Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Uma classe de soluções para a equação de Ricci, no espaço pseudo-Euclidiano

por

Bianka Carneiro Leandro

Orientadora: Profa. Dra. Keti Tenenblat

"Ninguém pode voltar e criar um novo início,
mas todo mundo pode começar hoje
e criar um novo final."

Chico Xavier

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo milagre da vida, pela dádiva do saber e pela luz na realização deste sonho.

Aos meus pais pelo amor, carinho e confiança no decorrer de todos esses anos. Por terem acreditado em mim quando o mundo me fazia não mais crer. Vocês são a razão da minha vida.

À professora Keti pela liberdade e auxílio durante as orientações.

Aos professores Armando, Kellcio, Romildo, Pedro e Xia pelas sugestões para a melhor elaboração desta.

Aos grandes mestres Evaldo, Jânio, Reges, Wilmondes e Wilson que abriram as portas do saber, mostrando-me a magnitude da matemática.

Aos professores Armando, Marcelo, Romildo e Walterson pela amizade, carinho e por terem me apresentado ao fantástico mundo da geometria.

Aos professores Cátia, Elves, José Valdo, Marcelo Furtado, Mauro Patrão, Nigel, Raderson e Xia pela alegria, força e saber partilhado durante esses quatro anos de convivência.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UnB, Isabel, José Pereira, Manuel e Eveline pelo carinho e amizade, tornando cada dia na instituição um dia de festa.

Aos amigos de toda a vida Douglas, Jhone, Sandra, Shérolla e Thiago que me presentearam com sua garra e determinação, ajudando-me a ter fé e esperança. Obrigada por cada palavra de alento, por cada sorriso e pela amizade verdadeira.

Aos meu afilhados Kleyson, Larissa, Rithielly e Thaissa que sempre me dispensavam um sorriso tão meigo e carinhoso. Desculpem-me pela ausência constante.

À amiga Djania que vivenciou todas as fases deste sonho, brindando-me com sua ternura, amizade e desejo de vitória.

Ao Marcelo que inúmeras vezes me amparou quando o chão aos meus pés faltou. Obrigada pelo carinho, compreensão e força em cada dia desta jornada, mostrando-me que o sol sempre surge no horizonte.

À minha família que sempre me encorajou e teve muita fé em mim. Em memória da minha querida vovó Sebastiana que não viu a conclusão de mais esta etapa na minha vida.

Aos colegas Adail, Aline, Anyelle, Claudiano, Daniel, Eunice, João Paulo, Kelem, Leonardo, Miguel, Nilton, Ricardo, Tarcísio, Tonires, Veríssimo, Walter e Zhou pela convivência e pelos momentos de alegria, que fizeram do tempo um mero coadjuvante.

Aos professores Antônio Newton e João Batista pela confiança e carinho.

Aos amigos da PUC GOIÁS, Ary, Ricardo e Tiessa, pelo carinho, amizade e companheirismo, tornando cada dia de trabalho dias ímpares de muita alegria.

Aos colegas do MAF, Adelino, Antônio de Moura, Ariane, Bercholina, Cristian, Duelci, Erivelton, Lais, Luis de Gonzaga, Maciel, Marta, Priscila, Stela, Valdemar, Vanda e Venício, pelo carinho e força.

Aos meus alunos da PUC GOIÁS pela alegria, estímulo, confiança e compreensão.

Às minhas grandes amigas, Beth, Brunna, Carol, Cristiania, Dani, Gabi Chaves, Gabi Coimbra, Juliana, Larissa, Luana, Mariana Rezende, Mari, Mari Hoffman, Taiane, Thauane, Thais e Valéria, pelo carinho, amizade e alegria. Afinal, ser MAXINE é ser mais que amigas, é sermos irmãs.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Consideramos[1] o espaço pseudo-Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $n \geq 3$, e $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Seja T um tensor simétrico de ordem 2, definido por $T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j$, onde k é fixo, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i, j$ tais que $i \neq j$ e para j_0 fixo, $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$ tais que i, j, j_0 são distintos, com $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Além disso, assumimos que existem um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $l_0 \neq j_0$ tais que $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$. Obtemos condições necessárias e suficientes para que tal tensor admita métrica $\bar{g}$, conforme a g, que resolva a equação do tensor de Ricci, $Ric\,\bar{g} = T$.

[1]**Palavras-chave:** métricas conformes; equação de Ricci; espaço pseudo-Euclidiano.

Abstract

We consider[2] the pseudo-Euclidean space $(\mathbb{R}^n, g)$, with coordinates $x = (x_1, ..., x_n)$, $n \geq 3$, and $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Let T be a symmetric tensor of order 2, defined by $T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j$, where k is fixed, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i, j$ such that $i \neq j$ and for j_0 fixed, $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$ such that i, j, j_0 are distinct, with $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Moreover, we assume that there is an open interval $I \subset \mathbb{R}$ and $l_0 \neq j_0$ such that $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$. We provide necessary and sufficient conditions for such a tensor to admit a metric $\bar{g}$, conformal to g, that solves the Ricci tensor equation, $Ric\ \bar{g} = T$.

[2]**Key-words:** conformal metrics; Ricci tensor equation; pseudo-Euclidean space.

Sumário

Introdução

Um problema bastante estudado em geometria é o seguinte:

"Dado um tensor simétrico de ordem 2, $T = \sum_{i,j} T_{ij} dx_i \otimes dx_j$, definido sobre uma variedade M, existe métrica Riemanniana g tal que

$$Ric\ g = T?\text{"} \tag{1}$$

Encontrar solução para este problema equivale a resolver o seguinte sistema de equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem

$$R_{ij} = \sum_s (\Gamma^s_{ij})_{,s} - \sum_s (\Gamma^s_{is})_{,j} + \sum_{s,t} \Gamma^s_{ij}\Gamma^t_{st} - \sum_{s,t} \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sj} = T_{ij},$$

em que

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\sum_s \Big[(g_{js})_{,i} + (g_{is})_{,j} - (g_{ij})_{,s}\Big] g^{sm},$$

são os símbolos de Christoffel da métrica g e o índice $,i$ indica a derivação com respeito à variável x_i.

Em 1981, D. Deturck mostrou, em [5], que o problema (1) tem solução local quando o tensor T é não singular com $dim\ M \geq 3$. Para o caso bidimensional, sempre existe solução local quando $T_{ij}(x) = p(x)Q_{ij}$, onde $p : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e Q é um tensor positivo definido, ver [6].

Quando M é uma variedade compacta tem-se alguns resultados de existência e unicidade de solução para o problema (1), que podem ser encontrados em [7], [9] e [17]. No caso bidimensional, podemos encontrar resultados sobre existência de solução global em [6].

Em [2], J. Cao e D. Deturck estudaram o problema (1) para superfícies abertas do tipo topológico finito por . Neste trabalho, eles mostraram que tal problema admite solução global para certos tensores T e exibiram alguns resultados sobre unicidade, a menos de homotetia.

Em [3], J. Cao e D. Deturck estudaram a existência e unicidade de soluções globais em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$, para tensores rotacionalmente simétricos e não singulares. Neste caso, mostraram que o problema (1) admite uma única solução e que existe métrica g completa, definida em todo $\mathbb{R}^n$, tal que $Ric\ g = T$, para certos tensores em $\mathbb{R}^n$. Já para $\mathbb{S}^n$, demonstraram resultados de não existência e encontraram condições necessárias sobre o tensor T dado, de modo que exista métrica g em $\mathbb{S}^n$ satisfazendo $Ric\ g = T$. Neste trabalho eles consideraram somente tensores não singulares, pois fora do contexto rotacionalmente simétrico, a unicidade pode falhar, ver [7]. Além disso, existem exemplos de tensores singulares para os quais não há métrica g satisfazendo $Ric\ g = T$, mesmo localmente, ver [6]. Observamos que em [3], J. Cao e D. Deturck enunciaram e provaram a seguinte proposição: " Se T é um tensor rotacionalmente simétrico não singular, então o sistema $Ric\ g = T$ tem solução local rotacionalmente simétrica."Entretanto, R. Pina e K. Tenenblat, em [15], exibiram um tensor $T = -(|x|^2 + 1)g$ nas condições da proposição acima e que não admite solução local.

Em [18], X. Xu mostrou que o problema (1) tem solução única em $\mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{S}^n$ para tensores T esfericamente simétricos, sem a condição do tensor ser não singular.

Em [10], W. Künel e H. B. Rademacher mostraram que se (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana e $\bar{g}$ é uma métrica conforme a g, com $Ric\ \bar{g} = Ric\ g$, sendo uma delas completa, então g e $\bar{g}$ são homotéticas. Desta forma provaram que o problema (1) tem solução única em variedades semi-Riemannianas para a classe de métricas conformes.

Em [13], R. Pina e K. Tenenblat consideraram um espaço pseudo-Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $n \geq 3$, $g_{ij} = \varepsilon_j \delta_{ij}$, $\varepsilon_j = \pm 1$ e tensores da forma

$T = \sum_i \varepsilon_j c_{ij} dx_i \otimes dx_j$, com $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Mostraram condições necessárias e suficientes para que tal tensor admita métrica $\bar{g}$, conforme a g, que resolva a equação de Ricci, $Ric\ \bar{g} = T$. Mostraram que tais tensores são determinados pelos elementos da diagonal e obtiveram explicitamente tais métricas.

Em [12], R. Pina considerou um problema análogo ao estudado em [13], no espaço hiperbólico $(\mathbb{R}^n_+, g)$, $n \geq 3$, $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$, para tensores do tipo $T = Ric\ g + \sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{x_n^2} dx_i \otimes dx_j$. Mostrou condições necessárias e suficientes para que tal tensor admita métrica $\bar{g}$, conforme a g, que resolva a equação de Ricci, $Ric\ \bar{g} = T$.

Em [14] e [15], R. Pina e K. Tenenblat consideraram o problema de existência de métrica $\bar{g}$, conforme à métrica usual g, tal que $Ric\ \bar{g} = T$, para tensores $T = fg$, no espaço pseudo-Euclidiano e na esfera, com dimensão $n \geq 3$, onde f é uma função diferenciável. Para o caso bidimensional, resultados de existência e unicidade podem ser encontrados em [6] e [9].

Em [16], R. Pina e K. Tenenblat consideraram um espaço pseudo-Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, com $n \geq 3$, $g_{ij} = \varepsilon_j \delta_{ij}$, $\varepsilon_j = \pm 1$ e tensores da forma $T = \sum_i \varepsilon_i f_i(x_k) dx_i^2$, para algum k fixado, $1 \leq k \leq n$. Mostraram condições necessárias e suficientes para que tal tensor admita métrica $\bar{g}$, conforme a g, que resolva a equação de Ricci, $Ric\ \bar{g} = T$, e a equação de Einstein, $Ric\ \bar{g} - \frac{\bar{K}}{2}\bar{g} = T$, onde $\bar{K}$ é a curvatura escalar de $\bar{g}$. Forneceram soluções explícitas que dependem de uma função diferenciável arbitrária de uma única variável. Consideraram também problemas similares para variedades localmente conformemente planas.

Em [17], R. Pina e K. Tenenblat consideraram um espaço pseudo-Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, com $n \geq 3$, $g_{ij} = \varepsilon_j \delta_{ij}$, $\varepsilon_j = \pm 1$ e tensores não diagonais, da forma $T = \sum_{i,j} f_{ij} dx_i dx_j$, tal que, para $i \neq j$, $f_{ij}(x_i, x_j)$ depende de x_i e x_j. Mostraram condições necessárias e suficientes para que tal tensor admita métrica $\bar{g}$, conforme a g, que resolva a equação de Ricci, $Ric\ \bar{g} = T$, e a equação de Einstein, $Ric\ \bar{g} - \frac{\bar{K}}{2}\bar{g} = T$, onde $\bar{K}$ é a curvatura escalar de $\bar{g}$. Consideraram também problemas similares para variedades localmente conformemente planas. Mostraram também exemplos de métricas completas em $\mathbb{R}^n$, no toro n-dimensional T^n e no cilindro $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, que resolvem a equação de Ricci ou a equação de Einstein.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o seguinte problema:

Sejam $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\forall i = 1, ..., n$. Vamos estudar um tensor simétrico T, cujos elementos dependem de uma única variável x_k. Além disso, vamos admitir que os elementos fora da diagonal e os elementos que não pertencem a uma linha j_0 e a uma coluna j_0, são constantes, para um j_0 fixo. Mais precisamente, T um tensor simétrico de ordem 2, definido por

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j,$$

onde k é fixo, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i, j$ tais que $i \neq j$, e para j_0 fixo e $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$ tais que i, j, j_0 são distintos, com $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Além disso, assumimos que existem um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $l_0 \neq j_0$ tais que $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$. Queremos encontrar métricas conformes a g, tais que

$$\begin{cases} \bar{g} & = \frac{1}{\varphi^2} g \\ Ric\ \bar{g} & = T. \end{cases}$$

Observamos que a condição $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, faz-se necessária para excluirmos o caso do tensor T simétrico e constante, que foi estudado por R. Pina e K. Tenenblat em [13].

Dividimos nosso estudo em dois casos, primeiro estudamos este problema com $j_0 \neq k$ e depois estudamos o caso em que $j_0 = k$.

No caso em que $j_0 = k$, dividimos nos três únicos casos:

(A) As constantes $c_{ij} = 0$, $\forall i, j$ tais que i, j, k são distintos;

(B) A dimensão $n = 3$ e a constante $c_{l_0 i_0} \neq 0$, onde i_0, k, l_0, são distintos;

(C) A dimensão $n \geq 4$, existem índices i_0, n_0 tais que i_0, k, n_0 são distintos e $c_{i_0 n_0} \neq 0$.

Para o caso **(C)** observamos que existem duas possibilidades:

(C1) Os índices i_0 e n_0 são ambos distintos de l_0, isto é, n_0, i_o, l_0, k são distintos e $c_{il_0} = 0$, $\forall i$ tais que i, k, l_0 são distintos;

(C2) O índice i_0 é igual a l_0 ou o índice n_0 é igual a l_0, que são equivalentes.

No Capítulo 1, apresentaremos um resumo sobre algumas definições resultados clássicos que serão utilizados nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 2, trataremos do caso em que o índice j_0 é diferente do índice k. Mostraremos no Teorema 2.1 a existência de métrica $\bar{g}$, conforme a métrica g, tal que $Ric\ \bar{g} = T$, se e somente se, $l_0 = k$, existe uma função diferenciável $L(x_k)$ tal que, $L''(x_k) \neq 0$ e $L'(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, e em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$F_{jj_0}(x_k) = 0,\ \forall j \text{ tal que } j, k, j_0 \text{ são distintos},$$

$$c_{lj} = 0,\ \forall l, j \text{ tais que } l, j, j_0 \text{ são distintos},$$

$$F_{j_0 k}(x_k) = \varepsilon_k a(n-2)L'(x_k),$$

$$F_{kk}(x_k) = (n-1)\varepsilon_k L''(x_k) - (n-2)\varepsilon_{j_0} a^2,$$

$$F_{ll}(x_k) = \varepsilon_k L''(x_k) + (n-2)\varepsilon_{j_0} a^2(\delta_{j_0 l} - 1) - \varepsilon_k(n-2)(L'(x_k))^2,\ \forall l \neq k,$$

onde $a \neq 0$. E exibimos explicitamente as soluções do problema proposto.

No Capítulo 3, apresentaremos alguns resultados que tratam do caso em que o índice j_0 é igual ao índice k.

No Teorema 3.1, trataremos do caso **(A)**, ou seja, do caso em que todas as constantes $c_{ij} = 0$, $\forall i, j$ tais que i, j, k são distintos. Nesse caso mostramos, a existência de métrica $\bar{g}$, conforme a métrica g, tal que $Ric\ \bar{g} = T$, se e somente se, existe uma função diferenciável $L(x_k)$ tal que $L'(x_k) \neq 0$ e $L''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, e em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$F_{l_0 k}(x_k) = a\varepsilon_k(n-2)L'(x_k),$$

$$F_{jk}(x_k) = 0,\ \forall j \neq k, l_0,$$

$$F_{kk}(x_k) = (n-1)\varepsilon_k L''(x_k) - (n-2)\varepsilon_{l_0} a^2,$$

$$F_{ll}(x_k) = \varepsilon_k L''(x_k) + (n-2)\varepsilon_{l_0} a^2(\delta_{l_0 l} - 1) - \varepsilon_k (n-2)(L'(x_k))^2,\ \forall l \neq k,$$

$a \neq 0$. E exibimos explicitamente as soluções do problema proposto.

No Teorema 3.2, trataremos do caso **(B)**, ou seja, do caso de dimensão $n = 3$, onde a constante $c_{l_0 i_0} \neq 0$, onde i_0, k, l_0 são distintos. Supomos, sem perda de generalidade, para simplificar a notação, que $k = 2$, $l_0 = 1$ e $i_0 = 3$. Neste caso, mostramos a existência de métrica $\bar{g}$, conforme a métrica g, tal que $Ric\bar{g} = T$, se e somente se, existem um intervalo $J \subset I$ e uma função diferenciável $G(x_2)$ tal que $G'(x_2) \neq 0$, $G''(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in J$, e em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$,

$$F_{12}(x_2) = \frac{\varepsilon_2 G'(x_2)}{\sqrt{b}},\ \text{onde } b = \frac{a}{\varepsilon_3 c_{13}} > 0 \text{ e } a > 0,$$

$$F_{32}(x_2) = \frac{a\varepsilon_2 G'(x_2)}{\sqrt{b}},$$

$$F_{11}(x_2) = \sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \varepsilon_2(G'(x_2))^2 - \frac{\varepsilon_3 a^2}{b},$$

$$F_{22}(x_2) = 2\sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \frac{\varepsilon_1}{b} - \frac{\varepsilon_3 a^2}{b},$$

$$F_{33}(x_2) = \sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \varepsilon_2(G'(x_2))^2 - \frac{\varepsilon_1}{b},$$

onde $\alpha > 0$ e $\sigma = \pm 1$. Exibimos explicitamente as soluções do problema proposto.

Nos Teoremas 3.3 e 3.4, trataremos da possibilidade **(C2)**, ou seja, $n \geq 4$, com $c_{l_0 i_0} \neq 0$, onde i_0, l_0, k são distintos.

No Teorema 3.3, estudamos o caso em que consideramos a existência de uma constante $c_{l_0 r_0} \neq 0$, onde i_0, l_0, r_0, k são distintos. Mostramos neste caso, que existe a métrica $\bar{g}$, conforme a métrica g, tal que $Ric\ \bar{g} = T$, se e somente se, $c_{i_0 r_0} \neq 0$, existe uma função diferenciável $G(x_k)$, definida em um intervalo $J \subset I$, tal que $G''(x_k) \neq 0$, $G'(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, e em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$,

$$F_{l_0 k}(x_k) = \varepsilon_k \sqrt{d(n-2)} G'(x_k),$$

$$F_{jk}(x_k) = \varepsilon_{l_0}\varepsilon_k c_{jl_0}\sqrt{\frac{n-2}{d}}G'(x_k),\ \forall j \text{ tais que } j, l_0, k \text{ são distintos },$$

$$\varepsilon_i c_{si} = \frac{c_{sl_0}c_{il_0}}{d},\ \forall i, s \text{ tais que } i, s, k, l_0, \text{ são distintos },$$

$$d = \frac{\varepsilon_{l_0}c_{i_0l_0}c_{l_0r_0}}{c_{i_0r_0}} > 0,$$

$$F_{kk}(x_k) = \sigma\varepsilon_k(n-1)G''(x_k) - \varepsilon_{l_0}d - \frac{1}{d}\sum_{j\neq k,l_0}\varepsilon_j(c_{jl_0})^2,$$

$$F_{l_0l_0}(x_k) = \sigma\varepsilon_k G''(x_k) - \varepsilon_k(n-2)(G'(x_k))^2 - \frac{1}{d}\sum_{j\neq k,l_0}\varepsilon_j(c_{jl_0})^2,$$

$$F_{ll}(x_k) = \sigma\varepsilon_k G''(x_k) - \varepsilon_k(n-2)(G'(x_k))^2 - \varepsilon_{l_0}d - \frac{1}{d}\sum_{j\neq k,l_0,l}\varepsilon_j(c_{jl_0})^2,$$

$\forall l$ tais que l, k, l_0 são distintos, onde $\alpha > 0$ e $\sigma = \pm 1$. E exibimos explicitamente as soluções do problema proposto.

Já no Teorema 3.4, trataremos do caso em que $c_{l_0j} = 0$, $\forall j$ tal que j, i_0, k, l_0 são distintos. Mostramos neste caso, que existe a métrica $\bar{g}$, conforme a métrica g, tal que $Ric\ \bar{g} = T$, se e somente se, existe uma função diferenciável $G(x_k)$ definida em um intervalo $J \subset I$ tal que $G'(x_k) \neq 0$ e $G''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, e em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$,

$$F_{l_0k}(x_k) = \frac{\varepsilon_k G'(x_k)}{\sqrt{p}},$$

$$F_{jk}(x_k) = 0,\ \forall j \text{ tais que } j, l_0, k, i_0 \text{são distintos },$$

$$c_{ij} = 0,\ \forall i, j \text{ tais que } i, j, k, l_0 \text{ são distintos},$$

$$F_{i_0k}(x_k) = \frac{a\varepsilon_k G'(x_k)}{\sqrt{p}},\ a > 0,$$

$$p = \frac{a}{(n-2)\varepsilon_{i_0}c_{l_0i_0}} > 0,$$

$$F_{kk}(x_k) = \sigma\varepsilon_k(n-1)G''(x_k) - \frac{\varepsilon_{l_0}}{p(n-2)} - \frac{\varepsilon_{i_0}a^2}{p(n-2)},$$

$$F_{jj}(x_k) = \sigma\varepsilon_k G''(x_k) - (n-2)\varepsilon_k(G'(x_k))^2 + (\delta_{jl_0} - 1)\frac{\varepsilon_{l_0}}{p(n-2)} + (\delta_{ji_0} - 1)\frac{\varepsilon_{i_0}a^2}{p(n-2)},$$

$\forall j \neq k$, onde $\alpha > 0$ e $\sigma = \pm 1$. E exibimos explicitamente as soluções do problema proposto.

Observamos também que na possibilidade **(C1)**, ou seja, no caso em que temos índices n_0, i_0 tais que i_0, n_0, k, l_0 são distintos, onde a constante $c_{i_0 n_0} \neq 0$, e $c_{il_0} = 0$, $\forall i$ tais que i, k, l_0 são distintos, não existe métrica $\bar{g}$, conforme a métrica g, tal que $Ric\ \bar{g} = T$.

No Capítulo 4, responderemos através de exemplos a seguinte questão:

"Como todo tensor simétrico pode ser diagonalizado, ao diagonalizar os tensores estudados neste trabalho, estes não recairiam no caso estudado por R. Pina e K. Tenenblat em [16]?"

Ou seja, dado um tensor

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j,$$

simétrico e não diagonal, estudado em um dos teoremas apresentados no Capítulo 2 e Capítulo 3, existe uma mudança de variáveis $y = (y_1(x), ..., y_n(x))$, onde $x = (x_1, ..., x_n)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A, isto é, o novo tensor diagonal $\tilde{T}$ tem a forma

$$\tilde{T} = \sum_{i,}^{n} \tilde{\varepsilon}_i f_i(y_{k_0}) dy_i^2,$$

onde temos k_0 fixo, $f_{k_0}(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}(n-1)U''(y_{k_0})$, $f_j(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}[U''(y_{k_0}) - (n-2)(U'(y_{k_0}))^2]$, $\forall j \neq k_0$?

Mostraremos casos em que não existe tal mudança de variáveis. Para isso, exibiremos cinco exemplos referentes a cada um dos Teoremas demonstrados nos Capítulos 2 e 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos um resumo sobre algumas definições, propriedades e resultados clássicos que serão utilizados nos capítulos subsequentes. Os conceitos e propriedades aqui mencionados podem ser encontrados com maiores detalhes em [4], [8] e [11].

Considerando M uma variedade diferenciável, indiquemos por $\chi(M)$ o conjuntos dos vetores tangentes a M e por $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

Primeiro enunciaremos alguns resultados sobre formas bilineares e depois definiremos variedades semi-Riemannianas.

Definição 1.1. Seja V um espaço vetorial com dimensão finita, uma *forma bilinear simétrica sobre* V é uma função bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$, tal que

$$b(v, w) = b(w, v),\ \forall v, w \in V.$$

Definição 1.2. Uma forma bilinear simétrica sobre um espaço vetorial V é:

a) *positiva (negativa) definida* se $b(v, v) > 0 (< 0)$, $\forall v \neq 0 \in V$;

b) *positiva (negativa) semi-definida* se $b(v, v) \geq 0 (\leq 0)$, $\forall v \in V$;

c) *não-degenerada* se $b(v, w) = 0$, $\forall w \in V$, implica que $v = 0$.

Definição 1.3. O *índice* ν de uma forma bilinear simétrica b sobre um espaço vetorial V, é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço $W \subset V$ tal que b restrita a W é negativa definida.

Sendo $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V, a matriz $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ é dita *a matriz de b relativa a base β*. Prova-se que uma forma bilinear simétrica é não-degenerada se, e somente se, $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ é inversível.

Definição 1.4. Um *tensor métrico g sobre M* é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica e não-degenerada em T_pM, com índice constante ν, $\forall p \in M$.

Definição 1.5. Uma *variedade semi-Riemanniana* (M, g) é uma variedade diferenciável M, munida com um tensor métrico g.

O valor comum ν do índice de g_p sobre uma variedade semi-Riemanniana (M, g) é dito o *índice* de M. Temos que $0 \leq \nu \leq n = dim\ M$. Se $\nu = 0$, temos que (M, g) é uma variedade Riemanniana.

Observamos que em um sistema de coordenadas (U, X) em torno do ponto $p \in M$, as coordenadas do tensor métrico g são $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. Como g é não-degenerada, temos que $(g_{ij}(p))$ é inversível e sua inversa será denotada por $g^{ij}(p)$. Em U, temos

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

De maneira análoga ao caso Riemanniano, introduz-se as noções de conexão e derivada covariante sobre uma variedade semi-Riemanniana (M, g). Mostra-se também que sobre (M, g) existe uma única conexão D tal que:

a) $[V, W] = D_V W - D_W V$;

b) $X < V, W > = < D_X^V, W > + < V, D_X^W >$, $\forall X, V, W \in \chi(M)$.

Temos que D é chamada a conexão de Levi-Civita de M e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$2 < D_V^W, X > = V < W, X > + W < X, V > - X < V, W > - < V, [W, X] > +$$
$$+ < W, [X, V] > + < X, [V, W] > . \tag{1.1}$$

Em um sistema de coordenadas $(U, X(x_1, ..., x_n))$, temos que as funções Γ_{ij}^k definidas em U por

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^{\frac{\partial}{\partial x_j}} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

são símbolos de Christoffel da conexão D. Se $W = \sum_{i=1}^n W_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, então

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^W = \sum_k \left\{ \frac{\partial W_k}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W_j \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Segue por (1.1) que, em U

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{mk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(g_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{im}) - \frac{\partial}{\partial x_m}(g_{ij}) \right\}.$$

Considerando (M, g) uma variedade semi-Riemanniana com a conexão de Levi-Civita D, mostra-se que a função $R : \chi(M)^3 \to \chi(M)$ dada por

$$R(x, y)z = D_y D_x z - D_x D_y z + D_{[x,y]} z$$

é multilinear e será chamado de *tensor curvatura* de M.

Assim, em um sistemas de coordenadas temos que

$$R_{\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_i R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x_l}(\Gamma_{jk}^i) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\Gamma_{lj}^i) + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m.$$

Definição 1.6. Seja R o tensor curvatura de (M, g). O *tensor curvatura de Ricci* é definido por

$$(n-1)Ric\ g(X,Z) = traço\{T(Y) = R(X,Y)Z\},$$

onde $X, Z \in T_pM$.

Em um sistema de coordenadas, suas componentes são dadas por

$$R_{ij} = \sum_m R^m_{imj}$$

Sabemos que, para cada ponto $p \in M$, $Ric\ g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica.

Agora, considerando $f \in \mathcal{D}(M)$ e $X \in \chi(M)$ inserimos, a seguir, os conceitos de gradiente, laplaciano e Hessiana.

Definição 1.7. Sejam (M, g) uma variedade semi-Riemanniana, $X \in \chi(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. Então definimos:

a) *gradiente de f,* denotado por $\nabla_g f$, como sendo o campo tal que $g(\nabla_g f, X) = df(X)$, $\forall X \in \chi(M)$;

b) *Hessiana de f,* denotada por $Hess_g(f)$, como sendo uma forma bilinear simétrica dada por

$$Hess_g(f)(X,Y) = g(D_X(\nabla_g f), Y);$$

c) *laplaciano de f,* como sendo

$$\Delta_g f = div(\nabla_g f),$$

onde $divX : M \to \mathbb{R}$ é dado por

$$divX(p) = traço\ da\ aplicação\ linear\{Y(p) \to D_Y X(p)\},\ \forall p \in M.$$

Observação 1.1. *Em um sistema de coordenadas locais $(U, X(x_1, ..., x_n))$ em torno de $p \in M$ temos que*

$$\|\nabla_g f\|^2 = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \tag{1.2}$$

$$(Hess_g(f))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{1.3}$$

$$\Delta_g f = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right). \tag{1.4}$$

Capítulo 2

Equação do tensor de Ricci na classe de métricas conformes

Exibiremos primeiro uma relação envolvendo os tensores de Ricci de métricas conformes.

Proposição 2.1. *Sejam (M^n, g) uma variedade semi-Riemanniana, com $n \geq 3$ e $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ uma métrica conforme a g. Então os tensores de Ricci das métricas g e $\bar{g}$ satisfazem a relação*

$$Ric\ \bar{g} - Ric\ g = \frac{1}{\varphi^2}\{(n-2)\varphi Hess_g(\varphi) + (\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)\|\nabla_g \varphi\|^2)g\}.$$

Demonstração. Ver [1], [8], [10], [17].

∎

2.1 Tensor cujos elementos dependem de uma variável x_k e os elementos fora da diagonal que não pertencem a uma linha e a uma coluna j_0, são constantes c_{ij}

Neste trabalho, nosso objetivo é estudar o seguinte problema:

Sejam $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\forall i = 1, ..., n$ e T um tensor simétrico de ordem 2, definido por

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j, \tag{2.1}$$

onde k é fixo, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i, j$ tais que $i \neq j$ e para j_0 fixo e $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$ tais que i, j, j_0 são distintos, com $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Além disso, assumimos que existem um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $l_0 \neq j_0$ tais que $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$. Queremos encontrar métricas conformes a g, tais que

$$\begin{cases} \bar{g} & = \frac{1}{\varphi^2} g \\ Ric\ \bar{g} & = T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ou seja, estudamos tensores T, cuja forma matricial é

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 F_{11}(x_k) & \varepsilon_2 c_{12} & \dots & \varepsilon_{j_0} F_{1j_0}(x_k) & \dots & \varepsilon_n c_{1n} \\ \varepsilon_1 c_{21} & \varepsilon_2 F_{22}(x_k) & \dots & \varepsilon_{j_0} F_{2j_0}(x_k) & \dots & \varepsilon_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_1 F_{j_0 1}(x_k) & \varepsilon_2 F_{j_0 2}(x_k) & \dots & \varepsilon_{j_0} F_{j_0 j_0}(x_k) & \dots & \varepsilon_n F_{j_0 n}(x_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 c_{n1} & \varepsilon_2 c_{n2} & \dots & \varepsilon_{j_0} F_{nj_0}(x_k) & \dots & \varepsilon_n F_{nn}(x_k) \end{pmatrix}$$

Observamos que considerando (M^n, g) uma variedade semi-Riemanniana, $n \geq 3$, se $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, temos pela Proposição 2.1 que os tensores de Ricci associados às métricas g e

$\bar{g}$ satisfazem a seguinte relação

$$Ric\ \bar{g} - Ric\ g = \frac{1}{\varphi^2}\{(n-2)\varphi Hess_g(\varphi) + (\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)\|\nabla_g\varphi\|^2)g\}. \tag{2.3}$$

Como $Ric\ g = 0$, segue da relação (2.3), que estudar o problema (2.2) é equivalente a estudar o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{1}{\varphi^2}\{(n-2)\varphi Hess_g(\varphi)_{ij} + (\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)\|\nabla_g\varphi\|^2)g_{ij}\} = \varepsilon_j F_{ij}(x_k), \tag{2.4}$$

onde

$$Hess_g(\varphi)_{ij} = \varphi_{,ij},\ \|\nabla_g\varphi\|^2 = \sum_i \varepsilon_i(\varphi_{,i})^2,\ \Delta_g\varphi = \sum_i \varepsilon_i\varphi_{,ii},\ i,j = 1,...,n, \tag{2.5}$$

sendo que $\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Observamos que existem duas possibilidades para o índice j_0, $j_0 \neq k$ e $j_0 = k$. Neste capítulo, trataremos do caso em que o índice j_0 é diferente do índice k.

2.2 Primeiro caso, $j_0 \neq k$

Nesta seção apresentaremos um resultado que trata do caso em que o índice j_0 é diferente do índice k. Ou seja, tensores T cuja forma matricial é dada por

$$\begin{pmatrix}
\varepsilon_1 F_{11}(x_k) & \varepsilon_2 c_{12} & \cdots & \varepsilon_k c_{1k} & \cdots & \varepsilon_{j_0} F_{1j_0}(x_k) & \cdots & \varepsilon_n c_{1n} \\
\varepsilon_1 c_{21} & \varepsilon_2 F_{22}(x_k) & \cdots & \varepsilon_k c_{2k} & \cdots & \varepsilon_{j_0} F_{2j_0}(x_k) & \cdots & \varepsilon_n c_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varepsilon_1 c_{k1} & \varepsilon_2 c_{k2} & \cdots & \varepsilon_k F_{kk}(x_k) & \cdots & \varepsilon_{j_0} F_{kj_0}(x_k) & \cdots & \varepsilon_n c_{kn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varepsilon_1 F_{j_0 1}(x_k) & \varepsilon_2 F_{j_0 2}(x_k) & \cdots & \varepsilon_k F_{j_0 k}(x_k) & \cdots & \varepsilon_{j_0} F_{j_0 j_0}(x_k) & \cdots & \varepsilon_n F_{j_0 n}(x_k) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varepsilon_1 c_{n1} & \varepsilon_2 c_{n2} & \cdots & \varepsilon_k c_{nk} & \cdots & \varepsilon_{j_0} F_{nj_0}(x_k) & \cdots & \varepsilon_n F_{nn}(x_k)
\end{pmatrix}$$

Teorema 2.1. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, *um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas* $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\forall i = 1, ..., n$. *Considere o tensor*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j, \tag{2.6}$$

onde k *é fixo,* $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i, j$, $i \neq j$ *e para* $j_0 \neq k$, j_0 *fixo,* $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$ *tais que* i, j, j_0 *são distintos, com* $c_{ij} \in \mathbb{R}$. *Assuma que existem um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$ *e* $l_0 \neq j_0$ *tais que* $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$. *Então, existe métrica* $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ *tal que* $Ric\ \bar{g} = T$ *se, e somente se,* $l_0 = k$, *existe uma função diferenciável* $L(x_k)$ *tal que,* $L''(x_k) \neq 0$ *e* $L'(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, *e em* $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$F_{jj_0}(x_k) = 0, \ \forall j \text{ tal que } j, k, j_0 \text{ são distintos}, \tag{2.7}$$

$$c_{lj} = 0, \ \forall l, j \text{ tais que } l, j, j_0 \text{ são distintos}, \tag{2.8}$$

$$F_{j_0 k}(x_k) = \varepsilon_k a(n-2)L'(x_k), \tag{2.9}$$

$$F_{kk}(x_k) = (n-1)\varepsilon_k L''(x_k) - (n-2)\varepsilon_{j_0} a^2, \tag{2.10}$$

$$F_{ll}(x_k) = \varepsilon_k L''(x_k) + (n-2)\varepsilon_{j_0} a^2(\delta_{j_0 l} - 1) - \varepsilon_k(n-2)(L'(x_k))^2, \ \forall l \neq k, \tag{2.11}$$

$$\varphi(x) = \exp\left[a x_{j_0} + L(x_k)\right], \tag{2.12}$$

onde $a \neq 0$.

Demonstração. Encontrar métricas conformes, $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tais que $Ric\ \bar{g} = T$, é equivalente a estudar o sistema (2.4). Sob as condições do nosso teorema, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, as equações deste sistema são dadas por

$$\begin{cases} \varepsilon_i F_{ii}(x_k) & = (n-2)\frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \ i = 1, .., n \\ \varphi_{,ij_0}(x) & = \frac{\varepsilon_{j_0} F_{ij_0}(x_k)}{n-2}\varphi(x), \ \forall i \text{ tais que } i, j_0 \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,jl}(x) & = \frac{\varepsilon_l c_{jl}}{n-2}\varphi(x), \ \forall l, j \text{ tais que } l, j, j_0 \text{ são distintos}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem da função $\varphi(x)$, isto é, $\varphi_{,jj_0 l}(x) = \varphi_{,jlj_0}(x)$, $\forall l, j$ tais que j, l, j_0 são distintos e l, j_0, k são distintos, dadas através do sistema (2.13), obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\varepsilon_{j_0} F_{jj_0}(x_k)\varphi_{,l}(x) = \varepsilon_l c_{jl} \varphi_{,j_0}(x), \tag{2.14}$$

$\forall l, j$ tais que l, j, j_0 são distintos e l, j_0, k são distintos. Utilizando também a comutatividade das derivadas de terceira ordem da função $\varphi(x)$, isto é, $\varphi_{,jj_0k}(x) = \varphi_{,jkj_0}(x)$, $\forall j$ tais que j, k, j_0 são distintos, dadas através do sistema (2.13), obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\varepsilon_k c_{jk} \varphi_{,j_0}(x) = \varepsilon_{j_0} F'_{jj_0}(x_k)\varphi(x) + \varepsilon_{j_0} F_{jj_0}(x_k)\varphi_{,k}(x), \tag{2.15}$$

$\forall j$ tais que j, k, j_0 são distintos.

Como existe $l_0 \neq j_0$ tal que $F'_{l_0j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, dividiremos nosso estudo em duas etapas. Primeiro trataremos do caso em que $l_0 \neq k$ e por último o caso em que $l_0 = k$.

Caso I: Suponhamos que $l_0 \neq k$.

Utilizando a expressão (2.14), com $j = l_0$, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $\forall x_k \in I$, que

$$\varepsilon_{j_0} F_{l_0j_0}(x_k)\varphi_{,l}(x) = \varepsilon_l c_{l_0l} \varphi_{,j_0}(x), \tag{2.16}$$

$\forall l$ tais que l, k, l_0, j_0 são distintos.

Em (2.14) tomemos $l = l_0$, assim, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$\varepsilon_{j_0} F_{jj_0}(x_k)\varphi_{,l_0}(x) = \varepsilon_{l_0} c_{jl_0} \varphi_{,j_0}(x), \tag{2.17}$$

$\forall j$ tais que j, l_0, j_0 são distintos.

Afirmação I.1**:** Não existe intervalo $\tilde{J} \subset I$ tal que, $\forall x_k \in \tilde{J}$, $F_{jj_0}(x_k) = 0$, $\forall j$ tais que j, j_0, l_0 são distintos.

De fato, suponhamos que exista um intervalo $\tilde{J} \subset I$ tal que $F_{jj_0}(x_k) = 0$, $\forall j$ tais que j, j_0, l_0 são distintos e $\forall x_k \in \tilde{J}$. Dessa forma o sistema (2.13), em $\tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in \tilde{J}$, se reduz a

$$\begin{cases} \varepsilon_i F_{ii}(x_k) & = (n-2)\frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \ i = 1, .., n, \\ \varphi_{,ij_0}(x) & = 0, \ \forall i \text{ tais que } i, l_0, j_0 \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,l_0 j_0}(x) & = \frac{\varepsilon_{j_0} F_{l_0 j_0}(x_k)}{n-2}\varphi(x), \\ \varphi_{,jl}(x) & = \frac{\varepsilon_l c_{jl}}{n-2}\varphi(x), \ \forall j, l \text{ tais que } j, l, j_0 \text{ são distintos.} \end{cases} \tag{2.18}$$

Derivando a expressão de $\varphi_{,l_0 j_0}(x)$, dada pelo sistema (2.18), com respeito à variável x_k, e utilizando a comutatividade das derivadas, isto é, $\varphi_{,l_0 j_0 k}(x) = \varphi_{,k j_0 l_0}(x)$, obtemos, em $\tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$-\varphi_{,k} F_{l_0 j_0}(x_k) = F'_{l_0 j_0}(x_k)\varphi(x), \ x_k \in \tilde{J}.$$

Derivando a expressão acima com respeito à variável x_{j_0} e utilizando a segunda expressão do sistema (2.18) obtemos que $\varphi_{,j_0}(x) = 0$, em $\tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, visto que $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$ e $\tilde{J} \subset I$. Consequentemente $\varphi_{,l_0 j_0}(x) = \varphi_{,j_0 l_0}(x) = 0$, em $\tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, o que da terceira equação de (2.18) nos fornece $F_{l_0 j_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \tilde{J}$, já que $\varphi \neq 0$. Sendo este um absurdo. Provando assim a Afirmação I.1.

Desta forma, temos que existe i_0, tal que i_0, l_0, j_0 são distintos, com $F_{i_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in \tilde{J}$, para algum intervalo $\tilde{J} \subset I$. Como $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, temos que $F_{l_0 j_0}(x_k)$, $x_k \in I$, é uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente. Portanto, existe um intervalo aberto $\tilde{\tilde{J}} \subset \tilde{J}$ tal que $F_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$ e $F_{i_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in \tilde{\tilde{J}}$. Então, da expressão (2.17) obtemos, em $\tilde{\tilde{J}} \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varphi_{,l_0}(x) = \frac{c_{l_0 i_0}}{F_{j_0 i_0}(x_k)}\varphi_{,j_0}(x), \ \forall x_k \in \tilde{\tilde{J}}. \tag{2.19}$$

Observamos que $c_{l_0 i_0} \neq 0$, pois caso contrário, utilizando a expressão (2.19) e (2.13), obteríamos $F_{l_0 j_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \tilde{\tilde{J}}$, o que é uma contradição.

Derivando a expressão (2.19), com respeito à variável x_{j_0}, como $j_0 \neq k$, e utilizando a expressão de $\varphi_{,l_0 j_0}(x)$ dada pelo sistema (2.13) obtemos, em $\tilde{\tilde{J}} \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varphi_{,j_0 j_0}(x) = \frac{\varepsilon_{j_0} F_{l_0 j_0}(x_k) F_{j_0 i_0}(x_k)}{(n-2)c_{l_0 i_0}}\varphi(x), \ x_k \in \tilde{\tilde{J}}. \tag{2.20}$$

Tomando $j = l_0$ em (2.15) temos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varepsilon_k c_{l_0 k} \varphi_{,j_0}(x) = \varepsilon_{j_0} F'_{l_0 j_0}(x_k)\varphi(x) + \varepsilon_{j_0} F_{l_0 j_0}(x_k)\varphi_{,k}(x), \ x_k \in I. \tag{2.21}$$

Derivando a equação (2.21), com respeito à variável x_{j_0}, e utilizando a expressão de $\varphi_{,kj_0}(x)$ dada pelo o sistema (2.13) chegamos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, a

$$\varepsilon_k c_{l_0 k} \varphi_{,j_0 j_0}(x) = \varepsilon_{j_0} F'_{l_0 j_0}(x_k)\varphi_{,j_0}(x) + \frac{F_{l_0 j_0}(x_k) F_{k j_0}(x_k)}{n-2}\varphi(x), \ x_k \in I.$$

Substituindo a expressão de $\varphi_{,j_0 j_0}(x)$ obtida em (2.20) obtemos, em $\tilde{\tilde{J}} \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\frac{\varphi_{,j_0}(x)}{\varphi(x)} = \frac{c_{k l_0} F_{j_0 l_0}(x_k) F_{j_0 i_0}(x_k) - c_{l_0 i_0} F_{l_0 j_0}(x_k) F_{k j_0}(x_k)}{(n-2)\varepsilon_{j_0} c_{l_0 i_0} F'_{l_0 j_0}(x_k)} = A(x_k), \ x_k \in \tilde{\tilde{J}}.$$

Afirmação I.2: Não existe intervalo $\bar{W} \subset \tilde{\tilde{J}}$ tal que $A(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{W}$.

De fato, suponhamos que exista um intervalo $\bar{W} \subset \tilde{\tilde{J}}$, tal que $A(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{W}$. Dessa forma temos que $\varphi_{,j_0}(x) = 0$, em $\bar{W} \times \mathbb{R}^{n-1}$, e consequentemente da segunda equação do sistema (2.13) temos que $F_{l_0 j_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{W}$, o que é uma contradição já que por hipótese $F'_{l_0 j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$ e $\bar{W} \subset I$. Provando assim a Afirmação I.2.

Então, existe um intervalo $\bar{J} \subset \tilde{\tilde{J}}$ tal que $A(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in \bar{J}$. Dessa forma temos, em $\bar{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varphi(x) = \exp\left[A(x_k)x_{j_0} + B(\hat{x}_{j_0})\right], \ x_k \in \bar{J}, \tag{2.22}$$

onde $B(\hat{x}_{j_0})$ é uma função que não depende da variável x_{j_0}. Derivando a expressão de $\varphi(x)$, dada por (2.22), com respeito às variáveis x_k e x_{j_0} obtemos, em $\bar{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varphi_{,k}(x) = \left[A'(x_k)x_{j_0} + (B(\hat{x}_{j_0}))_{,k}\right]\varphi(x),$$

$$\varphi_{,j_0}(x) = A(x_k)\varphi(x), \ x_k \in \bar{J}.$$

Substituindo estas na equação (2.21) chegamos a

$$\varepsilon_{j_0} F_{l_0 j_0}(x_k)\left[(A(x_k))' x_{j_0} + (B(\hat{x}_{j_0}))_{,k}\right] = \varepsilon_k c_{l_0 k} A(x_k) - \varepsilon_{j_0} F'_{l_0 j_0}(x_k), \ x_k \in \bar{J}.$$

Derivando esta com respeito à variável x_{j_0} temos que $\varepsilon_{j_0} F_{l_0 j_0}(x_k) A'(x_k) = 0$, $x_k \in \bar{J}$.

Afirmação I.3**:** Temos que $A'(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{J}$.

De fato, caso contrário, existiria $x_k^0 \in \bar{J}$ tal que $A'(x_k^0) \neq 0$, portanto existiria um intervalo $\bar{\bar{J}} \subset \bar{J}$ tal que $A'(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in \bar{\bar{J}}$. Então teríamos $F_{l_0j_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{\bar{J}}$ e $\bar{\bar{J}} \subset \tilde{J} \subset I$, o que é um absurdo. Logo temos que $A'(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{J}$.

Assim obtemos que

$$A(x_k) = \alpha \neq 0,\ \forall x_k \in \bar{J}.$$

Então, segue de (2.22) que a expressão da função φ reduz-se a

$$\varphi(x) = \exp\left[\alpha x_{j_0} + B(\hat{x}_{j_0})\right],\ x \in \bar{J} \times \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.23}$$

Calculando as derivadas da expressão (2.23) com respeito às variáveis x_{l_0} e x_{j_0}, e substituindo na equação (2.19), chegamos a

$$(B(\hat{x}_{j_0}))_{,l_0} = \frac{\alpha c_{l_0i_0}}{F_{j_0i_0}(x_k)},\ x_k \in \bar{J}.$$

Donde obtemos que

$$B(\hat{x}_{j_0}) = \frac{\alpha c_{l_0i_0}}{F_{j_0i_0}(x_k)} x_{l_0} + D(\hat{x}_{j_0}, \hat{x}_{l_0}),\ x_k \in \bar{J}, \tag{2.24}$$

onde $D(\hat{x}_{j_0}, \hat{x}_{l_0})$ é uma função que não depende das variáveis x_{l_0} e x_{j_0}. Substituindo (2.24) na equação (2.23) temos, em $\bar{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varphi(x) = \exp\left[\alpha x_{j_0} + \frac{\alpha c_{l_0i_0}}{F_{j_0i_0}(x_k)} x_{l_0} + D(\hat{x}_{j_0}, \hat{x}_{l_0})\right]. \tag{2.25}$$

Agora, calculando $\varphi_{,k}(x)$ e $\varphi_{,j_0}(x)$, via equação (2.25) e substituindo na equação (2.21) obtemos, em $\bar{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in \bar{J}$, que

$$\frac{\alpha c_{l_0i_0}\varepsilon_{j_0} F_{l_0j_0}(x_k) F'_{j_0i_0}(x_k)}{(F_{j_0i_0}(x_k))^2} x_{l_0} + \varepsilon_k c_{l_0k}\alpha - \varepsilon_{j_0} F'_{l_0j_0}(x_k) - \varepsilon_{j_0} F_{l_0j_0}(x_k)(D(\hat{x}_{j_0}, \hat{x}_{l_0}))_{,k} = 0.$$

Derivando esta com respeito à variável x_{l_0} temos que $F_{l_0j_0}(x_k) F'_{j_0i_0}(x_k) = 0$, $x_k \in \bar{J}$.

Afirmação I.4**:** Temos $F'_{i_0j_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{J}$.

De fato, caso contrário, existiria $x_k^0 \in \bar{J}$ tal que $F'_{i_0j_0}(x_k^0) \neq 0$, portanto existiria um intervalo $\bar{\bar{J}} \subset \bar{J}$ tal que $F'_{i_0j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in \bar{\bar{J}}$. Então teríamos que $F_{l_0j_0}(x_k) = 0$,

$x_k \in \bar{\bar{J}} \subset \bar{J} \subset I$. Sendo este um absurdo, pois por hipótese $F'_{l_0j_0}(x_k) \neq 0$, $x_k \in I$. Assim temos que $F'_{j_0i_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{J}$.

Assim obtemos que $F_{j_0i_0}(x_k) = b \neq 0$, $\forall x_k \in \bar{J}$. Então substituindo na expressão (2.25) obtemos

$$\varphi(x) = \exp\left[\alpha x_{j_0} + \frac{\alpha c_{l_0i_0}}{b} x_{l_0} + D(\hat{x}_{j_0}, \hat{x}_{l_0})\right], \; x \in \bar{J} \times \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.26}$$

Calculando a derivada de segunda ordem da expressão (2.26) com respeito às variáveis x_{j_0} e x_{l_0} e utilizando a expressão de $\varphi_{,l_0j_0}(x)$ dada no sistema (2.13) obtemos que

$$F_{l_0j_0}(x_k) = \frac{\alpha^2(n-2)\varepsilon_{j_0}c_{l_0i_0}}{b}, \; x_k \in \bar{J}.$$

Ou seja, $F'_{l_0j_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \bar{J} \subset I$, o que é um absurdo.

Caso II: Suponhamos que $l_0 = k$.

Da expressão (2.14), com $j = k$, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\varepsilon_{j_0} F_{kj_0}(x_k)\varphi_{,l}(x) = \varepsilon_l c_{kl} \varphi_{,j_0}(x), \tag{2.27}$$

$\forall l$ tais que l, j_0, k são distintos.

Afirmação II.1**:** Temos que $F_{jj_0}(x_k) = 0$, $\forall j$ tais que j, j_0, k são distintos e $\forall x_k \in I$.

De fato, caso contrário existiriam um intervalo $\bar{Z} \subset I$ e um índice m_0, tal que m_0, k, j_0 são distintos, tais que a função $F_{m_0j_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in \bar{Z}$. Como $F'_{kj_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, temos que $F_{kj_0}(x_k)$ é uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente. Portanto, existe um intervalo $Z \subset \bar{Z}$ tal que $F_{kj_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in Z$. Observamos que $c_{m_0k} \neq 0$, pois caso contrário teríamos de (2.27), com $l = m_0$, que $\varphi_{m_0}(x) = 0$, $\forall x \in Z \times \mathbb{R}^{n-1}$. E assim, da segunda equação de (2.13) teríamos que $F_{m_0j_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in Z$, o que é um absurdo. Agora, em (2.27), consideramos $l = m_0$ e derivamos esta com respeito à variável x_k, obtendo, em $Z \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varphi_{,m_0k}(x) = -\frac{c_{m_0k}F'_{j_0k}(x_k)}{(F_{j_0k}(x_k))^2}\varphi_{,j_0}(x) + \frac{c_{m_0k}}{F_{j_0k}(x_k)}\varphi_{,j_0k}(x), \; x_k \in Z.$$

Substituindo as expressões de $\varphi_{,m_0k}(x)$ e de $\varphi_{,j_0k}(x)$, obtidas no sistema (2.13), chegamos, em $Z \times \mathbb{R}^{n-1}$, a

$$c_{m_0k}F'_{j_0k}(x_k)\varphi_{,j_0}(x) = 0, \;\; x_k \in Z.$$

Temos por hipótese que $F'_{j_0k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, e $Z \subset I$. Assim, da expressão acima obtemos que $\varphi_{,j_0}(x) = 0$, $\forall x \in Z \times \mathbb{R}^{n-1}$. Logo temos que $\varphi_{,j_0k}(x) = 0$, $\forall x \in Z \times \mathbb{R}^{n-1}$. Da segunda expressão do sistema (2.13), considerando $i = k$, obtemos que $F_{kj_0}(x_k) = 0$, $x_k \in Z \subset I$, o que é um absurdo. Demonstrando assim a Afirmação II.1.

Então, temos que

$$F_{jj_0}(x_k) = 0, \;\; \forall x_k \in I,$$

$\forall j$ tais que j, k, j_0 são distintos, que é o expresso em (2.7). Com isso, reescrevemos o sistema (2.13), em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, sob a forma

$$\begin{cases} \varepsilon_i F_{ii}(x_k) & = (n-2)\frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \;\; i = 1, .., n, \\ \varphi_{,ij_0}(x) & = 0, \;\; \forall i \text{ tais que } i, k, j_0 \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,kj_0}(x) & = \frac{\varepsilon_{j_0} F_{kj_0}(x_k)}{n-2}\varphi(x), \\ \varphi_{,jl}(x) & = \frac{\varepsilon_l c_{jl}}{n-2}\varphi(x), \;\; \forall l, j \text{ tais que } l, j, j_0 \text{ são distintos}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Derivando a terceira expressão do sistema (2.28) com respeito à variável x_i, $\forall i$ tais que i, k, j_0 são distintos, e a segunda expressão do mesmo sistema com respeito à variável x_k, e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, isto é, $\varphi_{,kj_0i}(x) = \varphi_{,ij_0k}(x)$, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$F_{kj_0}(x_k)\varphi_{,i}(x) = 0, \;\; x_k \in I, \tag{2.29}$$

$\forall i$ tais que i, k, j_0 são distintos.

Afirmação II.2: Temos que $\varphi_{,i}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$, e $\forall i$ tais que i, k, j_0 são distintos.

De fato, caso contrário existiriam i_1, tal que i_1, k, j_0 são distintos, um intervalo aberto $\tilde{Z} \subset I$ e um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, tais que $\varphi_{,i_1}(x) \neq 0$, $\forall x \in \tilde{Z} \times U$. Portanto de (2.29) teríamos que $F_{kj_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \tilde{Z}$. Neste caso, $F'_{kj_0}(x_k) = F'_{l_0 j_0}(x_k) = 0$, $\forall x_k \subset \tilde{Z} \subset I$, o que contradiz a hipótese do teorema.

Assim temos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varphi_{,i}(x) = 0,$$

$\forall i$ tais que i, k, j_0 são distintos. Dessa forma, temos que em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi(x) = \varphi(x_k, x_{j_0})$, $x_k \in I$. O que nos fornece da quarta equação de (2.28) que $c_{lj} = 0$, $\forall l, j$, tais que l, j, j_0 são distintos. Comprovando o que foi expresso em (2.8). Logo o sistema (2.28), em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, reduz-se a

$$\begin{cases} F_{ii}(x_k) &= (n-2)\varepsilon_i \frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \ i = k \text{ ou } i = j_0, \\ F_{ll}(x_k) &= \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \ \forall l \text{ tais que } l, k, j_0 \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,ij_0}(x) &= 0, \ \forall i \text{ tais que } i, k, j_0 \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,kj_0}(x) &= \frac{\varepsilon_{j_0} F_{kj_0}(x_k)}{n-2}\varphi(x), \\ \varphi_{,jl}(x) &= 0, \ \forall l, j \text{ tal que } l, j, j_0 \text{ são distintos}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Agora, temos que, $\forall r_0$ tal que r_0, k, j_0 são distintos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$F_{kk}(x_k) - F_{r_0 r_0}(x_k) = \frac{(n-2)\varepsilon_k \varphi_{,kk}(x)}{\varphi(x)}, \tag{2.31}$$

$$F_{j_0 j_0}(x_k) - F_{r_0 r_0}(x_k) = \frac{(n-2)\varepsilon_{j_0} \varphi_{,j_0 j_0}(x)}{\varphi(x)}. \tag{2.32}$$

Derivando a equação (2.31), com respeito à variável x_{j_0} temos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\varphi_{,kkj_0}(x) = \frac{\varphi_{,kk}(x)\varphi_{,j_0}(x)}{\varphi(x)}.$$

Considerando a derivada da quarta expressão do sistema (2.30), com respeito à variável x_k, isto é, calculando $\varphi_{,kj_0k}(x)$ e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, $\varphi_{,kj_0k}(x) = \varphi_{,kkj_0}(x)$, juntamente com a expressão de $\varphi_{,kk}(x)$, dada em (2.31), obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$\varepsilon_k [F_{kk}(x_k) - F_{r_0 r_0}(x_k)]\varphi_{,j_0}(x) = \varepsilon_{j_0} F'_{kj_0}(x_k)\varphi(x) + \varepsilon_{j_0} F_{kj_0}(x_k)\varphi_{,k}(x).$$

Derivando esta equação com respeito à variável x_{j_0}, utilizando a expressão de $\varphi_{,kj_0}(x)$, dada pelo sistema (2.30), e também utilizando a expressão de $\varphi_{,j_0j_0}(x)$, dada por (2.32), temos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\frac{\varphi_{,j_0}(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varepsilon_k[F_{kk}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)][F_{j_0j_0}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)] - (F_{kj_0}(x_k))^2\varepsilon_{j_0}}{(n-2)F'_{kj_0}(x_k)}. \tag{2.33}$$

Lembramos que $F'_{kj_0}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$. Observando que o lado direito da equação (2.33) é uma função que depende somente da variável x_k, derivamos esta, com respeito à variável x_{j_0} e obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\left(\frac{\varphi_{,j_0}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,j_0} = 0.$$

Então, sendo $\varphi(x) = \varphi(x_k, x_{j_0})$, obtemos da expressão acima que, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$\varphi(x) = \exp\left[x_{j_0}M(x_k) + L(x_k)\right], \tag{2.34}$$

onde

$$M(x_k) = \frac{\varepsilon_k[F_{kk}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)][F_{j_0j_0}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)] - (F_{kj_0}(x_k))^2\varepsilon_{j_0}}{(n-2)F'_{kj_0}(x_k)}$$

é não nula devido à quarta equação de (2.30). Considerando a derivada de segunda ordem da equação (2.34), com respeito às variáveis x_k e x_{j_0} e utilizando a expressão de $\varphi_{,kj_0}(x)$ dada no sistema (2.30) obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$x_{j_0}M(x_k)M'(x_k) = \frac{\varepsilon_{j_0}F_{kj_0}(x_k)}{n-2} - M'(x_k) - L'(x_k)M(x_k). \tag{2.35}$$

Derivando esta com respeito à variável x_{j_0} temos que

$$M(x_k)(M(x_k))' = 0,\ \ x_k \in I.$$

isto é, $[M^2(x_k)]' = 0$, portanto $M(x_k) = a \neq 0$, $\forall x_k \in I$.

Voltando a equação (2.35), temos que

$$F_{j_0k}(x_k) = \varepsilon_k a(n-2)L'(x_k),\ \ x_k \in I.$$

Sendo este o expresso em (2.9). Obtemos também que, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$\varphi(x) = \exp\Bigg[ax_{j_0} + L(x_k)\Bigg],$$

onde $a \neq 0$, $L(x_k)$ é diferenciável com $L''(x_k) \neq 0$, $L'(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, já que $F'_{kj_0}(x_k) \neq 0$. Concluímos que vale (2.12). Assim obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\begin{aligned}
\varphi_{,k}(x) &= L'(x_k)\varphi(x),\\
\varphi_{,j_0}(x) &= a\varphi(x),\\
\varphi_{,kk}(x) &= \Bigg[L''(x_k) + (L'(x_k))^2\Bigg]\varphi(x),\\
\varphi_{,j_0j_0}(x) &= a^2\varphi(x).
\end{aligned}$$

De posse dessas expressões e das expressões para $\|\nabla_g\varphi\|^2$ e para $\Delta_g\varphi$, dadas em (2.5), conseguimos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que,

$$\frac{\|\nabla_g\varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2} = a^2\varepsilon_{j_0} + \varepsilon_k(L'(x_k))^2,$$

$$\frac{\Delta_g\varphi(x)}{\varphi(x)} = a^2\varepsilon_{j_0} + \varepsilon_k(L'(x_k))^2 + \varepsilon_k L''(x_k).$$

Agora substituindo todas essas expressões na primeira e na segunda equação do sistema (2.30), obtemos, $x_k \in I$, que,

$$F_{kk}(x_k) = (n-1)\varepsilon_k L''(x_k) - (n-2)\varepsilon_{j_0}a^2,$$

$$F_{ll}(x_k) = \varepsilon_k L''(x_k) + (n-2)\varepsilon_{j_0}a^2(\delta_{j_0 l} - 1) - \varepsilon_k(n-2)(L'(x_k))^2,$$

$\forall l$ tais que l e k são distintos. Que são as expressões dadas em (2.10) e (2.11).

Reciprocamente, para cada $a \neq 0$ e cada função $L(x_k)$ diferenciável com $L''(x_k) \neq 0$, $L'(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, sejam $F_{jj_0}(x_k)$, $\forall j$ tais que j, k, j_0 são distintos, c_{lj}, $\forall l, j$ tais que l, j, j_0 são distintos, $F_{j_0k}(x_k)$, $F_{kk}(x_k)$, $F_{ll}(x_k)$, $\forall l$ tais que l e k são distintos, definidos por (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11) respectivamente. Então, o tensor T está definido por (2.6) e a função φ definida por (2.12) satisfaz (2.13) e, portanto, fornece métrica $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tal que $Ric\ \bar{g} = T$.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Segundo Caso, $j_0 = k$

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados que tratam do problema (2.1) e (2.2), para o caso em que o índice j_0 é igual ao índice k. Ou seja, trataremos do seguinte problema:

Sejam $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\forall i = 1, ..., n$ e T um tensor simétrico de ordem 2, definido em $\mathbb{R}^n$ por

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j,$$

onde k é fixo, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i \neq j$ e $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$ tais que i, j, k são distintos, com $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Além disso, assumimos que existem um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $l_0 \neq k$ tais que $F'_{l_0 k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$.

Dividiremos o estudo deste problema em 3 casos:

(A) As constantes $c_{ij} = 0$, $\forall i, j$, tais que i, j, k são distintos;

(B) A dimensão $n = 3$ e a constante $c_{l_0 i_0} \neq 0$, onde i_0, k, l_0, são distintos;

(C) A dimensão $n \geq 4$, existem índices i_0, n_0 tais que i_0, k, n_0 são distintos onde $c_{i_0 n_0} \neq 0$.

3.1 As constantes $c_{ij} = 0$, $\forall i, j$, tais que i, j, k são distintos

Nesta seção, apresentaremos um resultado que trata do caso **(A)**, ou seja, todas as constantes $c_{ij} = 0, \forall i, j$, tais que i, j, k são distintos. Observando, que neste caso o tensor T tem a seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 F_{11}(x_k) & 0 & \dots & \varepsilon_k F_{1k}(x_k) & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 F_{22}(x_k) & \dots & \varepsilon_k F_{2k}(x_k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 F_{k1}(x_k) & \varepsilon_2 F_{k2}(x_k) & \dots & \varepsilon_k F_{kk}(x_k) & \dots & \varepsilon_n F_{kn}(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_k F_{nk}(x_k) & \dots & \varepsilon_n F_{nn}(x_k) \end{pmatrix}$$

Teorema 3.1. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\forall i = 1, ..., n$. Considere o tensor*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j, \tag{3.1}$$

onde temos k fixo, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i \neq j$ e $F_{ij}(x_k) = 0$, $\forall i, j$ tais que i, j, k são distintos. Assuma que existem um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $l_0 \neq k$ tais que $F'_{l_0 k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$. Então, existe métrica $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ tal que Ric $\bar{g} = T$ se, e somente se, existe uma função diferenciável $L(x_k)$ tal que $L'(x_k) \neq 0$ e $L''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, e em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$F_{l_0 k}(x_k) = a\varepsilon_k (n-2) L'(x_k), \tag{3.2}$$

$$F_{jk}(x_k) = 0, \ \forall j \neq k, l_0, \tag{3.3}$$

$$F_{kk}(x_k) = (n-1)\varepsilon_k L''(x_k) - (n-2)\varepsilon_{l_0} a^2, \tag{3.4}$$

$$F_{ll}(x_k) = \varepsilon_k L''(x_k) + (n-2)\varepsilon_{l_0} a^2 (\delta_{l_0 l} - 1) - \varepsilon_k (n-2)(L'(x_k))^2, \ \forall l \neq k, \tag{3.5}$$

$$\varphi(x) = \exp\left[ax_{l_0} + L(x_k)\right], \tag{3.6}$$

$a \neq 0$.

Demonstração. Encontrar métricas conformes, $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tais que $Ric\,\bar{g} = T$, é equivalente a estudar o sistema (2.4). Sob as hipóteses do nosso teorema, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, temos que as equações deste sistema se reduzem a

$$\begin{cases} \varepsilon_i F_{ii}(x_k) & = (n-2)\frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2},\ i = 1, .., n, \\ \varphi_{,ik}(x) & = \frac{\varepsilon_k F_{ik}(x_k)}{n-2}\varphi(x),\ \forall i \text{ tais que } i, k \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,jl}(x) & = 0,\ \forall j, l \text{ tais que } l, j, k \text{ são distintos.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Utilizando a comutatividade da derivada de terceira ordem da função $\varphi(x)$, isto é, $\varphi_{,ikj}(x) = \varphi_{,ijk}(x)$, com $\forall i, j$ tais que i, j, k são distintos, dadas através do sistema (3.7) obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$F_{ik}(x_k)\varphi_{,j}(x) = 0,\ \forall i, j \text{ tais que } i, j, k \text{ são distintos.} \tag{3.8}$$

Tomando $i = l_0$ temos de (3.8) que, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$F_{l_0k}(x_k)\varphi_{,j}(x) = 0,\ \forall j \text{ tais que } j, l_0, k \text{ são distintos.}$$

Afirmação 1: Temos que $\varphi_{,j}(x) = 0$, $\forall j$ tais que j, k, l_0 são distintos e $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$.

De fato, suponha que existem $(x_k^0, y^0) \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$ e j_1 distinto de k, l_0 tais que $\varphi_{,j_1}(x_k^0, y^0) \neq 0$. Então existem um intervalo $J \subset I$ e um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tais que $\varphi_{,j_1}(x) \neq 0$, $\forall x \in J \times U$. Portanto $F_{l_0k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in J$. Então, temos que $F'_{l_0k}(x_k) = 0$, $x_k \in J \subset I$, o que é um absurdo. Assim provamos a Afirmação 1.

Com isso obtemos que $\varphi(x) = \varphi(x_k, x_{l_0})$. Segue de (3.7) que as funções $F_{jk}(x_k)$, $x_k \in I$, $\forall j$ tais que j, k, l_0 são distintos, são nulas. Que é o expresso em (3.3). Assim reescrevemos o sistema (3.7), em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, sob a forma

$$\begin{cases} F_{ii}(x_k) &= (n-2)\varepsilon_i \frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2},\ i = k \text{ ou } i = l_0, \\ F_{ll}(x_k) &= \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2},\ \forall l \text{ tais que } l, l_0, k \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,ik}(x) &= 0,\ \forall i \text{ tais que } i, l_0, k \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,l_0k}(x) &= \frac{\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k)}{n-2}\varphi(x), \\ \varphi_{,jl}(x) &= 0,\ \forall l, j \text{ tais que } l, j, k \text{ são distintos}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Agora, temos que, $\forall r_0$ tal que r_0, k, l_0 são distintos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$F_{kk}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k) = \frac{(n-2)\varepsilon_k \varphi_{,kk}(x)}{\varphi(x)}, \tag{3.10}$$

$$F_{l_0l_0}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k) = \frac{(n-2)\varepsilon_{l_0} \varphi_{,l_0l_0}(x)}{\varphi(x)}. \tag{3.11}$$

Derivando a equação (3.10), com respeito à variável x_{l_0} temos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\varphi_{,kkl_0}(x) = \frac{\varphi_{,kk}(x)\varphi_{,l_0}(x)}{\varphi(x)}.$$

Considerando a derivada da quarta expressão do sistema (3.9), com respeito à variável x_k, isto é, calculando $\varphi_{,l_0kk}(x)$ e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, $\varphi_{,l_0kk}(x) = \varphi_{,kkl_0}(x)$, juntamente com a expressão de $\varphi_{,kk}(x)$, dada em (3.10), obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$[F_{kk}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)]\varphi_{,l_0}(x) = F'_{l_0k}(x_k)\varphi(x) + F_{l_0k}(x_k)\varphi_{,k}(x).$$

Derivando esta equação com respeito à variável x_{l_0}, utilizando a expressão de $\varphi_{,l_0k}(x)$, dada pelo sistema (3.9), e também utilizando a expressão de $\varphi_{,l_0l_0}(x)$, dada por (3.11), temos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\frac{\varphi_{,l_0}(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varepsilon_{l_0}[F_{kk}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)][F_{l_0l_0}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)] - (F_{l_0k}(x_k))^2\varepsilon_k}{(n-2)F'_{l_0k}(x_k)}. \tag{3.12}$$

Lembramos que $F'_{l_0k}(x_k) \neq 0$, $x_k \in I$. Observando que o lado direito da equação (3.12) é uma função que depende somente da variável x_k, derivamos esta, com respeito à variável x_{l_0} e obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, que

$$\left(\frac{\varphi_{,l_0}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,l_0} = 0.$$

Então, sendo $\varphi(x) = \varphi(x_k, x_{l_0})$, obtemos da expressão acima que, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$\varphi(x) = \exp\left[x_{l_0} M(x_k) + L(x_k)\right], \tag{3.13}$$

onde

$$M(x_k) = \frac{\varepsilon_{l_0}[F_{kk}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)][F_{l_0l_0}(x_k) - F_{r_0r_0}(x_k)] - (F_{l_0k}(x_k))^2\varepsilon_k}{(n-2)F'_{l_0k}(x_k)}.$$

Fazendo a derivada de segunda ordem da equação (3.13), com respeito às variáveis x_k e x_{l_0} e utilizando a expressão de $\varphi_{,l_0k}(x)$ dada no sistema (3.9) concluímos que, $\forall x_k \in I$,

$$x_{l_0} M(x_k) M'(x_k) = \frac{\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k)}{n-2} - M'(x_k) - L'(x_k)M(x_k). \tag{3.14}$$

Derivando esta com respeito à variável x_{l_0} temos que

$$M(x_k)M'(x_k) = 0, \ \forall x_k \in I, \tag{3.15}$$

isto é, $(M^2(x_k))' = 0$, $\forall x_k \in I$ e portanto $M(x_k) = a$, $x_k \in I$. Observamos que $M(x_k) = a \neq 0$, $\forall x_k \in I$, pois caso contrário, da equação (3.14) teríamos $F_{l_0k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in I$, o que é um absurdo.

Voltando a equação (3.14), temos que

$$F_{l_0k}(x_k) = a\varepsilon_k(n-2)L'(x_k), \ \forall x_k \in I,$$

sendo que a função $L(x_k)$ é diferenciável e que $L''(x_k) \neq 0$, $L'(x_k) = 0$, $\forall x_k \in I$, já que $F'_{l_0k}(x_k) \neq 0$, em I. Então chegamos que, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$\varphi(x) = \exp\left[a x_{l_0} + L(x_k)\right],$$

$a \neq 0$, que é a expressão dada em (3.6). Desta expressão obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{,k}(x) &= L'(x_k)\varphi(x), \\
\varphi_{,l_0}(x) &= a\varphi(x), \\
\varphi_{,kk}(x) &= \left[L''(x_k) + (L'(x_k))^2\right]\varphi(x), \\
\varphi_{,l_0l_0}(x) &= a^2\varphi(x).
\end{aligned}$$

De posse dessas expressões e das expressões para $\|\nabla_g \varphi\|^2$ e para $\Delta_g \varphi$, dadas em (2.5), conseguimos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2} = a^2 \varepsilon_{l_0} + \varepsilon_k (L'(x_k))^2,$$

$$\frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} = a^2 \varepsilon_{l_0} + \varepsilon_k (L'(x_k))^2 + \varepsilon_k L''(x_k).$$

Agora substituindo todas essas expressões na primeira e na segunda equação do sistema (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} F_{kk}(x_k) &= (n-1)\varepsilon_k L''(x_k) - (n-2)\varepsilon_{l_0} a^2, \\ F_{ll}(x_k) &= \varepsilon_k L''(x_k) + (n-2)\varepsilon_{l_0} a^2 (\delta_{l_0 l} - 1) - \varepsilon_k (n-2)(L'(x_k))^2, \end{aligned}$$

$\forall l$ tais que l e k são distintos, que são as expressões dadas em (3.5)e (3.4), respectivamente.

Reciprocamente, para cada $a \neq 0$ e cada função $L(x_k)$ diferenciável, com $L''(x_k) \neq 0$, $L'(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, sejam $F_{l_0 k}(x_k)$, $F_{ll}(x_k)$, $\forall l$ tais que l e k são distintos, $F_{kk}(x_k)$ e $F_{jk}(x_k)$, $\forall j$ tais que j, k, l_0 são distintos, definidos por (3.2), (3.5), (3.4) e (3.3) respectivamente. O tensor T é definido por (3.1). Então a função φ definida por (3.6) satisfaz (3.7) e portanto fornece métrica $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tal que $Ric\ \bar{g} = T$.

■

3.2 A dimensão $n = 3$ e a constante $c_{l_0 i_0} \neq 0$, onde i_0, k, l_0 são distintos

Nesta seção, apresentaremos um resultado que trata do caso de dimensão $n = 3$, onde a constante $c_{l_0 i_0} \neq 0$, e i_0, k, l_0 são distintos. Iremos supor, sem perda de generalidade, para simplificar a notação, que $k = 2$, $l_0 = 1$ e $i_0 = 3$. Observando, que neste caso, o tensor T tem a seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 F_{11}(x_2) & \varepsilon_2 F_{12}(x_2) & \varepsilon_3 c_{13} \\ \\ \varepsilon_1 F_{21}(x_2) & \varepsilon_2 F_{22}(x_2) & \varepsilon_3 F_{23}(x_2) \\ \\ \varepsilon_1 c_{31} & \varepsilon_2 F_{32}(x_2) & \varepsilon_3 F_{33}(x_2) \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2. *Seja* $(\mathbb{R}^3, g)$ *um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$. *Considere o tensor*

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_j F_{ij}(x_2) dx_i \otimes dx_j, \tag{3.16}$$

onde $\varepsilon_j F_{ij}(x_2) = \varepsilon_i F_{ji}(x_2)$, $\forall i \neq j$ *e* $F_{13}(x_2) = c_{13}$. *Assuma que existe um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$ *tal que* $F'_{12}(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in I$ *e que a constante* $c_{13} \neq 0$. *Então, existe métrica* $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ *tal que* $Ric\ \bar{g} = T$ *se, e somente se, existem um intervalo* $J \subset I$ *e uma função diferenciável* $G(x_2)$ *tal que* $G'(x_2) \neq 0$, $G''(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in J$, *e em* $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$,

$$F_{12}(x_2) = \frac{\varepsilon_2 G'(x_2)}{\sqrt{b}}, \ \text{onde } b = \frac{a}{\varepsilon_3 c_{13}} > 0 \ \text{e } a > 0, \tag{3.17}$$

$$F_{32}(x_2) = \frac{a\varepsilon_2 G'(x_2)}{\sqrt{b}}, \tag{3.18}$$

$$F_{11}(x_2) = \sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \varepsilon_2 (G'(x_2))^2 - \frac{\varepsilon_3 a^2}{b}, \tag{3.19}$$

$$F_{22}(x_2) = 2\sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \frac{\varepsilon_1}{b} - \frac{\varepsilon_3 a^2}{b}, \tag{3.20}$$

$$F_{33}(x_2) = \sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \varepsilon_2 (G'(x_2))^2 - \frac{\varepsilon_1}{b}, \tag{3.21}$$

$$\varphi(x) = \alpha \exp\left[\sigma\left(G(x_2) + \frac{1}{\sqrt{b}}(x_1 + a x_3)\right)\right], \ x \in I \times \mathbb{R}^2, \tag{3.22}$$

onde $\alpha > 0$ *e* $\sigma = \pm 1$.

Demonstração. Encontrar métricas conformes, $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tais que $Ric\,\bar{g} = T$, é equivalente a estudar o sistema (2.4). Sob as hipóteses do nosso teorema, temos que as equações deste sistema se reduzem a

$$\begin{cases} \varepsilon_i F_{ii}(x_2) & = \frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - 2\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \; i = 1, 2, 3, \\ \varphi_{,12}(x) & = \varepsilon_2 F_{12}(x_2)\varphi(x), \\ \varphi_{,32}(x) & = \varepsilon_2 F_{32}(x_2)\varphi(x), \\ \varphi_{,13}(x) & = \varepsilon_3 c_{13}\varphi(x), \end{cases} \tag{3.23}$$

$\forall x \in I \times \mathbb{R}^2$, $\forall x_2 \in I$. Derivando a segunda equação do sistema (3.23), com relação à variável x_3, a quarta equação do mesmo sistema, com respeito à variável x_2, e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, isto é, $\varphi_{,123}(x) = \varphi_{,132}(x)$, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in I$, que

$$\varepsilon_2 F_{12}(x_2)\varphi_{,3}(x) = \varepsilon_3 c_{13}\varphi_{,2}(x). \tag{3.24}$$

Derivando a terceira expressão do sistema (3.23), com relação à variável x_1, a quarta expressão do mesmo sistema, com respeito à variável x_2, e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, isto é, $\varphi_{,321}(x) = \varphi_{,132}(x)$, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in I$, que

$$\varepsilon_2 F_{32}(x_2)\varphi_{,1}(x) = \varepsilon_3 c_{13}\varphi_{,2}(x). \tag{3.25}$$

Afirmação 3: Existe $x_2^0 \in I$ tal que $F_{32}(x_2^0) \neq 0$.

De fato, caso contrário $\forall x_2 \in I$ teríamos $F_{32}(x_2) = 0$. De (3.25) teríamos $\varphi_{,2}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^2$. Donde obteríamos $\varphi_{,12}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^2$. Segue da segunda equação do sistema (3.23), como φ não pode se anular, que $F_{12}(x_2) = 0$, $\forall x_2 \in I$. O que contradiz a hipótese $F'_{12}(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in I$. Portanto a Afirmação 3 é verdadeira.

Assim existe $\tilde{J} \subset I$ tal que $F_{32}(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in \tilde{J}$. Além disso, como $F'_{12}(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in I$, temos que a função $F_{12}(x_2)$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente, existe $J \subset \tilde{J} \subset I$ tal que $F_{12}(x_2) \neq 0$ e $F_{32}(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in J$.

Assim conseguimos que, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$,

$$\varphi_{,1}(x) = \frac{\varepsilon_3 c_{13}}{\varepsilon_2 F_{32}(x_2)} \varphi_{,2}(x). \tag{3.26}$$

Derivando (3.24) e (3.26) com respeito à variável x_2, utilizando as expressões de $\varphi_{,32}(x)$ e $\varphi_{,12}(x)$, dadas no sistema (3.23), e utilizando também as expressões de $\varphi_{,3}(x)$ e $\varphi_{,1}(x)$, dadas em (3.24) e (3.26), respectivamente, obtemos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\varphi_{,22}(x)\varepsilon_3 c_{13} = \varepsilon_3 c_{13} \frac{F'_{12}(x_2)}{F_{12}(x_2)} \varphi_{,2}(x) + F_{32}(x_2)F_{12}(x_2)\varphi(x),$$

$$\varphi_{,22}(x)\varepsilon_3 c_{13} = \varepsilon_3 c_{13} \frac{F'_{32}(x_2)}{F_{32}(x_2)} \varphi_{,2}(x) + F_{32}(x_2)F_{12}(x_2)\varphi(x).$$

Comparando as duas expressões acima chegamos a

$$[\log(F_{32}(x_2))]' = [\log(F_{12}(x_2))]', \ x_2 \in J,$$

ou seja,

$$\log(F_{32}(x_2)) = \log(F_{12}(x_2)) + \bar{a}, \ \forall x_2 \in J,$$

onde $\bar{a} \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$F_{32}(x_2) = aF_{12}(x_2), \ \forall x_2 \in J, \ a = e^{\bar{a}} > 0. \tag{3.27}$$

Substituindo a expressão (3.27) na equação (3.26) obtemos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\varphi_{,1}(x) = \frac{\varepsilon_3 c_{13}}{a\varepsilon_2 F_{12}(x_2)} \varphi_{,2}(x). \tag{3.28}$$

Agora, derivando a equação (3.24), com respeito à variável x_3 e a equação (3.28), com respeito à variável x_1, obtemos, respectivamente que, em $J \times \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_{,33}(x) = a\varepsilon_3 c_{13}\varphi(x), \tag{3.29}$$

$$\varphi_{,11}(x) = \frac{\varepsilon_3 c_{13}}{a} \varphi(x). \tag{3.30}$$

E derivando a equação (3.24) ou a equação (3.28), com respeito à variável x_2, temos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\varphi_{,22}(x) = \frac{F'_{12}(x_2)}{F_{12}(x_2)}\varphi_{,2}(x) + \frac{a}{\varepsilon_3 c_{13}}(F_{12}(x_2))^2\varphi(x). \tag{3.31}$$

Dessa forma, utilizando as expressões para $\|\nabla_g\varphi\|^2$ e para $\Delta_g\varphi$, dadas em (2.5), obtemos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\frac{\|\nabla_g\varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2} = \left(\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)}\right)^2 Q(x_2),$$

$$\frac{\Delta_g\varphi(x)}{\varphi(x)} = \varepsilon_2\frac{F'_{12}(x_2)}{F_{12}(x_2)}\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)} + ac_{13} + \frac{c_{31}}{a} + \frac{\varepsilon_2 a}{\varepsilon_3 c_{13}}(F_{12}(x_2))^2,$$

onde

$$Q(x_2) = \varepsilon_2 + \varepsilon_1\left(\frac{c_{13}}{aF_{12}(x_2)}\right)^2 + \varepsilon_3\left(\frac{c_{13}}{F_{12}(x_2)}\right)^2.$$

Substituindo estes na primeira equação do sistema (3.23), com $i = 3$, temos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\varepsilon_2\frac{F'_{12}(x_2)}{F_{12}(x_2)}\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)} - 2Q(x_2)\left(\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)}\right)^2 = F_{33}(x_2) - 2ac_{13} - \frac{c_{31}}{a} - \frac{\varepsilon_2 a}{\varepsilon_3 c_{13}}(F_{12}(x_2))^2. \tag{3.32}$$

Como o lado direito da equação (3.32) só depende da variável x_2, derivamos esta com respeito à variável x_l, $l = 1, 3$, e obtemos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\left(\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,l}\left[\varepsilon_2\frac{F'_{12}(x_2)}{F_{12}(x_2)} - 4Q(x_2)\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)}\right] = 0, \; l = 1, 3. \tag{3.33}$$

Afirmação 4: Temos que $\left(\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,l} = 0$, $\forall x \in J \times \mathbb{R}^2$, $l = 1, 3$.

De fato, caso contrário, fixado $l = 1, 3$, existe $x^0 \in J \times \mathbb{R}^2$ tal que $\left(\frac{\varphi_{,2}(x^0)}{\varphi(x^0)}\right)_{,l} \neq 0$, portanto existiria uma vizinhança de x^0, $\check{J} \times U \subset J \times \mathbb{R}^2$, onde $\left(\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,l} \neq 0$, $\forall x \in \check{J} \times U$. Segue de (3.33) que

$$\varepsilon_2\frac{F'_{12}(x_2)}{F_{12}(x_2)} = 4Q(x_2)\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)}, \; \forall x \in \check{J} \times U.$$

Derivando esta com respeito à variável x_l, obteríamos que $Q(x_2) = 0$, $\forall x_2 \in \check{J}$. Assim teríamos que $F'_{12}(x_2) = 0$, $\forall x_2 \in \check{J} \subset I$, o que contradiz a hipótese de que $F'_{12}(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in I$. Assim demonstramos a Afirmação 4.

Logo, temos que

$$\varphi_{,2l}(x)\varphi(x) = \varphi_{,2}(x)\varphi_{,l}(x),\ \forall x \in J \times \mathbb{R}^2,\ l = 1, 3.$$

Utilizando as expressões de $\varphi_{,21}(x)$ e $\varphi_{,23}(x)$, dadas pelo sistema (3.23) e as expressões de $\varphi_{,1}(x)$ e $\varphi_{,3}(x)$, dadas em (3.28) e (3.24) respectivamente, obtemos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\left(\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)}\right)^2 = b(\varepsilon_2 F_{12}(x_2))^2,$$

onde $b = \frac{a}{\varepsilon_3 c_{13}} > 0$. Logo, temos que

$$\frac{\varphi_{,2}(x)}{\varphi(x)} = \sigma\sqrt{b}\varepsilon_2 F_{12}(x_2),$$

onde $\sigma = \pm 1$. Então, temos que, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$,

$$\varphi(x) = \exp\left[\sigma G(x_2) + H(x_1, x_3)\right], \tag{3.34}$$

onde $F_{12}(x_2) = \frac{\varepsilon_2 G'(x_2)}{\sqrt{b}}$, sendo que $G(x_2)$ é uma função diferenciável com $G''(x_2) \neq 0$, $G'(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in J$, pela escolha do intervalo $J \subset I$ e $\sigma = \pm 1$. Calculando a derivada de segunda ordem da equação (3.34), com respeito às variáveis x_2 e x_3, e utilizando a expressão de $\varphi_{,23}(x)$ dada no sistema (3.23) obtemos que

$$\Big(H(x_1, x_3)\Big)_{,3} = \frac{a\sigma}{\sqrt{b}}.$$

E calculando a derivada de segunda ordem da equação (3.34), com respeito às variáveis x_2 e x_1, e utilizando a expressão de $\varphi_{,21}(x)$ dada no sistema (3.23) obtemos que

$$\Big(H(x_1, x_3)\Big)_{,1} = \frac{\sigma}{\sqrt{b}}.$$

Assim,

$$H(x_1, x_3) = \frac{\sigma}{\sqrt{b}}(x_1 + a x_3) + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Com isso, temos que, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$,

$$\varphi(x) = \alpha \exp\left[\sigma\left(G(x_2) + \frac{1}{\sqrt{b}}(x_1 + ax_3)\right)\right],$$

onde $G(x_2)$ é uma função diferenciável com $G''(x_2) \neq 0$, $G'(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in J$, $b = \frac{a}{\varepsilon_1 c_{31}} > 0$, $a > 0$, $\alpha > 0$ e $\sigma = \pm 1$. Portanto, obtivemos (3.22). Dessa expressão obtemos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\begin{aligned}
\varphi_{,2}(x) &= \sigma G'(x_2)\varphi(x),\\
\varphi_{,1}(x) &= \tfrac{\sigma}{\sqrt{b}}\varphi(x),\\
\varphi_{,3}(x) &= \tfrac{a\sigma}{\sqrt{b}}\varphi(x),\\
\varphi_{,22}(x) &= [\sigma G''(x_2) + (G'(x_2))^2]\varphi(x),\\
\varphi_{,11}(x) &= \tfrac{1}{b}\varphi(x),\\
\varphi_{,33}(x) &= \tfrac{a^2}{b}\varphi(x).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Dessa forma, utilizando as expressões para $\|\nabla_g \varphi\|^2$ e para $\Delta_g \varphi$, dadas em (2.5), conseguimos, em $J \times \mathbb{R}^2$, $x_2 \in J$, que

$$\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2} = \varepsilon_2 (G'(x_2))^2 + \frac{\varepsilon_1}{b} + \frac{\varepsilon_3 a^2}{b},$$

$$\frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} = \varepsilon_2 \sigma G''(x_2) + \varepsilon_2 (G'(x_2))^2 + \frac{\varepsilon_1}{b} + \frac{\varepsilon_3 a^2}{b}.$$

Utilizando a primeira expressão de (3.23) obtemos que, $\forall x_2 \in J$,

$$\begin{aligned}
F_{11}(x_2) &= \sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \varepsilon_2 (G'(x_2))^2 - \frac{a^2\varepsilon_3}{b},\\
F_{22}(x_2) &= 2\sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \frac{\varepsilon_1}{b} - \frac{a^2\varepsilon_3}{b},\\
F_{33}(x_2) &= \sigma\varepsilon_2 G''(x_2) - \varepsilon_2 (G'(x_2))^2 - \frac{\varepsilon_1}{b}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Reciprocamente, escolhendo a função $G(x_2)$ diferenciável, com $G''(x_2) \neq 0$, $G'(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in I$, as constantes $a > 0$, σ, $c_{31} \neq 0$, tais que a constante b, definida em (3.17), seja positiva, sejam $F_{12}(x_2)$, $F_{32}(x_2)$, $F_{11}(x_2)$, $F_{22}(x_2)$ e $F_{33}(x_2)$ definidas em (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21), respectivamente. O tensor T é definido por (3.16). Então a função φ definida por (3.22), satisfaz o sistema (3.23) e portanto fornece métrica $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tal que $Ric\ \bar{g} = T$.

$\blacksquare$

3.3 A dimensão $n \geq 4$ e existem n_0, i_0 tais que n_0, i_0, k são distintos, com $c_{i_0 n_0} \neq 0$

Nesta seção, apresentaremos resultados que tratam do caso **(C)**. Ou seja, existem índices n_0, i_0 tais que n_0, i_0, k são distintos, com a constante $c_{i_0 n_0} \neq 0$.

Primeiramente observamos que existem duas possibilidades:

(C1) Os índices i_0 e n_0 são ambos distintos de l_0, isto é, n_0, i_0, l_0, k são distintos e $c_{il_0} = 0$, $\forall i$ tais que i, k, l_0 são distintos;

(C2) O índice i_0 é igual a l_0 ou o índice n_0 é igual a l_0, que são equivalentes.

Afirmação 5: A possibilidade **(C1)** não ocorre.

De fato, para a possibilidade **(C1)** o nosso problema reduz-se a considerar: $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 4$, um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\forall i = 1, ..., n$ e T um tensor simétrico de ordem 2, definido em $\mathbb{R}^n$ por

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j,$$

onde temos k fixo, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i \neq j$ e $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$, tais que i, j, k são distintos, com $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Assuma que existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e índices l_0, n_0, i_0, tais que l_0, n_0, i_0, k são distintos, tais que $F'_{l_0 k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, $c_{i_0 n_0} \neq 0$ e que $c_{il_0} = 0$, $\forall i$ tais que i, k, l_0 são distintos.

Observamos, que neste caso, o tensor T tem a seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix}
\varepsilon_1 F_{11}(x_k)\ldots & \varepsilon_k F_{1k}(x_k)\ \ldots & 0\ \ldots & \varepsilon_{n_0} c_{1n_0}\ \cdots & \varepsilon_{i_0} c_{1i_0}\ \cdots & \varepsilon_n c_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\varepsilon_1 F_{k1}(x_k)\ \ldots & \varepsilon_k F_{kk}(x_k)\ \ldots & \varepsilon_{l_0} F_{kl_0}(x_k)\ \ldots & \varepsilon_{n_0} F_{kn_0}(x_k)\ \ldots & \varepsilon_{i_0} F_{ki_0}(x_k)\ \ldots & \varepsilon_n F_{kn}(x_k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\ \ldots & \varepsilon_k F_{l_0k}(x_k)\ \ldots & \varepsilon_{l_0} F_{l_0l_0}(x_k)\ \ldots & 0\ \ldots & 0\ \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\varepsilon_1 c_{n_01}\ \cdots & \varepsilon_k F_{n_0k}(x_k)\ \ldots & 0\ \ldots & \varepsilon_{n_0} F_{n_0n_0}(x_k)\ \ldots & \varepsilon_{i_0} c_{n_0i_0}\ \cdots & \varepsilon_n c_{n_0n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\varepsilon_1 c_{i_01}\ \cdots & \varepsilon_k F_{i_0k}(x_k)\ \ldots & 0\ \ldots & \varepsilon_{n_0} c_{i_0n_0}\ \cdots & \varepsilon_{i_0} F_{i_0i_0}(x_k)\ \ldots & \varepsilon_n c_{i_0n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\varepsilon_1 c_{n1}\ \cdots & \varepsilon_k F_{nk}(x_k)\ \ldots & 0\ \ldots & \varepsilon_{n_0} c_{nn_0}\ \cdots & \varepsilon_{i_0} c_{ni_0}\ \cdots & \varepsilon_n F_{nn}(x_k)
\end{pmatrix}$$

Encontrar métricas conformes, $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tais que $Ric\ \bar{g} = T$, é equivalente a estudar o sistema (2.4). Para o problema acima temos que as equações deste sistema , em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, reduzem-se a

$$\begin{cases}
\varepsilon_i F_{ii}(x_k) & = (n-2)\frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2},\ i = 1,..,n, \\
\varphi_{,il_0}(x) & = 0,\ \forall i \text{ tais que } i, k, l_0 \text{ são distintos}, \\
\varphi_{,ik}(x) & = \frac{\varepsilon_k F_{ik}(x_k)}{n-2}\varphi(x),\ \forall i \text{ tais que } i, k \text{ são distintos}, \\
\varphi_{,ij}(x) & = \frac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2}\varphi(x),\ \forall i, j \text{ tais que } i, j, k, l_0 \text{ são distintos}.
\end{cases} \tag{3.37}$$

Temos da segunda expressão do sistema acima, considerando ,$i = i_0$, que $\varphi_{,i_0l_0}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$. Portanto, da comutatividade das derivadas de terceira ordem e da quarta equação do sistema (3.37), temos que

$$0 = \varphi_{,i_0l_0n_0}(x) = \varphi_{,i_0n_0l_0}(x) = \frac{\varepsilon_{n_0} c_{i_0n_0}}{n-2}\varphi_{,l_0}(x),\ \forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Assim, temos que $\varphi_{,l_0}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$, já que por hipótese $c_{i_0n_0} \neq 0$. Dessa forma, $\varphi_{,l_0k}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$. Mas da terceira equação do sistema (3.37) obtemos que $F_{l_0k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in I$, o que é um absurdo, visto que por hipótese $F'_{l_0k}(x_k) \neq 0$, $x_k \in I$. Logo, a possibilidade **(C**1**)** não ocorre.

Então tratemos agora da possibilidade **(C**2**)**. Suponhamos que $n_0 = l_0$, ou seja estamos com $c_{l_0i_0} \neq 0$, onde i_0, l_0, k são distintos. A seguir apresentaremos dois teoremas que tratam dessa possibilidade. No primeiro, vamos considerar a existência de uma constante $c_{l_0r_0} \neq 0$, onde i_0, l_0, r_0, k são distintos. No segundo teorema vamos considerar o caso em que $c_{l_0j} = 0$, $\forall j$ tal que j, i_0, k, l_0 são distintos.

Teorema 3.3. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 4$ *um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas* $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\forall i = 1, ..., n$. *Considere o tensor*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j, \tag{3.38}$$

onde temos k fixo, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i \neq j$ *e* $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$, *tais que* i, j, k *são distintos. Assuma que existem um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$ *e* l_0, i_0, r_0, *tais que* i_0, l_0, r_0, k *são distintos, onde* $F'_{l_0k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, $c_{l_0i_0} \neq 0$ *e* $c_{l_0r_0} \neq 0$. *Então, existe métrica* $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ *tal que* $Ric\ \bar{g} = T$ *se, e somente se,* $c_{i_0r_0} \neq 0$, *e existe uma função diferenciável* $G(x_k)$, *definida em um intervalo* $J \subset I$, *tal que* $G''(x_k) \neq 0$, $G'(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, *e em* $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$,

$$F_{l_0k}(x_k) = \varepsilon_k \sqrt{d(n-2)} G'(x_k), \tag{3.39}$$

$$F_{jk}(x_k) = \varepsilon_{l_0} \varepsilon_k c_{jl_0} \sqrt{\frac{n-2}{d}} G'(x_k), \ \forall j \text{ tais que } j, l_0, k \text{ são distintos }, \tag{3.40}$$

$$\varepsilon_i c_{si} = \frac{c_{sl_0} c_{il_0}}{d}, \ \forall i, s \text{ tais que } i, s, k, l_0, \text{ são distintos }, \tag{3.41}$$

$$d = \frac{\varepsilon_{l_0} c_{i_0l_0} c_{l_0r_0}}{c_{i_0r_0}} > 0, \tag{3.42}$$

$$F_{kk}(x_k) = \sigma \varepsilon_k (n-1) G''(x_k) - \varepsilon_{l_0} d - \frac{1}{d} \sum_{j \neq k, l_0} \varepsilon_j (c_{jl_0})^2, \tag{3.43}$$

$$F_{l_0l_0}(x_k) = \sigma \varepsilon_k G''(x_k) - \varepsilon_k (n-2)(G'(x_k))^2 - \frac{1}{d} \sum_{j \neq k, l_0} \varepsilon_j (c_{jl_0})^2, \tag{3.44}$$

$$F_{ll}(x_k) = \sigma \varepsilon_k G''(x_k) - \varepsilon_k (n-2)(G'(x_k))^2 - \varepsilon_{l_0} d - \frac{1}{d} \sum_{j \neq k, l_0, l} \varepsilon_j (c_{jl_0})^2, \tag{3.45}$$

$\forall l$ tais que l, k, l_0 são distintos,

$$\varphi(x) = \alpha \exp\left[\sigma\Big(G(x_k) + H(\hat{x}_k)\Big)\right], \tag{3.46}$$

onde $\alpha > 0$, $\sigma = \pm 1$ e

$$H(\hat{x}_k) = x_{l_0}\sqrt{\frac{d}{n-2}} + \frac{\varepsilon_{l_0}}{\sqrt{d(n-2)}} \sum_{m \neq k, l_0} c_{ml_0} x_m. \tag{3.47}$$

Demonstração. Encontrar métricas conformes, $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tais que $Ric\ \bar{g} = T$, é equivalente a estudar o sistema (2.4). Sob as hipóteses do nosso teorema temos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que as equações deste sistema se reduzem a

$$\begin{cases} \varepsilon_i F_{ii}(x_k) & = (n-2)\frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \ i = 1, .., n, \\ \varphi_{,ik}(x) & = \frac{\varepsilon_k F_{ik}(x_k)}{n-2}\varphi(x), \ \forall i \text{ tais que } i, k \text{ são distintos }, \\ \varphi_{,ij}(x) & = \frac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2}\varphi(x), \ \forall i, j \text{ tais que } i, j, k \text{ são distintos.} \end{cases} \tag{3.48}$$

Derivando a segunda equação do sistema (3.48), com relação à variável x_j, $\forall i, j$ tais que i, j, k são distintos, a terceira equação do mesmo sistema, com respeito à variável x_k, e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, isto é, $\varphi_{,ikj}(x) = \varphi_{,ijk}(x)$, $\forall i, j$ tais que i, j, k são distintos, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\varepsilon_k F_{ik}(x_k)\varphi_{,j}(x) = \varepsilon_j c_{ij}\varphi_{,k}(x), \ \forall i, j \text{ tais que } i, j, k \text{ são distintos.} \tag{3.49}$$

Temos por hipótese que existem i_0, l_0 tais que i_0, l_0, k são distintos, onde $F'_{l_0 k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$ e $c_{l_0 i_0} \neq 0$. Então considerando $i = l_0$ em (3.49) obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\varepsilon_k F_{l_0 k}(x_k)\varphi_{,j}(x) = \varepsilon_j c_{l_0 j}\varphi_{,k}(x), \ \forall j \text{ tais que } j, l_0, k \text{ são distintos .} \tag{3.50}$$

E considerando $i = i_0$ e $j = l_0$ em (3.49) temos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\varepsilon_k F_{i_0 k}(x_k)\varphi_{,l_0}(x) = \varepsilon_{l_0} c_{i_0 l_0}\varphi_{,k}(x).$$

Afirmação 6: Existe um $x_k^0 \in I$, tal que $F_{i_0 k}(x_k^0) \neq 0$.

De fato, caso contrário teríamos $F_{i_0k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in I$. Sendo $c_{l_0i_0} \neq 0$, então teríamos que $\varphi_{,k}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$. Donde obtemos que $\varphi_{,kl_0}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$. Da segunda equação do sistema (3.48), considerando $i = l_0$, obteríamos que $F_{l_0k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in I$, o que é um absurdo, visto que por hipótese $F'_{l_0k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$. Portanto vale a Afirmação 6.

Logo existe um intervalo $\tilde{J} \subset I$, tal que $F_{i_0k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in \tilde{J}$. Sendo assim, obtemos, em $\tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in \tilde{J}$, que

$$\varphi_{,l_0}(x) = \frac{\varepsilon_{l_0} c_{i_0l_0}}{\varepsilon_k F_{i_0k}(x_k)} \varphi_{,k}(x). \tag{3.51}$$

Afirmação 7: Existe $x^0 \in \tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\varphi_k(x^0) \neq 0$.

De fato, caso contrário teríamos $\varphi_k(x) = 0$, $\forall x \in \tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, e portanto $\varphi_{kl_0}(x) = 0$, $\forall x \in \tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Mas de (3.48) teríamos $F_{l_0k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \tilde{J}$, o que é uma contradição, visto que por hipótese $F'_{l_0k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$ e $\tilde{J} \subset I$. Portanto vale a Afirmação 7.

Logo existem um intervalo $\bar{J} \subset \tilde{J}$ e um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ onde $F_{i_0k}(x_k) \neq 0$ e $\varphi_k(x) \neq 0$, $\forall x_k \in \bar{J}$ e $\forall x \in \bar{J} \times U$.

Considerando $j = l_0$ em (3.49) e substituindo (3.51) nesta, obtemos, em $\bar{J} \times U$, $x_k \in \bar{J}$, que

$$F_{ik}(x_k) = \frac{c_{il_0}}{c_{i_0l_0}} F_{i_0k}(x_k), \ \forall i \text{ tais que } i, k, l_0 \text{ são distintos }. \tag{3.52}$$

Temos também que existe $r_0 \neq k, l_0, i_0$ tal que $c_{l_0r_0} \neq 0$. Além disso, como $F'_{l_0k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, temos que $F_{l_0k}(x_k)$ é uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente. Portanto existe um intervalo $J \subset \bar{J}$ onde $F_{l_0k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$. Observamos que considerando em (3.49), $j = r_0$ e $i = l_0$, obtemos que $\varphi_{,r_0}(x) \neq 0$, $x \in J \times U$. Considerando, $j = r_0$ e $i = i_0$, em (3.49), obtemos que $c_{i_0r_0} \neq 0$. Então, considerando $j = r_0$ em (3.50) e substituindo este em (3.49), com $j = r_0$ e $i = i_0$, obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$F_{i_0k}(x_k) = \frac{c_{i_0r_0}}{c_{l_0r_0}} F_{l_0k}(x_k), \ \forall x_k \in I \text{ e } c_{i_0r_0} \neq 0. \tag{3.53}$$

Assim, substituindo (3.53) em (3.51) e (3.52) obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\begin{aligned} \varphi_{,l_0}(x) &= \frac{d}{\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k)} \varphi_{,k}(x), \\ F_{ik}(x_k) &= \frac{\varepsilon_{l_0} c_{il_0}}{d} F_{l_0k}(x_k), \ \forall i \text{ tais que } i, l_0, k \text{ são distintos }, \end{aligned} \tag{3.54}$$

onde $d = \frac{\varepsilon_{l_0} c_{i_0l_0} c_{l_0r_0}}{c_{i_0r_0}}$.

De (3.50) e (3.54) temos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\begin{aligned} \varphi_{,jj}(x) &= \frac{(c_{l_0j})^2}{d(n-2)} \varphi(x), \ \forall j \text{ tais que } j, k, l_0 \text{ são distintos }, \\ \varphi_{,l_0l_0}(x) &= \frac{d}{n-2} \varphi(x), \\ \varphi_{,kk}(x) &= \frac{(F_{l_0k}(x_k))^2}{d(n-2)} \varphi(x) + \frac{F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} \varphi_{,k}(x) \end{aligned}$$

Substituindo estas nas expressões para $\|\nabla_g \varphi\|^2$ e para $\Delta_g \varphi$, dadas em (2.5), obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2} = \left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} \right)^2 N(x_k),$$

onde

$$N(x_k) = \varepsilon_k + \frac{\varepsilon_{l_0} d^2}{(F_{l_0k}(x_k))^2} + \frac{1}{(F_{l_0k}(x_k))^2} \sum_{j \neq k, l_0} \varepsilon_j (c_{l_0j})^2,$$

$$\frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varepsilon_k (F_{l_0k}(x_k))^2}{d(n-2)} + \frac{\varepsilon_{l_0} d}{n-2} + \frac{\varepsilon_k F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} \frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} + \frac{1}{d(n-2)} \sum_{j \neq k, l_0} \varepsilon_j (c_{l_0j})^2.$$

Agora, para m tal que m, k, l_0 são distintos, da primeira expressão de (3.48), temos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\begin{aligned} & F_{mm}(x_k) - \frac{\varepsilon_m (c_{l_0m})^2}{d} - \frac{\varepsilon_k (F_{l_0k}(x_k))^2}{d(n-2)} - \frac{\varepsilon_{l_0} d}{n-2} - \frac{1}{d(n-2)} \sum_{j \neq k, l_0} \varepsilon_j (c_{l_0j})^2 = \\ & \frac{\varepsilon_k F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} \frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} - (n-1) \left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} \right)^2 N(x_k). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Observamos que o lado esquerdo da equação (3.55) depende somente da variável x_k, assim derivando esta com respeito à variável x_s, com s distinto de k, obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} \right)_{,s} \left[\frac{\varepsilon_k F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} - 2(n-1) \frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} N(x_k) \right] = 0,$$

$\forall s$ tal que s e k são distintos.

Afirmação 8**:** Temos que $\left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,s} \neq 0$, $\forall x \in J \times U$ e $\forall s$ tal que $s \neq k$.

De fato, caso contrário existiria s_0 distinto de k, tal que $\left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,s_0} \neq 0$, para algum $x^0 \in J \times U$, então teríamos, em algum aberto $\tilde{\tilde{J}} \times B \subset J \times U$, $x_k \in \tilde{\tilde{J}}$, que

$$\frac{\varepsilon_k F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} = 2(n-1)\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)}N(x_k).$$

Derivando esta expressão com respeito à variável x_{s_0} temos que $N(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \tilde{\tilde{J}}$, ou seja, a função $F'_{l_0k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \tilde{\tilde{J}} \subset I$, o que é um absurdo. Portanto vale a Afirmação 8 e temos que

$$\varphi_{,ks}(x)\varphi(x) = \varphi_{,k}(x)\varphi_{,s}(x),\ \forall s \text{ tais que } s, k \text{ são distintos },$$

e $\forall x \in J \times U$. Donde, utilizando (3.48), (3.51) e (3.53) obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)}\right)^2 = \frac{(\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k))^2}{d(n-2)}.$$

Observamos que devemos ter $d > 0$. Assim, em $J \times U$, $x_k \in J$,

$$\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} = \sigma\frac{\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k)}{\sqrt{d(n-2)}},$$

onde $\sigma = \pm 1$. Assim, em $J \times U$, $x_k \in J$,

$$\varphi(x) = \exp\left[\sigma G(x_k) + H(\hat{x}_k)\right], \tag{3.56}$$

onde $F_{l_0k}(x_k) = \varepsilon_k\sqrt{d(n-2)}G'(x_k)$, sendo $G(x_k)$ uma função diferenciável com $G'(x_k) \neq 0$ e $G''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, $H(\hat{x}_k)$ é uma função que não depende da variável x_k e $\sigma = \pm 1$.

Agora vamos caracterizar a função $H(\hat{x}_k)$. Calculando a derivada de segunda ordem da equação (3.56), com respeito às variáveis x_k e x_j, $\forall j$ tais que j, k são distintos, e utilizando a expressão de $\varphi_{,kj}(x)$, $x \in J \times U$, dada no sistema (3.48), obtemos que

$$(H(\hat{x}_k))_{,j} = \frac{\sigma\varepsilon_{l_0}c_{jl_0}}{\sqrt{d(n-2)}},\ \forall j \text{ tais que } j, k, l_0 \text{ são distintos },$$

$$(H(\hat{x}_k))_{,l_0} = \sigma\sqrt{\frac{d}{n-2}}.$$

Então, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$,

$$H(\hat{x}_k) = \sigma\left[\sqrt{\frac{d}{n-2}}x_{l_0} + \frac{\varepsilon_{l_0}}{\sqrt{d(n-2)}}\sum_{j\neq k,l_0} c_{jl_0}x_j\right] + a,$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Agora observamos que calculando a derivada de segunda ordem da equação (3.56), com respeito às variáveis x_s e x_i, com s, i, k, l_0 distintos, e utilizando a expressão de $\varphi_{,si}(x)$, dada no sistema (3.48) chegamos a

$$\varepsilon_i c_{si} = \frac{c_{sl_0}c_{il_0}}{d}, \ \forall s, i \text{ tais que } i, s, k, l_0 \text{ são distintos.}$$

Que é o expresso em (3.41).

Com isso temos que, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$,

$$\varphi(x) = \alpha \exp\left[\sigma\Big(G(x_k) + H(\hat{x}_k)\Big)\right],$$

onde $G(x_k)$ é uma função diferenciável com $G'(x_k) \neq 0$, $G''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$,

$$H(\hat{x}_k) = \sqrt{\frac{d}{n-2}}x_{l_0} + \frac{\varepsilon_{l_0}}{\sqrt{d(n-2)}}\sum_{j\neq k,l_0} c_{jl_0}x_j,$$

$d = \frac{\varepsilon_{l_0}c_{i_0l_0}c_{l_0r_0}}{c_{i_0r_0}} > 0$, $\alpha > 0$ e $\sigma = \pm 1$. Dessa expressão obtemos, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$, que

$$\begin{aligned}
\varphi_{,k}(x) \quad &= \sigma G'(x_k)\varphi(x),\\
\varphi_{,l_0}(x) \quad &= \sigma\sqrt{\tfrac{d}{n-2}}\varphi(x),\\
\varphi_{,j}(x) \quad &= \tfrac{\sigma\varepsilon_{l_0}c_{jl_0}}{\sqrt{d(n-2)}}\varphi(x), \ \forall j \neq k, l_0,\\
\varphi_{,kk}(x) \quad &= \left[\sigma G''(x_k) + (G'(x_k))^2\right]\varphi(x),\\
\varphi_{,l_0l_0}(x) \quad &= \tfrac{d}{n-2}\varphi(x),\\
\varphi_{,jj}(x) \quad &= \tfrac{(c_{jl_0})^2}{d(n-2)}\varphi(x), \ \forall j \neq k, l_0.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Substituindo estas nas expressões de $\|\nabla_g\varphi\|^2$ e para $\Delta_g\varphi$, dadas em (2.5), obtemos, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$, que

$$\frac{\|\nabla_g\varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2} = \varepsilon_k(G'(x_k))^2 + \frac{\varepsilon_{l_0}d}{n-2} + \frac{1}{d(n-2)}\sum_{j\neq k,l_0}\varepsilon_j(c_{jl_0})^2,$$

$$\frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} = \varepsilon_k \sigma G''(x_k) + \varepsilon_k (G'(x_k))^2 + \frac{\varepsilon_{l_0} d}{n-2} + \frac{1}{d(n-2)} \sum_{j \neq k, l_0} \varepsilon_j (c_{jl_0})^2.$$

Agora substituindo estes na primeira expressão do sistema (3.48), obtemos, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$, que

$$\begin{aligned}
F_{kk}(x_k) &= \sigma \varepsilon_k (n-1) G''(x_k) - \varepsilon_{l_0} d - \frac{1}{d} \sum_{j \neq k, l_0} \varepsilon_j (c_{jl_0})^2, \\
F_{l_0 l_0}(x_k) &= \sigma \varepsilon_k G''(x_k) - \varepsilon_k (n-2)(G'(x_k))^2 - \frac{1}{d} \sum_{j \neq k, l_0} \varepsilon_j (c_{jl_0})^2, \\
F_{ll}(x_k) &= \sigma \varepsilon_k G''(x_k) - \varepsilon_k (n-2)(G'(x_k))^2 - \varepsilon_{l_0} d - \frac{1}{d} \sum_{j \neq k, l_0, l} \varepsilon_j (c_{jl_0})^2,
\end{aligned}$$

$\forall l$, tais que l, k, l_0 são distintos, que é o expresso em (3.43), (3.44) e (3.45) respectivamente.

Reciprocamente, escolhendo a função $G(x_k)$ diferenciável, com $G'(x_k) \neq 0$, $G''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, as constantes $c_{l_0 i_0} \neq 0$, $c_{l_0 r_0} \neq 0$, $c_{i_0 r_0} \neq 0$, σ e $c_{jl_0} \in \mathbb{R}$, $\forall j$ tais que j, k, l_0, i_0, r_0 são distintos, sejam $F_{l_0 k}(x_k)$, $F_{lk}(x_k)$, $\forall l$ tais que l, k, l_0 são distintos, definidas em (3.39) e (3.40), c_{si}, $\forall s, i$ tais que s, i, k, l_0 são distintos, definidos em (3.41), $d > 0$ definido em (3.42), $F_{kk}(x_k)$, $F_{l_0 l_0}(x_k)$ e $F_{jj}(x_k)$, $\forall j$ tais que j, k, l_0 são distintos, definidas em (3.43), (3.44), (3.45) respectivamente. O tensor T é determinado por (3.38). Então a função φ definida por (3.46), satisfaz o sistema (3.48) e portanto fornece métrica $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tal que $Ric\ \bar{g} = T$.

■

Agora apresentaremos um resultado que trata do caso em que temos $c_{l_0 i_0} \neq 0$, onde l_0, i_0 são tais que l_0, i_0, k são distintos e $c_{l_0 j} = 0$, $\forall j$ tais que j, k, l_0, i_0 são distintos.

Teorema 3.4. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 4$ um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\forall i = 1, ..., n$. Considere o tensor*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j, \tag{3.58}$$

onde temos k fixo, $\varepsilon_j F_{ij}(x_k) = \varepsilon_i F_{ji}(x_k)$, $\forall i \neq j$ *e* $F_{ij}(x_k) = c_{ij}$, $\forall i, j$ *tais que* i, j, k *são distintos. Assuma que existem um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$ *e* l_0, i_0 *tais que* i_0, l_0, k *são distintos, para os quais* $F'_{l_0 k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, $c_{l_0 i_0} \neq 0$ *e que as constantes* $c_{l_0 j} = 0$, $\forall j$ *tais que* j, k, l_0, i_0 *são distintos. Então, existe métrica* $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ *tal que* $Ric\ \bar{g} = T$ *se, e somente se, existe uma função diferenciável* $G(x_k)$ *definida em um intervalo* $J \subset I$ *tal que* $G'(x_k) \neq 0$ *e* $G''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, *e em* $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$,

$$F_{l_0 k}(x_k) = \frac{\varepsilon_k G'(x_k)}{\sqrt{p}}, \tag{3.59}$$

$$F_{jk}(x_k) = 0,\ \forall j \text{ tais que } j, l_0, k, i_0 \text{são distintos },\tag{3.60}$$

$$c_{ij} = 0,\ \forall i, j \text{ tais que } i, j, k, l_0 \text{ são distintos}, \tag{3.61}$$

$$F_{i_0 k}(x_k) = \frac{a\varepsilon_k G'(x_k)}{\sqrt{p}},\ a > 0, \tag{3.62}$$

$$p = \frac{a}{(n-2)\varepsilon_{i_0} c_{l_0 i_0}} > 0, \tag{3.63}$$

$$F_{kk}(x_k) = \sigma\varepsilon_k (n-1) G''(x_k) - \frac{\varepsilon_{l_0}}{p(n-2)} - \frac{\varepsilon_{i_0} a^2}{p(n-2)}, \tag{3.64}$$

$$F_{jj}(x_k) = \sigma\varepsilon_k G''(x_k) - (n-2)\varepsilon_k (G'(x_k))^2 + (\delta_{jl_0} - 1)\frac{\varepsilon_{l_0}}{p(n-2)} + (\delta_{ji_0} - 1)\frac{\varepsilon_{i_0} a^2}{p(n-2)}, \tag{3.65}$$

$\forall j$ *tais que* j *e* k *são distintos,*

$$\varphi(x) = \alpha \exp\left[\sigma\left(G(x_k) + \frac{x_{l_0} + a x_{j_0}}{\sqrt{p}(n-2)}\right)\right], \tag{3.66}$$

onde $\alpha > 0$ *e* $\sigma = \pm 1$.

Demonstração. Encontrar métricas conformes, $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tais que $Ric\ \bar{g} = T$, é equivalente a estudar o sistema (2.4). Sob as hipóteses do nosso teorema, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, temos que as equações deste sistema se reduzem a

$$\begin{cases} \varepsilon_i F_{ii}(x_k) & = (n-2)\frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2},\ i = 1, .., n, \\ \varphi_{,ik}(x) & = \frac{\varepsilon_k F_{ik}(x_k)}{n-2}\varphi(x),\ \forall i \text{ tais que } i, k \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,ll_0}(x) & = 0,\ \forall l \text{ tais que } l, k, l_0, i_0 \text{ são distintos}, \\ \varphi_{,l_0 i_0}(x) & = \frac{\varepsilon_{i_0} c_{l_0 i_0}}{n-2}\varphi(x), \\ \varphi_{,ij}(x) & = \frac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2}\varphi(x),\ \forall i, j \text{ tais que } i, j, k, l_0 \text{ são distintos.} \end{cases} \tag{3.67}$$

Derivando a terceira equação do sistema (3.67), com respeito à variável x_{i_0} e a quarta equação do mesmo sistema, com respeito à variável x_l, $\forall l$ tais que l, k, l_0, i_0 são distintos, e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, isto é, $\varphi_{,ll_0i_0}(x) = \varphi_{,l_0i_0l}(x)$, $\forall l$ tais que l, k, l_0, i_0 são distintos, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $\forall x_k \in I$, que

$$\varphi_{,l}(x) = 0, \ \forall l \text{ tais que } l, k, l_0, i_0 \text{ são distintos.}$$

Assim, temos que $\varphi(x) = \varphi(x_k, x_{l_0}, x_{i_0})$. Dessa forma, da segunda e da quinta equação do sistema (3.67) temos que $F_{lk}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in I$, $\forall l$ tais que l, k, l_0, i_0 são distintos, e que $c_{ij} = 0$, $\forall i, j$ tais que i, j, k, l_0 são distintos, que é o expresso em (3.60) e (3.61), respectivamente. Então o sistema (3.67), em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, reduz-se a

$$\begin{cases} \varepsilon_i F_{ii}(x_k) & = (n-2)\frac{\varphi_{,ii}(x)}{\varphi(x)} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\varepsilon_i \frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \ i = k, l_0, i_0, \\ F_{jj}(x_k) & = \frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} - (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2}, \ \forall j \text{ tais que } j, k, l_0, i_0 \text{ são distintos,} \\ \varphi_{,ik}(x) & = \frac{\varepsilon_k F_{ik}(x_k)}{n-2}\varphi(x), \ i = l_0, i_0, \\ \varphi_{,ik}(x) & = 0, \ \forall i \text{ tais que } i, k, l_0, i_0 \text{ são distintos,} \\ \varphi_{,ll_0}(x) & = 0, \ \forall l \text{ tais que } l, k, l_0, i_0 \text{ são distintos,} \\ \varphi_{,l_0i_0}(x) & = \frac{\varepsilon_{i_0} c_{l_0i_0}}{n-2}\varphi(x), \\ \varphi_{,ij}(x) & = 0, \ \forall i, j \text{ tais que } i, j, k, l_0 \text{ são distintos.} \end{cases} \tag{3.68}$$

Considerando $i = l_0$ na terceira equação do sistema (3.68) e derivando com respeito à variável x_{i_0} e derivando a sexta equação do mesmo sistema, com respeito à variável x_k, e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, isto é, $\varphi_{,l_0ki_0}(x) = \varphi_{,l_0i_0k}(x)$, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k)\varphi_{,i_0}(x) = \varepsilon_{i_0} c_{l_0i_0} \varphi_{,k}(x). \tag{3.69}$$

Considerando $i = i_0$ na terceira equação do sistema (3.68) e derivando com respeito à variável x_{l_0} e derivando a sexta equação do mesmo sistema, com respeito à variável x_k, e utilizando a comutatividade das derivadas de terceira ordem, isto é, $\varphi_{,i_0kl_0}(x) =$

$\varphi_{,l_0 i_0 k}(x)$, obtemos, em $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, que

$$\varepsilon_k F_{i_0 k}(x_k)\varphi_{,l_0}(x) = \varepsilon_{i_0} c_{l_0 i_0} \varphi_{,k}(x).$$

Afirmação 9**:** Existe $x_k^0 \in I$ tal que $F_{i_0 k}(x_k^0) \neq 0$.

De fato, caso contrário teríamos $F_{i_0 k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in I$. Como $c_{l_0 i_0} \neq 0$ teríamos $\varphi_{,k}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$. Assim $\varphi_{,kl_0}(x) = 0$, $\forall x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$, e da terceira equação do sistema (3.68), com $i = l_0$, teríamos que $F'_{l_0 k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in I$, o que é um absurdo. Logo vale a Afirmação 9.

Portanto existe um intervalo $\tilde{J} \subset I$ tal que $F_{i_0 k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in \tilde{J}$, donde obtemos, em $\tilde{J} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in \tilde{J}$, que

$$\varphi_{,l_0}(x) = \frac{\varepsilon_{i_0} c_{l_0 i_0}}{\varepsilon_k F_{i_0 k}(x_k)} \varphi_{,k}(x). \tag{3.70}$$

Como $F'_{l_0 k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in I$, temos que a função $F_{l_0 k}(x_k)$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Logo existe um intervalo $J \subset \tilde{J} \subset I$ tal que $F_{i_0 k}(x_k) \neq 0$ e $F_{l_0 k}(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$.

Agora, derivando a equação (3.69), com respeito à variável x_{i_0}, e a equação (3.70), com respeito à variável x_{l_0}, e utilizando as expressões de $\varphi_{,ki_0}(x)$ e $\varphi_{,kl_0}(x)$ dadas no sistema (3.68), chegamos, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$, que

$$\varphi_{,i_0 i_0}(x) = \frac{\varepsilon_{i_0} c_{l_0 i_0} F_{i_0 k}(x_k)}{(n-2) F_{l_0 k}(x_k)} \varphi(x), \tag{3.71}$$

$$\varphi_{,l_0 l_0}(x) = \frac{\varepsilon_{i_0} c_{l_0 i_0} F_{l_0 k}(x_k)}{(n-2) F_{i_0 k}(x_k)} \varphi(x). \tag{3.72}$$

Observamos que derivando as equações (3.69) e (3.70) com respeito à variável x_k, e comparando estas, obtemos que

$$\frac{F'_{i_0 k}(x_k)}{F_{i_0 k}(x_k)} = \frac{F'_{l_0 k}(x_k)}{F_{l_0 k}(x_k)},\ \ x_k \in J,$$

onde usamos o fato de que $\varphi_{,k} \neq 0$ em $J \times U$, sendo $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto, que decorre da terceira equação de (3.68). Ou seja,

$$\log[F_{i_0 k}(x_k)] = \log[F_{l_0 k}(x_k)] + \bar{a},\ \ x_k \in J,$$

onde $\bar{a} \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $\forall x_k \in J$,

$$F_{i_0k}(x_k) = aF_{l_0k}(x_k), \ a = e^{\bar{a}} > 0, \tag{3.73}$$

Substituindo esta nas equações (3.70), (3.71) e (3.72), obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, respectivamente

$$\varphi_{,l_0}(x) = \frac{\varepsilon_{i_0} c_{l_0i_0}}{a\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k)} \varphi_{,k}(x), \tag{3.74}$$

$$\varphi_{,i_0i_0}(x) = \frac{a\varepsilon_{i_0} c_{l_0i_0}}{n-2} \varphi(x), \tag{3.75}$$

$$\varphi_{,l_0l_0}(x) = \frac{\varepsilon_{i_0} c_{l_0i_0}}{a(n-2)} \varphi(x). \tag{3.76}$$

Derivando a equação (3.74), com respeito à variável x_k, obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\varphi_{,kk}(x) = \frac{a(F_{l_0k}(x_k))^2}{(n-2)\varepsilon_{i_0} c_{l_0i_0}} \varphi(x) + \frac{F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} \varphi_{,k}(x). \tag{3.77}$$

Assim, das expressões de $\|\nabla_g \varphi\|^2$ e de $\Delta_g \varphi$, dadas em (2.5), chegamos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2} = \left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} \right)^2 Q(x_k),$$

onde

$$Q(x_k) = \varepsilon_k + \frac{\varepsilon_{l_0}(c_{l_0i_0})^2}{a^2(F_{l_0k}(x_k))^2} + \frac{\varepsilon_{i_0}(c_{l_0i_0})^2}{(F_{l_0k}(x_k))^2}, \tag{3.78}$$

$$\frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varepsilon_k F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} \frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} + \frac{\varepsilon_k a(F_{l_0k}(x_k))^2}{\varepsilon_{i_0} c_{l_0i_0}(n-2)} + \frac{c_{i_0l_0}}{a(n-2)} + \frac{ac_{l_0i_0}}{n-2}.$$

Substituindo estes na segunda equação do sistema (3.68), com j tal que j, k, l_0, i_0 são distintos, temos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$F_{jj}(x_k) - \frac{\varepsilon_k a(F_{l_0k}(x_k))^2}{\varepsilon_{i_0} c_{l_0i_0}(n-2)} - \frac{c_{i_0l_0}}{a(n-2)} - \frac{ac_{l_0i_0}}{n-2} = \frac{\varepsilon_k F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} \frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} - (n-1) \left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} \right)^2 Q(x_k). \tag{3.79}$$

Agora, como o lado esquerdo da expressão (3.79) é uma função só da variável x_k, derivamos esta com respeito à variável x_r, $r = l_0, i_0$ e obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} \right)_{,r} \left[\frac{\varepsilon_k F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} - 2(n-1) \frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} Q(x_k) \right] = 0, \ r = l_0, i_0.$$

Afirmação 10**:** Temos que $\left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,r} = 0$, $\forall x \in J \times U$, $r = l_0, i_0$.

De fato, suponhamos que para $r = l_0$ ou $r = i_0$ fixo, existe $x^0 \in J \times U$ tal que $\left(\frac{\varphi_{,k}(x^0)}{\varphi(x^0)}\right)_{,r} \neq 0$. Então existe um aberto $\tilde{J} \times \tilde{U} \subset J \times U$ tal que $\left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)}\right)_{,r} \neq 0$, $\forall x \in \tilde{J} \times \tilde{U}$. Então

$$\frac{\varepsilon_k F'_{l_0k}(x_k)}{F_{l_0k}(x_k)} = 2(n-1)\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)}Q(x_k), \text{ em } \tilde{J} \times \tilde{U}.$$

Derivando esta com respeito à variável x_r obtemos que $Q(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \tilde{J}$, ou seja que a função $F'_{l_0k}(x_k) = 0$, $\forall x_k \in \tilde{J} \subset J \subset I$ o que é um absurdo. Logo vale a Afirmação 10.

Ou seja

$$\varphi_{,kr}(x)\varphi(x) = \varphi_{,k}(x)\varphi_{,r}(x), \; x \in J \times U, \; r = l_0, i_0.$$

Desta obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\left(\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)}\right)^2 = p(\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k))^2,$$

onde $p = \frac{a}{\varepsilon_{i_0} c_{l_0 i_0}(n-2)}$. Observamos que devemos ter $p > 0$. Assim, em $J \times U$, $x_k \in J$,

$$\frac{\varphi_{,k}(x)}{\varphi(x)} = \sigma\sqrt{p}\varepsilon_k F_{l_0k}(x_k),$$

onde $\sigma \pm 1$. Donde obtemos, em $J \times U$, $x_k \in J$, que

$$\varphi(x) = \exp\Big[\sigma G(x_k) + H(x_{i_0}, x_{l_0})\Big], \tag{3.80}$$

onde $F_{l_0k}(x_k) = \frac{\varepsilon_k G'(x_k)}{\sqrt{p}}$, sendo $G(x_k)$ uma função diferenciável, com $G'(x_k) \neq 0$ e $G''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, e $\sigma = \pm 1$. Voltando a equação (3.73) obtemos que

$$F_{i_0k}(x_k) = \frac{a\varepsilon_k G'(x_k)}{\sqrt{p}}, \; a > 0,$$

que é o espresso em (3.62).

Agora caracterizaremos a função $H(x_{i_0}, x_{l_0})$. Calculando a derivada de segunda ordem de (3.80), com respeito às variáveis x_k e x_j, $j = i_0, l_0$, e utilizando a expressão de $\varphi_{,kj}(x)$ dada no sistema (3.68) obtemos, em $J \times U$, que

$$(H(x_{i_0}, x_{l_0}))_{,l_0} = \frac{\sigma}{\sqrt{p}(n-2)},$$

$$(H(x_{i_0}, x_{l_0}))_{,i_0} = \frac{a\sigma}{\sqrt{p}(n-2)}.$$

Então

$$H(x_{i_0}, x_{l_0}) = \frac{\sigma}{\sqrt{p}(n-2)}(ax_{i_0} + x_{l_0}) + b,$$

onde $b \in \mathbb{R}$.

Com isso temos, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$, que

$$\varphi(x) = \alpha \exp\left[\sigma\Big(G(x_k) + H(x_{i_0}, x_{l_0})\Big)\right],$$

onde $G(x_k)$ é uma função diferenciável, com $G'(x_k) \neq 0$ e $G''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, e $H(x_{i_0}, x_{l_0}) = \frac{ax_{i_0}+x_{l_0}}{\sqrt{p}(n-2)}$, $a > 0$, $p = \frac{a}{\varepsilon_{i_0} c_{l_0 i_0}(n-2)} > 0$, $\alpha > 0$ e $\sigma = \pm 1$. Dessa expressão obtemos, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$, que

$$\begin{aligned}
\varphi_{,k}(x) &= \sigma G'(x_k)\varphi(x),\\
\varphi_{,l_0}(x) &= \tfrac{\sigma}{\sqrt{p}(n-2)}\varphi(x),\\
\varphi_{,i_0}(x) &= \tfrac{a\sigma}{\sqrt{p}(n-2)}\varphi(x),\\
\varphi_{,kk}(x) &= \left[\sigma G''(x_k) + (G'(x_k))^2\right]\varphi(x),\\
\varphi_{,l_0 l_0}(x) &= \tfrac{1}{p(n-2)^2}\varphi(x),\\
\varphi_{,i_0 i_0}(x) &= \tfrac{a^2}{p(n-2)^2}\varphi(x).
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Substituindo estas nas expressões de $\|\nabla_g \varphi\|^2$ e para $\Delta_g \varphi$, dadas em (2.5), chegamos, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$, que

$$\frac{\|\nabla_g \varphi(x)\|^2}{(\varphi(x))^2} = \varepsilon_k (G'(x_k))^2 + \frac{\varepsilon_{l_0}}{p(n-2)^2} + \frac{\varepsilon_{i_0} a^2}{p(n-2)^2},$$

$$\frac{\Delta_g \varphi(x)}{\varphi(x)} = \varepsilon_k (G'(x_k))^2 + \sigma\varepsilon_k G''(x_k) + \frac{\varepsilon_{l_0}}{p(n-2)^2} + \frac{\varepsilon_{i_0} a^2}{p(n-2)^2}.$$

Substituindo estes na primeira expressão do sistema (3.68), obtemos, em $J \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in J$,

$$F_{kk}(x_k) = \varepsilon_k \sigma(n-1)G''(x_k) - \frac{\varepsilon_{l_0}}{p(n-2)} - \frac{\varepsilon_{i_0} a^2}{p(n-2)},$$
$$F_{jj}(x_k) = \sigma\varepsilon_k G''(x_k) - (n-2)\varepsilon_k (G'(x_k))^2 + (\delta_{jl_0} - 1)\frac{\varepsilon_{l_0}}{p(n-2)} + (\delta_{ji_0} - 1)\frac{\varepsilon_{i_0} a^2}{p(n-2)},$$

$\forall j$ tais que j, k são distintos.

Reciprocamente, escolhendo a função $G(x_k)$ diferenciável, com $G'(x_k) \neq 0$ e $G''(x_k) \neq 0$, $\forall x_k \in J$, $a > 0$, $c_{l_0 i_0} \neq 0$, $c_{l_0 j} = 0$, $\forall j$ tais que j, k, l_0, i_0 são distintos, e σ, sejam $F_{l_0 k}(x_k)$ definida em (3.59), $F_{ik}(x_k)$, $\forall i$ tais que i, k, l_0, i_0 são distintos, definidas em (3.60), c_{ij}, $\forall i, j$ tais que i, j, k, l_0 são distintos, definidos em (3.61), $F_{i_0 k}(x_k)$ definida em (3.62), $p > 0$ definido em (3.63), $F_{kk}(x_k)$ e $F_{jj}(x_k)$, $\forall j$ tais que j, k são distintos, definidas em (3.64) e (3.65), respectivamente. O tensor T é determinado por (3.58). Então a função $\varphi(x)$, $x \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x_k \in I$, definida por (3.66), satisfaz o sistema (3.68) e portanto fornece métrica $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tal que $Ric\ \bar{g} = T$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Exemplos

Primeiramente vamos enunciar um resultado obtido por R. Pina e K. Tenenblat em [16] que será utilizado neste capítulo.

Teorema A. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, *um espaço pseudo-Euclidiano, com coordenadas* $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \varepsilon_j \delta_{ij}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. *Considere o tensor* $T = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(x_k) dx_i^2$, *para algum* k *fixado. Assuma que nem todas as funções* $f_i(x_k)$ *são constantes e que nem todas são iguais. Então, existe métrica* $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ *tal que* $Ric\ \bar{g} = T$ *se, e somente se, existe uma função diferenciável* $U(x_k)$ *tal que*

$$f_k(x_k) = \varepsilon_k (n-1) U''(x_k), \tag{4.1}$$

$$f_j(x_k) = \varepsilon_k [U''(x_k) - (n-2)(U'(x_k))^2], \ \forall j \neq k, \tag{4.2}$$

$$\varphi = e^{U(x_k)}. \tag{4.3}$$

Demonstração. Ver [16].

■

Observação 4.1. *A função* $U(x_k)$, *citada no Teorema A, deve ser tal que* $U''(x_k) \neq 0$.

De fato, pois caso contrário, teríamos que todas as funções $f_j(x_k)$, $j = 1, ..., n$, são constantes, o que contradiz a hipótese do teorema.

Nesse trabalho estamos tratando de tensores simétricos não diagonais que dependem de uma única variável. Então de posse do resultado acima podemos propor a seguinte questão:

"Como todo tensor simétrico pode ser diagonalizado, ao diagonalizar os tensores estudados neste trabalho, estes não recairiam no caso estudado por R. Pina e K. Tenenblat em [16] e expresso no Teorema A?"

Ou seja, dado um tensor

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j F_{ij}(x_k) dx_i \otimes dx_j,$$

simétrico e não diagonal, estudado em um dos teoremas apresentados no Capítulo 2 e Capítulo 3, existe uma mudança de variáveis $y = (y_1(x), ..., y_n(x))$, onde $x = (x_1, ..., x_n)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A, isto é, o novo tensor diagonal $\tilde{T}$ tem a forma

$$\tilde{T} = \sum_{i,}^{n} \tilde{\varepsilon}_i f_i(y_{k_0}) dy_i^2,$$

onde temos k_0 fixo, $f_{k_0}(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}(n-1)U''(y_{k_0})$, $f_j(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}[U''(y_{k_0}) - (n-2)(U'(y_{k_0}))^2]$, $\forall j$ tal que j, k_0 são distintos?

Neste capítulo, mostraremos casos em que não existe tal mudança de variáveis. Para isso exibiremos cinco exemplos.

Antes de tratarmos dos exemplos faremos algumas considerações sobre tensores.

Sejam (M^n, g) uma variedade semi-Riemanniana, com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$ e um tensor simétrico de ordem 2,

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j.$$

Sejam $y = (y_1(x), ..., y_n(x))$ uma mudança de coordenadas e

$$\tilde{T} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y) dy_i \otimes dy_j,$$

a representação do tensor T neste novo sistema de coordenadas. Temos que

$$dy_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j, \ \ i = 1, ..., n.$$

Então obtemos que $[a_{ij}(x)] = J[b_{ij}(y)]J^t$, onde $J = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right]$ e J^t é a transposta da matriz J. Então temos a seguinte relação

$$\det T = (\det J)^2 \det \tilde{T}. \tag{4.4}$$

Agora, consideremos os exemplos.

Exemplo 4.1. Seja

$$T = F_{11}(x_1)dx_1^2 + 2dx_2^2 + 2dx_3^2 + 2F_{31}(x_1)dx_3 \otimes dx_1, \tag{4.5}$$

onde

$$F_{31}(x_1) = 2L'(x_1), \tag{4.6}$$

$$F_{11}(x_1) = 2L''(x_1) + 4, \tag{4.7}$$

e a função $L(x_1)$ é diferenciável, com $L''(x_1) \neq 0$, $L'(x_1) \neq 0$, $\forall x_1 \in I$, sendo I um intervalo aberto contido em $\mathbb{R}$, e uma solução da equação

$$L''(x_1) - (L'(x_1))^2 = -2.$$

Temos que este tensor T é um tipo de tensor estudado no Teorema 2.1, com $n = 3$, $k = 1$, $j_0 = 3$, $a = 2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ e $\varepsilon_3 = -1$. Observamos que

$$\det T = 8 \Big[L''(x_1) - (L'(x_1))^2 + 2 \Big] = 0.$$

Agora suponha que existe uma mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A, isto é, o novo tensor diagonal $\tilde{T}$ tem a forma

$$\tilde{T} = \sum_{i}^{3} \tilde{\varepsilon}_i f_i(y_{k_0}) dy_i^2,$$

onde temos k_0 fixo, $f_{k_0}(y_{k_0}) = 2\tilde{\varepsilon}_{k_0} U''(y_{k_0})$, $f_j(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}[U''(y_{k_0}) - (U'(y_{k_0}))^2]$, $\forall j$ tal que j, k_0 são distintos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$. Como temos que $\det T = 0$, por (4.4), temos que $\det \tilde{T} = 0$, ou seja, temos que $f_j(y_1) = 0$, $j = 2, 3$. Então,

$$\tilde{T} = 2U''(y_1) dy_1^2.$$

Temos que

$$dy_1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} dx_i,$$

assim,

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= 2U''(y_1)\Bigg[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 \otimes dx_2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} dx_1 \otimes dx_3 + \\ &+ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} dx_2 \otimes dx_3 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\right)^2 dx_3^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Agora, comparando as expressões (4.5) e (4.8), obtemos que

$$U''(y_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 = 1,$$

$$U''(y_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\right)^2 = 1,$$

$$U''(y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 0.$$

Como temos que $U''(y_1) \neq 0$, via as equações acima, chegamos a um absurdo. Logo para o tensor T dado em (4.5), não existe mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A.

Exemplo 4.2. Seja

$$T = F_{11}(x_1) dx_1^2 + \frac{1}{2} dx_2^2 + \frac{1}{2} dx_3^2 + 2F_{21}(x_1) dx_2 \otimes dx_1, \tag{4.9}$$

onde

$$F_{21}(x_1) = L'(x_1), \tag{4.10}$$

$$F_{11}(x_1) = 2L''(x_1) + 1, \tag{4.11}$$

e a função $L(x_1)$ é diferenciável, com $L''(x_1) \neq 0$, $L'(x_1) \neq 0$, $\forall x_1 \in I$, sendo I um intervalo aberto contido em $\mathbb{R}$, e uma solução da equação

$$L''(x_1) - (L'(x_1))^2 = -\frac{1}{2}.$$

Temos que este tensor T é um tipo de tensor estudado no Teorema 3.1, com $n = 3$, $k = 1$, $l_0 = 2$, $a = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ e $\varepsilon_2 = -1$. Observamos que

$$\det T = \frac{1}{2}\left[L''(x_1) - (L'(x_1))^2 + \frac{1}{2}\right] = 0.$$

Agora suponha que existe uma mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A, isto é, o novo tensor diagonal $\tilde{T}$ tem a forma

$$\tilde{T} = \sum_{i}^{3} \tilde{\varepsilon}_i f_i(y_{k_0}) dy_i^2,$$

onde temos k_0 fixo, $f_{k_0}(y_{k_0}) = 2\tilde{\varepsilon}_{k_0} U''(y_{k_0})$, $f_j(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}[U''(y_{k_0}) - (U'(y_{k_0}))^2]$, $\forall j$ tal que j, k_0 são distintos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$. Como temos que $\det T = 0$, por (4.4), temos que $\det \tilde{T} = 0$, ou seja, temos que $f_j(y_1) = 0$, $j = 2, 3$. Então,

$$\tilde{T} = 2U''(y_1) dy_1^2.$$

Temos que

$$dy_1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} dx_i,$$

assim,

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= 2U''(y_1)\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 \otimes dx_2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} dx_1 \otimes dx_3 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} dx_2 \otimes dx_3 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\right)^2 dx_3^2\right]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Agora, comparando as expressões (4.9) e (4.12), obtemos que

$$U''(y_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$U''(y_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$U''(y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 0.$$

Como temos que $U''(y_1) \neq 0$, via as equações acima, chegamos a um absurdo. Logo para o tensor T dado em (4.9), não existe mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A.

Exemplo 4.3. Seja

$$T = -F_{22}(x_2)dx_2^2 - 2F_{12}(x_2)dx_1 \otimes dx_2 - 2F_{12}(x_2)dx_2 \otimes dx_3 + 2dx_1 \otimes dx_3, \quad (4.13)$$

onde

$$F_{12}(x_2) = -G'(x_2), \quad (4.14)$$
$$F_{22}(x_2) = 2\Big[G''(x_2) - 1\Big], \quad (4.15)$$

e a função $G(x_2)$ é diferenciável, com $G'(x_2) \neq 0$ e $G''(x_2) \neq 0$, $\forall x_2 \in J$ sendo J um intervalo aberto contido em $\mathbb{R}$, e uma solução da equação

$$G''(x_2) + (G'(x_2))^2 = 1.$$

Temos que este tensor T é um tipo de tensor estudado no Teorema 3.2, com $\sigma = -1$, $c_{31} = 1$, $a = 1$, $b = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ e $\varepsilon_2 = -1$. Observamos que

$$\det T = 2\Big[(G'(x_2))^2 + G''(x_2) - 1\Big] = 0.$$

Agora suponha que existe uma mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A, isto é o novo tensor diagonal $\tilde{T}$ tem a forma

$$\tilde{T} = \sum_{i}^{3} \tilde{\varepsilon}_i f_i(y_{k_0}) dy_i^2,$$

onde temos k_0 fixo, $f_{k_0}(y_{k_0}) = 2\tilde{\varepsilon}_{k_0} U''(y_{k_0})$, $f_j(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}[U''(y_{k_0}) - (U'(y_{k_0}))^2]$, $\forall j$ tais que j, k_0 são distintos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$. Como temos que $\det T = 0$, por (4.4), temos que $\det \tilde{T} = 0$, ou seja, temos que $f_j(y_1) = 0$, $j = 2, 3$. Então,

$$\tilde{T} = 2U''(y_1)dy_1^2.$$

Temos que

$$dy_1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} dx_i,$$

assim,

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= 2U''(y_1)\Bigg[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 \otimes dx_2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} dx_1 \otimes dx_3 + \\ &+ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} dx_2 \otimes dx_3 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\right)^2 dx_3^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Agora, comparando as expressões (4.13) e (4.16), obtemos que

$$U''(y_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 = 0,$$

$$U''(y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2}.$$

Como temos que $U''(y_1) \neq 0$, via as equações acima, chegamos a um absurdo. Logo para o tensor T dado em (4.13), não existe mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A.

Exemplo 4.4. Seja

$$\begin{aligned} T &= -F_{11}(x_1)dx_1^2 - \frac{3}{2}\Big[dx_3^2 + dx_4^2\Big] - F_{21}(x_1)\Big[2dx_1 \otimes dx_2 + dx_1 \otimes dx_3 + dx_1 \otimes dx_4\Big] + \\ &+ 2\Big[dx_2 \otimes dx_3 + dx_2 \otimes dx_4\Big] + dx_3 \otimes dx_4, \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde

$$F_{21}(x_1) = -2G'(x_1), \tag{4.18}$$

$$F_{11}(x_1) = 3G''(x_1) - 3, \tag{4.19}$$

e a função $G(x_1)$ é diferenciável, com $G'(x_1) \neq 0$ e $G''(x_1) \neq 0$, $\forall x_1 \in J$ sendo J um intervalo aberto contido em $\mathbb{R}$, e uma solução da equação

$$G''(x_1) + 2(G'(x_1))^2 = 1.$$

Temos que este tensor T é um tipo de tensor estudado no Teorema 3.3, com $n = 4$, $k = 1$, $l_0 = 2$, $i_0 = 3$, $r_0 = 4$, $\sigma = -1$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = 1$, $c_{34} = \dfrac{1}{2}$, $d = 2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ e $\varepsilon_1 = -1$. Observamos que

$$\det T = -12\Big[G''(x_1) + 2(G'(x_1))^2 - 1\Big] = 0.$$

Agora suponha que existe uma mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A, isto é o novo tensor diagonal $\tilde{T}$ tem a forma

$$\tilde{T} = \sum_{i}^{4} \tilde{\varepsilon}_i f_i(y_{k_0}) dy_i^2,$$

onde temos k_0 fixo, $f_{k_0}(y_{k_0}) = 3\tilde{\varepsilon}_{k_0} U''(y_{k_0})$, $f_j(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}[U''(y_{k_0}) - (U'(y_{k_0}))^2]$, $\forall j$ tais que j, k_0 são distintos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$. Como temos que $\det T = 0$, por (4.4), temos que $\det \tilde{T} = 0$, ou seja, temos que $f_j(y_1) = 0$, $j = 2, 3, 4$. Então,

$$\tilde{T} = 3U''(y_1) dy_1^2.$$

Temos que

$$dy_1 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} dx_i,$$

assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{T} \; &= 3U''(y_1)\Bigg[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 \otimes dx_2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} dx_1 \otimes dx_3 + \\
&+ 2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_4} dx_1 \otimes dx_4 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} dx_2 \otimes dx_3 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_4} dx_2 \otimes dx_4 + \\
&+ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\right)^2 dx_3^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\frac{\partial y_1}{\partial x_4} dx_3 \otimes dx_4 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_4}\right)^2 dx_4^2\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Agora, comparando as expressões (4.17) e (4.20), obtemos que

$$U''(y_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 = 0,$$

$$U''(y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \frac{1}{3}.$$

Como temos que $U''(y_1) \neq 0$, via as equações acima, chegamos a um absurdo. Logo para o tensor T dado em (4.17), não existe mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A.

Exemplo 4.5. Seja

$$T = -F_{11}(x_1)dx_1^2 - \frac{1}{6}\Big[dx_2^2 + dx_3^2\Big] + \frac{2}{3}dx_4^2 - 2F_{21}(x_1)\Big[dx_1 \otimes dx_2 + dx_1 \otimes dx_3\Big] + dx_2 \otimes dx_3, \tag{4.21}$$

onde

$$F_{21}(x_1) = -G'(x_1), \tag{4.22}$$

$$F_{11}(x_1) = 3G''(x_1) - 1, \tag{4.23}$$

e a função $G(x_1)$ é diferenciável, com $G'(x_1) \neq 0$ e $G''(x_1) \neq 0$, $\forall x_1 \in J$ sendo J um intervalo aberto contido em $\mathbb{R}$, e uma solução da equação

$$G''(x_1) + 2(G'(x_1))^2 = \frac{1}{3}.$$

Temos que este tensor T é um tipo de tensor estudado no Teorema 3.4, com $n = 4$, $k = 1$, $l_0 = 2$, $i_0 = 3$, $a = 1$, $\sigma = -1$, $c_{23} = \frac{1}{2}$, $p = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = -1$. Observamos que

$$\det T = \frac{4}{9}\left[G''(x_1) + 2(G'(x_1))^2 - \frac{1}{3}\right] = 0.$$

Agora suponha que existe am mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A, isto é, o novo tensor diagonal $\tilde{T}$ tem a forma

$$\tilde{T} = \sum_{i}^{4} \tilde{\varepsilon}_i f_i(y_{k_0}) dy_i^2,$$

onde temos k_0 fixo, $f_{k_0}(y_{k_0}) = 3\tilde{\varepsilon}_{k_0} U''(y_{k_0})$, $f_j(y_{k_0}) = \tilde{\varepsilon}_{k_0}[U''(y_{k_0}) - (U'(y_{k_0}))^2]$, $\forall j$ tais que j, k_0 são distintos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$. Como temos que $\det T = 0$, por (4.4), temos que $\det \tilde{T} = 0$, ou seja, temos que $f_j(y_1) = 0$, $j = 2, 3, 4$. Então,

$$\tilde{T} = 3U''(y_1)dy_1^2.$$

Temos que

$$dy_1 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} dx_i,$$

assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{T} &= 3U''(y_1)\Bigg[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}dx_1 \otimes dx_2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_3}dx_1 \otimes dx_3 + \\
&+2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_4}dx_1 \otimes dx_4 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3}dx_2 \otimes dx_3 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_4}dx_2 \otimes dx_4 + \\
&+\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\right)^2 dx_3^2 + 2\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\frac{\partial y_1}{\partial x_4}dx_3 \otimes dx_4 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_4}\right)^2 dx_4^2\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Agora, comparando as expressões (4.17) e (4.20), obtemos que

$$U''(y_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 = -\frac{1}{18},$$

$$U''(y_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_4}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$U''(y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_4} = 0.$$

Como temos que $U''(y_1) \neq 0$, via as equações acima, chegamos a um absurdo. Logo para o tensor T dado em (4.21), não existe mudança de variáveis $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, que diagonaliza o tensor T sob as condições do Teorema A.

Referências Bibliográficas

[1] Besse, A. *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[2] Cao, J., Deturck, D. *Prescribing Ricci Curvature on open surfaces*, Hokkaido Math. J. 20 (1991), 265-278.

[3] Cao, J., Deturck, D. *The Ricci curvature equation with rotational symmetry*, American Journal of Mathematics 116 (1994), 219-241.

[4] Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, (1988).

[5] Deturck, D. *Existence of metrics with prescribed Ricci Curvature: Local Theory*, Invent. Math. 65 (1981), 179-207.

[6] Deturck, D. *Metrics with prescribed Ricci Curvature*, Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud. Vol. 102, (S. T. Yau, ed.), Princeton University Press, (1982), 525-537.

[7] Deturck, D., Koiso, W. *Uniqueness and Non-existence of Metrics with prescribed Ricci Curvature*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984), 351-359.

[8] Eisenhart, P. L. *Riemannian Geometrics*, Princeton, 5ª impressão (1964).

[9] Hamilton, R. S. *The Ricci curvature equation*, Seminar on nonlinear partial differential equations, Berkeley (1983), 47-72.

[10] Kühnel, W., Rademacher, H. B. *Conformal diffeomorphisms preserving the Ricci tensor*, Proc. of American Mathematical Society, Vol. 123 (1995), 2841-2848.

[11] O´Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press (1983).

[12] Pina, R. *Conformal metrics and Ricci tensors in the hyperbolic space*, Mat. Contemp. 17 (1999), 254-262.

[13] Pina, R., Tenenblat, K. *Conformal metrics and Ricci tensors in the pseudo-Euclidian space*, Proc. of American Mathematical Society 129 (2001), 1149-1160.

[14] Pina, R., Tenenblat, K. *Conformal metrics and Ricci tensors on the sphere*, Proc. of American Mathematical Society 132 (2004), 3715-3724.

[15] Pina, R., Tenenblat, K. *On the Ricci and Einstein equations on the pseudo-Euclidian and hyperbolic space*, Differential Geom. Appl. 24 (2006), 101-107.

[16] Pina, R., Tenenblat, K. *A class of solutions of the Ricci and Einstein equations*, Journal of Geometry and Physics 57 (2007), 881-888.

[17] Pina, R., Tenenblat, K. *On solutions of the Ricci tensor equation and the Einstein equation*, Israel Journal of Mathematics 171 (2009), 61-76.

[18] Xu, X. *Prescribing a Ricci tensor in a conformal class of Riemannian metrics*, Proceedings of American Mathematical Society Vol. 115 (1992), 455-459.