental não se propaga na deformação.

A partir das equações de imersões da variedade deformada obtemos a métrica $g_{\mu\nu}$ de V_n em termos de quantidades perturbadas. Para tanto, toma-se as equações (3.28) e (3.30),

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = (\bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A + y^a \eta_{a,\mu}^A) (\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B + y^b \eta_{b,\nu}^B) \mathcal{G}_{AB} \\ &= \bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} + y^b \bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} + y^a \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} \\ &\quad + y^a y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} \end{aligned}$$

Usando (3.31) e após uma mudança de índices, a expressão acima fica

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2y^a \bar{k}_{\mu\nu a} + y^a y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}.$$

De acordo com o que fora abordado anteriormente, desenvolve-se o termo $\eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$ da seguinte forma

$$\eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = (A_{\mu ac} g^{cb} \eta_b^A - \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{g}^{\nu\rho} \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A) (A_{\nu bd} g^{de} \eta_e^B - \bar{k}_{\nu\sigma b} \bar{g}^{\alpha\sigma} \bar{\mathcal{X}}_{,\alpha}^B) \mathcal{G}_{AB}$$

$$\begin{aligned}
&= g^{cb}g^{de}A_{\mu ac}A_{\nu bd}\eta_b^A\eta_e^B\mathcal{G}_{AB} - g^{cb}\bar{g}^{\alpha\sigma}A_{\mu ac}\bar{k}_{\nu\sigma b}\bar{\mathcal{X}}_{,\alpha}^B\eta_b^A\mathcal{G}_{AB} \\
&\quad - g^{de}\bar{g}^{\nu\rho}A_{\nu bd}\bar{k}_{\mu\rho a}\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A\eta_e^B\mathcal{G}_{AB} + \bar{g}^{\nu\rho}\bar{g}^{\alpha\sigma}\bar{k}_{\mu\rho a}\bar{k}_{\nu\sigma b}\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A\mathcal{G}_{AB}
\end{aligned}$$

,

e usando as eqs.(3.29), (3.30) e (3.31),

$$\eta_{a,\mu}^A\eta_{b,\nu}^B\mathcal{G}_{AB} = g^{cd}A_{\mu ca}A_{\nu db} + \bar{g}^{\sigma\rho}\bar{k}_{\mu\sigma a}\bar{k}_{\nu\rho b}. \quad (3.36)$$

Dessa forma a expressão para a métrica perturbada é

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2y^a\bar{k}_{\mu\nu a} + y^a y^b(\bar{g}^{\sigma\rho}\bar{k}_{\mu\sigma a}\bar{k}_{\nu\rho b} + g^{cd}A_{\mu ca}A_{\nu db}), \quad (3.37)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ expressa a métrica de V_n não-deformada.

A curvatura extrínseca também pode ser estudada sob o contexto de deformação do espaço imerso. Portanto a curvatura extrínseca perturbada será

$$k_{\mu\nu a} = -\eta_{a,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B\mathcal{G}_{AB},$$

e usando (3.28) temos

$$\begin{aligned}
k_{\mu\nu a} &= -\eta_{a,\mu}^A(\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B + y^b\eta_{b,\nu}^B)\mathcal{G}_{AB} \\
&= -\eta_{a,\mu}^A\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B\mathcal{G}_{AB} - y^b\eta_{a,\mu}^A\eta_{b,\nu}^B\mathcal{G}_{AB} \\
&= \bar{k}_{\mu\nu a} - y^b\eta_{a,\mu}^A\eta_{a,\mu}^A\eta_{b,\nu}^B\mathcal{G}_{AB}
\end{aligned}$$

.

De acordo com o resultado obtido em (3.36) chegamos a

$$k_{\mu\nu a} = \bar{k}_{\mu\nu a} - y^b(g^{cd}A_{\mu ca}A_{\nu db} + \bar{g}^{\sigma\rho}\bar{k}_{\mu\sigma a}\bar{k}_{\nu\rho b}). \quad (3.38)$$

No caso de uma imersão diferenciável, o teorema de Nash diz que a imersão da variedade deformada V_n no espaço-ambiente V_m é garantida se a deformação for contínua e regular no espaço-ambiente. De acordo, as componentes do tensor de Riemman do espaço-ambiente \mathcal{R}_{ABCD} definidas em termos das bases de imersão da geometria perturbada $\{\mathcal{Z}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$ reproduzem as equações de Gauss-Codazzi-Ricci demonstradas na seção anterior [38]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = g^{ab}(k_{a\alpha\gamma}k_{b\sigma\beta} - k_{a\alpha\sigma}k_{b\beta\gamma}) + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\alpha}^A\mathcal{Z}_{,\beta}^B\mathcal{Z}_{,\gamma}^C\mathcal{Z}_{,\sigma}^D \quad (3.39)$$

$$k_{a\alpha\delta;\gamma} - k_{a\alpha\gamma;\delta} = g^{cd}(A_{cd\gamma}k_{c\alpha\delta} - A_{cd\delta}k_{c\alpha\gamma}) + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\alpha}^A\eta_b^B\mathcal{Z}_{,\gamma}^C\mathcal{Z}_{,\delta}^D \quad (3.40)$$

$$A_{ba\gamma;\delta} - A_{ba\delta;\gamma} = g^{cd}(A_{cb\delta}A_{da\gamma} - A_{da\gamma}A_{cb\delta}) + g^{cd}(k_{c\gamma\delta}k_{d\delta\gamma} - k_{c\delta\gamma}k_{d\gamma\delta}) + \mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\mathcal{Z}_{,\gamma}^C\mathcal{Z}_{,\delta}^D. \quad (3.41)$$

Assim, conclui-se que usando os resultados do teorema de Nash, a geometria perturbada deve satisfazer as mesmas equações de Gauss, Codazzi e Ricci para que ela esteja diferenciavelmente imersa no mesmo espaço V_m .

Nas década de 70 e 80, Regge, Teitelboim [39] e Holdom [40,41] além de outros consideraram a noção de um universo imerso em uma variedade de dimensão maior, inspirados pela teoria de cordas no qual os objetos fundamentais são imersos. Em 1977, em um trabalho pioneiro, Regge e Teitelboim consideraram uma teoria de membranas substituindo a geometria de Riemann por uma geometria imersa.

No próximo capítulo, mostraremos que o teorema de Nash-Greene é compatível com os postulados da teoria de branas, a saber: o espaço de imersão é solução das equações de Einstein, os campos de calibre são confinados à brana-mundo 4-dimensional, e a geometria da brana-mundo se propaga perturbativamente no espaço de imersão.

4 *As Branas-Mundo*

Com o conceito de branas-mundo, onde o espaço-tempo físico passa a ser uma variedade imersa, o espaço-ambiente ou *bulk* possui um número arbitrário de dimensões. A assinatura e a topologia do *bulk* também são arbitrários, mostrando que a geometria riemanniana não é a única opção disponível para a física. De certo modo, o conceito de branas-mundo representa uma visão da física do ponto de vista de Kant, conforme mencionado na introdução.

4.1 Teoria de Branas-Mundo

A teoria de cordas surgiu no final da década de 60 com modelo de ressonância dual para explicar o confinamento de quarks. A evolução deste modelo, principalmente com a interpretação dada por Nambu, considerava a corda aberta como objeto fundamental e não os quarks que estariam nas suas extremidades. A dinâmica da corda gera uma superfície bi-dimensional, imersa em um espaço tipo Minkowski D-dimensional, chamado de folha-mundo.

Ao final da década de 80 existiam cinco diferentes teorias de supercordas. Elas eram Tipo I (aberta), tipo IIA, tipo IIB, $E8 \times E8$ heterótica e $SO(32)$ heterótica (as 4 últimas são cordas fechadas), cada uma definida em um espaço de 10 dimensões.

Até a segunda revolução da teoria de cordas em 1995, percebeu-se que o tipo IIA e o tipo IIB estão conectados pela dualidade-T, o que significa que a descrição de um círculo de raio R pela primeira teoria é a mesma que a descrição de um círculo de raio $1/R$ pela segunda. Portanto qualquer espaço descrito no IIA poderia ser visto de forma diferente no IIB, o que significa que as duas teorias são aspectos de uma mesma teoria. A mesma dualidade pode ser vista entre as teorias $SO(32)$ heterótica e $E8 \times E8$ heterótica. A descrição de um círculo de raio R pela $SO(32)$ heterótica é a mesma descrição de um círculo de raio $1/R$ pela $E8 \times E8$ heterótica [42].

Por outro lado, a teoria de cordas tipo I é relacionada a $SO(32)$ pela dualidade-S, o que

significa que a descrição de uma interação fraca da primeira pode também ser vista como uma descrição da interação forte da segunda. Apesar de a dualidade-S ser bem mais sutil que a dualidade-T, percebia-se que havia uma relação entre as duas teorias, e elas deveriam ser diferentes limites de uma mesma teoria.

A descoberta das transformações duais que relacionam a teoria de supercordas e a teoria da supergravidade 11-dimensional levaram a conjectura que todas essas teorias eram limites diferentes de uma teoria só de onze dimensões que foi chamada de teoria-M.

Na teoria M, os objetos básicos são as p-branas (ou p-membranas) que são subvariedades de dimensão p imersas no espaço de onze dimensões. As cordas, por exemplo, são uma 1-brana.

Usando o resultado da teoria-M, em 1998 Arkani-Hamed, G. Dvali e S. Dimopoulos (ADD) [43] propuseram uma teoria multidimensional inspirada em uma possível solução para o problema de hierarquia das interações fundamentais, com base na observação de que:

1- as interações fundamentais pertencentes ao modelo-padrão (teoria de calibre de Yang-Mills) são consistentes em apenas 4 dimensões, isto é, essa teoria não depende de dimensões extras.

2- em termos de energia a gravitação pode ser forte em escala menor que a escala de Planck, desde de que se propague nas dimensões extras.

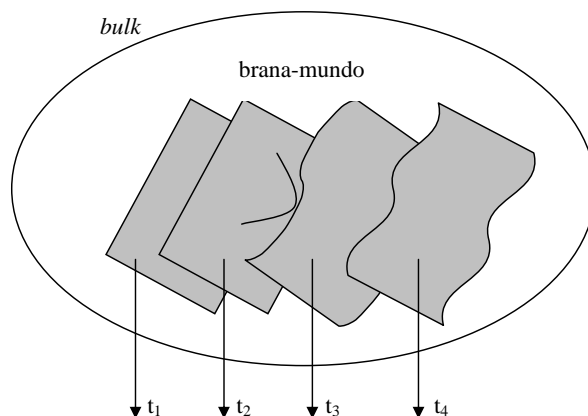


Figura 4: branas-mundo

Da teoria M a proposta da ADD tomou emprestado a idéia de p-branas imersa no espaço-ambiente, ou *bulk*. Mas diferentemente da teoria-M, a geometria do *bulk* é definida pela equação de Einstein. Assim, uma 3-brana movimenta-se no *bulk* gerando uma brana-mundo, generalizando uma folha-mundo, a qual está também imersa no mesmo *bulk*. Assim, a brana-mundo faz o papel do espaço-tempo. Trata-se de um objeto dinâmico que resulta do movimento da

3-brana, determinado pela teoria de Einstein com o número de dimensões maior que 4.

Podemos resumir os postulados da teoria de branas-mundo em:

- 1- ação de Einstein-Hilbert para o espaço-ambiente ou *bulk*.
- 2- confinamento dos campo de calibre na brana-mundo (inclusive a matéria).
- 3- a gravitação descrita por $g_{\mu\nu}$ se propaga no espaço-ambiente.

Para finalizar, a energia de propagação da gravitação nas dimensões extras é a mesma da teoria de calibre, que está dentro da escala TeV.

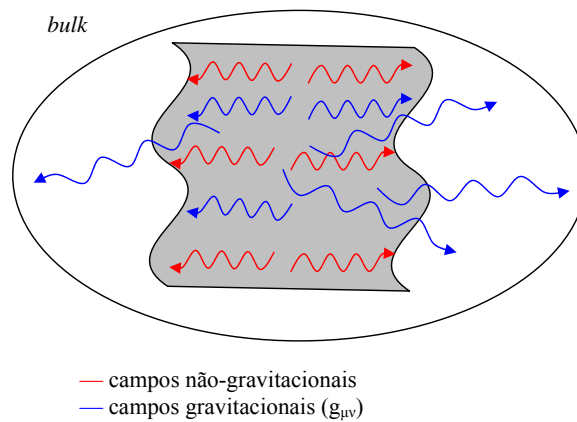


Figura 5: postulado de branas

Ainda que a proposta da ADD contenha os fundamentos da teoria de branas-mundo, a maior divulgação da teoria veio de 2 modelos de 5 dimensões conhecidos como modelo Randall-Sundrum e modelo Dvali-Gabadalze-Porrati. Estes modelos diferem profundamente entre si e da proposta original do ADD, inclusive com adoção de postulados adicionais. Por exemplo, no modelo Randall-Sundrum o universo físico é uma 3-brana fixa imersa na solução de Anti de Sitter de 5 dimensões AdS_5 , onde se aplica a condição de Israel-Lanczos como uma condição de contorno [44]. No modelo da Dvali-Gabadadze-Porrati [45] a brana-mundo é fixa e o espaço-ambiente é plano.

Apesar de todas as tentativas para se construir um espaço-tempo cuja geometria seja determinada pelas interações fundamentais um detalhe nem sempre é considerado. As escalas de interações fundamentais conhecidas podem ser separadas em dois blocos: a escala das energias fracas fortes e eletromagnéticas que é $\sim 10^3 GeV$, ou $1TeV$ e a escala gravitacional de $\sim 10^{18} GeV$, ou $10^{15} TeV$. Como se percebe, existe um vazio entre a gravitacional e as demais. A falta de explicação deste fato é o chamado problema da hierarquia.

A idéia da ADD parte do pressuposto de que não há uma comprovação experimental de que a gravidade seja um fator relevante apenas à $10^{15}TeV$, como proposto pelas teorias de campos e de supercordas. Ou seja, o problema da hierarquia pode não existir de fato, sendo consequência de uma conjectura e a teoria ADD é a realização dessa proposta.

4.2 As equações de movimento das branas

Deduziremos aqui as equações de movimento da brana-mundo, mostrando que são mais ricas que as equações de Einstein em 4 dimensões. Para começar, toma-se as componentes do tensor de Riemman do espaço ambiente \mathcal{R}_{ABCD} definidas em termos das bases de imersão da geometria perturbada $\{\mathcal{Z}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$ onde tais componentes são as equações de Gauss, Codazzi e Ricci respectivamente [37]. Denotando as expressões abaixo,

$$K^2 = g^{ab} k_a^{\mu\nu} k_{\mu\nu b}, \quad (4.1)$$

$$H_a = g^{\mu\nu} k_{\mu\nu a}, \quad (4.2)$$

$$H^2 = g^{ab} H_a H_b \quad (4.3)$$

que representam a curvatura de Gauss e a curvatura média respectivamente, toma-se então a equação de Gauss (3.39), contraindo-a com a métrica $g^{\rho\sigma}$

$$\begin{aligned} g^{\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\mu\nu} \\ &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu c} g^{\rho\sigma} k_{\rho\sigma d}) + g^{\rho\sigma} \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{Z}_{,\rho}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D \\ &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu c} H_d) + \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B (g^{\rho\sigma} \mathcal{Z}_{,\rho}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituindo a equação do capítulo anterior $g^{\rho\sigma} \mathcal{Z}_{,\rho}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D = \mathcal{G}^{CD} - g^{ab} \eta_a^C \eta_b^D$ na equação (4.4), temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d} H_c) + \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B (\mathcal{G}^{CD} - g^{ab} \eta_a^C \eta_b^D) \\ &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d} H_c) + \mathcal{G}^{CD} \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \end{aligned}$$

$$-g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B\eta_a^C\eta_b^D;$$

que resulta em

$$R_{\mu\nu} = g^{cd}(g^{\rho\sigma}k_{\mu\rho c}k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d}H_c) + \mathcal{R}_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B - g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\mathcal{Z}_{,\nu}^C\mathcal{Z}_{,\mu}^B\eta_b^D.$$

Contraindo uma segunda vez com uma métrica $g^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}g^{cd}g^{\rho\sigma}k_{\mu\rho c}k_{\nu\sigma d} - g^{\mu\nu}k_{\mu\nu d}g^{cd}H_c + g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B \\ &\quad - g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A(g^{\mu\nu}\mathcal{Z}_{,\nu}^C\mathcal{Z}_{,\mu}^B)\eta_b^D \end{aligned}$$

e utilizando as curvaturas dadas pelas equações (4.1), (4.2) e (4.3), encontramos

$$\begin{aligned} R &= g^{cd}k_c^{\nu\sigma}k_{\nu\sigma d} - g^{cd}H_cH_d + \mathcal{R}_{AB}(\mathcal{G}^{AB} - g^{ab}\eta_a^A\eta_b^B) - g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^D(\mathcal{G}^{BC} - g^{cd}\eta_c^B\eta_d^C) \\ &= (K^2 - H^2) + \mathcal{R}_{AB}\mathcal{G}^{AB} - g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B - g^{ab}\mathcal{G}^{BC}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^D \\ &\quad + g^{ab}g^{cd}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D \end{aligned}$$

Portanto, obtém-se uma expressão para R em termos da geometria da brana

$$R = (K^2 - H^2) + \mathcal{R} - 2g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B + g^{ad}g^{bc}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D. \quad (4.5)$$

Agora, impondo o 1º postulado que afirma que a geometria do espaço-ambiente é uma solução das equações de Einstein da teoria das branas, decorre do princípio de *Einstein-Hilbert* que

$$\mathcal{A}_{bulk} = \int \mathcal{R}\sqrt{-\mathcal{G}} d^D V; \quad (4.6)$$

substituindo a expressão de R acima e igualando à uma ação da fonte, obtemos

$$\int \mathcal{R}\sqrt{-\mathcal{G}} d^D V = \int (R - (K^2 - H^2))\sqrt{-\mathcal{G}} d^D V + \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \int \left(2g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B - g^{ad}g^{bc}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D \right) \sqrt{-\mathcal{G}} d^D V \\ & = \alpha_* \int \mathcal{L}^* \sqrt{-\mathcal{G}} d^D V, \end{aligned}$$

onde α_* é um parâmetro associado com a energia de escala do espaço-ambiente e \mathcal{L}^* é a lagrangiana da fonte confinada na brana que podem incluir as interações de calibre e a matéria comum. Tomando a variação da ação Einstein-Hilbert no lado esquerdo de (4.5),

$$\frac{\delta A}{\delta \mathcal{G}_{AB}} = 0,$$

chega-se as equações de Einstein para o espaço-ambiente,

$$\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathcal{G}_{AB} = \alpha_* T_{AB}^*, \quad (4.8)$$

onde T_{AB}^* é o tensor energia-momento da fonte. Pode-se obter as equações de movimento da brana-mundo de modo mais simples, escrevendo as componentes do tensor energia-momento nas bases de imersão da geometria perturbada $\{\mathcal{Z}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$, que são

$$T_{\mu\nu}^* = T_{AB}^* \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B$$

$$T_{\mu b}^* = T_{AB}^* \mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_b^B$$

$$T_{ab}^* = T_{AB}^* \eta_a^A \eta_b^B.$$

Como pelo 3º postulado a gravitação está confinada à brana [38, 46–49], somente a componente $T_{\mu\nu}^*$ é não-nula, e para recuperar a constante gravitacional 4-dimensional escrevemos

$$\alpha_* T_{\mu\nu}^* = 8\pi G T_{\mu\nu}(x, y), \quad (4.9)$$

$$\alpha_* T_{\mu b}^* = 0, \quad (4.10)$$

$$\alpha_* T_{ab}^* = 0. \quad (4.11)$$

Portanto de (4.9) obtemos as componentes tangentes à brana-mundo

$$\left(\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathcal{G}_{AB}\right)\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B = \alpha_*T_{AB}^*\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B = \alpha_*T_{\mu\nu}^*,$$

obtém-se a primeira equação de movimento das branas que é equivalente a equação para $g_{\mu\nu}$.

Multiplicando (4.5) por $-1/2$ e contraindo-a com a métrica $g_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}(K^2 - H^2)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} - g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu} + \\ &\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{ad}g^{bc}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D; \end{aligned}$$

e então somando-a com a eq.(4.5), resulta em

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= g^{cd}(g^{\rho\sigma}k_{\mu\rho c}k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d}H_c) + \mathcal{R}_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B + \\ &\quad -g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\mathcal{Z}_{,\nu}^C\mathcal{Z}_{,\mu}^B\eta_b^D - \frac{1}{2}(K^2 - H^2)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} + \\ &\quad +g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{ad}g^{bc}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Definindo os elementos

$$Q_{\mu\nu} = g^{cd}(g^{\rho\sigma}k_{\mu\rho c}k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d}H_c) - \frac{1}{2}(K^2 - H^2)g_{\mu\nu} \tag{4.13}$$

$$W_{\mu\nu} = g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\mathcal{Z}_{,\nu}^C\mathcal{Z}_{,\mu}^B\eta_b^D \tag{4.14}$$

$$W = g^{ad}g^{bc}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D, \tag{4.15}$$

reescreve-se a equação (4.12) como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} - W_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Wg_{\mu\nu} + \mathcal{R}_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} + g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu}.$$

Substituindo $g_{\mu\nu} = \mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B\mathcal{G}_{AB}$ e usando (4.5) obtemos ainda

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} + (\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathcal{G}_{AB})\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B + g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu} - (W_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Wg_{\mu\nu}).$$

Portanto (4.8) é equivalente a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} - g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu} + (W_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Wg_{\mu\nu}) = \alpha_* T_{\mu\nu}^*, \quad (4.16)$$

que é chamada de equação *Gravi-tensor* (gravitacional-tensorial).

Uma segunda equação relacionada a métrica $g^{\mu a}$ pode ser encontrada contraindo-se a equação de Codazzi (3.40) com $g^{\nu\rho}$,

$$g^{\nu\rho}\mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B\mathcal{Z}_{,\nu}^C\mathcal{Z}_{,\rho}^D = g^{\nu\rho}k_{\mu\nu a;\rho} - g^{\nu\rho}k_{\mu\rho a;\nu} - g^{\nu\rho}g^{cd}A_{\rho ca}k_{\mu\nu d} + g^{\nu\rho}g^{cd}A_{\nu ca}k_{\rho\mu d} \quad (4.17)$$

e novamente utilizando $g^{\rho\sigma}\mathcal{Z}_{,\rho}^C\mathcal{Z}_{,\sigma}^D = \mathcal{G}^{CD} - g^{ab}\eta_a^C\eta_b^D$, temos

$$\mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\left(\mathcal{G}^{CD} - g^{cd}\eta_c^C\eta_d^D\right)\eta_a^B = \mathcal{R}_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B - g^{cd}\mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B\eta_c^C\eta_d^D.$$

Assim substituindo a expressão acima em (4.17), encontra-se

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B &= g^{cd}\mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B\eta_c^C\eta_d^D + g^{\nu\rho}k_{\mu\nu a;\rho} + \\ &\quad - g^{\nu\rho}k_{\mu\rho a;\nu} - g^{\nu\rho}g^{cd}A_{\rho ca}k_{\mu\nu d} + g^{\nu\rho}g^{cd}A_{\nu ca}k_{\rho\mu d} \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde identifica-se

$$g^{cd}\mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B\eta_c^C\eta_d^D = W_{\mu a}.$$

Para dar continuidade ao cálculo é preciso notar que a contração da equação de Einstein para o espaço-ambiente com $\{\mathcal{Z}_{,\mu}^A, \eta_a^B\}$ juntamente com o confinamento leva à equação

$$\left(\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathcal{G}_{AB}\right)\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B = \alpha_* T_{AB}^*\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B = 0,$$

ou seja

$$\mathcal{R}_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B = \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathcal{G}_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B = \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu a}.$$

Desse modo, substituindo a expressão acima na eq. (4.17) e usando (4.15) e (4.2), resulta em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu a} &= W_{\mu a} + k_{\mu}{}^{\rho}{}_{a;\rho} - H_{a;\mu} - g^{\nu\rho}A_{\rho ca}k_{\mu\nu}^c + g^{\nu\rho}A_{\nu ca}k_{\rho\mu}^c \\ &= k_{\mu}{}^{\rho}{}_{a;\rho} - H_{a;\mu} - A_{\mu ca}H^c + A_{\rho ca}k_{\mu}{}^{\rho}{}_{c} + W_{\mu a}. \end{aligned}$$

Substituindo as equações (4.5), chega-se a

$$\frac{1}{2}\left[R - (K^2 - H^2) - W\right]g_{\mu a} - W_{\mu a} + g^{cd}\mathcal{R}_{CD}\eta_c^C\eta_d^D g_{\mu a} = k_{\mu}{}^{\rho}{}_{a;\rho} - H_{a;\mu} + A_{\rho ca}k_{\mu}{}^{\rho}{}_{c} + A_{\mu ca}H^c,$$

que é a equação *Gravi-vetor*(gravitacional-vetorial)

$$\begin{aligned} k_{\mu}{}^{\rho}{}_{a;\rho} - H_{a;\mu} + A_{\rho ca}k_{\mu}{}^{\rho}{}_{c} + A_{\mu ca}H^c - \frac{1}{2}\left[R - (K^2 - H^2)\right]g_{\mu a} \\ + \left(W_{\mu a} - \frac{1}{2}Wg_{\mu a}\right) - g^{cd}\mathcal{R}_{CD}\eta_c^C\eta_d^D g_{\mu a} = \alpha_*T_{\mu a}^* = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A terceira e última equação de movimento das branas é obtida de \mathcal{R} a partir das definições (4.5) e (4.15), isto é,

$$R - (K^2 - H^2) + W = \mathcal{R} - 2g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B \quad (4.20)$$

usando (4.8) e contraindo-a com $g^{ab}\eta_a^A\eta_b^B$ e das propriedades de imersão e confinamento obtemos

$$\begin{aligned} g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B &= \frac{1}{2}\mathcal{R}\left(\mathcal{G}_{AB}g^{ab}\eta_a^A\eta_b^B\right) + \alpha_*g^{ab}T_{AB}^*\eta_a^A\eta_b^B \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{R}g^{ab}g_{ab} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{R}(m - 4) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado anterior na eq.(4.20), obtém-se a equação *Gravi-escalar*(gravitacional-escalar)

$$R - (K^2 - H^2) + \mathcal{R}(m - 5) + W = 0 \quad (4.21)$$

que completa o conjunto das equações covariantes de movimento para a *brana-mundo*.

Em resumo, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} - g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu} + (W_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Wg_{\mu\nu}) = 8\pi GT_{\mu\nu}, \\ k_{\mu}{}^{\rho}{}_{a;\rho} - H_{a;\mu} + A_{\rho ca}k^{\rho}{}_{\mu}{}^c - A_{\mu ca}H^c - \frac{1}{2}[R - (K^2 - H^2)]g_{\mu a} + \\ \quad + (W_{\mu a} - \frac{1}{2}Wg_{\mu a}) - g^{cd}\mathcal{R}_{CD}\eta_c^C\eta_d^D g_{\mu a} = 0, \\ R - (K^2 - H^2) + \mathcal{R}(m - 5) + W = 0. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

De fato estas representam equações muito mais complexas que as equações de Einstein, as quais compõem apenas uma parte da equação *gravi-tensor*. A razão disso é que além da métrica, na teoria de branas-mundo surgem duas variáveis dinâmicas adicionais que são $k_{\mu\nu a}$ e $A_{\mu ab}$. Note que se eliminarmos a imersão e os objetos extrínsecos recuperamos a teoria de Einstein em 4 dimensões. De modo geral $k_{\mu\nu a}$ e $A_{\mu ab}$ complementam a descrição da forma local da brana segundo a visão kantiana descrita no capítulo 2, ou seja, $k_{\mu\nu a}$ e $A_{\mu ab}$ completam as informações necessárias para saber como e em que direção a *brana-mundo* está se afastando do plano tangente, da mesma forma que K e H de uma superfície bi-dimensional completam a informação sobre a forma local da superfície.

No caso de hipersuperfícies onde $N = 1$ (apenas uma dimensão extra), denota-se $k_{\mu\nu 1} = k_{\mu\nu}$ e $A_{\mu ab} = A_{\mu 11} = 0$ por (3.18). Assim, as equações de Gauss (3.39), e Codazzi (3.40) do capítulo anterior são reduzidas para

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = (k_{\alpha\gamma}k_{\sigma\beta} - k_{\alpha\sigma}k_{\beta\gamma}) + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\alpha}^A\mathcal{Z}_{,\beta}^B\mathcal{Z}_{,\gamma}^C\mathcal{Z}_{,\sigma}^D,$$

$$k_{\alpha\beta;\gamma} - k_{\alpha\gamma;\beta} + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\alpha}^A\eta^B\mathcal{Z}_{,\beta}^C\mathcal{Z}_{,\gamma}^D = 0,$$

e a equação de Ricci torna-se uma identidade. Desta forma é possível uma interpretação física de $k_{\mu\nu}$ usando um exemplo de brana em 5 dimensões. Isto tem sido feito nos modelos de Randall-Sundrum pelo uso da condição de Israel, que prevalece apenas em situações muito especiais, onde o espaço físico é identificado como uma D-brana fixa ou seja, uma região de contorno. As

condições impostas para tal configuração impedem o desenvolvimento perturbativo da *brana-mundo*.

Por outro lado, se $N > 1$, além de $k_{\mu\nu a}$ obtém-se também $A_{\mu ab}$ que não aparece nos modelos de 5 dimensões pois neste caso teria apenas $A_{\mu 55}$ que por (3.19) é identicamente nulo.

Segue-se aqui o fato de que $A_{\mu ab}$ não se propaga. Assim, $A_{\mu ab}$ se qualifica como um campo de calibre relativo ao grupo de rotação das dimensões extras, o $SO(m - n)$ [41].

4.3 Origem da Simetria e dos Campos de Calibre na Teoria de Branas-Mundo

Conforme vimos, as branas-mundo com número de dimensões extras N maior que 1 apresenta duas novidades: primeiro é a existência de um grupo de simetrias $SO(m - n)$ para os vetores normais unitários η_A , tais que $\mathcal{G}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B = \eta_{ab}$ onde η_{ab} é a métrica de Minkowski do espaço orto-complementar à brana-mundo. A outra novidade é o surgimento da 3ª forma fundamental com componentes $A_{\mu ab}$. A primeira observação de que esta forma fundamental transforma-se como um campo de calibre confinado à brana sob a ação do grupo $SO(m - n)$ foi feita por Holdom [41]. Repetimos aqui a dedução.

Considere uma transformação infinitesimal apenas das coordenadas nas dimensões extras descrita por

$$y'^a = y^a + \xi^a,$$

onde da teoria dos grupos de Lie de parâmetros θ localmente definidos obtemos

$$\xi^a = \theta_a^b(x^\mu)y^a.$$

A solução geral dessa equação é dada pela equação de Killing

$$\xi^{a;b} + \xi^{b;a} = 0.$$

A transformação da componente transversal da métrica fica

$$g_{\mu a}(y') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial y^b}{\partial y'^a} g_{\nu b}(y).$$

Como estamos mantendo as coordenadas x^μ das branas fixas, segue que

$$g'_{\mu a} = \left(\delta_\mu^\nu - \underbrace{\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu}}_{=0} \right) \left(\delta_a^b - \frac{\partial \xi^b}{\partial y^a} \right) g_{\nu b}$$

Por (3.34), a transformação de $A_{\mu ab}$ é dado por,

$$A_{\mu ab} = \frac{\partial g_{\mu a}}{\partial y^b}$$

$$A'_{\mu ab} = \frac{\partial g'_{\mu a}}{\partial y'^b} = (\delta_a^c - \xi_a^c) \frac{\partial}{\partial y^c} \left[\delta_\mu^\nu (\delta_a^b - \xi_{,a}^b) g_{\nu b} \right].$$

Sabendo que $\xi_{,a}^b = \theta_a^b(x^\mu)$ e utilizando (3.34) obtemos

$$A'_{\mu ab} = A_{\mu ab} - \theta_a^c A_{\mu cb} - \theta_c^b A_{\mu ba} + \theta_{c,b}^a g_{\mu b},$$

que é a expressão geral de transformação de um potencial de calibre não-abeliano, onde o grupo de calibre é o grupo de isometrias das dimensões extras [50].

Além disso, conforme mostrado na expressão (3.35), esta componente não se propaga no espaço-ambiente. Ou seja, independente da perturbação da brana-mundo, $A_{\mu ab}$ permanece confinado, exatamente como postulado por ADD e, portanto, consistente com a solução proposta para o problema da hierarquia.

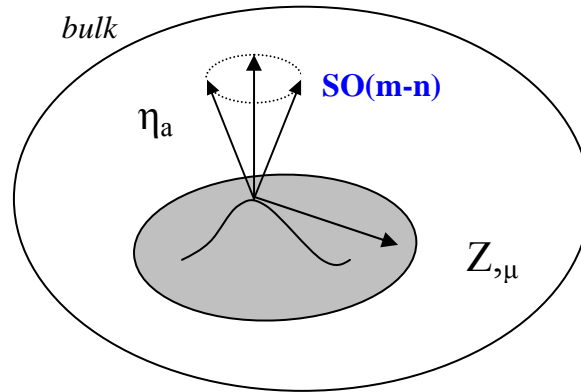


Figura 6: conjectura de Ne'eman

Portanto obtemos um resultado interessante: confirmamos a conjectura de Ne'eman de que as simetrias internas do tipo $SO(m-n)$ podem ser oriundas da imersão, também identificamos

a conexão correspondente à esta simetria como uma das formas fundamentais da imersão. Ela existe como consequência da imersão quando tratada de forma correta, pela equação de Gauss, Codazzi e Ricci. Entretanto, a sua existência apenas ocorre para branas-mundo de número de dimensões extras maior que 1 ($N > 1$).

Como já foi dito, pelo teorema de Nash-Greene o número de dimensões necessárias para uma imersão local, isométrica e de funções diferenciáveis em um espaço-ambiente plano para uma variedade imersa V_n , é $m = n(n+3)/2$ e para $n = 4$ onde $m = 4 + N$, $N = 10$, ou seja, pode-se obter um grupo de calibre até o $SO(10)$ que é o modelo mais geral atualmente considerado nas teorias GUT. Isto o torna compatível com a teoria de branas-mundo com espaço-ambiente de $m = 14$ dimensões.

Para muitos, especialmente aqueles que se fundamentam na supergravidade ou na teoria-M, o número máximo de dimensões do espaço-total deveria ser $m = 11$. Entretanto, observamos que aqui e no esquema geral de branas-mundo não há nenhum apelo à supersimetria.

Evidentemente $m = 14$ é uma situação extrema. Soluções particulares são mais simples, como por exemplo a imersão de Schwarzschild, que pode ser resolvida com apenas 6 dimensões. A sua imersão não é possível em 5 dimensões [51]. Entretanto, convém salientar que a solução de Schwarzschild é esfericamente simétrica e estática, o que pode produzir uma conexão de calibre muito simples. Mesmo assim ela fornece um exercício de aplicação do método.

Estamos falando de imersões locais, isto é definidas nas vizinhanças de um ponto. Para a inclusão de propriedades topológicas, tais como a completicidade geodésica, não podemos usar apenas os conceitos de imersão local. Por exemplo, o espaço de imersão local da variedade de Schwarzschild é $M_6(4, 2)$ e o espaço de imersão de sua extensão geodesicamente completa é $M_6(5, 1)$ (Kruskal) [52, 53]. Entretanto, como Schwarzschild é um subconjunto de Kruskal, percebe-se que mesmo localmente é possível obter a imersão de Schwarzschild como $M_6(5, 1)$. Neste caso, temos o espaço-ambiente (*bulk*) com 6 dimensões e 2 dimensões extras espaciais, o que conseqüentemente leva $A_{\mu ab}$ ao grupo de calibre de $SO(2)$.

A seguir mostraremos os detalhes do campo $A_{\mu ab}$ para a imersão de Schwarzschild em $M_6(5, 1)$.

5 Exemplos de Simetrias Internas em Branas-Mundo

Dada a métrica $g_{\mu\nu}$ da geometria imersa pode-se resolver as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para se obter a curvatura extrínseca $k_{\mu\nu a}$ e a conexão $A_{\mu ab}$; mas isto é um problema de difícil solução pois como já foi dito essas equações são fortemente não-lineares. Assim, apelando para um dispositivo mais simples que foi amplamente usado por Rosen [2], podemos determinar as variáveis de imersão \mathcal{X}^A , suas derivadas e depois as normais η^A . Com isto, obtém-se $A_{\mu ab} = \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B G_{AB}$. Neste capítulo, calcularemos a conexão para o caso de Schwarzschild [52, 53] em $M_6(5, 1)$.

Pelo que foi visto até agora, sabe-se que uma variedade riemanniana de dimensão n pode ser imersa localmente num espaço-ambiente de m dimensões ($m = n(n+3)/2$). Para o caso da teoria da relatividade de Einstein, o espaço imerso riemanniano é o caso $n = 4$, o que dá pelo teorema de Nash-Green $m = 14$, ou seja, a geometria 4-dimensional com elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (5.1)$$

pode ser imersa num espaço V_m de m coordenadas \mathcal{X}^A onde os possíveis valores para m são $m = 4, \dots, 14$.

Uma brana-mundo representa um espaço-tempo imerso localmente no espaço-ambiente, o *bulk*, que é solução das equações de Einstein. Agora, impondo o 1º postulado da teoria de branas visto no capítulo anterior, que afirma que a geometria do espaço-ambiente é uma solução das equações de Einstein, procura-se os valores de m que fornecem resultados expressivos. O caso $m = 4$ é trivial, permitindo a imersão apenas do espaço-tempo de Minkowski. O caso $m = 5$ é impossível, pois um espaço-tempo vazio não pode ser imerso num espaço-ambiente 5-dimensional, como foi mostrado por Kasner entre outros [51].

O caso $m = 6$ será resolvido aqui, para o caso de Schwarzschild.

5.1 O caso de Schwarzschild

Considere um espaço-tempo contínuo V_4 (imerso num espaço-ambiente V_6) de forma quadrática

$$ds^2 = -\beta dt^2 + \beta^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.2)$$

onde

$$\beta = \frac{2m}{r} - 1, \quad (5.3)$$

com $r > 2m$, m sendo a massa, r, θ, ϕ as coordenadas polares e t o tempo. O espaço V_4 será imerso em V_6 definindo-se as coordenadas de imersão baseadas na extensão de Kruskal [52, 53] para Schwarzschild,

$$\mathcal{X}^1 = \sqrt{\frac{2m}{r} - 1} \cosh t,$$

$$\mathcal{X}^2 = \sqrt{\frac{2m}{r} - 1} \sinh t,$$

$$\mathcal{X}^3 = f(r), \quad (5.4)$$

$$\mathcal{X}^4 = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$\mathcal{X}^5 = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$\mathcal{X}^6 = r \cos \theta,$$

onde $f(r)$ é tal que

$$\left(\frac{df(r)}{dr}\right)^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) - \left(\frac{m^2}{\left(\frac{2m}{r} - 1\right)r^4} - 1\right). \quad (5.5)$$

Calculando as diferenciais $d\mathcal{X}^A$ e escrevendo

$$ds^2 = -(d\mathcal{X}^1)^2 + (d\mathcal{X}^2)^2 + (d\mathcal{X}^3)^2 + (d\mathcal{X}^4)^2 + (d\mathcal{X}^5)^2 + (d\mathcal{X}^6)^2 \quad (5.6)$$

obtemos a mesma forma quadrática (5.2)

$$ds^2 = \beta^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 - \beta dt^2$$

Como foi visto no capítulo 3, as coordenadas \mathcal{X}^A devem definir uma nova geometria riemanniana de dimensão V_n , desde que elas satisfaçam as equação de imersão (3.10), (3.11) e (3.12), ou seja

$$\mathcal{X}_{,\mu}^A \mathcal{X}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu\nu} \quad (5.7)$$

Como \mathcal{G}_{AB} é uma matriz diagonal, podemos escrever (5.7) separadamente para $\mu, \nu = r(= \mathcal{X}^1)$, $\mu, \nu = \theta(= \mathcal{X}^2)$, $\mu, \nu = \phi(= \mathcal{X}^3)$ e $\mu, \nu = t(= \mathcal{X}^4)$. Para r ,

$$\mathcal{X}_{,1}^A \mathcal{X}_{,1}^B \mathcal{G}_{AB} = \beta^{-1} = \frac{1}{\frac{2m}{r} - 1} = g_{11};$$

para θ ,

$$\mathcal{X}_{,2}^A \mathcal{X}_{,2}^B \mathcal{G}_{AB} = r^2 = g_{22};$$

para ϕ ,

$$\mathcal{X}_{,3}^A \mathcal{X}_{,3}^B \mathcal{G}_{AB} = r^2 \sin^2 \theta = g_{33};$$

e para t ,

$$\mathcal{X}_{,4}^A \mathcal{X}_{,4}^B \mathcal{G}_{AB} = \beta = \frac{2m}{r} - 1 = g_{44}.$$

Agora, como foi visto no capítulo 3, deve-se escolher um sistema particular de vetores mutuamente ortogonais e, normais a V_4 , de componentes η_a^A onde,

$$\mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,a}^A \eta_b^B = 0$$

e

$$\mathcal{G}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B = g_{ab}.$$

Então essas componentes satisfazem a equação de ortogonalidade na imersão. Um método para construir esses vetores η_a^A , consiste em determinar duas superfícies do V_4 distintas e que se interseccionam. Por exemplo, uma primeira superfície S_1 é dada pela função

$$f(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3, \mathcal{X}^4, \mathcal{X}^5, \mathcal{X}^6) = cte.,$$

onde usando (5.4), escolhemos

$$f = [1 + (\mathcal{X}^2)^2 - (\mathcal{X}^1)^2]^2 [(\mathcal{X}^4)^2 + (\mathcal{X}^5)^2 + (\mathcal{X}^6)^2] = 4m^2. \quad (5.8)$$

Esta superfície está no plano $\mathcal{X}^3 = 0$ e contém os pontos de V_4 que independem do valor de r .

Uma segunda superfície S_2 é dada pela função

$$g(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3, \mathcal{X}^4, \mathcal{X}^5, \mathcal{X}^6) = cte.,$$

onde usando (5.4), escolhemos

$$g = \mathcal{X}^3 - F(r) = \mathcal{X}^3 - F(\sqrt{(\mathcal{X}^4)^2 + (\mathcal{X}^5)^2 + (\mathcal{X}^6)^2}). \quad (5.9)$$

Esta superfície está na intersecção dos planos $\mathcal{X}^1 = 0, \mathcal{X}^2 = 0$. O vetor normal V_5^A à superfície S_1 é,

$$V_5^A = \mathcal{G}^{AB} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{X}^B} = \begin{bmatrix} 8mr\sqrt{\frac{2m}{r} - 1} \cosh t \\ 8mr\sqrt{\frac{2m}{r} - 1} \sinh t \\ 0 \\ \frac{8m^2 \sin \theta \sin \phi}{r} \\ \frac{8m^2 \sin \theta \cos \phi}{r} \\ \frac{8m^2 \cos \theta}{r} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

O mesmo raciocínio é utilizado para o vetor normal V_6^A à superfície S_2 ,

$$V_6^A = \mathcal{G}^{AB} \frac{\partial g}{\partial \mathcal{X}^B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{\frac{r}{2m} - 1 - \left(\frac{m^2}{\left(\frac{2m}{r} - 1\right)r^4} - 1\right) \sin \theta \sin \phi} \\ -\sqrt{\frac{r}{2m} - 1 - \left(\frac{m^2}{\left(\frac{2m}{r} - 1\right)r^4} - 1\right) \sin \theta \cos \phi} \\ -\sqrt{\frac{r}{2m} - 1 - \left(\frac{m^2}{\left(\frac{2m}{r} - 1\right)r^4} - 1\right) \cos \theta} \end{bmatrix}; \quad (5.11)$$

mas estes vetores não são ortogonais entre si, pois

$$\langle V_5, V_6 \rangle = V_5^A V_6^B \mathcal{G}_{AB} \neq 0.$$

Assim, definimos dois outros vetores com combinações daqueles pelo sistema

$$\begin{cases} W_5 = V_5 \\ W_6 = V_5 + aV_6 \end{cases} \quad (5.12)$$

onde a deve ser tal que

$$\langle W_5, W_6 \rangle = W_5^A W_6^B \mathcal{G}_{AB} = 0. \quad (5.13)$$

assim, obtemos

$$a = \frac{-1}{\langle V_5, V_6 \rangle}.$$

Portanto, os vetores unitários mutuamente ortogonais η_5^A e η_6^A são dados por,

$$\eta_5^A = \frac{W_5^A}{\|W_5^A\|} = \begin{bmatrix} \frac{mr\sqrt{\frac{2m}{r}-1} \cosh t}{\sqrt{\frac{2m^3r^3-m^2r^4+m^4}{r^2}}} \\ \frac{mr\sqrt{\frac{2m}{r}-1} \sinh t}{\sqrt{\frac{2m^3r^3-m^2r^4+m^4}{r^2}}} \\ 0 \\ \frac{m^2 \sin \theta \sin \phi}{r\sqrt{\frac{2m^3r^3-m^2r^4+m^4}{r^2}}} \\ \frac{m^2 \sin \theta \cos \phi}{r\sqrt{\frac{2m^3r^3-m^2r^4+m^4}{r^2}}} \\ \frac{m^2 \cos \theta}{r\sqrt{\frac{2m^3r^3-m^2r^4+m^4}{r^2}}} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\eta_6^A = \frac{W_6^A}{\|W_6^A\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(2m-r)r^3}{r^4-m^2+4m^2r^2-4mr^3} \\ \frac{-(2m-r)r^3 \sqrt{\frac{-4m^2r^2+6mr^3-2r^4+m^2}{r^3(-2m+r)}} \sin \theta \sin \phi}{r^4-m^2+4m^2r^2-4mr^3} \\ \frac{-(2m-r)r^3 \sqrt{\frac{-4m^2r^2+6mr^3-2r^4+m^2}{r^3(-2m+r)}} \sin \theta \sin \phi}{r^4-m^2+4m^2r^2-4mr^3} \\ \frac{-(2m-r)r^3 \sqrt{\frac{-4m^2r^2+6mr^3-2r^4+m^2}{r^3(-2m+r)}} \cos \theta}{r^4-m^2+4m^2r^2-4mr^3} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Por construção, esses vetores satisfazem a condição de ortogonalidade das branas

$$\mathcal{X}_{,\alpha}^A \eta_a^B \mathcal{G}_{AB} = 0. \quad (5.16)$$

No nosso exemplo temos

$$\mathcal{X}_{,1}^A \eta_5^B \mathcal{G}_{AB} = 0,$$

$$\mathcal{X}_{,2}^A \eta_5^B \mathcal{G}_{AB} = 0,$$

$$\mathcal{X}_{,3}^A \eta_5^B \mathcal{G}_{AB} = 0,$$

$$\mathcal{X}_{,4}^A \eta_5^B \mathcal{G}_{AB} = 0.$$

Os mesmos valores são encontrados substituindo η_5^B por η_6^B , como é esperado. As componentes da 3ª forma fundamental são dadas por

$$A_{\mu ab} = \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB}, \quad (5.17)$$

onde obtemos as componentes

$$A_{156} = \frac{-(2m-r)r^4 \sqrt{\frac{4m^2r^2 - 6r^3m + 2r^4 - m^2}{(2m-r)r^3}} (3m-2r)m^2}{(4m^2r^2 + r^4 - 4r^3m - m^2)(2r^3m - r^4 + m^2) \sqrt{\frac{m^2(2r^3m - r^4 + m^2)}{r^2}}}$$

$$A_{256} = 0$$

$$A_{356} = 0$$

$$A_{456} = 0.$$

Como o espaço imerso V_4 tem assinatura $(-+++)$ e o espaço-ambiente V_6 tem assinatura $(-++++)$, é fácil ver que a assinatura do espaço interno será $(++)$ que é dado pelo grupo de calibre $SO(2)$ com conexão igual a componente A_{156} . Neste sistema de coordenadas, a terceira forma fundamental $A_{\mu ab}$ é perpendicular às superfícies $r = cte$.

Note que o potencial (ou melhor a conexão) geométrico $A_{\mu 56}$ possui apenas uma componente não nula na direção da coordenada r , não permitindo a construção de um campo eletromagnético efetivo, o que é de se esperar pois a solução de Schwarzschild não possui carga elétrica, além de ser estática.

Conclusão

Na teoria da relatividade geral, o espaço-tempo é visto como uma geometria intrínseca, como defendia Riemann. Entretanto, resultados recentes da teoria de branas-mundo mostram que uma geometria extrínseca proporciona um melhor entendimento da estrutura física do espaço-tempo.

Em contraste com a relatividade geral, a teoria de branas-mundo descreve o espaço-tempo localmente e isometricamente imerso numa variedade $(4 + N)$ -dimensional. Na formulação covariante da brana-mundo, a 2ª e a 3ª forma fundamental surgem das condições de integrabilidade da imersão, que são as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

As duas formas fundamentais juntamente com a métrica determinam completamente a geometria da variedade imersa, incluindo os seus aspectos intrínsecos e extrínsecos. Assim, elas complementam a relatividade geral, no sentido que os espaços-tempo da relatividade geral são apenas uma parte de uma teoria mais geral, que é a teoria de branas-mundo. Além da métrica que representa a gravitação clássica, obtemos ainda a 2ª e a 3ª forma fundamental, que podem ser interpretadas como campos físicos complementares.

No nosso entendimento essa interpretação fornecida pela teoria de branas-mundo responde à questão de Ne'eman sobre a origem das simetrias internas, ou seja, é possível no contexto da teoria de branas, explicar a origem das simetrias internas através da simetria das dimensões extras que aparecem na imersão.

Para isto, temos que considerar um campo de calibre na fonte $T_{\mu\nu}$ das equações de movimento das branas, cuja simetria de calibre seja uma representação de um subgrupo do grupo $SO(m - n)$, atuando no espaço ortogonal à brana-mundo. Então obteremos uma realização da proposta de Ne'eman, onde a simetria interna do campo de calibre teria uma explicação através do espaço de imersão.

Na verdade fomos um pouco mais adiante com a tentativa de escrever também o potencial, ou melhor a conexão de Yang-Mills, a partir da imersão. Para ilustrar o procedimento, tomamos um exemplo simples de 6 dimensões onde a brana é o espaço-tempo de Schwarzschild. Obtivemos que a conexão $A_{\mu 56}$ possui apenas 1 componente radial para o grupo $SO(2) \approx U(1)$. Entretanto,

a solução encontrada não gera um campo eletromagnético, pois não há cargas elétricas.

Referências

- [1] A. Friedman, Isometric Embedding of Riemannian Manifolds into Euclidean Spaces, *Rev. Mod. Phys.*, 37, 1, p.201 (1965).
- [2] J. Rosen, Embedding of Various Relativistic Riemannian Spaces in Pseudo-Euclidean Spaces, *Rev. Mod. Phys.*, 37, 1, p.204 (1965).
- [3] R. Penrose, A Remarkable Property of Plane Waves in General Relativity, *Rev. Mod. Phys.*, 37, 1, p.215 (1965).
- [4] C. Fronsdal, Elementary Particles in a Curved Space, *Rev. Mod. Phys.*, 37, 1, p.221 (1965).
- [5] D. W. Joseph, Generalized Covariance, *Rev. Mod. Phys.*, 37, 1, p.225 (1965).
- [6] Y. Ne'eman, Embedded Space-Time and Particle Symmetries, *Rev. Mod. Phys.*, 37, 1, p.227 (1965).
- [7] D. D. Fairle, *Rev. Mod. Phys.* 82B, p.97 (1979).
- [8] S. Manton, *Rev. Nuclear Phys.* B158, p.141 (1979).
- [9] P. Dirac, *General Theory of Relativity*, Princeton University Press, (1996).
- [10] J. Gullberg, *Mathematics: from the Birth of Numbers*, W.W. Norton e Company (1997).
- [11] C. B. Boyer, *História da Matemática*, Edgard Blücher (2003).
- [12] W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, Hafner Publishing Co. (1955).
- [13] Russel, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Dover Publications, p.144-145 (1993).
- [14] I. Kant, *Os Pensadores: Kant*, Nova Cultural (2000).
- [15] M. Monastyrsky, *Riemann, Topology and Physics*, Birkhauser (1999).
- [16] J. Mehra, *Einstein, Hilbert, and the Theory of Gravitation*, D. Reidel Publishing Co. (1974).
- [17] H. Weyl, *Ann. Physik* 59, p.101 (1919).
- [18] H. Weyl, *Zeit. Physik* 56, p.330 (1929).
- [19] V. Fock, *Zeit. Physik* 39, p.226 (1927).
- [20] F. London, *Zeit. Physik* 42, p.375 (1927).

- [21] E. Noether, Invariant Variation Problems, M. A. Travel, Transport Theory and Statistical Physics; Reprint 1(3), p.183-207 (1971).
- [22] F. Belinfante, J. Lomont, Phys. Rev. 84, p.541-546 (1951).
- [23] J. M. Blatt, V. W. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, J. Wiley, (1952).
- [24] C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96, p.191 (1954).
- [25] A. Salam, Weinberg,.
- [26] E. Witten, Nucl. Phys, B146, p.412 (1989).
- [27] J. L. Lopes, Lectures on Symmetries, Gordon e Breach, (1969).
- [28] L. Schlaefli, Nota alla memoria del. Sig. Beltrami, Sugli spazzi di curvatura costante, Ann. di mat., 2^aserie, 5, pag. 170-193 (1871-1873).
- [29] M. Janet. Ann. Soc. Polon. Math 5, p.38 (1926).
- [30] E. Cartan, Ann. Soc. Polon. Math 6, p.1 (1928).
- [31] C. Burstin, Rec. Math. Moscou (Math Sbornik) 38, p.74 (1931).
- [32] J. Nash, Ann. Maths. 63, 1, (1956). J. Nash, Ann. Maths. 60, 3, (1954).
- [33] R. Greene, Mem. Amer. Math. Soc., p.97 (1970).
- [34] J. Nash, Isometric Embedding of Riemannian Manifolds into Euclidean Spaces, Rev. Mod. Phys., 37, 1, p.201 (1965).
- [35] M. Bustamante, F. Debbasch, M. Brachet, gr-qc/0509090.
- [36] B. O'neill, Elementos de Geometria Diferencial, Editorial Limusa-Wiley, S.A., (1972).
- [37] L.P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton U.P. Reprint (1996).
- [38] M. D. Maia, astro-ph/0404370.
- [39] T. Regge, C. Teitelboim, Marcel Grossman Meeting on General Relativity, p.77 (1975).
- [40] B. Holdom, Gauge Fermions form Tensor Fields, Stanford preprint ITP-738 (1983).
- [41] B. Holdom, The Cosmological Constant and the Embedded Universe, Stanford preprint ITP-744 (1983).
- [42] I. Antoniadis, Phys. Lett. B 246, p.377 (1970). P. Horava, E. Witten, Nucl. Phys. B 475, p.94 (1996).
- [43] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. B429, p.263 (1998).
- [44] L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, p.3370 (1999). L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, p.4690 (1999).
- [45] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, Phys. Lett. B485, p.208-214 (2000).

- [46] M. D. Maia, E. M. Monte, hep-th/0003196;ibid hep-th/0103060;ibid hep-th/0110088.
- [47] M. D. Maia, et.al, astro-ph/0403072.
- [48] M. D. Maia, et.al. Int.J.Mod.Phys.(A17)(4355)(2002).
- [49] M. D. Maia, E. M. Monte, hep-th/0003196;ibid hep-th/0103060;ibid hep-th/ 0110088.
- [50] J. L. Lopes, Gauge Field Theories: An introduction, Oxford: Pergamon Press, (1983).
- [51] E. Kasner, Am. J. Math 43, (1921), p.126. E. Kasner, Am. J. Math 43, (1921), p.130.
- [52] M. D. Kruskal, Maximal Extension of Schwarzschild Metric, Rev. Mod. Phys., vol.119, number 5 (1960), p.1743.
- [53] C. Fronsdal, Completion and Embedding of the Schwarzschild Solution, Rev. Mod. Phys., vol.116, number 3 (1959), p.778.