Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Classe de Hipersuperfícies de Dupin

por

Marcelo Lopes Ferro

Orientadora: Profa. Dra. Keti Tenenblat

À toda minha familia e amigos

Para o meu pai,

com muita saudade.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus;

Aos meus pais, Cloves e Rosângela, e irmãos, Fernanda e Leandro, pelo empenho e confiança ao me apoiarem na realização deste trabalho;

À professora Keti, pela serenidade e auxílio durante as orientações;

Aos professores Claudio Gorodski, Luciana, Renato Tribuzy e Walterson, pelas sugestões para melhor elaboração desta, e para realização de outros trabalhos;

Aos professores Armando, Marcelo, Pedro, Romildo e Walterson, pela amizade e incentivo;

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, pela amizade;

À Bianka, pela compreensão nos momentos difíceis e pela vivacidade nos momentos de alegria;

Aos meus avós Damásio e Luzia, pelo grande amor e sabedoria sempre dando força nos momentos difíceis;

Aos meus tios Eliamar, Emival, Lucia, Valéria, Gualtemar, Sebastião, Maria Inês, aos primos, Carlos, Murilo, Karla, Aline, Felipe e Mateus, e sobrinhos, Leonardo, Gabriela e Bruna, pelo amor que nos une, pela paciência e compreensão;

Ao Silvânio e Sirlene, por serem mais que cunhados e sim dois grandes irmãos;

Aos amigos Bruno, Eduardo, Gilberto, Tonires e Veríssimo, pelo companheirismo e amizade ao longo destes anos;

Em geral a toda minha família e amigos que contribuíram diretamente ou indiretamente pela conclusão desta nova etapa de minha vida, o meu muito obrigado;

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^6$ parametrizadas por linhas de curvaturas com cinco curvaturas principais distintas, satisfazendo condições genéricas sobre os invariantes de Laplace. A curvatura de Lie dessas hipersuperfícies não é constante. Caracterizamos localmente uma classe de tais hipersuperfícies em termos das curvaturas principais e da métrica, definidas por funções de uma variável. Ilustramos a teoria com exemplos.

Abstract

We study Dupin hypersurfaces in $\mathbb{R}^6$ parametrized by lines of curvature, with five distinct principal curvature, satisfying generic conditions on the Laplace invariants. The Lie curvature of theses hypersurfaces is not constant. We characterize locally a class of such hipersurfaces in terms of the principal curvatures and the metric, defined by functions of one variable. We illustrate the theory with examples.

Sumário

Introdução

O estudo das superfícies de Dupin iniciou-se em 1822 com Dupin. Daí em diante, vários pesquisadores tem estudado as hipersuperfícies de Dupin. A teoria das hipersuperfíces de Dupin pode ser desenvolvida em $\mathbf{R}^n$, S^n ou H^n, pois a classe de Dupin é invariante por transformações de Lie. O problema de classificação é realizado a menos destas transformações.

Pinkall [24], introduziu quatro construções para obter hipersuperfícies de Dupin próprias em $\mathbf{R}^{n+m}$ a partir de uma hipersuperfície de Dupin própria em $\mathbf{R}^n$. Para uma tal construção inicia-se com uma hipersupefície de Dupin W^{n-1} em $\mathbf{R}^n$ e considerando $\mathbf{R}^n$ como subespaço linear de $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ em $\mathbf{R}^{n+1}$, obtém-se uma hipersuperfície $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, de uma das seguintes formas:
1) Seja M^n o cilindro $W^{n-1} \times \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}^{n+1}$.
2) Seja M^n a hipersuperfície em $\mathbf{R}^{n+1}$ obtida pela rotação de W^{n-1} em torno de um eixo de $\mathbf{R}^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$.
3) Projete W^{n-1} estereograficamente sobre uma hipersuperfície $V^{n-1} \subseteq S^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$. Seja M^n o cone sobre V^{n-1} em $\mathbf{R}^{n+1}$.
4) Seja M^n um tubo em $\mathbf{R}^{n+1}$ em torno de W^{n-1}.
Nestas construções Pinkall observou ainda que a construção do tubo e do cone são Lie equivalentes, e portanto, no contexto da geometria da esfera de Lie, é suficiente lidar apenas com o tubo, cilindro e a superfície construída por meio da rotação.

Estas construções introduzem uma nova curvatura principal de multiplicidade um, que é constante ao longo de suas linhas de curvatura. As outras curvaturas principais de M^n são determinadas a partir das curvaturas principais de W^{n-1}. Dessa forma, se W^{n-1} é uma hipersupefície de Dupin própria em $\mathbf{R}^n$ com g curvaturas principais distintas, então M^n é própria com pelo menos g curvaturas principais distintas. Para maiores detalhes destas construções via geometria da esfera de Lie, veja [2] ou [3].

De acordo com a definição de Pinkall [24], uma hipersuperfície de Dupin própria é redutível se ela é localmente Lie equivalente a uma hipersuperfície de Dupin própria obtida por uma destas construções acima. Segundo Cecil e Jensen [6], [7] uma hipersuperfície de Dupin é localmente irredutível se não contém qualquer conjunto aberto redutível. Uma hipersuperfície de Dupin própria localmente irredutível é claramente irredutível, e usando propriedades analíticas das hipersuperfícies de Dupin, Cecil, Chi e Jensen [5] mostram que, reciprocamente, uma hipersuperfície de Dupin própria irredutível é localmente irredutível. Assim os dois conceitos são equivalentes.

Usando as construções listadas acima, Pinkall [24] (ver também Cecil [3]), mostrou que as hipersuperfícies de Dupin próprias são inúmeras. Especificamente, ele mostrou que dados inteiros positivos m_1,...,m_g com $m_1 + ... + m_g = n - 1$, existe uma hipersuperfície de Dupin própria M^{n-1} em $\mathbf{R}^n$ com g curvaturas principais distintas tendo, respectivamente, multiplicidade m_1,...,m_g. Por outro lado, as hipersuperfícies de Dupin próprias compactas são muito raras.

Vejamos alguns resultados globais conhecidos, sobre a classificação das hipersuperfícies de Dupin. Seja M uma hipersuperfície de Dupin própria, compacta, conexa, mergulhada em $\mathbf{R}^n$ ou S^n, com g curvaturas principais distintas. Se $g = 1$, então M é totalmente umbílica. Se $g = 2$, Cecil e Ryan [8] (ver também [9] ou [10]), mostraram que elas são as cíclides de Dupin e então são Möbius equivalentes a uma hipersuperfície isoparamétrica em S^n. Se $g = 3$, Miyaoka [17], provou que M é Lie equivalente a uma hipersupefície isoparamétrica em S^n. Se $g = 4$ e $g = 6$, o problema de classificação permanece em aberto.

Esses resultados levaram Cecil e Ryan [10], a formular a seguinte conjectura: "Toda hipersuperfície de Dupin compacta e própria em $\mathbf{R}^n$ é Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica em S^n". Poucos anos depois, Pinkall e Thorbergsson [25] mostraram por meio de contra-exemplos, que essa conjectura é falsa para o caso onde o número g de curvaturas principais distintas é igual 4, e independentemente, Miyaoka e Ozawa [18] mostraram para os casos $g = 4$ e $g = 6$, também por meio de contra-exemplos, que a conjectura é falsa. Esses contra-exemplos, são ambos de curvatura de Lie não constante. O que levou Cecil, Chi e Jensen [5] a reformular a conjectura, afirmando que "Toda hipersuperfíce de Dupin própria, compacta, conexa $M^{n-1} \subseteq S^n$ com $g = 4$ ou $g = 6$ e curvatura de Lie constante, é Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica em S^n". Essa nova versão da conjectura, ainda é um importante problema em aberto, embora ela esteja provada parcialmente. Para maiores detalhes da prova parcial desta nova conjectura veja [4].

Pinkall [23], classificou localmente as hipersuperfícies de Dupin em $\mathbf{R}^4$ com três curvaturas principais distintas a menos de equivalência de Lie, em particular, mostrou que toda hipersuperfície de Dupin própria irredutível em $\mathbf{R}^4$, com três curvaturas principais distintas, é localmente Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica em S^4. Niebergall [21], mostrou que toda hipersuperfíce de Dupin própria em $\mathbf{R}^5$ com três curvaturas principais distintas é redutível. Cecil e Jensen [2], generalizaram os resultados de Pinkall e Niebergall, obtendo a classificação local de hipersuperfícies de Dupin próprias, com três curvaturas principais em dimensões arbitrárias. Muitos matemáticos tem se dedicado ao problema de classificação local das hipersuperfícies de Dupin. Embora alguns resultados parciais de classificação tenham sido obtidos, o problema ainda permanece em aberto para $g > 3$.

Cecil, Chi e Jensen [4], provaram que uma hipersuperfície de Dupin própria, compacta, conexa, $M^{n-1} \subseteq S^n$, com $g \geq 3$ é irredutível. Assim, os exemplos de Pinkall e Thorbergsson [25] e Miyaoka e Ozawa [18], de hipersuperfície de Dupin própria, compacta, com $g = 4$ e curvatura de Lie não constante, são hipersupefícies de Dupin própria irredutível que não são Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica. No entanto, ainda é possível que cada hipersuperfície de Dupin irredutível com $g = 4$ e curvatura de Lie constante, seja Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica. E isto tem sido provado por alguns autores com algumas hipóteses adicionais. Citemos alguns destes resultados.

O primeiro deles, é devido a Niebergall [22], o qual mostrou que uma hipersuperfície de Dupin própria, irredutível, conexa, $M^4 \subseteq S^5$, com quatro curvaturas principais e curvatura de Lie constante é Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica, admitindo que em um referencial móvel apropriado, as derivadas covariantes de certas funções naturalmente definidas são nulas. Cecil e Jensen [7], mostraram que a hipótese adicional de Niebergall é desnecessária, pois tais funções são sempre constantes em um referencial de Lie apropriado. Assim eles provaram que toda hipersuperfície de Dupin própria, irredutível, conexa, $M^4 \subseteq S^5$, com quatro curvaturas principais e curvatura de Lie constante, é Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica. Este resultado foi generalizado para dimenções maiores por Cecil, Chi e Jensen [4], provando que se M^{n-1} é uma hipersuperfície de Dupin própria, irredutível, conexa em S^n, com quatro curvaturas principais tendo multiplicidade $m_1 = m_2 \geq 1$ e $m_3 = m_4 = 1$ e curvatura de Lie -1, então M^{n-1} é Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica. Note que, Münzner [19], [20], já havia mostrado anteriormente que se $M^{n-1} \subseteq S^n$ é uma hipersuperfície isoparamétrica com quatro curvaturas principais, então a multiplicidade das curvaturas principais satisfazem, $m_1 = m_2$ e $m_3 = m_4$, e a curvatura de Lie é -1, se as curvaturas principais estão apropriadamente ordenadas. Esses resultados, levaram Cecil, Chi e Jensen [5] a formularem a seguinte conjectura local: "Se M^{n-1} é uma hipersuperfície de Dupin própria, irredutível, conexa em S^n, com quatro curvaturas principais tendo multiplicidade m_1, m_2, m_3, m_4 e curvatura de Lie c, então $m_1 = m_2$,

$m_3 = m_4$, $c = -1$ e M^{n-1} é Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica".

Usando a teoria dos invariantes de Laplance n-dimensionais introduzida em [14] e [15], Riveros e Tenenblat [26], obtiveram uma classificação local das hipersuperfícies de Dupin próprias $M^4 \subseteq \mathbf{R}^5$, que são parametrizadas por linhas de curvaturas, com quatro curvaturas principais distintas, satisfazendo certas condições. Posteriormente, Riveros, Rodrigues e Tenenblat [27], provaram que uma hipersuperfície de Dupin própria, $M^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, com n curvaturas principais distintas e curvatura de Möbius constante, não pode ser parametrizada por linhas de curvatura. Eles também mostraram que a menos de transformações de Möbius, existe uma única hipersuperfície de Dupin própria $M^3 \subseteq \mathbf{R}^4$, com três curvaturas principais distintas e curvatura de Möbius constante que admite parametrização por linhas de curvatura. Esta hipersuperfície, M^3 é um cone em $\mathbf{R}^4$ sobre o toro de Clifford em $S^3 \subseteq \mathbf{R}^4$.

Em [16], Li, Lui, Wang e Zhao, introduziram o conceito de hipersupefície Möbius isoparamétrica em S^n. Eles provaram que uma (euclidiana) hipersuperfície isoparamétrica é automaticamente Möbius isoparamétrica, enquanto que uma hipersuperfície Möbius isoparamétrica deve ser Dupin própria. Posteriormente, Rodrigues e Tenenblat [29], mostraram que se $M \subseteq S^n$ é uma hipersuperfície com um número g constante de curvaturas principais em cada ponto, onde $g \geq 3$, então M é Möbius isoparamétrica se, e somente se, M é Dupin com curvatura de Möbius constante.

Motivado por [27], neste trabalho, usando a teoria dos invariantes de Laplace n-dimensionais [14] e [15], estudamos hipersuperfícies de Dupin M^5 em $\mathbf{R}^6$ parametrizadas por linhas de curvatura com cinco curvaturas principais distintas, com uma hipótese genérica sobre os invariantes de Laplace. Observamos que é essencial que tenhamos invariantes de Laplace não nulos, pois por [27] se todos os invariantes de Laplace forem nulos, então a curvatura de Möbius é constante e não é possível obter hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura.

No capítulo 1, apresentamos resultados obtidos por Kamran e Tenenblat [14], [15] sobre os invariantes de Laplace n-dimensionais m_{ij} e m_{ijk}, $1 \leq i, j, k \leq n$, distintos. Apresentamos dois teoremas dados em [15], um que fornece uma forma canônica para certos tipos de sistemas de equações diferenciais parciais, em termos desses invariantes, e um outro que reduz o número de variáveis independentes e fornece a solução geral para tais sistemas de equações. Apresentamos também algumas propriedades das hipersuperfícies de Dupin em $\mathbf{R}^{n+1}$, parametrizadas por linhas de curvatura e com n curvaturas principais distintas. Fornecemos um lema dado em [26] que obtém a forma canônica para tais hipersuperfícies em temos de seus invariantes de Laplace n-dimensionais.

No capítulo 2, inspirados na tese de Doutorado de L.A. Rodrigues [28], obtemos os símbolos de Christoffel das hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura, com n curvaturas principais distintas. Em seguida, deduzimos a equação de Gauss para tais hipersuperfícies.

No capítulo 3, estudamos uma classe de hipersupefícies de Dupin em $\mathbf{R}^6$, parametrizada por linhas de curvaturas, com cinco curvaturas principais distintas e com certos invariantes de Laplace n-dimensionais não nulos acrescidos de algumas condições genéricas. Tais hipóteses são essenciais, pois em [27], Riveros, Rodrigues e Tenenblat, mostraram que não existe hipersuperfície de Dupin, com dimensão maior que três, parametrizada por linhas de curvatura, cujas curvaturas principais são todas distintas e com todos os invariantes de Laplace n-dimensionais nulos. Espelhando-se em [28], fornecemos uma caracterização local de tais hipersuperfícies em termos de três funções vetorias dependendo de duas variáveis. Precisamente mostramos que se X é uma hipersuperfície de Dupin em $\mathbf{R}^6$, parametrizada por linhas de curvaturas, cujas curvaturas principais $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, são distintas, então supondo que certos invariantes de Laplace n-dimensionais são não nulos acrescidos de algumas condições genéricas, obtemos $X = V\big(B_1 - B_2 + B_3\big)$, onde $V = \dfrac{e^{\int \frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} m_{231} dx_3}}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $B_i = \dfrac{1}{Q_i} G_{(i+1)5}(x_{i+1}, x_5)$, $1 \le i \le 3$,

$$Q_i = \begin{cases} e^{\int A dx_1}, & se \quad i = 1 \\ e^{\int (A + m_{21(i+1)}) dx_1}, & se \quad 2 \le i \le 3, \end{cases}$$

$A = -\int m_{231,1} dx_3$, $A_{,r} = -m_{2r1,1}$, $4 \le r \le 5$, $A_{,2} = 0$. Além disso, provamos que, se $G_{45}(x_4, x_5) \neq 0$ e $|G_{25}(x_2, x_5)| + |G_{35}(x_3, x_5)| \neq 0$, então os invariantes de Laplace n-dimensionais satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} & m_{1l2} m_{12l} = 0, \qquad 3 \le l \le 5, \\ & m_{1r3} m_{13r} = 0, \qquad 4 \le r \le 5, \\ & m_{154} m_{145} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Em seguida fornecemos propriedades das curvaturas de Lie dessas hipersuperfícies, e obtemos que nesta classe, as curvaturas de Lie são não constantes.

No capítulo 4, apresentamos o resultado principal desse trabalho, o qual nos fornece as curvaturas principais e a métrica para uma classe de hipersuperfície do capítulo 3 em termos de funções de uma variável e apresentamos condições necessárias e suficientes para existência de tal classe de hipersuperfícies.

Mais precisamente, iniciamos fazendo a seguinte escolha no sistema (1), $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$, $3 \le l \le 5$, $4 \le r \le 5$ e provamos que então as curvaturas principais e a métrica induzida são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_i =& h_{(3-i)34} F_5^5(x_5) + h_{(3-i)3} F_4^4(x_4) + F_{(3-i)}^3(x_{3-i}) F_3^3(x_3) + F_{(3-i)}^{(3-i)}(x_{3-i}), \ \ 1 \le i \le 2, \\ \lambda_3 =& \frac{F_2^3(x_2)\lambda_2 - F_1^3(x_1)\lambda_1}{F_2^3(x_2) - F_1^3(x_1)}, \quad \lambda_4 = \frac{h_{23}\lambda_2 - h_{13}\lambda_1}{h_{23} - h_{13}}, \quad \lambda_5 = \frac{h_{234}\lambda_2 - h_{134}\lambda_1}{h_{234} - h_{134}}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, & g_{33} &= \frac{\big(F_2^3(x_2) - F_1^3(x_1)\big)^2}{\big(\lambda_2 - \lambda_1\big)^2}, \\ g_{44} &= \frac{\big(h_{23} - h_{13}\big)^2}{\big(\lambda_2 - \lambda_1\big)^2}, & g_{55} &= \frac{\big(h_{234} - h_{134}\big)^2}{\big(\lambda_2 - \lambda_1\big)^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $h_{i3} = F_i^3(x_i) F_3^4(x_3) + F_i^4(x_i)$, $h_{i34} = F_4^5(x_4) h_{i3} + F_i^3(x_i) F_3^5(x_3) + F_i^5(x_i)$, $1 \le i \le 2$. Além disso, usando as equações de Gauss, obtemos que as funções $F_j^\beta(x_j)$, $1 \le j \le 5$,

$j \leq \beta \leq 5$, satisfazem equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, a saber

$$F_j^{\beta''} - b_j F_j^{\beta} = c_{j\beta}, \qquad 1 \leq j \leq 5, \quad j \leq \beta \leq 5, \tag{4}$$

onde as condições iniciais e as constantes b_j e $c_{j\beta}$ devem satisfazer certas condições algébricas (ver (4.50) e Observação 4.7). Reciprocamente, usando o Teorema Fundamental das Hipersuperfícies, provamos que λ_j e g_{jj}, $1 \leq j \leq 5$, dados por (2), (3) e (4), são condições suficientes para existência de hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvaturas em $\mathbb{R}^6$, cujas curvaturas principais são as funções $-\lambda_j$ e a métrica é dada por g_{jj}, $1 \leq j \leq 5$. Incluímos exemplos de tais hipersuperfícies de Dupin.

Finalmente fornecemos um apêndice para dar maiores detalhes das demonstrações dos resultados do capítulo 4.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados preliminares e enunciamos conceitos que serão utilizados posteriormente.

1.1 Invariantes de Laplace n-dimensionais

Nesta seção, apresentamos alguns resultados obtidos por N. Kamran e K. Tenenblat [14], [15] sobre os invariantes de Laplace n-dimensionais. Consideremos o sistema linear de equações diferenciais de segunda ordem dado por

$$Y_{,kl} + a_{lk}^{k} Y_{,k} + a_{lk}^{l} Y_{,l} + c_{lk} Y = 0, \qquad 1 \leq k \neq l \leq n, \tag{1.1}$$

onde Y é uma função escalar ou vetorial, nas variáveis independentes de $x_1, x_2, ..., x_n$, e os coeficientes a e c são funções diferenciáveis de $x_1, x_2, ..., x_n$, que são simétricas no par de índices inferiores. Estaremos usando a notação $Y_{,k}$ para indicar diferenciação em relação a x_k.

Uma condição necessária e suficiente para o sistema (1.1) ser integrável é:

$$\begin{aligned} &a_{lk,j}^{k} = a_{jk,l}^{k}, \\ &c_{lj} = a_{lk,j}^{k} - a_{lk}^{k} a_{jk}^{k} + a_{lk}^{k} a_{lj}^{l} + a_{lj}^{j} a_{jk}^{k}, \\ &c_{lk,j} - c_{lj,k} + a_{lj}^{l} c_{lk} + (a_{lj}^{j} - a_{lk}^{k}) c_{kj} - a_{lk}^{l} c_{lj} = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observação 1.1. A forma geral do sistema (1.1) é preservada por transformações do tipo

$$\begin{aligned} Y &= \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\overline{Y}, \\ x_i &= f_i(\overline{x_i}),\ 1 \leq i \leq n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde φ é uma função diferenciável não nula e os f_i são funções diferenciáveis com derivadas não nulas. Por uma transformação do tipo (1.3), os coeficientes a e c são transformados em

$$\begin{aligned} &\overline{a}^l_{lk} = f'_k[a^l_{lk} + (\log\varphi)_{,k}], \\ &\overline{c}_{lk} = f'_k f'_l\big[c_{lk} + a^l_{lk}(\log\varphi)_{,l} + a^k_{lk}(\log\varphi)_{,k} + \frac{\varphi_{,kl}}{\varphi}\big],\ 1 \leq k \neq l \leq n, \end{aligned} \tag{1.4}$$

e o sistema (1.1), em

$$\overline{Y}_{,kl} + \overline{a}^k_{lk}\overline{Y}_{,k} + \overline{a}^l_{lk}\overline{Y}_{,l} + \overline{c}_{lk}\overline{Y} = 0.$$

Definição 1.2. Os *invariantes de Laplace n-dimensionais* do sistema (1.1) são as $n(n-1)^2$ funções dadas por

$$m_{ij} = a^i_{ij,i} + a^i_{ij}a^j_{ij} - c_{ij},\ \ m_{ijk} = a^k_{kj} - a^i_{ij},\ \ k \neq i, j,\ \ 1 \leq k \leq n, \tag{1.5}$$

para todo par ordenado (i, j), $1 \leq i \neq j \leq n$.

Lema 1.3. *Os invariantes de Laplace n-dimensionais do sistema (1.1) satisfazem as seguintes relações, para $1 \leq i, j, k, l \leq n$, distintos,*

$$\begin{aligned} &m_{ijk} + m_{kji} = 0, \\ &m_{ijk,k} - m_{ijk}m_{jki} - m_{kj} = 0, \\ &m_{ij,k} + m_{ijk}m_{ik} + m_{ikj}m_{ij} = 0, \\ &m_{ijk} - m_{ijl} - m_{ljk} = 0, \\ &m_{lik,j} + m_{ijl}m_{kil} + m_{ljk}m_{kij} = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

A seguir, usando as relações (1.6) acima, obtemos importantes identidades que os invariantes de Laplace satisfazem, que serão bastante úteis nos capítulos seguintes.

Observação 1.4. Sejam m_{ijk} dados por (1.5), satisfazendo (1.6). Então

$$\left[\frac{m_{ijk,j}}{m_{ijk}}\right]_{,i} = m_{jik}m_{ijk} - m_{ji} - \frac{m_{ij,j}}{m_{ijk}} + \frac{m_{ijk,j}m_{ij}}{\big(m_{ijk}\big)^2}. \tag{1.7}$$

De fato, derivando $\dfrac{m_{ijk,j}}{m_{ijk}}$ com respeito a x_i, usando as relações (1.6), temos

$$\begin{aligned}
\left[\frac{m_{ijk,j}}{m_{ijk}}\right]_{,i} &= \frac{m_{ijk,ji}}{m_{ijk}} - \frac{m_{ijk,j}m_{ijk,i}}{\big(m_{ijk}\big)^2}\\
&= \frac{\big(m_{jik}m_{ijk} - m_{ij}\big)_{,j}}{m_{ijk}} - \frac{m_{kji,j}\big(m_{jik}m_{ijk} + m_{ij}\big)}{\big(m_{kji}\big)^2}\\
&= \frac{m_{kji,j}m_{jik}}{m_{kji}} - \frac{m_{kji}m_{kij,j}}{m_{kji}} + \frac{m_{ij,j}}{m_{kji}} - \frac{m_{kji,j}m_{jik}}{m_{kji}} - \frac{m_{kji,j}m_{ij}}{\big(m_{kji}\big)^2}\\
&= -\big(m_{kij}m_{ijk} + m_{ji}\big) + \frac{m_{ij,j}}{m_{kji}} - \frac{m_{kji,j}m_{ij}}{\big(m_{kji}\big)^2}\\
&= m_{jik}m_{ijk} - m_{ji} - \frac{m_{ij,j}}{m_{ijk}} - \frac{m_{kji,j}m_{ij}}{\big(m_{ijk}\big)^2}.
\end{aligned}$$

Proposicão 1.5. *Sejam m_{ijk} dados por (1.5), satisfazendo (1.6). Se $m_{1ks} = 0$ e $m_{1lk} = 0$, $2 \leq l, k, s \leq n$ distintos, então $m_{1kl}m_{1ls} = 0$.*

Demonstração. Derivando $m_{1ks} = 0$ com respeito a x_l, usando as relações de (1.6), temos

$$0 = m_{1ks,l} = \big(m_{lks} - m_{lk1}\big)_{,l} = m_{1kl,l} + m_{lks,l} = m_{1kl}m_{kl1} + m_{lks}m_{kls}.$$

Como $m_{kl1} = -m_{1lk} = 0$, temos que a equação acima torna-se $m_{lks}m_{kls} = 0$. Logo usando as relações de (1.6), obtemos

$$0 = \big(m_{1ks} - m_{1kl}\big)\big(m_{1ls} - m_{1lk}\big) = -m_{1kl}m_{1ls},$$

onde na última igualdade usamos $m_{1ks} = 0$ e $m_{1lk} = 0$.

$\blacksquare$

Os invariantes do sistema (1.1) são preservados por transformações do tipo (1.3). A caracterização do sistema (1.1) em termos de seus invariantes de Laplace n-dimensionais é estabelecida no seguinte teorema.

Teorema 1.6. *Dada qualquer coleção de $n(n-1)^2$, $n \geq 3$ funções diferenciáveis m_{ij}, m_{ijk}, $1 \leq i,j,k \leq n$, i,j,k distintos, nas variáveis independentes $x_1, x_2, ..., x_n$, satisfazendo as relações (1.6), existe um sistema linear (1.1) cujos invariantes de Laplace n-dimensionais são as funções dadas m_{ij}, m_{ijk}. Qualquer outro sistema nessas condições é definido a menos de multiplicação por uma função escalar do tipo (1.3). Um representante é dado por*

$$
\begin{aligned}
&Y_{,ij} + AY_{,j} - m_{ij}Y = 0,\\
&Y_{,ik} + (A + m_{jik})Y_{,k} - m_{ik}Y = 0,\\
&Y_{,jk} + m_{ikj}Y_{,j} + m_{ijk}Y_{,k} = 0,\\
&Y_{,lk} + m_{ikl}Y_{,l} + m_{ilk}Y_{,k} = 0,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

onde (i,j) é um par ordenado fixo, $1 \leq i,j,k,l \leq n$ são distintos e A é uma função satisfazendo

$$A_{,j} = m_{ji} - m_{ij}, \qquad A_{,k} = -m_{jki,i}. \tag{1.9}$$

Definição 1.7. Dizemos que um sistema do tipo (1.1) é (i,j)-*redutível*, para um par (i,j), $1 \leq i \neq j \leq n$, se

$$\Delta^{ij} = (m_{ij})^2 + \sum_{k \neq i,j} (m_{ijk})^2 = 0.$$

Teorema 1.8. *(***Teorema de Redução***) Considere um sistema do tipo (1.1) para Y, cujos coeficientes a, c satisfazem (1.2). Se o sistema é (i,j)-redutível, então a solução geral do sistema é dada por*

$$Y = Q + e^{-J}G(\widehat{x_j}),$$

onde

$$Q = e^{-J}\int e^{J-I}F(x_j)dx_j,$$

$$I = \int a^j_{ij}dx_i, \qquad J = \int a^i_{ij}dx_j,$$

F é uma função arbitrária de x_j, a primitiva I é tal que

$$I_{,k} = a^j_{kj}, \qquad \textit{para} \qquad k \neq i,j.$$

Além disso G é uma função que não depende de x_j e satisfaz o seguinte sistema em $n-1$ variáveis $x_1, ..., \widehat{x}_j, ..., x_n$ dado por

$$G_{,kl} + g_{lk}^k G_{,k} + g_{lk}^l G_{,l} + b_{lk} G + h_{lk} = 0, \qquad k \neq l \;\; dist.\ de\ j,$$

com

$$\begin{aligned} g_{lk}^k &= a_{lk}^k - J_{,l}\,, & g_{lk}^l &= a_{lk}^l - J_{,k}\,, \\ b_{lk} &= c_{lk} + J_{,k} J_{,l} - J_{,lk} - a_{lk}^l J_{,l} - a_{lk}^k J_{,k}\,, \\ h_{lk} &= e^J \big(Q_{,lk} + a_{lk}^k Q_{,k} + a_{lk}^l Q_{,l} + c_{lk} Q \big). \end{aligned}$$

Observação 1.9. No caso $n = 2$ só existem os invariantes m_{ij} que correspondem aos invariantes de Laplace clássicos h e k da equação, isto é, se temos a equação

$$X_{,12} + a(x_1, x_2) X_{,1} + b(x_1, x_2) X_{,2} + c(x_1, x_2) X = 0,$$

os invariantes de Laplace dessa equação são dados por

$$m_{12} = h = a_{,1} + ab - c, \qquad m_{21} = k = b_{,2} + ab - c.$$

Além disso, se h ou k são nulos, então a solução geral da equação acima é dada por

$$\begin{aligned} X &= e^{-\widetilde{s}} \left[\int e^{\widetilde{s}-s} F(x_2) dx_2 + G(x_1) \right], \qquad \text{se} \quad h = 0, \\ X &= e^{-s} \left[\int e^{s-\widetilde{s}} F(x_1) dx_1 + G(x_2) \right], \qquad \text{se} \quad k = 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

com $s = \displaystyle\int b dx_1$, $\widetilde{s} = \displaystyle\int a dx_2$, onde F e G são funções arbitrárias.

Como aplicação do Teorema 1.8 de Redução, obtemos o seguinte lema o qual será bastante útil no Capitulo 4.

Lema 1.10. *Fixados i, r, s, índices distintos, seja $Y = Y(x_r, x_s, x_i)$ uma função diferenciável que satisfaz o seguinte sistema*

$$\left\{ \begin{aligned} & Y_{,rs} + \tfrac{H_{si,s}}{H_{si}} Y_{,r} - \tfrac{\overline{H}_{rs,r}}{\overline{H}_{rs}} Y_{,s} - \tfrac{H_{si,s}}{H_{sl}} \tfrac{\overline{H}_{rs,r}}{\overline{H}} Y = 0, \\ & Y_{,ri} + \tfrac{\overline{H}_{si,i}}{\overline{H}_{si}} Y_{,r} - \tfrac{H_{rs,r}}{H_{rs}} Y_{,i} - \tfrac{\overline{H}_{si,s}}{\overline{H}_{si}} \tfrac{H_{rs,r}}{H} Y = 0, \\ & Y_{,si} + \tfrac{\overline{H}_{si,i}}{\overline{H}_{si}} Y_{,s} + \left(\tfrac{H_{si,s}}{H_{si}} - \tfrac{H_{rs,s}}{H_{rs}} - \tfrac{H_s'}{H_s} \right) Y_{,i} + \\ & \left[\left(\tfrac{\overline{H}_{si,i}}{\overline{H}_{si}} \right)_{,s} + \tfrac{\overline{H}_{si,i}}{\overline{H}_{si}} \left(\tfrac{H_{si,s}}{H_{si}} - \tfrac{H_{rs,s}}{H_{rs}} - \tfrac{H_s'}{H_s} \right) \right] Y = 0, \end{aligned} \right. \tag{1.11}$$

onde os índices que aparecem nos coeficientes denotam dependência nas variáveis x_i, x_r ou x_s. Então

$$Y = F_{si}\left[H_s H_{rs} F_i + \int \overline{H}_{rs} F_s dx_s + F_r\right], \tag{1.12}$$

onde $F_{si} = \dfrac{\overline{H}_i}{\widehat{H}_i \widehat{H}_s}$ *e* $F_i = F_i(x_i)$ *é função diferenciável de* x_i.

Além disso, $H_{si} = \widehat{H}_s \widehat{H}_i$ *e* $\overline{H}_{si} = \dfrac{\widehat{H}_s \widehat{H}_i}{\overline{H}_s \overline{H}_i}$.

Demonstração. Iniciamos observando que se Y satisfaz o sistema (1.11), então $\dfrac{H_{si}}{\overline{H}_{si}} = \overline{H}_s \overline{H}_i$, onde $\overline{H}_s$ e $\overline{H}_i$ são, respectivamente, funções diferenciáveis nas variáveis x_s e x_i.

Com efeito, pela primeira equação de (1.2), com $k = r$, $l = i$, $j = s$, temos

$$\big(\log H_{si}\big)_{,si} = \big(\log \overline{H}_{si}\big)_{,si}, \quad \text{donde} \quad \frac{H_{si}}{\overline{H}_{si}} = \overline{H}_s \overline{H}_i. \tag{1.13}$$

Substituindo os coeficientes do sistema (1.11) nas demais equações de (1.2), obtemos identidades.

Calculando os invariantes de Laplace m_{lj} e m_{ljk} do sistema (1.11), obtemos

$$m_{rs} = m_{ri} = m_{ir} = m_{sr} = m_{si} = m_{is} = m_{ris} = 0,$$
$$m_{rsi} = -\Bigg(\log H_{rs} H_s\Bigg)_{,s}, \qquad m_{sri} = \Bigg(\log \frac{\overline{H}_{rs}}{H_{rs}}\Bigg)_{,r}.$$

Como $m_{ris} = m_{ri} = 0$, segue que o sistema (1.11) é (r,i)-redutível, donde pelo Teorema 1.8 de redução, temos

$$Y = Q + e^{-J} G(x_r, x_s),$$

onde

$$Q = e^{-J} \int e^{J-I} \overline{F}(x_i) dx_i, \qquad J = \int \frac{\overline{H}_{si,i}}{\overline{H}_{si}} dx_i, \qquad I = -\int \frac{H_{rs,r}}{H_{rs}} dx_r,$$

e a primitiva I satisfaz

$$I_{,s} = \frac{H_{si,s}}{H_{si}} - \frac{H_{rs,s}}{H_{rs}} - \frac{H_s'}{H_s}. \tag{1.14}$$

Da expressão da primitiva I e (1.14), obtemos que $H_{si} = \widehat{H}_s\widehat{H}_i$ e $I = -\log\dfrac{c_1 H_s H_{rs}}{\widehat{H}_s}$, onde $c_1 \in \mathbb{R}$ e $\widehat{H}_s$, $\widehat{H}_i$ são funções diferenciáveis, respectivamente, nas variáveis x_s e x_i. Além disso, por (1.13), obtemos $\overline{H}_{si} = \dfrac{\widehat{H}_s\widehat{H}_i}{\overline{H}_s\overline{H}_i}$, donde a primitiva J torna-se

$$J = \int\left(\log\frac{\widehat{H}_i}{\overline{H}_i}\right)' dx_i,$$

e G satisfaz

$$G_{,rs} + \frac{\widehat{H}_s'}{\widehat{H}_s}G_{,r} - \frac{\overline{H}_{rs,r}}{\overline{H}_{rs}}G_{,s} - \frac{\overline{H}_{rs,r}}{\overline{H}_{rs}}\frac{\widehat{H}_s'}{\widehat{H}_s}G = 0.$$

Donde por (1.10), obtemos

$$G = \frac{1}{\widehat{H}_s}\left[\int \overline{H}_{rs}F_s dx_s + F_r\right],$$

onde $F_s = F_s(x_s)$, $F_r = F_r(x_r)$ são, respectivamente, funções diferenciaveis de x_s e x_r. Portanto Y é dada por

$$Y = F_{si}\left[H_s H_{rs} F_i + \int \overline{H}_{rs}F_s dx_s + F_r\right], \tag{1.15}$$

onde $F_{si} = \dfrac{\overline{H}_i}{\widehat{H}_i\widehat{H}_s}$ e $F_i = F_i(x_i)$ é função diferenciável de x_i.

$\blacksquare$

1.2 Hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção fornecemos a definição de hipersuperfície de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$. Apresentamos propriedades das hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura com n curvaturas principais distintas e definimos as curvaturas de Möbius. Consideramos $\mathbb{R}^n$ como sendo o espaço euclidiano munido com a métrica euclidiana $<,>$, Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.11. Dizemos que $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma *hipersuperfície de Dupin* se as curvaturas principais são constantes ao longo das correspondentes linhas de curvatura.

Observação 1.12. Sejam $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, as curvaturas principais distintas e $N : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ o campo normal unitário a X. Nesse caso temos

$$\begin{aligned} < X_{,i}\,, X_{,j} > &= \delta_{ij} g_{ii}, \quad 1 \leq i \leq n, \\ N_{,i} &= \lambda_i X_{,i}\,, \\ \lambda_{i,i} &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Além disso,

$$X_{,ij} - \Gamma^i_{ij} X_{,i} - \Gamma^j_{ij} X_{,j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{1.17}$$

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{1.18}$$

onde Γ^i_{ij} denotam os símbolos de Christoffel da hipersuperfície.

Pela definição 1.2, os invariantes de Laplace n-dimensionais do sistema (1.17) são dados por

$$\begin{aligned} m_{ij} &= -\Gamma^i_{ij,i} + \Gamma^i_{ij}\Gamma^j_{ij}, \\ m_{ijk} &= \Gamma^i_{ij} - \Gamma^k_{kj}, \ \ k \neq i, j, \ \ 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \tag{1.19}$$

para todo par ordenado (i, j), $1 \leq i \neq j \leq n$. Segue da expressão (1.18) e do Lema 1.3 que esses invariantes satisfazem as seguintes relações, para $1 \leq i, j, k, l \leq n$, i, j, k, l distintos,

$$\begin{aligned} m_{ij} &= 0, \\ m_{ijk} + m_{kji} &= 0, \\ m_{ijk,k} - m_{ijk} m_{jki} &= 0, \\ m_{ijk} - m_{ijl} - m_{ljk} &= 0, \\ m_{lik,j} + m_{ijl} m_{kil} + m_{ljk} m_{kij} &= 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Usando o Teorema 1.6 transformamos o sistema (1.17) em um sistema canônico dado pelo Lema abaixo.

Lema 1.13. *Seja* $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, *uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura,* $-\lambda_r$, $1 \leq r \leq n$, *as curvaturas principais distintas em cada ponto. Para* $1 \leq i, j, k \leq n$ *fixos e distintos, a transformação*

$$X = V\overline{X}, \qquad \text{onde} \qquad V = \frac{e^{\int \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} m_{jki} dx_k}}{\lambda_j - \lambda_i}, \tag{1.21}$$

transforma o sistema (1.17) no sistema,

$$\begin{aligned} &\overline{X}_{,ij} + A\overline{X}_{,j} = 0, \\ &\overline{X}_{,ir} + (A + m_{jir})\overline{X}_{,r} = 0, \\ &\overline{X}_{,jr} + m_{irj}\overline{X}_{,j} + m_{ijr}\overline{X}_{,r} = 0, \\ &\overline{X}_{,lr} + m_{irl}\overline{X}_{,l} + m_{ilr}\overline{X}_{,r} = 0, \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde l *e* r *são tais que* $1 \leq r \neq l \leq n$, *distintos de* i, j, k *e*

$$A = -\int m_{jki,i} dx_k.$$

Além disso,

$$A_{,j} = 0, \qquad A_{,r} = -m_{jri,i}. \tag{1.23}$$

Demonstração. A demonstração é consequência imediata de (1.3) e (1.4) com $f_k' = 1$.

Observação 1.14. Podemos mostrar que as derivadas da função V, dada no Lema 1.13, para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ distintos, com i, j, k fixos, são dadas por

$$\begin{aligned} V_{,i} &= (A + \Gamma_{ij}^j)V, \\ V_{,j} &= \Gamma_{ij}^i V, \\ V_{,k} &= \Gamma_{ik}^i V, \\ V_{,l} &= \Gamma_{il}^i V, \end{aligned} \tag{1.24}$$

onde V é dado por (1.21) e A é dado por (1.23).

A seguir introduziremos a definição de curvatura de Möbius.

Definição 1.15. Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de Dupin, $-\lambda_r$, $1 \leq r \leq n$, as curvaturas principais distintas em cada ponto. A *curvatura de Möbius* é dada por

$$C^{jil} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_l - \lambda_i}, \tag{1.25}$$

$1 \leq i, j, l \leq n$ distintos.

Observação 1.16. Admita que a hipersuperfície de Dupin X, esteja parametrizada por linhas de curvatura. Então mostra-se que as derivadas das curvaturas de Möbius satisfazem

$$\begin{aligned}
\left(\log C^{jil}\right)_{,k} =& m_{ikj}C^{kji} - m_{ikl}C^{kli}, \\
\left(\log C^{jil}\right)_{,j} =& m_{lji}C^{jli}, \\
\left(\log C^{jil}\right)_{,i} =& m_{lij}, \\
\left(\log C^{jil}\right)_{,l} =& m_{ilj}C^{lji}, \\
\left(\log C^{jil}\right)_{,jl} =& 0,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$1 \leq i, j, l, k \leq n$ distintos.

Fornecemos agora a definição de curvatura de Lie.

Definição 1.17. Dados quatro números reais a, b, c e d. A *razão cruzada* desses números é dada por

$$[a, b; c, d] = \frac{a-b}{a-c}\,\frac{d-c}{d-b}.$$

A seguir apresentamos uma propriedade algébrica das razões cruzadas, em seguida definimos curvatura de Lie.

Observação 1.18. Como a razão cruzada envolve quatro elementos, então as permutações envolvidas são do grupo S_4, cuja ordem é 24. Usaremos S para representarmos o grupo das permutações de S_4.

Sejam a, b, c, d, dois a dois distintos e $s \in S$, por $s[a, b; c, d]$ denotamos a permutação definida por $s(a) = b$, $s(b) = c$, $s(c) = d$, $s(d) = a$. Logo se $r = [a, b; c, d]$, então dado $s \in S$

$$s[a, b; c, d] \in \left\{ r, \frac{1}{r}, 1 - r, \frac{1}{1-r}, \frac{r-1}{r}, \frac{r}{r-1} \right\}.$$

Definição 1.19. Sejam $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de Dupin $-\lambda_r$, $1 \leq r \leq g \leq n$, as curvaturas principais distintas em cada ponto. As *curvaturas de Lie* são dadas pelas razões cruzadas das curvaturas principais, ou seja,

$$[\lambda_i, \lambda_j; \lambda_l, \lambda_k] = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_l} \frac{\lambda_k - \lambda_l}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

A seguir, apresentamos um lema que relaciona propriedades das curvaturas de Lie com propriedades dos invariantes de Laplace.

Lema 1.20. *Sejam $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, as curvaturas principais distintas em cada ponto. Fixados $1 \leq r, s, k, q \leq n$, índices distintos, suponha que $m_{skr} \neq 0$ e $m_{skq} \neq 0$. Se a derivada da curvatura de Lie, $[\lambda_r, \lambda_s; \lambda_k, \lambda_q]_{,k} = 0$, então*

$$m_{qkr} + \left(\log \frac{m_{skq}}{m_{skr}} \right)_{,k} = 0.$$

Demonstração. Fixados $1 \leq r, s, k, q \leq n$ índices distintos, derivando o logaritmo da curvatura de Lie $[\lambda_r, \lambda_s; \lambda_k, \lambda_q]$ com respeito a x_k, usando a segunda e a quarta relação de (1.26), respectivamente, com $j = k$, $i = q$, $l = s$ e $j = s$, $i = r$, $l = k$, obtemos

$$\begin{aligned}
\big(\log[\lambda_r, \lambda_s; \lambda_k, \lambda_q]\big)_{,k} =& \left(\log \frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_k} \frac{\lambda_q - \lambda_k}{\lambda_q - \lambda_s} \right)_{,k} = \left(\log \frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_k} \right)_{,k} + \left(\log \frac{\lambda_q - \lambda_k}{\lambda_q - \lambda_s} \right)_{,k} \\
=& m_{rks} \frac{\lambda_k - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_s} + m_{skq} \frac{\lambda_k - \lambda_s}{\lambda_q - \lambda_s}.
\end{aligned}$$

Por hipótese $[\lambda_r, \lambda_s; \lambda_k, \lambda_q]_{,k} = 0$, logo a expressão acima, usando a segunda relação de (1.20), pode ser escrita como

$$m_{skq} \frac{\lambda_k - \lambda_s}{\lambda_q - \lambda_s} - m_{skr} \frac{\lambda_k - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_s} = 0.$$

Logo usando a hipótese $m_{skr} \neq 0$, temos da equação acima que

$$\frac{m_{skq}}{m_{skr}} = \frac{\lambda_q - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_s}.$$

Derivando o logaritmo da equação acima com respeito a x_k, onde usaremos novamente a hipótese $[\lambda_r, \lambda_s; \lambda_k, \lambda_q],_k = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\log \frac{m_{skq}}{m_{skr}}\right)_{,k} &= \left(\log \frac{\lambda_q - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_s}\right)_{,k} = \left(\log \frac{\lambda_q - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_s}\right)_{,k} + \big(\log[\lambda_r, \lambda_s; \lambda_k, \lambda_q]\big)_{,k} \\
&= \left(\log \frac{\lambda_q - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_s}\right)_{,k} + \left(\log \frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_k} \frac{\lambda_q - \lambda_k}{\lambda_q - \lambda_s}\right)_{,k} \\
&= \left(\log \frac{\lambda_q - \lambda_k}{\lambda_r - \lambda_k}\right)_{,k} = m_{rkq},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a terceira relação de (1.26), com $j = q$, $i = k$, $l = r$. Concluindo a demonstração do lema.

■

Capítulo 2

Propriedade das hipersuperfícies de Dupin

Neste capítudo apresentamos propriedades das hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura e com n curvaturas principais distintas, obtidas por L.A. Rodrigues em sua tese de Doutorado [28]. Para completude incluímos a demonstração de tais resultados. Iniciamos calculando os símbolos de Christoffel. Em seguida, fornecemos a equação de Gauss e algumas identidades que decorrem desta equação, para tais hipersuperfícies.

2.1 Os símbolos de Christoffel

Sabemos que para uma variedade Riemanniana tendo (X, U) como sistema de coordenadas e métrica $g_{ij} =< X_{,i}, X_{,j} >$, os símbolos de Christoffel, denotados por Γ_{ij}^k, são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2} g^{kl} \big(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l} \big), \tag{2.1}$$

onde

$$\sum_{l=1}^{n} g^{lj} g_{il} = \delta_{ij}.$$

Como estamos interessados em considerar hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura e com n curvaturas principais distintas, temos para $1 \leq i, j \leq n$

$$g_{ij} = \delta_{ij} g_{ii}.$$

Dessa forma a equação (2.1) pode ser escrita como

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kk} \big(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k} \big),$$

para $1 \leq i, j, k \leq n$. Desta equação obtemos

$$\Gamma_{ij}^{k} = 0, \quad 1 \leq i, j, k \leq n, \text{ distintos,} \tag{2.2}$$

$$\Gamma_{ii}^{i} = \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}, \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{2.3}$$

$$\Gamma_{ii}^{j} = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{2.4}$$

$$\Gamma_{ij}^{i} = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{2.5}$$

Segue de (2.4) e (2.5) que

$$g_{ii,j} = 2\Gamma_{ij}^{i} g_{ii}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{2.6}$$

$$\Gamma_{ii}^{j} = -\Gamma_{ij}^{i} \frac{g_{ii}}{g_{jj}}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{2.7}$$

Além disso da primeira equação de (1.19) e (1.20) segue que

$$\Gamma_{ij,i}^{i} = \Gamma_{ij,j}^{j} = \Gamma_{ij}^{i} \Gamma_{ij}^{j}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{2.8}$$

Observação 2.1. Segue de (1.16) que

$$X_{,ii} = \Gamma_{ii}^{i} X_{,i} + \sum_{k \neq i} \Gamma_{ii}^{k} X_{,k} - \lambda_i g_{ii} N.$$

Portanto usando (2.7), obtemos

$$X_{,ii} = \Gamma_{ii}^{i} X_{,i} - \sum_{k \neq i} \Gamma_{ik}^{i} \frac{g_{ii}}{g_{kk}} X_{,k} - \lambda_i g_{ii} N. \tag{2.9}$$

Esta expressão será utilizada nos próximos capítulos.

Usando as expressões de (2.3) a (2.8) podemos calcular algumas derivadas dos símbolos de Christoffel que serão utilizadas futuramente. Para $1 \leq i \neq j \leq n$,

$$\Gamma^i_{ij,ji} = \Gamma^j_{ij}\big[(\Gamma^i_{ij})^2 + \Gamma^i_{ij,j}\big], \tag{2.10}$$

$$\Gamma^j_{ii,j} = \frac{g_{ii}}{g_{jj}}\big[-\Gamma^i_{ij,j} + 2\Gamma^j_{jj}\Gamma^i_{ij} - 2(\Gamma^i_{ij})^2\big], \tag{2.11}$$

$$\Gamma^j_{jj,i} = \Gamma^i_{ij}\Gamma^j_{ij}, \tag{2.12}$$

$$\left(\frac{g_{ii}}{g_{jj}}\right)_{,i} = 2\big(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^j_{ij}\big)\frac{g_{ii}}{g_{jj}}. \tag{2.13}$$

Da segunda equação de (1.2) e do sistema (1.17), temos que, para $1 \leq i, j, k \leq n$ distintos

$$\Gamma^j_{kj,i} = \Gamma^i_{ik}\Gamma^j_{ij} + \Gamma^j_{kj}\Gamma^k_{ik} - \Gamma^j_{ij}\Gamma^j_{jk}. \tag{2.14}$$

Além disso, comparando (1.18) com (2.5), obtemos a equação Codazzi

$$\frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_j - \lambda_i} = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}, \tag{2.15}$$

onde $-\lambda_i$ e g_{ii}, $1 \leq i \leq n$ são, respectivamente, as curvaturas principais e a métrica.

2.2 A equação de Gauss

Nesta seção apresentamos a equação de Gauss para hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvaturas, cujas curvaturas principais, $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$ são todas distintas.

Inicialmente, observe que para uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ de coordenadas (X, U), temos

$$R^l_{ijm} = \sum_k \left(\Gamma^k_{im}\Gamma^l_{jk} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{mk}\right) + \Gamma^l_{im,j} - \Gamma^l_{ij,m}.$$

Como

$$R_{ijlm} = \sum_r g_{ir}R^r_{jlm},$$

segue que

$$R_{ijlm} = \sum_r g_{ir}\left[\sum_k \left(\Gamma^k_{jm}\Gamma^r_{lk} - \Gamma^k_{lj}\Gamma^r_{mk}\right) + \Gamma^r_{jm,l} - \Gamma^r_{lj,m}\right]. \tag{2.16}$$

Por outro lado, a equação de Gauss para hipersuperfícies nos fornece

$$R_{ijij} = \lambda_i \lambda_j g_{ii} g_{jj}. \tag{2.17}$$

A seguir apresentamos a expressão da equação de Gauss em termos dos símbolos de Christoffel. A demonstração desse resultado pode ser encontrado em [28] (ver também [27]), porém para completude iremos apresentá-lo.

Proposicão 2.2. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura e $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, as curvaturas principais distintas em cada ponto. Então a equação de Gauss de X é dada por*

$$\lambda_i \lambda_j + \frac{1}{g_{ii}} L_{ij} + \frac{1}{g_{jj}} L_{ji} + \sum_{k \neq i,j} \frac{\Gamma^i_{ik} \Gamma^j_{jk}}{g_{kk}} = 0, \quad i \neq j. \tag{2.18}$$

onde

$$L_{ij} = \Gamma^j_{ij,i} - \Gamma^j_{ij} \big(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^j_{ij} \big), \quad i \neq j.$$

Demonstração. Usando que $g_{ij} = \delta_{ij} g_{ii}$ e igualando (2.16) com (2.17) temos

$$\lambda_i \lambda_j g_{jj} = \sum_k \left(\Gamma^k_{jj} \Gamma^i_{ik} - \Gamma^k_{ij} \Gamma^i_{jk} \right) + \Gamma^i_{jj,i} - \Gamma^i_{ij,j}.$$

Por uma questão de notação, vamos trocar i por j na equação acima, e usar (2.2) para obter

$$\lambda_i \lambda_j g_{ii} = \sum_{k \neq i,j} \Gamma^k_{ii} \Gamma^j_{jk} + \Gamma^i_{ii} \Gamma^j_{ji} + \Gamma^j_{ii} \Gamma^j_{jj} - \Gamma^i_{ji} \Gamma^j_{ii} - (\Gamma^j_{ij})^2 + \Gamma^j_{ii,j} - \Gamma^j_{ij,i}.$$

De (2.7) e (2.11) podemos escrever essa equação como

$$\Gamma^j_{ij,i} = \Gamma^j_{ij}(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^j_{ij}) + \frac{g_{ii}}{g_{jj}} \big(\Gamma^i_{ij} \Gamma^j_{jj} - \Gamma^i_{ij,j} \big) - \lambda_i \lambda_j g_{ii} - \frac{g_{ii}}{g_{jj}} (\Gamma^i_{ij})^2 - \sum_{k \neq i,j} \Gamma^i_{ik} \Gamma^j_{jk} \frac{g_{ii}}{g_{kk}}, \tag{2.19}$$

que é equivalente a (2.18).

∎

2.3 Identidades das hipersuperfícies de Dupin

Nesta seção, apresentamos duas propriedades das hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizadas por linhas de curvatura, e curvaturas principais $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, todas distintas, obtida por L.A. Rodrigues em sua tese de Doutorado [28]. Para completude incluímos sua demonstração.

Iniciamos com uma proposição obtida derivando a equação de Gauss (2.18), a saber

Proposicão 2.3. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura e $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, as curvaturas principais distintas em cada ponto. Para $1 \leq i \neq j \leq n$, vale a seguinte igualdade*

$$\Gamma^j_{ij,ii} = \Gamma^j_{ij} f_{ij} - (\Gamma^j_{ij})^2 h_{ij} - (\Gamma^j_{ij})^3 + 3\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij,i}, \tag{2.20}$$

onde as funções f_{ij} e h_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, são dadas por

$$f_{ij} = -3(\Gamma^j_{ij})^2 + 6\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij} - 2(\Gamma^i_{ii})^2 - 3\Gamma^j_{ji,i} + \Gamma^i_{ii,i} - \lambda_i^2 g_{ii} - \sum_{k\neq i}(\Gamma^i_{ik})^2 \frac{g_{ii}}{g_{kk}}, \tag{2.21}$$

$$h_{ij} = 3(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^j_{ij}). \tag{2.22}$$

Além disso, as funções f_{ij} e h_{ij} não dependem de x_j, $1 \leq i \neq j \leq n$.

Demonstração. Derivando (2.19), que é equivalente a (2.18), com respeito a x_i e usando (2.10), (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{ij,ii} =& \Gamma^j_{ij}\big(\Gamma^i_{ii,i} - 2\Gamma^j_{ij,i}\big) + \Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij,i} + \lambda_i g_{ii}\Big[\lambda_j\big(\Gamma^j_{ij} - 2\Gamma^i_{ii}\big) - \lambda_i\Gamma^j_{ij}\Big] + \\ &+ \frac{g_{ii}}{g_{jj}}\Big[\big(\Gamma^j_{ij} - 2\Gamma^i_{ii}\big)\big(\Gamma^i_{ij,j} - \Gamma^i_{ij}\Gamma^j_{jj}\big) - 2(\Gamma^i_{ij})^2\Gamma^i_{ii}\Big] + \\ &+ \sum_{k\neq i,j}\Gamma^i_{ik}\frac{g_{ii}}{g_{kk}}\Big[\Gamma^j_{jk}\big(\Gamma^k_{ik} - 2\Gamma^i_{ii}\big) - \Gamma^j_{jk,i}\Big].\end{aligned}$$

Substituindo $\lambda_i\lambda_j g_{ii}$ dada por (2.18) e usando (2.14) temos

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{ij,ii} =& \Gamma^j_{ij}\Big[\Gamma^i_{ii,i} - 2(\Gamma^i_{ii})^2 + 3\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij} - (\Gamma^j_{ij})^2 - 3\Gamma^j_{ij,i} - \lambda_i^2 g_{ii} - \sum_{k\neq i}(\Gamma^i_{ik})^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}\Big] + \\ &+ 3\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij,i}.\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $-3\Gamma^i_{ii}(\Gamma^j_{ij})^2 + 2(\Gamma^j_{ij})^3$, na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{ij,ii} =& \Gamma^j_{ij}\left[\Gamma^i_{ii,i} - 2(\Gamma^i_{ii})^2 + 6\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij} - 3(\Gamma^j_{ij})^2 - 3\Gamma^j_{ij,i} - \lambda_i^2 g_{ii} - \sum_{k\neq i}(\Gamma^i_{ik})^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}\right] - \\ & - 3\Gamma^i_{ii}(\Gamma^j_{ij})^2 + 2(\Gamma^j_{ij})^3 + 3\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij,i}.\end{aligned}$$

Finalmente, considerando as funções f_{ij} e h_{ij}, respectivamente, definidas por (2.21) e (2.22) obtemos (2.20).

Mostremos agora que as funções f_{ij} e h_{ij} não dependem de x_j. Com efeito,

$$h_{ij,j} = 3(\Gamma^i_{ii,j} - \Gamma^j_{ij,j}),$$

logo por (2.8) e (2.12) temos

$$h_{ij,j} = 3(\Gamma^i_{ij}\Gamma^j_{ij} - \Gamma^i_{ij}\Gamma^j_{ij}) = 0.$$

Da mesma forma, derivando f_{ij} com respeito a x_j, obtemos

$$\begin{aligned}f_{ij,j} =& 6\Gamma^j_{ij}\left[-\Gamma^j_{ij,j} + \Gamma^i_{ii,j}\right] + 6\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij,j} - 4\Gamma^i_{ii}\Gamma^i_{ii,j} - 3\Gamma^j_{ij,ij} + \Gamma^i_{ii,ij} - 2\lambda_i\lambda_{i,j}g_{ii} - \\ & - (\lambda_i)^2 g_{ii,j} - \Gamma^i_{ij}\left[2\Gamma^i_{ij,j}\frac{g_{ii}}{g_{jj}} + \Gamma^i_{ij}\left(\frac{g_{ii}}{g_{jj}}\right)_{,j}\right] - \sum_{k\neq i,j}\Gamma^i_{ik}\left[2\Gamma^i_{ik,j}\frac{g_{ii}}{g_{kk}} + \Gamma^i_{ik}\left(\frac{g_{ii}}{g_{kk}}\right)_{,j}\right].\end{aligned}$$

Portanto, usando (2.5), (2.6), (2.8), (2.10), (2.12), (2.14) e (2.18), obtemos $f_{ij,j} = 0$.

■

Observação 2.4. Como consequência de (2.20) temos, usando (1.19), que

$$m_{jil,ii} = m_{jil}f_{ij} + 3(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^l_{li})m_{jil,i} + (-3\Gamma^i_{ii} + 2\Gamma^j_{ij} + \Gamma^l_{il})(m_{jil})^2. \qquad (2.23)$$

A próxima identidade, será utilizada no próximo capítulo e é dada pelo seguinte lema.

Lema 2.5. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, cujas curvaturas principais, $-\lambda_r$, $1 \leq r \leq n$, são distintas em* *cada ponto. Sejam i, j fixos, distintos, tais que para todo l, $1 \leq l \leq n$, $l \neq i$, $l \neq j$, $m_{jil} \neq 0$. Consideremos*

$$D := \big(\Gamma^j_{ij}\rho^l - \Gamma^j_{ij,i}\big)X - \big(\Gamma^j_{ij} + \rho^l\big)X_{,i} + X_{,ii}\,, \tag{2.24}$$

onde $\rho^l := \Gamma^l_{il} + \dfrac{m_{jil,i}}{m_{jil}}$. Então

$$D_{,i} = -\big(- 3\Gamma^i_{ii} + \Gamma^j_{ij} + \rho^l\big)D. \tag{2.25}$$

Demonstração. Inicialmente mostremos que

$$\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l - \Gamma^j_{ij,i}\big)_{,i} = -\big(- 3\Gamma^i_{ii} + \Gamma^j_{ij} + \rho^l\big)\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l - \Gamma^j_{ij,i}\big). \tag{2.26}$$

Com efeito, usando a definição de ρ^l, temos

$$\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l - \Gamma^j_{ij,i}\big)_{,i} = \Gamma^j_{ij,i}\rho^l + \Gamma^j_{ij}\left[\Gamma^l_{il,i} + \frac{m_{jil,ii}}{m_{jil}} - \left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2\right] - \Gamma^j_{ij,ii}.$$

De (2.23), temos

$$\frac{m_{jil,ii}}{m_{jil}} = f_{ij} + 3(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^l_{li})\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}} + (-3\Gamma^i_{ii} + 2\Gamma^j_{ij} + \Gamma^l_{il})m_{jil}. \tag{2.27}$$

Substituindo (2.27) e (2.20), na equação anterior, temos

$$\begin{aligned}\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l - \Gamma^j_{ij,i}\big)_{,i} = {}& \Gamma^j_{ij,i}\rho^l + \Gamma^j_{ij}\Bigg[\Gamma^l_{il,i} - \left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2 + f_{ij} + 3(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^l_{li})\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}} + \\ & + (-3\Gamma^i_{ii} + 2\Gamma^j_{ij} + \Gamma^l_{il})m_{jil}\Bigg] - \Big[\Gamma^j_{ij}f_{ij} - \big(\Gamma^j_{ij}\big)^2 h_{ij} - \big(\Gamma^j_{ij}\big)^3 + 3\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij,i}\Big].\end{aligned}$$

Usando (1.19), (2.22) e além disso somando e subtraindo $\Gamma^j_{ij}\Gamma^j_{ij,i}$, temos

$$\begin{aligned}\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l - \Gamma^j_{ij,i}\big)_{,i} = {}& \big(- 3\Gamma^i_{ii} + \Gamma^j_{ij} + \rho^l\big)\Gamma^j_{ij,i} + \Gamma^j_{ij}\big(\Gamma^l_{il,i} - \Gamma^j_{ij,i}\big) - \Gamma^j_{ij}\left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2 + \\ & + 3\Gamma^j_{ij}\big(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^l_{li}\big)\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}} + \Gamma^j_{ij}\big(\Gamma^j_{ij} - \Gamma^l_{il}\big)\big(- 3\Gamma^i_{ii} + 2\Gamma^j_{ij} + \Gamma^l_{il}\big) + (\Gamma^j_{ij})^2\big(3\Gamma^i_{ii} - 2\Gamma^j_{ij}\big).\end{aligned}$$

Usando novamente (1.19) e reagrupando alguns termos, temos

$$\begin{aligned}\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l - \Gamma^j_{ij,i}\big)_{,i} = {}& \big(- 3\Gamma^i_{ii} + \Gamma^j_{ij} + \rho^l\big)\Gamma^j_{ij,i} - \Gamma^j_{ij}\big(\Gamma^j_{ij} - \Gamma^l_{il}\big)\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}} - \Gamma^j_{ij}\left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2 + \\ & + 3\Gamma^j_{ij}\big(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^l_{li}\big)\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}} - \Gamma^j_{ij}\Gamma^l_{il}\big(- 3\Gamma^i_{ii} + \Gamma^j_{ij} + \Gamma^l_{il}\big) \\ = {}& \big(- 3\Gamma^i_{ii} + \Gamma^j_{ij} + \rho^l\big)\Gamma^j_{ij,i} - \big(\Gamma^j_{ij}\big)^2\left[\Gamma^l_{il} + \frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right] - \\ & - \Gamma^j_{ij}\left[2\Gamma^l_{il}\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}} + \left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2 + \big(\Gamma^l_{il}\big)^2\right] + 3\Gamma^i_{ii}\Gamma^j_{ij}\left[\Gamma^l_{il} + \frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right].\end{aligned}$$

Finalmente, usando a definição de ρ^l, obtemos

$$\begin{aligned}\big(\Gamma_{ij}^j\rho^l-\Gamma_{ij,i}^j\big)_{,i}=&\big(-3\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j+\rho^l\big)\Gamma_{ij,i}^j-\big(\Gamma_{ij}^j\big)^2\rho^l-\Gamma_{ij}^j\big(\rho^l\big)^2+3\Gamma_{ii}^i\Gamma_{ij}^j\rho^l\\ =&-\big(-3\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j+\rho^l\big)\big(\Gamma_{ij}^j\rho^l-\Gamma_{ij,i}^j\big).\end{aligned}$$

Além disso, vale a seguinte identidade

$$\begin{aligned}-\big(-\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j+\rho^l\big)_{,i}+\Gamma_{ij}^j\rho^l-\Gamma_{ij,i}^j-\lambda_i^2g_{ii}-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma_{ik}^i\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}=\\ =\big(-2\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j+\rho^l\big)\big(-\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j+\rho^l\big).\end{aligned}\tag{2.28}$$

De fato,

$$\begin{aligned}&-\big(-\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j+\rho^l\big)_{,i}+\Gamma_{ij}^j\rho^l-\Gamma_{ij,i}^j-\lambda_i^2g_{ii}-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma_{ik}^i\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}=\\ &=\Gamma_{ii,i}^i-2\Gamma_{ij,i}^j-\Gamma_{il,i}^l+\left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2-\frac{m_{jil,ii}}{m_{jil}}+\Gamma_{ij}^j\rho^l-\lambda_i^2g_{ii}-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma_{ik}^i\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}.\end{aligned}$$

Substituindo (2.21) em (2.27), e voltando na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned}&-\big(-\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j+\rho^l\big)_{,i}+\Gamma_{ij}^j\rho^l-\Gamma_{ij,i}^j-\lambda_i^2g_{ii}-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma_{ik}^i\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}=\\ &=\Gamma_{ii,i}^i-2\Gamma_{ij,i}^j-\Gamma_{il,i}^l+\left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2-\Bigg[-3\big(\Gamma_{ij}^j\big)^2+6\Gamma_{ii}^i\Gamma_{ij}^j-2\big(\Gamma_{ii}^i\big)^2+\Gamma_{ii,i}^i-3\Gamma_{ij,i}^j-\\ &-\lambda_i^2g_{ii}-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma_{ik}^i\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}+3\big(\Gamma_{ii}^i-\Gamma_{il}^l\big)\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}+\big(-3\Gamma_{ii}^i+2\Gamma_{ij}^j+\Gamma_{il}^l\big)m_{jil}\Bigg]-\\ &-\lambda_i^2g_{ii}-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma_{ik}^i\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}+\rho^l\Gamma_{ij}^j.\end{aligned}$$

Usando (1.19) na expressão acima e simplificando, temos

$$\begin{aligned}&-\big(-\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j+\rho^l\big)_{,i}+\Gamma_{ij}^j\rho^l-\Gamma_{ij,i}^j-\lambda_i^2g_{ii}-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma_{ik}^i\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}=\\ &=\big(\Gamma_{ij}^j-\Gamma_{il}^l\big)\frac{\big(\Gamma_{ij,i}^j-\Gamma_{il,i}^l\big)}{m_{jil}}+\left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2-\Bigg[-3\big(\Gamma_{ij}^j\big)^2+6\Gamma_{ii}^i\Gamma_{ij}^j-2\big(\Gamma_{ii}^i\big)^2+\\ &+3\big(\Gamma_{ii}^i-\Gamma_{il}^l\big)\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}+\big(-3\Gamma_{ii}^i+2\Gamma_{ij}^j+\Gamma_{il}^l\big)\big(\Gamma_{ij}^j-\Gamma_{il}^l\big)\Bigg]+\rho^l\Gamma_{ij}^j\\ &=\big(-2\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j\big)\big(-\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j\big)+\rho^l\Gamma_{ij}^j+\big(-3\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ij}^j\big)\left[\Gamma_{il}^l+\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right]+\big(\Gamma_{il}^l\big)^2+\\ &+2\Gamma_{il}^l\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}+\left(\frac{m_{jil,i}}{m_{jil}}\right)^2.\end{aligned}$$

Finalmente, usando a definição de ρ^l, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\big(-\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)_{,i}+\Gamma^j_{ij}\rho^l-\Gamma^j_{ij,i}-\lambda_i^2 g_{ii}-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma^i_{ik}\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}=\\
&=\big(-2\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}\big)\big(-\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}\big)+\big(-3\Gamma^i_{ii}+2\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)\rho^l\\
&=\big(-2\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)\big(-\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big).
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo (2.9) em (2.24), temos

$$
D=\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l-\Gamma^j_{ij,i}\big)X-\big(-\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)X_{,i}-\sum_{k\neq i}\Gamma^i_{ik}\frac{g_{ii}}{g_{kk}}X_{,k}-\lambda_i g_{ii}N. \tag{2.29}
$$

Derivando (2.29) com respeito a x_i e usando (1.16), (1.17), (2.3), (2.8) e (2.13), obtemos

$$
\begin{aligned}
D_{,i}=&\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l-\Gamma^j_{ij,i}\big)_{,i}X+\Big[\Gamma^j_{ij}\rho^l-\Gamma^j_{ij,i}-\big(-\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)_{,i}-\\
&-\Gamma^i_{ii}\big(-\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)-\sum_{k\neq i}\big(\Gamma^i_{ik}\big)^2\frac{g_{ii}}{g_{kk}}-\lambda_i^2 g_{ii}\Big]X_{,i}+\\
&+\big(-\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)\sum_{k\neq i}\Gamma^i_{ik}\frac{g_{ii}}{g_{kk}}X_{,k}-\sum_{k\neq i}\Gamma^i_{ik}\big(2\Gamma^i_{ii}-\Gamma^k_{ik}\big)\frac{g_{ii}}{g_{kk}}X_{,k}-\\
&-\sum_{k\neq i}\Gamma^i_{ik}\Gamma^k_{ik}\frac{g_{ii}}{g_{kk}}X_{,k}+\big(-3\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)\lambda_i g_{ii}N.
\end{aligned}
$$

Assim, de (2.26) e (2.28), temos

$$
\begin{aligned}
D_{,i}=&-\big(-3\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)\big(\Gamma^j_{ij}\rho^l-\Gamma^j_{ij,i}\big)X+\\
&+\big(-3\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)\big(-\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)X_{,i}+\\
&+\big(-3\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)\sum_{k\neq i}\Gamma^i_{ik}\frac{g_{ii}}{g_{kk}}X_{,k}+\big(-3\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{ij}+\rho^l\big)\lambda_i g_{ii}N.
\end{aligned}
$$

Logo de (2.29), obtemos (2.25).

■

Capítulo 3

Hipersuperfície de Dupin em $\mathbb{R}^6$

Neste capítulo, estudamos as hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^6$ parametrizadas por linhas de curvatura, com cinco curvaturas principais distintas, cujos invariantes de Laplace satisfazem certas condições genéricas. Fornecemos uma caracterização local dessas hipersuperfícies de Dupin, em termos de três funções vetoriais que dependem de duas variáveis e uma função vetorial que depende de apenas uma variável, o que mostra que essa classe é muito rica de exemplos. Em seguida apresentamos propriedades destas funções vetoriais e obtemos que certos invariantes de Laplace devem satisfazer certas condições, as quais serão essenciais no próximo capítulo.

3.1 Uma classe de hipersuperfície de Dupin em $\mathbb{R}^6$

Nesta seção, fornecemos uma caracterização local das hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^6$ parametrizada por linhas de curvatura, com cinco curvaturas principais distintas, com certos invariantes de Laplace não nulos acrescidos de algumas condições genéricas. Tais condições são essenciais, e são motivados por [27], onde C.M.C. Riveros, L.A. Rodrigues e K. Tenenblat, mostraram que não existem hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvaturas, curvaturas principais distintas, com todos os invariantes de Laplace nulos.

Iniciamos com algumas notações que serão úteis nas demonstrações dos resultados. Adotaremos a seguinte convenção de índices $3 \leq l \leq 5$ e $4 \leq r \leq 5$. Consideremos as funções m_{ijk}, definidas em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$, satisfazendo (1.20). Suponha que $m_{21l} \neq 0$ e $m_{31r} \neq 0$.

Defina as funções

$$T_{21r} = m_{21r} + \left(\log \frac{m_{213}}{m_{31r}}\right)_{,1}, \qquad U_{31r} = m_{31r} + \left(\log \frac{m_{213}}{m_{21r}}\right)_{,1},$$

$$T_{415} = T_{215} - T_{214}, \qquad U_{415} = U_{315} - U_{314}, \tag{3.1}$$

$$P_1 = m_{213} T_{214}, \qquad P_i = m_{21(i+1)} U_{314}, \qquad 2 \leq i \leq 3, \qquad P_4 = m_{215} U_{315}. \tag{3.2}$$

Segue da definição das funções T_{21r}, U_{31r} e das propriedades (1.20), que

$$m_{31r} T_{21r} = m_{21r} U_{31r}. \tag{3.3}$$

Agora de (3.2) e (3.3), obtemos

$$m_{213}\frac{1}{P_2} - m_{214}\frac{1}{P_3} = 0, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = 0. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$, uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, cujas curvaturas principais, $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, são todas distintas. Sejam m_{ijk}, $1 \leq i, j, k \leq 5$ distintos, dados por (1.19) satisfazendo (1.20), P_i, T_{415}, U_{415}, $1 \leq i \leq 4$, dados por (3.2) e (3.1), definidas em Ω. Suponha que $P_i \neq 0$, $T_{415} \neq 0$ e $U_{415} \neq 0$ em Ω. Então*

$$X = V(B_1 - B_2 + B_3), \tag{3.5}$$

onde

$$V = \frac{e^{\int \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} m_{231} dx_3}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad B_i = \frac{1}{Q_i}\left[\int \frac{Q_i G_1}{P_i} dx_1 + G_{(i+1)5}\right], \ 1 \leq i \leq 3, \tag{3.6}$$

$G_{j5} = G_{j5}(x_j, x_5)$, $2 \leq j \leq 4$, $G_1 = G_1(x_1)$, são funções vetorias de $\mathbb{R}^6$, $A = -\int m_{231,1} dx_3$, $A_{,r} = -m_{2r1,1}$, $4 \leq r \leq 5$, $A_{,2} = 0$ e

$$Q_i = \begin{cases} e^{\int A dx_1}, & se \quad i = 1 \\ e^{\int (A + m_{21(i+1)}) dx_1}, & se \quad 2 \leq i \leq 3. \end{cases} \tag{3.7}$$

Considerando

$$\alpha^1 = \left(A + \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)S + S_{,1}\,, \qquad \alpha^j = \frac{\lambda_{1,j}}{\lambda_j - \lambda_1}S + S_{,j}\,, \quad 2 \leq j \leq 5, \tag{3.8}$$

onde

$$S = \sum_{1=1}^{4}(-1)^{i+1}B_i,$$

têm-se que α^i satisfazem as seguintes propriedades em Ω, para todo $1 \leq i, j \leq 5$:

$$a)\ \alpha^i \neq 0,$$

$$b)\ <\alpha^i, \alpha^j>= 0, \quad i \neq j.$$

Para a demonstração desse Teorema precisamos de quatro lemas, que são obtidos usando o Teorema 1.8 de Redução. Iniciamos com um lema que reduz o número de variáveis independentes, escrevendo X em termos de duas funções.

Lema 3.2. *Seja X uma hipersuperfície de Dupin nas condições do Teorema 3.1. Então*

$$X = \frac{V}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big), \tag{3.9}$$

onde L^3 e L^2 são funções que independem de x_3 e x_2 respectivamente e satisfazem os sistemas

$$\begin{cases} L^3_{,12} + \big(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\big)L^3_{,2} - m_{123}m_{213}L^3 = 0, \\ L^3_{,1r} + \big(A + m_{21r} - \frac{m_{31r,1}}{m_{31r}}\big)L^3_{,r} + m_{31r}m_{1r3}L^3 = 0, \\ L^3_{,2r} + \frac{m_{31r}m_{2r3}}{m_{213}}L^3_{,2} + \frac{m_{r23}m_{213}}{m_{31r}}L^3_{,r} = 0, \\ L^3_{,45} + \frac{m_{354}m_{315}}{m_{314}}L^3_{,4} + \frac{m_{314}m_{345}}{m_{315}}L^3_{,5} = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} L^2_{,1l} + \big(A + m_{21l} - \frac{m_{21l,1}}{m_{21l}}\big)L^2_{,l} + m_{21l}m_{1l2}L^2 = 0, \\ L^2_{,3r} + \frac{m_{2r3}m_{21r}}{m_{213}}L^2_{,3} + \frac{m_{23r}m_{213}}{m_{21r}}L^2_{,r} = 0, \\ L^2_{,45} + \frac{m_{215}m_{254}}{m_{214}}L^2_{,4} + \frac{m_{214}m_{245}}{m_{215}}L^2_{,5} = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

Demonstração. Por (1.17), temos que

$$X_{,kl} - \Gamma^k_{lk}X_{,k} - \Gamma^l_{lk}X_{,l} = 0, \qquad 1 \leq k \neq l \leq 5. \tag{3.12}$$

Pelo Lema 1.13, para $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, a transformação

$$X = V\overline{X}, \tag{3.13}$$

onde V é dada por (3.6), reduz o sistema (3.12) ao sistema,

$$\begin{cases} \overline{X}_{,12} + A\overline{X}_{,2} = 0, \\ \overline{X}_{,1l} + (A + m_{21l})\overline{X}_{,l} = 0, \\ \overline{X}_{,2l} + m_{1l2}\overline{X}_{,2} + m_{12l}\overline{X}_{,l} = 0, \\ \overline{X}_{,3r} + m_{1r3}\overline{X}_{,3} + m_{13r}\overline{X}_{,r} = 0, \\ \overline{X}_{,45} + m_{154}\overline{X}_{,4} + m_{145}\overline{X}_{,5} = 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

onde

$$A = -\int m_{231,1}dx_3, \qquad A_{,2} = 0, \qquad A_{,l} = -m_{2l1,1}. \tag{3.15}$$

Da terceira equação de (1.20) e de (3.15), temos que

$$(A + m_{21l})_{,l} = 0. \tag{3.16}$$

Logo, de (3.16) e (3.15), temos que as duas primeiras equações do sistema (3.14), podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} \big(\overline{X}_{,1} + A\overline{X}\big)_{,2} &= 0, \\ \big(\overline{X}_{,1} + (A + m_{21l})\overline{X}\big)_{,l} &= 0. \end{aligned}$$

Integrando estas equações, temos

$$\begin{aligned} \overline{X}_{,1} + A\overline{X} &= L^2, \\ \overline{X}_{,1} + (A + m_{21l})\overline{X} &= L^l, \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde $L^j = L^j(\widehat{x}_j)$, $2 \leq j \leq 5$, são funções que não dependem de x_j.

Subtraindo as equações de (3.17), e usando (1.20), temos que

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{1}{m_{21l}}\big(L^l - L^2\big), \qquad 3 \leq l \leq 5, \\ \overline{X} &= \frac{1}{m_{31r}}\big(L^r - L^3\big), \qquad 4 \leq r \leq 5, \end{aligned}$$

onde estamos usando a hipótese $m_{21l} \neq 0$ e $m_{31r} \neq 0$. Portanto, para $4 \leq r \leq 5$, temos

$$L^3 - L^2 = \frac{m_{213}}{m_{21r}}\big(L^r - L^2\big) = \frac{m_{213}}{m_{31r}}\big(L^r - L^3\big). \tag{3.18}$$

Logo usando (1.20), concluímos desta igualdade que

$$L^r = \frac{1}{m_{213}}\big(m_{21r}L^3 - m_{31r}L^2\big),$$

e podemos considerar

$$\overline{X} = \frac{1}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big). \tag{3.19}$$

Derivando (3.19) e usando as relações de (1.20), temos

$$\overline{X}_{,1} = -\frac{m_{213,1}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big) + \frac{1}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,1}, \tag{3.20}$$

$$\overline{X}_{,2} = -\frac{m_{123}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big) + \frac{1}{m_{213}}L^3_{,2}\,, \tag{3.21}$$

$$\overline{X}_{,3} = -\frac{m_{132}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big) - \frac{1}{m_{213}}L^2_{,3}\,, \tag{3.22}$$

$$\overline{X}_{,r} = -\frac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big) + \frac{1}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,r}, \tag{3.23}$$

$$\overline{X}_{,12} = \frac{1}{m_{213}}L^3_{,12} - \frac{m_{213,1}}{(m_{213})^2}L^3_{,2} - \frac{m_{123}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,1} - \left(\frac{m_{123}}{m_{213}}\right)_{,1}\big(L^3 - L^2\big), \tag{3.24}$$

$$\overline{X}_{,13} = -\frac{1}{m_{213}}L^2_{,13} + \frac{m_{213,1}}{(m_{213})^2}L^2_{,3} - \frac{m_{132}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,1} - \left(\frac{m_{132}}{m_{213}}\right)_{,1}\big(L^3 - L^2\big), \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\overline{X}_{,1r} = {} & \frac{1}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,1r} - \frac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big)_{,1} - \frac{m_{213,1}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big)_{,r} + \\ & + \left(\frac{1}{m_{213}}\right)_{,1r}\big(L^3 - L^2\big),\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\overline{X}_{,23} = -\frac{m_{132}}{m_{213}}L^3_{,2} + \frac{m_{123}}{m_{213}}L^2_{,3} - 2\frac{m_{123,3}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big), \tag{3.27}$$

$$\overline{X}_{,2r} = \frac{1}{m_{213}}L^3_{,2r} - \frac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}L^3_{,2} - \frac{m_{123}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,r} - \left(\frac{m_{123}}{m_{213}}\right)_{,r}\big(L^3 - L^2\big), \tag{3.28}$$

$$\overline{X}_{,3r} = -\frac{1}{m_{213}}L^2_{,3r} + \frac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}L^2_{,3} - \frac{m_{132}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,r} - \left(\frac{m_{132}}{m_{213}}\right)_{,r}\big(L^3 - L^2\big), \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\overline{X}_{,45} = {} & \frac{1}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,45} - \frac{m_{213,5}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big)_{,4} - \frac{m_{213,4}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big)_{,5} + \\ & + \left(\frac{1}{m_{213}}\right)_{,45}\big(L^3 - L^2\big).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Substituindo (3.19) e (3.20) nas equações de (3.17), obtemos

$$\begin{aligned}\left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3 - L^2\big) + \big(L^3 - L^2\big)_{,1} &= m_{213}L^2, \\ \left(A + m_{21l} - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3 - L^2\big) + \big(L^3 - L^2\big)_{,1} &= m_{213}L^l.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Agora vamos substituir as derivadas de $\overline{X}$ em cada equação do sistema (3.14).

Substituindo (3.21) e (3.24) na primeira equação do sistema (3.14), temos

$$\frac{1}{m_{213}}L,^3_{12} - \frac{m_{213,1}}{(m_{213})^2}L,^3_2 - \frac{m_{123}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,1} - \left(\frac{m_{123}}{m_{213}}\right)_{,1}\big(L^3 - L^2\big) - A\Bigg[\frac{m_{123}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big) -$$
$$- \frac{1}{m_{213}}L^3{,_2}\Bigg] = 0.$$

Calculando $\left(\frac{m_{123}}{m_{213}}\right)_{,1}$, usando a terceira equação de (1.20), temos

$$\left(\frac{m_{123}}{m_{213}}\right)_{,1} = \frac{1}{m_{213}}\left(m_{123}m_{213} - \frac{m_{123}m_{213,1}}{m_{213}}\right) = \frac{m_{123}}{m_{213}}\left(m_{213} - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right).$$

Substituindo essa expressão na equação acima, e agrupando os termos semelhantes, temos

$$L,^3_{12} + \left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)L,^3_2 - m_{123}\left[\left(A + m_{213} - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3 - L^2\big) + \big(L^3 - L^2\big)_{,1}\right] = 0.$$

Logo usando a segunda equação de (3.31) para $l = 3$, obtemos a primeira equação do sistema (3.10).

Analogamente, substituindo (3.22) e (3.25) na segunda equação do sistema (3.14) com $l = 3$, obtemos

$$L,^2_{13} + \left(A + m_{213} - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)L,^2_3 + m_{132}\left[\left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3 - L^2\big) + \big(L^3 - L^2\big)_{,1}\right] = 0.$$

Donde usando a primeira equação de (3.31), obtemos a primeira equação do sistema (3.11) para $l = 3$.

Derivando (3.18), com respeito a x_r e usando (1.20), obtemos

$$\big(L^3 - L^2\big)_{,r} = -\frac{m_{2r3}m_{31r}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big) - \frac{m_{213}}{m_{21r}}L,^2_r. \tag{3.32}$$

Isolando $L,^3_r$, temos

$$L,^3_r = \frac{m_{31r}}{m_{21r}}L,^2_r - \frac{m_{2r3}m_{31r}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big). \tag{3.33}$$

Substituindo (3.23) e (3.26) na segunda equação do sistema (3.14) com $l = r$, $4 \leq r \leq 5$, temos

$$\frac{1}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,1r} - \frac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big)_{,1} - \frac{m_{213,1}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big)_{,r} + \left(\frac{1}{m_{213}}\right)_{,1r}\big(L^3 - L^2\big) +$$
$$+ (A + m_{21r})\left(-\frac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}\big(L^3 - L^2\big) + \frac{1}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,r}\right) = 0.$$

Somando e subtraindo $\dfrac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}\dfrac{m_{213,1}}{(m_{213})}(L^3-L^2)$ na equação anterior, e agrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m_{213}}\big(L^3-L^2\big)_{,1r}-\frac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}\left[\big(L^3-L^2\big)_{,1}+\left(A-\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3-L^2\big)\right]-\\&-\frac{m_{213,r}}{(m_{213})^2}\left(m_{21r}+\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3-L^2\big)+\left(\frac{A+m_{21r}}{m_{213}}-\frac{m_{213,1}}{(m_{213})^2}\right)\big(L^3-L^2\big)_{,r}+\\&+\left(\frac{1}{m_{213}}\right)_{,1r}\big(L^3-L^2\big)=0.\end{aligned}$$

Multiplicando essa última equação por m_{213} e usando a primeira equação de (3.31), temos

$$\begin{aligned}&\big(L^3-L^2\big)_{,1r}-\frac{m_{213,r}}{m_{213}}m_{213}L^2-\frac{m_{213,r}}{m_{213}}\left(m_{21r}+\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3-L^2\big)+\\&\left(A+m_{21r}-\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3-L^2\big)_{,r}+m_{213}\left(\frac{1}{m_{213}}\right)_{,1r}\big(L^3-L^2\big)=0.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Derivando (3.32) com respeito a x_1, como $m_{213,r}=m_{2r3,1}=-m_{3r2,1}$, obtemos

$$\begin{aligned}\big(L^3-L^2\big)_{,1r}=&\frac{-m_{213,r}m_{31r}}{m_{213}}\big(L^3-L^2\big)+\frac{m_{3r2}m_{31r}}{m_{213}}\left[\frac{m_{31r,1}}{m_{31r}}-\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right]\big(L^3-L^2\big)+\\&+\frac{m_{3r2}m_{31r}}{m_{213}}\big(L^3-L^2\big)_{,1}-\frac{m_{213}}{m_{21r}}\left[\frac{m_{213,1}}{m_{213}}-\frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right]L^2_{,r}-\frac{m_{213}}{m_{21r}}L^2_{,1r}.\end{aligned}$$

Somando e subtraído $\dfrac{Am_{3r2}m_{31r}}{m_{213}}\big(L^3-L^2\big)$ nessa última equação, obtemos

$$\begin{aligned}\big(L^3-L^2\big)_{,1r}=&\frac{-m_{213,r}m_{31r}}{m_{213}}\big(L^3-L^2\big)+\frac{m_{3r2}m_{31r}}{m_{213}}\left[\left(A-\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)\big(L^3-L^2\big)+\right.\\&\left.+\big(L^3-L^2\big)_{,1}\right]+\frac{m_{3r2}m_{31r}}{m_{213}}\left(\frac{m_{31r,1}}{m_{31r}}-A\right)\big(L^3-L^2\big)-\\&-\frac{m_{213}}{m_{21r}}\left[\frac{m_{213,1}}{m_{213}}-\frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right]L^2_{,r}-\frac{m_{213}}{m_{21r}}L^2_{,1r}.\end{aligned}$$

Usando a primeira equação de (3.31) e agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned}\big(L^3-L^2\big)_{,1r}=&\left[\frac{-m_{213,r}m_{31r}}{m_{213}}+\frac{m_{3r2}m_{31r}}{m_{213}}\left(\frac{m_{31r,1}}{m_{31r}}-A\right)\right]\big(L^3-L^2\big)+m_{3r2}m_{31r}L^2-\\&-\frac{m_{213}}{m_{21r}}\left[\frac{m_{213,1}}{m_{213}}-\frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right]L^2_{,r}-\frac{m_{213}}{m_{21r}}L^2_{,1r}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Calculando $\left(\dfrac{1}{m_{213}}\right)_{,1r}$, e usando (1.20), temos

$$\left(\frac{1}{m_{213}}\right)_{,1r} = \frac{m_{1r2}m_{21r}}{m_{213}} - \frac{2m_{213,1}m_{2r3}m_{31r}}{(m_{213})^3} + \frac{1}{(m_{213})^2}(m_{1r2}m_{213,1}+m_{213,r}m_{31r}+m_{2r3}m_{31r,1}),$$

logo

$$m_{213}\left(\frac{1}{m_{213}}\right)_{,1r} = m_{1r2}m_{21r} - \frac{2m_{213,1}m_{2r3}m_{31r}}{(m_{213})^2} + \frac{m_{1r2}m_{213,1} + m_{213,r}m_{31r} + m_{2r3}m_{31r,1}}{m_{213}}. \tag{3.36}$$

Substituindo (3.32), (3.35) e (3.36) em (3.34), agrupando os termos semelhantes e usando as relações de (1.20), temos

$$L_{,1r}^{2} + \big(A + m_{21r} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\big)L_{,r}^{2} + m_{21r}m_{1r2}L^2 = 0, \tag{3.37}$$

o que completa a prova da primeira equação de (3.11).

Derivando (3.33) com respeito a x_1, temos

$$\begin{aligned} L_{,1r}^{3} =& \frac{m_{31r}}{m_{21r}}\left(\frac{m_{31r,1}}{m_{31r}} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right)L_{,r}^{2} + \frac{m_{31r}}{m_{21r}}L_{,1r}^{2} - \left(\frac{m_{2r3}m_{31r}}{m_{213}}\right)_{,1}\big(L^3 - L^2\big) - \\ &+ \frac{m_{2r3}m_{31r}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big)_{,1}. \end{aligned}$$

Substituindo (3.37), (3.33) na equação acima, calculando $\left(\dfrac{m_{2r3}m_{r13}}{m_{213}}\right)_{,1}$ e usando as relações de (1.20) e também a primeira equação de (3.31), obtemos a segunda equação de (3.10).

Substituindo (3.21), (3.23), (3.28) e (3.22), (3.23), (3.29), respectivamente, na terceira e quarta equação do sistema (3.14) e usando (1.20), obtemos

$$\begin{aligned} L_{,2r}^{3} + \frac{m_{31r}m_{2r3}}{m_{213}}L_{,2}^{3} + m_{32r}\big(L^3 - L^2\big)_{,r} + \frac{m_{32r}m_{2r3}m_{21r}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big) = 0, \\ L_{,3r}^{2} + \frac{m_{21r}m_{2r3}}{m_{213}}L_{,3}^{2} + m_{r32}\big(L^3 - L^2\big)_{,r} + \frac{m_{2r3}m_{23r}m_{r13}}{m_{213}}\big(L^3 - L^2\big) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo (3.32) nas duas equações anteriores, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} L_{,2r}^{3} + \frac{m_{31r}m_{2r3}}{m_{213}}L_{,2}^{3} + m_{32r}m_{2r3}(L^3 - L^2) - \frac{m_{213}m_{32r}}{m_{21r}}L_{,r}^{2} = 0, \\ L_{,3r}^{2} + \frac{m_{21r}m_{2r3}}{m_{213}}L_{,3}^{2} + \frac{m_{23r}m_{213}}{m_{21r}}L_{,r}^{2} = 0. \end{aligned}$$

Isolando $L_{,r}^2$ em (3.33) e substituindo na primeira equação acima, obtemos assim a terceira equação de (3.10) e a segunda equação de (3.11).

Substituindo (3.30) e (3.23), na última equação de (3.14), temos

$$\begin{aligned}\left(L^3-L^2\right)_{,45} &+ \left[m_{154}-\frac{m_{213,5}}{m_{213}}\right]\left(L^3-L^2\right)_{,4}+\left[m_{145}-\frac{m_{213,4}}{m_{213}}\right]\left(L^3-L^2\right)_{,5}+\\ &+\left[\left(\frac{1}{m_{213}}\right)_{,45}m_{213}-\frac{m_{154}m_{213,4}}{m_{213}}-\frac{m_{145}m_{213,5}}{m_{213}}\right]\left(L^3-L^2\right)=0.\end{aligned}$$

Considerando (3.32) com $r=4$, e derivando com respeito a x_5, temos

$$\begin{aligned}\left(L^3-L^2\right)_{,45}=&\frac{m_{314}}{m_{213}}\left[m_{342,5}+m_{342}\frac{m_{314,5}}{m_{314}}-m_{342}\frac{m_{213,5}}{m_{213}}\right](L^3-L^2)+\\ &+\frac{m_{342}m_{314}}{m_{213}}\left(L^3-L^2\right)_{,5}-\frac{m_{213}}{m_{214}}\left[\frac{m_{213,5}}{m_{213}}-\frac{m_{214,5}}{m_{214}}\right]L_{,4}^2-\frac{m_{213}}{m_{214}}L_{,45}^2.\end{aligned}$$

Comparando essas duas equações e usando (3.32), obtemos

$$L_{,45}^2+\frac{m_{215}m_{254}}{m_{214}}L_{,4}^2+\frac{m_{214}m_{245}}{m_{215}}L_{,5}^2=0. \tag{3.38}$$

Por fim, considerando (3.33) com $r=4$ e derivando com respeito a x_5 e em seguida usando (3.32) e (3.38) obtemos a última equação do sistema (3.10), concluindo assim a demonstração do lema.

■

A Proposição a seguir, nos fornece os invariantes de Laplace dos sistemas (3.10) e (3.11).

Proposicão 3.3. *Denotando por M_{ij}^3 e M_{ijk}^3 os invariantes n-dimensionais do sistema (3.10) e por M_{ij}^2 e M_{ijk}^2 os invariantes n-dimensionais do sistema (3.11). Então*

$$\begin{aligned}M_{2i}^3=&M_{4j}^3=M_{5k}^3=0,\quad i\in\{1,4,5\},\quad j\in\{1,2,5\},\quad k\in\{1,2,4\},\\ M_{1s}^3=&m_{1s3}m_{s13}\quad s\in\{2,4,5\},\qquad M_{12r}^3=\frac{m_{32r}m_{312}}{m_{31r}},\\ M_{145}^3=&\frac{m_{314}m_{345}}{m_{315}},\qquad M_{154}^3=\frac{m_{354}m_{315}}{m_{314}},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M^3_{1r2} &= \frac{m_{31r}m_{2r3}}{m_{213}} & M^3_{245} &= m_{314}\left(\frac{m_{345}}{m_{315}} - \frac{m_{243}}{m_{213}}\right),\\
M^3_{254} &= m_{315}\left(\frac{m_{354}}{m_{314}} - \frac{m_{253}}{m_{213}}\right), & M^3_{425} &= m_{312}\left(\frac{m_{325}}{m_{315}} - \frac{m_{324}}{m_{314}}\right),\\
M^3_{21r} &= m_{21r} + \left(\log\frac{m_{213}}{m_{31r}}\right)_{,1}, & M^3_{415} &= m_{415} + \left(\log\frac{m_{314}}{m_{315}}\right)_{,1},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
M^2_{l1} &= M^2_{3r} = M^2_{r3} = M^2_{45} = M^2_{54} = 0, & M^2_{1r} &= -m_{21r}m_{1r2}\\
M^2_{13r} &= \frac{m_{23r}m_{213}}{m_{21r}}, & M^2_{1r3} &= \frac{m_{2r3}m_{21r}}{m_{213}},\\
M^2_{145} &= \frac{m_{214}m_{245}}{m_{215}}, & M^2_{154} &= \frac{m_{254}m_{215}}{m_{214}},\\
M^2_{345} &= m_{214}\left(\frac{m_{245}}{m_{215}} - \frac{m_{243}}{m_{213}}\right), & M^2_{354} &= m_{215}\left(\frac{m_{254}}{m_{214}} - \frac{m_{253}}{m_{213}}\right),\\
M^2_{435} &= m_{213}\left(\frac{m_{235}}{m_{215}} - \frac{m_{234}}{m_{214}}\right), & M^2_{31r} &= m_{31r} + \left(\log\frac{m_{213}}{m_{21r}}\right)_{,1},\\
M^2_{415} &= m_{415} + \left(\log\frac{m_{214}}{m_{215}}\right)_{,1}, & & 4 \leq r \leq 5.
\end{aligned}
$$

Demonstração. A demonstração desta proposição é consequência direta da definição dos invariantes de Laplace n-dimensionais dada em (1.5).

■

Observação 3.4. Note que, $M^3_{21r} = T_{21r}$, $M^3_{415} = T_{415}$, $M^2_{31r} = U_{21r}$, $M^2_{415} = U_{415}$, dados em (3.1), e portanto por (3.2) e (3.3), são não nulos.

O próximo lema é consequência da Proposição 3.3. Sua demonstração pode ser encontrada em [28] na prova de um resultado similar para hipersuperfícies de Dupin em $\mathbf{R}^5$. E para completude iremos incluí-la.

Lema 3.5. *Seja X uma hipersuperfície de Dupin nas condições do Teorema 3.1. Então*

$$
\begin{aligned}
M^2_{415} + \left(\log\frac{M^2_{314}}{M^2_{315}}\right)_{,1} &= 0, & M^3_{415} + \left(\log\frac{M^3_{214}}{M^3_{215}}\right)_{,1} &= 0,\\
M^2_{315} + \left(\log\frac{M^2_{314}}{M^2_{415}}\right)_{,1} &= 0, & M^3_{215} + \left(\log\frac{M^3_{214}}{M^3_{415}}\right)_{,1} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Demonstração. Usando a Proposição 3.3, para todo $4 \leq r \leq 5$, temos

$$M^2_{31r,1} = m_{31r,1} + \frac{m_{213,11}}{m_{213}} - \left(\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)^2 - \frac{m_{21r,11}}{m_{21r}} + \left(\frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right)^2.$$

De (2.23) para $j = 2$, $i = 1$, $l = 3$, obtemos $\dfrac{m_{213,11}}{m_{213}}$ e para $j = 2$, $i = 1$, $l = k$, obtemos $\dfrac{m_{21r,11}}{m_{21r}}$. Logo substituindo na equação acima, temos

$$\begin{aligned} M^2_{31r,1} =& m_{31r,1} + 3(\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{13})\frac{m_{213,1}}{m_{213}} + (-3\Gamma^1_{11} + 2\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13})m_{213} - \left(\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)^2 - \\ &- 3(\Gamma^1_{11} - \Gamma^r_{1r})\frac{m_{21r,1}}{m_{21r}} - (-3\Gamma^1_{11} + 2\Gamma^2_{21} + \Gamma^r_{1r})m_{21r} + \left(\frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right)^2. \end{aligned}$$

De (1.20), temos

$$m_{31r} = -m_{213} + m_{21r}. \tag{3.40}$$

Logo usando (1.19) e a derivada de (3.40) em relação a x_1, podemos reescrever $M^2_{31r,1}$, como

$$\begin{aligned} M^2_{31r,1} =& \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\left(3\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12} - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right) - \\ &- \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\left(3\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^r_{1r} - \Gamma^2_{12} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right) + \\ &+ (-3\Gamma^1_{11} + 2\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13})m_{213} - (-3\Gamma^1_{11} + 2\Gamma^2_{21} + \Gamma^r_{1r})m_{21r}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo

$$\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}, \qquad \Gamma^r_{1r}\frac{m_{213,1}}{m_{213}}, \qquad \Gamma^3_{13}\frac{m_{21r,1}}{m_{21r}},$$

e reagrupando os termos de forma adequada, temos

$$\begin{aligned} M^2_{31r,1} =& -\left(- 3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^r_{1r} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right)\left(\frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right) - \\ &- m_{31r}\left(\frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right) + (-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + 2\Gamma^2_{12})m_{213} - \\ &- (-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^r_{1r} + 2\Gamma^2_{12})m_{21r}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $m_{213}m_{21r}$ e escrevendo de maneira conveniente, temos

$$\begin{aligned}
M^2_{31r,1} =& -\bigg(-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^r_{1r} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg)\bigg(\frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg) - \\
&- m_{31r}\bigg(\frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg) + (-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + 2\Gamma^2_{12})m_{213} - \\
&- (-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^r_{1r} + 2\Gamma^2_{12})m_{21r} - m_{213}(\Gamma^2_{12} - \Gamma^r_{1r}) + (\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13})m_{21r} \\
=& -\bigg(-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^r_{1r} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg)\bigg(\frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg) - \\
&- m_{31r}\bigg(\frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg) + (-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^r_{1r})(m_{213} - m_{21r}) \\
=& -\bigg(-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^r_{1r} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg)\bigg(m_{31r} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (3.40).

Portanto pela definição da função M^2_{31k}, obtemos

$$M^2_{31r,1} = -\bigg(-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^r_{1r} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\bigg)M^2_{31r}. \tag{3.41}$$

Assim subtraindo (3.41) para $r = 5$ por (3.41) para $r = 4$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{M^2_{315,1}}{M^2_{315}} - \frac{M^2_{314,1}}{M^2_{314}} =& -\bigg(-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^5_{15} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{215,1}}{m_{215}}\bigg) - \\
&+ \bigg(-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^4_{14} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{214,1}}{m_{214}}\bigg) \\
=& -\Gamma^5_{15} - \frac{m_{215,1}}{m_{215}} + \Gamma^4_{14} + \frac{m_{214,1}}{m_{214}} \\
=& m_{415} - \frac{m_{215,1}}{m_{215}} + \frac{m_{214,1}}{m_{214}} \\
=& M^2_{415},
\end{aligned}$$

onde usamos a Proposição 3.3 e (1.20). Logo temos a primeira equação de (3.39).

Pela Proposição 3.3, temos que

$$M^3_{415} - M^2_{415} = \bigg(\log\frac{m_{314}}{m_{315}}\bigg)_{,1} - \bigg(\log\frac{m_{214}}{m_{215}}\bigg)_{,1} = \bigg(\log\frac{m_{314}m_{215}}{m_{315}m_{214}}\bigg)_{,1}.$$

Substituindo a primeira equação de (3.39), na expressão anterior, obtemos

$$M^3_{415} = \bigg(\log\frac{m_{314}m_{215}}{m_{315}m_{214}}\bigg)_{,1} + \bigg(\log\frac{M^2_{315}}{M^2_{314}}\bigg)_{,1} = \bigg(\log\frac{m_{314}m_{215}M^2_{315}}{m_{315}m_{214}M^2_{314}}\bigg)_{,1}. \tag{3.42}$$

Por (3.3) e a Observação 3.4, temos

$$m_{215}M^2_{315} = m_{315}M^3_{215} \qquad \text{e} \qquad m_{214}M^2_{314} = m_{314}M^3_{214}.$$

Logo de (3.42) obtemos a segunda equação de (3.39). Finalmente, usando novamente a Proposição 3.3, obtemos

$$\begin{aligned}
M^3_{415,1} &= -\left(-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^4_{12} + \Gamma^5_{15} + \frac{m_{314,1}}{m_{314}} + \frac{m_{315,1}}{m_{315}} \right) M^3_{415},\\
M^2_{415,1} &= -\left(-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^4_{12} + \Gamma^5_{15} + \frac{m_{214,1}}{m_{214}} + \frac{m_{215,1}}{m_{215}} \right) M^2_{415}.
\end{aligned}$$

Portando comparando essas duas equações com as duas primeiras equações de (3.39), obtemos as duas últimas equações de (3.39).

■

Nos dois próximos lemas, usamos o Lema 3.5 para aplicarmos o Teorema 1.8 de redução, obtendo assim as duas funções que determinam X.

Lema 3.6. *A solução do sistema (3.10) é dada por*

$$L^3 = m_{213}B_1 - m_{314}B_3,$$

onde L^3 não depende de x_3 e B_i são definidos em (3.6).

Demonstração. Usando as relações de (1.20) e (3.15), temos

$$\begin{aligned}
\left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} \right)_{,2} &= m_{213}m_{321},\\
\left(A + m_{21r} - \frac{m_{31r,1}}{m_{31r}} \right)_{,r} &= m_{31r}m_{1r3}.
\end{aligned}$$

Logo das duas primeiras equações do sistema (3.10), temos

$$\begin{aligned}
\left[L^3_{,1} + \left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} \right) L^3 \right]_{,2} &= 0,\\
\left[L^3_{,1} + \left(A + m_{21r} - \frac{m_{31r,1}}{m_{31r}} \right) L^3 \right]_{,r} &= 0.
\end{aligned}$$

Donde por integração obtemos

$$\begin{aligned} L_{,1}^{3} + \left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)L^{3} &= L^{32}, \\ L_{,1}^{3} + \left(A + m_{21r} - \frac{m_{31r,1}}{m_{31r}}\right)L^{3} &= L^{3r}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde $L^{32} = L^{32}(x_1, x_4, x_5)$, $L^{34} = L^{34}(x_1, x_2, x_5)$ e $L^{35} = L^{35}(x_1, x_2, x_4)$.
Usando a primeira e a segunda equação de (3.43), obtemos

$$\left(m_{21r} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{m_{31r,1}}{m_{31r}}\right)L^{3} = L^{3r} - L^{32}.$$

Assim pela Proposição 3.3, temos

$$M_{21r}^{3} L^{3} = L^{3r} - L^{32},$$

logo

$$L^{3} = \frac{1}{M_{21r}^{3}}\big(L^{3r} - L^{32}\big),$$

onde usamos da Observação 3.4 que $M_{21r}^{3} \neq 0$.
Assim podemos considerar $L^{35} = \dfrac{1}{M_{214}^{3}}\left(M_{215}^{3} L^{34} - M_{415}^{3} L^{32}\right)$,

$$L^{3} = \frac{1}{M_{214}^{3}}\big(L^{34} - L^{32}\big). \tag{3.44}$$

Derivando (3.44) com respeito a x_1, obtemos

$$L_{,1}^{3} = -\frac{M_{214,1}^{3}}{(M_{214}^{3})^{2}}\big(L^{34} - L^{32}\big) + \frac{1}{M_{214}^{3}}\big(L^{34} - L^{32}\big)_{,1}.$$

Substituindo $L_{,1}^{3}$ nas equações de (3.43), temos que são equivalentes a

$$\left[A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{M_{214,1}^{3}}{M_{214}^{3}}\right]\big(L^{34} - L^{32}\big) + \big(L^{34} - L^{32}\big)_{,1} = M_{214}^{3} L^{32}. \tag{3.45}$$

De modo inteiramente análogo à demonstração do Lema 3.2, obtemos que L^{34} e L^{32} satisfazem os seguintes sistemas:

$$\left\{ \begin{aligned} & L_{,12}^{34} + \left(A - \tfrac{m_{213,1}}{m_{213}} - \tfrac{M_{214,1}^{3}}{M_{214}^{3}}\right)L_{,2}^{34} - M_{124}^{3} M_{214}^{3} L^{34} = 0, \\ & L_{,15}^{34} + \left(A + m_{215} - \tfrac{m_{315,1}}{m_{315}} - \tfrac{M_{415,1}^{3}}{M_{415}^{3}}\right)L_{,5}^{34} + M_{154}^{3} M_{415}^{3} L^{34} = 0, \\ & L_{,25}^{34} + \tfrac{M_{254}^{3} M_{415}^{3}}{M_{214}^{3}} L_{,2}^{34} + \tfrac{M_{524}^{3} M_{214}^{3}}{M_{415}^{3}} L_{,5}^{34} = 0, \end{aligned} \right. \tag{3.46}$$

e

$$\left\{\begin{array}{l} L,^{32}_{1r} + \left(A + m_{21r} - \frac{m_{31r,1}}{m_{31r}} - \frac{M^3_{21r,1}}{M^3_{21r}}\right) L,^{32}_{r} + M^3_{1r2} M^3_{21r} L^{32} = 0, \\ L,^{32}_{45} + \frac{M^3_{254} M^3_{215}}{M^3_{214}} L,^{32}_{4} + \frac{M^3_{245} M^3_{214}}{M^3_{215}} L,^{32}_{5} = 0, \end{array}\right. \tag{3.47}$$

onde as funções M^3_{ijk} são os invariantes de Laplace do sistema (3.10), os quais são dados pela Proposição 3.3.

Denotemos por M^{32}_{ijk}, M^{32}_{ij} e M^{34}_{ijk} M^{34}_{ij}, respectivamente, os invariantes de Laplace dos sistemas (3.47) e (3.46).

Usando a definição dos invariantes de Laplace n-dimensionais dadas por (1.5), temos

$$M^{34}_{21} = \left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{M^3_{214,1}}{M^3_{214}}\right)_{,2} + M^3_{124} M^3_{214}.$$

Usando (3.15), (1.6), (1.19), (1.7) com $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$ e $i = 2$, $j = 1$, $k = 4$, e a Proposição 3.3, temos

$$\begin{aligned} M^{34}_{21} =& - m_{213} m_{123} - M^3_{214} M^3_{124} + M^3_{12} + \frac{M^3_{21,1}}{M^3_{214}} - \frac{M^3_{213,1} M^3_{21}}{\left(M^3_{214}\right)^2} + M^3_{124} M^3_{214} \\ =& 0. \end{aligned}$$

Além disso usando novamente a definição dos invariantes de Laplace n-dimensionais dadas por (1.5), as relações de (1.6) e a Proposição 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} M^{34}_{25} =& \left(\frac{M^3_{254} M^3_{415}}{M^3_{214}}\right)_{,2} + \frac{M^3_{254} M^3_{415}}{M^3_{214}} \frac{M^3_{524} M^3_{214}}{M^3_{415}} \\ =& \frac{1}{M^3_{214}} \left(M^3_{254} M^3_{524} M^3_{415} + M^3_{254} M^3_{124} M^3_{415} + M^3_{254} M^3_{425} M^3_{215}\right) - \\ & - \frac{M^3_{214} M^3_{124} M^3_{254} M^3_{415}}{(M^3_{214})^2} + M^3_{254} M^3_{524}, \end{aligned}$$

simplificando essa última expressão e usando as relações de (1.6), obtemos

$$M^{34}_{25} = \frac{M^3_{254} M^3_{524}}{M^3_{214}} \left(M^3_{415} - M^3_{215}\right) + M^3_{254} M^3_{524} = \frac{M^3_{254} M^3_{524}}{M^3_{214}} \left(- M^3_{214}\right) + M^3_{254} M^3_{524} = 0.$$

De forma inteiramente análoga, temos $M^{32}_{41} = M^{32}_{45} = 0$. Logo

$$M^{34}_{21} = M^{34}_{25} = M^{32}_{41} = M^{32}_{45} = 0. \tag{3.48}$$

Usando novamente a definição dos invariantes de Laplace n-dimensionais dadas por (1.5), (1.6), (3.46) e a Proposição 3.3, temos

$$\begin{aligned} M^{34}_{215} =& m_{215} - \frac{m_{315,1}}{m_{315}} - \frac{M^3_{415,1}}{M^3_{415}} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{M^3_{214,1}}{M^3_{214}}, \\ =& m_{215} + \left(\log \frac{m_{213}}{m_{315}} \right)_{,1} + \left(\log \frac{M^3_{214}}{M^3_{415}} \right)_{,1}, \\ =& M^3_{215} + \left(\log \frac{M^3_{214}}{M^3_{415}} \right)_{,1}. \end{aligned}$$

Analogamente de (3.47), obtemos

$$M^{32}_{415} = M^3_{415} + \left(\log \frac{M^3_{214}}{M^3_{215}} \right)_{,1}.$$

Logo pelo Lema 3.5, temos

$$M^{34}_{215} = 0 \qquad \text{e} \qquad M^{32}_{415} = 0. \tag{3.49}$$

Assim de (3.48) e (3.49), concluímos que os sistemas (3.47) e (3.46) são, respectivamente, $(2,1)-$redutível e $(4,1)-$redutível. Logo pelo Teorema 1.8 de redução, temos

$$L^{34} = Q + e^{-J} G_{25}(x_2, x_5), \tag{3.50}$$

onde

$$Q = e^{-J} \int e^J G_1(x_1) dx_1, \qquad J = \int R dx_1, \tag{3.51}$$

$$R = A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{M^3_{214,1}}{M^3_{214}}. \tag{3.52}$$

Analogamente

$$L^{32} = \widetilde{Q} + e^{-\widetilde{J}} G_{45}(x_4, x_5), \tag{3.53}$$

onde

$$\widetilde{Q} = e^{-\widetilde{J}} \int e^{\widetilde{J}} \widetilde{G}_1(x_1) dx_1, \qquad \widetilde{J} = \int \widetilde{R} dx_1, \tag{3.54}$$

$$\widetilde{R} = A + m_{214} - \frac{m_{314,1}}{m_{314}} - \frac{M^3_{214,1}}{M^3_{214}}, \tag{3.55}$$

Afirmação: $\widetilde{G}_1 = G_1$.

De fato, por (3.51), (3.52) e (3.54), (3.55), respectivamente, obtemos

$$J_{,1} = A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{M^3_{214,1}}{M^3_{214}}, \qquad \text{e} \qquad \widetilde{J}_{,1} = A + m_{214} - \frac{m_{314,1}}{m_{314}} - \frac{M^3_{214,1}}{M^3_{214}}. \tag{3.56}$$

Substituindo a primeira equação de (3.56) em (3.45), temos

$$J_{,1}\left(L^{34} - L^{32}\right) + \left(L^{34} - L^{32}\right)_{,1} = M^3_{214}L^{32}. \tag{3.57}$$

Derivando (3.51) e (3.54), com respeito a x_1, respectivamente, obtemos

$$Q_{,1} = -J_{,1}\,Q + G_1 \qquad \text{e} \qquad \widetilde{Q}_{,1} = -\widetilde{J}_{,1}\,\widetilde{Q} + \widetilde{G}_1. \tag{3.58}$$

Derivando (3.50) e (3.53), com respeito a x_1 e usando (3.58), temos

$$\begin{aligned}\left(L^{34} - L^{32}\right)_{,1} =& Q_{,1} - \widetilde{Q}_{,1} - J_{,1}\,e^{-J}G_{25} + \widetilde{J}_{,1}\,e^{-\widetilde{J}}G_{45},\\ =& - J_{,1}\left(Q + e^{-J}G_{25}\right) + \widetilde{J}_{,1}\left(\widetilde{Q} + e^{-\widetilde{J}}G_{45}\right) + G_1 - \widetilde{G}_1,\\ =& - J_{,1}\,L^{34} + \widetilde{J}_{,1}\,L^{32} + G_1 - \widetilde{G}_1.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Logo, substituindo em (3.57), obtemos

$$\begin{aligned}M^3_{214}L^{32} =& J_{,1}\left(L^{34} - L^{32}\right) - J_1L^{34} + \widetilde{J}_1L^{32} + G_1 - \widetilde{G}_1,\\ =& (\widetilde{J}_{,1} - J_{,1})L^{32} + G_1 - \widetilde{G}_1.\end{aligned} \tag{3.60}$$

De (3.56) e da Proposição 3.3, temos

$$\widetilde{J}_{,1} - J_{,1} = m_{214} + \left(\log\frac{m_{213}}{m_{314}}\right)_{,1} = M^3_{214}.$$

Portanto substituindo essa última equação em (3.60), obtemos a afirmação.

Com isso, reescrevendo L^{34} e L^{32}, temos

$$L^{34} = e^{-J}\left[\int e^{J}G_1dx_1 + G_{25}\right], \qquad L^{32} = e^{-\widetilde{J}}\left[\int e^{\widetilde{J}}G_1dx_1 + G_{45}\right].$$

De (3.51) e (3.52), temos

$$J = \int\left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{M^3_{214,1}}{M^3_{214}}\right)dx_1.$$

Seja Q_1 dado por (3.7), logo L^{34} pode ser escrito como

$$L^{34} = \frac{m_{213}M_{214}^3}{Q_1}\left[\int \frac{Q_1}{m_{213}M_{214}^3} G_1 dx_1 + G_{25}\right]. \tag{3.61}$$

De forma inteiramente análoga, de (3.54), (3.55) e (3.7), temos

$$L^{32} = \frac{m_{314}M_{214}^3}{Q_3}\left[\int \frac{Q_3}{m_{314}M_{214}^3} G_1 dx_1 + G_{45}\right]. \tag{3.62}$$

Usando (3.3), podemos escrever a equação acima como

$$L^{32} = \frac{m_{214}M_{314}^2}{Q_3}\left[\int \frac{Q_3}{m_{214}M_{314}^2} G_1 dx_1 + G_{45}\right].$$

Sejam P_i e B_i, $i = 1, 3$ dados respectivamente por (3.2) e (3.6), logo usando a Observação 3.4, L^{34} e L^{32} podem ser reescritos como

$$L^{34} = m_{213}M_{214}^3 B_1, \qquad L^{32} = m_{314}M_{214}^3 B_3. \tag{3.63}$$

Portanto de (3.44) e a Observação 3.4, concluímos a demonstração do lema.

■

Lema 3.7. *A solução do sistema (3.11) é dada por*

$$L^2 = m_{213}B_2 - m_{214}B_3,$$

onde L^2 não depende de x_2 e B_i são definidos em (3.7).

Demonstração. Usando (3.16), (3.15) e (1.7) com $j = 1$, $k = 2$ e $i = l$, $3 \leq l \leq 5$, temos

$$\left(A + m_{21l} - \frac{m_{21l,1}}{m_{21l}}\right)_{,l} = m_{21l}m_{1l2}.$$

Usando essas relações na primeira equação do sistema (3.11), obtemos

$$L^2_{,1} + \left(A + m_{21l} - \frac{m_{21l,1}}{m_{21l}}\right)L^2 = L^{2l}, \tag{3.64}$$

onde $L^{23} = L^{23}(x_1, x_4, x_5)$, $L^{24} = L^{24}(x_1, x_3, x_5)$ e $L^{25} = L^{25}(x_1, x_3, x_4)$.
De (3.64), obtemos

$$\left(m_{31r} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}}\right)L^2 = L^{2r} - L^{23}.$$

Usando a Proposição 3.3, temos

$$L^2 = \frac{1}{M^2_{31r}}\big(L^{2r} - L^{23}\big), \qquad 4 \leq r \leq 5,$$

onde temos da Observação 3.4 que $M^2_{31r} \neq 0$.
Assim temos, $L^{25} = \frac{1}{M^2_{314}}\Bigg(M^2_{315}L^{24} - M^2_{415}L^{23}\Bigg)$ e

$$L^2 = \frac{1}{M^2_{314}}\big(L^{24} - L^{23}\big). \tag{3.65}$$

Derivando (3.65) com respeito a x_1, obtemos

$$L,^2_1 = -\frac{M^2_{314,1}}{(M^2_{314})^2}\big(L^{24} - L^{23}\big) + \frac{1}{M^2_{314}}\big(L^{24} - L^{23}\big)_{,1}.$$

Substituindo $L,^2_1$ nas equações de (3.64), temos que são equivalentes a

$$\left[A + m_{21l} - \frac{m_{21l,1}}{m_{21l}} - \frac{M^2_{314,1}}{M^2_{314}}\right]\big(L^{24} - L^{23}\big) + \big(L^{24} - L^{23}\big)_{,1} = M^2_{314}L^{2l}. \tag{3.66}$$

De modo inteiramente análogo à demonstração do Lema 3.2, obtemos que L^{24} e L^{23} satisfazem os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} L,^{24}_{13} + \left(A + m_{213} - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{M^2_{314,1}}{M^2_{314}}\right)L,^{24}_3 - M^2_{431}M^2_{314}L^{24} = 0, \\ L,^{24}_{15} + \left(A + m_{215} - \frac{m_{215,1}}{m_{215}} - \frac{M^2_{415,1}}{M^2_{415}}\right)L,^{24}_5 + M^2_{154}M^2_{415}L^{24} = 0, \\ L,^{24}_{35} + \frac{M^2_{354}M^2_{415}}{M^2_{314}}L,^{24}_3 + \frac{M^2_{534}M^2_{314}}{M^2_{415}}L,^{24}_5 = 0, \end{cases} \tag{3.67}$$

e

$$\begin{cases} L,^{23}_{1r} + \left(A + m_{21r} - \frac{m_{21r,1}}{m_{21r}} - \frac{M^2_{31r,1}}{M^2_{31r}}\right)L,^{23}_r + M^2_{1r3}M^2_{31r}L^{23} = 0, \\ L,^{23}_{45} + \frac{M^2_{354}M^2_{315}}{M^2_{314}}L,^{23}_4 + \frac{M^2_{345}M^2_{314}}{M^2_{315}}L,^{23}_5 = 0, \end{cases} \tag{3.68}$$

onde as funções M^2_{ijk} são os invariantes de Laplace do sistema (3.11), os quais são dados pela Proposição 3.3.

Afirmação: $L^{23} = L^{32}$, onde L^{32} é dado por (3.63).

Com efeito, da primeira equação de (3.43) e da primeira equação de (3.64) com $l = 3$, temos

$$L^{32} - L^{23} = L,^3_1 - L,^2_1 + \left(A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right)(L^3 - L^2) - m_{213}L^2.$$

Portanto pela primeira equação de (3.31), obtemos a Afirmação.

Donde segue de (3.63) que

$$L^{23} = m_{314} M_{214}^3 B_3.$$

Finalmente, de modo inteiramente análogo ao sistema (3.47), obtemos que o sistema (3.67) é $(3,1)-$redutível, donde aplicando o Teorema 1.8 de redução e procedendo como no Lema 3.5, temos

$$L^{24} = \frac{m_{213} M_{314}^2}{Q_2} \left[\int \frac{Q_2}{m_{213} M_{314}^2} G_1 dx_1 + G_{35} \right]. \tag{3.69}$$

Portanto, de (3.65) e a Observação 3.4, obtemos $L^2 = m_{213} B_2 - m_{214} B_3$, onde B_i são definidos em (3.6).

■

Passamos agora a demonstração do Teorema 3.1

Demonstração do Teorema 3.1. Pelo Lema 3.2, temos

$$X = \frac{V}{m_{213}} \big(L^3 - L^2 \big),$$

onde V e dado por (3.6) e L^3 e L^2 são dados, respectivamente, pelos Lemas 3.6 e 3.7. A saber

$$L^3 = m_{213} B_1 - m_{314} B_3, \quad \text{e} \quad L^2 = m_{213} B_2 - m_{214} B_3,$$

onde B_i são definidos em (3.6). Logo

$$X = \frac{V}{m_{213}} \big(m_{213} B_1 - m_{314} B_3 - m_{213} B_2 + m_{214} B_3 \big),$$

donde usando (1.20), temos

$$X = V \big(B_1 - B_2 + B_3 \big).$$

Considerando α^1 e α^j, $2 \leq j \leq 5$ definidos por (3.8), segue de (1.24), (1.18), (1.19) e (1.20), que

$$X_{,i} = V \alpha^i, \quad 1 \leq i \leq 5.$$

Donde os coeficientes da primeira forma quadrática são dados por

$$g_{ii} = V^2|\alpha^i|^2, \quad 1 \leq i \leq 5, \qquad \text{e} \qquad g_{ij} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 5.$$

Logo, $\alpha^i \neq 0$, $1 \leq i \leq 5$ e $< \alpha^i, \alpha^j >= 0$, $1 \leq i \neq j \leq 5$. Ou seja, as condições a) e b) são satisfeitas.

■

3.2 Propriedades

Nesta seção, apresentamos uma importante propriedade das hipersuperfícies de Dupin nas condições do Teorema 3.1, precisamente, mostramos que certas hipóteses desse teorema, implicam em algumas curvaturas de Lie são não constantes. Em seguida fornecemos uma caracterização da função vetorial G_1 dada no Teorema 3.1 e obtemos consequências sobre os invariantes de Laplace. Tais resultados são motivados por resultados similares obtido por L.A. Rodrigues em sua Tese de Doutorado [28], sobre hipersuperfícies de Dupin em $\mathbf{R}^5$. Precisamente, L.A. Rodrigues [28] mostrou que $G_1 = 0$ e que certos invariantes de Laplace devem satisfazer um determinado sistema de equações. Coincidentemente sua prova aplica-se também para o caso em que estudamos, e para completude iremos incluí-la.

Iniciamos mostrando que certas curvaturas de Lie de tais hipersuperfícies são não constantes. Tal resultado é consequência direta do Lema 1.20.

Teorema 3.8. *Seja X uma hipersuperfície de Dupin nas condições do Teorema 3.1. Então pelo menos quatro curvaturas de Lie de X são não constantes.*

Demonstração. Considere X uma hipersuperfície de Dupin nas condições do Teorema 3.1. Suponha que pelo menos uma das curvaturas de Lie $[\lambda_5, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_4]$, $[\lambda_4, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_3]$, $[\lambda_5, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_3]$, $[\lambda_5, \lambda_3; \lambda_1, \lambda_4]$, seja constante. Logo usando o Lema 1.20, respectivamente, com $r = 5$, $s = 2$, $k = 1$, $q = 4$, $r = 4$, $s = 2$, $k = 1$, $q = 3$, $r = 5$, $s = 2$, $k = 1$,

$q=3,\ r=5,\ s=3,\ k=1,\ q=4$, obtemos

$$m_{415}+\left(\log\frac{m_{214}}{m_{215}}\right)_{,1}=0,\qquad m_{314}+\left(\log\frac{m_{213}}{m_{214}}\right)_{,k}=0,$$
$$m_{315}+\left(\log\frac{m_{213}}{m_{215}}\right)_{,1}=0,\qquad m_{415}+\left(\log\frac{m_{314}}{m_{315}}\right)_{,k}=0.$$

Portanto pela Proposição 3.3 obtemos, respectivamente, $M^2_{415}=0$, $M^2_{314}=0$, $M^2_{315}=0$ e $M^3_{415}=0$. O que é uma contradição, pois pela Observação 3.4, essas funções são todas não nulas. Concluímos então a demonstração do teorema.

■

A seguir mostraremos que a função vetorial G_1 dada pelo Teorema 3.1 é nula. Para tanto, precisamos de alguns lemas que nos fornecem informações sobre derivadas de algumas funções que definem (3.5). Iniciamos calculando algumas das derivadas das funções P_i e Q_i e $1\le i\le 3$, respectivamente, definidas por (3.2) e (3.7).

Lema 3.9. As derivadas das funções P_i, $1\le i\le 3$, definidas por (3.2), com respeito a x_1 são dadas por

$$P_{1,1}=-\left[-3\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{13}+\Gamma^4_{14}+\frac{m_{314,1}}{m_{314}}\right]P_1,$$
$$P_{2,1}=-\left[-3\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{13}+\Gamma^4_{14}+\frac{m_{214,1}}{m_{214}}\right]P_2,$$
$$P_{3,1}=-\left[-3\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{13}+\Gamma^4_{14}+\frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right]P_3.$$

Demonstração. Por (3.41), temos que

$$M^2_{314,1}=-\left[-3\Gamma^1_{11}+\Gamma^3_{13}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^4_{14}+\frac{m_{213,1}}{m_{213}}+\frac{m_{214,1}}{m_{214}}\right]M^2_{314}.$$

Por (3.3) e a Observação 3.4, temos que $m_{314}M^3_{214}=m_{214}M^2_{314}$. Logo derivando com respeito a x_1, e usando a equação acima, temos

$$\begin{aligned} m_{314}M^3_{214,1}&=-\frac{m_{314,1}}{m_{314}}m_{314}M^3_{214}+\frac{m_{214,1}}{m_{214}}m_{214}M^2_{314}+m_{214}M^2_{314,1}\\ &=-\left[\frac{m_{314,1}}{m_{314}}-\frac{m_{214,1}}{m_{214}}-3\Gamma^1_{11}+\Gamma^3_{13}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^4_{14}+\frac{m_{213,1}}{m_{213}}+\frac{m_{214,1}}{m_{214}}\right]m_{214}M^2_{314}\\ &=-\left[-3\Gamma^1_{11}+\Gamma^3_{13}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^4_{14}+\frac{m_{213,1}}{m_{213}}+\frac{m_{314,1}}{m_{314}}\right]m_{214}M^2_{314}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$M^3_{214,1} = -\left[-3\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^4_{14} + \frac{m_{213,1}}{m_{213}} + \frac{m_{314,1}}{m_{314}} \right] M^3_{214}.$$

Assim, derivando P_i, $1 \leq i \leq 3$, definidas por (3.2) com respeito a x_1 e usando as expressões acima de $M^2_{314,1}$ e $M^3_{214,1}$, concluí-se a demonstração.

■

Vamos calcular algumas derivadas das funções Q_i, $1 \leq i \leq 3$, dadas em (3.7). Observe que derivando (3.7) com respeito a x_1, temos

$$Q_{1,1} = AQ_1, \qquad Q_{2,1} = (A + m_{213})Q_2, \qquad Q_{3,1} = (A + m_{214})Q_3. \tag{3.70}$$

Note que

$$Q_{1,2} = Q_1 \int A_{,2}\, dx_1, \qquad Q_{2,3} = Q_2 \int (A + m_{213})_{,3} dx_1, \qquad Q_{3,4} = Q_3 \int (A + m_{214})_{,4} dx_1,$$

logo por (3.15) e (3.16), obtemos

$$Q_{1,2} = Q_{2,3} = Q_{3,4} = 0. \tag{3.71}$$

O próximo resultado mostra que a função vetorial $G_1(x_1)$ dada no Teorema 3.1 é nula. Sua demonstração pode ser encontrada em [28] em um resultado similar para hipersuperfície de Dupin de dimensão 4. Porém iremos incluí-la para completude.

Teorema 3.10. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$, uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, dada por (3.5), satisfazendo as condições do Teorema 3.1. Considere V, B_i e Q_i, $1 \leq i \leq 3$, dadas por (3.6) e (3.7). Então $G_1 = 0$.*

Demonstração. Derivando B_i, $1 \leq i \leq 3$, dada por (3.6) com respeito a x_1 e usando (3.70), temos

$$\begin{aligned} B_{1,1} &= -\frac{A}{Q_1} B_1 + \frac{1}{Q_1} \frac{Q_1 G_1}{P_1} = -AB_1 + \frac{G_1}{P_1}, \\ B_{i,1} &= -\left[\frac{A + m_{21(i+1)}}{Q_i}\right] B_i + \frac{1}{Q_i} \frac{Q_i G_1}{P_i} = -\big(A + m_{21(i+1)}\big) B_i + \frac{G_1}{P_i}, \quad 2 \leq i \leq 3. \end{aligned}$$

Assim, derivando (3.5) com respeito a x_1, usando as expressões acima, (1.24) com $i = 1$, $j = 2$, e a segunda equação de (3.4), obtemos

$$X_{,1} = \Gamma_{12}^2 X + V m_{213} B_2 - V m_{214} B_3.$$

Isolando B_2 na equação anterior, temos

$$B_2 = \frac{1}{V m_{213}}\big[-\Gamma_{12}^2 X + X_{,1}\big] + \frac{m_{214}}{m_{213}} B_3.$$

Substituindo as expressões de B_2 e B_3, dadas em (3.6) na identidade acima, temos

$$\int \frac{Q_2 G_1}{P_2} dx_1 = \frac{Q_2}{V m_{213}}\big[-\Gamma_{12}^2 X + X_{,1}\big] + \frac{m_{214} Q_2}{m_{213} Q_3}\left[\int \frac{Q_3 G_1}{P_3} dx_1 + G_{45}\right] - G_{35}.$$

Derivando essa expressão com respeito a x_1, temos

$$\begin{aligned}\frac{Q_2 G_1}{P_2} =& \left(\frac{Q_2}{V m_{213}}\right)_{,1}\big[-\Gamma_{12}^2 X + X_{,1}\big] + \frac{Q_2}{V m_{213}}\big[-\Gamma_{12,1}^2 X - \Gamma_{12}^2 X_{,1} + X_{,11}\big] + \\ &+ \left(\frac{m_{214} Q_2}{m_{213} Q_3}\right)_{,1}\left[\int \frac{Q_3 G_1}{P_3} dx_1 + G_{45}\right] + \frac{m_{214} Q_2}{m_{213} P_3} G_1.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Da primeira equação de (3.4), temos

$$\frac{Q_2}{P_2} G_1 - \frac{m_{214}}{m_{213}} \frac{Q_2}{P_3} G_1 = 0. \tag{3.73}$$

Segue de (1.19), (1.24) com $i = 1$ e $j = 2$, e de (3.70), que

$$\begin{aligned}\left(\frac{Q_2}{V m_{213}}\right)_{,1} =& \frac{Q_2}{V m_{213}}\left\{ A + m_{213} - \left[A + \Gamma_{12}^2 + \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right]\right\} \\ =& -\frac{Q_2}{V m_{213}}\left[\Gamma_{13}^3 + \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right] = -\rho^3 \frac{Q_2}{V m_{213}},\end{aligned} \tag{3.74}$$

onde $\rho^3 = \Gamma_{13}^3 + \frac{m_{213,1}}{m_{213}}$.

Além disso, de (1.20), (3.2), (3.70) e a Proposição 3.3, temos

$$\left(\frac{m_{214} Q_2}{m_{213} Q_3}\right)_{,1} = \frac{m_{214} Q_2}{m_{213} Q_3}\left[-m_{314} + \frac{m_{214,1}}{m_{214}} - \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right] = -\frac{m_{214} Q_2}{m_{213} Q_3} M_{314}^2 = -\frac{Q_2 P_3}{m_{213} Q_3}. \tag{3.75}$$

Substituindo (3.73), (3.74) e (3.75) em (3.72), temos

$$\frac{Q_2}{V m_{213}}\left[\big(\Gamma_{12}^2 \rho^3 - \Gamma_{12,1}^2\big) X - \big(\Gamma_{12}^2 + \rho^3\big) X_{,1} + X_{,11}\right] - \frac{Q_2 P_3}{m_{213} Q_3}\left[\int \frac{Q_3 G_1}{P_3} dx_1 + G_{45}\right] = 0.$$

Considerando D dado por (2.24) com $i = 1$, $j = 2$, $l = 3$, temos

$$\frac{D}{V} - \frac{P_3}{Q_3}\left[\int \frac{Q_3 G_1}{P_3} dx_1 + G_{45}\right] = 0,$$

ou seja

$$\int \frac{Q_3 G_1}{P_3} dx_1 = \frac{D}{V}\frac{Q_3}{P_3} - G_{45}.$$

Derivando essa última expressão com respeito a x_1, obtemos

$$\frac{Q_3 G_1}{P_3} = \frac{D}{V}\left(\frac{Q_3}{P_3}\right)_{,1} + \left(\frac{D}{V}\right)_{,1}\frac{Q_3}{P_3}.$$

Pelo Lema 3.9, (3.70) e (1.19), temos

$$\left(\frac{Q_3}{P_3}\right)_{,1} = \frac{Q_3}{P_3}\left[A - 3\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \frac{m_{213,1}}{m_{213}}\right] = \frac{Q_3}{P_3}[A - 3\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + \rho^3].$$

Por (1.24) com $i = 1$ e $j = 2$, e o Lema 2.5, temos

$$\left(\frac{D}{V}\right)_{,1} = -\frac{D}{V}[A - 3\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + \rho^3].$$

Portanto, substituindo na equação anterior, temos

$$\frac{Q_3 G_1}{P_3} = 0.$$

Como $Q_3 \neq 0$, obtemos $G_1 = 0$, concluindo a demonstração do Teorema.

■

Como conseguência do teorema acima, temos que a expressão de B_i, $1 \leq i \leq 3$, dada por (3.6), se reduz a

$$B_i = \frac{G_{(i+1)5}(x_{i+1}, x_5)}{Q_i}, \quad 1 \leq i \leq 3, \tag{3.76}$$

e consequentemente, a expressão de X, dada por (3.5), pode ser reescrita como

$$X = V\left[\frac{G_{25}}{Q_1} - \frac{G_{35}}{Q_3} + \frac{G_{45}}{Q_3}\right].$$

A seguir fornecemos três lemas, os quais serão bastante úteis na demonstração do Teorema posterior. No primeiro deles, obtemos informações sobre as derivadas da função Q_1.

Lema 3.11. Considere as funções Q_1 e G_{25}, dadas pelo Teorema 3.1. Então

$$\begin{aligned} Q_{1,3} =& (m_{132} + r^1)Q_1, \quad \text{onde} \quad r^1 G_{25} = 0, \\ Q_{1,4} =& (m_{142} + \overline{r}^1)Q_1, \quad \text{onde} \quad \overline{r}^1 G_{25} = 0, \end{aligned}$$

e $r^1 = r^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\overline{r}^1 = \overline{r}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Demonstração. Considere Q_1 dada por (3.7). Usando (1.20) e (3.15), temos

$$\begin{aligned} Q_{1,3} &= Q_1 \int A_{,3}\, dx_1 = Q_1 \int m_{132,1} dx_1, \\ Q_{1,4} &= Q_1 \int A_{,4}\, dx_1 = Q_1 \int m_{142,1} dx_1. \end{aligned}$$

Considerando $\int m_{132,1} dx_1 = m_{132} + r^1$ e $\int m_{142,1} dx_1 = m_{142} + \overline{r}^1$, onde $r^1 = r^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\overline{r}^1 = \overline{r}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$. Então resta mostrarmos que $r^1 G_{25} = 0$ e $\overline{r}^1 G_{25} = 0$.

Para tanto, derivando L^{34} dado por (3.61), com respeito a x_3 e x_4, usando o Teorema 3.10, (1.6), (1.20), a Observação 3.4 e a Proposição 3.3, além do fato que, $L^{34}_{,3} = L^{34}_{,4} = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= L^{34}_{,3} = L^{34}(m_{132} - m_{132} - r^1), \quad \text{donde} \quad r^1 G_{25} = 0, \\ 0 &= L^{34}_{,4} = L^{34}\Big(m_{142} - \frac{m_{243} m_{314}}{m_{213}} + M^3_{142} - m_{142} - \overline{r}^1\Big), \quad \text{donde} \quad \overline{r}^1 G_{25} = 0. \end{aligned}$$

■

O lema a seguir, nos fornece informações sobre as derivadas da função Q_2.

Lema 3.12. Considere as funções Q_2 e G_{35}, dadas pelo Teorema 3.1. Então

$$\begin{aligned} Q_{2,2} =& (m_{123} + t^1)Q_2, \quad \text{onde} \quad t^1 G_{35} = 0, \\ Q_{2,4} =& (m_{143} + \overline{t}^1)Q_2, \quad \text{onde} \quad \overline{t}^1 G_{35} = 0, \end{aligned}$$

e $t^1 = t^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\overline{t}^1 = \overline{t}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Demonstração. Considere Q_2 dada por (3.7). Usando (1.20) e (3.15), temos

$$\begin{aligned} Q_{2,2} =& Q_2 \int (A + m_{213})_{,2} dx_1 = Q_2 \int m_{123,1} dx_1, \\ Q_{2,4} =& Q_2 \int (A + m_{213})_{,4} dx_1 = Q_2 \int m_{143,1} dx_1. \end{aligned}$$

Considerando $\int m_{123,1} dx_1 = m_{123} + t^1$ e $\int m_{143,1} dx_1 = m_{143} + \bar{t}^1$, onde $t^1 = t^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\bar{t}^1 = \bar{t}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$. Então resta mostrarmos que $t^1 G_{35} = 0$ e $\bar{t}^1 G_{35} = 0$.

Para tanto, derivando L^{24} dado por (3.69), com respeito a x_2 e x_4, e usando o Teorema 3.10, (1.6), (1.20), a Observação 3.4 e a Proposição 3.3, além do fato que, $L^{24}_{,2} = L^{24}_{,4} = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 = L^{24}_{,2} = L^{24}(m_{123} - m_{123} - t^1), \quad &\text{donde} \quad t^1 G_{35} = 0, \\ 0 = L^{24}_{,4} = L^{24}(m_{142} + \frac{m_{243} m_{413}}{m_{213}} + M^2_{143} - m_{143} - \bar{t}^1), \quad &\text{donde} \quad \bar{t}^1 G_{25} = 0. \end{aligned}$$

■

O próximo lema nos fornece informações sobre as derivadas da função Q_3.

Lema 3.13. Considere as funções Q_3 e G_{45}, dadas pelo Teorema 3.1. Então

$$\begin{aligned} Q_{3,2} =& (m_{124} + f^1) Q_3, \quad \text{onde} \quad f^1 G_{45} = 0, \\ Q_{3,3} =& (m_{134} + \bar{f}^1) Q_3, \quad \text{onde} \quad \bar{f}^1 G_{45} = 0, \end{aligned}$$

e $f^1 = f^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\bar{f}^1 = \bar{f}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Demonstração. Considere Q_3 dada por (3.7). Usando (1.20) e (3.15), temos

$$\begin{aligned} Q_{3,2} =& Q_3 \int (A + m_{214})_{,2} dx_1 = Q_2 \int m_{124,1} dx_1, \\ Q_{3,3} =& Q_3 \int (A + m_{214})_{,3} dx_1 = Q_2 \int m_{134,1} dx_1. \end{aligned}$$

Considerando $\int m_{124,1} dx_1 = m_{124} + f^1$ e $\int m_{134,1} dx_1 = m_{134} + \bar{f}^1$, onde $f^1 = f^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\bar{f}^1 = \bar{f}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$. Então resta mostrarmos que

$$f^1 G_{45} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{f}^1 G_{45} = 0.$$

Para tanto, derivando L^{32} dado por (3.62), com respeito a x_2 e x_3, e usando o Teorema 3.10, (1.6), (1.20), (3.3), a Observação 3.4 e a Proposição 3.3, além do fato que, $L^{32}_{,2} = L^{32}_{,3} = 0$, temos

$$0 = L^{32}_{,2} = L^{32}(m_{124} - m_{124} - f^1), \quad \text{donde} \quad f^1 G_{45} = 0,$$
$$0 = L^{32}_{,3} = L^{32}(m_{134} - m_{134} - \overline{f}^1), \quad \text{donde} \quad \overline{f}^1 G_{45} = 0.$$

■

A seguir, como em [28] obtemos consequências dos fatos obtidos anteriormente sobre os invariantes de Laplace. Novamente para completude incluímos as demonstrações.

Teorema 3.14. *Seja X hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura dada pelo Teorema 3.1. Se $G_{45} \neq 0$ e $|G_{25}| + |G_{35}| \neq 0$, então os invariantes de Laplace devem satisfazer o seguinte sistema de equações*

$$\begin{aligned} &m_{1l2} m_{12l} = 0, \qquad 3 \leq l \leq 5, \\ &m_{1r3} m_{13r} = 0, \qquad 4 \leq r \leq 5, \\ &m_{154} m_{145} = 0. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Demonstração. Considere X dada pelo Teorema 3.1. Substituindo (3.76) em L^3 dado pelo Lema 3.6, temos

$$L^3 = m_{213} \frac{G_{25}}{Q_1} - m_{314} \frac{G_{45}}{Q_3}.$$

Calculando $L^3_{,2}$, $L^3_{,4}$ e $L^3_{,24}$, usando os Lemas 3.11, 3.13, (3.71) e as relações de (1.20), temos

$$\begin{aligned} L^3_{,2} =& m_{213} \left[m_{123} \frac{G_{25}}{Q_1} + \frac{G_{25,2}}{Q_1} - m_{324} \frac{G_{45}}{Q_3} \right], \\ L^3_{,4} =& - m_{314} \left[m_{243} \frac{G_{25}}{Q_1} + m_{143} \frac{G_{45}}{Q_3} + \frac{G_{45,4}}{Q_3} \right], \\ L^3_{,24} =& \Big[- m_{123} m_{243} m_{314} - m_{213} \big(m_{123} m_{142} + m_{143} m_{324} \big) \Big] \frac{G_{25}}{Q_1} - \\ & - m_{243} m_{314} \frac{G_{25,2}}{Q_1} - m_{324} \big(m_{213} m_{143} - m_{243} m_{314} \big) \frac{G_{45}}{Q_3} - m_{324} m_{213} \frac{G_{45,4}}{Q_3}. \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas da função L^3 dadas acima na terceira equação de (3.10), com $r = 4$, obtemos

$$0 = L^3_{,24} + \frac{m_{243}m_{314}}{m_{213}} L^3_{,2} + \frac{m_{423}m_{213}}{m_{314}} L^3_{,4} = -m_{213}m_{142}m_{124}\frac{G_{25}}{Q_1}.$$

Como $m_{213} \neq 0$, segue que $m_{142}m_{124}G_{25} = 0$.

Da mesma forma, substituindo (3.76) em L^2 dado pelo Lema 3.7, temos

$$L^2 = m_{213}\frac{G_{35}}{Q_2} - m_{214}\frac{G_{45}}{Q_3}.$$

Calculando $L^2_{,3}$, $L^2_{,4}$ e $L^2_{,34}$, usando os Lemas 3.12, 3.13, (3.71) e as relações de (1.20), temos

$$\begin{aligned}
L^2_{,3} =& m_{213}\left[m_{132}\frac{G_{35}}{Q_2} + \frac{G_{35,3}}{Q_2} + m_{234}\frac{G_{45}}{Q_3}\right],\\
L^2_{,4} =& - m_{214}\left[m_{243}\frac{G_{35}}{Q_2} + m_{142}\frac{G_{45}}{Q_3} + \frac{G_{45,4}}{Q_3}\right],\\
L^2_{,34} =& \left[- m_{132}m_{243}m_{214} - m_{213}\big(m_{234}m_{142} + m_{143}m_{132}\big)\right]\frac{G_{35}}{Q_2} -\\
& - m_{243}m_{214}\frac{G_{35,3}}{Q_2} + m_{234}\big(m_{213}m_{142} - m_{243}m_{214}\big)\frac{G_{45}}{Q_3} - m_{234}m_{213}\frac{G_{45,4}}{Q_3}.
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas da função L^2 dadas acima na terceira equação de (3.11), com $r = 4$, e usando as relações de (1.20), obtemos

$$0 = L^2_{,34} + \frac{m_{243}m_{214}}{m_{213}} L^2_{,3} + \frac{m_{234}m_{213}}{m_{214}} L^2_{,4} = -m_{213}m_{143}m_{134}\frac{G_{35}}{Q_2}.$$

Como $m_{213} \neq 0$, segue que $m_{143}m_{134}G_{35} = 0$.

Derivando $L^3_{,2}$, dada acima com respeito a x_3, usando os Lemas 3.11, 3.13, as relações de (1.20) e o fato de que $L^3_{,3} = 0$, obtemos

$$0 = L^3_{,23} = -m_{213}m_{123}m_{132}\frac{G_{25}}{Q_1}.$$

Como $m_{213} \neq 0$, segue que $m_{123}m_{132}G_{25} = 0$.

Da mesma forma, derivando $L^3_{,4}$, dada acima com respeito a x_3, usando os Lemas 3.11, 3.13, as relações de (1.20) e o fato de que $L,_3^3 = 0$, obtemos

$$0 = L,_{43}^3 = m_{314}m_{143}m_{134}\frac{G_{45}}{Q_3}.$$

Como $m_{314} \neq 0$, segue que $m_{143}m_{134}G_{45} = 0$.

Como antes, derivando $L,_3^2$ e $L,_4^2$ dada anteriormente com respeito a x_2 usando os Lemas 3.12, 3.13, as relações de (1.20) e o fato de que $L,_2^2 = 0$, respectivamente, obtemos

$$0 = L,_{23}^2 = -m_{213}m_{123}m_{132}\frac{G_{35}}{Q_2}, \qquad 0 = L,_{42}^2 = m_{214}m_{142}m_{124}\frac{G_{45}}{Q_3}.$$

Logo, como $m_{213} \neq 0$ e $m_{214} \neq 0$, obtemos $m_{123}m_{132}G_{35} = 0$ e $m_{142}m_{124}G_{45} = 0$. Portanto como por hipótese, $G_{45} \neq 0$ e $|G_{25}| + |G_{35}| \neq 0$, temos que

$$m_{1s2}m_{12s} = 0, \qquad 3 \leq s \leq 4, \qquad m_{143}m_{134} = 0.$$

Resta então mostrarmos que $m_{15i}m_{1i5} = 0$, $2 \leq i \leq 4$. Para tanto considere a função $S = e^{\int (A+m_{215})dx_1}$, onde A é dado por (3.15). Assim por (3.39) e a Proposição 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} A - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{M^3_{214,1}}{M^3_{214}} &= A + m_{215} - \frac{m_{315,1}}{m_{315}} - \frac{M^3_{415,1}}{M^3_{415}}, \\ A + m_{213} - \frac{m_{213,1}}{m_{213}} - \frac{M^2_{314,1}}{M^2_{314}} &= A + m_{215} - \frac{m_{215,1}}{m_{215}} - \frac{M^2_{415,1}}{M^2_{415}}, \\ A + m_{214} - \frac{m_{214,1}}{m_{214}} - \frac{M^2_{314,1}}{M^2_{314}} &= A + m_{215} - \frac{m_{215,1}}{m_{215}} - \frac{M^2_{315,1}}{M^2_{315}}. \end{aligned}$$

Logo integrando cada equação anterior em x_1, tomando exponencial, usando (3.7) e a expressão de S definida acima, temos

$$\frac{m_{213}M^3_{214}}{Q_1} = \frac{m_{315}M^3_{415}}{S}, \qquad \frac{m_{213}M^2_{314}}{Q_2} = \frac{m_{215}M^2_{415}}{S}, \qquad \frac{m_{214}M^2_{314}}{Q_3} = \frac{m_{215}M^2_{315}}{S}. \tag{3.78}$$

Derivando S, obtemos

$$S,_2 = (m_{125} + g^1)S, \quad S,_3 = (m_{135} + \overline{g}^1)S, \quad S,_4 = (m_{145} + \widehat{g}^1)S. \tag{3.79}$$

Se $\overline{g}^1 \neq 0$, então derivando a terceira equação de (3.78) com respeito a x_3, usando (3.3), a Observação 3.4 e (1.20), temos

$$m_{134} - \frac{Q_{3,3}}{Q_3} = m_{135} - \frac{S_{,3}}{S}.$$

Logo usando (3.79) e o Lema 3.13, obtemos $\overline{f}^1 = \overline{g}^1 \neq 0$, donde novamente pelo Lema 3.13, $G_{45} = 0$, que é uma contradição, pois por hipótese $G_{45} \neq 0$. Logo $\overline{g}^1 = 0$.

Se $g^1 \neq 0$, então derivando a terceira equação de (3.78) com respeito a x_2, usando (1.20), temos

$$m_{124} - \frac{Q_{3,2}}{Q_3} = m_{125} - \frac{S_{,2}}{S}.$$

Logo usando (3.79) e o Lema 3.13, obtemos $f^1 = g^1 \neq 0$, donde pelo Lema 3.13, $G_{45} = 0$, novamente contradição. Logo $g^1 = 0$.

Finalmente, se $\widehat{g}^1 \neq 0$, então derivando a primeira equação de (3.78), com respeito a x_4, usando (1.6), (1.20), temos

$$m_{142} - \frac{m_{243}m_{314}}{m_{213}} + M^3_{142} - \frac{Q_{1,4}}{Q_1} = m_{143} + \frac{m_{345}m_{415}}{m_{315}} + M^3_{145} - \frac{S_{,4}}{S}.$$

Logo usando (3.79), a Proposição 3.3 e o Lema 3.11, obtemos $\overline{r}^1 = \widehat{g}^1 \neq 0$, donde novamente pelo Lema 3.11, $G_{25} = 0$.

Da mesma forma derivando a segunda equação de (3.78) com respeito a x_4, usando (1.6), (1.20), temos

$$m_{142} - \frac{m_{243}m_{314}}{m_{213}} + M^2_{143} - \frac{Q_{2,4}}{Q_2} = m_{142} + \frac{m_{245}m_{415}}{m_{215}} + M^2_{145} - \frac{S_{,4}}{S}.$$

Logo usando (3.79), a Proposição 3.3 e o Lema 3.12, obtemos $\overline{t}^1 = \widehat{g}^1 \neq 0$, donde novamente pelo Lema 3.12, $G_{35} = 0$.

Portanto se $\widehat{g}^1 \neq 0$, então $G_{25} = G_{35} = 0$, que é uma contradição, pois por hipótese $|G_{25}| + |G_{25}| \neq 0$. Logo $\widehat{g}^1 = 0$.

Dessa forma, concluímos que $g^1 = \overline{g}^1 = \widehat{g}^1 = 0$, donde as derivadas de S dadas em (3.79), podem ser escritas como

$$S_{,i} = m_{1i5}S, \qquad 2 \leq i \leq 4.$$

Além disso, usando (1.20) e (3.16) com $l = 5$, obtemos $S_{,5} = 0$, donde da expressão acima obtemos $m_{1i5,5} = 0$, ou seja, de (1.20) $m_{1i5}m_{i51} = 0$, $2 \leq i \leq 4$. Concluindo assim a demonstração do Teorema.

■

Observação 3.15. O Teorema 3.14 nos fornece produtos de funções dando zero, donde, localmente, um dos fatores é nulo. Escolhendo em cada produto de (3.77), um fator para ser nulo, obtemos um caso onde (3.77) fica verificado. Fazendo todas as escolhas possíveis, obtemos 64 casos. Por exemplo, podemos escolher como nulos em cada produto de (3.77), os fatores da esquerda. A seguir damos uma caracterização de todas as escolhas possíveis, isto é, todos os casos que se obtêm quando escolhemos um fator de cada produto de (3.77) para ser nulo. Tal caracterização divide os 64 casos em quatro grupos, os quais são escritos como

$$24 \text{ casos do tipo : } \quad m_{1ks} = m_{1ls} = m_{1lk} = m_{1rk} = m_{1rl} = m_{1rs} = 0, \tag{3.80}$$

$$8 \text{ casos do tipo : } \quad m_{1ks} = m_{1lk} = m_{1sl} = m_{1kr} = m_{1lr} = m_{1sr} = 0, \tag{3.81}$$

$$8 \text{ casos do tipo : } \quad m_{1ks} = m_{1lk} = m_{1sl} = m_{1rk} = m_{1rl} = m_{1rs} = 0, \tag{3.82}$$

$$24 \text{ casos do tipo : } \quad m_{1ks} = m_{1lk} = m_{1rk} = m_{1sl} = m_{1rl} = m_{1sr} = 0, \tag{3.83}$$

onde $2 \leq k, s, l, r \leq 5$ distintos. Além disso, (3.81), (3.82) e (3.83), são casos particulares de (3.80).

Com efeito, fixados $2 \leq k_0, s_0, l_0, r_0 \leq 5$ distintos, suponha que vale (3.80). Vamos provar que (3.81) é um caso particular de (3.80). De fato, como $m_{1k_0s_0} = 0$ e $m_{1l_0k_0} = 0$, então segue da Proposição 1.5, que $m_{1k_0l_0}m_{1l_0s_0} = 0$. Portanto temos um dos seguintes casos

$$\begin{aligned} m_{1k_0s_0} = m_{1k_0l_0} = m_{1s_0l_0} = m_{1k_0r_0} = m_{1l_0r_0} = m_{1s_0r_0} = 0, \\ m_{1k_0s_0} = m_{1l_0k_0} = m_{1l_0s_0} = m_{1k_0r_0} = m_{1l_0r_0} = m_{1s_0r_0} = 0, \end{aligned} \tag{3.84}$$

e os dois casos descritos acima, estão entre os 24 casos de (3.80), pois tomando em (3.80), $k = l_0$, $r = k_0$, $l = s_0$ e $s = r_0$, temos a primeira equação de (3.84), e tomando em (3.80), $k = s_0$, $r = l_0$, $l = k_0$ e $s = r_0$, temos a segunda equação de (3.84).

Da mesma forma, considerando (3.82), segue novamente da Proposição 1.5, que temos

$$\begin{aligned} m_{1k_0s_0} = m_{1k_0l_0} = m_{1s_0l_0} = m_{1r_0k_0} = m_{1r_0l_0} = m_{1r_0s_0} = 0, \\ m_{1k_0s_0} = m_{1l_0k_0} = m_{1l_0s_0} = m_{1r_0k_0} = m_{1r_0l_0} = m_{1r_0s_0} = 0, \end{aligned} \tag{3.85}$$

e os dois casos descritos acima estão entre os 24 casos de (3.80), pois tomando em (3.80), $k = s_0$, $r = r_0$, $l = k_0$ e $s = l_0$, temos a primeira equação de (3.85), e tomando em (3.80), $k = k_0$, $r = r_0$, $l = l_0$ e $s = s_0$, temos a segunda equação de (3.85).

Finalmente, considerando (3.83), como $m_{1r_0k_0} = 0$ e $m_{1s_0r_0} = 0$, então pela Proposição 1.5, temos que $m_{1r_0s_0}m_{1s_0k_0} = 0$. Logo temos um dos seguintes casos

$$\begin{aligned} m_{1s_0k_0} = m_{1l_0k_0} = m_{1r_0k_0} = m_{1s_0l_0} = m_{1r_0l_0} = m_{1s_0r_0} = 0, \\ m_{1k_0s_0} = m_{1l_0k_0} = m_{1r_0k_0} = m_{1s_0l_0} = m_{1r_0l_0} = m_{1s_0r_0} = 0, \end{aligned} \tag{3.86}$$

a primeira equação de (3.86), está entre os 24 casos de (3.80), basta tomar em (3.80) $k = l_0$, $r = s_0$, $l = r_0$ e $s = k_0$, e tomando $k = k_0$, $r = r_0$, $l = l_0$ e $s = s_0$, temos que a segunda equação de (3.86) está entre os 8 casos de (3.82), que por sua vez, como mostrado anteriormente, são casos especiais de (3.80).

Capítulo 4

Propriedades de uma classe de hipersuperficies de Dupin em $\mathbb{R}^6$

Neste capitulo, estabelecemos condições necessárias e suficientes para existência de hipersuperfícies de Dupin nas condições do Teorema 3.1. Iniciamos caracterizando as curvaturas principais e a primeira forma fundamental de tais hipersuperficeis e usamos a equação de Gauss para obter tais condições. Por fim, apresentamos exemplos.

Estamos tomando em (3.80), $k = 3$, $s = 2$, $l = 4$ e $r = 5$, isto é

$$m_{132} = m_{142} = m_{143} = m_{153} = m_{154} = m_{152} = 0. \tag{4.1}$$

E de forma análoga, obtém-se resultados similares nos demais casos de (3.80).

4.1 Curvaturas principais e métrica

Nesta seção, caracterizamos as curvaturas principais e a métrica de uma hipersuperfície de Dupin nas condições do Teorema 3.1, em termos de funções de uma única variável.

Iniciamos com uma proposição que nos fornece uma importante propriedade das curvaturas principais de tais hipersuperficies, o qual desempenhará um papel crucial na caracterização das curvaturas principais.

Proposicão 4.1. *Sejam* $X : \Omega \subseteq \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^6$ *hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura,* $-\lambda_i$*,* $1 \le i \le 5$*, curvaturas principais distintas. Então* $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$*,* $3 \le l \le 5$ *e* $4 \le r \le 5$ *se, e somente se, as curvaturas principais* $-\lambda_i$*,* $1 \le i \le 5$*, de* X *satisfazem*

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1} = \frac{F_1^3}{F_2^3}, \qquad \frac{\lambda_4-\lambda_2}{\lambda_4-\lambda_1} = \frac{h_{13}}{h_{23}}, \qquad \frac{\lambda_4-\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_1} = \frac{h_{12}}{(F_2^3-F_1^3)h_{23}}, \\ &\frac{\lambda_5-\lambda_3}{\lambda_5-\lambda_1} = \frac{h_{124}}{(F_2^3-F_1^3)h_{234}}, \qquad \frac{\lambda_5-\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_1} = \frac{h_{123}}{(h_{23}-h_{13})h_{234}}, \qquad \frac{\lambda_5-\lambda_2}{\lambda_5-\lambda_1} = \frac{h_{134}}{h_{234}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $F_i^\beta = F_i^\beta(x_i)$*,* $1 \le i \le 4$*,* $i < \beta \le 5$*, são função diferenciaveis de* x_i*,*

$$\begin{aligned} &h_{i3} = F_i^3F_3^4 + F_i^4 \neq 0, \quad h_{i34} = F_4^5h_{i3} + F_i^3F_3^5 + F_i^5 \neq 0, \quad F_i^3 \neq 0, \quad 1 \le i \le 2, \\ &h_{12} = F_2^3F_1^4 - F_1^3F_2^4 \neq 0, \qquad h_{124} = F_4^5h_{12} + F_2^3F_1^5 - F_1^3F_2^5 \neq 0, \qquad F_1^2 = 0, \\ &h_{123} = -F_3^5h_{12} + F_3^4\big(F_2^3F_1^5 - F_1^3F_2^5\big) + F_2^4F_1^5 - F_1^4F_2^5 \neq 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Demonstração. Considere X, hipersupefície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura. Sejam $-\lambda_i$, $1 \le i \le 5$ as curvaturas principais de X. Pela última equação de (1.26), temos para todo $1 \le i, j, l \le 5$, distintos

$$\left(\log\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_l}\right)_{,jl} = 0.$$

Logo, para todo $1 \le i, j, l \le 5$, distintos

$$\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_l} = f(\widehat{x}_j)g(\widehat{x}_l),$$

onde $f(\widehat{x}_j)$ e $g(\widehat{x}_l)$ são funções que não dependem, respectivamente, de $\widehat{x}_j$ e $\widehat{x}_l$. Além disso, de (1.26), com $2 \le i \le 4$, $j = 5, l = 1$, $\left(\log\frac{\lambda_5-\lambda_i}{\lambda_5-\lambda_1}\right)_{,5} = m_{15i} = 0$. Logo, temos que

$$\frac{\lambda_5-\lambda_3}{\lambda_5-\lambda_1} = f_{124}\overline{f}_{234}, \qquad \frac{\lambda_5-\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_1} = f_{123}\widetilde{f}_{234}, \qquad \frac{\lambda_5-\lambda_2}{\lambda_5-\lambda_1} = f_{134}f_{234},$$

onde as funções do segundo membro f_{ijk} dependem das variáveis x_i, x_j e x_k.

Novamente por (1.26), com $i = 2, j = 3, l = 1$, temos

$$\begin{aligned} &\left(\log\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1}\right)_{,r} = m_{3r2}\frac{\lambda_r-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2} - m_{3r1}\frac{\lambda_r-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1} = 0, \qquad 4 \le r \le 5, \\ &\left(\log\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1}\right)_{,3} = m_{132} = 0, \end{aligned}$$

logo, obtemos

$$\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1}=f_1f_2,$$

onde $f_i=f_i(x_i)$, $1\leq i\leq 2$ são funções diferenciáveis.

Do mesmo modo, temos de (1.26), com $2\leq i\leq 3$, $j=4$, $l=1$

$$\begin{aligned}\left(\log\frac{\lambda_4-\lambda_i}{\lambda_4-\lambda_1}\right)_{,5}=&m_{45i}\frac{\lambda_5-\lambda_i}{\lambda_4-\lambda_i}-m_{451}\frac{\lambda_5-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_1}=0,\\ \left(\log\frac{\lambda_4-\lambda_i}{\lambda_4-\lambda_1}\right)_{,4}=&m_{14i}=0.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1}=f_1f_2, &&\frac{\lambda_4-\lambda_2}{\lambda_4-\lambda_1}=f_{13}f_{23}, &&\frac{\lambda_4-\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_1}=f_{12}\overline{f}_{23},\\ &\frac{\lambda_5-\lambda_3}{\lambda_5-\lambda_1}=f_{124}\overline{f}_{234}, &&\frac{\lambda_5-\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_1}=f_{123}\widetilde{f}_{234}, &&\frac{\lambda_5-\lambda_2}{\lambda_5-\lambda_1}=f_{134}f_{234},\end{aligned}\tag{4.4}$$

onde

$f_{i3}=f_{i3}(x_i,x_3)$, $1\leq i\leq 2$, $\overline{f}_{23}=\overline{f}_{23}(x_2,x_3)$, $f_{12}=f_{12}(x_1,x_2)$, $f_{12j}=f_{12j}(x_1,x_2,x_j)$, $3\leq j\leq 4$, $f_{134}=f_{134}(x_1,x_3,x_4)$, $f_{234}=f_{234}(x_2,x_3,x_4)$, $\overline{f}_{234}=\overline{f}_{234}(x_2,x_3,x_4)$ e $\widetilde{f}_{234}=\widetilde{f}_{234}(x_2,x_3,x_4)$ são funções diferenciáveis.

Afirmação 1: De (4.4), temos

$$\begin{aligned}f_{13}f_{23}=&f_{12}\overline{f}_{23}\big(1-f_1f_2\big)+f_1f_2,\\ f_{124}\overline{f}_{234}=&f_{123}\widetilde{f}_{234}\big(1-f_{12}\overline{f}_{23}\big)+f_{12}\overline{f}_{23},\\ f_{134}f_{234}=&f_{124}\overline{f}_{234}\big(1-f_1f_2\big)+f_1f_2,\\ f_{134}f_{234}=&f_{123}\widetilde{f}_{234}\big(1-f_{13}f_{23}\big)+f_{13}f_{23}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

De fato, das três primeiras equações de (4.4), temos

$$\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_3}=1-f_1f_2,\qquad \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_4}=1-f_{13}f_{23},\qquad \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_4}=1-f_{12}\overline{f}_{23}.\tag{4.6}$$

Assim dividindo a primeira pela segunda equação (4.6) e comparando com a terceira equação de (4.6), temos

$$\frac{1-f_1f_2}{1-f_{13}f_{23}}=\frac{1}{1-f_{12}\overline{f}_{23}},$$

donde obtemos a primeira equação de (4.5). As demais equações de (4.5) são obtidas de forma análoga.

Além disso, nas equações de (4.4), dividindo, respectivamente, a segunda pela terceira a sexta pela quarta e a sexta pela quinta, temos

$$\frac{\lambda_4-\lambda_2}{\lambda_4-\lambda_3}=\frac{f_{13}f_{23}}{f_{12}\overline{f}_{23}}, \qquad \frac{\lambda_5-\lambda_2}{\lambda_5-\lambda_3}=\frac{f_{134}f_{234}}{f_{124}\overline{f}_{234}}, \qquad \frac{\lambda_5-\lambda_2}{\lambda_5-\lambda_4}=\frac{f_{134}f_{234}}{f_{123}\widetilde{f}_{234}}.$$

Assim, considerando o logarítimo dessas expressões e usando a última equação de (1.26), obtemos

$$\frac{f_{23}}{\overline{f}_{23}}=g_2g_3, \qquad \frac{f_{234}}{\overline{f}_{234}}=\overline{f}_{34}\overline{f}_{24}, \qquad \frac{f_{234}}{\widetilde{f}_{234}}=\widetilde{f}_{34}\widetilde{f}_{23}, \qquad \frac{\overline{f}_{234}}{\widetilde{f}_{234}}=\widehat{f}_{23}\widehat{f}_{24} \tag{4.7}$$

onde $g_i=g_i(x_i)$, $\overline{f}_{i4}=\overline{f}_{i4}(x_i,x_4)$, $2\leq i\leq 3$, $\widetilde{f}_{34}=\widetilde{f}_{34}(x_3,x_4)$, $\widetilde{f}_{23}=\widetilde{f}_{23}(x_2,x_3)$ e $\widehat{f}_{2k}=\widehat{f}_{2k}(x_2,x_k)$, $3\leq k\leq 4$, são funções diferenciáveis.

Seja $\overline{f}_{12}=f_{12}\big(1-f_1f_2\big)$, logo a primeira equação de (4.5), torna-se

$$f_{13}f_{23}=\overline{f}_{12}\overline{f}_{23}+f_1f_2.$$

Essa equação juntamente com a primeira equação de (4.7), estão nas condições do Lema A no Apêndice, com $i=1$, $r=2$, $s=3$ e l não aparece, pois admitimos que as funções da equação (4.118) do Apêndice não dependem de x_l. Logo de (4.120) do Apêndice, temos que f_{13} e $\overline{f}_{12}$ satisfazem, respectivamente

$$\begin{aligned}
f_{13,13}+\frac{g_3'}{g_3}f_{13,1}-\frac{f_1'}{f_1}f_{13,3}-\frac{f_1'}{f_1}\frac{g_3'}{g_3}f_{13}=0,\\
\overline{f}_{12,12}-\frac{g_2'}{g_2}\overline{f}_{12,1}-\frac{f_1'}{f_1}\overline{f}_{12,2}+\frac{f_1'}{f_1}\frac{g_2'}{g_2}\overline{f}_{12}=0.
\end{aligned}$$

Sejam $\overline{m}_{13}$ e $\widehat{m}_{12}$, os invariantes de Laplace, respectivamente, da primeira e da segunda equação acima. Logo por (1.5), temos $\overline{m}_{13}=0$ e $\widehat{m}_{12}=0$, donde por (1.10) f_{13} e $\overline{f}_{12}$ são dadas por

$$\begin{aligned}
f_{13}=&\frac{1}{g_3}\left[F_1^3F_3^4+F_1^4\right],\\
\overline{f}_{12}=&g_2\big(F_1^3\widetilde{g}_2+g_1\big).
\end{aligned}$$

onde $F_1^3 = f_1$ e $F_3^4 = F_3^4(x_3)$, $F_1^4 = F_1^4(x_1)$, $\widetilde{g}_2$, g_1 são funções diferenciáveis.
Como $\overline{f}_{12} = f_{12}\big(1 - f_1 f_2\big)$, fazendo $F_2^3 = \dfrac{1}{f_2}$, temos que

$$f_{12} = \frac{g_2 F_2^3}{F_2^3 - F_1^3}\Big[F_1^3 \widetilde{g}_2 + g_1\Big],$$

Isolando $\overline{f}_{23}$ na primeira equação de (4.5), usando a primeira equação de (4.7), temos

$$\overline{f}_{23} = \frac{\frac{F_1^3}{F_2^3}}{g_2 g_3 f_{13} - \frac{f_{12}}{F_2^3}\big(F_2^3 - F_1^3\big)}.$$

Substituindo f_{13} e f_{12} na expressão acima, temos

$$\overline{f}_{23} = \frac{1}{F_2^3 g_2 \big(F_3^4 + \frac{F_1^4}{F_1^3} - \widetilde{g}_2 - \frac{g_1}{F_1^3}\big)}.$$

Logo

$$\frac{F_1^4}{F_1^3} - \frac{g_1}{F_1^3} = c_1 = cte.$$

Donde $g_1 = F_1^4 - c_1 F_1^3$. Com isso f_{12} e $\overline{f}_{23}$ ficam,

$$f_{12} = \frac{g_2}{F_2^3 - F_1^3}\Big[- F_1^3 F_2^4 + F_2^3 F_1^4\Big], \qquad \overline{f}_{23} = \frac{1}{g_2\big(F_2^3 F_3^4 + F_2^4\big)},$$

onde $F_2^4 = F_2^4(x_2) = F_2^3\big(c_1 - \widetilde{g}_2\big)$ é uma função diferenciavel de x_2.
Sejam $h_{13} = F_1^3 F_3^4 + F_1^4$, $h_{23} = F_2^3 F_3^4 + F_2^4$, $h_{12} = F_2^3 F_1^4 - F_1^3 F_2^4$. Logo

$$f_{13} = \frac{1}{g_3} h_{13}, \qquad f_{12} = \frac{g_2}{F_2^3 - F_1^3} h_{12}, \qquad f_{23} = \frac{g_3}{h_{23}}, \qquad \overline{f}_{23} = \frac{1}{g_2 h_{23}}. \tag{4.8}$$

Seja $\overline{f}_{124} = f_{124}\big(1 - f_1 f_2\big)$, logo a terceira equação de (4.5), torna-se

$$f_{134} f_{234} = \overline{f}_{124} \overline{f}_{234} + f_1 f_2.$$

Essa equação juntamente com a segunda equação de (4.7), estão nas condições do Lema A no Apêndice, com $i = 1$, $s = 3$, $l = 4$, $r = 2$, onde as funções f_{il} e f_{rl} da equação (4.118) do Apêndice não dependem de x_l. Logo de (4.120) do Apêndice, temos que f_{134} e $\overline{f}_{124}$ satisfazem, respectivamente

$$\begin{aligned} f_{134,13} + \frac{\overline{f}_{34,3}}{\overline{f}_{34}} f_{134,1} - \frac{f_1'}{f_1} f_{134,3} - \frac{f_1'}{f_1}\frac{\overline{f}_{34,3}}{\overline{f}_{34}} f_{134} = 0, \\ \overline{f}_{124,12} - \frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}} \overline{f}_{124,1} - \frac{f_1'}{f_1} \overline{f}_{12,2} + \frac{f_1'}{f_1}\frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}} \overline{f}_{124} = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Além disso, de (4.121) do Apêndice, reordenando os índices de forma conveniente, temos que

$$\big(\log f_{234}\big)_{,23} = \big(\log \overline{f}_{234}\big)_{,3}\left[\frac{f_{234,2}}{f_{234}} - \frac{f_2'}{f_2}\right]. \tag{4.10}$$

Analogamente, seja $\overline{f}_{123} = f_{123}\big(1 - f_{13}f_{23}\big)$, logo a última equação de (4.5), torna-se

$$f_{134}f_{234} = \overline{f}_{123}\widetilde{f}_{234} + f_{13}f_{23}.$$

Essa equação juntamente com a terceira equação de (4.7), estão nas condições do Lema A no Apêndice, com $i = 1$, $s = 4$, $l = 3$, $r = 2$. Assim de (4.120) do Apêndice, temos que f_{134} satisfaz,

$$f_{134,14} + \frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}f_{134,1} - \frac{f_{13,1}}{f_{13}}f_{134,4} - \frac{f_{13,1}}{f_{13}}\frac{\widetilde{f}_{34,3}}{\widetilde{f}_{34}}f_{134} = 0. \tag{4.11}$$

Além disso, de (4.122) do Apêndice, temos que

$$f_{134,4} + \frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}f_{134} = \frac{-f_{13}f_{23}\widetilde{f}_{234,4}}{f_{234}\widetilde{f}_{234}}. \tag{4.12}$$

De (4.121) do Apêndice, temos que

$$\big(\log f_{234}\big)_{,24} = \big(\log \widetilde{f}_{234}\big)_{,4}\left[\frac{f_{234,2}}{f_{234}} - \frac{f_{23,2}}{f_{23}}\right]. \tag{4.13}$$

Analogamente, seja $\widetilde{f}_{123} = f_{123}\big(1 - f_{12}\overline{f}_{23}\big)$, logo a segunda equação de (4.5), torna-se

$$f_{124}\overline{f}_{234} = \widetilde{f}_{123}\widetilde{f}_{234} + f_{12}\overline{f}_{23}. \tag{4.14}$$

Essa equação juntamente com a última equação de (4.7), estão nas condições do Lema A no Apêndice, com $i = 1$, $s = 4$, $l = 2$, $r = 3$. Donde de (4.120) do Apêndice, temos que f_{124} satisfaz,

$$f_{124,14} + \frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}f_{124,1} - \frac{f_{12,1}}{f_{12}}f_{124,4} - \frac{f_{12,1}}{f_{12}}\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}f_{124} = 0.$$

Substituindo $\overline{f}_{124} = f_{124}\big(1 - f_1 f_2\big)$ na equação acima, obtemos

$$\overline{f}_{124,14} + \frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124,1} - \frac{\overline{f}_{12,1}}{\overline{f}_{12}}\overline{f}_{124,4} - \frac{\overline{f}_{12,1}}{\overline{f}_{12}}\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124} = 0, \tag{4.15}$$

onde $\overline{f}_{12} = (1 - f_1 f_2) f_{12}$.

Multiplicando (4.14) por $1 - f_1 f_2$, definindo $\widehat{f}_{123} = (1 - f_1 f_2)\widetilde{f}_{123}$, obtemos

$$\overline{f}_{124}\overline{f}_{234} = \widehat{f}_{123}\widetilde{f}_{234} + \overline{f}_{12}\overline{f}_{23}.$$

Logo usando (4.122) do Apêndice, com $i = 1$, $s = 4$, $l = 2$, $r = 3$, temos que

$$\overline{f}_{124,4} + \frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124} = \frac{-\overline{f}_{12}\overline{f}_{23}\widetilde{f}_{234,4}}{\overline{f}_{234}\widetilde{f}_{234}}. \tag{4.16}$$

Além disso, de (4.121) do Apêndice, reordenando os índices de forma conveniente, temos que

$$\big(\log \overline{f}_{234}\big)_{,34} = \big(\log \widetilde{f}_{234}\big)_{,4}\left[\frac{\overline{f}_{234,3}}{\overline{f}_{234}} - \frac{\overline{f}_{23,3}}{\overline{f}_{23}}\right]. \tag{4.17}$$

Derivando (4.16) com respeito a x_2 e usando a terceira equação de (4.7), temos

$$\overline{f}_{124,24} + \left(\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\right)_{,2}\overline{f}_{124} + \frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124,2} = \frac{-\overline{f}_{12}\overline{f}_{23}}{\overline{f}_{234}}\left[\frac{\widetilde{f}_{234,4}}{\widetilde{f}_{234}}\left(\frac{\overline{f}_{12,2}}{\overline{f}_{12}} + \frac{\overline{f}_{23,2}}{\overline{f}_{23}} - \frac{\overline{f}_{234,2}}{\overline{f}_{234}}\right) + \big(\log f_{234}\big)_{,24}\right].$$

Substituindo (4.13) na equação acima, e reagrupando os termos, obtemos

$$\overline{f}_{124,24} + \left(\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\right)_{,2}\overline{f}_{124} + \frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124,2} = \frac{-\overline{f}_{12}\overline{f}_{23}}{\overline{f}_{234}}\left[\frac{\widetilde{f}_{234,4}}{\widetilde{f}_{234}}\left(\frac{\overline{f}_{12,2}}{\overline{f}_{12}} + \frac{\overline{f}_{23,2}}{\overline{f}_{23}} - \frac{\overline{f}_{234,2}}{\overline{f}_{234}} - \frac{f_{23,2}}{f_{23}} + \frac{f_{234,2}}{f_{234}}\right)\right].$$

Logo simplificando a equação acima, usando a primeira e a segunda equação de (4.7), temos

$$\overline{f}_{124,24} + \left(\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\right)_{,2}\overline{f}_{124} + \frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124,2} = \frac{-\overline{f}_{12}\overline{f}_{23}}{\overline{f}_{234}}\frac{\widetilde{f}_{234,4}}{\widetilde{f}_{234}}\left(\frac{\overline{f}_{12,2}}{\overline{f}_{12}} + \frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}} - \frac{g_2'}{g_2}\right).$$

Substituindo (4.16) na equação acima e reagrupando os termos semelhantes, temos que

$$\begin{aligned}&\overline{f}_{124,24} + \frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124,2} - \left[\frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}} + \frac{\overline{f}_{12,2}}{\overline{f}_{12}} - \frac{g_2'}{g_2}\right]\overline{f}_{124,4} + \\ &+ \left[\left(\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\right)_{,2} + \frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\left(-\frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}} - \frac{\overline{f}_{12,2}}{\overline{f}_{12}} + \frac{g_2'}{g_2}\right)\right]\overline{f}_{124} = 0,\end{aligned} \tag{4.18}$$

Derivando (4.12) com respeito a x_3 e usando a última equação de (4.7), obtemos

$$f_{134,34} + \left(\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}\right)_{,3}f_{134} + \frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}f_{134,3} = \frac{-f_{13}f_{23}}{f_{234}}\left[\frac{\overline{f}_{234,3}}{\overline{f}_{234}}\left(\frac{f_{13,3}}{f_{13}} + \frac{f_{23,3}}{f_{23}} - \frac{f_{234,3}}{f_{234}}\right) + \big(\log \overline{f}_{234}\big)_{,34}\right].$$

Substituindo (4.17) na equação acima, e procedendo como anteriormente, usando a primeira e a segunda equação de (4.7) e (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}&f_{134,34}+\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}f_{134,3}+\left(\frac{\overline{f}_{34,3}}{\overline{f}_{34}}-\frac{f_{13,3}}{f_{13}}-\frac{g_3'}{g_3}\right)f_{134,4}+\\&\left[\left(\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}\right)_{,3}+\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}\left(\frac{\overline{f}_{34,3}}{\overline{f}_{34}}-\frac{f_{13,3}}{f_{13}}-\frac{g_3'}{g_3}\right)\right]f_{134}=0.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Logo de (4.9), (4.11), (4.19) e (4.9), (4.15), (4.18) temos que, f_{134} e $\overline{f}_{124}$ satisfazem, respectivamente

$$\left\{\begin{aligned}&f_{134,13}+\frac{\overline{f}_{34,3}}{\overline{f}_{34}}f_{134,1}-\frac{f_1'}{f_1}f_{134,3}-\frac{f_1'}{f_1}\frac{\overline{f}_{34,3}}{\overline{f}_{34}}f_{134}=0,\\&f_{134,14}+\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}f_{134,1}-\frac{f_{13,1}}{f_{13}}f_{134,4}-\frac{f_{13,1}}{f_{13}}\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}f_{134}=0,\\&f_{134,34}+\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}f_{134,3}+\left(\frac{\overline{f}_{34,3}}{\overline{f}_{34}}-\frac{f_{13,3}}{f_{13}}-\frac{g_3'}{g_3}\right)f_{134,4}+\\&\left[\left(\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}\right)_{,3}+\frac{\widetilde{f}_{34,4}}{\widetilde{f}_{34}}\left(\frac{\overline{f}_{34,3}}{\overline{f}_{34}}-\frac{f_{13,3}}{f_{13}}-\frac{g_3'}{g_3}\right)\right]f_{134}=0.\end{aligned}\right.\tag{4.20}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\overline{f}_{124,14}+\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124,1}-\frac{\overline{f}_{12,1}}{\overline{f}_{12}}\overline{f}_{124,4}-\frac{\overline{f}_{12,1}}{\overline{f}_{12}}\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124}=0,\\&\overline{f}_{124,12}-\frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}}\overline{f}_{124,1}-\frac{f_1'}{f_1}\overline{f}_{12,2}+\frac{f_1'}{f_1}\frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}}\overline{f}_{124}=0,\\&\overline{f}_{124,24}+\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\overline{f}_{124,2}-\left[\frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}}+\frac{\overline{f}_{12,2}}{\overline{f}_{12}}-\frac{g_2'}{g_2}\right]\overline{f}_{124,4}+\\&+\left[\left(\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\right)_{,2}+\frac{\widehat{f}_{24,4}}{\widehat{f}_{24}}\left(-\frac{\overline{f}_{24,2}}{\overline{f}_{24}}-\frac{\overline{f}_{12,2}}{\overline{f}_{12}}+\frac{g_2'}{g_2}\right)\right]\overline{f}_{124}=0,\end{aligned}\right.\tag{4.21}$$

Além disso, se $g_{234}=\dfrac{1}{\widetilde{f}_{234}}$, temos de (4.10), (4.13), (4.17) usando, respectivamente, as seguintes equações de (4.7), a terceira e a última, a terceira, a terceira e a última, obtemos que g_{234} satisfaz

$$\left\{\begin{aligned}&g_{234,24}+\left(\frac{f_{23,2}}{f_{23}}-\frac{\widehat{f}_{23,2}}{\widehat{f}_{23}}\right)g_{234,4}=0,\\&g_{234,34}+\left(-\frac{\widehat{f}_{23,3}}{\widehat{f}_{23}}-\frac{\overline{f}_{23,3}}{\overline{f}_{23}}\right)g_{234,4}=0,\\&g_{234,23}-\left(\frac{\widehat{f}_{23,2}}{\widehat{f}_{23}}-\frac{f_2'}{f_2}\right)g_{234,3}-\frac{\widehat{f}_{23,3}}{\widehat{f}_{23}}g_{234,2}+\left[-\frac{f_2'}{f_2}\frac{\widehat{f}_{23,3}}{\widehat{f}_{23}}+\left(\frac{1}{\widehat{f}_{23}}\right)_{,23}\widehat{f}_{23}\right]g_{234}=0,\end{aligned}\right.\tag{4.22}$$

Note que os sistemas (4.20) e (4.21) coincidem com o sistema (1.11), respectivamente, tomando no Lema 1.10, os seguintes índices e funções:

$$r=1,\quad s=3,\quad i=4,\quad H_{34}=\overline{f}_{34},\quad \overline{H}_{13}=f_1,\quad \overline{H}_{34}=\widetilde{f}_{34},\quad H_{13}=f_{13},\quad H_3=g_3.$$

$$r=1,\quad s=2,\quad i=4,\quad H_{24}=\frac{1}{\overline{f}_{24}},\quad \overline{H}_{12}=f_1,\quad \overline{H}_{24}=\widehat{f}_{24},\quad H_{12}=\overline{f}_{12},\quad H_2=\frac{1}{g_2}.$$

Portanto pelo Lema 1.10 obtemos, respectivamente, f_{134} e $\overline{f}_{124}$,

$$f_{134}=f_{34}\big(g_3f_{13}F_4^5+f_1F_3^5+F_1^5\big),\qquad \overline{f}_{124}=f_{24}\left[\frac{\overline{f}_{12}h_4}{g_2}+f_1\overline{k}_2+\widetilde{k}_1\right].$$

onde $f_{34}=\dfrac{1}{\widetilde{f}_3\widetilde{f}_{34}}$, $f_{24}=\dfrac{1}{\widetilde{f}_2\widehat{f}_{24}}$, e $F_4^5=F_4^5(x_4)$, $h_4=h_4(x_4)$, $\overline{k}_2=\overline{k}_2(x_2)$, $\widetilde{k}_1=\widetilde{k}_1(x_1)$, são funções diferenciáveis, respectivamente, nas variáveis x_4, x_2, x_1.

Além disso o Lema 1.10 nos fornece,

$$\overline{f}_{24}=\frac{1}{\overline{g}_4\overline{f}_2},\quad \overline{f}_{34}=\overline{f}_4\overline{f}_3,\quad \widehat{f}_{24}=\frac{\overline{f}_2\overline{g}_4}{\widetilde{g}_4\widetilde{f}_2},\quad \widetilde{f}_{34}=\frac{\overline{f}_3\overline{f}_4}{\widetilde{f}_4\widetilde{f}_3}. \tag{4.23}$$

Afirmação 2: $f_{24}=\dfrac{1}{\widehat{f}_{24}}$.

De fato, dividindo em (4.7), a terceira equação pela segunda e comparando com a última, usando a segunda e a última equação de (4.23), temos

$$\widehat{f}_{23}\widehat{f}_{24}=\frac{\widetilde{f}_{23}}{\widetilde{f}_3\widetilde{f}_4\overline{f}_{24}},$$

logo pela arbitrariedade dessas funções obtemos

$$\widehat{f}_{23}=\frac{\widetilde{f}_{23}}{\widetilde{f}_3},\qquad \widehat{f}_{24}=\frac{1}{\overline{f}_{24}\widetilde{f}_4}. \tag{4.24}$$

Por outro lado, da primeira e terceira equação de (4.23), temos

$$\overline{f}_{24}\widehat{f}_{24}=\frac{1}{\widetilde{g}_4\widetilde{f}_2}.$$

Logo comparando essa equação com a segunda equação de (4.24), temos que $\widetilde{f}_2$ é constante, donde pela arbitrariedade de $\widehat{f}_{24}$, concluímos a afirmação.

Substituindo $\overline{f}_{124}=(1-f_1f_2)f_{124}$, $\overline{f}_{12}=(1-f_1f_2)f_{12}$, $F_1^3=f_1$ e $F_2^3=\dfrac{1}{f_2}$, em f_{134} e $\overline{f}_{124}$, usando (4.8), obtemos

$$f_{134}=f_{34}\big(h_{13}F_4^5+F_1^3F_3^5+F_1^5\big),\qquad f_{124}=f_{24}\left[\frac{f_{12}h_4}{g_2}+\frac{F_2^3}{F_2^3-F_1^3}\big(F_1^3\overline{k}_2+\widetilde{k}_1\big)\right]. \tag{4.25}$$

onde $f_{34} = \dfrac{1}{\widetilde{f}_3 \widetilde{f}_{34}}$, $f_{24} = \dfrac{1}{\widehat{f}_{24}}$.

Vamos agora usar o sistema (4.22) para determinarmos g_{234}.

Denotemos por $\widehat{m}_{ij}$, $\widehat{m}_{ijk}$ os invariantes de Laplace do sistema (4.22), logo $\widehat{m}_{24} = \widehat{m}_{243} = 0$, donde o sistema é $(2,4)$-redutível. Aplicando então o Teorema 1.8 de redução, obtemos

$$g_{234} = e^{-I}\overline{h}_4 + G_{23},$$

pois $J = 0$, e

$$I = \int \left(\log \frac{f_{23}}{\widehat{f}_{23}}\right)_{,2} dx_2 \qquad \text{e} \qquad I_{,3} = -\frac{\widehat{f}_{23,3}}{\widehat{f}_{23}} - \frac{\overline{f}_{23,3}}{\overline{f}_{23}}.$$

Dessa última equação usando a primeira equação de (4.7), temos que $I = \frac{c_1 f_{23}}{g_3 \widehat{f}_{23}}$. Logo g_{234} pode ser escrito como

$$g_{234} = \frac{g_3 \widehat{f}_{23}}{f_{23}} \overline{h}_4 + G_{23}. \tag{4.26}$$

Além disso o Teorema 1.8 de redução nos fornece a equação diferencial que G_{23} satisfaz, a saber

$$G_{23,23} - \left(\frac{\widehat{f}_{23,2}}{\widehat{f}_{23}} - \frac{f_2'}{f_2}\right) G_{23,3} - \frac{\widehat{f}_{23,3}}{\widehat{f}_{23}} G_{23,2} + \left[-\frac{f_2'}{f_2}\frac{\widehat{f}_{23,3}}{\widehat{f}_{23}} + \left(\frac{1}{\widehat{f}_{23}}\right)_{,23} \widehat{f}_{23}\right] G_{23} = 0.$$

Denotando por h o invariante de Laplace clássico dessa equação, obtemos $h = 0$, donde usando (1.10) obtemos G_{23} e (4.26) torna-se

$$g_{234} = \widehat{f}_{23}\left(\frac{g_3}{f_{23}}\overline{h}_4 + \frac{\widetilde{g}_3}{f_2} + \widehat{g}_2\right),$$

onde $\overline{h}_4 = \overline{h}_4(x_4)$, $\widetilde{g}_3 = \widetilde{g}_3(x_3)$ e $\widehat{g}_2 = \widehat{g}_2(x_2)$ são funções diferenciáveis, respectivamente, nas variáveis x_4, x_3 e x_2.

Substituindo $F_2^3 = \dfrac{1}{f_2}$, $g_{234} = \dfrac{1}{\widetilde{f}_{234}}$ na equação acima, usando (4.8), obtemos

$$\widetilde{f}_{234} = \frac{1}{\widehat{f}_{23}\big(h_{23}\overline{h}_4 + \widetilde{g}_3 F_2^3 + \widehat{g}_2\big)}, \tag{4.27}$$

e usando a segunda e a última equação de (4.7), (4.23) e a Afirmação 2, temos que

$$\overline{f}_{234} = \frac{1}{f_{24}\big(h_{23}\overline{h}_4 + \widetilde{g}_3 F_2^3 + \widehat{g}_2\big)}, \qquad f_{234} = \frac{1}{f_{34}\big(h_{23}\overline{h}_4 + \widetilde{g}_3 F_2^3 + \widehat{g}_2\big)}. \tag{4.28}$$

Agora, isolando f_{123}, na quarta equação de (4.5), obtemos

$$f_{123} = \frac{1}{1 - f_{13}f_{23}}\left[f_{134}\frac{f_{234}}{\widetilde{f}_{234}} - \frac{f_{13}f_{23}}{\widetilde{f}_{234}}\right].$$

Substituindo f_{134}, f_{234}, $\widetilde{f}_{234}$, f_{13} e f_{23}, dados em (1.15), (4.28), (4.27) e (4.8), na expressão acima, obtemos

$$f_{123} = \frac{\widehat{f}_{23}}{1 - f_{13}f_{23}}\left[F_1^3F_3^5 + F_1^5 - f_{13}f_{23}\Big(\widetilde{g}_3F_2^3 + \widehat{g}_2\Big)\right] + \frac{\widehat{f}_{23}h_{13}}{1 - f_{13}f_{23}}\left[F_4^5 - \overline{h}_4\right].$$

Como $f_{123,4} = 0$, segue que

$$F_4^5 = \overline{h}_4 + c_3. \tag{4.29}$$

Com isso, f_{123} dada acima pode ser escrita como

$$f_{123} = \frac{\widehat{f}_{23}}{1 - f_{13}f_{23}}\left[F_1^3F_3^5 + F_1^5 - f_{13}\Big(\widetilde{g}_3F_2^3f_{23} + \widehat{g}_2f_{23} - c_3g_3\Big)\right]. \tag{4.30}$$

Por outro lado, isolando f_{123} na segunda equação de (4.5) e em seguida, substituindo f_{124}, $\overline{f}_{234}$, $\widetilde{f}_{234}$, f_{12} e $\overline{f}_{23}$, dados em (4.25), (4.28), (4.27) e (4.8), obtemos

$$f_{123} = \frac{\widehat{f}_{23}}{1 - f_{12}\overline{f}_{23}}\left[\frac{F_2^3}{F_2^3 - F_1^3}\big(F_1^3\overline{k}_2 + \widetilde{k}_1\big) - f_{12}\overline{f}_{23}\big(\widetilde{g}_3F_2^3 + \widehat{g}_2\big)\right] + \frac{\widehat{f}_{23}}{1 - f_{12}\overline{f}_{23}}\frac{f_{12}}{g_2}\left[h_4 - \overline{h}_4\right].$$

Como antes, temos

$$h_4 = \overline{h}_4 + c_4. \tag{4.31}$$

Dessa forma, f_{123} torna-se

$$f_{123} = \frac{\widehat{f}_{23}}{1 - f_{12}\overline{f}_{23}}\left[\frac{F_2^3}{F_2^3 - F_1^3}\big(F_1^3\overline{k}_2 + \widetilde{k}_1\big) - f_{12}\overline{f}_{23}\big(\widetilde{g}_3F_2^3 + \widehat{g}_2\big) + \frac{f_{12}}{g_2}c_4\right]. \tag{4.32}$$

Além disso, substituindo f_{134}, f_{124}, f_{234}, $\overline{f}_{234}$, dados em (4.25), (4.28), na terceira equação de (4.5), obtemos

$$\frac{f_{34}\big(h_{13}F_4^5 + F_1^3F_3^5 + F_1^5\big)}{f_{34}\big(h_{23}\overline{h}_4 + \widetilde{g}_3F_2^3 + \widehat{g}_2\big)} = \frac{f_{24}\left(\frac{f_{12}}{g_2}h_4 + \frac{F_2^3}{F_2^3 - F_1^3}\big(F_1^3\overline{k}_2 + \widetilde{k}_1\big)\right)}{f_{24}\big(h_{23}\overline{h}_4 + \widetilde{g}_3F_2^3 + \widehat{g}_2\big)}\left(1 - \frac{F_1^3}{F_2^3}\right) + \frac{F_1^3}{F_2^3}.$$

Afim de simplificar a expressão acima, denotemos por $h_{234} = h_{23}\overline{h}_4 + \widetilde{g}_3F_2^3 + \widehat{g}_2$. Em seguida, isolando $\dfrac{h_{234}}{F_2^3}$, temos

$$\frac{h_{234}}{F_2^3} = \frac{h_{13}}{F_1^3}F_4^5 + F_3^5 + \frac{F_1^5}{F_1^3} - \frac{f_{12}}{g_2}\frac{F_2^3 - F_1^3}{F_2^3F_1^3}h_4 - \overline{k}_2 - \frac{\widetilde{k}_1}{F_1^3}.$$

Substituindo as expressões de f_{13} e f_{12}, dados em (4.8), na equação acima, temos

$$\frac{h_{234}}{F_2^3} = F_4^5\left(F_3^4 + \frac{F_1^4}{F_1^3}\right) + F_3^5 + \frac{F_1^5}{F_1^3} - \left(\frac{F_1^4}{F_1^3} - \frac{F_2^4}{F_2^3}\right)h_4 - \overline{k}_2 - \frac{\widetilde{k}_1}{F_1^3}. \tag{4.33}$$

Derivando essa equação com respeito a x_1, temos

$$\big(F_4^5 - h_4\big)\left(\frac{F_1^4}{F_1^3}\right)' + \left(\frac{F_1^5}{F_1^3} - \frac{\widetilde{k}_1}{F_1^3}\right)' = 0.$$

De (4.29) e (4.31), temos que $F_4^5 - h_4 = c_3 - c_4$, e a equação acima, pode ser escrita como

$$\big(c_3 - c_4\big)\left(\frac{F_1^4}{F_1^3}\right)' + \left(\frac{F_1^5}{F_1^3} - \frac{\widetilde{k}_1}{F_1^3}\right)' = 0.$$

Donde obtemos

$$\frac{\widetilde{k}_1}{F_1^3} - \frac{F_1^5}{F_1^3} = \big(c_3 - c_4\big)\left(\frac{F_1^4}{F_1^3}\right) + c_5. \tag{4.34}$$

Logo substituindo (4.34) em (4.33), temos

$$h_{234} = F_4^5 F_3^4 F_2^3 + F_3^5 F_2^3 + F_2^4 h_4 - (c_5 + \overline{k}_2) F_2^3.$$

Substituindo $h_{234} = h_{23}\overline{h}_4 + \widetilde{g}_3 F_2^3 + \widehat{g}_2$ e usando (4.29), (4.31) e (4.8) temos

$$\widetilde{g}_3 F_2^3 + \widehat{g}_2 = F_2^3\big(c_3 F_3^4 + F_3^5 - (c_5 + \overline{k}_2)\big) + c_4 F_2^4. \tag{4.35}$$

Derivando essa equação com respeito a x_3, obtemos

$$\widetilde{g}_3' = c_3 F_3^{4\prime} + F_3^{5\prime}.$$

Donde, por integração, temos

$$\widetilde{g}_3 = c_3 F_3^4 + F_3^5 + c_6. \tag{4.36}$$

Assim, substituindo em (4.35), temos

$$\widehat{g}_2 = -F_2^3\big(c_6 + c_5 + \overline{k}_2\big) + c_4 F_2^4. \tag{4.37}$$

Substituindo (4.29), (4.36) e (4.37) em $h_{234} = h_{23}\overline{h}_4 + \widetilde{g}_3 F_2^3 + \widehat{g}_2$, temos

$$h_{234} = h_{23} F_4^5 + F_2^3 F_3^5 + \big(-F_2^3(c_5 + \overline{k}_2) + (c_4 - c_3)F_2^4\big).$$

Ou seja,

$$h_{234} = F_4^5 h_{23} + F_2^3 F_3^5 + F_2^5,$$

onde $F_2^5 = -F_2^3(c_5 + \overline{k}_2) + (c_4 - c_3)F_2^4$ é uma função diferenciável de x_2.

Isolando $\widetilde{k}_1$ em (4.34) e substituindo na expressão de f_{124}, dada em (4.25), obtemos

$$f_{124} = \frac{f_{24}}{F_2^3 - F_1^3}\Big[F_4^5\big(F_2^3 F_1^4 - F_1^3 F_2^4\big) - F_1^3 F_2^5 + F_2^3 F_1^5\Big].$$

Da mesma forma, substituindo (4.36) e (4.37) em (4.30) (ou equivalentemente (4.36), (4.37) e (4.34) em (4.32)), obtemos

$$f_{123} = \frac{\widehat{f}_{23}}{h_{23} - h_{13}}\Big[F_3^4\big(-F_1^3 F_2^5 + F_2^3 F_1^5\big) - F_3^5\big(F_2^3 F_1^4 - F_1^3 F_2^4\big) + F_2^4 F_1^5 - F_1^4 F_2^5\Big].$$

Considerando h_{i3}, h_{i34}, $1 \leq i \leq 2$, h_{12}, h_{123} e h_{124} dados em (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}
&f_{13} = \frac{1}{g_3} h_{13}, && f_{12} = \frac{g_2}{F_{23} - F_{13}} h_{12}, && f_{23} = \frac{g_3}{h_{23}}, && \overline{f}_{23} = \frac{1}{g_2 h_{23}},\\
&f_{134} = f_{34} h_{134}, && f_{124} = \frac{f_{24}}{F_2^3 - F_1^3} h_{124}, && f_{123} = \frac{\widehat{f}_{23}}{h_{23} - h_{13}} h_{123},\\
&\widetilde{f}_{234} = \frac{1}{\widehat{f}_{23} h_{234}}, && f_{234} = \frac{1}{f_{34} h_{234}}, && \overline{f}_{234} = \frac{1}{f_{24} h_{234}}.
\end{aligned}$$

E substituindo em (4.4), obtemos (4.2).

Reciprocamente, considerando $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, as curvaturas principais de X satisfazendo (4.2), obtemos trivialmente da terceira equação de (1.26), que $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$.

∎

A seguir, fornecemos duas observações, as quais serão bastante úteis na prova dos resultados que seguem.

Observação 4.2. Tendo em vista que, $m_{ijk} = \left(\log \dfrac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_i}\right)_{,j}$, o qual segue de (1.19) e (1.18), usando a Proposição 4.1 e a terceira equação de (1.26), calculamos alguns invariantes de Laplace. A saber

$$
\begin{aligned}
m_{213} =&\left(\log\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2}\right)_{,1}=\left(\log\frac{F_2^3}{F_2^3-F_1^3}\right)_{,1}=\frac{F_1^{3\prime}}{F_2^3-F_1^3},\\
m_{214} =&\left(\log\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_1-\lambda_2}\right)_{,1}=\left(\log\frac{h_{23}}{h_{23}-h_{13}}\right)_{,1}=\frac{h_{13,1}}{h_{23}-h_{13}},\\
m_{215} =&\left(\log\frac{\lambda_1-\lambda_5}{\lambda_1-\lambda_2}\right)_{,1}=\left(\log\frac{h_{234}}{h_{234}-h_{134}}\right)_{,1}=\frac{h_{134,1}}{h_{234}-h_{134}},\\
m_{123} =&\left(\log\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_1}\right)_{,2}=\left(\log\frac{F_1^3}{F_1^3-F_2^3}\right)_{,2}=\frac{F_2^{3\prime}}{F_1^3-F_2^3},\\
m_{124} =&\left(\log\frac{\lambda_2-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_1}\right)_{,2}=\left(\log\frac{h_{13}}{h_{13}-h_{23}}\right)_{,2}=\frac{h_{23,2}}{h_{13}-h_{23}},\\
m_{125} =&\left(\log\frac{\lambda_2-\lambda_5}{\lambda_2-\lambda_1}\right)_{,2}=\left(\log\frac{h_{134}}{h_{134}-h_{234}}\right)_{,2}=\frac{h_{234,2}}{h_{134}-h_{234}},\\
m_{135} =&\left(\log\frac{\lambda_3-\lambda_5}{\lambda_3-\lambda_1}\right)_{,3}=\left(\log\frac{h_{124}}{h_{124}-(F_2^3-F_1^3)h_{234}}\right)_{,3}\\
=&\frac{(F_2^3-F_1^3)h_{234,3}}{h_{124}-(F_2^3-F_1^3)h_{234}}=\frac{(F_2^3-F_1^3)h_{234,3}}{F_2^3(h_{134}-h_{234})},\\
m_{134} =&\left(\log\frac{\lambda_3-\lambda_4}{\lambda_3-\lambda_1}\right)_{,3}=\left(\log\frac{h_{12}}{h_{12}-(F_2^3-F_1^3)h_{23}}\right)_{,3}\\
=&\frac{(F_2^3-F_1^3)h_{23,3}}{h_{12}-(F_2^3-F_1^3)h_{23}}=\frac{(F_2^3-F_1^3)h_{23,3}}{F_2^3(h_{13}-h_{23})},\\
m_{145} =&\left(\log\frac{\lambda_4-\lambda_5}{\lambda_4-\lambda_1}\right)_{,4}=\left(\log\frac{h_{123}}{h_{123}-(h_{23}-h_{13})h_{234}}\right)_{,4}\\
=&\frac{(h_{23}-h_{13})h_{234,4}}{h_{123}-(h_{23}-h_{13})h_{234}}=\frac{(h_{23}-h_{13})h_{234,4}}{h_{23}(h_{134}-h_{234})}.
\end{aligned}
$$

Além disso, calculamos também algumas funções dadas na Proposição 3.3, onde usamos a quarta equação de (1.20).

$$
\begin{aligned}
M^2_{314} =&m_{314}+\frac{m_{213,1}}{m_{213}}-\frac{m_{214,1}}{m_{214}}=m_{314}+\frac{F_1^{3\prime\prime}}{F_1^{3\prime}}+m_{213}-\frac{h_{13,11}}{h_{13,1}}-m_{214}\\
=&\frac{F_1^{3\prime\prime}}{F_1^{3\prime}}-\frac{h_{13,11}}{h_{13,1}}=-\left(\log\frac{h_{13,1}}{F_1^{3\prime}}\right)_{,1},\\
M^2_{315} =&m_{315}+\frac{m_{213,1}}{m_{213}}-\frac{m_{215,1}}{m_{215}}=m_{315}+\frac{F_1^{3\prime\prime}}{F_1^{3\prime}}+m_{213}-\frac{h_{134,11}}{h_{134,1}}-m_{215}\\
=&\frac{F_1^{3\prime\prime}}{F_1^{3\prime}}-\frac{h_{134,11}}{h_{134,1}}=-\left(\log\frac{h_{134,1}}{F_1^{3\prime}}\right)_{,1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M^2_{415} =& m_{415} + \frac{m_{214,1}}{m_{214}} - \frac{m_{215,1}}{m_{215}} = m_{415} + \frac{h_{13,11}}{h_{13,1}} + m_{214} - \frac{h_{134,11}}{h_{134,1}} - m_{215} \\
=& \frac{h_{13,11}}{h_{13,1}} - \frac{h_{134,11}}{h_{134,1}} = -\left(\log \frac{h_{134,1}}{h_{13,1}} \right)_{,1}, \\
M^3_{415} =& m_{415} + \left(\log \frac{m_{314}}{m_{315}} \right)_{,1} = \left(\log \frac{m_{314}}{m_{315}} \frac{\lambda_1 - \lambda_5}{\lambda_1 - \lambda_4} \right)_{,1} = \left[\log \frac{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} \right)_{,1}}{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_5} \right)_{,1}} \right]_{,1} \\
=& \left[\log \frac{\left(\frac{h_{23} - h_{13}}{F^3_2 - F^3_1} \right)_{,1}}{\left(\frac{h_{234} - h_{134}}{F^3_2 - F^3_1} \right)_{,1}} \right]_{,1}.
\end{aligned}
$$

Na observação que se segue, obtemos condições sobre as funções F^β_i, dadas na Proposição 4.1 de modo que as hipóteses do Teorema 3.1 sejam satisfeitas.

Observação 4.3. No Teorema 3.1, exigimos que algumas funções sejam não nulas. A saber, P_i, $T_{415} = M^3_{415}$ e $U_{415} = M^2_{415}$, $2 \leq i \leq 4$, respectivamente, dadas por, (3.2) e (3.1), onde usamos também a Observação 3.4. Usando a Observação 4.2, obtemos condições sobre as funções dadas em (4.3), afim de que as condições do Teorema 3.1 sejam satisfeitas.

Como $P_i \neq 0$, $2 \leq i \leq 4$, então de (3.2) e a Observação 3.4, $m_{213} M^2_{314} \neq 0$, $m_{214} M^2_{314} \neq 0$ e $m_{215} M^2_{315} \neq 0$ logo pela Observação 4.2 e a equação (4.3), temos

$$
F^{3\prime}_1 \neq 0, \qquad h_{13,1} \neq 0, \qquad h_{134,1} \neq 0, \qquad \left(\frac{F^{4\prime}_1}{F^{3\prime}_1} \right)' \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{h_{134,1}}{F^{3\prime}_1} \right)' \neq 0.
$$

Além disso, como $M^j_{415} \neq 0$, $2 \leq j \leq 3$, então pela Observação 4.2, temos

$$
\left(\frac{h_{134,1}}{h_{13,1}} \right)_{,1} \neq 0, \qquad \text{e} \qquad \left[\frac{\left(\frac{h_{23} - h_{13}}{F^3_2 - F^3_1} \right)_{,1}}{\left(\frac{h_{234} - h_{134}}{F^3_2 - F^3_1} \right)_{,1}} \right]_{,1} \neq 0.
$$

A seguir, caracterizamos as curvaturas principais de uma hipersuperfície de Dupin nas condições do Teorema 3.1.

Teorema 4.4. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$, uma hipersuperficie de Dupin parametrizada por linhas de curvatura nas condições do Teorema 3.1. Se $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$,*

$3 \le l \le 5$, $4 \le r \le 5$, então as curvaturas principais $-\lambda_i$, $1 \le i \le 5$, são dadas por

$$\begin{aligned}
\lambda_i =& h_{(3-i)34}F_5^5 + h_{(3-i)3}F_4^4 + F_{(3-i)}^3F_3^3 + F_{(3-i)}^{(3-i)}, \quad 1 \le i \le 2,\\
\lambda_3 =& \frac{F_2^3\lambda_2 - F_1^3\lambda_1}{F_2^3 - F_1^3},\\
\lambda_4 =& \frac{h_{23}\lambda_2 - h_{13}\lambda_1}{h_{23} - h_{13}},\\
\lambda_5 =& \frac{h_{234}\lambda_2 - h_{134}\lambda_1}{h_{234} - h_{134}},
\end{aligned} \tag{4.38}$$

onde $F_i^\beta = F_i^\beta(x_i)$, $1 \le i \le 5$, $i \le \beta \le 5$, são função diferenciaveis de x_i,

$$\begin{aligned}
& h_{i3} = F_i^3F_3^4 + F_i^4 \neq 0, \qquad h_{i34} = F_4^5h_{i3} + F_i^3F_3^5 + F_i^5 \neq 0, \qquad 1 \le i \le 2,\\
& F_1^{3\prime} \neq 0, \qquad F_1^2 = 0, \qquad F_2^3 \neq 0, \qquad F_s^s \neq 0, \quad \text{para algum } 1 \le s \le 5,\\
& h_{13,1} \neq 0, \qquad h_{134,1} \neq 0, \qquad \left(\frac{F_1^{4\prime}}{F_1^{3\prime}}\right)' \neq 0,\\
& \left(\frac{h_{134,1}}{F^{3\prime}{}_1}\right)_{,1} \neq 0, \qquad \left(\frac{h_{134,1}}{h_{13,1}}\right)_{,1} \neq 0, \qquad \left[\frac{\left(\frac{h_{23}-h_{13}}{F_2^3-F_1^3}\right)_{,1}}{\left(\frac{h_{234}-h_{134}}{F_2^3-F_1^3}\right)_{,1}}\right]_{,1} \neq 0.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Demonstração. Considere X uma hipersupefície de Dupin nas condições do Teorema 3.1. Sejam $-\lambda_i$, $1 \le i \le 5$ as curvaturas principais de X. Pela Proposição 4.1, temos que, λ_i, $1 \le i \le 5$, satisfazem (4.2). Logo, obtemos que λ_1 e λ_2 satisfazem, respectivamente,

$$\left\{\begin{aligned}
& \lambda_{1,23} - \tfrac{F_2^{3\prime}}{F_2^3}\lambda_{1,3} = 0,\\
& \lambda_{1,24} - \tfrac{h_{23,2}}{h_{23}}\lambda_{1,4} = 0,\\
& \lambda_{1,25} - \tfrac{h_{234,2}}{h_{234}}\lambda_{1,5} = 0,\\
& \lambda_{1,34} - \tfrac{h_{23,3}}{h_{23}}\lambda_{1,4} = 0,\\
& \lambda_{1,35} - \tfrac{h_{234,3}}{h_{234}}\lambda_{1,5} = 0,\\
& \lambda_{1,45} - \tfrac{h_{234,4}}{h_{234}}\lambda_{1,5} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{4.40}$$

$$
\begin{cases}
\lambda_{2,13} - \frac{F_1^{3'}}{F_{\prime}^3}\lambda_{2,3} = 0, \\
\lambda_{2,14} - \frac{h_{13,1}}{h_{13}}\lambda_{2,4} = 0, \\
\lambda_{2,15} - \frac{h_{134,1}}{h_{134}}\lambda_{2,5} = 0, \\
\lambda_{2,34} - \frac{h_{13,3}}{h_{13}}\lambda_{2,4} = 0, \\
\lambda_{2,35} - \frac{h_{134,3}}{h_{134}}\lambda_{2,5} = 0, \\
\lambda_{2,45} - \frac{h_{134,4}}{h_{134}}\lambda_{2,5} = 0.
\end{cases}
\tag{4.41}
$$

Substituindo os coeficientes desses dois sistemas em (1.2), obtemos identidades, donde esses sistemas são integráveis.

Seja $\overline{m}_{ij}$ e $\overline{m}_{ijk}$ os invariantes de Laplace do sistema (4.40). Donde

$$\overline{m}_{25} = \overline{m}_{253} = \overline{m}_{254} = 0.$$

Logo o sistema (4.40) é $(2,5)-$redutível, donde pelo Teorema 1.8 de Redução, temos

$$\lambda_1 = Q + G(x_2, x_3, x_4),$$

onde

$$I = -\int \frac{h_{234,2}}{h_{234}} dx_2, \qquad I_{,s} = -\frac{h_{234,s}}{h_{234}}, \quad 3 \leq s \leq 4, \qquad Q = e^I \overline{h}_5, \tag{4.42}$$

e G satisfaz

$$
\begin{cases}
G_{,23} - \frac{F_2^{3'}}{F_2^3} G_{,3} = 0, \\
G_{,24} - \frac{h_{23,2}}{h_{23}} G_{,4} = 0, \\
G_{,34} - \frac{h_{23,3}}{h_{23}} G_{,4} = 0.
\end{cases}
$$

Como no sistema (4.40), analogamente, obtemos usando (1.2), que o sistema acima é integrável e calculando seus invariantes de Laplace, temos que tal sistema é $(2,4)-$redutível, donde novamente pelo Teorema 1.8 de Redução

$$G = \overline{Q} + H(x_2, x_3),$$

onde

$$\overline{I} = -\int \frac{h_{23,2}}{h_{23}} dx_2, \qquad \overline{I}_{,3} = -\frac{h_{23,3}}{h_{23}}, \qquad Q = e^{\overline{I}} \overline{h}_4, \tag{4.43}$$

e H satisfaz

$$H_{,23} - \frac{F_2^{3\prime}}{F_2^3} H_{,3} = 0.$$

Portanto, $H = F_2^3 F_3^3 + F_2^2$, onde $F_2^2 = F_2^2(x_2)$ e $F_3^3 = F_3^3(x_3)$ são funções diferenciáveis. De (4.42) e (4.43), temos que I e $\overline{I}$ são dados, respectivamente, por

$$I = -\log c_1 h_{234}, \qquad \overline{I} = -\log c_2 h_{23}.$$

Portanto, λ_1 torna-se

$$\lambda_1 = h_{234} F_5^5 + h_{23} F_4^4 + F_2^3 F_3^3 + F_2^2,$$

onde $F_4^4 = F_4^4(x_4)$ e $F_5^5 = F_5^5(x_5)$ são funções diferenciáveis.

De modo inteiramente análogo, obtemos do sistema (4.41), que λ_2 é dado por

$$\lambda_2 = h_{134} h_5 + h_{13} h_4 + F_1^3 h_3 + h_1,$$

onde $h_i = h_i(x_i)$, $1 \leq i \neq 2 \leq 5$ são funções diferenciáveis.

Da primeira, segunda e sexta equação de (4.2), temos que

$$\lambda_{2,5} = \frac{h_{134}}{h_{234}} \lambda_{1,5}, \qquad \lambda_{2,4} = \frac{h_{13}}{h_{23}} \lambda_{1,4}, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{F_1^3}{F_2^3} \lambda_{1,3}. \tag{4.44}$$

Substituindo λ_1 e λ_2 na primeira equação de (4.44), obtemos

$$F_5^{5\prime} = h_5', \qquad \text{donde} \qquad h_5 = F_5^5 + d_1.$$

Logo, λ_2 torna-se

$$\lambda_2 = h_{134} F_5^5 + h_{13} h_4 + F_1^3 h_3 + h_1 + d_1 h_{134}.$$

Da mesma forma, substituindo λ_2 dado acima e λ_1 na segunda equação de (4.44), obtemos

$$h_4' = F_4^{4\prime} - d_1 F_4^{5\prime}, \qquad \text{donde} \qquad h_4 = F_4^4 - d_1 F_4^5 + d_2.$$

Com isso, λ_2 pode ser escrito como

$$\lambda_2 = h_{134} F_5^5 + h_{13} F_4^4 + F_1^3 h_3 + h_1 + d_1 \big(F_1^3 F_3^5 + F_1^5 \big) + d_2 h_{13}.$$

Finalmente, substituindo λ_2 acima e λ_1 na última equação de (4.44), obtemos

$$h_3' = F_3^{3\prime} - d_1 F_3^{5\prime} - d_2 F_3^{4\prime}, \qquad \text{donde} \qquad h_3 = F_3^3 - d_1 F_3^5 - d_2 F_3^4 + d_3.$$

Assim λ_2 torna-se

$$\lambda_2 = h_{134} F_5^5 + h_{13} F_4^4 + F_1^3 F_3^3 + h_1 + d_1 F_1^5 + d_2 F_1^4 + d_3 F_1^3.$$

Portanto definindo $F_1^1 = h_1 + d_1 F_1^5 + d_2 F_1^4 + d_3 F_1^3$, obtemos λ_2. E substituindo λ_1 e λ_2 na primeira, segunda e última equação de (4.2) obtemos, respectivamente, λ_3, λ_4 e λ_5.

■

No próximo resultado, obtemos a primeira forma quadrática de uma hipersuperfície de Dupin nas condições do Teorema 3.1, que tem como curvaturas principais as funções, $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, dadas no Teorema 4.4. A saber

Teorema 4.5. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$, uma hipersuperficie de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, nas condições do Teorema 3.1. Se $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$, $3 \leq l \leq 5$, $4 \leq r \leq 5$, então existe uma mudança de cada coordenada, separadamente, tal que a métrica diagonal é dada por*

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, & g_{33} &= \frac{\left(F_2^3 - F_1^3\right)^2}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2}, \\ g_{44} &= \frac{\left(h_{23} - h_{13}\right)^2}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2}, & g_{55} &= \frac{\left(h_{234} - h_{134}\right)^2}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2}, \end{aligned} \tag{4.45}$$

onde λ_j, $1 \leq j \leq 5$ são dados por (4.38) e F_i^3, h_{i3} e h_{i34}, $1 \leq i \leq 2$ satisfazem (4.39).

Demonstração. Considere X, hipersupefície de Dupin nas condições dos Teoremas 3.1. Suponha que $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$, $3 \leq l \leq 5$, $4 \leq r \leq 5$, logo pelo Teorema 4.4, (4.38) nos fornece as curvaturas principais de X. Usando a equação de Codazzi (2.15), temos

$$\frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_j - \lambda_i} = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}, \quad \text{ou seja,} \quad \left[g_{ii}(\lambda_j - \lambda_i)^2\right]_{,j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 5. \tag{4.46}$$

Dessa equação para $i = 1$, temos

$$g_{11} = \left[\frac{R^2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right]^2, \qquad \text{com} \qquad \left[g_{11}(\lambda_l - \lambda_1)^2\right]_{,l} = 0, \quad 3 \leq l \leq 5,$$

onde $R^2 = R^2(x_1, x_3, x_4, x_5)$ é uma função diferenciável nas variáveis x_1, x_3, x_4, x_5. Derivando a equação acima com respeito a x_l, $3 \leq l \leq 5$, temos

$$g_{11,l} = 2g_{11}\left[\frac{R_{,l}^2}{R^2} - \frac{\big(\lambda_2 - \lambda_1\big)_{,l}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right].$$

Logo usando (2.5) e (1.18), temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1l}^1 =& \frac{R_{,l}^2}{R^2} - \frac{\lambda_{2,l}}{\lambda_l - \lambda_2}\frac{\lambda_l - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_{1,l}}{\lambda_l - \lambda_1}\frac{\lambda_l - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
=& \frac{R_{,l}^2}{R^2} - \Gamma_{2l}^2\frac{\lambda_l - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \Gamma_{1l}^1\frac{\lambda_l - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.
\end{aligned}$$

Como $m_{1l2} = 0$, $3 \leq l \leq 5$, segue que, $\Gamma_{2l}^2 = \Gamma_{1l}^1$, logo

$$\Gamma_{1l}^1 = \frac{R_{,l}^2}{R^2} + \Gamma_{1l}^1\left[\frac{\lambda_l - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_l - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right] = \frac{R_{,l}^2}{R^2} + \Gamma_{1l}^1.$$

Ou seja, $\dfrac{R_{,l}^2}{R^2} = 0$, $3 \leq l \leq 5$, donde $R^2 = R_1(x_1)$. E g_{11}, pode ser escrito como

$$g_{11} = \frac{(R_1)^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}.$$

Analogamente, de (4.46) para $i = 2$, obtemos

$$g_{22} = \left[\frac{R^1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right]^2, \qquad \text{com} \qquad \left[g_{22}(\lambda_1 - \lambda_l)^2\right]_{,l} = 0, \quad 3 \leq l \leq 5,$$

onde $R^1 = R^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$ é uma função diferenciável nas variáveis x_2, x_3, x_4, x_5. Derivando a equação acima com respeito a x_l e usando que $m_{1l2} = 0$, $3 \leq l \leq 5$, temos

$$\begin{aligned}
&g_{22,l} = 2g_{22}\left[\frac{R_{,l}^1}{R^1} - \frac{\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)_{,l}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right], \\
&\Gamma_{2l}^2 = \frac{R_{,l}^1}{R^1} - \Gamma_{1l}^1\frac{\lambda_l - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \Gamma_{2l}^2\frac{\lambda_l - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{R_{,l}^1}{R^1} + \Gamma_{2l}^2\left[\frac{\lambda_l - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_l - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right] = \frac{R_{,l}^1}{R^1} + \Gamma_{2l}^2,
\end{aligned}$$

logo $\dfrac{R_{,l}^1}{R^1} = 0$, $3 \leq l \leq 5$, donde $R^1 = R_2(x_2)$. E g_{22}, pode ser escrito como

$$g_{22} = \frac{(R_2)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$

Considerando em (4.46) $i = 3$, temos

$$g_{33} = \left[\frac{\overline{R}^1}{\lambda_3 - \lambda_1}\right]^2, \qquad \text{com} \qquad \left[g_{33}(\lambda_j - \lambda_3)^2\right]_{,j} = 0, \quad 2 \leq j \neq 3 \leq 5,$$

onde $\overline{R}^1 = \overline{R}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$ é uma função diferenciável nas variáveis x_2, x_3, x_4, x_5. Derivando essa equação com respeito a x_j, $2 \leq j \neq 3 \leq 5$, temos

$$\Gamma_{j3}^3 = \frac{\overline{R}_{,j}^1}{\overline{R}^1} - \frac{\left(\lambda_3 - \lambda_1\right)_{,j}}{\lambda_3 - \lambda_1}.$$

Considerando $j = r$, $4 \leq r \leq 5$, usando que, $m_{1r3} = \Gamma_{1r}^1 - \Gamma_{3r}^3 = 0$, $4 \leq r \leq 5$, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{r1}^1 =& \frac{\overline{R}_{,r}^1}{\overline{R}^1} - \Gamma_{3r}^3 \frac{\lambda_r - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} + \Gamma_{1r}^1 \frac{\lambda_r - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \\ =& \frac{\overline{R}_{,r}^1}{\overline{R}^1} + \Gamma_{r1}^1. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{R}^1 = \overline{R}^1(x_2, x_3)$.

Para $j = 2$, na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^3 =& \frac{\overline{R}_{,2}^1}{\overline{R}^1} - \Gamma_{32}^3 \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} + \Gamma_{12}^1 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \\ =& \frac{\overline{R}_{,2}^1}{\overline{R}^1} - \Gamma_{32}^3 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{12}^1 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}. \end{aligned}$$

Donde, simplificando e agrupando os termos semelhantes, temos

$$-\frac{\overline{R}_{,2}^1}{\overline{R}^1} = m_{123} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}.$$

Pela Observação 4.2 e por (4.2), obtemos

$$-\frac{\overline{R}_{,2}^1}{\overline{R}^1} = \frac{F_2^{3\prime}}{F_1^3 - F_2^3} \frac{F_2^3 - F_1^3}{F_2^3}, \qquad \text{donde} \qquad \overline{R}^1 = R_3 F_2^3,$$

onde $R_3 = R_3(x_3)$ é uma função diferenciável de x_3. Com isso, g_{33}, pode ser escrito como

$$g_{33} = \left[\frac{R_3 F_2^3}{\lambda_3 - \lambda_1}\right]^2.$$

Novamente, por (4.46), agora com $i = 4$, temos

$$g_{44} = \left[\frac{\widetilde{R}^1}{\lambda_4 - \lambda_1}\right]^2, \qquad \text{com} \qquad \left[g_{44}(\lambda_j - \lambda_4)^2\right]_{,j} = 0, \quad 2 \leq j \neq 4 \leq 5,$$

onde $\widetilde{R}^1 = \widetilde{R}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$ é uma função diferenciável nas variáveis x_2, x_3, x_4, x_5. Derivando essa equação com respeito a x_j, $2 \leq j \neq 4 \leq 5$, temos

$$\Gamma_{j4}^4 = \frac{\widetilde{R}_{,j}^1}{\widetilde{R}^1} - \frac{\left(\lambda_4 - \lambda_1\right)_{,j}}{\lambda_4 - \lambda_1}.$$

Tomando $j = 5$, usando que, $m_{154} = \Gamma_{15}^1 - \Gamma_{45}^4 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{51}^1 =& \frac{\widetilde{R}_{,5}^1}{\widetilde{R}^1} - \Gamma_{45}^4 \frac{\lambda_5 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1} + \Gamma_{15}^1 \frac{\lambda_5 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1} \\ =& \frac{\widetilde{R}_{,5}^1}{\widetilde{R}^1} + \Gamma_{51}^1.\end{aligned}$$

Logo, $\widetilde{R}^1 = \widetilde{R}^1(x_2, x_3, x_4)$.

Considerando $2 \leq j \leq 3$, na equação acima, temos

$$\begin{aligned}\Gamma_{j4}^4 =& \frac{\widetilde{R}_{,j}^1}{\widetilde{R}^1} - \Gamma_{4j}^4 \frac{\lambda_j - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1} + \Gamma_{1j}^1 \frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1} \\ =& \frac{\widetilde{R}_{,j}^1}{\widetilde{R}^1} - \Gamma_{4j}^4 \frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1} + \Gamma_{4j}^4 + \Gamma_{1j}^1 \frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1}.\end{aligned}$$

Donde, simplificando e agrupando os termos semelhantes, temos

$$-\frac{\widetilde{R}_{,j}^1}{\widetilde{R}^1} = m_{1j4} \frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1}.$$

Pela Observação 4.2 e por (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{\widetilde{R}_{,2}^1}{\widetilde{R}^1} =& \frac{h_{23,2}}{h_{13} - h_{23}} \frac{h_{23} - h_{13}}{h_{23}} = -\frac{h_{23,2}}{h_{23}}, \\ -\frac{\widetilde{R}_{,3}^1}{\widetilde{R}^1} =& \frac{(F_2^3 - F_1^3)h_{23,3}}{F_2^3(h_{13} - h_{23})} \frac{F_2^3(h_{23} - h_{13})}{(F_2^3 - F_1^3)h_{23}} = -\frac{h_{23,3}}{h_{23}},\end{aligned}$$

logo, $\widetilde{R}^1 = R_4 h_{23}$, onde $R_4 = R_4(x_4)$ é uma função diferenciável de x_4. Com isso, g_{44}, pode ser escrito como

$$g_{44} = \left[\frac{R_4 h_{23}}{\lambda_4 - \lambda_1}\right]^2.$$

Finalmente, considerado em (4.46) $i = 5$, temos

$$g_{55} = \left[\frac{\widehat{R}^1}{\lambda_5 - \lambda_1}\right]^2, \qquad \text{com} \qquad \left[g_{55}(\lambda_j - \lambda_4)^2\right]_{,j} = 0, \quad 2 \leq j \leq 4,$$

onde $\widehat{R}^1 = \widehat{R}^1(x_2, x_3, x_4, x_5)$ é uma função diferenciável nas variáveis x_2, x_3, x_4, x_5. Derivando essa equação com respeito a x_j, $2 \leq j \leq 4$, e procedendo como antes, temos

$$\Gamma^5_{j5} = \frac{\widehat{R},^1_j}{\widehat{R}^1} - \frac{\left(\lambda_5 - \lambda_1\right)_{,j}}{\lambda_5 - \lambda_1}, = \frac{\widehat{R},^1_j}{\widehat{R}^1} - \Gamma^5_{5j}\frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_5 - \lambda_1} + \Gamma^5_{5j} + \Gamma^1_{1j}\frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1}.$$

Donde simplificando, obtemos

$$-\frac{\widehat{R},^1_j}{\widehat{R}^1} = m_{1j5}\frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_5 - \lambda_1}.$$

Pela Observação 4.2 e por (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
-\frac{\widehat{R},^1_2}{\widehat{R}^1} &= \frac{h_{234,2}}{h_{134} - h_{234}}\frac{h_{234} - h_{134}}{h_{234}} = -\frac{h_{234,2}}{h_{234}},\\
-\frac{\widehat{R},^1_3}{\widehat{R}^1} &= \frac{(F^3_2 - F^3_1)h_{234,3}}{F^3_2(h_{134} - h_{234})}\frac{F^3_2(h_{234} - h_{134})}{(F^3_2 - F^3_1)h_{234}} = -\frac{h_{234,3}}{h_{234}},\\
-\frac{\widehat{R},^1_4}{\widehat{R}^1} &= \frac{(h_{23} - h_{13})h_{234,4}}{h_{23}(h_{134} - h_{234})}\frac{h_{23}(h_{234} - h_{134})}{(h_{23} - h_{13})h_{234}} = -\frac{h_{234,4}}{h_{234}},
\end{aligned}$$

logo, $\widehat{R}^1 = R_5 h_{234}$, onde $R_5 = R_5(x_5)$ é uma função diferenciável de x_5. Com isso, g_{55}, pode ser escrito como

$$g_{55} = \left[\frac{R_5 h_{234}}{\lambda_5 - \lambda_1}\right]^2.$$

Usando (4.2), temos que

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} = \frac{F^3_2 - F^3_1}{F^3_2}, \qquad \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1} = \frac{h_{23} - h_{13}}{h_{23}}, \qquad \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_5 - \lambda_1} = \frac{h_{234} - h_{134}}{h_{234}}.$$

Logo, g_{33}, g_{44} e g_{55}, podem ser reescritos como

$$g_{33} = \frac{(R_3)^2(F^3_2 - F^3_1)^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \qquad g_{44} = \frac{(R_4)^2(h_{23} - h_{13})^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \qquad g_{55} = \frac{(R_5)^2(h_{234} - h_{134})^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}.$$

Assim, a primeira forma quadrática de X, é dada por

$$\begin{aligned}
ds^2 = &\frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\Big[(R_1)^2 dx_1^2 + (R_2)^2 dx_2^2 + (R_3)^2(F^3_2 - F^3_1)^2 dx_3^3 + (R_4)^2(h_{23} - h_{13})^2 dx_4^2 +\\
&+ (R_5)^2(h_{234} - h_{134})^2 dx_5^2\Big].
\end{aligned}$$

Portanto considerando a mudança de cada variável, separadamente, de modo que, $d\widetilde{x}_i = R_i dx_i$, obtemos

$$d\widetilde{s}^2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\Big[d\widetilde{x}_1^2 + d\widetilde{x}_2^2 + (F_2^3 - F_1^3)^2 d\widetilde{x}_3^3 + (h_{23} - h_{13})^2 d\widetilde{x}_4^2 + (h_{234} - h_{134})^2 d\widetilde{x}_5^2\Big].$$

Concluindo assim, a demonstração do teorema.

■

4.2 Existência de uma classe de hipersuperfíces de Dupin em $\mathbb{R}^6$

Nesta seção, obtemos condições necessárias e suficientes, para existência de hipersuperfície de Dupin, nas condições do Teorema 3.1, admitindo que alguns invariantes de Laplace sejam nulos. Tais condições são obtidas a partir do Teorema Fundamental das Hipersuperfíces em $\mathbf{R}^{n+1}$, isto é, dadas duas formas quadráticas satisfazendo a equação de Gauss e Codazzi, então existe uma hipersuperfície em $\mathbf{R}^{n+1}$, com primeira e segunda forma quadrática dadas inicialmente.

Iniciamos esta seção escrevendo as equações de Gauss. Considere a equação de Gauss, dada em (2.19)

$$-\lambda_i\lambda_j = \left[\Gamma^j_{ij,i} - \Gamma^j_{ij}(\Gamma^i_{ii} - \Gamma^j_{ij})\right]\frac{1}{g_{ii}} + \left[\Gamma^i_{ij}(\Gamma^i_{ij} - \Gamma^j_{jj}) + \Gamma^i_{ij,j}\right]\frac{1}{g_{jj}} + \sum_{k\neq i,j}\Gamma^i_{ik}\Gamma^j_{jk}\frac{1}{g_{kk}}.$$

Suponha agora que, $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$, $3 \leq l \leq 5$, $4 \leq r \leq 5$, e considere λ_i, $1 \leq i \leq 5$, dados por (4.38) e (4.39) e a métrica dada por (4.45). Com isso, usando (2.3), calculamos Γ^i_{ii}, $1 \leq i \leq 5$, a saber

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12}, \\ &\Gamma^j_{jj} = \Gamma^1_{1j}, \quad 2 \leq j \leq 5. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Nestas condições, escrevemos as equações de Gauss, onde usamos $m_{ijk} = \Gamma^i_{ij} - \Gamma^k_{jk}$,

$$
\begin{aligned}
-\lambda_1\lambda_2 =& \left[\Gamma^2_{12,1}+\Gamma^1_{12,2}\right]\frac{1}{g_{11}}+\sum_{k=3}\left(\Gamma^1_{1k}\right)^2\frac{1}{g_{kk}},\\
-\lambda_1\lambda_3 =& \left[\Gamma^3_{13,1}-\Gamma^3_{13}m_{213}+\Gamma^1_{12}\Gamma^3_{32}\right]\frac{1}{g_{11}}+\Gamma^1_{13,3}\frac{1}{g_{33}}+\sum_{k=4}\left(\Gamma^1_{1k}\right)^2\frac{1}{g_{kk}},\\
-\lambda_1\lambda_4 =& \left[\Gamma^4_{14,1}-\Gamma^4_{14}m_{214}+\Gamma^1_{12}\Gamma^4_{42}\right]\frac{1}{g_{11}}+\Gamma^1_{14,4}\frac{1}{g_{44}}+\Gamma^1_{13}\Gamma^4_{43}\frac{1}{g_{33}}+\left(\Gamma^1_{15}\right)^2\frac{1}{g_{55}},\\
-\lambda_1\lambda_5 =& \left[\Gamma^5_{15,1}-\Gamma^5_{15}m_{215}+\Gamma^1_{12}\Gamma^5_{52}\right]\frac{1}{g_{11}}+\Gamma^1_{15,5}\frac{1}{g_{55}}+\Gamma^1_{13}\Gamma^5_{53}\frac{1}{g_{33}}+\Gamma^1_{14}\Gamma^5_{54}\frac{1}{g_{44}},\\
-\lambda_2\lambda_3 =& \left[\Gamma^3_{23,2}-\Gamma^3_{23}m_{123}+\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{31}\right]\frac{1}{g_{11}}+\Gamma^1_{13,3}\frac{1}{g_{33}}+\sum_{k=4}\left(\Gamma^1_{1k}\right)^2\frac{1}{g_{kk}},\\
-\lambda_2\lambda_4 =& \left[\Gamma^4_{24,2}-\Gamma^4_{24}m_{124}+\Gamma^2_{12}\Gamma^4_{41}\right]\frac{1}{g_{11}}+\Gamma^1_{14,4}\frac{1}{g_{44}}+\Gamma^1_{13}\Gamma^4_{43}\frac{1}{g_{33}}+\left(\Gamma^1_{15}\right)^2\frac{1}{g_{55}},\\
-\lambda_2\lambda_5 =& \left[\Gamma^5_{25,2}-\Gamma^5_{25}m_{125}+\Gamma^2_{12}\Gamma^5_{51}\right]\frac{1}{g_{11}}+\Gamma^1_{15,5}\frac{1}{g_{55}}+\Gamma^1_{13}\Gamma^5_{53}\frac{1}{g_{33}}+\Gamma^1_{14}\Gamma^5_{54}\frac{1}{g_{44}},\\
-\lambda_3\lambda_4 =& \left[\Gamma^4_{34,3}-\Gamma^4_{34}m_{134}\right]\frac{1}{g_{33}}+\Gamma^1_{14,4}\frac{1}{g_{44}}+\left[\Gamma^3_{13}\Gamma^4_{14}+\Gamma^3_{23}\Gamma^4_{24}\right]\frac{1}{g_{11}}+\left(\Gamma^1_{15}\right)^2\frac{1}{g_{55}},\\
-\lambda_3\lambda_5 =& \left[\Gamma^5_{35,3}-\Gamma^5_{35}m_{135}\right]\frac{1}{g_{33}}+\Gamma^1_{15,5}\frac{1}{g_{55}}+\left[\Gamma^3_{13}\Gamma^5_{15}+\Gamma^3_{23}\Gamma^5_{25}\right]\frac{1}{g_{11}}+\Gamma^1_{14}\Gamma^5_{54}\frac{1}{g_{44}},\\
-\lambda_4\lambda_5 =& \left[\Gamma^5_{45,4}-\Gamma^5_{45}m_{145}\right]\frac{1}{g_{44}}+\Gamma^1_{15,5}\frac{1}{g_{55}}+\left[\Gamma^4_{14}\Gamma^5_{15}+\Gamma^4_{24}\Gamma^5_{25}\right]\frac{1}{g_{11}}+\Gamma^4_{34}\Gamma^5_{53}\frac{1}{g_{33}},
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Logo, nas condições dos Teoremas 4.4 e 4.5, as equações de Gauss (4.48), são equivalentes a exigir que as funções dadas por (4.3), tenham que satisfazer certas condições. Tais condições são dadas no

Teorema 4.6. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura satisfazendo as condições do Teorema 3.1, com curvaturas principais $-\lambda_i$ $1 \le i \le 5$, dados por (4.38) e (4.39) e uma métrica dada por (4.45). Então F_i^β satisfaz a equação*

$$
F_i^{\beta\prime\prime} - b_i F_i^\beta = c_{i\beta}, \qquad 1 \le i \le 5, \quad i \le \beta \le 5, \tag{4.49}
$$

onde $F_1^2 = c_{12} = 0$, as condições iniciais e as constantes b_i e $c_{i\beta}$, devem satisfazer as *seguintes relações*

$$
\begin{aligned}
& b_1 + b_2 = -1, \qquad c_{1\beta} + c_{2\beta} = 0, \quad 3 \leq \beta \leq 5, \quad c_{11} + c_{22} = 0, \\
& b_l = \sum_{k=1}^{l-1} \big[2c_{kl}F_k^l + b_k(F_k^l)^2 - (F_k^{l\prime})^2\big](0), \quad 3 \leq l \leq 5, \\
& c_{lr} = \sum_{k=1}^{l-1} \big[c_{kl}F_k^r + c_{kr}F_k^l + b_kF_k^lF_k^r - F_k^{l\prime}F_k^{r\prime}\big](0), \quad 3 \leq l < r \leq 5, \\
& c_{ll} = \sum_{k=1}^{l-1} \big[c_{kl}F_k^k + c_{kk}F_k^l + b_kF_k^kF_k^l - F_k^{k\prime}F_k^{l\prime}\big](0), \quad 3 \leq l \leq 5, \\
& \sum_{k=1}^{5} \big[2c_{kk}F_k^k + b_k(F_k^k)^2 - (F_k^{k\prime})^2\big](0) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema acima, faremos uma observação sobre o processo recursivo dado em (4.50).

Observação 4.7. O Teorema 4.6 nos fornecem determinadas equações diferenciais, cujas condições iniciais e certas constantes satisfazem um processo interativo. Esse processo inicia-se considerando a seguinte equação com dados iniciais

$$
\begin{aligned}
& F_1^{\beta\prime\prime} - b_1F_1^\beta = c_{1\beta}, \quad b_1,\ c_{1\beta} \in \mathbb{R} \\
& F_1^\beta(0),\ F_1^{\beta\prime}(0), \quad 1 \leq \beta \neq 2 \leq 5.
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Em seguida, definimos

$$
b_2 = -(1 + b_1), \qquad c_{22} = -c_{11} \qquad c_{2\beta} = -c_{1\beta}, \quad 2 \leq \beta \leq 5. \tag{4.52}
$$

Logo consideramos a seguinte equação com dados iniciais

$$
\begin{aligned}
& F_2^{\beta\prime\prime} - b_2F_2^\beta = c_{2\beta}, \\
& F_2^\beta(0),\ F_2^{\beta\prime}(0), \quad 2 \leq \beta \leq 5,
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

onde b_2 e $c_{2\beta}$, $2 \leq \beta \leq 5$ são dados em (4.52).

Usando (4.51), (4.52) e (4.53), definimos as constantes

$$
\begin{aligned}
b_3 &= \sum_{k=1}^{2} \big[2c_{k3}F_k^3 + b_k(F_k^3)^2 - (F_k^{3\prime})^2\big](0),\\
c_{33} &= \sum_{k=1}^{2} \big[c_{k3}F_k^k + c_{kk}F_k^3 + b_kF_k^kF_k^3 - F_k^{k\prime}F_k^{3\prime}\big](0),\\
c_{34} &= \sum_{k=1}^{2} \big[c_{k3}F_k^4 + c_{k4}F_k^3 + b_kF_k^3F_k^4 - F_k^{3\prime}F_k^{4\prime}\big](0),\\
c_{35} &= \sum_{k=1}^{2} \big[c_{k3}F_k^5 + c_{k5}F_k^3 + b_kF_k^3F_k^5 - F_k^{3\prime}F_k^{5\prime}\big](0).
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

Em seguida consideramos a seguinte equação com dados iniciais

$$
\begin{aligned}
&F_3^{\beta\prime\prime} - b_3F_3^\beta = c_{3\beta},\\
&F_3^\beta(0),\ F_3^{\beta\prime}(0), \quad 3 \leq \beta \leq 5,
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

onde b_3 e $c_{3\beta}$, $3 \leq \beta \leq 5$ são dados em (4.54).

Agora, usando (4.51), (4.52), (4.53), (4.54) e (4.55), definimos as constantes

$$
\begin{aligned}
b_4 &= \sum_{k=1}^{3} \big[2c_{k4}F_k^4 + b_k(F_k^4)^2 - (F_k^{4\prime})^2\big](0),\\
c_{44} &= \sum_{k=1}^{3} \big[c_{k4}F_k^k + c_{kk}F_k^4 + b_kF_k^kF_k^4 - F_k^{k\prime}F_k^{4\prime}\big](0),\\
c_{45} &= \sum_{k=1}^{3} \big[c_{k4}F_k^5 + c_{k5}F_k^4 + b_kF_k^4F_k^5 - F_k^{4\prime}F_k^{5\prime}\big](0).
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

Logo consideramos a seguinte equação com dados iniciais

$$
\begin{aligned}
&F_4^{\beta\prime\prime} - b_4F_4^\beta = c_{4\beta},\\
&F_4^\beta(0),\ F_4^{\beta\prime}(0), \quad 4 \leq \beta \leq 5,
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

onde b_4 e $c_{4\beta}$, $4 \leq \beta \leq 5$ são dados em (4.56).

Usando (4.51), (4.52), (4.53), (4.54), (4.55), (4.56) e (4.57), definimos as seguintes constantes

$$
\begin{aligned}
b_5 &= \sum_{k=1}^{4} \left[2c_{k5}F_k^5 + b_k(F_k^5)^2 - (F_k^{5\prime})^2\right](0),\\
c_{55} &= \sum_{k=1}^{4} \left[c_{k5}F_k^k + c_{kk}F_k^5 + b_kF_k^kF_k^5 - F_k^{k\prime}F_k^{5\prime}\right](0).
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

Finalmente consideramos a seguinte equação

$$F_5^{5\prime\prime} - b_5F_5^5 = c_{55}, \tag{4.59}$$

onde b_5 e c_{55} são dados em (4.58), e escolhemos as condições iniciais $F_5^5(0)$ e $F_5^{5\prime}(0)$, tais que a seguinte equação seja satisfeita

$$\sum_{k=1}^{5} \left[2c_{kk}F_k^k + b_k(F_k^k)^2 - (F_k^{k\prime})^2\right](0) = 0. \tag{4.60}$$

A seguir iniciaremos a demonstração do Teorema 4.6. Para tanto precisamos de quatro lemas, obtidos a partir da equação de Gauss. O primeiro deles, nos fornece equações que são equivalentes a equação de Gauss.

Lema 4.8. As equações de Gauss (4.48) são equivalentes as seguintes equações:

$$-\lambda_1\lambda_2 = \left[\Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{12,2}^1\right]\frac{1}{g_{11}} + \sum_{k=3} \left(\Gamma_{1k}^1\right)^2 \frac{1}{g_{kk}}, \tag{4.61}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\big(\lambda_4 - \lambda_2\big) = &\left[m_{214,1} - (m_{214})^2 + \Gamma_{12}^2 m_{214} + \Gamma_{12}^1 m_{124} + \frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right]\frac{1}{g_{11}} + \\
&+\Gamma_{13}^1 m_{134}\frac{1}{g_{33}} - \frac{\lambda_{1,44}}{\lambda_4 - \lambda_1}\frac{1}{g_{44}},
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

$$\lambda_3\big(\lambda_2 - \lambda_1\big) = \left[-m_{213,1} + (m_{213})^2 + m_{123,2} - (m_{123})^2 + \frac{\lambda_{2,11}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right]\frac{1}{g_{11}}, \tag{4.63}$$

$$\lambda_1\big(\lambda_3 - \lambda_2\big) = \left[m_{213,1} - (m_{213})^2 + \Gamma_{12}^2 m_{213} + \Gamma_{12}^1 m_{123} + \frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right]\frac{1}{g_{11}} - \frac{\lambda_{1,33}}{\lambda_3 - \lambda_1}\frac{1}{g_{33}}, \tag{4.64}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\big(\lambda_5 - \lambda_2\big) = &\left[m_{215,1} - (m_{215})^2 + \Gamma_{12}^2 m_{215} + \Gamma_{12}^1 m_{125} + \frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right]\frac{1}{g_{11}} + \\
&+\Gamma_{13}^1 m_{135}\frac{1}{g_{33}} + \Gamma_{14}^1 m_{145}\frac{1}{g_{44}} - \frac{\lambda_{1,55}}{\lambda_5 - \lambda_1}\frac{1}{g_{55}},
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

$$
\begin{aligned}
\big(\lambda_1 - \lambda_3\big)\big(\lambda_r - \lambda_2\big) = &\left[m_{21r,1} - (m_{21r})^2 + m_{213}m_{21r} + m_{123,2} - (m_{123})^2 + \right.\\
&\left. + m_{123}m_{12r}\right]\frac{1}{g_{11}} - \left[m_{13r,3} - (m_{13r})^2\right]\frac{1}{g_{33}},
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

$$\begin{aligned}\big(\lambda_1-\lambda_r\big)\big(\lambda_3-\lambda_2\big) &= \big[m_{213,1}-(m_{213})^2+m_{213}m_{21r}+m_{12r,2}-(m_{12r})^2+\\ &\quad +m_{123}m_{12r}\big]\frac{1}{g_{11}}-\big[m_{13r,3}-(m_{13r})^2\big]\frac{1}{g_{33}}, \qquad (4.67)\\ \big(\lambda_1-\lambda_5\big)\big(\lambda_4-\lambda_2\big) &= \big[m_{214,1}-(m_{214})^2+m_{214}m_{215}+m_{125,2}-(m_{125})^2+\\ &\quad +m_{124}m_{125}\big]\frac{1}{g_{11}}+m_{134}m_{135}\frac{1}{g_{33}}-\big[m_{145,4}-(m_{145})^2\big]\frac{1}{g_{44}}, \qquad (4.68)\end{aligned}$$

com $4 \leq r \leq 5$.

Demonstração. Para mostrarmos essa equivalência, usaremos (1.20) e (1.19).

Considerando as equações de Gauss (4.48), temos que, (4.61) é justamente a primeira equação de (4.48). As equações (4.62) - (4.65) são obtidas subtraindo em (4.48), respectivamente, as seguintes equações, a primeira pela terceira, a segunda pela quinta, a primeira pela segunda e a primeira pela quarta.

A equação (4.66) com r=4, é obtida das equações de (4.48), somando a terceira com a quinta, em seguida subtraindo com a primeira e com a oitava.

A equação (4.66) com r=5, é obtida das equações de (4.48), somando a quarta com a quinta, em seguida subtraindo com a primeira e com a nona.

A equação (4.67) com r=4, é obtida das equações de (4.48), somando a segunda com a sexta, em seguida subtraindo com a primeira e com a oitava.

A equação (4.67) com r=5, é obtida das equações de (4.48), somando a segunda com a sétima, em seguida subtraindo com a primeira e com a nona.

A equação (4.68), é obtida das equações de (4.48), somando a terceira com a sétima, em seguida subtraindo com a primeira e com a última.

Reciprocamente, considerando as equações (4.61) - (4.68), temos que, a primeira equação de (4.48) é justamente (4.61). As seguintes equações de (4.48), a segunda à quinta são obtidas, respectivamente, subtraindo (4.61) com (4.64), (4.61) com (4.62), (4.61) com (4.65), (4.61) com (4.63) e em seguida com (4.64).

A oitava equação de (4.48) é obtida subtraindo (4.66) (onde r=4) com (4.62), em seguida somando (4.61) e subtraindo com (4.63) e (4.64).

A nona equação de (4.48) é obtida subtraindo (4.66) (onde r=5) com (4.65), em seguida somando (4.61) e subtraindo com (4.63) e (4.64).

A sexta equação de (4.48) é obtida subtraindo (4.67) (onde r=4) com (4.64), em seguida subtraindo com (4.66) (onde r=4), somando (4.62), subtraindo com (4.61) e somando com (4.63) e (4.64).

A sétima equação de (4.48) é obtida subtraindo (4.67) (onde r=5) com (4.64), em seguida subtraindo com (4.66) (onde r=5), somando (4.65), subtraindo com (4.61) e somando com (4.63) e (4.64).

Finalmente, a última equação de (4.48) é obtida subtraindo (4.68) com (4.62), em seguida subtraindo com (4.67) (onde r=5), somando (4.66) (onde r=5), subtraindo com(4.65), somando (4.61) e subtraindo com (4.63).

■

Lema 4.9. *Considere* λ_i *e* g_{ii}*, respectivamente, dados por (4.38), (4.39) e (4.45),* $1 \leq i \leq 5$*. Então as equações (4.66) - (4.68) são verificadas se, e somente se,* F_i^β *satisfaz a equação*

$$F_i^{\beta''} - b_i F_i^\beta = c_{i\beta}, \qquad 1 \leq i \leq 4, \quad i < \beta \leq 5, \tag{4.69}$$

onde as condições iniciais e as constantes b_i *e* $c_{i\beta}$*, devem satisfazer as seguintes relações*

$$\begin{aligned} & b_1 + b_2 = -1, \qquad c_{1\beta} + c_{2\beta} = 0, \quad 3 \leq \beta \leq 5, \\ & b_l = \sum_{k=1}^{l-1} \left[2c_{kl}F_k^l + b_k(F_k^l)^2 - (F_k^{l'})^2\right](0), \quad 3 \leq l \leq 4, \\ & c_{lr} = \sum_{k=1}^{l-1} \left[c_{kl}F_k^r + c_{kr}F_k^l + b_k F_k^l F_k^r - F_k^{l'} F_k^{r'}\right](0), \quad 3 \leq l < r \leq 5. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Demonstração. Sejam λ_i e g_{ii}, respectivamente, dados por (4.38) e (4.45), $1 \leq i \leq 5$. De (4.66) com $r = 4$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} = & m_{214,1} - (m_{214})^2 + m_{213}m_{214} + m_{123,2} - (m_{123})^2 + \\ & + m_{123}m_{124} - \frac{m_{134,3} - (m_{134})^2}{(F_2^3 - F_1^3)^2}. \end{aligned}$$

Usando (4.2), temos

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}=\frac{-F_2^3h_{13}}{(F_2^3-F_1^3)(h_{23}-h_{13})}.$$

Logo, comparando essa duas equações, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{-F_2^3h_{13}}{(F_2^3-F_1^3)(h_{23}-h_{13})}=&m_{214,1}-(m_{214})^2+m_{213}m_{214}+m_{123,2}-(m_{123})^2+\\&+m_{123}m_{124}-\frac{m_{134,3}-(m_{134})^2}{(F_2^3-F_1^3)^2}.\end{aligned}$$

Além disso, pela Observação 4.2, temos

$$\begin{aligned}&m_{214,1}-(m_{214})^2=\frac{h_{13,11}}{h_{23}-h_{13}}, &&m_{123,2}-(m_{123})^2=\frac{F_2^{3''}}{F_1^3-F_2^3},\\&m_{134,3}-(m_{134})^2=\frac{(F_2^3-F_1^3)h_{23,33}}{F_2^3(h_{13}-h_{23})}.\end{aligned}$$

Substituindo na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{-F_2^3h_{13}}{(F_2^3-F_1^3)(h_{23}-h_{13})}=&\frac{h_{13,11}}{h_{23}-h_{13}}+\frac{F_2^{3''}}{F_1^3-F_2^3}+\frac{h_{13,1}}{h_{23}-h_{13}}\frac{F_1^{3'}}{F_2^3-F_1^3}+\\&+\frac{h_{23,2}}{h_{13}-h_{23}}\frac{F_2^{3'}}{F_1^3-F_2^3}+\frac{h_{23,33}}{F_2^3(F_2^3-F_1^3)(h_{23}-h_{13})}.\end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, temos

$$-h_{13}F_2^3=(F_2^3-F_1^3)h_{13,11}-(h_{23}-h_{13})F_2^{3''}+h_{13,1}F_1^{3'}+h_{23,2}F_2^{3'}+\frac{h_{23,33}}{F_2^3}. \tag{4.71}$$

Portanto, a equação (4.66) com $r=4$, é equivalente a equação (4.71).

Com raciocínio análogo, obtemos que (4.66) com $r=5$ é equivalente a

$$-h_{134}F_2^3=(F_2^3-F_1^3)h_{134,11}-(h_{234}-h_{134})F_2^{3''}+h_{134,1}F_1^{3'}+h_{234,2}F_2^{3'}+\frac{h_{234,33}}{F_2^3}. \tag{4.72}$$

Para maiores detalhes, confira Afirmação 1 no Apêndice.

Procedendo de modo inteiramente análogo, obtemos que as equações (4.67) com $r = 4$ e $r = 5$, (4.68) são, respectivamente, equivalentes a

$$-h_{23}F_1^3 = (h_{23} - h_{13})F_1^{3''} - (F_2^3 - F_1^3)h_{23,22} + h_{13,1}F_1^{3'} + h_{23,2}F_2^{3'} + \frac{h_{23,33}}{F_2^3}, \tag{4.73}$$

$$-h_{234}F_1^3 = (h_{234} - h_{134})F_1^{3''} - (F_2^3 - F_1^3)h_{234,22} + h_{134,1}F_1^{3'} + h_{234,2}F_2^{3'} + \frac{h_{234,33}}{F_2^3}, \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned} -h_{13}h_{234} = {} & (h_{234} - h_{134})h_{13,11} - (h_{23} - h_{13})h_{234,22} + h_{13,1}h_{134,1} + h_{23,2}h_{234,2} + \\ & + \frac{h_{23,3}h_{234,3}}{(F_2^3)^2} + \frac{h_{234,44}}{h_{23}}. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Para maiores detalhes, confira Afirmação 1 no Apêndice.

Derivando (4.71), (4.73), (4.74), (4.75) e (4.72), com respeito a x_1, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
& -h_{13,1}F_2^3 = -F_1^{3'}h_{13,11} + (F_2^3 - F_1^3)h_{13,111} + h_{13,1}F_2^{3''} + h_{13,11}F_1^{3'} + h_{13,1}F_1^{3''}, \\
& -h_{23}F_1^{3'} = -h_{13,1}F_1^{3''} + (h_{23} - h_{13})F_1^{3'''} + F_1^{3'}h_{23,22} + h_{13,11}F_1^{3'} + h_{13,1}F_1^{3''}, \\
& -h_{234}F_1^{3'} = -h_{134,1}F_1^{3''} + (h_{234} - h_{134})F_1^{3'''} + F_1^{3'}h_{234,22} + h_{134,11}F_1^{3'} + h_{134,1}F_1^{3''}, \\
& -h_{13,1}h_{234} = -h_{134,1}h_{13,11} + (h_{234} - h_{134})h_{13,111} + h_{13,1}h_{234,22} + h_{13,11}h_{134,1} + h_{13,1}h_{134,11}, \\
& -h_{134,1}F_2^3 = -F_1^{3'}h_{134,11} + (F_2^3 - F_1^3)h_{134,111} + h_{134,1}F_2^{3''} + h_{134,11}F_1^{3'} + h_{134,1}F_1^{3''}.
\end{aligned}$$

Por (4.39), temos que $F_1^{3'} \neq 0$, $h_{13,1} \neq 0$ e $h_{134,1} \neq 0$. Logo, simplificando as equações acima e isolando $\frac{h_{13,111}}{h_{13,1}}$, $\frac{F_1^{3'''}}{F_1^{3'}}$ e $\frac{h_{134,111}}{h_{134,1}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{h_{13,111}}{h_{13,1}} &= \frac{1}{F_1^3 - F_2^3}\Big[F_2^3 + F_2^{3''} + F_1^{3''}\Big], \\
\frac{F_1^{3'''}}{F_1^{3'}} &= \frac{1}{h_{13} - h_{23}}\Big[h_{23} + h_{23,22} + h_{13,11}\Big], \\
\frac{F_1^{3'''}}{F_1^{3'}} &= \frac{1}{h_{134} - h_{234}}\Big[h_{234} + h_{234,22} + h_{134,11}\Big], \\
\frac{h_{13,111}}{h_{13,1}} &= \frac{1}{h_{134} - h_{234}}\Big[h_{234} + h_{234,22} + h_{134,11}\Big], \\
\frac{h_{134,111}}{h_{134,1}} &= \frac{1}{F_1^3 - F_2^3}\Big[F_2^3 + F_2^{3''} + F_1^{3''}\Big].
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Das equações acima, temos $\dfrac{F_1^{3'''}}{F_1^{3'}} = \dfrac{h_{13,111}}{h_{13,1}} = \dfrac{h_{134,111}}{h_{134,1}}$. Logo a primeira equação, pode ser reescrita como

$$\frac{F_1^{3'''}}{F_1^{3'}} = \frac{1}{F_1^3 - F_2^3}\Big[F_2^3 + F_2^{3''} + F_1^{3''}\Big].$$

Derivando essa equação com respeito a x_1, temos

$$\left[\frac{F_1^{3'''}}{F_1^{3'}}\right]' = \frac{-F_1^{3'}}{F_1^3 - F_2^3}\frac{F_1^{3'''}}{F_1^{3'}} + \frac{1}{F_1^3 - F_2^3}F_1^{3'''} = 0.$$

Logo,

$$\frac{F_1^{3'''}}{F_1^{3'}} = \frac{h_{13,111}}{h_{13,1}} = \frac{h_{13,111}}{h_{13,1}} = b_1, \tag{4.77}$$

onde $b_1 \in \mathbf{R}$. Daí, obtemos

$$F_1^{3''} - b_1 F_1^3 = c_{13}, \qquad c_{13} \in \mathbf{R}.$$

Substituindo h_{13} dada em (4.39) em (4.77), temos

$$F_3^4 F_1^{3'''} + F_1^{4'''} = b_1(F_3^4 F_1^{3'} + F_1^{4'}).$$

Donde, usando a equação que F_1^3 satisfaz e simplificando, obtemos

$$F_1^{4''} - b_1 F_1^4 = c_{14}, \qquad c_{14} \in \mathbf{R}.$$

Do mesmo modo, substituindo h_{134} dada em (4.39) em (4.77), temos

$$F_4^5\big[F_3^4 F_1^{3'''} + F_1^{4'''}\big] + F_3^5 F_1^{3'''} + F_1^{5'''} = b_1\big\{F_4^5\big[F_3^4 F_1^{3'} + F_1^{4'}\big] + F_3^5 F_1^{3'} + F_1^{5'}\big\}.$$

Logo, usando as equações que F_1^β, $3 \le \beta \le 4$, satisfaz e simplificando, obtemos

$$F_1^{5''} - b_1 F_1^5 = c_{15}, \qquad c_{15} \in \mathbf{R}.$$

Além disso, substituindo (4.77) na primeira equação de (4.76), temos

$$b_1 = \frac{1}{F_1^3 - F_2^3}\Big[F_2^3 + F_2^{3''} + F_1^{3''}\Big].$$

Ou seja, usando a equação que F_1^3 satisfaz, obtemos que F_2^3, satisfaz

$$F_2^{3''} + (1 + b_1)F_2^3 = -c_{13}.$$

Do mesmo modo, de (4.77) e a segunda equação de (4.76), obtemos

$$b_1 = \frac{1}{h_{13} - h_{23}} \Big[h_{23} + h_{23,22} + h_{13,11} \Big].$$

Assim, usando (4.39), temos

$$b_1 \big\{ F_3^4 [F_1^3 - F_2^3] + F_1^4 - F_2^4 \big\} = F_3^4 F_2^3 + F_2^4 + F_3^4 F_2^{3''} + F_2^{4''} + F_3^4 F_1^{3''} + F_1^{4''}.$$

Logo, usando as equações que F_2^3 e F_1^β $3 \leq \beta \leq 4$, satisfazem, obtemos que F_2^4, satisfaz

$$F_2^{4''} + (1 + b_1) F_2^4 = -c_{14}.$$

Por fim, substituindo (4.77) na terceira equação de (4.76), usando (4.39) e as equações que F_1^5, F_i^β, $1 \leq i \leq 2$, $3 \leq \beta \leq 4$ satisfazem, obtemos com raciocínio inteiramente análogo ao da obtenção das equações anteriores, que F_2^5, satisfaz

$$F_2^{5''} + (1 + b_1) F_2^5 = -c_{15}.$$

Portanto, obtemos que as funções F_i^β, $1 \leq i \leq 2$, $3 \leq \beta \leq 5$, satisfazem

$$F_i^{\beta''} - b_i F_i^\beta = c_{i\beta}, \tag{4.78}$$

onde as constantes b_i e $c_{i\beta}$, satisfazem as relações

$$b_1 + b_2 = -1, \qquad c_{2\beta} + c_{1\beta} = 0. \tag{4.79}$$

De (4.78) e (4.39), obtemos

$$h_{i3,ii} = b_i h_{i3} + c_{i3} F_3^4 + c_{i4}, \quad 1 \leq i \leq 2, \tag{4.80}$$

$$h_{i34,ii} = b_i h_{i34} + F_4^5 \big[c_{i3} F_3^4 + c_{i4} \big] + c_{i3} F_3^5 + c_{i5}, \quad 1 \leq i \leq 2. \tag{4.81}$$

Afirmação: Para cada $1 \leq i \leq 2$ e $3 \leq \beta, \alpha \leq 5$, temos as constantes

$$a_{i\beta\alpha} = -F_i^{\beta'} F_i^{\alpha'} + b_i F_i^\beta F_i^\alpha + c_{i\beta} F_i^\alpha + c_{i\alpha} F_i^\beta, \tag{4.82}$$

onde F_i^β, satisfaz (4.78) e as constantes b_i e $c_{i\beta}$ satisfazem (4.79).

De fato, derivando (4.82) com respeito a x_i, usando (4.78), obtemos a afirmação.

Substituindo (4.39), (4.80), (4.79), (4.78) com $i = 2$ e $\beta = 3$, em (4.71) e usando $h_{23,33} = F_3^{4''} F_2^3$, temos

$$
\begin{aligned}
&F_2^3 h_{13} = (F_1^3 - F_2^3)(b_1 h_{13} + c_{13} F_3^4 + c_{14}) + (h_{23} - h_{13})\big[-(1+b_1)F_2^3 - c_{13}\big] - \\
&\qquad h_{13,1} F_1^{3'} - h_{23,2} F_2^{3'} - F_3^{4''}, \\
&[F_2^3 + b_1 F_2^3 - b_1 F_1^3 - (1+b_1)F_2^3 - c_{13}](F_3^4 F_1^3 + F_1^4) = c_{13} F_3^4 (F_1^3 - F_2^3) + c_{14}(F_1^3 - F_2^3) + \\
&(F_2^3 F_3^4 + F_2^4)\big[-(1+b_1)F_2^3 - c_{13}\big] - F_3^4 \big(F_1^{3'}\big)^2 - F_1^{3'} F_1^{4'} - F_3^4 \big(F_2^{3'}\big)^2 - F_2^{3'} F_2^{4'} - F_3^{4''}.
\end{aligned}
$$

Logo, simplificando e agrupando os termos de forma conveniente, temos

$$
\begin{aligned}
&F_3^4 \big[\big(F_1^{3'}\big)^2 - b_1 \big(F_1^3\big)^2 - 2c_{13} F_1^3 + \big(F_2^{3'}\big)^2 + (1+b_1)\big(F_2^3\big)^2 + 2c_{13} F_2^3\big] = -F_1^{3'} F_1^{4'} + c_{13} F_1^4 + \\
&+ c_{14} F_1^3 + b_1 F_1^3 F_1^4 - F_2^{3'} F_2^{4'} - (1+b_1) F_2^3 F_2^4 - c_{13} F_2^4 - c_{14} F_2^3 - F_3^{4''}.
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

Procedendo de modo inteiramente análogo, substituindo (4.39), (4.80), (4.79), (4.78) com $i = 1$ e $\beta = 3$, em (4.73), usando $h_{23,33} = F_3^{4''} F_2^3$, obtemos a mesma equação acima. Para maiores detalhes, confira Afirmação 2 com $s = 4$ no Apêndice.

Assim, usando (4.79) e (4.82) em (4.83), obtemos

$$
F_3^{4''} - b_3 F_3^4 = c_{34}, \qquad b_3 = a_{133} + a_{233}, \qquad c_{34} = a_{134} + a_{234}, \tag{4.84}
$$

onde $a_{i\beta\alpha}$, $1 \leq i \leq 2$, $3 \leq \alpha, \beta \leq 4$, são dados por (4.82).

Considere a função $\overline{h}_{i3} = F_i^3 F_3^5 + F_i^5$, $1 \leq i \leq 2$. Logo, usando (4.78), obtemos $\overline{h}_{i3,ii}$ e h_{i34} dado em (4.39), torna-se

$$
\overline{h}_{i3,ii} = b_i \overline{h}_{i3} + c_{i3} F_3^5 + c_{i5}, \qquad h_{i34} = F_4^5 h_{13} + \overline{h}_{i3}, \tag{4.85}
$$

Substituindo (4.39), (4.85), em (4.72) e (4.74), respectivamente, usando $h_{234,33} =$

$F_4^5 h_{23,33} + \overline{h}_{23,33}$, obtemos

$$F_4^5\Big[-h_{13}F_2^3-(F_2^3-F_1^3)h_{13,11}+(h_{23}-h_{13})F_2^{3''}-h_{13,1}F_1^{3'}-h_{23,2}F_2^{3'}-\frac{h_{23,33}}{F_2^3}\Big]-$$
$$-\overline{h}_{13}F_2^3-(F_2^3-F_1^3)\overline{h}_{13,11}+(\overline{h}_{23}-\overline{h}_{13})F_2^{3''}-\overline{h}_{13,1}F_1^{3'}-\overline{h}_{23,2}F_2^{3'}-\frac{\overline{h}_{23,33}}{F_2^3}=0,$$
$$F_4^5\Big[-h_{23}F_1^3-(h_{23}-h_{13})F_1^{3''}+(F_2^3-F_1^3)h_{23,22}-h_{13,1}F_1^{3'}-h_{23,2}F_2^{3'}-\frac{h_{23,33}}{F_2^3}\Big]-$$
$$-\overline{h}_{23}F_1^3-(\overline{h}_{23}-\overline{h}_{13})F_1^{3''}+(F_2^3-F_1^3)\overline{h}_{23,22}-\overline{h}_{13,1}F_1^{3'}-\overline{h}_{23,2}F_2^{3'}-\frac{\overline{h}_{23,33}}{F_2^3}=0.$$

Logo, usando (4.71) e (4.73), temos

$$\begin{aligned}&-\overline{h}_{13}F_2^3-(F_2^3-F_1^3)\overline{h}_{13,11}+(\overline{h}_{23}-\overline{h}_{13})F_2^{3''}-\overline{h}_{13,1}F_1^{3'}-\overline{h}_{23,2}F_2^{3'}-\frac{\overline{h}_{23,33}}{F_2^3}=0,\\&-\overline{h}_{23}F_1^3-(\overline{h}_{23}-\overline{h}_{13})F_1^{3''}+(F_2^3-F_1^3)\overline{h}_{23,22}-\overline{h}_{13,1}F_1^{3'}-\overline{h}_{23,2}F_2^{3'}-\frac{\overline{h}_{23,33}}{F_2^3}=0.\end{aligned}\tag{4.86}$$

Substituindo (4.39), (4.85), (4.79), (4.78) com $i=2$ e $\beta=3$, na primeira equação acima, usando $\overline{h}_{23,33}=F_3^{5''}F_2^3$, temos

$$F_2^3\overline{h}_{13}=(F_1^3-F_2^3)(b_1\overline{h}_{13}+c_{13}F_3^5+c_{15})+(\overline{h}_{23}-\overline{h}_{13})\big[-(1+b_1)F_2^3-c_{13}\big]-$$
$$-\overline{h}_{13,1}F_1^{3'}-\overline{h}_{23,2}F_2^{3'}-F_3^{5''},$$
$$[F_2^3+b_1F_2^3-b_1F_1^3-(1+b_1)F_2^3-c_{13}](F_3^5F_1^3+F_1^5)=c_{13}F_3^5(F_1^3-F_2^3)+c_{15}(F_1^3-F_2^3)+$$
$$(F_2^3F_3^5+F_2^5)\big[-(1+b_1)F_2^3-c_{13}\big]-F_3^5\big(F_1^{3'}\big)^2-F_1^{3'}F_1^{5'}-F_3^5\big(F_2^{3'}\big)^2-F_2^{3'}F_2^{5'}-F_3^{5''}.$$

Logo, simplificando e agrupando os termos de forma conveniente, temos

$$\begin{aligned}&F_3^5\big[\big(F_1^{3'}\big)^2-b_1\big(F_1^3\big)^2-2c_{13}F_1^3+\big(F_2^{3'}\big)^2+(1+b_1)\big(F_2^3\big)^2+2c_{13}F_2^3\big]=-F_1^{3'}F_1^{5'}+c_{13}F_1^5+\\&+c_{15}F_1^3+b_1F_1^3F_1^5-F_2^{3'}F_2^{5'}-(1+b_1)F_2^3F_2^5-c_{13}F_2^5-c_{15}F_2^3-F_3^{5''}.\end{aligned}\tag{4.87}$$

Procedendo de modo inteiramente análogo, substituindo (4.39), (4.85), (4.79), (4.78) com $i=1$ e $\beta=3$, e $\overline{h}_{23,33}=F_3^{5''}F_2^3$ na segunda equação de (4.86), obtemos a mesma equação acima. Para maiores detalhes, confira Afirmação 2 com $s=5$ no Apêndice. Assim, usando (4.79) e (4.82), obtemos

$$F_3^{5''}-b_3F_3^5=c_{35},\qquad c_{35}=a_{135}+a_{235},\tag{4.88}$$

onde $a_{i\beta\alpha}$, $1 \leq i \leq 2$, $3 \leq \alpha, \beta \neq 4 \leq 5$, são dados por (4.82) e b_3 dado em (4.84). Procedendo de modo inteiramente análogo a obtenção de (4.82), usando (4.84) e (4.88), temos as constantes

$$a_{3\beta\alpha} = -F_3^{\alpha\prime} F_3^{\beta\prime} + b_3 F_3^{\alpha} F_3^{\beta} + c_{3\alpha} F_3^{\beta} + c_{3\beta} F_3^{\alpha}, \qquad 4 \leq \alpha, \beta \leq 5, \tag{4.89}$$

onde a função F_3^{β} e as constantes b_3, $c_{3\beta}$, $4 \leq \beta \leq 5$, são dadas em (4.84) e (4.88).

Substituindo (4.85) em (4.75) e usando $h_{234,44} = F_4^{5\prime\prime} h_{23}$, obtemos

$$F_4^5 \Bigg[- h_{13}h_{23} - (h_{23} - h_{13})h_{13,11} + (h_{23} - h_{13})h_{23,22} - \big(h_{13,1}\big)^2 - \big(h_{23,2}\big)^2 - \left(\frac{h_{23,3}}{F_2^3}\right)^2 \Bigg] -$$
$$- h_{13}\overline{h}_{23} - (\overline{h}_{23} - \overline{h}_{13})h_{13,11} + (h_{23} - h_{13})\overline{h}_{23,22} - h_{13,1}\overline{h}_{13,1} - h_{23,2}\overline{h}_{23,2} - \frac{h_{23,3}\overline{h}_{23,3}}{(F_2^3)^2} = F_4^{5\prime\prime}.$$

Logo, usando (4.39), (4.80), (4.85), (4.82) e (4.89) na equação acima, temos

$$F_4^{5\prime\prime} - b_4 F_4^5 = c_{45}, \qquad b_4 = a_{344} + a_{144} + a_{244}, \qquad c_{45} = a_{145} + a_{245} + a_{345}, \tag{4.90}$$

onde $a_{3\alpha\beta}$ e $a_{i\alpha\beta}$, são, respectivamente, dados por (4.89) e (4.82), $1 \leq i \leq 2$, $4 \leq \alpha, \beta \leq 5$. Para maiores detalhes, confira Afirmação 3 no Apêndice.

Finalmente, dadas condições iniciais, $F_i^{\beta}(0)$ e $F_i^{\beta\prime}(0)$, $1 \leq i \leq 4$, $i < \beta \leq 5$, usando (4.78), (4.79), (4.82), (4.84), (4.88), (4.89) e (4.90), obtemos (4.70).

Reciprocamente, pode se verificar que admitindo (4.69) e (4.70), então as equações (4.71) - (4.75) são satisfeitas, que por sua vez são equivalentes a (4.66) - (4.68).

■

Lema 4.10. *Considere λ_i e g_{ii}, respectivamente, dados por (4.38), (4.39) e (4.45), $1 \leq i \leq 5$. Suponha que as funções F_i^{β}, $1 \leq i \leq 4$, $i < \beta \leq 5$, satisfazem (4.69), com as condições iniciais e as constantes b_i e $c_{i\beta}$, satisfazendo (4.70). Então as equações (4.62) - (4.65), são verificadas se, e somente se, F_i^i satisfaz a equação*

$$F_i^{i\prime\prime} - b_i F_i^i = c_{ii}, \qquad 1 \leq i \leq 5, \tag{4.91}$$

onde as condições iniciais, e as constantes b_5 *e* c_{ii}*, devem satisfazer as seguintes relações*

$$\begin{aligned} &c_{11}+c_{22}=0, \quad c_{ii}=\sum_{k=1}^{i-1}\left[c_{ki}F_k^k+c_{kk}F_k^i+b_kF_k^kF_k^i-F_k^{k'}F_k^{i'}\right](0), \quad 3\le i\le 5,\\ &b_5=\sum_{k=1}^{4}\left[2c_{k5}F_k^5+b_k(F_k^5)^2-(F_k^{5'})^2\right](0). \end{aligned} \tag{4.92}$$

Demonstração. Sejam λ_i e g_{ii}, respectivamente, dados por (4.38), (4.39) e (4.45), $1\le i\le 5$. De (4.63), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_1} &=-m_{213,1}+(m_{213})^2+m_{123,2}-(m_{123})^2+\frac{\lambda_{2,11}}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2-\lambda_1},\\ &=\frac{F_1^{3''}}{F_1^3-F_2^3}+\frac{F_2^{3''}}{F_1^3-F_2^3}+\frac{\lambda_{2,11}+\lambda_{1,22}}{\lambda_1-\lambda_2},\\ &=b_1-\frac{F_2^3}{F_1^3-F_2^3}+\frac{\lambda_{2,11}+\lambda_{1,22}}{\lambda_1-\lambda_2}. \end{aligned}$$

Onde na penúltima igualdade, usamos a Observação 4.2 e na última, usamos (4.78). Isolando λ_3, temos

$$\lambda_3=b_1(\lambda_2-\lambda_1)-\frac{F_2^3}{F_1^3-F_2^3}(\lambda_2-\lambda_1)-\lambda_{2,11}-\lambda_{1,22}.$$

Comparando a equação acima com a expressão de λ_3 dada em (4.38), obtemos

$$\frac{F_2^3\lambda_2-F_1^3\lambda_1}{F_2^3-F_1^3}=b_1(\lambda_2-\lambda_1)-\frac{F_2^3}{F_1^3-F_2^3}(\lambda_2-\lambda_1)-\lambda_{2,11}-\lambda_{1,22}.$$

Simplificando a expressão acima, temos

$$\left[F_2^3-F_1^3\right]\left[\lambda_1+b_1\lambda_1-b_1\lambda_2+\lambda_{2,11}+\lambda_{1,22}\right]=0.$$

Por (4.2), temos que $F_2^3-F_1^3\neq 0$, logo

$$\lambda_1+b_1\lambda_1-b_1\lambda_2+\lambda_{2,11}+\lambda_{1,22}=0. \tag{4.93}$$

Derivando λ_1 e λ_2 dados em (4.38), respectivamente, com respeito a x_2 e x_1, usando (4.78), (4.80) e (4.81), temos

$$\begin{aligned} \lambda_{1,22}&=-(1+b_1)\lambda_1-h_{34}F_5^5-g_3F_4^4-c_{13}F_3^3+F_2^{2''}+(1+b_1)F_2^2,\\ \lambda_{2,11}&=b_1\lambda_2+h_{34}F_5^5+g_3F_4^4+c_{13}F_3^3+F_1^{1''}-b_1F_1^1, \end{aligned} \tag{4.94}$$

onde $h_{34} = F_4^5(c_{13}F_3^4 + c_{14}) + c_{13}F_3^5 + c_{15}$ e $g_3 = c_{13}F_3^4 + c_{14}$.
Assim, substituindo na equação anterior, temos

$$F_1^{1''} - b_1F_1^1 + F_2^{2''} + (1 + b_1)F_2^2 = 0.$$

Logo (4.63) está satisfeita se, e somente se, F_i^i, $1 \le i \le 2$, satisfaz

$$F_i^{i''} - b_iF_i^i = c_{ii}, \quad 1 \le i \le 2, \qquad c_{22} = -c_{11}, \qquad b_1 + b_2 = -1. \tag{4.95}$$

Dessa equação, procedendo de forma inteiramente análoga a obtenção de (4.82), usando (4.78), obtemos as constantes

$$\begin{aligned} a_{i\beta i} &= -\,F_i^{\beta'}F_i^{i'} + b_iF_i^{\beta}F_i^i + c_{i\beta}F_i^i + c_{ii}F_i^{\beta}, \\ a_{iii} &= -\,\big(F_i^{i'}\big)^2 + b_i\big(F_i^i\big)^2 + 2c_{ii}F_i^i, \end{aligned} \tag{4.96}$$

onde F_i^i e c_{ii}, são dados acima e F_i^{β}, $1 \le i \le 2$, $3 \le \beta \le 5$, satisfaz (4.78) e as constantes b_i e $c_{i\beta}$, satisfazem (4.79).

Usando (4.45) em (4.64), temos

$$\frac{\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} = m_{213,1} - (m_{213})^2 + \Gamma_{12}^2 m_{213} + \Gamma_{12}^1 m_{123} + \frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_{1,33}}{(F_1^3 - F_2^3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)}.$$

Substituindo (4.2), (1.18) e a Observação 4.2 na equação acima, obtemos

$$\frac{\lambda_1 F_1^3}{F_1^3 - F_2^3} = \frac{F_1^{3''}(\lambda_1 - \lambda_2)}{F_2^3 - F_1^3} - \lambda_{1,22} - \frac{\lambda_{1,2}F_2^{3'}}{F_1^3 - F_2^3} + \frac{\lambda_{2,1}F_1^{3'}}{F_2^3 - F_1^3} - \frac{\lambda_{1,33}}{(F_1^3 - F_2^3)F_2^3}.$$

Seja $S = \lambda_1 + b_1\lambda_1 - b_1\lambda_2 + \lambda_{1,22}$, logo usando (4.78), a expressão acima pode ser reescrita como

$$F_1^3 S = c_{13}(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_{1,22}F_2^3 - \lambda_{1,2}F_2^{3'} - \lambda_{2,1}F_1^{3'} - \frac{\lambda_{1,33}}{F_2^3}. \tag{4.97}$$

De (4.38), temos

$$\lambda_{1,33} = F_2^3\big[(F_4^5F_3^{4''} + F_3^{5''})F_5^5 + F_3^{4''}F_4^4 + F_3^{3''}\big].$$

Substituindo (4.93), (4.38), (4.82), (4.94) e $\lambda_{1,33}$ na equação acima, obtemos

$$\Big\{\big[(a_{133}+a_{233})F_3^4+a_{134}+a_{234}-F_3^{4''}\big]F_4^5+(a_{133}+a_{233})F_3^5+a_{135}+a_{235}-F_3^{5''}\Big\}F_5^5+$$
$$+\big[(a_{133}+a_{233})F_3^4+a_{134}+a_{234}-F_3^{4''}\big]F_4^4+(a_{133}+a_{233})F_3^3+a_{131}+a_{231}-F_3^{3''}=0,$$

onde $a_{i\alpha\beta}$, $1\leq i\leq 2$, $3\leq \alpha,\beta\leq 5$, são dados em (4.82). Para maiores detalhes, veja Afirmação 4, para $l=3$, no Apêndice.

Logo, usando (4.96), (4.84) e (4.88), na equação acima, temos

$$F_3^{3''}-b_3F_3^3=c_{33}, \qquad c_{33}=a_{131}+a_{232}, \tag{4.98}$$

onde a_{i3i}, $1\leq i\leq 2$, é dado por (4.96) e b_3, dado em (4.84).

Usando a equação acima, (4.84) e procedendo de modo inteiramente análogo a obtenção de (4.82), obtemos as constantes

$$\begin{aligned} a_{3\beta 3}&=-F_3^{\beta'}F_3^{3'}+b_3F_3^\beta F_3^3+c_{3\beta}F_3^3+c_{33}F_3^\beta,\\ a_{333}&=-\big(F_3^{3'}\big)^2+b_3\big(F_3^3\big)^2+2c_{33}F_3^3, \end{aligned} \tag{4.99}$$

onde F_3^3 e c_{33}, são dados acima e F_3^β, $4\leq\beta\leq 5$ e a constantes b_3, $c_{3\beta}$ satisfazem (4.84) e (4.88).

Substituindo (4.45) em (4.62), temos

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}=&m_{214,1}-(m_{214})^2+\Gamma_{12}^2m_{214}+\Gamma_{12}^1m_{124}+\frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{\Gamma_{13}^1m_{134}}{(F_1^3-F_2^3)^2}-\\ &-\frac{\lambda_{1,44}}{(h_{23}-h_{13})^2(\lambda_4-\lambda_1)}.\end{aligned}$$

Usando (4.2), (1.18) e a Observação 4.2 na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1h_{13}}{h_{23}-h_{13}}=&\frac{h_{13,11}(\lambda_2-\lambda_1)}{h_{23}-h_{13}}+\lambda_{1,22}-\frac{\lambda_{1,2}h_{23,2}}{h_{23}-h_{13}}-\frac{\lambda_{2,1}h_{13,1}}{h_{23}-h_{13}}-\frac{\lambda_{1,3}h_{23,3}}{(F_2^3)^2(h_{23}-h_{13})}-\\ &-\frac{\lambda_{1,44}}{(h_{23}-h_{13})h_{23}}.\end{aligned}$$

Seja $S=\lambda_1+b_1\lambda_1-b_1\lambda_2+\lambda_{1,22}$, logo usando (4.80), a expressão acima pode ser reescrita como

$$h_{13}S=(c_{13}F_3^4+c_{14})(\lambda_2-\lambda_1)+\lambda_{1,22}h_{23}-\lambda_{1,2}h_{23,2}-\lambda_{2,1}h_{13,1}-\frac{\lambda_{1,3}h_{23,3}}{(F_2^3)^2}-\frac{\lambda_{1,44}}{h_{23}}.$$

Usando (4.93) na equação acima, obtemos

$$-h_{13}\lambda_{2,11} - (c_{13}F_3^4 + c_{14})(\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_{1,22}h_{23} + \lambda_{1,2}h_{23,2} + \lambda_{2,1}h_{13,1} = -\frac{\lambda_{1,3}h_{23,3}}{(F_2^3)^2} - \frac{\lambda_{1,44}}{h_{23}}. \tag{4.100}$$

Usando (4.38), temos

$$\lambda_{1,44} = h_{23}\big[F_4^{5\prime\prime}F_5^5 + F_4^{4\prime\prime}\big].$$

Substituindo (4.39) e $\lambda_{1,44}$, na equação acima, temos

$$\begin{aligned}
&-(F_3^4F_1^3 + F_1^4)\lambda_{2,11} - (c_{13}F_3^4 + c_{14})(\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_{1,22}(F_3^4F_2^3 + F_2^4) + \lambda_{1,2}(F_3^4F_2^{3\prime} + F_2^{4\prime}) +\\
&+ \lambda_{2,1}(F_3^4F_1^{3\prime} + F_1^{4\prime}) = -\frac{\lambda_{1,3}F_3^{4\prime}}{F_2^3} - F_4^{5\prime\prime}F_5^5 - F_4^{4\prime\prime},\\
&-F_3^4\big[F_1^3\lambda_{2,11} + c_{13}(\lambda_2 - \lambda_1) + F_2^3\lambda_{1,22} - \lambda_{1,2}F_2^{3\prime} - \lambda_{2,1}F_1^{3\prime}\big] - F_1^4\lambda_{2,11} - c_{14}(\lambda_2 - \lambda_1) -\\
&- F_2^4\lambda_{1,22} + \lambda_{1,2}F_2^{4\prime} + \lambda_{2,1}F_1^{4\prime} = -\frac{\lambda_{1,3}F_3^{4\prime}}{F_2^3} - F_4^{5\prime\prime}F_5^5 - F_4^{4\prime\prime}.
\end{aligned}$$

Usando a Afirmação 4 do Apêndice e $\lambda_{1,3} = F_2^3\big[(F_4^5F_3^{4\prime} + F_3^{5\prime})F_5^5 + F_3^{4\prime}F_4^4 + F_3^{3\prime}\big]$, na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\Big\{\big[(a_{133} + a_{233})F_3^4 + a_{143} + a_{243}\big]F_4^5F_3^4 + (a_{133} + a_{233})F_3^4F_3^5 + (a_{153} + a_{253})F_3^4 +\\
&+ \big[(a_{134} + a_{234})F_3^4 + a_{144} + a_{244}\big]F_4^5 + (a_{134} + a_{234})F_3^5 + a_{154} + a_{254} - \big(F_3^{4\prime}\big)^2F_4^5 -\\
&- F_3^{4\prime}F_3^{5\prime} - F_4^{5\prime\prime}\Big\}F_5^5 - \Big[(a_{133} + a_{233})\big(F_3^4\big)^2 + (a_{143} + a_{243})F_3^4 + (a_{134} + a_{234})F_3^4 +\\
&+ a_{144} + a_{244} - \big(F_3^{4\prime}\big)^2\Big]F_4^4 - \big[(a_{133} + a_{233})F_3^4 + a_{134} + a_{234}\big]F_3^3 + F_3^{4\prime}F_3^{3\prime} -\\
&- (a_{131} + a_{232})F_3^4 - a_{141} - a_{242} = F_4^{4\prime\prime},
\end{aligned}$$

onde $a_{i\beta\alpha}$ e $a_{i\beta i}$, $1 \leq i \leq 2$, $3 \leq \beta, \alpha \leq 4$ são, respectivamente, dados em (4.82) e (4.96).

Substituindo b_3, c_{34}, c_{35} e c_{33}, dados em (4.84), (4.88) e (4.98), simplificando e agrupando os temos de modo conveniente, temos

$$\begin{aligned}
&-\Big\{\big[b_3(F_3^4)^2 + 2c_{34}F_3^4 - \big(F_3^{4\prime}\big)^2 + a_{144} + a_{244}\big]F_4^5 + b_3F_3^4F_3^5 + c_{35}F_3^4 + c_{34}F_3^5 + a_{145} +\\
&+ a_{245} - F_3^{4\prime}F_3^{5\prime} - F_4^{5\prime\prime}\Big\}F_5^5 - \Big[b_3(F_3^4)^2 + 2c_{34}F_3^4 - \big(F_3^{4\prime}\big)^2 + a_{144} + a_{244}\Big]F_4^4 - b_3F_3^4F_3^3 -\\
&- c_{33}F_3^4 - c_{34}F_3^3 - F_3^{4\prime}F_3^{3\prime} - a_{141} - a_{242} = F_4^{4\prime\prime}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (4.89), (4.90) e (4.96), obtemos

$$F_4^{4\prime\prime} - b_4 F_4^4 = c_{44}, \qquad c_{44} = a_{141} + a_{242} + a_{343}, \tag{4.101}$$

onde b_4, a_{i4i}, $1 \leq i \leq 2$, e a_{343} são, respectivamente, dados por (4.90), (4.96) e (4.99). Usando a equação acima, (4.90) e procedendo de modo inteiramente análogo a obtenção de (4.82), obtemos as constantes

$$\begin{aligned} a_{455} &= -\big(F_4^{5\prime}\big)^2 + b_4\big(F_4^5\big)^2 + 2c_{45}F_4^5, \\ a_{454} &= -F_4^{5\prime}F_4^{4\prime} + b_4 F_4^5 F_4^5 + c_{45}F_4^4 + c_{44}F_4^5, \\ a_{444} &= -\big(F_4^{4\prime}\big)^2 + b_4\big(F_4^4\big)^2 + 2c_{44}F_4^4, \end{aligned} \tag{4.102}$$

onde F_4^4 e c_{44}, são dados acima e F_4^5, e as constantes b_4, c_{45} satisfazem (4.90).

Finalmente, substituindo (4.45) em (4.65), temos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1(\lambda_5-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2} =& m_{215,1} - (m_{215})^2 + \Gamma_{12}^2 m_{215} + \Gamma_{12}^1 m_{125} + \frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{\Gamma_{13}^1 m_{135}}{(F_1^3-F_2^3)^2} + \\ &+ \frac{\Gamma_{14}^1 m_{145}}{(h_{23}-h_{13})^2} - \frac{\lambda_{1,55}}{(h_{234}-h_{134})^2(\lambda_5-\lambda_1)}. \end{aligned}$$

Substituindo (4.2), (1.18) e a Observação 4.2 na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 h_{134}}{h_{234}-h_{134}} =& \frac{h_{134,11}(\lambda_2-\lambda_1)}{h_{234}-h_{134}} + \lambda_{1,22} - \frac{\lambda_{1,2}h_{234,2}}{h_{234}-h_{134}} - \frac{\lambda_{2,1}h_{134,1}}{h_{234}-h_{134}} - \frac{\lambda_{1,3}h_{234,3}}{(F_2^3)^2(h_{234}-h_{134})} - \\ &- \frac{\lambda_{1,4}h_{234,4}}{(h_{23})^2(h_{234}-h_{134})} - \frac{\lambda_{1,55}}{(h_{234}-h_{134})h_{234}}. \end{aligned}$$

Usando (4.81) e (4.93), a expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &-h_{134}\lambda_{2,11} - h_{34}(\lambda_2-\lambda_1) - \lambda_{1,22}h_{234} + \lambda_{1,2}h_{234,2} + \lambda_{2,1}h_{134,1} = -\frac{\lambda_{1,3}h_{234,3}}{(F_2^3)^2} - \\ &- \frac{\lambda_{1,4}h_{234,4}}{(h_{23})^2} - \frac{\lambda_{1,55}}{h_{234}}, \end{aligned}$$

onde $h_{34} = F_4^5 g_3 + \overline{g}_3$, $g_3 = c_{13}F_3^4 + c_{14}$ e $\overline{g}_3 = c_{13}F_3^5 + c_{15}$.

Seja $\overline{h}_{i3} = F_i^3 F_3^5 + F_i^5$, $1 \leq i \leq 2$, logo de (4.39) $h_{i34} = F_4^5 h_{i3} + \overline{h}_{i3}$, $1 \leq i \leq 2$. Dessa forma a equação acima, torna-se

$$\begin{aligned} &F_4^5\Big[-h_{13}\lambda_{2,11} - g_3(\lambda_2-\lambda_1) - \lambda_{1,22}h_{23} + \lambda_{1,2}h_{23,2} + \lambda_{2,1}h_{13,1} + \frac{\lambda_{1,3}h_{23,3}}{(F_2^3)^2}\Big] - \overline{h}_{13}\lambda_{2,11} - \\ &- \overline{g}_3(\lambda_2-\lambda_1) - \lambda_{1,22}\overline{h}_{23} + \lambda_{1,2}\overline{h}_{23,2} + \lambda_{2,1}\overline{h}_{13,1} + \frac{\lambda_{1,3}\overline{h}_{23,3}}{(F_2^3)^2} = -\frac{\lambda_{1,4}h_{234,4}}{(h_{23})^2} - \frac{\lambda_{1,55}}{h_{234}}. \end{aligned}$$

Substituindo (4.100) e $\overline{h}_{i3}$, na equação acima, temos

$$-\frac{F_4^5\lambda_{1,44}}{h_{23}}-F_3^5\big[F_1^3\lambda_{2,11}+c_{13}(\lambda_2-\lambda_1)+\lambda_{1,22}F_2^3-\lambda_{1,2}F_2^{3\prime}-\lambda_{2,1}F_1^{3\prime}\big]-F_1^5\lambda_{2,11}-$$
$$-c_{15}(\lambda_2-\lambda_1)-\lambda_{1,22}F_2^5+\lambda_{1,2}F_2^{5\prime}+\lambda_{2,1}F_1^{5\prime}+\frac{\lambda_{1,3}\overline{h}_{23,3}}{(F_2^3)^2}=-\frac{\lambda_{1,4}h_{234,4}}{(h_{23})^2}-\frac{\lambda_{1,55}}{h_{234}}.$$

Usando (4.97), (4.93), a Afirmação 4 do Apêndice e $\lambda_{1,55}=h_{234}F_5^{5\prime\prime}$, obtemos

$$\frac{-F_4^5\lambda_{1,44}}{h_{23}}-F_3^5\frac{\lambda_{1,33}}{F_2^3}+\frac{\lambda_{1,3}\overline{h}_{23,3}}{(F_2^3)^2}+\frac{\lambda_{1,4}h_{234,4}}{(h_{23})^2}-\big\{[(a_{135}+a_{235})F_3^4+a_{145}+a_{245}]F_4^5+$$
$$+(a_{135}+a_{235})F_3^5+a_{155}+a_{255}\big\}F_5^5-F_4^4\big[(a_{135}+a_{235})F_3^4+a_{145}+a_{245}\big]-$$
$$-F_3^3(a_{135}+a_{235})-a_{151}-a_{252}=-F_5^{5\prime\prime}.$$

Substituindo (4.84), (4.88), (4.90), (4.98), (4.101), λ_i, $1\leq i\leq 2$ dado em (4.38) e suas derivadas, na equação anterior, e em seguida reagrupando os termos de modo conveniente, temos

$$\begin{aligned}
F_5^{5\prime\prime}=&F_4^5\big[F_4^{5\prime\prime}F_5^5+F_4^{4\prime\prime}\big]+F_3^5\big[(F_4^5F_3^{4\prime\prime}+F_3^{5\prime\prime})F_5^5+F_4^4F_3^{4\prime\prime}+F_3^{3\prime\prime}\big]+\big[(c_{35}F_3^4+a_{145}+\\
&+a_{245})F_4^5+c_{35}F_3^5+a_{155}+a_{255}\big]F_5^5+(c_{35}F_3^4+a_{145}+a_{245})F_4^4+c_{35}F_3^3+a_{151}+\\
&+a_{252}-F_3^{5\prime}\big[(F_4^5F_3^{4\prime}+F_3^{5\prime})F_5^5+F_4^4F_3^{4\prime}+F_3^{3\prime}\big]-F_4^{5\prime}\big[F_4^{5\prime}F_5^5+F_4^{4\prime}\big]\\
=&\big[b_4\big(F_4^5\big)^2+c_{45}F_4^5+(b_3F_3^5F_3^4+c_{34}F_3^5+c_{35}F_3^4-F_3^{5\prime}F_3^{4\prime}+a_{145}+a_{245})F_4^5+\\
&+b_3\big(F_3^5\big)^2+2c_{35}F_3^5-\big(F_3^{5\prime}\big)^2-\big(F_4^{5\prime}\big)^2+a_{155}+a_{255}\big]F_5^5+\big[b_3F_3^5F_3^4-F_3^{5\prime}F_3^{4\prime}+\\
&+c_{34}F_3^5+c_{35}F_3^4+a_{145}+a_{245}\big]F_4^4+b_4F_4^4F_4^5+c_{44}F_4^5-F_4^{5\prime}F_4^{4\prime}+b_3F_3^5F_3^3+\\
&+c_{33}F_3^5+c_{35}F_3^3-F_3^{5\prime}F_3^{3\prime}+a_{151}+a_{252}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (4.89), (4.90), (4.102), (4.99), obtemos

$$\begin{aligned}
&F_5^{5\prime\prime}-b_5F_5^5=c_{55},\\
&b_5=a_{155}+a_{255}+a_{355}+a_{455},\\
&c_{55}=a_{151}+a_{252}+a_{353}+a_{454},
\end{aligned}\tag{4.103}$$

onde a_{i55}, a_{i5i} $1\leq i\leq 2$, a_{355}, a_{353}, a_{455} e a_{454} são, respectivamente, dados por (4.82), (4.96), (4.99), (4.89) e (4.102).

Finalmente, dadas condições iniciais, $F_i^i(0)$, $F_i^{i\prime}(0)$, $F_i^5(0)$ e $F_i^{5\prime}(0)$, $1 \leq i \leq 4$, usando (4.95), (4.96), (4.98), (4.99), (4.101), (4.102) e (4.103), obtemos (4.92).

Reciprocamente, supondo que F_i^β satisfaz (4.69) e as condições iniciais e as constantes b_i e $c_{i\beta}$ satisfazem (4.70), $1 \leq i \leq 4$, $i < \beta \leq 5$, pode se verificar que admitindo (4.91) e (4.92), então as equações (4.62) - (4.65), são satisfeitas.

∎

Lema 4.11. *Considere λ_i e g_{ii}, respectivamente, dados por (4.38), (4.39) e (4.45), $1 \leq i \leq 5$. Suponha que F_i^β, $1 \leq i \leq 5$, $i \leq \beta \leq 5$, satisfazem (4.69) e (4.91), com as condições iniciais e as constantes b_i e $c_{i\beta}$, satisfazendo (4.70) e (4.92). Então (4.61) é verificada se, e somente se, as condições iniciais $F_5^5(0)$ e $F_5^{5\prime}(0)$, satisfazem*

$$\sum_{k=1}^{5} \left[2c_{kk}F_k^k + b_k(F_k^k)^2 - (F_k^{k\prime})^2\right](0) = 0. \tag{4.104}$$

Demonstração. Sejam λ_i e g_{ii}, respectivamente, dados por (4.38) e (4.45), $1 \leq i \leq 5$. Usando, (4.45) e (1.18), temos que a equação (4.61) pode ser reescrita como

$$-\lambda_1\lambda_2 = \left[\frac{\lambda_{2,11}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_{1,22}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right](\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\lambda_{1,2})^2 + (\lambda_{2,1})^2 + \left[\frac{\lambda_{1,3}}{F_2^3}\right]^2 + \left[\frac{\lambda_{1,4}}{h_{23}}\right]^2 + \left[\frac{\lambda_{1,5}}{h_{234}}\right]^2.$$

Sejam as funções

$$g_3 = c_{13}F_3^4 + c_{14}, \quad \overline{g}_3 = c_{13}F_3^5 + c_{15}, \quad h_{34} = F_4^5 g_3 + \overline{g}_3, \quad \overline{h}_{i3} = F_i^3 F_3^5 + F_i^5. \tag{4.105}$$

Assim, usando (4.82), obtemos

$$\begin{aligned}
&-\big(h_{13,1}\big)^2 + b_1\big(h_{13}\big)^2 + 2g_3h_{13} - \big(h_{23,2}\big)^2 - (1+b_1)\big(h_{23}\big)^2 - 2g_3h_{23} = b_3\big(F_3^4\big)^2 + \\
&+ 2c_{34}F_3^4 + a_{144} + a_{244}, \\
&-\big(\overline{h}_{13,1}\big)^2 + b_1\big(\overline{h}_{13}\big)^2 + 2\overline{g}_3\overline{h}_{13} - \big(\overline{h}_{23,2}\big)^2 - (1+b_1)\big(\overline{h}_{23}\big)^2 - 2\overline{g}_3\overline{h}_{23} = b_3\big(F_3^5\big)^2 + \\
&+ 2c_{35}F_3^5 + a_{155} + a_{255}, \\
&- h_{13,1}\overline{h}_{13,1} + b_1h_{13}\overline{h}_{13} + g_3\overline{h}_{13} + \overline{g}_3h_{13} - h_{23,2}\overline{h}_{23,2} - (1+b_1)h_{23}\overline{h}_{23} - g_3\overline{h}_{23} - \\
&- \overline{g}_3h_{23} = b_3F_3^4F_3^5 + c_{34}F_3^5 + (a_{135} + a_{235})F_3^4 + a_{145} + a_{245}.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Substituindo (4.94), na equação anterior, temos

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_1\lambda_2 + \big[(1+b_1)\lambda_1 + b_1\lambda_2 + 2h_{34}F_5^5 + 2g_3F_4^4 + 2c_{13}F_3^3 + 2c_{11}\big](\lambda_2 - \lambda_1) = (\lambda_{1,2})^2 + \\
&+ (\lambda_{2,1})^2 + \left[\frac{\lambda_{1,3}}{F_2^3}\right]^2 + \left[\frac{\lambda_{1,4}}{h_{23}}\right]^2 + \left[\frac{\lambda_{1,5}}{h_{234}}\right]^2.
\end{aligned}
$$

De (4.38), temos

$$
\begin{aligned}
\lambda_{2,1} =& h_{134,1}F_5^5 + h_{13,1}F_4^4 + F_1^{3'}F_3^3 + F_1^{1'},\\
\lambda_{1,2} =& h_{234,2}F_5^5 + h_{23,2}F_4^4 + F_2^{3'}F_3^3 + F_2^{2'},\\
\lambda_{1,3} =& F_2^3\big[(F_4^5F_3^{4'} + F_3^{5'})F_5^5 + F_3^{4'}F_4^4 + F_3^{3'}\big],\\
\lambda_{1,4} =& h_{23}\big[F_4^{5'}F_5^5 + F_4^{4'}\big],\\
\lambda_{1,5} =& h_{234}F_5^5.
\end{aligned}
$$

Simplificando a equação anterior, e em seguida substituindo as derivadas acima, temos

$$
\begin{aligned}
&b_1(\lambda_2)^2 - (1+b_1)(\lambda_1)^2 + \big(2h_{34}F_5^5 + 2g_3F_4^4 + 2c_{13}F_3^3 + 2c_{11}\big)(\lambda_2 - \lambda_1) = \big(F_5^{5'}\big)^2 + \\
&+ \sum_{i=1}^{2}\left[h_{i34,i}F_5^5 + h_{i3,i}F_4^4 + F_i^{3'}F_3^3 + F_i^{i'}\right]^2 + \left[\big(F_4^5F_3^{4'} + F_3^{5'}\big)F_5^5 + F_3^{4'}F_4^4 + F_3^{3'}\right]^2 + \\
&+ \big(F_4^{5'}F_5^5 + F_4^{4'}\big)^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.38), na equação acima, temos

$$
\begin{aligned}
&\big(F_5^5\big)^2\Big[b_1\big(h_{134}\big)^2 + 2h_{134}h_{34} - \big(h_{134,1}\big)^2 - (1+b_1)\big(h_{234}\big)^2 - 2h_{234}h_{34} - \big(h_{234,2}\big)^2 - \\
&- \big(F_4^5\big)^2\big(F_3^{4'}\big)^2 - 2F_4^5F_3^{4'}F_3^{5'} - \big(F_3^{5'}\big)^2 - \big(F_4^{5'}\big)^2\Big] + \big(F_4^4\big)^2\Big[b_1\big(h_{13}\big)^2 + 2h_{13}g_3 - \\
&- \big(h_{13,1}\big)^2 - (1+b_1)\big(h_{23}\big)^2 - 2h_{23}g_3 - \big(h_{23,2}\big)^2 - \big(F_3^{4'}\big)^2\Big] + \big(F_3^3\big)^2\Big[b_1\big(F_1^3\big)^2 + \\
&+ 2c_{13}F_1^3 - \big(F_1^{3'}\big)^2 - (1+b_1)\big(F_2^3\big)^2 - 2c_{13}F_2^3 - \big(F_2^{3'}\big)^2\Big] + 2F_5^5F_4^4\Big[b_1h_{134}h_{13} + h_{34}h_{13} + \\
&+ g_3h_{134} - h_{134,1}h_{13,1} - (1+b_1)h_{234}h_{23} - h_{34}h_{23} - g_3h_{234} - h_{234,2}h_{23,2} - F_3^{4'}(F_4^5F_3^{4'} + \\
&+ F_3^{5'})\Big] + 2F_5^5F_3^3\Big[b_1h_{134}F_1^3 + h_{34}F_1^3 + c_{13}h_{134} - F_1^{3'}h_{134,1} - (1+b_1)h_{234}F_2^3 - h_{34}F_2^3 -
\end{aligned}
$$

$$- c_{13}h_{234} - F_2^{3'}h_{234,2}\Big] + 2F_4^4F_3^3\Big[b_1h_{13}F_1^3 + g_3F_1^3 + c_{13}h_{13} - F_1^{3'}h_{13,1} - (1+b_1)h_{23}F_2^3 -$$

$$- g_3F_2^3 - c_{13}h_{23} - F_2^{3'}h_{23,2}\Big] + 2F_5^5\Big[b_1h_{134}F_1^1 + h_{34}F_1^1 + c_{11}h_{134} - F_1^{1'}h_{134,1} - h_{34}F_2^2 -$$

$$- (1+b_1)h_{234}F_2^2 - c_{11}h_{234} - F_2^{2'}h_{234,2} - F_4^{5'}F_4^{4'} - F_3^{3'}(F_4^5F_3^{4'} + F_3^{5'})\Big] + 2F_4^4\Big[b_1h_{13}F_1^1 +$$

$$+ g_3F_1^1 + c_{11}h_{13} - F_1^{1'}h_{13,1} - (1+b_1)h_{23}F_2^2 - g_3F_2^2 - c_{11}h_{23} - F_2^{2'}h_{23,2} - F_3^{3'}F_3^{4'}\Big] +$$

$$+ 2F_3^3\Big[b_1F_1^3F_1^1 + c_{13}F_1^1 + c_{11}F_1^3 - F_1^{3'}F_1^{1'} - (1+b_1)F_2^3F_2^2 - c_{13}F_2^2 - c_{11}F_2^3 - F_2^{3'}F_2^{2'}\Big] +$$

$$+ b_1\big(F_1^1\big)^2 + 2c_{11}F_1^1 - \big(F_1^{1'}\big)^2 - (1+b_1)\big(F_2^2\big)^2 - 2c_{11}F_2^2 - \big(F_2^{2'}\big)^2 = \big(F_3^{3'}\big)^2 + \big(F_4^{4'}\big)^2 +$$

$$+ \big(F_5^{5'}\big)^2.$$

Logo, substituindo (4.106), (4.39), na equação acima, usando (4.82), (4.89), (4.102), (4.103), (4.96), e agrupando os termos de forma conveniente, obtemos

$$b_5\big(F_5^5\big)^2 + b_4\big(F_4^4\big)^2 + b_3\big(F_3^3\big)^2 + 2F_5^5F_4^4(b_4F_4^5 + c_{45}) + 2F_5^5F_3^3\big[F_4^5(b_3F_3^4 + c_{34}) +$$

$$+ b_3F_3^5 + c_{35}\big] + 2F_4^4F_3^3(b_3F_3^4 + c_{34}) + 2F_5^5\big[F_4^5(c_{33}F_3^4 + a_{141} + a_{242} - F_3^{3'}F_3^{4'}) +$$

$$+ c_{33}F_3^5 + a_{151} + a_{252} - F_3^{3'}F_3^{5'} - F_4^{5'}F_4^{4'}\big] + 2F_4^4\big[c_{33}F_3^4 + a_{141} + a_{242} - F_3^{3'}F_3^{4'}\big] +$$

$$+ 2F_3^3c_{33} + a_{111} + a_{222} = \big(F_3^{3'}\big)^2 + \big(F_4^{4'}\big)^2 + \big(F_5^{5'}\big)^2.$$

Usando, (4.99) e reagrupando os termos de modo conveniente, temos

$$b_5\big(F_5^5\big)^2 + 2F_5^5\big[b_4F_4^4F_4^5 + c_{45}F_4^4 + F_4^5(b_3F_3^4F_3^3 + c_{34}F_3^3 + c_{33}F_3^4 - F_3^{3'}F_3^{4'} + a_{141} + a_{242}) +$$

$$+ b_3F_3^5F_3^3 + c_{35}F_3^3 + c_{33}F_3^5 - F_3^{3'}F_3^{5'} - F_4^{4'}F_4^{5'} + a_{151} + a_{252}\big] + b_4\big(F_4^4\big)^2 + 2F_4^4\big[b_3F_3^4F_3^3 +$$

$$+ c_{34}F_3^3 + c_{33}F_3^4 - F_3^{3'}F_3^{4'} + a_{141} + a_{242}\big] + a_{111} + a_{222} + a_{333} = \big(F_4^{4'}\big)^2 + \big(F_5^{5'}\big)^2.$$

Usando (4.99), (4.101), obtemos

$$b_5\big(F_5^5\big)^2 + 2F_5^5\big[b_4F_4^4F_4^5 + c_{45}F_4^4 + c_{44}F_4^5 - F_4^{4'}F_4^{5'} + a_{151} + a_{252} + a_{353}\big] + b_4\big(F_4^4\big)^2 +$$

$$+ 2c_{44}F_4^4 - \big(F_4^{4'}\big)^2 + a_{111} + a_{222} + a_{333} = \big(F_5^{5'}\big)^2.$$

Substituindo (4.102), (4.103) na equação acima, obtemos

$$b_5\big(F_5^5\big)^2 + 2c_{55}F_5^5 - \big(F_5^{5'}\big)^2 + a_{111} + a_{222} + a_{333} + a_{444} = 0.$$

Portanto, pelas expressões dos a_{iii}, $1 \leq i \leq 4$, dados em (4.96), (4.99) e (4.102), dadas condições iniciais, $F_i^i(0)$, $F_i^{i\prime}(0)$, $1 \leq i \leq 5$, obtemos (4.104).

Reciprocamente, supondo que as funções F_i^β satisfazem (4.69) e (4.91) e as condições iniciais e as constantes b_i e $c_{i\beta}$ satisfazem (4.70) e (4.92), $1 \leq i \leq 5$, $i \leq \beta \leq 5$, pode se verificar que admitindo (4.104), então a equação (4.61), é satisfeita.

■

Com posse dos quatro lemas anteriores, demonstremos o Teorema 4.6.

Demonstração do Teorema 4.6. Considere $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura nas condições do Teorema 4.6. Como a equação de Gauss é satisfeita, então os Lemas 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 nos fornece (4.49) e (4.50).

■

Usando os Teoremas 4.4, 4.5 e 4.6, fornecemos o resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.12. *Seja* $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ *hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, cujas curvaturas principais,* $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, *são todas distintas. Sejam* m_{ijk}, $1 \leq i, j, k \leq 5$ *distintos, dados por (1.19) satisfazendo (1.20),* P_i, T_{415}, U_{415}, $1 \leq i \leq 4$, *dados por (3.2) e (3.1), definidas em* Ω. *Suponha que* $P_i \neq 0$, $T_{415} \neq 0$ *e* $U_{415} \neq 0$ *em* Ω. *Seja* G_{25}, G_{35} *e* G_{45} *funções vetoriais dadas em (3.6), com* $G_{45} \neq 0$ *e* $|G_{25}| + |G_{35}| \neq 0$ *em* Ω. *Se* $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$, $3 \leq l \leq 5$ *e* $4 \leq r \leq 5$. *Então as curvaturas principais* $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, *são dadas por (4.38) e (4.39) e existe uma mudança de cada coordenada, separadamente, tal que a métrica diagonal é dada por (4.45), onde as funções* F_i^β, $1 \leq i \leq 5$, $i \leq \beta \leq 5$, *satisfazem (4.49), isto é,*

$$F_i^{\beta\prime\prime} - b_i F_i^\beta = c_{i\beta}, \qquad 1 \leq i \leq 4, \quad i \leq \beta \leq 5,$$

com $F_1^2 = c_{12} = 0$ *e as condições iniciais e as constantes* b_i *e* $c_{i\beta}$, *devem satisfazer as condições algébricas (4.50).*

Reciprocamente, se g_{ii} e λ_i, $1 \leq i \leq 5$, são dados, por (4.45), (4.38), (4.39), (4.49) e (4.50), então existe uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, com $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, como curvaturas principais e métrica dada por g_{ii}, $1 \leq i \leq 5$.

Demonstração. Considere X uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura nas condições do Teorema 4.12. Como $m_{1l2} = m_{1r3} = m_{154} = 0$, $3 \leq l \leq 5$ e $4 \leq r \leq 5$, então pelos Teoremas 4.4 e 4.5, temos que as curvaturas principais $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, são dados por (4.38) e (4.39) e existe uma mudança de cada coordenada, separadamente, tal que a métrica diagonal é dada por (4.45). Além disso, pelo Teorema 4.6, temos que as funções F_i^β, $1 \leq i \leq 5$, $i \leq \beta \leq 5$, satisfazem (4.49) e as condições iniciais e as constantes b_i e $c_{i\beta}$ satisfazem (4.50).

Reciprocamente, dados g_{ii} e λ_i, $1 \leq i \leq 5$, por (4.45), (4.38) e (4.39). Como as funções F_i^β, $1 \leq i \leq 5$, $i \leq \beta \leq 5$, satisfazem (4.49) e as condições iniciais e as constantes b_i e $c_{i\beta}$, satisfazem (4.50), então pelos Lemas 4.9, 4.10, e 4.11 as equações (4.61) - (4.68), estão verificadas. Assim, pelo Lema 4.8, temos que as equações de Gauss (4.48) estão satisfeitas. Além disso, a equação de Codazzi (2.15) é verificada (para maiores detalhes confira Apêndice Afirmação 5).

Portanto pelo Teorema Fundamental das hipersuperfícies, existe a menos de movimento rígido, uma hipersperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura em $\mathbf{R}^6$, com curvaturas principais $-\lambda_i$ dadas por (4.38) e (4.39) e primeira forma fundamental dada por (4.45). Concluindo a demonstração.

■

4.3 Exemplos

Nesta seção, usamos o Teorema 4.6 para obter as curvaturas principais e a métrica de algumas hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura nas condições do Teorema 3.1.

Exemplo 1. No Teorema 4.6, façamos as seguintes escolhas de constantes:

$b_1 = c_{11} = c_{14} = c_{15} = 0$, $c_{13} = 2$.

Logo por (4.52), obtemos

$c_{22} = c_{24} = c_{25} = 0$, $c_{23} = -2$, $b_2 = -1$.

Tome as seguintes condições iniciais:

$F_1^3(0) = 35$, $F_1^{3\prime}(0) = 12$, $F_1^4(0) = 6$, $F_1^{4\prime}(0) = F_1^5(0) = 1$, $F_2^3(0) = -2$,

$F_2^{3\prime}(0) = F_2^4(0) = F_2^{4\prime}(0) = F_2^5(0) = F_i^i(0) = F_i^{i\prime}(0) = F_i^{5\prime}(0) = 0$, $1 \leq i \leq 2$.

Com isso, usando (4.51) e (4.53), obtemos as funções que dependem de x_1 e x_2,

$$F_1^3 = x_1^2 + 12x_1 + 35, \quad F_1^4 = x_1 + 6, \quad F_1^5 = 1, \quad F_1^1 = 0, \quad F_2^3 = -2, \quad F_2^4 = F_2^5 = F_2^2 = 0.$$

Usando essas funções e (4.54), obtemos $b_3 = c_{34} = c_{33} = 0$ e $c_{35} = 2$.

Tome agora as seguintes condições inicias:

$F_3^4(0) = \frac{1}{2}$, $F_3^5(0) = 0$, $F_3^{5\prime}(0) = -1$, $F_3^3(0) = F_3^{4\prime}(0) = F_3^{3\prime}(0) = 0$.

Logo usando (4.55), obtemos as funções que dependem de x_3,

$$F_3^4 = \frac{1}{2}, \quad F_3^5 = x_3^2 - x_3, \quad F_3^3 = 0.$$

Usando essas funções e (4.56), obtemos $b_4 = -1$, $c_{45} = 1$ e $c_{44} = 0$.

Tome as seguintes condições iniciais:

$F_4^5(0) = 1$, $F_4^4(0) = F_4^{5\prime}(0) = F_4^{4\prime}(0) = 0$.

Com isso, usando (4.57), obtemos as funções que dependem de x_4,

$$F_4^5 = 1, \qquad F_4^4 = 0.$$

Novamente usando essa funções e (4.58), obtemos $b_5 = c_{55} = 0$.

Afim de que a última relação de (4.60) seja satisfeita, escolhemos as condições inicias $F_5^5 = 1$ e $F_5^{5'} = 0$, donde de (4.59) a função que depende de x_5 é dada por

$$F_5^5 = 1.$$

Portanto pelos Teorema 4.4 e 4.5 obtemos, respectivamente, as curvaturas principais e a métrica de alguma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura. A saber

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -1 + 2x_3 - 2x_3^2, \qquad \lambda_2 = \big(x_1 + 7\big)\Big[\frac{x_1+7}{2} + x_3(x_3-1)(x_1+5)\Big], \\ &\lambda_3 = \frac{2(x_1+7)}{x_1^2 + 12x_1 + 37} \qquad \lambda_4 = \frac{-2\big[2x_3(x_3-1)(x_1+6)-1\big]}{(x_1+7)^2}, \qquad \lambda_5 = 0. \end{aligned} \tag{4.107}$$

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{\big(\lambda_2 - \lambda_1\big)^2}, \quad g_{33} = \frac{(x_1^2 + 12x_1 + 37)^2}{\big(\lambda_2 - \lambda_1\big)^2}, \quad g_{44} = \frac{(x_1+7)^4}{4\big(\lambda_2 - \lambda_1\big)^2} \quad g_{55} = 1, \tag{4.108}$$

as quais podem ser definidas no seguinte domínio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5; -1 < x_1 < 1, \;\; x_3 > -1, \;\; x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Usando as curvaturas principais, de (1.19) e (1.18), calculamos alguns invariantes de Laplace

$$\begin{aligned} &m_{213} = \frac{-2(x_1+6)}{x_1^2 + 12x_1 + 37}, \quad m_{214} = \frac{-2}{x_1+7}, \quad m_{314} = \frac{2(x_1+5)}{(x_1+7)(x_1^2+12x_1+37)}, \\ &m_{215} = \frac{\big(x_1+6\big)\lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad m_{315} = \frac{x_1^2 + 14x_1 + 47}{\big(\lambda_2 - \lambda_1\big)\big(x_1^2 + 12x_1 + 37\big)}, \\ &m_{415} = \frac{2x_3(x_3-1)(x_1+5) - 2}{\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)\big(x_1+7\big)}, \qquad m_{135} = m_{235} = \frac{\big(2x_3 - 1\big)\big(x_1^2 + 12x_1 + 37\big)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{aligned}$$

$$m_{123} = m_{124} = m_{125} = m_{132} = m_{134} = m_{142} = m_{143} = m_{145} = m_{245} = m_{345} = 0,$$

$$m_{152} = m_{153} = m_{154} = m_{254} = m_{354} = 0.$$

Além disso, calculamos também algumas funções dadas na Proposição 3.3

$$\begin{aligned} &M_{314}^2 = \frac{1}{(x_1+6)(x_1+7)}, \qquad M_{315}^2 = \frac{1}{\big(x_1+6\big)\big[-\big(x_1+6\big)\lambda_1 + 1\big]}, \\ &M_{415}^2 = \frac{-2x_3(x_3-1)}{2(x_1+7)\big[-\big(x_1+6\big)\lambda_1 + 1\big]}, \quad M_{415}^3 = \frac{2(x_1^2 + 12x_1 + 37)}{(x_1+5)(x_1+7)(x_1^2 + 14x_1 + 47)}. \end{aligned}$$

Logo, usando a Observação 3.4, temos que $P_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 4$ donde a hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura com curvaturas principais, $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, dadas em (4.107) e métrica dada em (4.108), satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1.

Exemplo 2. No Teorema 4.6, façamos a seguinte escolha de constantes:
$b_1 = c_{11} = 0$, $c_{13} = -5$, $c_{14} = c_{15} = 1$.
Logo por (4.52), obtemos
$c_{22} = 0$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = c_{25} = -1$ e $b_2 = -1$.
Tome as seguintes condições iniciais:
$F_1^3(0) = F_1^{3\prime}(0) = 2$, $F_1^5(0) = 3$, $F_2^3(0) = 5$, $F_2^{3\prime}(0) = 1$, $F_2^4(0) = F_2^5(0) = -1$,
$F_1^{4\prime}(0) = F_1^{5\prime}(0) = F_2^{4\prime}(0) = F_2^{5\prime}(0) = F_i^i(0) = F_i^{i\prime}(0) = 0$, $1 \leq i \leq 2$.
Com isso, usando (4.51) e (4.53), obtemos as funções que dependem de x_1 e x_2,

$$F_1^3 = \frac{-5x_1^2}{2} + 2x_1 + 2, \quad F_1^4 = \frac{x_1^2}{2}, \quad F_1^5 = \frac{x_1^2}{2} + 3, \quad F_1^1 = 0, \quad F_2^3 = \sin(x_2) + 5,$$
$$F_2^4 = F_2^5 = -1, \quad F_2^2 = 0.$$

Assim usando essas funções e (4.54), obtemos $b_3 = 0$, $c_{34} = -3$, $c_{35} = -18$ e $c_{33} = 0$.

Fazendo mais uma escolha de condições iniciais,
$F_3^4(0) = -5$, $F_3^5(0) = -29$, $F_3^{4\prime}(0) = 6$, $F_3^{5\prime}(0) = 36$, $F_3^3(0) = F_3^{3\prime}(0) = 0$.
Logo de (4.55), obtemos as funções que dependem de x_3,

$$F_3^4 = \frac{-3\big(x_3 - 2\big)^2}{2} + 1, \qquad F_3^5 = -9\big(x_3 - 2\big)^2 + 7, \qquad F_3^3 = 0.$$

Usando essas funções e (4.56), obtemos $b_4 = -5$, $c_{45} = -35$ e $c_{44} = 0$.

Tome agora as seguintes condições iniciais:
$F_4^5(0) = -7$, $F_4^4(0) = F_4^{5\prime}(0) = F_4^{4\prime}(0) = 0$.
Assim de (4.57), obtemos as funções que dependem de x_4,

$$F_4^5 = -7, \qquad F_4^4 = 0.$$

E novamente usando essa funções e (4.58), obtemos $b_5 = c_{55} = 0$.

Afim de que (4.60) seja satisfeita, escolhemos as condições iniciais, $F_5^5 = 1$ e $F_5^{5\prime} = 0$, donde por (4.59) a função que depende de x_5 é dada por

$$F_5^5 = 1.$$

Portanto pelos Teorema 4.4 e 4.5 obtemos, respectivamente, as curvaturas principais e a métrica de alguma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura. A saber

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \frac{3}{2}\Big[\big(x_3-2\big)^2\big(\sin(x_2)+5\big)+4\Big], \quad \lambda_3 = \frac{-6\Big[\big(x_1^2-1\big)\sin(x_2)+4x_1-1\Big]}{2\sin(x_2)+5x_1^2-4x_1+6},\\
&\lambda_2 = \frac{3}{4}\big(x_3-2\big)^2\big(-5x_1^2+4x_1+4\big)-3x_1^2, \qquad \lambda_5 = 0,\\
&\lambda_4 = \frac{-3\Big[(5x_1^2-6)\sin(x_2)+20x_1-10\Big]\Big[5x_3^2-20x_3+16\Big]+12\sin(x_2)+120}{5\big(2\sin(x_2)+5x_1^2-4x_1+6\big)\big(3x_3^2-12x_3+10\big)+2x_1^2+4}.
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}
g_{11} = g_{22} &= \frac{1}{\big(\lambda_1-\lambda_2\big)^2}, \qquad g_{33} = \frac{\Big[\sin(x_2)+5\Big]^2}{4\big(\lambda_1-\lambda_3\big)^2},\\
g_{44} &= \frac{\Big[\big(\sin(x_2)+5\big)\big(-3x_3^2+12x_3-10\big)-2\Big]^2}{4\big(\lambda_1-\lambda_4\big)^2}, \qquad g_{55} = 1,
\end{aligned} \tag{4.110}$$

as quais podem estar definidas no seguinte domínio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5; \frac{-2}{5} < x_1 < \frac{1}{2}, \;\; x_3 > -1, x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Usando as curvaturas principais, de (1.19) e (1.18), calculamos alguns invariantes de Laplace e em seguida algumas das funções dadas na Proposição 3.3 afim de verificar que as condições do Teorema 3.1 estão satisfeitas.

$$\begin{aligned}
&m_{213} = \frac{-2\big(5x_1-2\big)}{2\sin(x_2)+5x_1^2-4x_1+6}, \quad m_{215} = \frac{\big(-15x_1+6\big)\big(x_3-2\big)^2-12x_1}{2\big(\lambda_1-\lambda_2\big)},\\
&m_{214} = \frac{\big(5x_1-2\big)\big(3x_3^2-12x_3+10\big)+2x_1}{2(h_{23}-h_{13})},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{314}^2 &= \frac{4}{\big(3x_3^2-12x_3+10\big)\big(25x_1^2-20x_1+4\big)+10x_1^2-4x_1},\\
M_{315}^2 &= \frac{8}{\big(x_3-2\big)^2\big(25x_1^2-20x_1+4\big)+20x_1^2-8x_1}, \qquad M_{415}^2 = M_{315}^2 - M_{314}^2,\\
M_{214}^3 &= \frac{2\sin(x_2)+5x_1^2-4x_1+6}{\big(2-5x_1\big)\big(-x_1\sin(x_2)+x_1^2+2x_1-2\big)},\\
M_{215}^3 &= \frac{2\big(2\sin(x_2)+5x_1^2-4x_1+6\big)}{\big(2-5x_1\big)\big(-2x_1\sin(x_2)+2x_1^2-x_1-2\big)} \qquad M_{415}^3 = M_{215}^3 - M_{214}^3,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
h_{13} &= \Big[\frac{-3}{2}\big(x_3-2\big)^2+1\Big]\Big[\frac{-5x_1^2}{2}+2x_1+2\Big]+\frac{x_1^2}{2},\\
h_{23} &= \Big[\frac{-3}{2}\big(x_3-2\big)^2+1\Big]\Big[\sin(x_2)+5\Big]-1.
\end{aligned}
$$

Logo, usando a Observação 3.4, temos que $P_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 4$ donde a hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura com curvaturas principais $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$, dadas por (4.109) e métrica dada em (4.110), satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1.

A seguir, obtemos a hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, com curvaturas principais e primeira forma quadrática dadas no Exemplo 1. A integração do sistema que fornece tais hipersuperfícies de Dupin foi motivada por [30].

Proposicão 4.13. *Sejam λ_i, $1 \leq i \leq 5$ e $g_{ij} = \delta_{ij} g_{ii}$, $1 \leq i, j \leq 5$ dados, respectivamente, por (4.107) e (4.108). Então a hipersuperfície de Dupin em $\mathbf{R}^6$ parametrizada por linhas de curvatura, com curvaturas principais $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$ e primeira forma quadrática $I = \sum g_{ii} dx_i^2$, é dada a menos de movimento rígido por*

$$
X = \frac{G_2}{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{G_3}{\lambda_1-\lambda_3} + \frac{G_4}{\lambda_1-\lambda_4} + G_5, \tag{4.111}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
G_2 &= \Big(\sin x_2, \cos x_2, 0, 0, 0, 0\Big), \qquad G_3 = \Big(0, 0, 2x_3-1, 0, 0, 0\Big),\\
G_4 &= \Big(0, 0, 0, \cos x_4, \sin x_4, 0\Big), \qquad G_5 = \Big(0, 0, 0, 0, 0, x_5\Big).
\end{aligned} \tag{4.112}
$$

Além disso, o campo normal e unitário a X é dado por

$$
N = \frac{\lambda_2 G_2}{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{\lambda_3 G_3}{\lambda_1-\lambda_3} + \frac{\lambda_4 G_4}{\lambda_1-\lambda_4}. \tag{4.113}
$$

Demonstração. Considere λ_i, $1 \leq i \leq 5$ e $g_{ij} = \delta_{ij} g_{ii}$, $1 \leq i, j \leq 5$ dados, respectivamente, por (4.107) e (4.108) obtidos no Exemplo 1. Logo o Teorema 4.12 nos fornece existência de uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura $\overline{X} : U \subseteq \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$, tal que, as curvaturas principais são as funções $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 5$ e a métrica induzida é $g_{ij} = \delta_{ij} g_{ii}$, $1 \leq i, j \leq 5$.

Consideremos X dada por (4.111), com campo normal unitário dado por (4.113). Verifiquemos que as curvaturas principais de X são os $-\lambda_i$ dados por (4.107) e a métrica induzida é dada por (4.108).
Calculando $X_{,i}$, temos

$$\begin{aligned}
X_{,1} =& \frac{\Gamma^2_{12} G_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\Gamma^4_{14} G_4}{\lambda_1 - \lambda_4} + \frac{\Gamma^3_{13} G_3}{\lambda_1 - \lambda_3}, \\
X_{,2} =& \frac{G'_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\
X_{,3} =& \frac{\Gamma^1_{13} G_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\Gamma^1_{13} G_4}{\lambda_1 - \lambda_4} + \frac{\Gamma^1_{13} G_3}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{G'_3}{\lambda_1 - \lambda_3}, \\
X_{,4} =& \frac{G'_4}{\lambda_1 - \lambda_4}, \\
X_{,5} =& G'_{,5}\,.
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Usando as expressões de (4.112), vê-se facilmente que $\left\langle N, X_{,i} \right\rangle = 0$, $1 \leq i \leq 5$.

Derivando N dado por (4.113), temos

$$\begin{aligned}
N_{,1} =& \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\Gamma^2_{12} G_2 + \left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}\right)\Gamma^3_{13} G_3 + \left(1 + \frac{\lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_4}\right)\Gamma^4_{14} G_4, \\
N_{,2} =& \frac{\lambda_2 G'_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\
N_{,3} =& \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\Gamma^1_{13} G_2 + \frac{\lambda_3 \Gamma^1_{13} G_3}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\lambda_3 G'_3}{\lambda_1 - \lambda_3} + \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_4}\right)\Gamma^1_{13} G_4, \\
N_{,4} =& \frac{\lambda_4 G'_4}{\lambda_1 - \lambda_4}, \\
N_{,5} =& 0.
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Portanto comparando (4.115) com (4.114), obtemos

$$N_{,i} = \lambda_i X_{,i}\,, \qquad 1 \leq i \leq 5.$$

Ou seja, $-\lambda_i$ dados por (4.107) são as curvaturas principais de X.

Usando (4.114), obtemos a métrica induzida de X, a saber

$$
\begin{aligned}
g_{11} =& \big\langle X_{,1}\,, X_{,1}\,\big\rangle = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\Bigg[\big(\Gamma_{12}^2\big)^2 + \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_4}\right)^2\big(\Gamma_{14}^4\big)^2 + \\
&+\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_3}\right)^2\big(\Gamma_{13}^3\big)^2(2x_3-1)^2\Bigg], \\
g_{22} =& \big\langle X_{,2}\,, X_{,2}\,\big\rangle = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2},
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{33} =& \big\langle X_{,3}\,, X_{,3}\,\big\rangle = \frac{\big(\Gamma_{13}^1\big)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\Bigg[1+\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_4}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_3}\right)^2(2x_3-1)^2 + \\
&+2(2x_3+2)\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_3}\right)^2\Bigg], \\
g_{44} =& \big\langle X_{,4}\,, X_{,4}\,\big\rangle = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_4)^2} = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_4}\right)^2, \\
g_{55} =& \big\langle X_{,5}\,, X_{,5}\,\big\rangle = 1.
\end{aligned}
\tag{4.117}
$$

Por (4.107), (1.18), (1.19), obtemos

$$
\Gamma_{12}^2 = m_{215}, \qquad \Gamma_{13}^3 = m_{315}, \qquad \Gamma_{14}^4 = m_{214}, \qquad \Gamma_{13}^1 = m_{135}.
$$

Logo usando (4.2), as expressões dos m_{ljk}, $1 \leq l, j, k \leq 5$ e das funções F_i^β, $1 \leq i \leq 5$, $i \leq \beta \leq 5$, dadas no Exemplo 1, obtemos de (4.116) e (4.117) que métrica induzida de X coincide com a métrica dada no Exemplo 1. Portanto o Teorema Fundamental das Hipersuperfícies garante que a menos de posição em $\mathbb{R}^6$ as hipersuperfícies X e $\overline{X}$ coincidem. Concluindo assim a demonstração da proposição.

$\blacksquare$

Apêndice

Nesse apêndice, apresentamos um lema que nos fornece equações diferenciais de certas funções, as quais satisfazem determinada condição. Além disso, fornecemos algumas identidades, que as funções dadas em (4.39) satisfazem, as quais são consequência da equação de Gauss.

Iniciamos com um lema que fornece equações diferenciais para certas funções especiais.

Lema A. *Fixados* $1 \leq i, r, l, s \leq 4$ *índices distintos, considere a equação*

$$f_{ils} f_{rls} = f_{irl} \widetilde{f}_{rls} + f_{il} f_{rl}, \tag{4.118}$$

com

$$\frac{f_{rls}}{\widetilde{f}_{rls}} = \widetilde{f}_{ls} \widetilde{f}_{rl}, \tag{4.119}$$

onde $f_{ils} = f_{ils}(x_i, x_l, x_s)$*,* $f_{rls} = f_{rls}(x_r, x_l, x_s)$*,* $f_{irl} = f_{irl}(x_i, x_r, x_l)$*,* $\widetilde{f}_{rls} = \widetilde{f}_{rls}(x_r, x_l, x_s)$*,* $f_{il} = f_{il}(x_i, x_l)$*,* $f_{rl} = f_{rl}(x_r, x_l)$ *são funções diferenciáveis arbitrárias não nulas, podendo não ocorrer dependência na variável* x_l*. Então*

$$\begin{aligned} f_{ils,is} + \frac{\widetilde{f}_{ls,s}}{\widetilde{f}_{ls}} f_{ils,i} - \frac{f_{il,i}}{f_{il}} f_{ils,s} - \frac{\widetilde{f}_{ls,s}}{\widetilde{f}_{ls}} \frac{f_{il,i}}{f_{il}} f_{ils} = 0, \\ f_{irl,ir} - \frac{\widetilde{f}_{rl,r}}{\widetilde{f}_{rl}} f_{irl,i} - \frac{f_{il,i}}{f_{il}} f_{irl,r} + \frac{f_{rl,r}}{f_{rl}} \frac{f_{il,i}}{f_{il}} f_{irl} = 0. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Além disso, vale a identidade

$$\big(\log f_{rls}\big)_{,rs} = \big(\log \widetilde{f}_{rls}\big)_{,s} \left[\frac{f_{rls,r}}{f_{rls}} - \frac{f_{rl,r}}{f_{rl}} \right]. \tag{4.121}$$

Demonstração. Derivando (4.118) com respeito a x_s, obtemos

$$f_{ils}f_{rls}\left(\frac{f_{ils,s}}{f_{ils}}+\frac{f_{rls,s}}{f_{rls}}\right)=f_{irl}\widetilde{f}_{rls,s}.$$

Isolando $f_{irl}\widetilde{f}_{rls}$ em (4.118) e substituindo na equação anterior, temos

$$f_{ils}f_{rls}\left(\frac{f_{ils,s}}{f_{ils}}+\frac{f_{rls,s}}{f_{rls}}\right)=\frac{\widetilde{f}_{rls,s}}{\widetilde{f}_{rls}}\big(f_{ils}f_{rls}-f_{il}f_{rl}\big).$$

Derivando o logarítimo de (4.119) com respeito a x_s, e substituindo $\big(\log f_{rls}\big)_{,s}$ nessa ultima equação, obtemos

$$f_{ils}f_{rls}\frac{\widetilde{f}_{ls,s}}{\widetilde{f}_{ls}}=-f_{rls}f_{ils,s}-\frac{\widetilde{f}_{rls,s}}{\widetilde{f}_{rls}}f_{il}f_{rl}.$$

Assim temos que

$$\frac{-\widetilde{f}_{rls,s}f_{rl}}{\widetilde{f}_{rls}f_{rls}}=\frac{f_{ils,s}+\frac{\widetilde{f}_{ls,s}}{\widetilde{f}_{ls}}f_{ils}}{f_{il}}. \tag{4.122}$$

Derivando essa ultima equação com respeito a x_i, obtemos que f_{ils} satisfaz a primeira equação de (4.120).

Analogamente, derivando (4.118) com respeito a x_r, obtemos

$$f_{ils}f_{rls,r}=f_{irl}\widetilde{f}_{rls}\left(\frac{f_{irl,r}}{f_{irl}}+\frac{\widetilde{f}_{rls,r}}{\widetilde{f}_{rls}}\right)+f_{il}f_{rl,r}.$$

Isolando $f_{ils}f_{rls}$ em (4.118) e substituindo na equação anterior, usando a derivada do logarítimo de (4.119) com respeito a x_r, e procedendo como antes, temos

$$\frac{-f_{rl}}{\widetilde{f}_{rls}}\left[\frac{f_{rl,r}}{f_{rl}}-\frac{f_{rls,r}}{f_{rls}}\right]=\frac{f_{irl,r}-\frac{\widetilde{f}_{rl,r}}{\widetilde{f}_{rl}}f_{irl}}{f_{il}}. \tag{4.123}$$

Donde derivando essa última equação com respeito a x_i, obtemos que f_{irl} satisfaz a segunda equação de (4.120).

Finalmente de (4.118), temos

$$1-\frac{f_{irl}\widetilde{f}_{rls}}{f_{ils}f_{rls}}=\frac{f_{il}f_{rl}}{f_{ils}f_{rls}}.$$

Derivando a equação acima com respeito a x_r, obtemos

$$\frac{f_{irl}\widetilde{f}_{rls}}{f_{ils}f_{rls}}\left(\log\frac{f_{irl}\widetilde{f}_{rls}}{f_{rls}}\right)_{,r} = -\frac{f_{il}f_{rl}}{f_{ils}f_{rls}}\left(\log\frac{f_{rl}}{f_{rls}}\right)_{,r}.$$

Substituindo (4.119), na equação acima, e simplificando temos

$$\left(\log\frac{f_{irl}}{\widetilde{f}_{ls}\widetilde{f}_{rl}}\right)_{,r} = -\frac{f_{il}f_{rl}}{f_{irl}\widetilde{f}_{rls}}\left(\log\frac{f_{rl}}{f_{rls}}\right)_{,r}.$$

Derivando a equação anterior com respeito a x_s, temos que

$$\left[\frac{1}{\widetilde{f}_{rls}}\left(\log\frac{f_{rl}}{f_{rls}}\right)_{,r}\right]_{,s} = 0.$$

Ou seja,

$$-\big(\log\widetilde{f}_{rls}\big)_{,s}\left(\log\frac{f_{rl}}{f_{rls}}\right)_{,r} - \big(\log f_{rls}\big)_{,rs} = 0,$$

isto é, obtemos (4.121), concluindo a demonstração do lema.

■

A seguir fornecemos algumas identidades, que as funções dadas em (4.39) satisfazem, as quais são consequência da equação de Gauss. Enunciaremos essas identidades por meio de afirmações.

Afirmação 1. As equações (4.66) com $r = 5$, (4.67) com $r = 4$, $r = 5$, e (4.68) são, respectivamente, equivalentes a (4.72), (4.73), (4.74) e (4.75).

Demonstração. De fato, substituindo λ_i, g_{ii}, respectivamente, dados em (4.38) e (4.45), em cada uma dessas equações, temos

i) em (4.66) com $r = 5$:

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} =& m_{215,1} - (m_{215})^2 + m_{213}m_{215} + m_{123,2} - (m_{123})^2 + \\ &+ m_{123}m_{125} - \frac{m_{135,3}-(m_{135})^2}{(F_2^3-F_1^3)^2}.\end{aligned}$$

Usando (4.2) e a Observação 4.22, temos

$$\begin{aligned}\frac{-F_2^3h_{134}}{(F_2^3-F_1^3)(h_{234}-h_{134})} =& \frac{h_{134,11}}{h_{234}-h_{134}} + \frac{F_2^{3\prime\prime}}{F_1^3-F_2^3} + \frac{h_{134,1}}{h_{234}-h_{134}}\frac{F_1^{3\prime}}{F_2^3-F_1^3} + \\ &+ \frac{h_{234,2}}{h_{134}-h_{234}}\frac{F_2^{3\prime}}{F_1^3-F_2^3} + \frac{h_{234,33}}{F_2^3(F_2^3-F_1^3)(h_{234}-h_{134})}.\end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, obtemos

$$-h_{134}F_2^3 = (F_2^3 - F_1^3)h_{134,11} - (h_{234} - h_{134})F_2^{3''} + h_{134,1}F_1^{3'} + h_{234,2}F_2^{3'} + \frac{h_{234,33}}{F_2^3},$$

que é a equação (4.72).

ii) em (4.67) com $r = 4$:

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} =& m_{213,1} - (m_{213})^2 + m_{213}m_{214} + m_{124,2} - (m_{124})^2 + \\ &+ m_{123}m_{124} - \frac{m_{134,3} - (m_{134})^2}{(F_2^3 - F_1^3)^2}.\end{aligned}$$

Usando (4.2) e a Observação 4.2, temos

$$\begin{aligned}\frac{-F_1^3 h_{23}}{(F_2^3 - F_1^3)(h_{23} - h_{13})} =& \frac{F_1^{3''}}{F_2^3 - F_1^3} + \frac{h_{23,22}}{h_{13} - h_{23}} + \frac{h_{13,1}}{h_{23} - h_{13}}\frac{F_1^{3'}}{F_2^3 - F_1^3} + \\ &+ \frac{h_{23,2}}{h_{13} - h_{23}}\frac{F_2^{3'}}{F_1^3 - F_2^3} + \frac{h_{23,33}}{F_2^3(F_2^3 - F_1^3)(h_{23} - h_{13})}.\end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, temos

$$-h_{23}F_1^3 = (h_{23} - h_{13})F_1^{3''} - (F_2^3 - F_1^3)h_{23,22} + h_{13,1}F_1^{3'} + h_{23,2}F_2^{3'} + \frac{h_{23,33}}{F_2^3},$$

que é a equação (4.73).

iii) em (4.67) com $r = 5$:

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} =& m_{213,1} - (m_{213})^2 + m_{213}m_{215} + m_{125,2} - (m_{125})^2 + \\ &+ m_{123}m_{125} - \frac{m_{135,3} - (m_{135})^2}{(F_2^3 - F_1^3)^2}.\end{aligned}$$

Usando (4.2) e a Observação 4.2, temos

$$\begin{aligned}\frac{-F_1^3 h_{234}}{(F_2^3 - F_1^3)(h_{234} - h_{134})} =& \frac{F_1^{3''}}{F_2^3 - F_1^3} + \frac{h_{234,22}}{h_{134} - h_{234}} + \frac{h_{134,1}}{h_{234} - h_{134}}\frac{F_1^{3'}}{F_2^3 - F_1^3} + \\ &+ \frac{h_{234,2}}{h_{134} - h_{234}}\frac{F_2^{3'}}{F_1^3 - F_2^3} + \frac{h_{234,33}}{F_2^3(F_2^3 - F_1^3)(h_{234} - h_{134})}.\end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, temos

$$-h_{234}F_1^3 = (h_{234} - h_{134})F_1^{3''} - (F_2^3 - F_1^3)h_{234,22} + h_{134,1}F_1^{3'} + h_{234,2}F_2^{3'} + \frac{h_{234,33}}{F_2^3},$$

que é a equação (4.73).

vi) em (4.68):

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} =& m_{214,1}-(m_{214})^2+m_{214}m_{215}+m_{125,2}-(m_{125})^2+\\ &+m_{124}m_{125}+\frac{m_{134}m_{135}}{(F_2^3-F_1^3)^2}-\frac{m_{145,4}-(m_{145})^2}{(h_{23}-h_{13})^2}.\end{aligned}$$

Usando (4.2) e a Observação 4.2, temos

$$\begin{aligned}\frac{-h_{13}h_{234}}{(h_{23}-h_{13})(h_{234}-h_{134})} =& \frac{h_{13,11}}{h_{23}-h_{13}}+\frac{h_{234,22}}{h_{134}-h_{234}}+\frac{h_{134,1}}{h_{234}-h_{134}}\frac{h_{13,1}}{h_{23}-h_{13}}+\\ &+\frac{h_{234,2}}{h_{234}-h_{134}}\frac{h_{23,2}}{h_{23}-h_{13}}+\frac{h_{234,3}h_{23,3}}{(F_2^3)^2(h_{23}-h_{13})(h_{234}-h_{134})}+\\ &+\frac{h_{234,4}}{h_{23}(h_{23}-h_{13})(h_{234}-h_{134})}.\end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, temos

$$\begin{aligned}-h_{13}h_{234} =& (h_{234}-h_{134})h_{13,11}-(h_{23}-h_{13})h_{234,22}+h_{13,1}h_{134,1}+h_{23,2}h_{234,2}+\\ &+\frac{h_{23,3}h_{234,3}}{(F_2^3)^2}+\frac{h_{234,44}}{h_{23}}.\end{aligned}$$

que é a equação (4.73). ■

Afirmação 2. Seja $H_{i3}^s = F_i^3F_3^s + F_i^s$, $1 \le i \le 2$, logo $H_{i3}^4 = h_{i3}$ e $H_{i3}^5 = \overline{h}_{i3}$, onde h_{i3} é dado por (4.39) e $\overline{h}_{i3} = F_i^3F_3^5 + F_i^5$. Considere a equação

$$-H_{23}^sF_1^3-(H_{23}^s-H_{13}^s)F_1^{3''}+(F_2^3-F_1^3)H_{23,22}^s-H_{13,1}^sF_1^{3'}-H_{23,2}^sF_2^{3'}-\frac{H_{23,33}^s}{F_2^3}=0.$$

Note que, a equação acima para $s = 4$ é a equação (4.73) e para $s = 5$ é a segunda equação de (4.86).

Substituindo (4.39), (4.79), (4.78) e $H_{23,33}^s = F_3^{s''}F_2^3$ na equação acima, obtemos

i) (4.83), se $s = 4$, ii) (4.86), se $s = 5$.

Demonstração. De fato, fazendo as substituições descritas no enunciado, temos

$$\begin{aligned}&-F_1^3H_{23}^s = (F_2^3-F_1^3)\big[(1+b_1)H_{23}^s+c_{13}F_3^s+c_{1s}\big]+(H_{23}^s-H_{13}^s)\big[b_1F_1^3+c_{13}\big]+\\ &\qquad+H_{13,1}^sF_1^{3'}+H_{23,2}^sF_2^{3'}+F_3^{s''},\\ &[-F_1^3+(1+b_1)F_1^3-(1+b_1)F_2^3-b_1F_1^3-c_{13}](F_3^sF_2^3+F_2^s)=c_{13}F_3^s(F_2^3-F_1^3)+\\ &+c_{1s}(F_2^3-F_1^3)-(F_1^3F_3^s+F_1^s)\big[b_1F_1^3+c_{13}\big]+F_3^s\big(F_1^{3'}\big)^2+F_1^{3'}F_1^{s'}+F_3^s\big(F_2^{3'}\big)^2+\\ &+F_2^{3'}F_2^{s'}+F_3^{s''}.\end{aligned}$$

Logo, simplificando e agrupando os termos de modo conveniente, temos

$$F_3^s\left[\left(F_1^{3\prime}\right)^2 - b_1\left(F_1^3\right)^2 - 2c_{13}F_1^3 + \left(F_2^{3\prime}\right)^2 + (1+b_1)\left(F_2^3\right)^2 + 2c_{13}F_2^3\right] = -F_1^{3\prime}F_1^{s\prime} +$$
$$+ c_{13}F_1^s + c_{1s}F_1^3 + b_1F_1^3F_1^s - F_2^{3\prime}F_2^{s\prime} - (1+b_1)F_2^3F_2^s - c_{13}F_2^s - c_{1s}F_2^3 - F_3^{s\prime\prime}.$$

Logo se $s = 4$, obtemos (4.83) e se $s = 5$, obtemos (4.87).

■

Afirmação 3. Considere b_4 e c_{45}, dados pelas equações abaixo

$$b_4 = -\,h_{13}h_{23} - (h_{23} - h_{13})h_{13,11} + (h_{23} - h_{13})h_{23,22} - \left(h_{13,1}\right)^2 - \left(h_{23,2}\right)^2 - \left(\frac{h_{23,3}}{F_2^3}\right)^2,$$
$$c_{45} = -\,h_{13}\overline{h}_{23} - (\overline{h}_{23} - \overline{h}_{13})h_{13,11} + (h_{23} - h_{13})\overline{h}_{23,22} - h_{13,1}\overline{h}_{13,1} - h_{23,2}\overline{h}_{23,2} - \frac{h_{23,3}\overline{h}_{23,3}}{(F_2^3)^2}.$$

Então $b_4 = a_{344} + a_{144} + a_{244}$ e $c_{45} = a_{145} + a_{245} + a_{345}$, onde onde $a_{3\alpha\beta}$ e $a_{i\alpha\beta}$, $1 \leq i \leq 2$ são, respectivamente, dados por (4.89) e (4.82).

Demonstração. Seja $g_3 = c_{13}F_3^4 + c_{14}$, logo de (4.80) e (4.39), temos

$$\begin{aligned}
b_4 =& -\,h_{13}h_{23} - (h_{23} - h_{13})[b_1h_{13} + g_3 + (1+b_1)h_{23} + g_3] - \left(F_3^4F_1^{3\prime} + F_1^{4\prime}\right)^2 - \\
& - \left(F_3^4F_2^{3\prime} + F_2^{4\prime}\right)^2 - \left(F_3^{4\prime}\right)^2 \\
=& -\,b_1(h_{23} - h_{13})(h_{23} + h_{13}) - \left(h_{23}\right)^2 - 2(h_{23} - h_{13})g_3 - \left(F_3^4F_1^{3\prime} + F_1^{4\prime}\right)^2 - \\
& - \left(F_3^4F_2^{3\prime} + F_2^{4\prime}\right)^2 - \left(F_3^{4\prime}\right)^2 \\
=& b_1\left(F_3^4F_1^3 + F_1^4\right)^2 + 2(c_{13}F_3^4 + c_{14})(F_3^4F_1^3 + F_1^4) - \left(F_3^4F_1^{3\prime} + F_1^{4\prime}\right)^2 - \\
& - (1+b_1)\left(F_3^4F_2^3 + F_2^4\right)^2 - 2(c_{13}F_3^4 + c_{14})(F_3^4F_2^3 + F_2^4) - \left(F_3^4F_2^{3\prime} + F_2^{4\prime}\right)^2 - \left(F_3^{4\prime}\right)^2 \\
=& \left(F_3^4\right)^2\left[b_1\left(F_1^3\right)^2 + 2c_{13}F_1^3 - \left(F_1^{3\prime}\right)^2 - (1+b_1)\left(F_2^3\right)^2 - 2c_{13}F_2^3 - \left(F_2^{3\prime}\right)^2\right] + \\
& + 2F_3^4\left[b_1F_1^3F_1^4 + c_{14}F_1^3 + c_{13}F_1^4 - F_1^{3\prime}F_1^{4\prime} - (1+b_1)F_2^3F_2^4 - c_{14}F_2^3 - c_{13}F_2^4 - F_2^{3\prime}F_2^{4\prime}\right] + \\
& + b_1\left(F_1^4\right)^2 + 2c_{14}F_1^4 - \left(F_1^{4\prime}\right)^2 - (1+b_1)\left(F_2^4\right)^2 - 2c_{14}F_2^3 - \left(F_2^{4\prime}\right)^2 - \left(F_3^{4\prime}\right)^2 \\
=& \left(F_3^4\right)^2 b_3 + 2F_3^4c_{34} + a_{144} + a_{244} - \left(F_3^{4\prime}\right)^2 \\
=& a_{144} + a_{244} + a_{344},
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos (4.82) e (4.84), e na última igualdade usamos (4.89).

Seja $\overline{g}_3 = c_{13}F_3^5 + c_{15}$, logo de (4.80), (4.85) e (4.39), temos

$$
\begin{aligned}
c_{45} =& - h_{13}\overline{h}_{23} - (\overline{h}_{23} - \overline{h}_{13})(b_1 h_{13} + g_3) - (h_{23} - h_{13})\big[(1+b_1)\overline{h}_{23} + \overline{g}_3)\big] - \\
& - (F_3^4 F_1^{3\prime} + F_1^{4\prime})(F_3^5 F_1^{3\prime} + F_1^{5\prime}) - (F_3^4 F_2^{3\prime} + F_2^{4\prime})(F_3^5 F_2^{3\prime} + F_2^{5\prime}) - F_3^{4\prime} F_3^{5\prime} \\
=& b_1 h_{13}\overline{h}_{13} - g_3(\overline{h}_{23} - \overline{h}_{13}) - (1+b_1)h_{23}\overline{h}_{23} - \overline{g}_3(h_{23} - h_{13}) - \\
& - (F_3^4 F_1^{3\prime} + F_1^{4\prime})(F_3^5 F_1^{3\prime} + F_1^{5\prime}) - (F_3^4 F_2^{3\prime} + F_2^{4\prime})(F_3^5 F_2^{3\prime} + F_2^{5\prime}) - F_3^{4\prime} F_3^{5\prime} \\
=& b_1(F_3^4 F_1^3 + F_1^4)(F_3^5 F_1^3 + F_1^5) - (c_{13}F_3^4 + c_{14})\big[F_3^5(F_2^3 - F_1^3) + F_2^5 - F_1^5\big] - \\
& - (1+b_1)(F_3^4 F_2^3 + F_2^4)(F_3^5 F_2^3 + F_2^5) - (c_{13}F_3^5 + c_{15})\big[F_3^4(F_2^3 - F_1^3) + F_2^4 - F_1^4\big] - \\
& - (F_3^4 F_1^{3\prime} + F_1^{4\prime})(F_3^5 F_1^{3\prime} + F_1^{5\prime}) - (F_3^4 F_2^{3\prime} + F_2^{4\prime})(F_3^5 F_2^{3\prime} + F_2^{5\prime}) - F_3^{4\prime} F_3^{5\prime} \\
=& F_3^4 F_3^5\big[b_1\big(F_1^3\big)^2 + 2c_{13}F_1^3 - \big(F_1^{3\prime}\big)^2 - (1+b_1)\big(F_2^3\big)^2 - 2c_{13}F_2^3 - \big(F_2^{3\prime}\big)^2\big] + \\
& + F_3^4\big[b_1 F_1^3 F_1^5 + c_{15}F_1^3 + c_{13}F_1^5 - F_1^{3\prime}F_1^{5\prime} - (1+b_1)F_2^3 F_2^5 - c_{15}F_2^3 - c_{13}F_2^5 - F_2^{3\prime}F_2^{5\prime}\big] + \\
& + F_3^5\big[b_1 F_1^3 F_1^4 + c_{14}F_1^3 + c_{13}F_1^4 - F_1^{3\prime}F_1^{4\prime} - (1+b_1)F_2^3 F_2^4 - c_{14}F_2^3 - c_{13}F_2^4 - F_2^{3\prime}F_2^{4\prime}\big] + \\
& + b_1 F_1^4 F_1^5 + c_{15}F_1^4 + c_{14}F_1^5 - F_1^{4\prime}F_1^{5\prime} - (1+b_1)F_2^4 F_2^5 - c_{15}F_2^4 - c_{14}F_2^5 - F_2^{4\prime}F_2^{5\prime} - F_3^{4\prime}F_3^{5\prime} \\
=& F_3^4 F_3^5 b_3 + F_3^4 c_{35} + F_3^5 c_{34} - F_3^{4\prime}F_3^{5\prime} + a_{145} + a_{245} \\
=& a_{145} + a_{245} + a_{345},
\end{aligned}
$$

onde na penúltima igualdade (4.82), (4.84) e (4.88), e na última igualdade usamos (4.89).

■

Afirmação 4. Considere a expressão

$$\Psi_l = F_1^l \lambda_{2,11} + c_{1l}(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_{1,22}F_2^l - \lambda_{1,2}F_2^{l\prime} - \lambda_{2,1}F_1^{l\prime}, \quad 3 \leq l \leq 5.$$

Substituindo (4.38), (4.94) e (4.95) na equação acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Psi_l =& \Big\{\big[(a_{13l} + a_{23l})F_3^4 + a_{14l} + a_{24l}\big]F_4^5 + (a_{13l} + a_{23l})F_3^5 + a_{15l} + a_{25l}\Big\}F_5^5 + \\
& + \big[(a_{13l} + a_{23l})F_3^4 + a_{14l} + a_{24l}\big]F_4^4 + (a_{13l} + a_{23l})F_3^3 + a_{1l1} + a_{2l2},
\end{aligned}
$$

onde $a_{i\beta\alpha}$ e $a_{i\beta i}$, $1 \leq i \leq 2$, $3 \leq \beta, \alpha \leq 5$ são, respectivamente, dados por (4.82) e (4.96).

Demonstração. Com efeito, substituindo (4.94) na expressão acima e usando (4.95), temos

$$\Psi_l = F_1^l\big[b_1\lambda_2 + h_{34}F_5^5 + g_3F_4^4 + c_{13}F_3^3 + c_{11}\big] + c_{1l}(\lambda_2 - \lambda_1) + F_2^l\big[-(1+b_1)\lambda_1 - h_{34}F_5^5 - \\ - g_3F_4^4 - c_{13}F_3^3 - c_{11}\big] - \lambda_{1,2}F_2^{l'} - \lambda_{2,1}F_1^{l'},$$

onde $g_3 = c_{13}F_3^4 + c_{14}$, $h_{34} = g_3F_4^5 + \overline{g}_3$ e $\overline{g}_3 = c_{13}F_3^5 + c_{15}$.
Substituindo λ_1 e λ_2 dados em (4.38) e agrupando os termos de modo conveniente, obtemos

$$\Psi_l = T_{5l}F_5^5 + T_{4l}F_4^4 + [c_{13}F_1^l + c_{1l}F_1^3 + b_1F_1^lF_1^3 - F_1^{l'}F_1^{3'} - c_{13}F_2^l - c_{1l}F_2^3 - (1+b_1)F_2^lF_2^3 - \\ - F_2^{l'}F_2^{3'}]F_3^3 + c_{11}F_1^l + c_{1l}F_1^1 + b_1F_1^lF_1^1 - F_1^{l'}F_1^{1'} - c_{11}F_2^l - c_{1l}F_2^2 - (1+b_1)F_2^lF_2^2 - \\ - F_2^{l'}F_2^{2'},$$

onde

$$T_{5l} = F_1^lh_{34} - F_2^lh_{34} - F_2^{l'}h_{234,2} - F_1^{l'}h_{134,1} + b_1F_1^lh_{134} + c_{1l}h_{134} - (1+b_1)F_2^lh_{234} - c_{1l}h_{234},$$
$$T_{4l} = F_1^lg_3 - F_2^lg_3 - F_2^{l'}h_{23,2} - F_1^{l'}h_{13,1} + b_1F_1^lh_{13} + c_{1l}h_{13} - (1+b_1)F_2^lh_{23} - c_{1l}h_{23}.$$

Usando (4.82) e (4.96), temos que última equação pode ser escrita como

$$\Psi_l = T_{5l}F_5^5 + T_{4l}F_4^4 + (a_{13l} + a_{23l})F_3^3 + a_{1l1} + a_{2l2}.$$

Seja $\overline{h}_{i3} = F_3^5F_i^3 + F_i^5$, logo h_{i34} dado em (4.39), torna-se $h_{i34} = F_4^5h_{i3} + \overline{h}_{i3}$, $1 \leq i \leq 2$.
Substituindo isso na expressão de T_{5l}, obtemos

$$T_{5l} = F_4^5T_{4l} + F_1^l\overline{g}_3 - F_2^l\overline{g}_3 - F_2^{l'}\overline{h}_{23,2} - F_1^{l'}\overline{h}_{13,1} + b_1F_1^l\overline{h}_{13} + c_{1l}\overline{h}_{13} - (1+b_1)F_2^l\overline{h}_{23} - c_{1l}\overline{h}_{23}.$$

Considere H_{i3}^s, $4 \leq s \leq 5$, dado na Afirmação 2 e defina função

$$\overline{T}_l^s = F_1^lG_3^s - F_2^lG_3^s - F_2^{l'}H_{23,2}^s - F_1^{l'}H_{13,1}^s + b_1F_1^lH_{13}^s + c_{1l}H_{13}^s - (1+b_1)F_2^lH_{23}^s - c_{1l}H_{23}^s, \quad 4 \leq s \leq 5,$$

onde $G_3^s = c_{13}F_3^s + c_{1s}$, isto é, $G_3^4 = g_3$ e $G_3^5 = \overline{g}_3$.
logo T_{4l} e T_{5l}, podem ser reescritos como, $T_{4l} = \overline{T}_l^4$ e $T_{5l} = F_4^5\overline{T}_l^4 + \overline{T}_l^5$.

Substituindo H_{i3}^s dado na Afirmação 2, G_3^s, $4 \leq s \leq 5$ em $\overline{T}_l^s$, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{T}_l^s =& F_1^l(c_{13}F_3^s + c_{1s}) - F_2^l(c_{13}F_3^s + c_{1s}) - F_2^{l\prime}(F_3^sF_2^{3\prime} + F_2^{s\prime}) - F_1^{l\prime}(F_3^sF_1^{3\prime} + F_1^{s\prime}) + \\
&+ b_1F_1^l(F_3^sF_1^3 + F_1^s) - (1+b_1)F_2^l(F_3^sF_2^3 + F_2^s) + c_{1l}(F_3^sF_1^3 + F_1^s) - c_{1l}(F_3^sF_2^3 + F_2^s) \\
=& F_3^s\big[c_{13}F_1^l + c_{1l}F_1^3 + b_1F_1^3F_1^l - F_1^{3\prime}F_1^{l\prime} - c_{13}F_2^l - c_{1l}F_2^3 - (1+b_1)F_2^3F_2^l - F_2^{3\prime}F_2^{l\prime}\big] + \\
&+ c_{1s}F_1^l + c_{1l}F_1^s + b_1F_1^sF_1^l - F_1^{s\prime}F_1^{l\prime} - c_{1s}F_2^l - c_{1l}F_2^s - (1+b_1)F_2^sF_2^l - F_2^{s\prime}F_2^{l\prime} \\
=& (a_{13l} + a_{23l})F_3^s + a_{1sl} + a_{2sl},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (4.82).

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
T_{4l} =& \overline{T}_l^4 = (a_{13l} + a_{23l})F_3^4 + a_{14l} + a_{24l}, \\
T_{5l} =& F_4^5\overline{T}_l^4 + \overline{T}_l^5 = F_4^5\big[(a_{13l} + a_{23l})F_3^4 + a_{14l} + a_{24l}\big] + (a_{13l} + a_{23l})F_3^5 + a_{15l} + a_{25l},
\end{aligned}$$

donde segue a Afirmação.

$\blacksquare$

Afirmação 5. Se λ_i e g_{ii}, $1 \leq i \leq 5$, são dados por (4.38), (4.39) e (4.45), então a equação de Codazzi (2.15) é verificada.

Demonstração. De fato, sejam λ_i e g_{ii}, $1 \leq i \leq 5$, são dados por (4.38), (4.39) e (4.45). A equação de Codazzi (2.15) é dada por

$$\frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} = \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_j - \lambda_i}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq 5. \tag{4.124}$$

Tomando no lado esquerdo de (4.124), i=1 e j=2, usando (4.45), temos

$$\frac{g_{11,2}}{2g_{11}} = \frac{2\lambda_{1,2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{2} = \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=1 e j=3, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{11,3}}{2g_{11}} = \frac{2\lambda_{1,3}}{(\lambda_3 - \lambda_1)^3}\frac{(F_2^3)^2}{(F_2^3 - F_1^3)^2}\frac{(F_2^3 - F_1^3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2}{2(F_2^3)^2} = \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_3 - \lambda_1}.$$

Da mesma forma, o lado esquerdo de (4.124), com i=1 e j=4, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{11,4}}{2g_{11}} = \frac{2\lambda_{1,4}}{(\lambda_4 - \lambda_1)^3}\frac{(h_{23})^2}{(h_{23} - h_{13})^2}\frac{(h_{23} - h_{13})^2(\lambda_4 - \lambda_1)^2}{2(h_{23})^2} = \frac{\lambda_{1,4}}{\lambda_4 - \lambda_1}.$$

Tomando no lado esquerdo de (4.124), i=1 e j=5, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{11,5}}{2g_{11}} = \frac{2\lambda_{1,5}}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}\frac{(h_{234})^2}{(h_{234}-h_{134})^2}\frac{(h_{234}-h_{134})^2(\lambda_5-\lambda_1)^2}{2(h_{234})^2} = \frac{\lambda_{1,5}}{\lambda_5-\lambda_1}.$$

Agora, no lado esquerdo de (4.124), i=2 e j=1, usando (4.45), temos

$$\frac{g_{22,1}}{2g_{22}} = \frac{2\lambda_{2,1}}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{2} = \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=2 e j=3, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{22,3}}{2g_{11}} = \frac{2\lambda_{2,3}}{(\lambda_3-\lambda_2)^3}\frac{(F_1^3)^2}{(F_1^3-F_2^3)^2}\frac{(F_1^3-F_2^3)^2(\lambda_3-\lambda_2)^2}{2(F_1^3)^2} = \frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_3-\lambda_2}.$$

Agora, no lado esquerdo de (4.124), com i=2 e j=4, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{22,4}}{2g_{11}} = \frac{2\lambda_{2,4}}{(\lambda_4-\lambda_2)^3}\frac{(h_{13})^2}{(h_{13}-h_{23})^2}\frac{(h_{13}-h_{23})^2(\lambda_4-\lambda_2)^2}{2(h_{13})^2} = \frac{\lambda_{2,4}}{\lambda_4-\lambda_2}.$$

Como antes, tomando no lado esquerdo de (4.124), i=2 e j=5, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{22,5}}{2g_{11}} = \frac{2\lambda_{2,5}}{(\lambda_5-\lambda_2)^3}\frac{(h_{134})^2}{(h_{134}-h_{234})^2}\frac{(h_{134}-h_{234})^2(\lambda_5-\lambda_2)^2}{2(h_{134})^2} = \frac{\lambda_{2,5}}{\lambda_5-\lambda_2}.$$

Tomando no lado esquerdo de (4.124), i=3 e j=1, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{33,1}}{2g_{33}} = \frac{2\lambda_{3,1}(F_2^3)^2}{(\lambda_1-\lambda_3)^3}\frac{(\lambda_1-\lambda_3)^2}{2(F_2^3)^2} = \frac{\lambda_{3,1}}{\lambda_1-\lambda_3}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=3 e j=2, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{33,2}}{2g_{33}} = \frac{2\lambda_{3,2}(F_1^3)^2}{(\lambda_2-\lambda_3)^3}\frac{(\lambda_2-\lambda_3)^2}{2(F_1^3)^2} = \frac{\lambda_{3,2}}{\lambda_2-\lambda_3}.$$

Agora, no lado esquerdo de (4.124), i=3 e j=4, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{33,4}}{2g_{33}} = \frac{2\lambda_{3,4}}{(\lambda_4-\lambda_3)^3}\frac{(F_2^3h_{13}-F_1^3h_{23})^2}{(h_{23}-h_{13})^2}\frac{(h_{23}-h_{13})^2(\lambda_4-\lambda_3)^2}{2(F_2^3h_{13}-F_1^3h_{23})^2} = \frac{\lambda_{3,4}}{\lambda_4-\lambda_3}.$$

Da mesma forama, no lado esquerdo de (4.124), i=3 e j=5, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{33,5}}{2g_{33}} = \frac{2\lambda_{3,5}}{(\lambda_5-\lambda_3)^3}\frac{(F_2^3h_{134}-F_1^3h_{234})^2}{(h_{234}-h_{134})^2}\frac{(h_{234}-h_{134})^2(\lambda_5-\lambda_3)^2}{2(F_2^3h_{134}-F_1^3h_{234})^2} = \frac{\lambda_{3,5}}{\lambda_5-\lambda_3}.$$

Tomando no lado esquerdo de (4.124), i=4 e j=1, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{44,1}}{2g_{44}} = \frac{2\lambda_{4,1}(h_{23})^2}{(\lambda_1-\lambda_4)^3}\frac{(\lambda_1-\lambda_4)^2}{2(h_{23})^2} = \frac{\lambda_{4,1}}{\lambda_1-\lambda_4}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=4 e j=2, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{44,2}}{2g_{44}} = \frac{2\lambda_{4,2}(h_{13})^2}{(\lambda_2-\lambda_4)^3}\frac{(\lambda_2-\lambda_4)^2}{2(h_{13})^2} = \frac{\lambda_{4,2}}{\lambda_2-\lambda_4}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=4 e j=3, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{44,3}}{2g_{44}} = \frac{2\lambda_{4,3}}{(\lambda_3-\lambda_4)^3}\frac{(h_{12})^2}{(F_2^3-F_1^3)^2}\frac{(F_2^3-F_1^3)^2(\lambda_3-\lambda_4)^2}{2(h_{12})^2} = \frac{\lambda_{4,3}}{\lambda_3-\lambda_4}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=4 e j=5, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{44,5}}{2g_{44}} = \frac{2\lambda_{4,5}}{(\lambda_5-\lambda_4)^3}\frac{(h_{123})^2}{(h_{134}-h_{234})^2}\frac{(h_{134}-h_{234})^2(\lambda_5-\lambda_4)^2}{2(h_{123})^2} = \frac{\lambda_{4,5}}{\lambda_5-\lambda_4}.$$

Tomando no lado esquerdo de (4.124), i=5 e j=1, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{55,1}}{2g_{55}} = \frac{2\lambda_{5,1}(h_{234})^2}{(\lambda_1-\lambda_5)^3}\frac{(\lambda_1-\lambda_5)^2}{2(h_{234})^2} = \frac{\lambda_{5,1}}{\lambda_1-\lambda_5}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=5 e j=2, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{55,2}}{2g_{55}} = \frac{2\lambda_{5,2}(h_{134})^2}{(\lambda_2-\lambda_5)^3}\frac{(\lambda_2-\lambda_5)^2}{2(h_{134})^2} = \frac{\lambda_{5,2}}{\lambda_2-\lambda_5}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=5 e j=3, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{55,3}}{2g_{55}} = \frac{2\lambda_{5,3}}{(\lambda_3-\lambda_5)^3}\frac{(h_{124})^2}{(F_2^3-F_1^3)^2}\frac{(F_2^3-F_1^3)^2(\lambda_3-\lambda_5)^2}{2(h_{124})^2} = \frac{\lambda_{5,3}}{\lambda_3-\lambda_5}.$$

No lado esquerdo de (4.124), com i=5 e j=4, usando (4.45) e (4.2), temos

$$\frac{g_{55,4}}{2g_{55}} = \frac{2\lambda_{5,4}}{(\lambda_4-\lambda_5)^3}\frac{(h_{123})^2}{(h_{23}-h_{13})^2}\frac{(h_{23}-h_{13})^2(\lambda_4-\lambda_5)^2}{2(h_{123})^2} = \frac{\lambda_{5,4}}{\lambda_4-\lambda_5}.$$

Portanto todas as equações de Codazzi estão verificadas.

■

Referências Bibliográficas

[**1**] Carmo, M.P. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, 1988.

[**2**] Cecil, T. *Reducible Dupin Submanifolds*, Geom. Dedicata 32 (1989), 281-300.

[**3**] Cecil, T. *Lie sphere geometry, with applications to submanifolds, 2nd ed.*, Universitext, Springer, New York, 2008.

[**4**] Cecil, T., Chi Q. and Jensen, G. *Dupin hypersurfaces with four principal curvatures II*, Geom. Dedicata 128 (2007), 55-95.

[**5**] Cecil, T., Chi Q. and Jensen, G. *Classifications of Dupin hypersurfaces, in Pure and Applied Differential Geometry*, PADGE 2007, Editors F. Dillen and I. van de Woestyne, Shaker Verlag, Aachen, 2007, 48-56.

[**6**] Cecil, T. and Jensen, G. *Dupin hypersurfaces with three principal curvatures*, Invent. Math. 132 (1998), 121-178.

[**7**] Cecil, T. and Jensen, G. *Dupin hypersurfaces with four principal curvatures*, Geom. Dedicata 79 (2000), 1-49.

[**8**] Cecil, T. and Ryan, P. *Focal sets, taut embeddings and the cyclides of Dupin*, Math. Ann. 236 (1978), 177-190.

[**9**] Cecil, T. and Ryan, P. *Conformal geometry and the cyclides of Dupin*, Canad. J. Math. 32 (1980), 767-782.

[10] Cecil, T. and Ryan, P. *Tight and Taut immersions of manifolds*, Research Notes in Math. vol. 107, Pitman, London, 1985.

[11] Hu Z. and Li D., *Möbius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures*, Pacific J. Math. 232 (2007), 289-311.

[12] Hu Z. and Li D., *Classification of Möbius isoparametric hypersurfaces in S^4*, Nagoya Math. J. 179 (2005), 147-162.

[13] Hu Z., Li D. and Wang C.-P., *Classification of Möbius isoparametric hypersurfaces in S^5*, Monatsh. Math. 151 (2007), 201-222.

[14] Kamran, N. and Tenenblat, K. *Laplace Transformation in higher dimensions*, Duke Math. Journal 84 (1996), 237-266.

[15] Kamran, N. and Tenenblat, K. *Periodic systems for the higher-dimensional Laplace transformation*, Discrete and continuous dynamical systems. (1998), 359-378.

[16] Li H.-Z., Liu H.-L., Wang C.-P. and Zhao G.-S *Möbius isoparametric hypersurfaces in S^{n+1} with two distinct Principal curvatures*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 18 (2002), 437-446.

[17] Miyaoka, R. *Compact Dupin hypersurfaces with three principal curvatures*, Math. Z. 187 (1984), 433-452.

[18] Miyaoka, R. and Ozawa, T. *Construction of taut embeddings and Cecil-Ryan Conjecture*, Geometry of manifolds, ed. K. Shiohama, Perspect. Math., vol. 8, Academic Press, Boston, (1989), 181-189.

[19] Münzner H.-F. *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären*, Math. Ann. 251 (1980), 57-71.

[20] Münzner H.-F. *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II*, Über die Zerlegung der Sphäre in Ballbündel, Math. Ann. 256 (1981), 215-232.

[**21**] Niebergall, R. *Dupin hypersurfaces in* $\mathbf{R}^5$, I, Geometriae Dedicata, 40 (1991), 1-22.

[**22**] Niebergall, R. *Dupin hypersurfaces in* $\mathbf{R}^5$, II, Geometriae Dedicata, 41 (1992), 5-38.

[**23**] Pinkall, U. *Dupinsche hyperflächen in* E^4 , Manuscr. Math. 51 (1985), 89-119.

[**24**] Pinkall, U. *Dupin hypersurfaces* , Math. Ann. 270 (1985), 427-440.

[**25**] Pinkall, U. and Thorbergsson, G. *Deformations of Dupin hypersurfaces* , Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1989), 1037-1043.

[**26**] Riveros, C.M.C. and Tenenblat, K. *Dupin hypersurfaces in* $\mathbf{R}^5$, Canadian Journal of Mathematics. vol. 57, n. 6, (2005), 1291-1313.

[**27**] Riveros, C.M.C., Rodrigues, L.A. and Tenenblat, K. *On Dupin hypersurfaces with constant Moebius curvature*, Pacific Journal of Mathematics. vol. 236, (2008), 89-103.

[**28**] Rodrigues, L.A. *Classes de Hipersuperfícies de Dupin*, Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília (2005).

[**29**] Rodrigues, L.A. and Tenenblat, K. *A characterization of Möebius isoparametric hypersurfaces of the sphere*, Monatshefte fur Mathematik, vol. 158, (2009), 321-327.

[**30**] Rodrigues, L.A. and Tenenblat, K. *Dupin hypersurfaces in* $\mathbb{R}^4$ *with constant Möebius curvature*, to appear.