

MIRIAN MITUSUKO IZAWA

**MODELAGEM DO SISTEMA DE TRANSPORTE URBANO DO
DISTRITO FEDERAL POR REDES COMPLEXAS**

Brasília

2010



Universidade de Brasília

MODELAGEM DO SISTEMA DE TRANSPORTE URBANO DO DISTRITO FEDERAL POR REDES COMPLEXAS.

Mirian Mitusuko Izawa

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação *stricto sensu* em Física, orientada pelo Dr. Fernando Albuquerque Oliveira, co-orientada pelo Dr. Luciano Calheiros Lapas e aprovada em 19 de outubro de 2010.

UnB
Brasília
2010

“The scientist is not a person who gives the right answers, he’s one who asks the right questions.”

CLAUDE LÉVI-STRAUSS

*A meus pais Mitsue e Shuichi, a meus irmãos Sandra, Andreia
e Gilberto e ao meu querido Brunno*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todas as oportunidades que tem me oferecido.

Agradeço a meus pais, Shuichi e Mitsue, meus dois exemplos de vida, pela paciência, afeto, criação e dedicação. A vocês agradeço todas as minhas conquistas!

Agradeço a meu professor orientador Fernando A. Oliveira pelas grandes idéias, pela sabedoria, pela paciência e amizade.

Agradeço a meu professor co-orientador Luciano C. Lapas pela orientação, paciência, compreensão, amizade e pelos momentos de descontração.

Agradeço ao professor Bernardo Mello pelas discussões e correções do trabalho; ao professor José Soares e Daniel Cajueiro pelas discussões e aos professores André Penna e Rosas (Paraíba) pelas discussões. A todos os professores do Instituto de Física - UnB, em especial, aos professores Daniel Muller e Wadih Maluf, meu sincero obrigado.

Agradeço, em especial, àqueles sem os quais esse trabalho não poderia ser realizado em menos de dois anos: a minha irmã Sandra, a meu namorado Bruno, a meu amigo Evandro (Vavá), obrigada! Quantos sábados e domingos passamos na UnB ralando, não é?

Agradeço a meus colegas do DFTRANS, Ednardo Ferreira pelo fornecimento de parte das linhas mapeadas, Márcio Antônio pelos arquivos das linhas de ônibus e a Marco Antônio (Marcão) pelo auxílio na localização de pontos de parada.

Agradeço a meus irmãos, Andreia, Gilberto e Sandra pelo incentivo e paciência. A meus parentes todos, ao tio Seiji e à tia Atsuko por torcerem sempre por mim. A Bruno pelo carinho, companhia nesse árdua fase da vida, apoio em tudo. A dona Teresa, a seu Francisco, a Yeda e a Eveline pelo apoio e torcida.

Agradeço a todos os amigos de curso: Vivi, Sergim, Fabão, Camila, Sofia, Letícia, Plural, Pedão, Edbenga, Mentira, Pedro Dias, Fábio (Japa) e Deise, Felipe, Prudêncio e todos aqueles que não estão explicitamente mencionados, mas que fazem parte disso tudo.

Agradeço aos velhos amigos pela torcida e apoio: Glécia, Wal, Júnior, Kim, Wagner, Arabela. Eu me lembro como se tivesse sido ontem da nossa primeira feira de ciência na EIT. É época em que a empolgação e a energia de jovens sonhadores nos impulsionavam a sair pelo centro de Taguatinga carregando uma enorme placa de madeirite na cabeça para construir uma maquete do Sistema Solar proporcionais ao sistema real. Essa amizade

continua firme, pois temos muito em comum, a dedicação, a determinação, a garra. Isso valeu a pena, pois hoje somos o que somos. Valeu, galera!

Aos colegas do DFTRANS: Goretti, Bernardes, Chris, Lúcia, Daniel, Marcelo, Xavier. Ao meu chefe Themístocles pela compreensão e pelo apoio.

E a todos que de alguma forma contribuíram para esse trabalho, meu sincero obrigado.

E finalmente, ao Instituto de Física-UnB, à CAPES e ao CNPQ pelo financiamento da pesquisa.

RESUMO

Nesta dissertação, nós discutimos o Sistema de Transporte Urbano do Distrito Federal utilizando a teoria de redes complexas, a partir da definição de três redes: rede- P , rede- L e rede- B . Na rede- P , os pontos de parada de ônibus representam os nós e as arestas são representadas pela existência de linhas de ônibus que passam em dois pontos. Na rede- L , as linhas de ônibus representam os nós. Se duas linhas passam por, pelo menos, um ponto de parada em comum, então existe aresta nesse par de linhas de ônibus. A rede- B é uma rede bipartida, nesse caso, tanto os pontos de parada como as linhas de ônibus representam os nós da rede, onde as arestas ligam somente os nós de tipos diferentes. Geramos as matrizes de adjacências \mathbf{A}_P , \mathbf{A}_L , \mathbf{M}_P e \mathbf{M}_L , essas duas últimas representam grafos de multiplicidade de arestas (redes ponderadas) dos dois primeiros e a matriz de incidência \mathbf{B} representa a rede- B bipartida. Construimos a matriz- T , matriz de transbordo, para análise do número de transbordos necessários numa situação em que não exista conexão direta entre dois nós. Obtivemos resultados de rede de mundos pequenos para a rede- P não ponderada, por meio da análise do coeficiente de aglomeração e do número de transbordos. Como resultados da análise do grau do nó, encontramos a distribuição do grau do nó das redes ponderadas e calculamos sua entropia, observamos que a rede- B apresenta uma curva do tipo lei de potência para a distribuição do grau do nó. Além disso, concluímos que a rede- P apresenta características de rede de mundos pequenos.

ABSTRACT

In this work, we studied Distrito Federal's Urban transport System using complex network theory, from the definition of three networks: the P -network, the L -network and the B -network. On the P -network, every bus stop is represented by one node and the edge represents the existence of a bus route between two bus stops. On the L -network, bus routes are represented by a node. If two bus routes pass on at least one common bus stop, there is a edge between this pair of routes. The network- B is a bipartite network, in this case, both the bus stops as bus routes represent nodes network, where edges only connect nodes of different type. Adjacency matrix \mathbf{A}_P , \mathbf{A}_L , \mathbf{M}_P and \mathbf{M}_L are generated, the last two ones representing graphs with *multiedge* (weighed network) from the first two ones and the incident matrix \mathbf{B} to represent the mixed B -network. Also is build the \mathcal{T} network, the bus transfer bus stop for analysis of the absence of direct connection between bus stops. Results for a small-world network on the unweighted P -network were obtained by means of clustering coefficient analysis and number of transfer bus stops. We found degree distribution for the weighed networks and calculated it's entropy, observed that B -network shows a power law curve for the degree distribution. Also, we conclude that the P -network shows small-world network features.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Origem da Teoria de Grafos.	4
2.2 Distribuição da cadeia completa.	5
2.3 Ilustração de um grafo com 5 nós e 7 arestas.	6
2.4 Direção de arestas	7
2.5 Peso	7
2.6 Subgrafo	8
2.7 graudono	9
3.1 Ilustração de grafos equiprováveis com $N = 5$ nós e $n = 4$ arestas.	11
3.2 Para um grafo com $N=5$ nós, temos: $p=0$, para o caso com nós isolados; $p=0,4$, para o caso de 4 arestas e $p=1$, para o caso com todas as arestas possíveis. . .	11
3.3 Distribuição do grau do nó de uma rede aleatória.	14
3.4 (a) <i>Modelo A</i> : com crescimento, sem preferência de conexão. (b) <i>Modelo B</i> : sem crescimento, com preferência de conexão. (BARABÁSI et al., 1999)	22
3.5 Cálculo do C_{13} : $k_{13} = 7$ e $E_{13} = 6$, portanto $C_{13} = 2/7$	25
3.6 Procedimento aleatório de conexão para interpolação entre uma rede em forma de anel regular e uma rede aleatória (WATTS; STROGATZ, 1998).	26
3.7 Gráfico de comprimento médio de caminho $\mathcal{L}(\rho)/\mathcal{L}(0)$ e coeficiente de agregação $\mathcal{C}(\rho)/\mathcal{C}(0)$	27
3.8 Comprimento médio de caminho $l(8, 3)$ entre $i = 8$ e $j = 3$	27
4.1 Pontos de parada de ônibus do Distrito Federal.	29
4.2 Linhas de ônibus do Distrito Federal.	30
4.3 Esquema de um sistema de transporte urbano.	32
4.4 Esquema de montagem da rede- B	34
4.5 Rede- P ponderada.	36
4.6 Rede- L ponderada.	37
4.7 Rede- B bipartida.	38
5.1 Densidade de linhas dos pontos de ônibus do Distrito Federal.	41
5.2 Distribuição do Grau do nó-ponto no rede- B . Cada ponto representa uma média ponderada da quantidade de k_i contidos num intervalo $\Delta k = 10.000$ valores de k_i	43
5.3 Gráfico dilog da distribuição do grau no rede- B por intervalo $\Delta k = 10.000$. . .	44
5.4 Distribuição do grau do nó do rede- M_P ponderada. Foi utilizado para cada valor no gráfico, o total de Δs compreendido em intervalos de 500 em 500. . .	45

5.5	Distribuição do grau do nó em escala monolog. Percebe-se que a curva de ajuste atende bem os valores obtidos do sistema.	46
5.6	Distribuição do grau do nó da rede- M_L ponderada. Onde o intervalo $\Delta s = 300$	47
5.7	Exemplo de uma situação em que um usuário de transporte urbano necessita utilizar um ponto de transbordo para chegar ao destino desejado, visto que não há linha de ônibus que ligue a origem ao destino diretamente.	48
5.8	Quantidade de pontos de baldeação máximo entre quais quer lugares dentro do Distrito Federal é igual a 3 (três). Portanto, o número máximo de viagens realizadas são feitas por 4 (quatro) linhas diferentes.	50
A.1	Decomposição de escolhas de três possibilidades.	59

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 Entropia das redes do transporte do DF	46
5.2 Distribuição de transbordos do espaço- P	50

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DFTRANS	–	Transportes Urbanos do Distrito Federal (autarquia)
STUDF	–	Sistema de Transporte Urbano do Distrito Federal
ER	–	Erdős-Rényi
WS	–	Watts-Strogatz
BA	–	Barabasi-Albert
DF	–	Distrito Federal
www	–	world wide web
STPC	–	Serviço de Transporte Público Coletivo
STPC	–	Serviço Convencional
STCEV	–	Serviço Especial Vizinhança
STPC/TA	–	Serviço Autônomo Rural
STCP	–	Serviço de Transporte Coletivo Privado
STPB	–	Serviço de Transporte Público Básico
STPE	–	Serviço Próprio de Empregados
RA	–	Região Administrativa
EPTG	–	Estrada Parque Taguatinga-Guará

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{A}_P	– matriz adjacente da rede- P não ponderada
\mathbf{A}_L	– matriz adjacente da rede- L não ponderada
\mathbf{M}_P	– matriz adjacente da rede- P ponderada
\mathbf{M}_L	– matriz adjacente da rede- L ponderada
\mathbf{B}	– matriz de incidência da rede- B binária
\mathbf{T}	– matriz de transbordo (baldeação) da rede- P não ponderada
\mathcal{C}	– coeficiente de aglomeração médio
\mathcal{T}	– número de transbordo médio
V	– vértice ou nó
E	– aresta
G	– grafo
N	– número total de nós da rede
n	– número total de arestas da rede
i e j	– índice mudo
G'	– subgrafo de G
V'	– nós do subgrafo G'
E'	– arestas do subgrafo G'
k	– grau do nó ou valência
k_i	– grau do nó i
$C_{N(N-1)/2}^m$	– combinação de n arestas de um total de $N(N-1)/2$
p	– probabilidade de conexão
$\mathcal{P}(G)$	– probabilidade de obter o grafo G
Q	– propriedade qualquer
p_c	– probabilidade crítica
X_k	– número de nós com grau k
r	– certo valor de k
λ_k	– $NC_k^{N-1} p^k (1-p)^{N-1-k}$
σ^k	– $\sqrt{\lambda_k}$
$P(k)$	– distribuição do grau
γ	– expoente
m	– arestas do nó adicionado
m_0	– quantidade de nós inicial
γ_{BA}	– expoente do modelo de BA
\mathcal{C}_i	– coeficiente de aglomeração do nó i
E_i	– número existentes de arestas do nó i
ρ	– parâmetro de aleatoriedade do modelo de WS
$\mathcal{L}(\rho)$	– comprimento característico médio
$\mathcal{C}(\rho)$	– coeficiente de aglomeração médio
$l(i, j)$	– número de nós entre os nós i e j
p_i	– i -ésimo ponto de parada de ônibus da rede
l_i	– i -ésima linha de ônibus

P	– conjunto de pontos de parada de ônibus
L	– conjunto de linhas de ônibus
a_{ij}	– elemento da matriz adjacente da rede não ponderada
w_{ij}	– elemento da matriz adjacente da rede ponderada
s_i	– força do nó da rede ponderada
Δk	– fatia da distribuição da rede não ponderada
Δs	– fatia da distribuição da rede ponderada
$S(k)$	– entropia do sistema
b_{ij}	– nó de baldeação (transbordo)
A_P^i	– i -ésimo produto da matriz adjacente A_P
t_i	– i -ésimo nós de transbordo
\mathcal{T}_{max}	– número máximo de transbordos
E_{LOC}	– eficiência local
E_{GLOB}	– eficiência global

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 CONCEITOS BÁSICOS DE REDES COMPLEXAS	3
2.1 Introdução histórica	3
2.2 Conceitos básicos	6
3 MODELOS DE REDES COMPLEXAS	10
3.1 Redes aleatórias	10
3.1.1 Distribuição do grau do nó	13
3.1.2 Grafos aleatórios generalizados	15
3.2 Redes sem Escala	16
3.2.1 O modelo de Barabási-Albert (BA)	18
3.2.2 Casos limites do modelo de Barabási-Albert	21
3.3 Redes de Mundos Pequenos	23
3.3.1 Modelo de Watts-Strogatz (WS)	24
3.3.2 Coeficiente de agregação e comprimento médio	24
4 REDE DE TRANSPORTE URBANO DO DISTRITO FEDERAL	28
4.1 Transportes Urbanos do Distrito Federal - DFTRANS	28
4.2 Construção das redes de transporte urbano	28
4.3 Grafos e matrizes	34
5 RESULTADOS	41
5.1 Densidade de linhas de ônibus por ponto de parada	41
5.2 Distribuição do grau das redes de transporte urbano do DF	42
5.3 Entropia das redes de transporte urbano	45
5.4 Análise das propriedades de redes de mundos pequenos da Rede-P	46
5.4.1 Baldeação no sistema de transporte urbano	47
5.4.2 Conexão entre os primeiros vizinhos	50
6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	52

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54
APÊNDICE - ENTROPIA	58
ANEXO A - A AUTARQUIA DFTRANS.	61

1 INTRODUÇÃO

Diante de um cenário cercado de problemas no sistema de transportes urbanos do Distrito Federal, no qual as queixas mais frequentes são relacionadas à ineficiência desse serviço público quanto a oferta de linhas de ônibus, a falta de pontos de paradas, a ônibus lotados e em péssimas condições. Perguntas sobre como resolver esses problemas surgem facilmente numa conversa de um grupo de pessoas. Elencar fatores político-administrativos como causa da maioria deles são constantemente citados.

O Sistema de Transporte Urbano do Distrito Federal (STUDF) é um entre vários exemplos de sistemas complexos. Atualmente, trabalhos relacionados a transportes estão surgindo pelo mundo, seja no estudo de transporte ferroviário (SEN et al., 2003; KURANT; THIRAN, 2006), aéreo (BARRAT et al., 2004), terrestre (SIENKIEWICZ; HOLYST, 2005). Dentre os vários modais de transportes de massa, interessa nos, em especial, o transporte urbano por ônibus (CHEN et al., 2007; Zhu Zhen-Tao; XING-GUANG, 2008). Todos esses trabalhos têm em comum a utilização da teoria de redes complexas para investigação das características e propriedades do sistema.

Vemos no Capítulo 2 que a teoria de redes complexas teve início como uma forma de solucionar o famoso problema das Sete Pontes de Königsberg (1736) (GRIBKOVSKAIA et al., 2007), quando surgem os primeiros conceitos de grafos. Somente dois séculos mais tarde, surge a idéia de inserir elementos probabilísticos na abordagem de redes (ERDŐS; RÉNYI, 1960; ALBERT; BARABÁSI, 2002). Pesquisas recentes, no entanto, mostram que sistemas reais possuem dinâmicas muito mais complexas, na qual sua estrutura e evolução não parecem nem com grafos regulares nem com grafos puramente aleatórios, mas um meio termo entre essas duas teorias. Assim, as teorias de redes aleatórias mais promissoras são os modelos de: redes de mundos pequenos (WATTS; STROGATZ, 1998) e redes livres de escala (BARABÁSI et al., 2003). Ainda no Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos básicos de grafos e redes.

No Capítulo 3 descrevemos os três principais modelos de redes complexas: Rede Aleatórias, Redes de Mundos Pequenos e Redes sem Escala. O estudo de redes aleatórias teve início na primeira metade do século XX com a publicação do trabalho de *Erdős e Rényi (ER)* (ERDŐS; RÉNYI, 1960), em que se introduziram elementos estatísticos para definir as conexões entre os nós. Somente no final daquele século, a evolução de redes por meio de simulação computacional tornou-se ferramenta poderosa para a investigação e modelagem de redes reais. Assim, no contexto das redes complexas, os modelos de *Watts-Strogatz (WS)* (WATTS; STROGATZ, 1998) e *Barabási-Albert (BA)* (Albert-László Barabási, 1999) se destacam, sendo os mais importantes atualmente.

Em seguida (Capítulo 4), detalhamos o método de construção das redes do sistema de transporte do DF, com a utilização de grafos e matrizes para a análise matemática do sistema. Desse modo, criamos três redes: a rede- P , a rede- L e a rede- B . Primeiramente utilizamos o Google Earth 5.0 para a obtenção de dados, posteriormente, trabalhamos com a extração de dados e a montagem dessas redes. Na rede- P , os pontos de parada de ônibus representam os nós e as arestas são representadas pela existência de linhas de ônibus que passa em dois pontos. Na rede- L , as linhas de ônibus representam os nós. Se duas linhas passam por pelo menos um ponto de parada em comum, então existe aresta entre esse par de linhas de ônibus. A rede- B é uma rede bipartida, nesse caso, tanto os pontos de parada como as linhas de ônibus representam os nós da rede, onde as arestas ligam somente os nós de tipo diferentes. Esses modelos de redes surgem num trabalho de redes de transportes de ônibus da China (Zhu Zhen-Tao; XING-GUANG, 2008; CHEN et al., 2007). Criamos as matrizes não ponderadas \mathbf{A}_P e \mathbf{A}_L , as matrizes ponderadas \mathbf{M}_P e \mathbf{M}_L e a matriz bipartida \mathbf{B} .

No Capítulo 5 fizemos a análise da distribuição do grau das rede- P ponderada e rede- L ponderada e da rede- B bipartida, discutimos o resultado encontrado e analisamos a entropia desses sistemas. Analisamos os parâmetros global e local de redes de mundos pequenos, respectivamente, o número de transbordos médio \mathcal{T} (comprimento médio) e o coeficiente de aglomeração \mathcal{C} . E, ainda, encontramos a densidade de linhas de ônibus por ponto de parada.

E, finalmente, apresentamos as conclusões e perspectivas desse trabalho.

2 CONCEITOS BÁSICOS DE REDES COMPLEXAS

A teoria de redes complexas surge no final da década de 1990 com destaque para dois modelos: redes sem escala (Albert-László Barabási, 1999) e redes de mundos pequenos (WATTS; STROGATZ, 1998). Antes disso, a modelagem de redes era baseada em dois modelos principais: redes regulares e redes aleatórias (MELLO et al.,). *Redes regulares* são aquelas cujos nós possuem a mesma quantidade de arestas enquanto que em *redes aleatórias* (ou puramente aleatórias) as conexões distribuem-se aleatoriamente.

A idéia de explorar um modelo intermediário a esses dois modelos surge com a finalidade de explicar as propriedades de **redes reais** que não se enquadram nas definições de redes regulares ou de redes aleatórias.

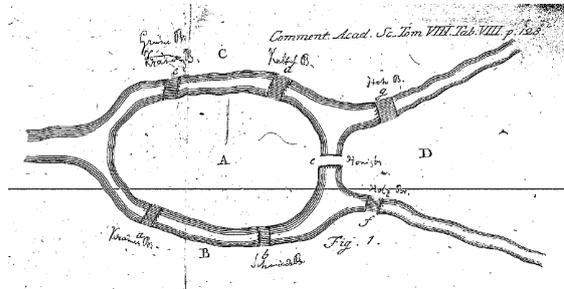
Essa teoria tem despertado interesse de cientistas das mais variadas áreas do conhecimento. Podem-se observar estudos da aplicação do modelo de redes em transporte ferroviário (SEN et al., 2003), metroviário (LATORA; MARCHIORI, 2002), multimodal urbano (SIENKIEWICZ; HOLYST, 2005), em transporte por meio de ônibus (CHEN et al., 2007; XU et al., 2007; CHEN; LI, 2007; Zhu Zhen-Tao; XING-GUANG, 2008), na organização de cidades (ROSVALL et al., 2005), na colaboração científica (NEWMAN, 2001b; LI et al., 2007).

Apesar dos modelos de redes complexas serem bastante recentes, o formalismo matemático tinha sido explorado há mais de dois séculos, com os primeiros estudos de grafos elaborados por Euler.

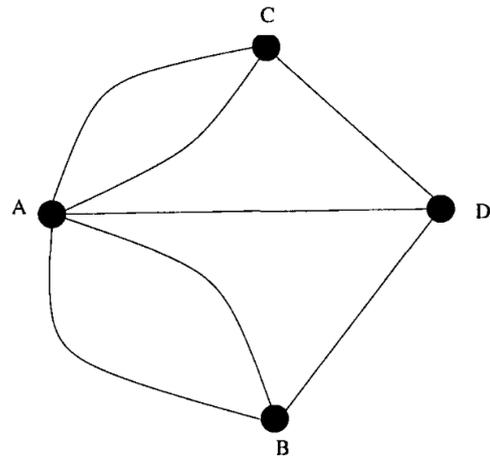
2.1 Introdução histórica

A teoria dos grafos teve origem no século XVIII com o trabalho de Leonhard Euler, no qual ele resolve o famoso problema matemático das sete pontes de Königsberg, Figura 2.1. Naquela época, debatia-se possibilidade de existência de um percurso fechado, no qual um andarilho pudesse sair de um local e voltar ao mesmo, passando uma única vez em cada uma das sete pontes sobre o rio Pregel (GRIBKOVSKAIA et al., 2007). Em 1736 Euler provou que esse caminho não poderia existir.

Euler percebeu que as formas das ilhas e do rio não influenciavam na resposta da questão, mas, tão somente, as conexões entre um local e outro por meio de pontes. Assim, desenhou um diagrama formado por pontos e linhas, Figura 2.1(b), a que denominou *grafo*. Cada ponto desse diagrama é chamado de **vértice** e cada linha é chamado de **aresta** do grafo (BÓNA, 2006). Para resolver o problema, esboçou um grafo formado por quatro vértices — A, B, C e D —, que representam as porções de terra, e sete arestas, que representam as sete pontes.



(a) Desenho ilustrativo de Euler do problema das sete pontes de Königsberg.



(b) Grafo de Euler do problema das sete pontes de Königsberg.

Figura 2.1 - Origem da Teoria de Grafos. (GRIBKOVSKAIA et al., 2007)

Somente no século XX a teoria dos grafos teve uma abordagem estatística e o uso de algoritmos foi introduzido. Surge o conceito de *grafos aleatórios* (ALBERT; BARABÁSI, 2002).

Em um trabalho de Erdős e Rényi (1959), cujo modelo será apresentado mais adiante, conexões entre dois nós quaisquer são realizadas aleatoriamente. Essas conexões equiprováveis são independentes da quantidade que os nós possuem.

O estudo da distribuição do grau do nó desse tipo de redes, todavia, não condiz com redes encontradas na natureza. Segundo o modelo de redes aleatórias, para uma rede com N grande, o grau do nó apresenta uma distribuição de Poisson enquanto que para algumas redes reais, essa distribuição é do tipo lei de potência. Em suma, essa última teoria indica que a maioria dos nós da rede possuem um número de arestas (conexões) próximo ao número médio de arestas da rede ao passo que em redes reais grandes existem muitos nós com baixo grau e poucos com alto.

Em 1969, Travers e Milgram publicaram um artigo com resultados empíricos de um estudo experimental usando o método de *pequeno mundo* (TRAVERS; MILGRAM, 1969). Para o estudo foram selecionados aleatoriamente 296 pessoas de Nebraska e Boston para que, gerando uma “cadeia de conhecidos”, conseguissem atingir a pessoa alvo em Massachusetts. Desse total, apenas 64 conseguiram chegar ao destino. Em resumo o documento continha as regras do jogo, os dados da pessoa alvo, uma lista e um cartão marcador. A lista era usada para evitar que o documento voltasse para as mãos de uma pessoa

que já tivesse sido atingida pelo mesmo. E o cartão marcador, para coletar as informações sociais necessárias ao estudo. O resultado disso, portanto, consiste de uma distribuição do comprimento da cadeia. Foram analisados apenas documentos que conseguiram chegar ao destino. Nessa distribuição, o número de intermediários entre o remetente e o destinatário foi chamado de comprimento da cadeia. Assim, o estudo mostra que o valor médio dessa distribuição fica em torno de 5,2 conexões, Figura 2.2(a). Um segundo resultado desse estudo foi a análise das cadeias incompletas. Nessa cadeia, portanto, foram analisados todos os documentos, tanto aqueles que completaram o destino, quanto aqueles que foram abandonados no meio do caminho. A figura mostra o número de cadeias que saíram em cada “etapa”. A “etapa zero” corresponde a todos os voluntários inicialmente recrutados. A “etapa um” corresponde às pessoas que receberam o documento diretamente pela população inicial. A “etapa dois”, ao grupo de pessoas que receberam do grupo da “etapa um”, e assim por diante. Nesse caso, foi observado que, quanto mais o comprimento das etapas aumenta, o número de cadeias diminui, Figura 2.2(b).

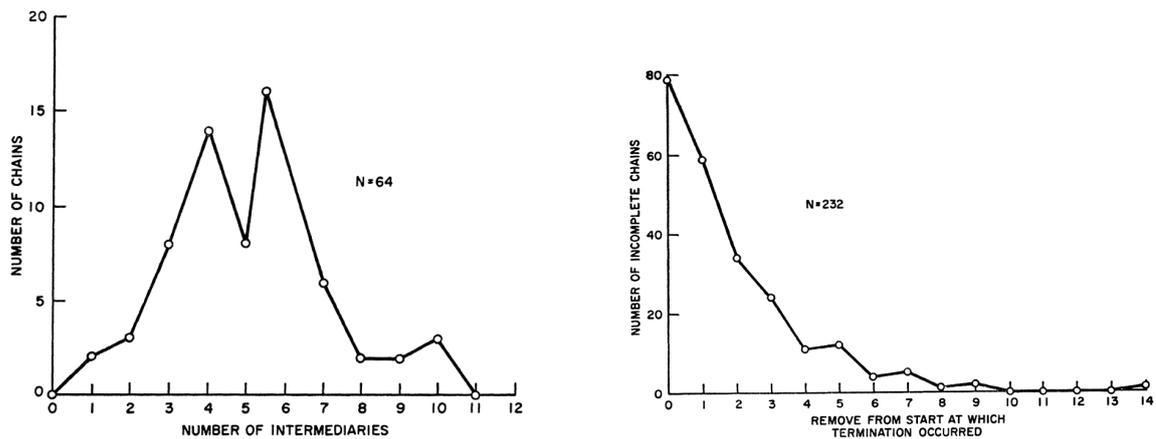


Figura 2.2 - Distribuição da cadeia completa.([TRAVERS; MILGRAM, 1969](#))

Dessa forma, a grande contribuição do trabalho de Milgram está relacionada ao número médio de intermediários observados, cujo valor é maior que cinco entre o remetente e o destinatário. Daí o conceito de que qualquer pessoa está a *seis graus* de separação de outra.

Portanto, as teorias de grafos regulares, grafos aleatórios juntamente com a experiência de mundos pequenos serviram de base para o desenvolvimento da teoria de *redes complexas*.

2.2 Conceitos básicos

A rigor, um grafo é um par de conjuntos $G = \{V, E\}$, onde V é o conjunto de N vértices e E é o conjunto de n arestas que conectam vértices dois a dois.

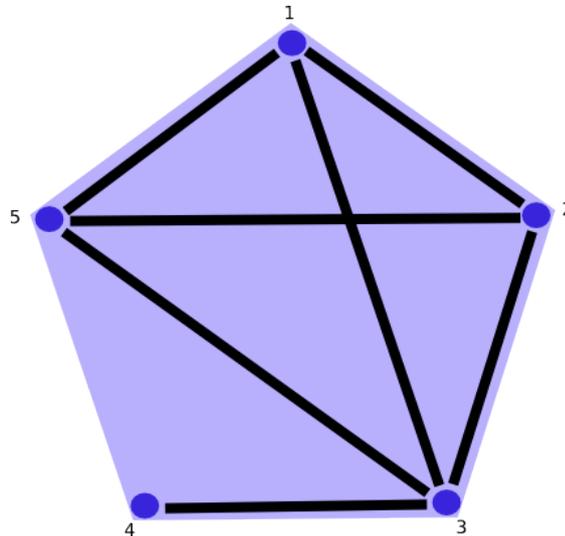


Figura 2.3 - Ilustração de um grafo com 5 nós e 7 arestas. Onde temos $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

A representação ilustrativa de um grafo é feita geralmente por um conjunto de pontos ligados um ao outro ou não. Na Figura 2.3, temos $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

As redes podem ser classificadas conforme critérios estruturais (MELLO et al.,), sendo as mais importantes para este trabalho as seguintes:

- Direção: as redes podem ser direcionadas ou não direcionadas. Se o sentido da conexão representa alguma informação relevante, então ela é direcionada, caso contrário, é não direcionada. Em outras palavras, isso significa que existiram nós origens e nós destinos, de forma que haverá diferença entre uma aresta do nó i ao no nó j e uma aresta do nó j ao nó i . No sistema de transporte urbano, por exemplo, vemos que o sentido da aresta importa, mas neste trabalho, para simplificar o problema, modelamos para uma rede não direcionada.
- Peso: existem informações importantes que vai além da simples informação da existência de aresta entre dois nós. Uma conexão pode ser mais forte que outra, por meio de algum parâmetro. Para o sistema de transporte urbano considera-

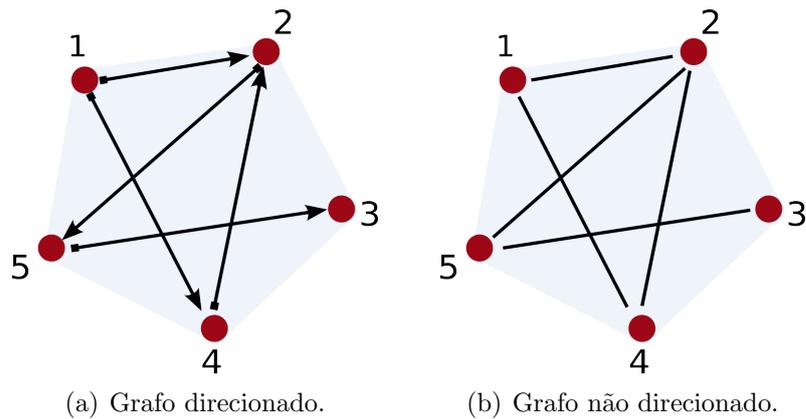


Figura 2.4 - Direção de arestas, existência ou ausência de nó alvo e nó fonte.

mos os pesos das conexões. Uma vez que a quantidade de linhas de ônibus que conectam dois nós é importante (rede- P). Ou ainda, no caso da rede- L , quanto mais pontos de ônibus em comum duas linhas de ônibus possuem, mais forte será essa conexão.

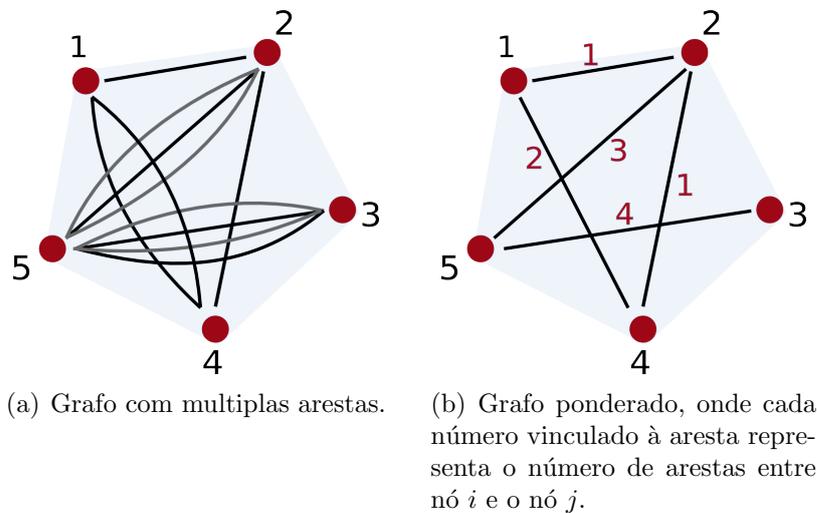


Figura 2.5 - Grafo com multiplicidade de arestas pode ser representado por um grafo ponderado.

- Conexão: as redes podem ser ou não conectadas. Se uma rede é conectada, então não existem nós isolados, havendo apenas um único aglomerado. Se ela é não conectada, então existem nós isolados, podendo existir mais de um aglomerado na rede. Quando tratamos o rede- P para investigar as propriedades de mundos pequenos, utilizamos o *cluster* gigante.

Além das características estruturais, outras propriedades de redes são importantes, tais como, o subgrafo, o grau do nó, o comprimento médio e o coeficiente de aglomeração.

Um subgrafo de um grafo é definido da seguinte forma:

Definição 2.2.1. *Seja G' formado por V' conjunto de nós e E' conjunto de arestas, G' é um subgrafo de um grafo $G = \{V, E\}$ se todos os nós em V' são nós de V ($V' \subset V$) e todas as arestas em E' são também arestas de E ($E' \subset E$).*

São tipos de subgrafos: ciclos, árvores e subgrafos completos. Um *ciclo* de ordem k é um laço fechado de k arestas tal que o caminho começa e acaba com o mesmo vértice. Na Figura 2.6, temos um exemplo de um ciclo de ordem 3, Figura (2.6(a)) e uma *árvore*, Figura (2.6(b)), que em contraste com o ciclo, não pode ter laços. Já um *subgrafo completo* de ordem k é aquele que contém N vértices e todas as $N(N - 1)/2$ possíveis arestas.

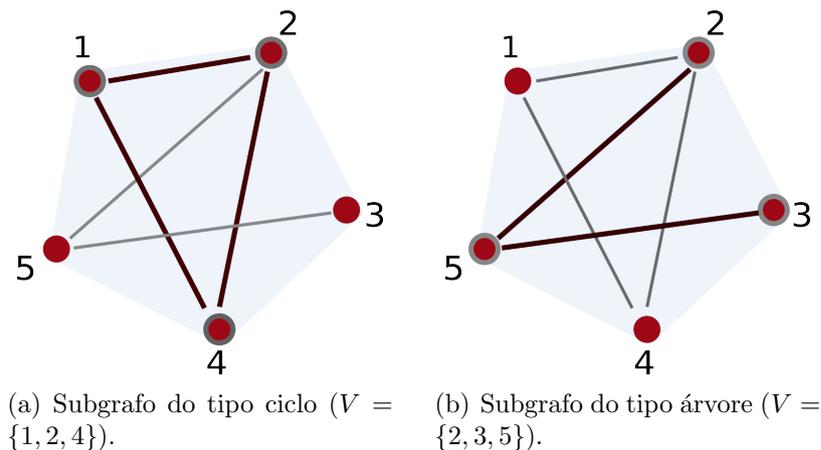


Figura 2.6 - Tipos de subgrafos.

O grau (ou valência) k_i de um vértice i é o número arestas em i ; pela definição de um gráfico, este é igual ao número de vizinhos do nó i . Um vértice de grau 0 é um vértice isolado. Se todos os vértices do grafo G têm o mesmo grau k , então G é k -regular, ou simplesmente regular (DIESTEL, 2000). A distribuição probabilística do grau do nó é importante para a caracterização de uma rede real. Uma rede aleatória, por exemplo, apresenta uma distribuição de Poisson. Por outro lado, uma rede sem escala apresenta uma distribuição do tipo lei de potência.

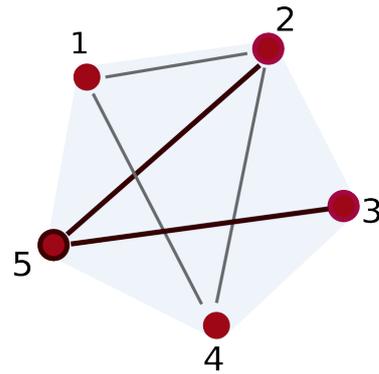


Figura 2.7 - Grau do nó de $k_5 = 2$.

O comprimento médio e o coeficiente de aglomeração são propriedades importantes na investigação da conectividade de uma rede. O comprimento médio é um parâmetro global da rede, que serve para mostrar se dois nós quaisquer da rede são muito distantes um do outro. Ou seja, é o número médio de arestas no menor caminho entre dois vértices.

Por fim, o coeficiente de aglomeração é um parâmetro local da rede, que revela a conectividade da vizinhança de um certo nó i . Essa vizinhança de i é definida como um subgrafo formado por todos os nós com os quais o nó i é conectado. A partir disso, é verificado o número de conexões existentes entre os nós pertencentes a vizinhança de i .

3 MODELOS DE REDES COMPLEXAS

Neste capítulo são abordados três modelos de redes: redes aleatórias, redes de mundos pequenos e redes sem escala. O estudo de redes aleatórias teve início na primeira metade do século XX com a publicação do trabalho de Erdős e Rényi (ER) (ERDŐS; RÉNYI, 1960), em que se introduziram elementos estatísticos para definir as conexões entre os nós. Somente no final daquele século, a evolução de redes por meio de simulação computacional tornou-se ferramenta poderosa para a investigação e modelagem de redes reais. Assim, no contexto das redes complexas, os modelos de *Watts-Strogatz (WS)* (WATTS; STROGATZ, 1998) e *Barabási-Albert (BA)* (Albert-László Barabási, 1999) destacam-se sendo atualmente os mais importantes.

3.1 Redes aleatórias

A teoria dos grafos aleatórios foi introduzida por Paul Erdős e Alfréd Rényi que definiram um *grafo aleatório* como um conjunto de N nós (vértices) conectados por n arestas escolhidas *aleatoriamente* dentre $N(N-1)/2$ possibilidades. O número de arestas possíveis é igual ao arranjo simples de N elementos tomados dois a dois, pois, *aresta* é definida como a ligação entre dois vértices.

Para um grafo não direcional, dividimos esse arranjo simples pela metade, pois não diferenciamos entre nó fonte e nó alvo, contrariamente ao grafo direcional ou dígrafo. Dessa forma, existem no total $C_{N(N-1)/2}^n$ grafos com N nós e n arestas — que é a combinação de n arestas de um total de $N(N-1)/2$ arestas possíveis. Conseqüentemente, formam um espaço de probabilidades, no qual todas as realizações são equiprováveis. Dito de outra maneira, qualquer que seja a forma desse grafo com N nós e n arestas, a probabilidade de ocorrência é a mesma.

Supondo um caso com $N = 5$ e $n = 4$, temos $C_{10}^4 = 210$ formas diferentes de construir um grafo com 5 nós e 4 arestas, onde todas elas são equiprováveis, a Figura 3.1 apresenta 3 exemplos.

O seguinte algoritmo pode ser seguido para a construção ou evolução de grafos:

- a) gerar um grafo com N nós isolados;
- b) acrescentar sucessivas arestas aleatoriamente.

O grafo obtido em diferentes estágios desse processo corresponde a uma

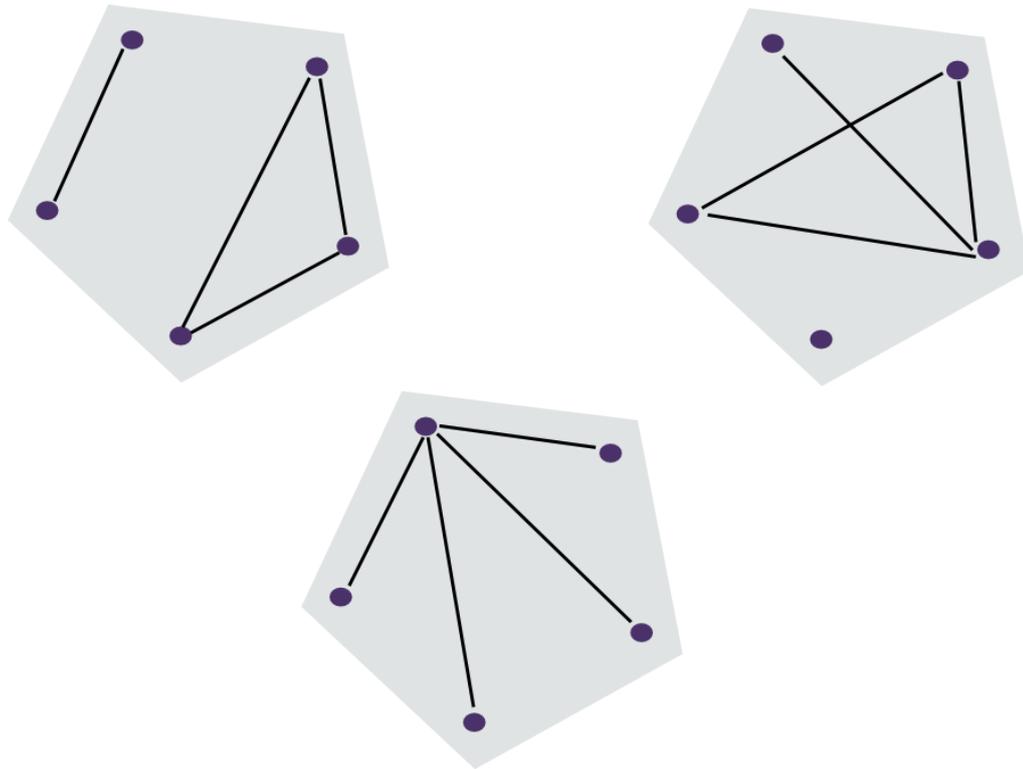


Figura 3.1 - Ilustração de grafos equiprováveis com $N = 5$ nós e $n = 4$ arestas.

probabilidade de conexão p cada vez maior, até o limite de $p = 1$. Dessa forma, se $p = 0$, temos um grafo com N nós isolados e, eventualmente, podemos obter um grafo totalmente conectado, com o número máximo de conexões dado por $n = N(N - 1)/2$, para $p = 1$

A Figura 3.2 mostra um exemplo para o caso do grafo de $N = 5$.

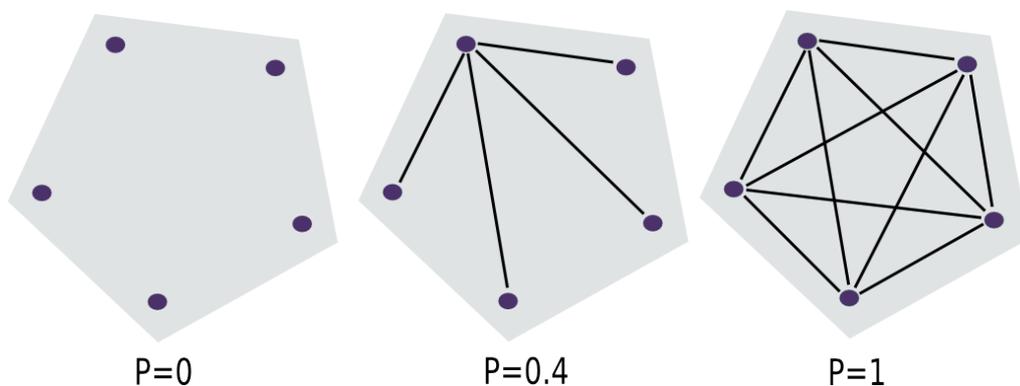


Figura 3.2 - Para um grafo com $N=5$ nós, temos: $p=0$, para o caso com nós isolados; $p=0,4$, para o caso de 4 arestas e $p=1$, para o caso com todas as arestas possíveis.

Portanto a probabilidade é dada por,

$$p = \frac{\text{número de arestas}}{\text{número de arestas possíveis}} = \frac{E(n)}{\frac{N(N-1)}{2}}. \quad (3.1)$$

Uma definição alternativa para grafos aleatórios é o Modelo Binomial. Se iniciamos um grafo com N nós, com todos os pares de nós conectados com probabilidade p , teremos — como consequência — que o número total de arestas é uma variável aleatória com valor esperado $E(n) = p[N(N-1)/2]$. Se G é um grafo com $P = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ nós e n arestas, a probabilidade (\mathcal{P}) de obtê-lo por esse processo de construção é dado pela Equação 3.2.

$$\mathcal{P}(G) = p^n (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2}-n} \quad (3.2)$$

O principal objetivo da teoria de grafos aleatórios consiste em determinar em qual probabilidade de conexão p uma certa propriedade do grafo pode surgir. Diante disso, Erdős e Rényi definiram, para quase todos os grafos, a existência uma propriedade Q cuja probabilidade de que seja apresentada se aproxima de 1 quanto maior for o valor de N ($N \rightarrow \infty$). A maior descoberta de Erdős e Rényi indica que muitas propriedades de grafos aleatórios aparecem repentinamente. Isso quer dizer que, dada uma probabilidade, ou quase todos os grafos possuem a propriedade investigada, ou quase nenhum grafo a possui; para uma propriedade deixar de ser muito provável para ser muito improvável, a transição geralmente é rápida.

Em grafos aleatórios, a probabilidade de ocupação é definida como função do tamanho do sistema, visto que p representa uma fração das arestas que estão presentes na rede de um total de $N(N-1)/2$ possibilidades. Isso significa dizer que, para muitas propriedades Q , em muitos grafos aleatórios, não existe um único N limite independente, mas uma função limite que depende do tamanho do sistema, e $p_c(N \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

E essa teoria prevê que, para muitas propriedades, há uma probabilidade crítica $p_c(N)$. Se $p(N)$ cresce mais lentamente que $p_c(N)$, com $N \rightarrow \infty$, então quase todo o grafo com probabilidade de conexão $p(N)$ não possui a propriedade Q . E se $p(N)$ cresce mais rápido que $p_c(N)$, então quase todo o grafo possui a propriedade Q (ALBERT; BARABÁSI, 2002). Este assunto entra no campo da teoria de percolação, que extrapola o escopo deste trabalho.

Entretanto, o grau médio do grafo, conforme a Equação 3.3, tem um valor crítico dependente do tamanho do sistema, onde a soma dos graus de todos os nós i da

rede é duas vezes o número de arestas da rede, $\sum_i k_i = 2n = 2[N(N-1)/2]$, para o caso de $N \rightarrow \infty$ (ALBERT; BARABÁSI, 2002).

$$\langle k \rangle = \frac{2n}{N} = p(N-1) \simeq pN, \quad (3.3)$$

3.1.1 Distribuição do grau do nó

Uma propriedade bastante estudada em redes é o número de arestas que conectam um vértice, chamado de *grau do vértice ou grau do nó*. Em grafos aleatórios com probabilidade de conexão p , o grau k_i do nó i segue uma distribuição binomial com parâmetros $N-1$ e p , onde o primeiro parâmetro é o número total de nós do grafo com exceção dele mesmo, ou seja, a probabilidade do nó i possuir $k_i = k$ arestas (ver a Equação (3.4)).

$$P(k_i = k) = C_{N-1}^k p^k (1-p)^{(N-1)-k}. \quad (3.4)$$

Essa probabilidade representa o número de formas nas quais k arestas podem ser traçadas a partir de um certo nó. Onde p^k é a probabilidade de existirem k arestas, $(1-p)^{(N-1)-k}$ é a probabilidade de ausência de aresta adicional e C_{N-1}^k é a quantidade de formas equivalentes de selecionar k nós finais para uma determinada aresta. Lembremos que, dada probabilidade p , existem C_{N-1}^k formas equiprováveis de distribuição de arestas do nó.

Para encontrar a *distribuição do grau de um grafo*, estudamos o número de nós com o mesmo grau k , representado por X_k . Então, determinamos a probabilidade de X_k ter um dado valor, $P(X_k = r)$. Onde r é a quantidade de nós com um certo grau k . Observando a Equação (3.4), vemos que o valor esperado para o número de nós com o grau k é dado pela Equação (3.5).

Para encontrar a distribuição do grau de um grafo, estudamos o número de nós com o mesmo grau k , representado por X_k . Então, determinamos a probabilidade de X_k ter um dado valor, $P(X_k = r)$. Onde r é a quantidade de nós com um certo grau k . Observando a Equação (3.4), vemos que o valor esperado para o número de nós com o grau k é

$$E(X_k) = N P(k_i = r) = \lambda_k, \quad (3.5)$$

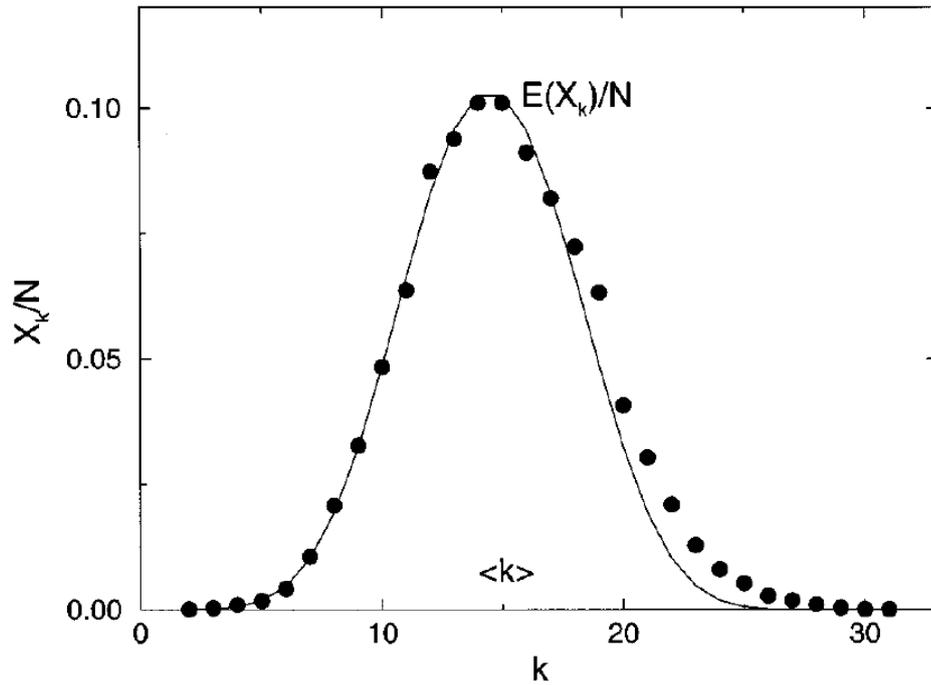


Figura 3.3 - Distribuição do grau do nó de uma rede aleatória. Modelo de Erdős-Rényi (ER) (ALBERT; BARABÁSI, 2002)

onde λ_k é

$$\lambda_k = N C_{N-1}^k p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (3.6)$$

A distribuição dos valores de X_k , $P(X_k = r)$, se aproxima de uma distribuição de Poisson (ver Equação (3.7)).

$$P(X_k = r) = e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^r}{r!}. \quad (3.7)$$

Assim, o número de nós com grau k segue uma distribuição de Poisson com um valor médio λ_k . Vemos que o valor esperado para a distribuição, de acordo com a Equação (3.7), é uma função dada pela Equação (3.6) e não uma constante. A distribuição de Poisson decai rapidamente para valores suficientemente grandes de r , sendo o desvio padrão da distribuição dado por $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$.

Esse resultado pode ser simplificado para uma aproximação resultante $X_k = N P(k_i = k)$, se os nós forem considerados independentes. Assim, com uma boa aproximação, a distribuição do grau de um grafo aleatório é uma distribuição binomial conforme a Equação (3.8), que para N grande, pode ser substituída pela distribuição de

Poisson (Equação (3.9)),

$$P(k) = C_{(N-1)}^k p^k (1-p)^{N-1-k}, \quad (3.8)$$

$$P(k) \simeq e^{-pN} \frac{(pN)^k}{k!} = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (3.9)$$

Esse modelo é importante para a obtenção dos graus mínimos e máximos de um grafo aleatório. O resultado indica que, para uma grande variedade de valores de p , tanto o grau máximo quanto o grau mínimo são determináveis e finitos. Se, por exemplo, $p(N) \sim N^{-1-1/k}$, quase nenhum grafo tem nós com grau maior que k . Ou ainda, se $p = \{\ln(N) + k \ln[\ln(N)] + c\}/N$, quase todos os grafos aleatórios têm um grau mínimo de pelo menos k . Além disso, para um p suficientemente grande, com $pN/\ln(N) \rightarrow \infty$, o grau máximo de quase todo o grafo aleatório têm a mesma ordem de magnitude que o valor do grau médio. Embora a posição das arestas seja aleatória, um grafo aleatório é bastante homogêneo, a maioria dos nós tem o mesmo número de arestas (ALBERT; BARABÁSI, 2002).

3.1.2 Grafos aleatórios generalizados

Apesar de o modelo de redes aleatórias de Érdon-Renyi ser bastante simples e importante para a verificação da existência de uma propriedade do sistema, a observação dos sistemas reais mostra que essas diferem de grafos aleatórios, pois muitas vezes seguem uma distribuição de grau do nó do tipo lei de potência,

$$P(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (3.10)$$

Se a distribuição do grau segue uma lei de potência, isso significa que temos um sistema *livre de escala* característica, chamados de redes livres de escala (*scale-free network*). Entretanto, a teoria dos grafos aleatórios não reproduz o caráter livre de escala apresentado pelas redes reais. Com essa motivação, Barabási e outros tentaram desenvolver um modelo que descrevesse melhor esses sistemas.

Eles generalizaram a teoria de grafos aleatórios para que o modelo tivesse uma distribuição do grau como valor inicial, mas que fosse aleatório em todos os outros aspectos. Nesse caso, as arestas eram conectadas a nós selecionados aleatoriamente com a restrição de que a distribuição do grau seguisse uma função de lei de potência, não mais

uma função distribuição de Poisson para N grande como o modelo anterior.

Para essa finalidade, eles identificaram um parâmetro relevante que, juntamente com o tamanho da rede, pudesse fornecer sua caracterização estatisticamente completa. Para o caso de grafos aleatórios esse parâmetro é a *probabilidade de conexão*. Desde que a restrição seja apenas que a distribuição do grau do grafo siga uma lei de potência, o expoente γ da distribuição do grau poderia desempenhar o papel de parâmetro de controle. Feita essa identificação, eles estudaram redes aleatórias livres de escala variando sistematicamente o valor de γ e verificaram se existia algum valor limite para o qual as propriedades importantes da rede variavam abruptamente.

Barabási considerou uma rede grande com distribuição do grau $P(k) \sim k^{-\gamma}$, na qual γ decresce de infinito a 0. O grau médio da rede, ou equivalentemente o número médio de arestas por nó, aumenta conforme γ decresce, desde que $\langle k \rangle \sim k_{max}^{-\gamma+2}$, onde $k_{max} < N$ é o grau máximo do grafo. Esse processo é muito similar ao descrito por Érdős e Rényi para o caso de evolução de rede aleatória. Consequentemente, enquanto para um γ suficientemente grande a rede consiste de pequenos aglomerados em *clusters* isolados, existe um valor crítico de γ no qual um agregado gigante se forma e com um γ ainda menor, a rede se torna totalmente conectada.

Um dos primeiros resultados mostrou que quase todos os grafos aleatórios têm um único cluster gigante (LUCZAK, 1990) se a distribuição do grau seja fixa e se nenhum nó apresentar grau inferior a dois. Ademais, Molloy e Reed mostraram que para um grafo aleatório com distribuição de grau $P(k)$, um aglomerado infinito emerge seguramente quando

$$Q \equiv \sum_k k(k-2)P(k) > 0, \quad (3.11)$$

provando que o grau máximo é menor que $N^{1/4}$ (MOLLOY; REED, 1995; MOLLOY; REED, 1998).

3.2 Redes sem Escala

Por muitos anos, a ciência tratou todas as redes complexas como sendo sistemas completamente aleatórios. Vimos que Erdős e Rényi (ER) sugeriram que tais sistemas podiam ser eficientemente modelados conectando-se os nós de forma aleatória. E a simplicidade matemática dessa teoria levou ao surgimento de um campo da matemática focalizado em **Redes Aleatórias**.

Vimos na Seção 3.1 que o sistema considerado é fechado, ou seja, não há

entrada de novos nós, e que a maioria desses têm aproximadamente o mesmo número de conexões. Além disso, vimos que a distribuição do grau do nó desse modelo segue uma distribuição de Poisson. Era extremamente raro encontrarmos nós que tivessem o número de conexões muito maior ou menor que a média. Assim, a probabilidade de um nó conectar-se a k outros nós decresce exponencialmente para k grande. Por isso, muitas vezes, as redes aleatórias eram chamadas de exponenciais (BARABÁSI; BONABEAU, 2003).

Estas propriedades de redes aleatórias — a distribuição de probabilidade de conexão de vértices (arestas), $P(k)$, ter um corte exponencial e um tamanho característico $\langle k \rangle$ dependente de p — contrastam com resultados empíricos encontrados na natureza. Muitos sistemas reais apresentam uma propriedade em comum: $P(k)$ é livre de escala. Ou seja, a distribuição do grau de redes aleatórias segue uma lei de potência, cujo expoente é proporcional a $\langle k \rangle$ (ver a Equação 3.9).

Em muitas redes reais, tais como na rede world wide web (www), na rede celular, na rede de citações de artigos, a distribuição do grau segue uma lei de potência para k grande. Mesmo para as redes que tenham uma distribuição $P(k)$ que siga um decaimento exponencial, essa distribuição desvia-se muito da distribuição de Poisson observada no modelo de grafos aleatórios em que é clara a presença de um pico em $\langle k \rangle$. Na curva de Poisson encontramos um pico em $\langle k \rangle$, que é ausente em distribuição do grau de curvas reais.

Assim, foi verificado que o modelo de grafos aleatórios e o modelo de mundos pequenos não reproduziam o efeito de distribuição de lei de potência observado em muitas redes reais.

Embora seja simples construir um grafo aleatório que tenha uma distribuição do grau do tipo lei de potência, como mencionado na Seção 3.1.2, a estrutura de uma rede real não parece ser tão simples assim. É preciso observar como a rede se desenvolveu e quais os elementos que contribuíram para a formação de uma rede real. Nesse sentido, o modelo de redes sem escala — atribuído a Barabasi-Albert — tem sido muito bem cientificamente aceito. Esse modelo enfatiza as características dinâmicas da rede e não aborda o problema de forma topológica como dos seus antecessores. A idéia é que a compreensão do processo de evolução ou a dinâmica da rede implica a compreensão correta da topologia da rede. A dinâmica do sistema assume o papel principal e a topologia apenas uma consequência desse processo.

3.2.1 O modelo de Barabási-Albert (BA)

A origem da distribuição de lei de potência do grau do nó foi discutido pela primeira vez no trabalho de Barabási e Albert (Albert-László Barabási, 1999). Eles investigaram o comportamento de grandes redes complexas, tais como a rede de www ou de citações de publicações científicas e mostraram que a probabilidade $P(k)$ de interação entre um vértice e k outros numa rede sofre decaimento na forma de uma lei de potência, segundo

$$P(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (3.12)$$

Esse resultado indica que grandes redes se organizam em um estado sem escala. Para explicar isso, Barabási e Albert incorporaram dois elementos chaves de redes reais: *crescimento* e *preferência de conexão*. Ficaram assim evidenciadas as falhas do modelo de rede aleatória.

Tanto o modelo de Erdős-Rényi quanto o modelo de Watts-Strogatz (detalhado no Capítulo 3.3) assumem que a rede começa com um número fixo de nós (N), cujos vértices são conectados (ER) ou reconectados (WS) aleatoriamente, mas ao final, o número de nós continua o mesmo. Entretanto, ao contrário desses modelos, as redes reais são *abertas*, ou seja, o número de nós não é fixo, há um *crescimento* no decorrer do tempo pois novos nós são introduzidos ao sistema.

Além disso, nos modelos discutidos até então, a probabilidade de conexão entre dois nós era independente do grau do nó, ou seja, as arestas eram colocadas aleatória e uniformemente. Contudo, as redes reais exibem uma *preferência de conexão*, ou seja, um nó muito conectado tem maior probabilidade de receber uma nova conexão do que aquele pouco conectado. Por exemplo, nas redes da web, a probabilidade de um site muito conhecido ser visitado é maior que de um site pouco conhecido (BARABÁSI et al., 2001).

Esse modelo com *crescimento* e *preferência de conexão* levou Barabási e Albert a assumir que as redes continuamente expandem-se pela adição de novos nós que são conectados aos nós já presentes no sistema e que a probabilidade de um novo nó conectar ao nó já existente não é uniforme, mas existe uma probabilidade maior de conectar-se ao nó que já tem um número grande de conexões. Esse modelo de *redes livres de escala* incorpora esses dois elementos e naturalmente leva à observação de distribuição invariante de escala. Abaixo, explicaremos sucintamente o algoritmo elaborado por eles:

- a) *crescimento*: Iniciando o sistema com um número pequeno de nós (m_0), no qual é adicionado um novo nó com $m \leq (m_0)$ arestas que ligam o novo nó a m

diferentes nós já existentes.

- b) *preferência de conexão*: após escolher os nós com os quais o novo nó irá conectar, assumimos que a probabilidade \prod do novo nó estar conectado ao i -ésimo nó, é tal que:

$$\prod(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (3.13)$$

Após t passos, este procedimento resulta numa rede com $N = t + m_0$ nós e mt arestas. Simulações numéricas indicam que esta rede evolui num estado invariante de escala com probabilidade que o nó tenha k arestas seguindo uma lei de potência e cujo expoente seja $\gamma_{BA} = 3$. A escala do expoente é independente de m , o único parâmetro do modelo. Por isso se chama *Rede Livre de Escala* (BARABÁSI et al., 1999).

Barabási e Albert propuseram a *teoria da continuidade* como uma aproximação analítica para as propriedades dinâmicas do modelo de rede livre de escala. Tal aproximação é focada na dinâmica do grau do nó.

Na aproximação da continuidade introduzida por Barabási e Albert (Albert-László Barabási, 1999) e Barabási, Albert e Jeong (BARABÁSI et al., 1999) calcula-se a dependência temporal do grau k_i de um dado nó i . Esse grau aumenta a cada vez que um novo nó entra no sistema e se liga ao nó i , com a probabilidade desse processo dado por $\prod(k_i)$. Assim, o k_i satisfaz a equação dinâmica:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = A \prod(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j}. \quad (3.14)$$

onde $A = m$. Então,

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j}. \quad (3.15)$$

A soma no denominador é sobre todos os nós do sistema, exceto sobre o novo nó introduzido na presente etapa. Portanto, seu valor é dado por

$$\sum_j k_j = 2mt - m, \quad (3.16)$$

que leva ao resultado

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t}. \quad (3.17)$$

Desde que seja respeitada a condição inicial de que todo os nós i , quando

introduzido ao sistema, tenham $k_i(t_i) = m$:

$$k_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta, \quad (3.18)$$

com $\beta = \frac{1}{2}$.

A Equação (3.18) indica que o grau de todos os nós evolui da mesma forma, seguindo uma lei de potência, a única diferença será a intersecção da lei de potência. Podemos escrever a probabilidade de que um nó tenha o grau $k_i(t)$ menor que k , $P[k_i(t) < k]$ da forma da Equação (3.19),

$$P[k_i(t) < k] = P \left(t_i > \frac{m^{1/\beta} t}{k^{1/\beta}} \right). \quad (3.19)$$

Assumindo que os nós são adicionados à rede em intervalos de tempo iguais, o valor de t_i será uma constante da densidade de probabilidade

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + t}. \quad (3.20)$$

Substituindo a Equação (3.20) em (3.19), obtemos

$$P \left(t_i > \frac{m^{1/\beta} t}{k^{1/\beta}} \right) = 1 - \frac{m^{1/\beta} t}{k^{1/\beta} (t + m_0)}. \quad (3.21)$$

A distribuição do grau $P(k)$ pode ser obtida usando

$$P(k) = \frac{\partial P[k_i(t) < k]}{\partial k} = \frac{2m^{1/\beta} t}{m_0 + t} \frac{1}{k^{1/\beta+1}}, \quad (3.22)$$

prevendo que assintoticamente ($t \rightarrow \infty$)

$$P(k) \sim 2m^{1/\beta} k^{-\gamma}, \quad (3.23)$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\beta} + 1 = 3. \quad (3.24)$$

sendo independente de m , em concordância com os resultados numéricos.

Como a lei de potência observada para redes reais descreve sistemas de diferentes tamanhos, isso prova que a distribuição do grau é independente do tempo. A

Equação 3.22 prediz que, assintoticamente, a distribuição do grau do modelo de Barabási-Albert é independente do tempo e, portanto, independente do tamanho do sistema $N = m_0 + t$, indicando que a rede atinge um estado estacionário livre de escala apesar do crescimento contínuo. Indica também que o coeficiente da lei de potência da distribuição é proporcional a m^2 .

3.2.2 Casos limites do modelo de Barabási-Albert

A lei de potência de escala no modelo de Barabási-Albert indica que os dois fatores — crescimento e preferência de conexão — são importantes para o desenvolvimento da rede. O que podemos indagar é se esses dois fatores são simultaneamente essenciais para a obtenção de uma curva de distribuição de lei potencial. Barabási, Albert e Jeong mostraram que sim (BARABÁSI et al., 1999). Eles consideraram dois modelos: *Modelo A* e *Modelo B*. O primeiro modelo mantém o caráter de crescimento da rede, mas elimina a preferência de conexão dos nós. O segundo, ao contrário, a quantidade de nós do sistema é mantida constante e as conexões são feitas para um nó aleatoriamente selecionado.

Assim, no *Modelo A*, o sistema inicialmente possui m_0 nós e em todos os passos temporais é acrescido um novo nó com $m (\leq m_0)$ arestas. É assumido que a probabilidade de um novo nó conectar com os nós existentes no sistema é igual para todos os nós, ou seja,

$$\prod(k_i) = \frac{1}{m_0 + t - 1}, \quad (3.25)$$

independentes de k_i . A teoria da continuidade prediz que $k_i(t)$ segue numa dependência logarítmica no tempo, e para $t \rightarrow \infty$ a distribuição do grau do nó segue um decaimento exponencial. Então, substituindo o valor de $\prod(k_i)$ na Equação 3.14, e usando a Equação 3.22, encontramos

$$P(k) = \frac{e}{m} \exp\left(-\frac{k}{m}\right). \quad (3.26)$$

O caráter exponencial da distribuição indica que a ausência da preferência de conexão elimina o caráter de rede sem escala.

No *Modelo B*, começamos com um número fixo de N nós e sem nenhuma aresta. A cada passo de tempo um nó aleatoriamente selecionado será conectado com probabilidade

$$\prod(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (3.27)$$

ao nó i no sistema. Consequentemente, esse modelo elimina o processo de crescimento, o número total de nós permanece constante durante todo o processo de evolução da rede.

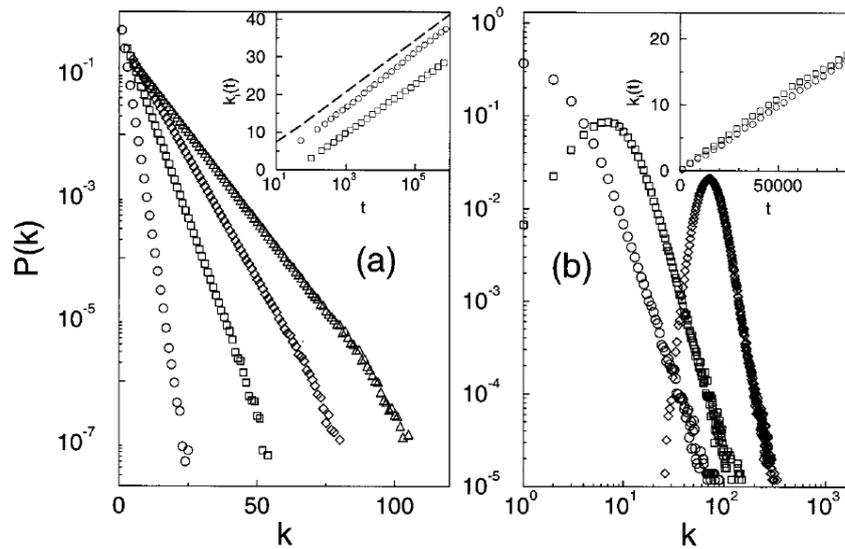


Figura 3.4 - (a) *Modelo A*: com crescimento, sem preferência de conexão. (b) *Modelo B*: sem crescimento, com preferência de conexão. (BARABÁSI et al., 1999)

Simulações numéricas indicam que embora no início o modelo apresente uma escala de lei de potências, $P(k)$ não é estacionário. Visto que N é constante e o número de arestas aumentam com o tempo, após $T \simeq N^2$ passos o sistema atinge um estado na qual todos os nós estão conectados com todos os outro nós. A evolução temporal de cada grau pode ser calculado analiticamente usando a teoria da continuidade. A taxa de variação da conectividade do nó i tem duas contribuições: a primeira descreve a probabilidade que um nó é escolhido aleatoriamente para ser a origem dos links,

$$\prod_{random} (k_i) = \frac{1}{N}; \quad (3.28)$$

e a segunda é proporcional à Equação 3.27, que descreve a probabilidade que uma aresta originária de um nó aleatoriamente selecionado é conectada ao nó i . Então, substituindo essas duas contribuições na Equação 3.14, temos:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = A \frac{k_i}{\sum_{j=1}^N k_j} + \frac{1}{N}. \quad (3.29)$$

Levando em conta que $\sum_j k_j = 2t$ e que a alteração na conectividade durante um passo temporal é $\delta k = 2$, e excluindo do somatório a aresta originária e desti-

natária com o mesmo nó, obtemos $A = N/(N - 1)$, que leva a

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{N-1} \frac{k_i}{2t} + \frac{1}{N}. \quad (3.30)$$

A solução de 3.30 tem a forma:

$$k_i(t) = \frac{2(N-1)}{N(N-2)}t + ct^{N/2(N-1)}. \quad (3.31)$$

Desde que $N \gg 1$, podemos fazer a aproximação de k_i com

$$k_i(t) = \frac{2}{N}t + ct^{1/2}. \quad (3.32)$$

Uma vez que o número de nós é contante, não temos "tempo de introdução" t_i para o nó. Existe, contudo, um tempo análogo a t_i : o tempo quando o nó i foi selecionado para o primeiro passo como a origem de uma aresta, e conseqüentemente sua conectividade muda de 0 para 1. Então, a Equação 3.31 é válida somente se $t > t_i$, e todos os nós seguiram esta dinâmica somente após $t \geq N$. A constante c pode ser determinada da condição que $\sum_j k_j = 2t$, e tem um valor $c = 0$, assim,

$$k_i(t) \simeq \frac{2}{N}t. \quad (3.33)$$

Desde que a teoria da continuidade prediga que após um período de transição o valor do grau médio de todos os nós seja o mesmo dado pela Equação 3.33, é esperado que a distribuição do grau se torne uma Gaussiana em torno do valor médio de k .

A falha dos modelos sem crescimento ou sem preferência de conexão para a obtenção de uma rede sem escala leva a conclusão que os dois elementos são simultaneamente necessários para a produção de uma distribuição de lei de potência estacionária que são observados nas redes reais.

3.3 Redes de Mundos Pequenos

“Qual é o probabilidade de duas pessoas, selecionadas arbitrariamente entre uma grande população, se conhecerem?” Essa foi basicamente a pergunta formulada por Milgram (MILGRAM, 1967) num modelo de estudo de redes sociais, em que foi introduzido o conceito de *fenômeno de pequeno mundo*.

Em 1998, Duncan J. Watts e Steven H. Strogatz, observando redes de sistemas dinâmicos acoplados, exploraram um modelo simples de redes, no qual uma rede regular era reconectada com a finalidade de introduzir uma desordem, até a obtenção de um grafo puramente aleatório. Nesse experimento, eles encontraram sistemas altamente agregados — característica grafos aleatórios — e um reduzido comprimento de caminho médio, que é característica de um grafo puramente aleatório. Em analogia ao fenômeno de pequeno mundo de Milgram, Watts e Strogatz chamaram essa rede de *rede de pequeno mundo*.

3.3.1 Modelo de Watts-Strogatz (WS)

O modelo de pequeno mundo mais conhecido em redes complexas foi proposto por Watts e Strogatz. Consiste de um modelo de grafo de um parâmetro — ρ — no qual temos uma interpolação entre uma malha (rede) finita ordenada e um grafo puramente aleatório.

3.3.2 Coeficiente de agregação e comprimento médio

É sabido que redes reais têm caráter de pequeno mundo como os grafos aleatórios, mas raramente têm um coeficiente de agregação grande. É conhecido também que o *coeficiente de agregação* depende apenas do número de coordenadas (ALBERT; BARABÁSI, 2002).

O *coeficiente de clustering* ou coeficiente de agregação é uma propriedade que diz o quanto a vizinhança desse nó está mutuamente conectada. Em redes sociais, por exemplo, é um conceito relacionado a coesão de um grupo de pessoas. Ou seja, quão amigos entre si são os meus amigos? Essa pode ser uma pergunta a ser respondida por esse tipo de análise. Assim, nós voltamos a atenção para um certo nó i de uma rede, que possui k_i arestas que conectam a k_i outros nós. Se os vizinhos mais próximos do nó i — ou seja, os nós que fazem parte do aglomerado de i — são ao todo k_i nós, então teremos $k_i(k_i - 1)/2$ arestas possíveis. Assim, a razão entre o número de arestas que realmente existe entre os nós k_i da vizinhança, E_i e número total $k_i(k_i - 1)/2$ de arestas possíveis para um total de k_i nós, resulta no valor do coeficiente de agregação do nó i ,

$$C_i = \frac{2 E_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (3.34)$$

Como exemplo, temos a Figura 3.5 com $N = 13$ nós, vamos calcular o coeficiente de agregação do nó $i = 13$. Vemos que $k_{13} = 7$ e $E_{13} = 6$, portanto, $C_{13} = 2/7$. O coeficiente de agregação da rede inteira é a média de todos os C_i s individuais. Portanto, $C = \langle C \rangle =$

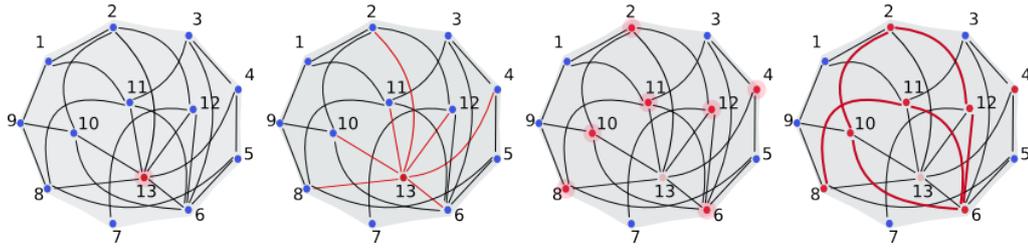


Figura 3.5 - Cálculo do \mathcal{C}_{13} : $k_{13} = 7$ e $E_{13} = 6$, portanto $\mathcal{C}_{13} = 2/7$.

$$\left(\sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i \right) / N = 0,207.$$

Em grafos aleatórios, uma vez que as arestas são assim distribuídas, o coeficiente de agregação é $\mathcal{C} = \rho$ (comparar com a Equação 3.1). Contudo, a maioria dos coeficientes de agregação de redes reais são maiores em comparação com o coeficiente de redes aleatórias (ALBERT; BARABÁSI, 2002). A construção de uma rede aleatória equivalente à rede real pode ser feita por meio da função geratriz (NEWMAN et al., 2001). Assim, a rede aleatória possui o mesmo número de nós e o mesmo número de arestas que a rede real correspondente, mas com as arestas distribuídas aleatoriamente.

Levando-se em conta que a maioria das redes não tem a topologia de conexão nem completamente regular, nem completamente aleatória, mas algo entre esses dois extremos, Watts e Strogatz exploraram um modelo de rede que podia transitar entre os extremos. De modo que, a rede regular era reconectada sucessivamente, conforme a probabilidade $\rho = \langle k \rangle / N$ — onde $\langle k \rangle$ é o grau do nó médio, que informa ao grau de desordem da rede original. Eles observaram que esses sistemas podiam ser altamente clusterizados, como as estruturas regulares, mas que possuíam pequenos comprimentos de caminho característico, tais como as redes aleatórias.

Nesse modelo, Watts e Strogatz interpolam entre uma rede regular e aleatória seguindo um processo de reconexão aleatório. Assim, uma rede em forma de anel com N nós e k arestas por nó, que é conectado de forma regular, é sucessivamente reconectada de forma aleatória com probabilidade ρ . Por esse algoritmo é obtido um conjunto de grafos que variam de grafos regulares ($\rho = 0$) a totalmente desordenados ($\rho = 1$). E portanto, é possível investigar a região intermediária $0 \leq \rho \leq 1$ de uma rede que pouco se conhece. Podemos observar esse método na Figura 3.6.

Por esse método é possível quantificar as propriedades estruturais desses grafos por meio do comprimento de caminho característico (característica global), $\mathcal{L}(\rho)$,

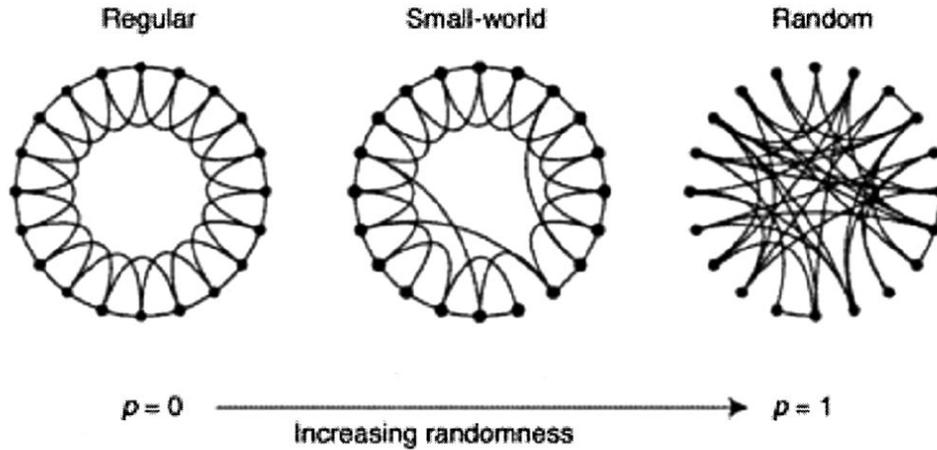


Figura 3.6 - Procedimento aleatório de conexão para interpolação entre uma rede em forma de anel regular e uma rede aleatória (WATTS; STROGATZ, 1998).

e do coeficiente de agregação (característica local), $\mathcal{C}(\rho)$, que são importantes para determinação de rede de pequeno mundo. Pela Figura 3.7, podemos observar que uma rede regular apresenta $\mathcal{L}(\rho)$ e $\mathcal{C}(\rho)$ grandes, uma rede puramente aleatória, todavia, apresenta $\mathcal{L}(\rho)$ e $\mathcal{C}(\rho)$ pequenos. Entretanto, uma rede de pequeno mundo possui $\mathcal{L}(\rho)$ pequeno e $\mathcal{C}(\rho)$ grande.

É interessante que a rede possua muitos nós e poucas conexões, sem, no entanto, que o grafo chegue a ser desconectado. Esse estudo requer que $N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$, onde $k \gg \ln(N)$ garante que o grafo aleatório seja conectado. Nesse regime, para $\rho \rightarrow 0$, $\mathcal{L}(0) \sim N/2k = 3,2$ e $\mathcal{C}(0) \sim 3/4$ (WATTS; STROGATZ, 1998). Assim, uma rede regular de $\rho = 0$ é altamente clusterizado e o \mathcal{L} cresce linearmente com o N , enquanto que redes puramente aleatórias de $\rho = 1$ é pouco agregado e \mathcal{L} cresce somente logaritmicamente com N .

Outro parâmetro importante para a caracterização de uma rede de pequeno mundo é o *comprimento médio*, $\mathcal{L}(\rho)$. Em teoria de redes o conceito de comprimento médio está relacionado ao número médio de nós ao longo do caminho mais curto para todos os pares possíveis de nós da rede. Assim, considere um grafo G com V vértices, onde $l(i, j)$ é o número de nós entre o par de nós i e j . Definimos $l(i, j) = 0$ quando $i = j$ e quando i não alcança j . Dessa forma, temos a expressão

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j} l(i, j), \quad (3.35)$$

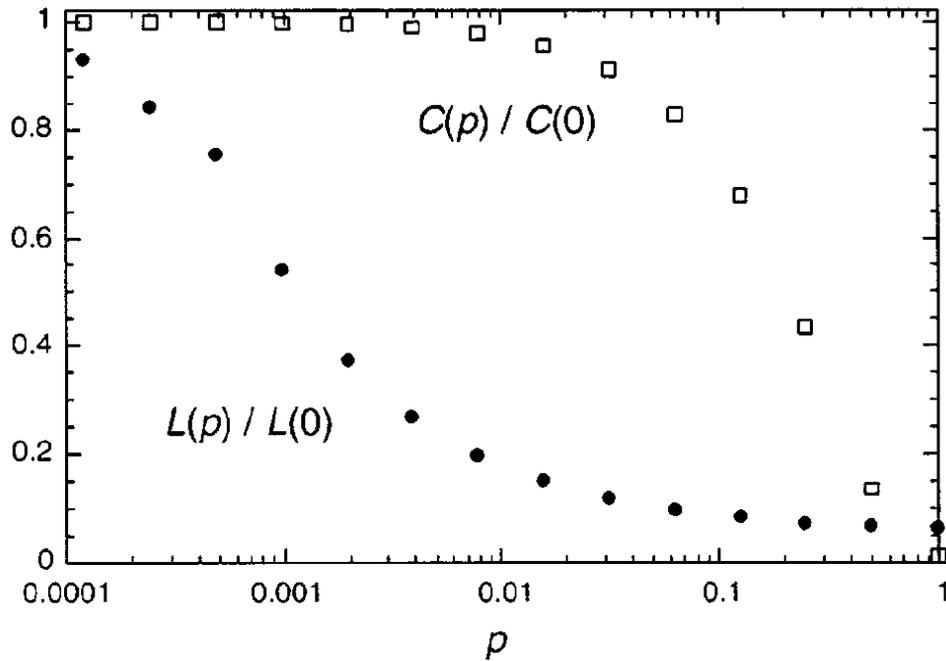


Figura 3.7 - Gráfico de comprimento médio de caminho $\mathcal{L}(\rho)/\mathcal{L}(0)$ e coeficiente de agregação $\mathcal{C}(\rho)/\mathcal{C}(0)$: uma rede regular tem \mathcal{L} e \mathcal{C} grandes; rede aleatória tem \mathcal{L} e \mathcal{C} pequenos; rede de pequeno mundo tem \mathcal{L} pequeno e \mathcal{C} grande. (Figura tirada de (WATTS; STROGATZ, 1998))

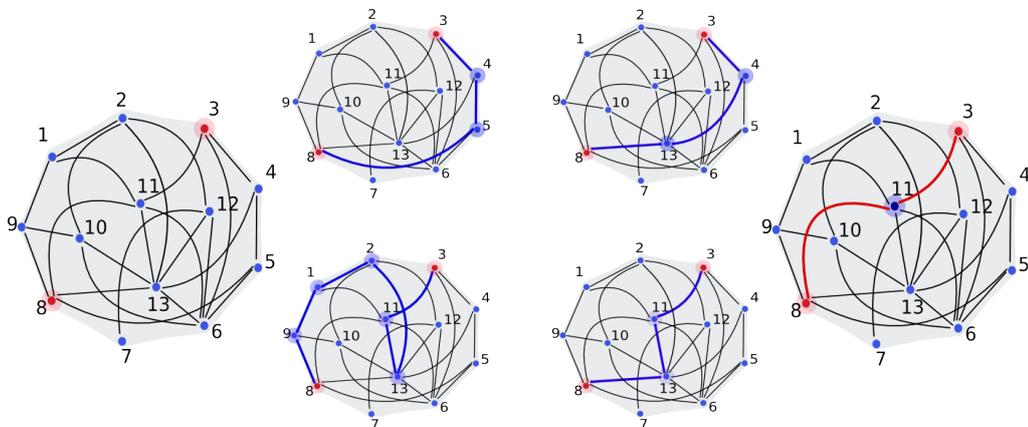


Figura 3.8 - Comprimento médio de caminho $l(8,3)$ entre $i = 8$ e $j = 3$, vemos que o menor caminho é $l(8,3) = 1$, passando pelo nó 11.

para o comprimento médio. O termo $N(N - 1)/2$ é o total de arranjos possíveis 2 a 2 de um grafo com N vértices. Ressaltamos que o somatório deverá ser dividido por 2, pois supomos um grafo não direcional, ou seja, \mathcal{L} de i a j é igual ao \mathcal{L} de j a i . Na Figura 3.8, mostramos um exemplo.

4 REDE DE TRANSPORTE URBANO DO DISTRITO FEDERAL

4.1 Transportes Urbanos do Distrito Federal - DFTRANS

DFTRANS - Transporte Urbano do Distrito Federal - é uma autarquia criada pela Lei nº 241, de 28 de Fevereiro de 1992. É a entidade gestora do transporte público coletivo do Distrito Federal, dentre suas atribuições estão: o planejamento das linhas, a avaliação de desempenho, a caracterização da demanda e da oferta de serviços, a elaboração dos estudos dos custos de serviços e dos níveis tarifários, a gestão, o controle e a fiscalização dos serviços públicos de passageiros(DFTRANS, 2008).

O Serviço de Transporte Público Coletivo (STPC) divide-se nos seguintes serviços (DFTRANS, 2008):

- Serviço Convencional (ônibus - STPC);
- Serviço Especial Vizinhança (zebrinha - STCEV);
- Serviço Autônomo Rural (rural - STPC/TA);
- Serviço de Transporte Coletivo Privado (fretamento - STCP);
- Serviço de Transporte Público Básico (Microônibus - STPB);
- Serviço Próprio de Empregados (fretamento - STPE).

Em síntese, o Serviço convencional é constituído por linhas de ligação e linhas circulares. As linhas de ligação, fazem a ligação entre as Regiões Administrativas (RAs) do DF e possuem viagens de ida e de volta. Já as linhas circulares fazem o itinerário dentro de uma RA, ou entre as RAs diferentes, a característica fundamental nas linhas de ligação é que elas são linhas fechadas.

Este trabalho foi realizado através da análise de dados do Serviço Convencional de Transporte Público, do qual constituem as linhas de ligação e circulares.

4.2 Construção das redes de transporte urbano

Para a análise de redes complexas do Sistema de Transportes Urbanos do Distrito Federal (STUDF) são necessários dois tipos de dados: linhas de ônibus e pontos de ônibus. As linhas de ônibus foram fornecidas pela autarquia gestora DFTRANS — Transportes Urbanos do Distrito Federal—por meio de arquivos em formato pdf, nos quais

havia mapas de percursos dos itinerários de linhas de ônibus que operavam no Distrito Federal (DF) em 2008 e 2009. Para transformar essas imagens em dados matemáticos tratáveis para a pesquisa, foi utilizado o programa Google Earth 5.0 com o qual obtivemos as coordenadas dos caminhos de cada linha de ônibus.

O Google Earth 5.0 permite que o usuário visualize qualquer localidade da superfície terrestre através de imagens de satélites, mapas, etc. Esse software possui ferramentas que possibilitam o usuário a alimentar os arquivos desse programa com objetos, cujas coordenadas das posições de cada objeto inserido no mapa (latitude, longitude e altura) são gerados em formato xml. O formato xml dos arquivos de saída tem a vantagem de nos fornecer os dados em formato do qual podemos extrair as informações físicas necessárias à criação das redes.

Com esse recurso, portanto, iniciamos o mapeamento de todos os pontos de parada de ônibus do DF através da visualização de abrigos de passageiros do ponto de ônibus. Todavia, esse método é ineficaz para os casos em que não existe abrigo de passageiros. Então, quando o ponto de parada estava sinalizado apenas com placa, o mapeamento foi realizado com a consultoria de um técnico do DFTRANS. De modo que, obtivemos um conjunto de objetos, representando os 3.438 pontos de parada de ônibus. Cada um desses objetos no Google Earth 5.0 possuía informações como latitude, longitude, altura, entre outras que são úteis para o trabalho.

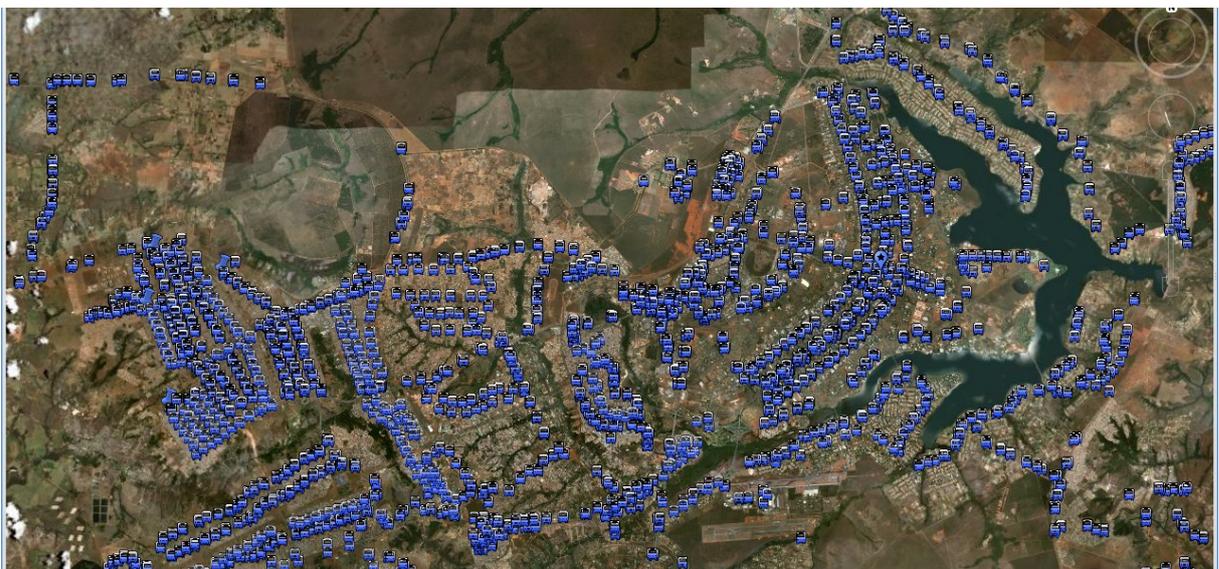


Figura 4.1 - Pontos de parada de ônibus do Distrito Federal.

Feito isso, mapeamos as linhas de ônibus utilizando novamente o Google Earth 5.0. Desta vez, os objetos do tipo caminho do Google Earth 5.0 foram usados para desenhar a rota de viagem de uma linha de ônibus. Cada objeto do tipo caminho possui informações de posicionamento dos vários pontos que constituem esse caminho, pois esse objeto é constituído por vários objetos pontuais ligados por retas. Ou seja, os dados de posicionamento do caminho, na verdade, são formados por um conjunto de latitudes e longitudes dos objetos pontuais que compõem cada caminho. Apesar de o Google Earth mostrar sem seu modo visual um objeto tipo caminho como um segmento de reta, nos arquivos de saída em formato xml esse caminho apresenta apenas as coordenadas (latitude e longitude) de pontos extremos do segmento de reta visualizado. De forma que, quanto mais próximos são inseridos os pontos do reta, melhor desenhado será uma curva. Após alimentar o programa com todos os objetos necessários, caminhos representando as linhas de ônibus e objetos pontuais representando os pontos de ônibus, implementamos programas que extraem as coordenadas deles.

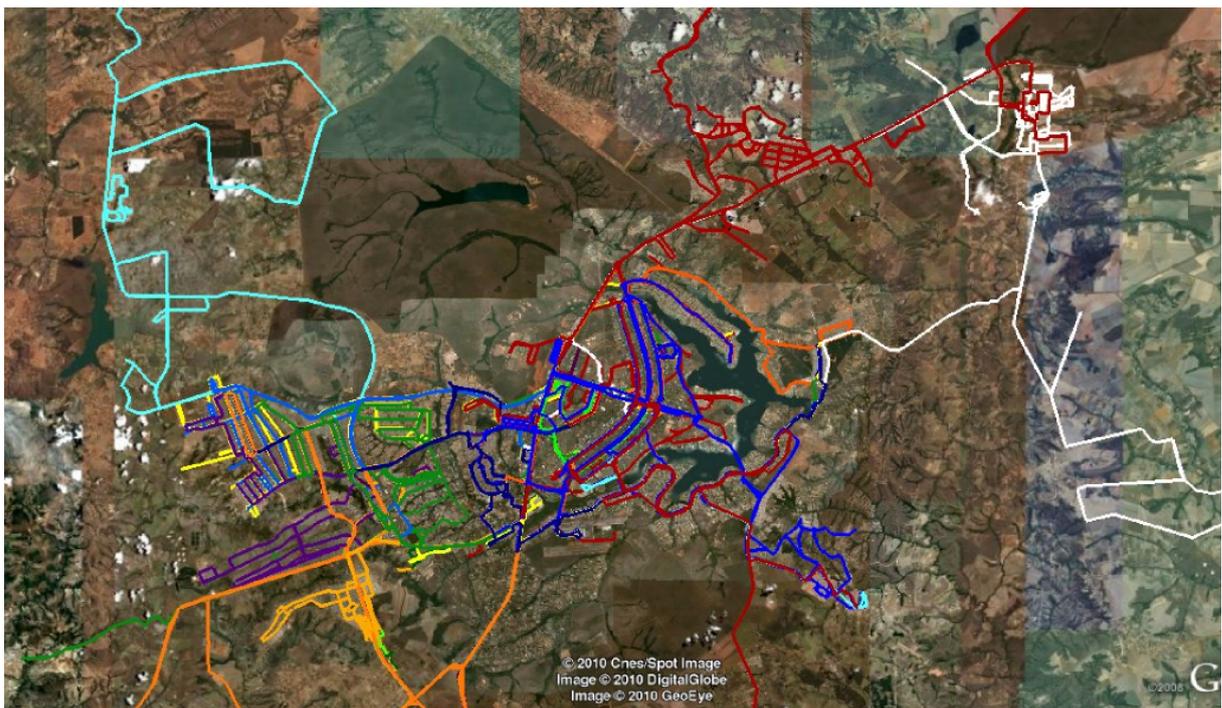


Figura 4.2 - Linhas de ônibus do Distrito Federal.

Assim, criamos um arquivo em formato texto com 3.438 pontos de ônibus, caracterizados por nome, latitude e longitude, e 856 arquivos de linhas de ônibus, cada um contendo as latitudes e as longitudes de locais nos quais o caminho da linha de ônibus é traçado (rota de viagem ou itinerário).

Após a criação de cada arquivo de linhas e do arquivo de pontos de parada do DF como arquivos do tipo texto, fizemos um software para gerar os arquivos onde cada linha de ônibus é formada por um conjunto de pontos de ônibus e cada ponto de parada de ônibus, por um conjunto de linhas de ônibus. Esse recurso é necessário para identificar quais as linhas de ônibus que passam em um ponto de parada de ônibus e quais os pontos de parada de ônibus que pertencem a uma linha de ônibus.

Ou seja, usamos a definição de conjuntos para organizar cada linha e cada ponto de parada. Assim, o ponto de ônibus P_1 , por exemplo, é dado por $P_1 = [L_1, L_2, \mathbf{L}_4, L_{76}, L_{398}]$ e a linha L_4 , por exemplo, é dada por $L_4 = [\mathbf{P}_1, P_3, P_{35}, P_{36}]$. Isso significa que no ponto de parada P_1 passam as linhas $L_1, L_2, \mathbf{L}_4, L_{76}$ e L_{398} e que a linha L_4 atende os pontos de ônibus $\mathbf{P}_1, P_3, P_{35}$ e P_{36} .

A próxima etapa de construção de uma rede é construir um grafo. Vimos que grafos são objetos matemáticos formados por um conjunto de nós conectados por um conjunto de arestas.

Dessa forma, observamos o conjunto interseção entre cada dois conjuntos para descobrirmos se existe uma aresta entre dois nós. Por outro lado, se o conjunto interseção não é um conjunto vazio, então existe uma aresta. Se esse conjunto interseção é um conjunto vazio, então não existe aresta. Com isso, criamos um grafo simples.

Além disso, podemos verificar a existência de múltiplas arestas entre cada par de nós. E a rede gerada com essa informação adicional é conhecida como rede ponderada, onde podemos trocar as múltiplas arestas por uma única aresta com peso (NEWMAN, 2004).

Dessa forma, temos dois conjuntos: \mathbf{P} — conjunto de pontos de parada, que é formado por subconjunto, cujos elementos são linhas de ônibus que atendem ao ponto P_i — e \mathbf{L} — conjunto de linhas—, ou seja, $\mathbf{P} = \{P_1 = [L_1, L_2, \dots, L_j], P_2 = [L_1, L_2, \dots, L_j], \dots, P_m = [L_1, L_2, \dots, L_j]\}$ e, por analogia, \mathbf{L} é constituído por subconjuntos L_j , cujos elementos são pontos de ônibus, ou seja, $\mathbf{L} = \{L_1 = [P_1, P_2, \dots, P_i], L_2 = [P_1, P_2, \dots, P_i], \dots, L_n = [P_1, P_2, \dots, P_i]\}$. Vamos supor um sistema de transporte formado por cinco pontos de ônibus $\mathbf{P} = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5]$ e quatro linhas de ônibus $\mathbf{L} = [L_1, L_2, L_3, L_4]$, Figura (4.3): Primeiramente definimos os pontos de parada como nós e as linhas de ônibus como arestas. Então, cada nó é um subconjunto P_i e as linhas que atendem ao ponto P_i são os elementos desses subconjunto. Comparamos os elementos de dois subconjuntos, se existe um elemento em comum entre esses dois subconjuntos, então eles estarão conectados entre si, ou seja, haverá uma aresta entre os nós.

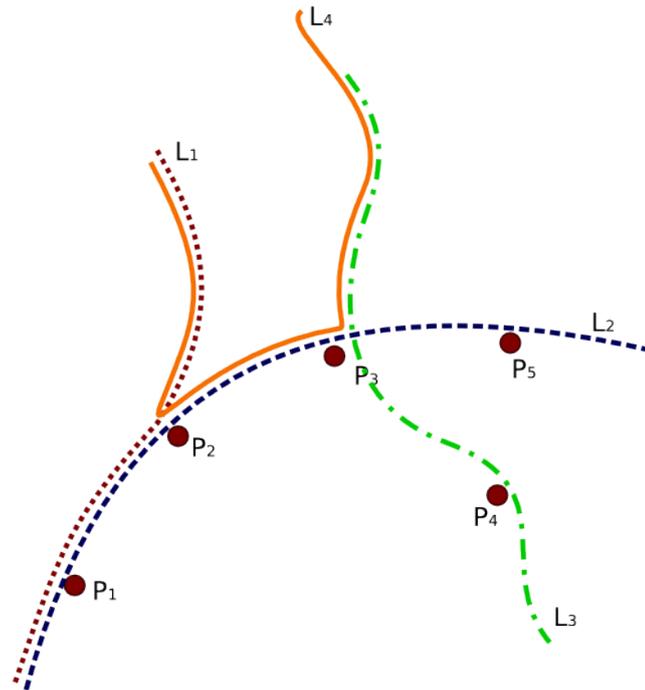


Figura 4.3 - Esquema de um sistema de transporte urbano.

Continuamos essa análise para todos os conjuntos de pontos do sistema, eventualmente podemos encontrar a *multiplicidade de aresta*, definida como sendo a quantidade de elementos em comum entre dois subconjuntos, ou seja, a interseção entre os dois subconjuntos analisados.

A teoria de redes complexas é bastante versátil, pois pode ser usada para explicar diversos sistemas. Mas ao mesmo tempo que isso parece ser uma vantagem, temos que tomar muito cuidado com as definições dos elementos que as compõem. Observando o STUDEF vemos que existem algumas formas distintas de construir uma rede. Por isso, nós estabelecemos três tipos de redes: a rede-*P*, a rede-*L* e a rede-*B* (CHEN et al., 2007).

- Rede-*P*: A construção dessa rede foi feita inicialmente para a rede de transporte ferroviário da Índia (SEN et al., 2003), muito usado desde então para modelar vários outros tipos de sistemas de transportes: metroviário (LATORA; MARCHIORI, 2002), de ônibus (CHEN et al., 2007; XU et al., 2007; CHEN; LI, 2007; Zhu Zhen-Tao; XING-GUANG, 2008; SIENKIEWICZ; HOLYST, 2005), etc. Nessa rede os pontos de parada de ônibus representam os nós. As arestas são representadas pela existência de linhas de ônibus que passa em dois pontos. A rede-*P* é uma rede não direcionada, por simplificação. Além disso, não é levando em consideração a distância geográfica entre os nós, mas um nó é vizinho de primeira ordem

de outro se esse outro for atendido por pelo menos uma linha de ônibus que passa pelo primeiro nó. Ou seja, tanto faz se o ponto de ônibus é o seguinte na via ou se é o último ponto da linha (um terminal rodoviário), ambos são considerados primeiros vizinhos do nó analisado. Assim, todos os pontos de parada que são atendidas por uma determinada linha serão vizinhos de primeira ordem um do outro. O grau do nó leva a definição padrão. De modo que, valor de k_i é o número de pontos de paradas conectados ao ponto de parada i . Esta rede é importante para a análise dos pontos de ônibus centrais do sistema de transporte através da análise da distribuição do grau do nó. Além disso, podemos observar como se distribui a quantidade de pontos de transbordo (pontos de ônibus intermediários entre dois pontos de ônibus quaisquer do DF), o número máximo de pontos de transbordo é um dos resultados esperados. Na prática, tais características da rede- P podem auxiliar em planejamentos de um sistema de transporte integrado e de um sistema com tarifa única.

- Rede- L : Para essa rede as definições são ao contrário das definidas para a rede- P . Nesse caso, as linhas de ônibus representam os nós. Se duas linhas passam por pelo menos um ponto de parada em comum, então existe aresta entre esse par de linhas de ônibus (CHEN et al., 2007; Zhu Zhen-Tao; XING-GUANG, 2008). A ideia é descobrir se existem linhas isoladas, ou ainda, se é possível acessar uma determinada região tomando a linha L_1 e depois a linha L_2 . O grau do nó, portanto, é o número de linhas de ônibus com os quais a linha analisada pode cruzar. Procedendo-se com a análise do grau do nó dessa rede, podemos observar se uma linha de ônibus é muito parecida com outra, se o nó dessa rede- L tem um grau grande, sugere que essa linha conecta bastante com as outras linhas. Assim, um passageiro que tenha que se decidir se utiliza uma linha L_i ou uma linha L_j para tomar outra linha, ele pode se decidir em tomar aquela linha com o grau maior, visto que a probabilidade desse passageiro conseguir tomar outra linha é maior para o caso de linhas com maior grau.
- Rede- B : essa é uma rede bipartida que foi concebida na análise de redes do sistema de transportes da China (CHEN et al., 2007; Zhu Zhen-Tao; XING-GUANG, 2008). Da mesma forma, fizemos a rede- B do Sistema de Transportes Urbanos do DF. Nesse caso, tanto os pontos de parada como as linhas de ônibus representam os nós da rede Figura (4.4). As arestas ligam os nós tipo ponto de parada aos nós tipo linha de ônibus. Não existe arestas entre dois nós de mesma natureza, que é característica de redes bipartidas. Para essa rede- B o grau do nó segue o seguinte algoritmo: seleciona-se um nó tipo ponto de parada i_p Figura (4.4(a)), seleciona-

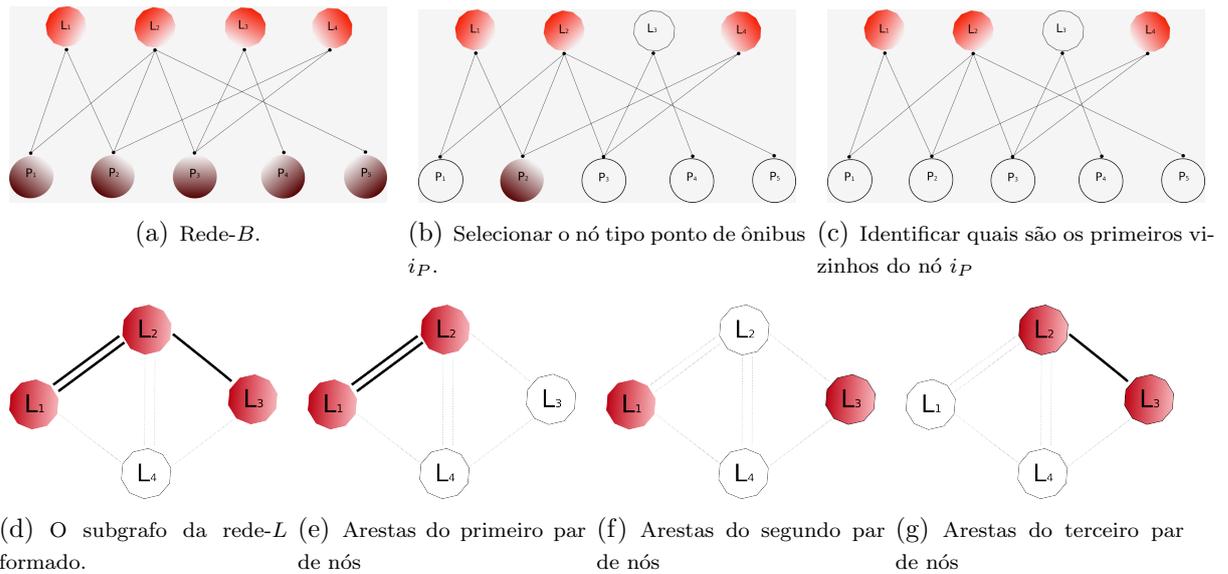


Figura 4.4 - Esquema de montagem da rede-B.

se todos pontos tipo linha de ônibus do nó i_p , que formaram um subgrafo de i_p de primeiros vizinhos Figura (4.4(b)). Agora, cada par de nós tipo linha de ônibus dessa vizinhança deve ser investigada, de tal forma que se descubra quantos pontos de ônibus em comum existe entre eles Figura (4.4(c)), esse cálculo é o mesmo feito para saber se dois nós da rede-L têm ou não aresta Figura (4.4(d)). São realizadas todas combinações par a par dos elementos da vizinhança de i_p , Figuras(4.4(e), 4.4(f) e 4.4(g)). Posteriormente, somam-se todas essas arestas da vizinhança.

4.3 Grafos e matrizes

Para a representação numérica dos vértices e arestas de um grafo, podemos utilizar como ferramenta matemática as matrizes bidimensionais. As matrizes mais conhecidas são a Matriz de Adjacências e a Matriz de Incidência. A primeira matriz é definida, tal que:

Definição 4.3.1. *Seja G um grafo não direcional de n vértices, e definindo uma matriz, $n \times n$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_G$ como um conjunto de $a_{i,j}$ igual ao número de arestas entre os vértices i e j . Então \mathbf{A} é denominado de matriz de adjacências de G .*

Assim, para o grafo da Figura 2.3, que representa a rede-P da Figura 4.3, podemos construir a matriz de adjacências \mathbf{A}_G , percebemos que ela é simétrica, pois trabalhamos com uma rede não direcionada. Isso, porque em um grafo não direcionado a

conexão de i para j é igual ao de j para i .

$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos, portanto, escrever as matrizes \mathbf{A}_P e \mathbf{A}_L , para representar a rede-P e a rede-L, respectivamente, do sistema ilustrado na Figura 4.3. Usando o mesmo método, construímos as matrizes de adjacências do Sistema de Transporte Urbano do Distrito Federal.

$$\mathbf{A}_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Posteriormente construímos outras matrizes levando-se em conta a *multiplicidade de arestas* da rede. A matriz \mathbf{M}_P representa matematicamente o *multigrafo* da rede- P ponderada e a \mathbf{M}_L representa o multigrafo da rede- L ponderada. Nas matrizes adjacentes de multigrafos, o elemento da matriz não se restringe ao valor binário 0 e 1, mas ao valor do peso da conexão para cada par de nós. O peso equivale à quantidade de arestas existentes na conexão de um par de nós (NEWMAN, 2004). Estudos de redes ponderadas são bastante comuns na literatura, podendo abordar desde redes de colaboradores (NEWMAN, 2001a; NEWMAN, 2001b) a redes world wide web (www) e transportes aéreos (BARRAT et al., 2004). Uma rede real possui muito mais informações relevantes que apenas suas conexões, de modo que, a força da conexão seja um parâmetro relevante (NEWMAN, 2004).

No caso das redes de transportes do DF, acreditamos que a quantidade de maneiras diferentes de conectar dois nós seja um parâmetro importante para o usuário e para o planejamento do transporte. Suponhamos, por exemplo, que ocorrerá um Encontro de Física de Sistemas Complexos na cidade e um estudante tenha que escolher onde se hospedará durante o evento. Imaginando que o evento ocorra próximo ao P_3 (Figura 4.3) e ele encontre hotéis mais baratos próximos ao ponto P_2 e ao ponto P_5 . Se ele tiver acesso às informações da rede- P ponderada, certamente ele escolherá o hotel próximo ao ponto P_2 , pois é mais fácil sair de P_2 e chegar a P_3 que sair de P_5 e chegar em P_3 , visto que

entre P_2 e P_3 existem duas linhas de ônibus, L_2 e L_4 , que atendem ambos os pontos. Diferentemente da conexão entre P_5 e P_3 , onde passa apenas uma linha, L_2 , que conecte esses dois pontos.

$$\mathbf{M}_P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com esta motivação construímos as duas matrizes \mathbf{M}_P e \mathbf{M}_L do transportes do DF, da seguinte forma: na primeira matriz, que representa a rede- P ponderada, onde cada ponto de ônibus é definido como um nó i , temos um conjunto de pontos de paradas $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$. O elemento de matriz a_{ij} representa a *multiplicidade de aresta* entre o nó i e o nó j escolhido entre os pontos de paradas pertencentes ao conjunto \mathbf{P} .

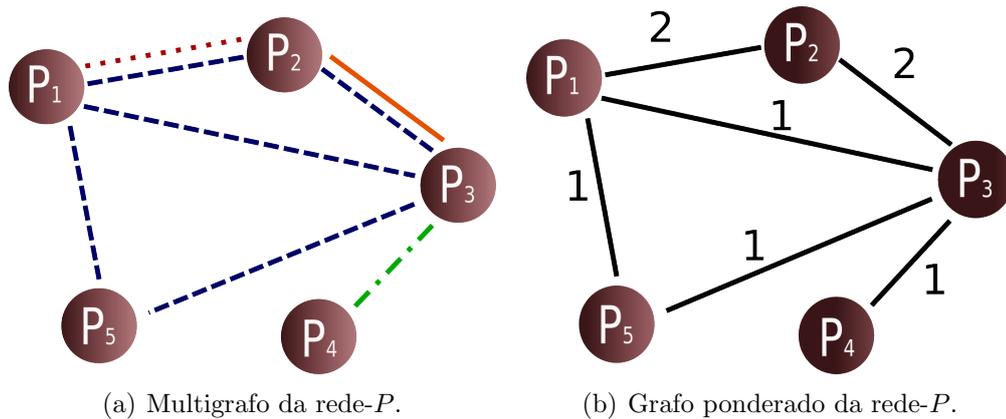


Figura 4.5 - Rede- P ponderada.

Para melhor entendimento, ilustramos os grafos de cada rede nas figura Figura 4.5 e Figura 4.6, com base no sistema da Figura 4.3. Vimos que, nessa rede- P consideramos como aresta a existência de linha de ônibus que atenda ambos os pontos de parada (P_i e P_j) analisados. Ou seja, contamos quantas linha de ônibus L_n atendem P_i e P_j quaisquer. Portanto, o valor da aresta a_{ij} será a quantidade de linhas entre os nós i e j .

Na prática significa que, quando um passageiro está num dado ponto da

cidade (ponto de ônibus) e quer chegar a outro, o que interessa é se existe ou não a possibilidade de isso ocorrer com apenas uma única viagem. O interessante de considerar as múltiplas arestas, no entanto, é que podemos descobrir quão conectados se encontram dois pontos do DF, pois o elemento de matriz a_{ij} nos fornece o número de linhas que atendem tanto o ponto P_i quanto o ponto P_j .

Na segunda matriz, que representa a rede- L , cada linha de ônibus é o nó i da rede, e assim, teremos um conjunto de $\mathbf{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ nós que formam a rede, e cujas arestas são definidas como o número de links entre as linhas L_i e L_j quaisquer. O link é definido como a existência de um ponto de ônibus qualquer, P_m , comum a duas linhas de ônibus. O valor da aresta a_{ij} será, então, o quantitativo de links entre as linhas L_i e L_j . Essa propriedade traz informações sobre quanto uma linha de ônibus é parecida com outra.

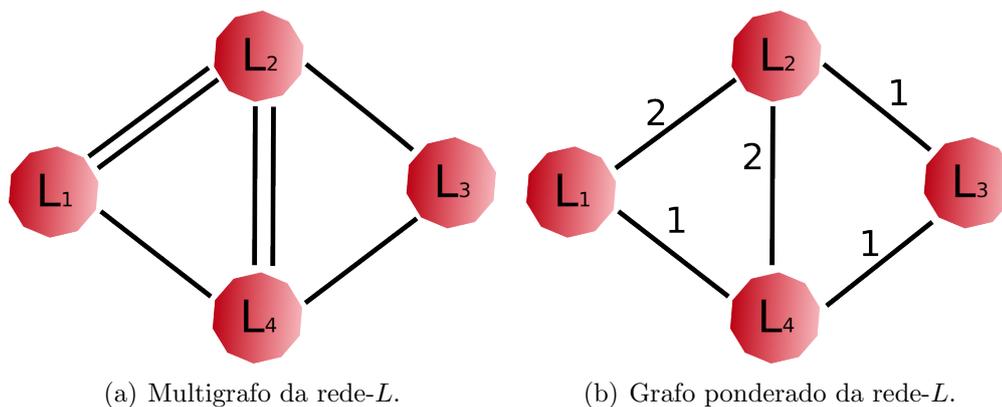


Figura 4.6 - Rede- L ponderada.

Além das redes não ponderadas, representadas pelas matrizes binárias A_P e A_L , e das redes ponderadas, representadas pelas matrizes M_P e M_L , construímos a rede- B , que é um *misto* das rede- P e rede- L . Essa rede- B é uma rede bipartida, na qual existem dois tipos de nós: nó-ponto, P_i , e nó-linha, L_i . A definição de rede bipartida é tal que os nós de mesmo tipo não se conectam entre si, existe, portanto, conexão direta apenas entre nós de natureza diferente. A Figura 4.7 ilustra a rede bipartida criada para o sistema de transporte exemplificado pela Figura 4.3. Alguns especialistas dizem que as rede- M_P e a rede- M_L são projeções da rede- B (CHEN et al., 2007). Assim, geramos a matriz de incidência B , onde cada coluna da matriz é um *nó-ponto* e cada linha da matriz é um *nó-linha*. Teremos, portanto, uma matriz retangular $m \times n$, com m nós-ponto e n nós-linha.

Utilizando essa matriz- B , para um dado nó-ponto i_P , corremos todas as linhas da matriz da coluna i , para aqueles elementos a_{ij} iguais a 1, haverá um link entre i_P e os L_j s. Assim, descobrimos quais os nós-linha são conectados ao nó-ponto i_P . Feito isso, tomamos, então, cada nó-linha dois a dois e calculamos a multiplicidade de aresta, que será facilmente encontrada, visto que essas multiplas arestas já foram calculadas pela matriz M_L . Desse modo, a cada combinação dois a dois dessas linhas que pertencem ao nó-ponto i_P , são calculadas e somadas uma a outra. Essas redes estão bem definidas no trabalho de Zhu e outros (Zhu Zhen-Tao; XING-GUANG, 2008).

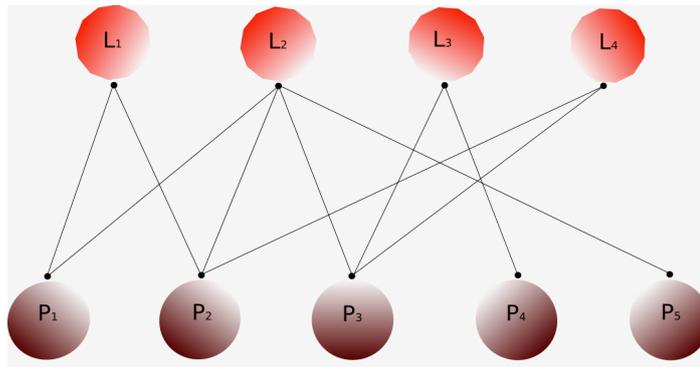


Figura 4.7 - Rede- B bipartida.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostramos na seção (3.1.1) e na seção (3.2.1) que a distribuição do grau do nó é um parâmetro importante para a caracterização de uma rede.

Em uma rede não ponderada o grau do nó k_i expressa a quantidade de nós com os quais o nó i possui conexão. Nos caso da rede- P , é a quantidade de pontos de ônibus, usando uma única linha de ônibus por viagem, onde o passageiro possa chegar a partir do nó i . No caso da rede- L , é a quantidade de linhas com as quais uma linha pode cruzar, como definido anteriormente, cruzar significa ter pelo menos um ponto de parada em comum a cada duas linhas. Na literatura, esse valor pode ser calculado por meio das

matrizes adjacentes,

$$k_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}. \quad (4.1)$$

onde i é o i -ésimo nó analisado e a_{ij} o elemento de matriz (BOLLOBÁS, 1998).

Além disso, algumas propriedades de redes não ponderadas podem ser empregadas no estudo de redes ponderadas, tais como o grau do nó (NEWMAN, 2004). Que recebe a denominação de força do nó (*strength*), s_i do nó i (MELLO et al.,). Nesse sentido, analisamos a distribuição da força do nó das redes ponderadas do sistema de transportes.

Dessa forma, para cada rede ponderada, nós obtivemos a distribuição da força do nó s_i da rede ponderada, utilizando as matrizes M_P , M_L . Também calculamos a distribuição da força do nó da rede bipartida B , onde s_{P_i} é a força do nó i do rede- P , s_{L_i} é a força do nó i do rede- L .

O s_{P_i} é definido como a quantidade de conexões que o nó i possui, de forma a permitir sair dele e chegar em outro ou vice-versa, visto que se trata de redes não direcionadas. Isso significa que há s_{P_i} maneiras diferentes de se sair do nó i ou entrar nele, por exemplo, usando, ainda, o sistema fictício da Fig.4.3, o ponto de ônibus P_3 , possui $s_{P_3} = 5$. Um passageiro pode sair de P_3 pela linha L_1 ou L_2 e chegar em P_2 , pela linha L_3 e chegar em P_4 , pela linha L_2 e chegar em P_1 e pela linha L_2 e chegar em P_5 . Essas são as formas de sair de P_3 . O s_{L_i} , é análogo à definição de s_{P_i} .

Podemos representar a operação dos nós s_{P_i} e s_{P_j} como a soma de todos os elementos matriciais pertencentes à coluna i , ou seja, a soma dos valores dos elementos de cada coluna para encontrar a força do nó i , s_i :

$$s_i = \sum_{j=1}^m w_{ij}. \quad (4.2)$$

E finalmente, calculamos o grau do nó i da rede bipartida rede- B , k_{B_i} . Um pouco diferente dos cálculos das forças do nó anteriores, a definição do grau para o rede- B segue o seguinte algoritmo: selecionamos um *nó-ponto* e tomamos todos os *nó-linhas* que o atendem, formando um subgrafo do *nó-ponto* i e então, fazemos uma análise da conexão a cada dois *nó-linhas* desse subgrafo de i , como foi feito para o caso do s_{L_i} , mas desta vez, apenas entre as linhas que pertencem ao nó i e não mais de toda a rede. Repetimos esse procedimento para todos os outros nós tipo *nó-ponto*.

Para o k_{B_i} , usando novamente o sistema da Figura (4.3), temos que para

calcular, por exemplo, o grau do nó P_3 , temos que selecionar todas as linhas que passam por ele. Definimos o grau do nó de rede-B, k_{B_i} , de forma análoga ao que Zhu Zhen-Tao e outros (Zhu Zhen-Tao; XING-GUANG, 2008) definiram, ou seja, tomando como o nó i apenas os *nós-ponto*. Isso é fácil observando a matriz B , onde tem $a_{3j} = 1$, tem uma linha j que atende esse ponto. Assim, as linhas que pertencem a P_3 são $\{L_2, L_3, L_4\}$. Calculamos, então, a força do nó entre L_2L_3, L_2L_4 e L_3L_4 , que na verdade, pode ser retirado de um subgrafo do grafo representado pela matriz M_L , no qual são contados apenas as linhas $\{L_2, L_3, L_4\}$. Feito isso, somamos o valor de $k_{M_3} = w_{23} + w_{24} + w_{34}$.

5 RESULTADOS

5.1 Densidade de linhas de ônibus por ponto de parada

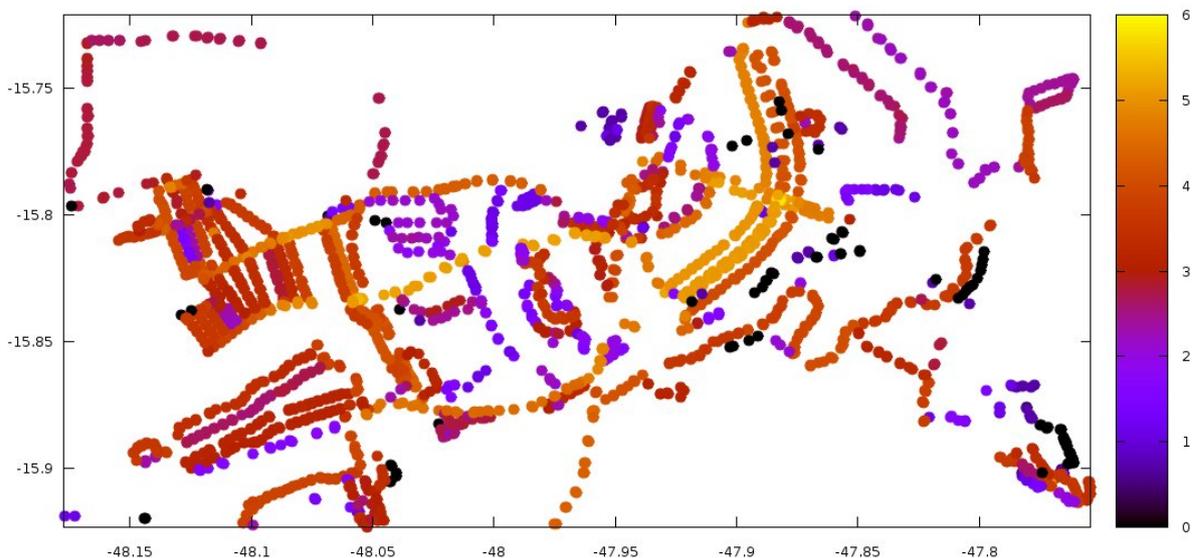


Figura 5.1 - Densidade de linhas dos pontos de ônibus do Distrito Federal.

O primeiro resultado do trabalho consiste no estudo da quantidade de pontos de ônibus e de linhas de ônibus do Distrito Federal. Obtivemos a Densidade de linhas de ônibus de cada ponto de ônibus. A Figura (5.1) descreve essa densidade. Na coluna de cores na lateral do gráfico mostramos, em escala logarítmica, a quantidade de linhas de ônibus por ponto de ônibus. Nessa escala, quanto mais “quente” é a cor, maior é a densidade de ônibus, seja, a parte do Distrito Federal mais amarela possui maior atendimento de linhas de ônibus pelo sistema de transporte público coletivo. Para as cores mais “frias”, entretanto, é observado pouca oferta de linhas e, portanto, de itinerários para o passageiro que se encontra nesse pontos. É interessante notar, que, apesar da simetria espacial do Plano Piloto, vemos que há uma assimetria na oferta de transporte urbano na cidade. Vemos que a região sul (Asa Sul) do Plano Piloto recebe mais ofertas de linhas de ônibus que a região norte (Asa Norte). Isso, se deve a forma como a população do DF está distribuída. A maior parte da população do DF se encontra na região oeste do DF, principalmente nas RAs de Taguatinga, Ceilândia e Samambaia. Diante disso, vemos também, que, apesar do DF possuir cinco vias troncais que ligam a Capital a outras RAs, a EPTG (Estrada Parque Taguatinga-Guará) recebe muita oferta de linhas de ônibus, que acessam o centro de Brasília através da Asa Sul. Vemos que a maior densidade está

na Rodoviária do Plano Piloto com um total de 333 linhas. Os pontos de parada do eixo sul e da EPTG são atendidos por aproximadamente 160 tipos de linhas diferentes. Notamos, ainda, que existem pontos de parada no Plano Piloto que não possui atendimento de linhas, entretanto, temos que ressaltar que nesse trabalho foram analisadas apenas as linhas do Serviço de Transporte Público Coletivo Convencional, não foram consideradas para esse estudo as linhas Rurais e de Vizinhança.

Para conclusões mais detalhadas é necessário fazer o levantamento sobre o carregamento, a velocidade da viagem ou tempo de viagem, a frequência da viagem, entre outras características do Sistema de Transporte Urbano.

Com o método criado para saber onde estão as conexões da rede, em que nos perguntamos quais pontos são parte de uma linha ou quais linhas pertencem a um ponto de parada, pudemos observar a densidade de linhas de ônibus de cada ponto de ônibus do DF. Esse resultado pode ser conseguido através dos subgrafos dos nós-pontos da matriz bipartida da rede- B . Esse resultado é importante, pois podemos observar quais os pontos que possuem maior carência de linhas e tentar melhorar essa situação.

5.2 Distribuição do grau das redes de transporte urbano do DF

Fizemos o estudo da distribuição do grau do nó de três das cinco redes mencionadas acima: rede- M_P , rede- M_L e rede- B .

Após a obtenção do grau do nó de cada nó dessas redes, observamos a frequência com o qual cada valor de $k_i = k$ se repete, ou seja, contamos quantos nós têm o mesmo grau k . Para tanto, foi feita uma contagem do número de vezes que um valor de k_i se repetia. Para que fosse evitado flutuação dos valores, usamos a contagem de k_i 's pertencentes a uma faixa de valores. Para o caso do rede- B , consideramos uma faixa de $\Delta k = 10.000$, ou seja, contamos quantos nós têm o valor do grau do nó entre $0 \leq k < 10.000$, entre $10.000 \leq k < 20.000$ e assim por diante, até o valor de máximo, $k_{max} = 1.760.270$. Assim, distribuição do grau para o Sistema de Transporte Urbano do DF para esse espaço pode ser observado na Figura (5.2):

Podemos observar que a distribuição do grau do nó do rede- B segue um decaimento de Lei de potência. Que é um comportamento observado em muitas redes reais. E Podemos dizer, portanto, que tem fortes indícios de que seja uma rede sem escala, $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Assim, obtivemos uma curva de ajuste que obedece a equação:

$$P(k_B) = a(k_B)^{-\gamma_B} , \quad (5.1)$$

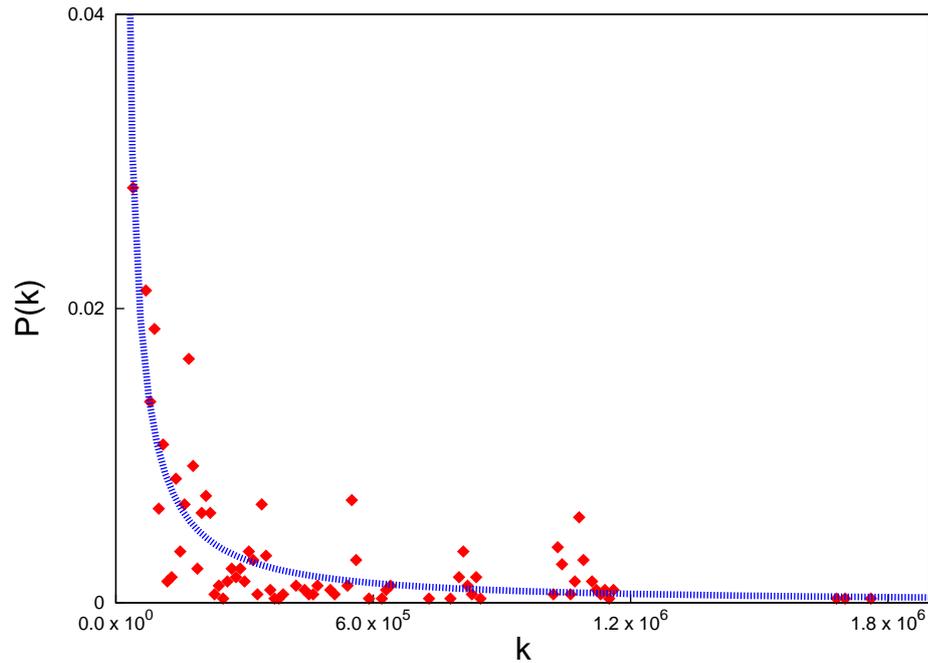


Figura 5.2 - Distribuição do Grau do nó-ponto no rede- B . Cada ponto representa uma média ponderada da quantidade de k_i contidos num intervalo $\Delta k = 10.000$ valores de k_i .

onde $a = 4.921, 94 \pm 4.674$ e $-\gamma_B = -1, 14 \pm 0, 08$. O erro de γ_B é de 7, 438% nesse ajuste. Todavia, o erro de a é bastante significativo, chegando a ser de 94, 96%. Dessa forma, maior esclarecimento, fizemos o gráfico da distribuição em escala log-log e, portanto, sugere se tratar de uma curva lei de potência.

A análise da distribuição do grau no rede- M_P , entretanto, gerou um resultado curioso. Para esse caso, usamos fatias com valor de 500. Ou seja, contamos a quantidade de nós que têm o valor de s compreendido entre os intervalos $0 \leq s < 500$, entre $500 \leq s < 1.000$ e assim por diante, até o valor de $s_{max} = 51.202$. Que apresentou uma curva de distribuição ilustrada na Figura (5.4).

O melhor ajuste para esse caso foi feito através de uma curva de decaimento exponencial,

$$P(s) = be^{-\beta s}, \quad (5.2)$$

onde $b = 6, 5 \times 10^{-2} \pm 3, 8 \times 10^{-3}$, com erro de 5, 925%, e $\beta = -1, 47 \times 10^{-4} \pm 1, 19 \times 10^{-5}$, com erro de 8, 137%. Pela análise da curva de ajuste na escala monolog, vemos que a aproximação é razoavelmente boa, Figura (5.5).

Esse tipo de comportamento na distribuição do grau sugere que estamos diante de um dos casos limites da teoria de redes sem escala. Ou seja, parece tratar-se

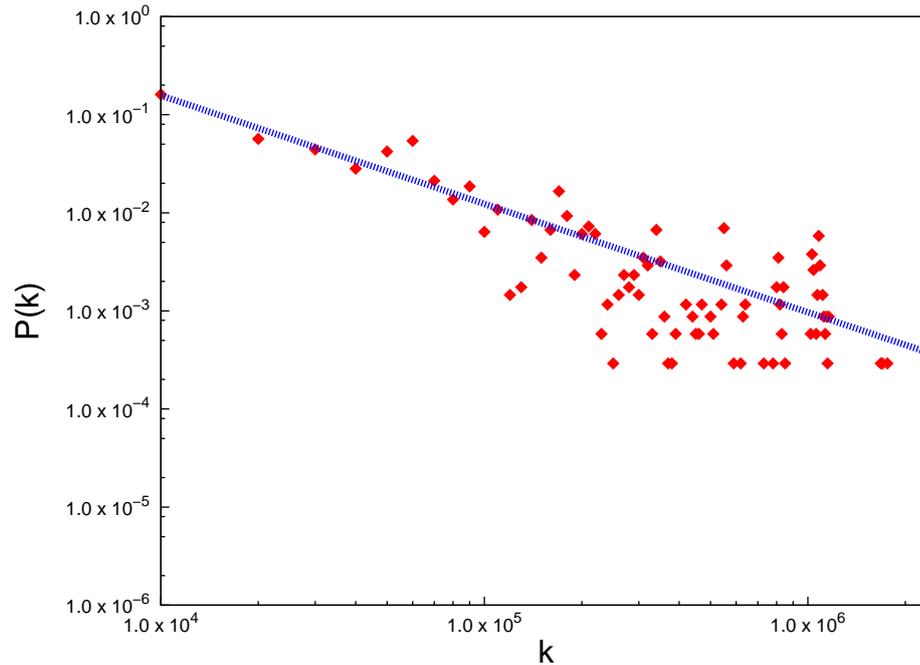


Figura 5.3 - Gráfico dilog da distribuição do grau no rede- B por intervalo $\Delta k = 10.000$.

do Modelo A, referido na seção (3.2.2), no qual podemos sugerir que a propriedade de rede sem escala falha devido à ausência de preferência de conexão entre os nós da rede. Isso quer dizer que os links entre os pontos de ônibus são feitas de forma aleatória, e nesse caso, link representa uma linha de ônibus que liga dois pontos de ônibus. É natural, observando a rede real, que o segundo elemento de rede sem escala — crescimento — esteja presente. Visto que ao longo do tempo, foram sendo acrescentados novos pontos de parada de ônibus no Distrito Federal.

Por fim, fizemos a distribuição do grau do nó do rede- M_L . Calculamos o valor do $\langle s \rangle = 11.616,55$ e o desvio padrão igual a $\sigma = 6.391,59$. Encontramos uma distribuição muito diferente dos dois anteriores. Vemos que no caso do rede- B e do rede- M_P , a distribuição não apresenta um pico, ou seja, não temos um valor de k característico no sistema. Todavia, no caso da rede- M_L , encontramos um pico em torno de $\langle s \rangle$. Ajustamos os dados com uma curva gaussiana:

$$P(s_L) = ce^{\frac{-(s_{M_L} - d)^2}{r^2}}, \quad (5.3)$$

onde $c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 0,0571686 \pm 0,003016$, $d = \langle s \rangle = 9.617,38 \pm 524,5$ e $r = \sqrt{2}\sigma = 10.960,9 \pm 838$. Onde σ é o desvio padrão.

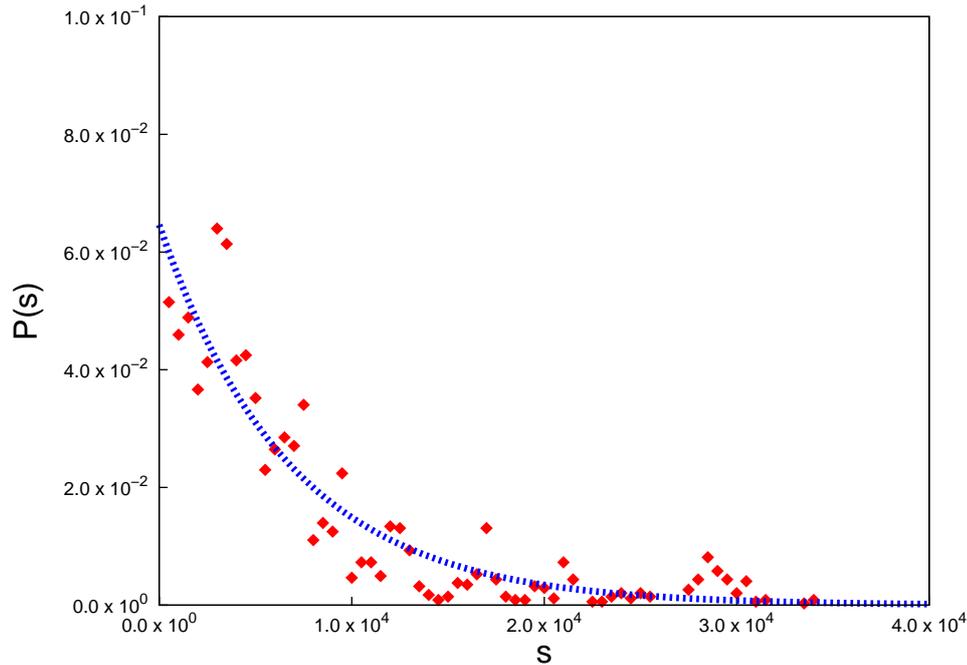


Figura 5.4 - Distribuição do grau do nó do rede- M_P ponderada. Foi utilizado para cada valor no gráfico, o total de Δs compreendido em intervalos de 500 em 500.

5.3 Entropia das redes de transporte urbano

Uma vez que temos a distribuição do grau — $P(s)$ — de cada rede anteriormente mencionadas, podemos, calcular a entropia delas usando a Equação A.4. Ver apêndice A. Que se torna:

$$S(s) = -c \sum_{i=1}^N P_i(s) \ln P_i(s). \quad (5.4)$$

Lembrando que c é uma constante de medida de unidade, por hora assumiremos que $c = 1$.

Na seção (5.2) encontramos a função distribuição para o rede- B , $P(s_B) = a_B s_B^{\gamma_B}$, tal que $a_B = 4.921,94$ e $\gamma_B = -1,14$. Dessa forma, temos então que a entropia é $S_B = 2,492$, para um distribuição com intervalo $\Delta s = 10.000$

Pela construção das 3 redes do sistema de transporte urbano do DF, rede- M_P , rede- M_L e rede- B , podemos observar diferentes distribuições do grau do nó. Encontramos que na rede- B essa distribuição seguia uma lei de potências, que evidencia a ausência de um grau característico. A rede- M_P ponderada, por sua vez, apresentou uma distribuição do tipo decaimento exponencial e a rede- M_L ponderada, uma distribuição gaussiana, sugerindo elementos de aleatoriedade nas conexões entre os nós. Encontramos

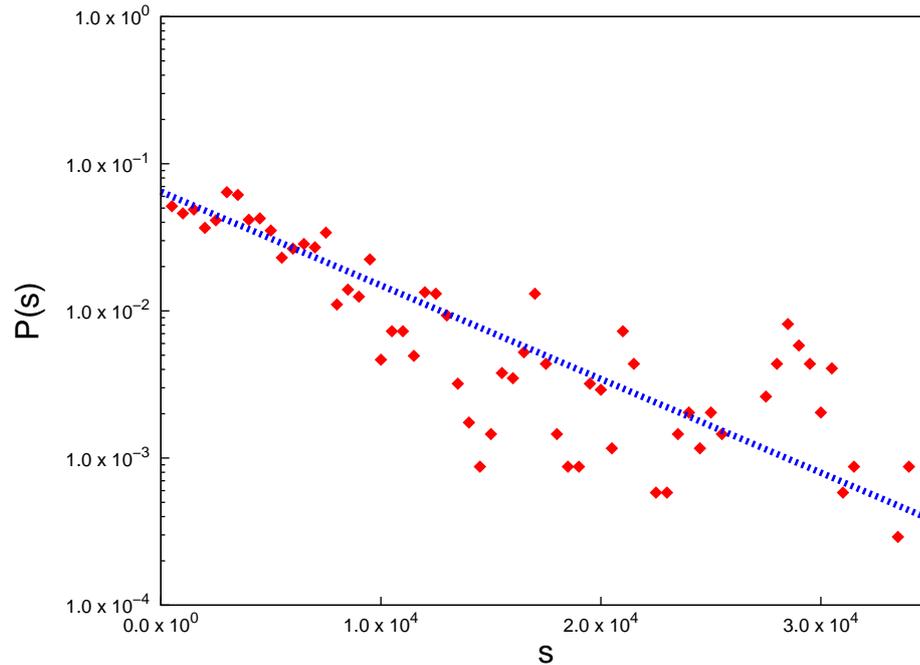


Figura 5.5 - Distribuição do grau do nó em escala monolog. Percebe-se que a curva de ajuste atende bem os valores obtidos do sistema.

Tabela 5.1 - Entropia das redes do transporte do DF

	a	γ	$P(k)$	$S(P)$
rede- B	$a_B = 4.921,94$	$\gamma_B = -1,14$	$P(k_B) = a_B k_B^{\gamma_B}$	$S_B = 2,492$
rede- M_P	$a_P = 6,5 \times 10^{-2}$	$\gamma_P = -1,47 \times 10^{-4}$	$P(s_P) = a_P e^{\gamma_P s_P}$	$S_P = 3,325$
rede- M_L	$a_L = 0,057169$	$\gamma_L = 10.960,9$	$P(s_L) = a_L e^{\frac{-(s_L - 9.617,38)^2}{\gamma_L^2}}$	$S_L = 3,186$

a entropia de cada uma das redes, vemos que essa grandeza é proporcional a $P(k)$. A rede- M_P , em especial, desperta-nos um interesse maior devido a sua distribuição do grau do nó, seria interessante investigar outras propriedades de redes, tais como aquelas pertencentes a redes de mundos pequenos.

5.4 Análise das propriedades de redes de mundos pequenos da Rede-P

No contexto de rede de mundo pequeno faremos uma análise das distâncias de um nó a outro do sistema de transporte do Distrito Federal para a rede-P. Mais precisamente, a pergunta formulada aqui seria: Dois pontos do Distrito Federal são conectados diretamente por algum itinerário (linha) de ônibus, se não, quantas baldeações serão necessárias? Levando-se em conta a mobilidade de pessoas dentro do território distrital, essa pergunta parecer ser bastante relevante e pertinente. E ainda, esse sistema de transporte

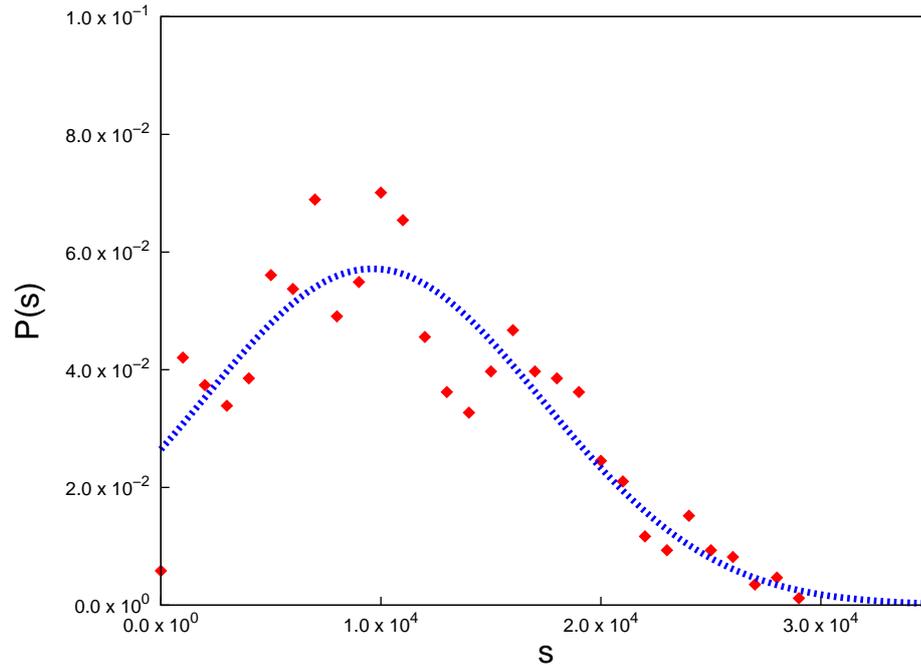


Figura 5.6 - Distribuição do grau do nó da rede- M_L ponderada. Onde o intervalo $\Delta s = 300$.

pode ser considerado rede de pequeno mundo?

Primeiramente veremos se a condição $k \gg \ln(N)$, que garante que o grafo aleatório seja conectado, é correspondida. Temos $k \sim 508,36 \gg \ln(3.272) \sim 8,09$, portanto, podemos fazer a análise de rede de pequeno mundo na rede- P . Feito isso, vamos calcular o número de transbordos médio e o coeficiente de aglomeração, que, respectivamente, caracterizam global e localmente a rede sob o aspecto de pequeno mundo. Ao encontrar esse dados temos que normalizá-los pelos respectivos valores quando o parâmetro $p = 0$ da rede regular.

5.4.1 Baldeação no sistema de transporte urbano

A questão levantada aqui é semelhante ao conceito de rede de pequeno mundo. Afinal, estando um indivíduo em uma localização do Distrito Federal, ele poderia chegar a outro com uma conexão direta, se não, quantas baldeações (transbordos) serão necessárias nessa viagem? Essa é uma pergunta que podemos responder usando o método de Watts-Strogatz, com a análise do coeficiente de agregação e o comprimento médio da rede. Inicialmente, os dados que precisamos são: quais as linhas de ônibus que passam em um ponto de parada e em quais pontos de parada uma linha de ônibus passa. Essas perguntas parecem ser a mesma coisa, mas na verdade tem uma diferença bastante sutil. No primeiro caso, centralizamos a análise nos pontos de ônibus e no segundo, nas linhas

de ônibus.



Figura 5.7 - Exemplo de uma situação em que um usuário de transporte urbano necessite utilizar um ponto de transbordo para chegar ao destino desejado, visto que não há linha de ônibus que ligue a origem ao destino diretamente.

Desse modo, para a análise de redes de mundos pequenos, usaremos a matriz de adjacências A_P da rede- P , na qual os nós da rede são os pontos de parada de ônibus e as arestas entre dois nós quaisquer serão as linhas de ônibus. Essa rede- P é detalhadamente descrita na Seção (4.2).

Vimos que a matriz de adjacências de uma rede contém as informações sobre a conectividade de dois nós quaisquer. Ou seja, para saber se dois nós i e j são conectados, basta observar o elemento de matriz a_{ij} , se $a_{ij} = 1$, os nós i e j são conectados, se $a_{ij} = 0$, não são conectados. Desse modo, para o nó i podemos encontrar todos os *primeiros vizinhos*, que são aqueles nós que possuem conexão direta com o nó i . Para sabermos quantos primeiros vizinhos o nó i possui, fazemos o somatório dos elementos $\sum_j a_{ij}$. Entretanto, gostaríamos de saber se, para aqueles nós que não possuem conexão direta um com o outro, são conectados passando-se por um nó intermediário t_1 , é o caso, então, de verificarmos a *segundo vizinho* de i . E, mesmo com um nó intermediário t_1 , os nós i e j não se conectam, será necessário passar por um outro nó intermediário t_2 , entre t_1 e j , que possa conectar i e j , se isso for verdadeiro, j será o *terceiro vizinho* de i , e assim sucessivamente. Ao final, podemos encontrar o comprimento máximo da rede. Para

o cálculo, da propriedade que chamamos de **baldeação** do sistema de transporte urbano $a_{ij} = 1$ da matriz de adjacência A_P e preenchemos o elemento $b_{ij} = 0$, significando que não há necessidade de nós de baldeação, pois há conexão direta entre i e j ; feito isso, somamos uma matriz identidade a matriz A_P , para que os elementos da diagonal tenham o valor unitário, não mais nulo. Tomamos essa matriz A'_P e multiplicamos por ela mesma, resultando na matriz A''_P , apresentará valores inteiros positivos, sendo que, para aqueles elementos $a_{ij} = 0$ da matriz A_P , com $i \neq j$, eventualmente, teremos, para o mesmo i e mesmo j , o elemento $a''_{ij} = 1$. Quando isso acontece, significa que os nós i e j , que não eram conectados diretamente, possuem um caminho, passando-se por um nó intermediário t_1 , cuja conexão entre i e j é possível, mas apenas através de uma baldeação em t_1 . Isso significa que i e j são conectados através de uma ponto de baldeação. Assim, o elemento da Matriz-B, referente aos nós i e j terá o valor de $b_{ij} = 1$. Continuando, se ainda restarem valores nulos na matriz A''_P , multiplicamos esta novamente com a matriz A'_P , resultando na matriz A'''_P , se para aquele elementos $a''_{ij} = 0$, da matriz A''_P , o elemento $a'''_{ij} = 1$, para o mesmo i e mesmo j , significa que os nós i e j são conectados através de dois pontos de baldeação, t_1 e t_2 . Assim, teremos $b_{ij} = 2$ na matriz-B. Esse algoritmo foi usado para o análise de *aglomerado gigante*, isto é, foram desconsiderados os pontos isolados do sistema, que, obviamente, teria o número de baldeações igual a infinito. O aglomerado gigante da rede-P é formado por $N_g = 3.272$ nós.

Com esse esquema, portanto, encontramos que o número máximo de baldeações entre um ponto de ônibus a outro é igual a 3 (três), ou seja, podemos sair de qualquer lugar do Distrito Federal e chegar a outro tomando-se, no máximo, 4 (quatro) linhas de ônibus, Figura (5.8). Essa propriedade, que chamamos de baldeação, na verdade, é o comprimento de uma rede. Assim, podemos explorar esse resultado e encontrar o comprimento médio da rede, $\langle L \rangle$.

Encontramos a distribuição de número de transbordos mostrado na Tabela (5.2). Para a rede-P, encontramos o número de transbordos médio (equivalente ao comprimento médio, $\langle L \rangle$, de um grafo) $\langle T \rangle = \sum_i T_i / \{N(N-1)/2\} = 0,75$. Portanto, normalizando pelo valor de $T(0) = L(0)$, temos:

$$\frac{T}{T(0)} = \frac{0,75}{3,2} \sim 0,23. \quad (5.5)$$

Vimos que o esquema de rede de pequeno mundo de Watts e Strogatz consiste na evolução de uma rede regular em forma de anel, com parâmetro $p = 0$, até uma rede totalmente aleatória, com $p = 1$. Que é o parâmetro que indica as reconexões das

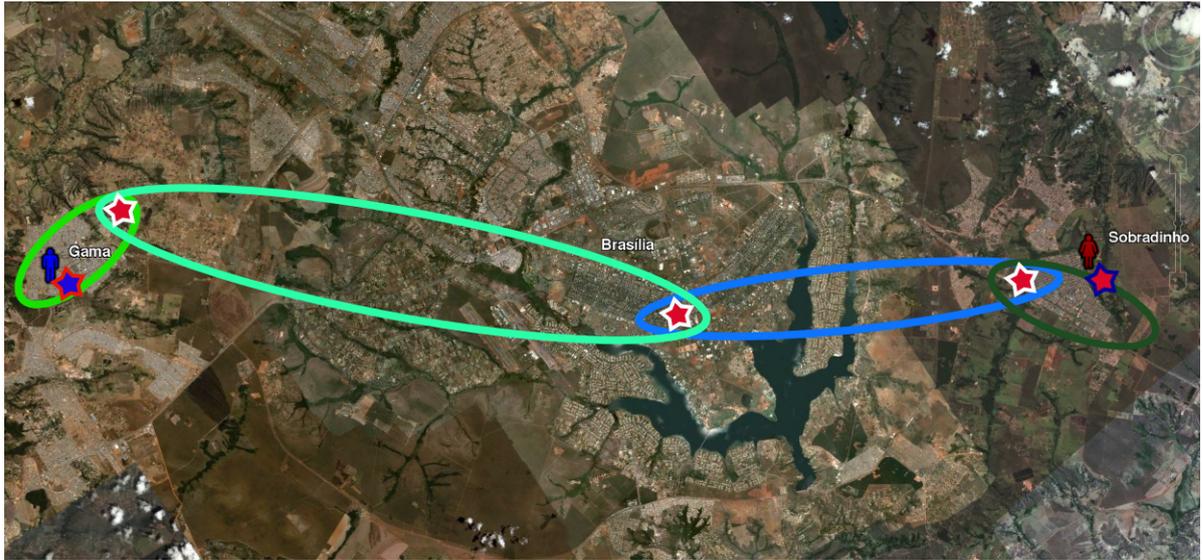


Figura 5.8 - Quantidade de pontos de baldeação máximo entre quais quer lugares dentro do Distrito Federal é igual a 3 (três). Portanto, o número máximo de viagens realizadas são feitas por 4 (quatro) linhas diferentes.

Tabela 5.2 - Distribuição de transbordos do espaço- P

nº Transbordos (T_i)	nº de pares de nós (N)
T_0	$n_0 = 1.663.343$
T_1	$n_1 = 3.356.848$
T_2	$n_2 = 331.046$
T_3	$n_3 = 119$
isolados	556.847

arestas ao nós da rede. Para encontrarmos um resultado que possa ser comparado aos resultados de Watts e Strogatz é necessário que consigamos calcular o número de transbordos de uma rede regular, formada pelo mesmo número de aresta por nó (grau do nó) (k_i) e nós (N) que a rede real analisada. Temos que, $N_g = 3.272$ e $\langle k \rangle = \sum_i k_i / N_g \sim 508$.

5.4.2 Conexão entre os primeiros vizinhos

Novamente extrairemos informações da matriz de adjacências A_P para investigarmos quão conectado se apresenta a *vizinhança* do nó i . Dessa forma, usaremos a Eq. (3.34) para cada um dos 3.272 (três mil duzentos e setenta e dois) nós do aglomerado gigante. Calculamos também o coeficiente de aglomeração médio, $C = 0,72$. Da mesma forma que para o número de transbordos médio, precisamos normalizar esse valor por

$C(0)$:

$$\frac{C}{C(0)} = \frac{0,72}{0,75} \approx 0,96. \quad (5.6)$$

Analisamos as propriedades global e local de redes de mundos pequenos. O comprimento médio, que renomeamos para número de transbordos médio (T), foi calculado, o qual obtivemos um valor pequeno para a razão $T/T(0) \sim 0,23$. Já o coeficiente de aglomeração, que representa o parâmetro local, apresentou um valor grande $C/C(0) \approx 0,96$. Isso sugere que um passageiro que, estando em um nó qualquer da rede-P, tem facilidade de acessar um nó distante e, ao mesmo tempo, os nós mais próximos são bem conectados entre si. Portanto, a rede-P apresenta características de redes de mundos pequenos. Todavia, o número máximo de transbordos é igual a $T_{max} = 3$, apesar de pequeno, não podemos concluir que isso seja um indício de rede de transporte eficiente, pois o passageiro, eventualmente, precisaria tomar quatro linhas de ônibus diferentes nesse deslocamento.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Após análise das redes de Transporte Público Urbano do Distrito Federal, com a construção da rede- P , da rede- L e da rede- B , para os quais utilizamos as matrizes adjacentes binárias, A_P e A_L da rede não ponderada, as matrizes adjacentes de múltiplas arestas, M_P e M_L , e a matriz binária B , encontramos resultados interessantes acerca de redes complexas. Pelo fato da teoria de redes ter uma abordagem bastante versátil, podendo ser implementada em diversos sistemas, o fundamental é que se defina com muito cuidado os elementos da grafo, quais sejam, vértices, arestas, peso, entre outros.

Encontramos diferentes distribuições do grau do nó para cada rede: a rede- B apresentou uma distribuição tipo lei de potências que sugere que seja uma rede livre de escala; a rede- M_P apresentou uma distribuição tipo decaimento exponencial, que pode sugerir que se trata de uma dos modelos limites de redes de Barabási, no qual a característica de crescimento existe, mas a preferência de conexão parece estar ausente. Já a rede- M_L apresentou um resultado que pode sugerir que se trate de uma rede aleatória, onde encontramos um grau do nós característico, em torno do $\langle k \rangle$, podendo, ainda, se tratar de segundo modelo limite de Barabási, no qual a preferência de conexão é apresentada, mas o crescimento é ausente.

Percebemos, desse modo, que a construção da rede- P foi importante para conseguirmos informações sobre as características de Rede de Pequeno Mundo, no qual concluímos por meio dos resultados dos parâmetros global (comprimento médio (número de transbordos médio)) e local (coeficiente de aglomeração), que essa rede é de pequeno mundo, visto que apresenta o coeficiente de aglomeração grande, $C/C(0) \sim 0.96.$, e número de transbordos médio pequeno, $T/T(0) \sim 0.23.$. Entretanto, o número de transbordo máximo da rede igual a 03 (três) pontos de parada de ônibus não parece, em termos de eficiência da mobilidade de pessoas, ser um resultado muito bom, pois isso indica que há duas localidades no DF em que são necessários a utilização de 04 (quatro) linhas de ônibus para completar a viagem.

Para um primeiro estudo do sistema de transporte coletivo do DF, encontramos resultados bastante interessantes, entretanto, temos a intenção de melhorar esse estudo incluindo outras categorias de serviço de transportes, tais como, o serviço rural e o serviço de transporte de vizinhança.

Ademais, seguem como perspectivas a investigação da eficiência do transporte urbano do DF (LATORA; MARCHIORI, 2001). Onde se define uma relação entre a eficiência global E_{GLOB} com o comprimento médio L e a eficiência local E_{LOC} com o

coeficiente de aglomeração. Além disso, uma abordagem da acessibilidade da rede pode fornecer resultados interessantes, uma vez que é possível calcular a “entropia” de forma mais geral, tomando não apenas a distribuição do grau do nó de primeiro vizinho, mas de vizinhos de várias ordens (TRAVENCOLO; COSTA, 2008).

Muitos estudos de redes de mundos pequenos ponderadas têm sido realizadas pelo mundo (LI et al., 2007; BARRAT et al., 2004). Esperamos aplicar essas teorias no sistema de transportes do DF, uma vez que temos já estruturadas as matrizes ponderadas do sistema.

Além disso, esperamos acrescentar mais parâmetros, tais como, tempo de viagem, carregamento, frequência de viagens no modelo, através de colaboração com o DFTRANS. E implementar uma simulação computacional da evolução temporal das redes de transporte com a finalidade modelar previsão um sistema transporte público coletivo mais eficiente. E, ainda, há a possibilidade de comparar o sistema de transporte urbano do DF com o sistema de outras cidades. Onde já existe projetos de tarifa única, como o transporte da cidade de São Paulo, onde o Bilhete Único possibilita o usuário de transporte público fazer 4 viagens pelo custo de uma única tarifa e também possibilita a integração com o Metrô e trem (SPTRANS, 2009).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albert-László Barabási, R. A. Emergence of scaling in random networks. **Science**, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999. 1, 3, 10, 18, 19
- ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 74, n. 1, p. 47–97, Jan 2002. 1, 4, 12, 13, 14, 15, 24, 25
- BARABÁSI, A.; ALBERT, R.; JEONG, H. Mean-field theory for scale-free random network. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 272, p. 173–187, 1999. ix, 19, 21, 22
- BARABÁSI, A.; BONABEAU, E. Scale-free networks. **Scientific American**, v. 288, n. 5, p. 50–9, 2003. 17
- BARABÁSI, A.; O, Z. D.; RAVASZ, E.; YOOK, S.; OLTVAI, Z. Scale-free and hierarchical structures in complex networks. In: **AIP Conference Proceedings**. [S.l.: s.n.], 2003. v. 661, p. 1. 1
- BARABÁSI, A.; RAVASZ, E.; VICSEK, T. Deterministic scale-free networks. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 299, n. 3-4, p. 559–564, 2001. 18
- BARRAT, A.; BARTHELEMY, M.; PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. The architecture of complex weighted networks. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 101, n. 11, p. 3747, 2004. 1, 35, 53
- BOLLOBÁS, B. **Modern graph theory**. [S.l.]: Springer Verlag, 1998. 39
- BÓNA, M. **A walk through combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory**. [S.l.]: World Scientific Pub Co Inc, 2006. 3
- CHEN, Y.-Z.; LI, N. The randomly organized structure of urban ground bus-transport networks in china. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 386, p. 388–396, 2007. 3, 32
- CHEN, Y.-Z.; LI, N.; HE, D.-R. A study on some urban bus transport networks. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 376, p. 747–754, 2007. 1, 2, 3, 32, 33, 37
- DFTRANS. **Transportes Urbanos do Distrito Federal**. 2008. [Online; accessed 22-Setembro-2010]. Disponível em: <<http://www.dftrans.df.gov.br/>>. 28, 61, 63

- DIESTEL, R. Graph Theory. 2000. **Graduate Texts in Mathematics**, 2000. 8
- ERDŐS, P.; RÉNYI, A. **On the evolution of random graphs**. [S.l.]: Citeseer, 1960. 1, 10
- EXECUTIVO, P. Regimento interno. **Diário Oficial do Distrito Federal**, n. 19, p. 2, 2007. 61
- _____. Sistema de Transportes do Distrito Federal. **Diário Oficial do Distrito Federal**, n. 177, p. 1, 2007. 64
- GRIBKOVSKAIA, I.; Halskau Sr, Ø.; LAPORTE, G. The bridges of Königsberg-A historical perspective. **Networks**, John Wiley & Sons, v. 49, n. 3, p. 199–203, 2007. 1, 3, 4
- HUANG, K. **Statistical Mechanics**, 2nd. [S.l.]: Edition (New York: John Wiley & Sons), 1987. 58
- KURANT, M.; THIRAN, P. Layered complex networks. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 96, n. 13, p. 138701, Apr 2006. 1
- LATORA, V.; MARCHIORI, M. Efficient behavior of small-world networks. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 87, n. 19, p. 198701, Oct 2001. 52
- _____. Is the boston subway a small-world network? **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 314, n. 1-4, p. 109–113, 2002. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-46871HY-C/2/6d03a94a092acc704a87ec3108223ea1>>. 3, 32
- LI, W.; LIN, Y.; LIU, Y. The structure of weighted small-world networks. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 376, p. 708–718, 2007. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-4M6S928-7/2/1015b2935728bbb2e6f7a8f517e2858d>>. 3, 53
- LUCZAK, T. Component behavior near the critical point of the random graph process. v. 1, n. 3, p. 287–310, 1990. 16
- MELLO, B.; CAJUEIRO, D.; GOMIDE, L.; VIEIRA, R.; BOUERI, R. TEORIA DE REDES COMPLEXAS EO PODER DE DIFUSÃO DOS MUNICÍPIOS. 3, 6, 39
- MILGRAM, S. The small world problem. **Psychology today**, New York, v. 2, n. 1, p. 60–67, 1967. 23

MOLLOY, M.; REED, B. A critical point for random graphs with a given degree sequence. v. 6, n. 2-3, p. 161–180, 1995. 16

_____. The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence. **Combinatorics, Probability and Computing**, v. 7, n. 03, p. 295–305, 1998. 16

NEWMAN, M. E. J. Scientific collaboration networks. ii. shortest paths, weighted networks, and centrality. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 64, n. 1, p. 016132, Jun 2001. 35

_____. The structure of scientific collaboration networks. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 98, n. 2, p. 404–409, 2001. Disponível em:
<<http://www.pnas.org/content/98/2/404.abstract>>. 3, 35

_____. Analysis of weighted networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 70, n. 5, p. 056131, Nov 2004. 31, 35, 39

NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 64, n. 2, p. 026118, Jul 2001. 25

PATHRIA, R. K. **Statistical Mechanics, 2nd**. [S.l.]: Edition (Butterworth-Heinemann), 1987. 58

ROSVALL, M.; TRUSINA, A.; MINNHAGEN, P.; SNEPPEN, K. Networks and cities: An information perspective. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 94, n. 2, p. 028701, Jan 2005. 3

SEN, P.; DASGUPTA, S.; CHATTERJEE, A.; SREERAM, P. A.; MUKHERJEE, G.; MANNA, S. S. Small-world properties of the indian railway network. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 67, n. 3, p. 036106, Mar 2003. 1, 3, 32

SHANNON, C. A mathematical theory of communication. **ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review**, ACM, v. 5, n. 1, p. 55, 2001. 58

SIENKIEWICZ, J.; HOLYST, J. A. Statistical analysis of 22 public transport networks in poland. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 72, n. 4, p. 046127, Oct 2005. 1, 3, 32

SPTRANS. **São Paulo Transportes S/A**. 2009. [Online; accessed 25-Setembro-2010]. Disponível em: <<http://www.sptrans.com.br/>>. 53

TRAVENCOLO, B.; COSTA, L. da F. Accessibility in complex networks. **Physics Letters A**, v. 373, n. 1, p. 89–95, 2008. [53](#)

TRAVERS, J.; MILGRAM, S. An experimental study of the small world problem. **Sociometry**, JSTOR, v. 32, n. 4, p. 425–443, 1969. [4](#), [5](#)

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of /‘small-world/’ networks. **Nature**, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998. [ix](#), [1](#), [3](#), [10](#), [26](#), [27](#)

XU, X.; HU, J.; LIU, F.; LIU, L. Scaling and correlations in three bus-transport networks of china. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 374, p. 441–448, 2007. [3](#), [32](#)

Zhu Zhen-Tao, Z. J. L. P.; XING-GUANG, C. An evolutionary model of urban bus transport network based on b-space. **Chinese physics B**, v. 17, p. 2874–07, 2008. [1](#), [2](#), [3](#), [32](#), [33](#), [38](#), [40](#)

APÊNDICE - ENTROPIA

Ludwig Boltzmann descreveu a entropia do gás ideal como uma grandeza proporcional ao logaritmo neperiano do número de microestados de um sistema.

$$S = k_B \ln \Omega \quad (\text{A.1})$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e Ω é o número de microestados de um sistema microcanônico.

Em 1872, Boltzmann apresenta o teorema H,

$$H = \int d^3p f(\mathbf{p}, t) \log f(\mathbf{p}, t). \quad (\text{A.2})$$

onde $f(\mathbf{p}, t)$ é a função distribuição (HUANG, 1987). Esse teorema foi muito importante para o entendimento do mundo macroscópico abordando o problema através da teoria de dinâmica molecular, que leva a conexão do mundo microscópico (mecânica estatística) com o mundo macroscópico (termodinâmica). Entretanto, Boltzmann sofreu muitas críticas contrárias e a aceitação dessa teoria sofre muita resistência dos seus contemporâneos, principalmente devido ao comportamento irreversível de sistemas físicos. Somente anos mais tarde, com o trabalho de Gibbs intitulado “Princípios Elementares de Mecânica Estatística” onde ele enfatiza o uso de ensembles generalizadas e desenvolve esquemas que, em princípio, permite calcular um conjunto completo de quantidades termodinâmicas de um sistema a partir das propriedades mecânicas dos constituintes microscópicos (PATHRIA, 1987). Dessa forma, temos a fórmula da Entropia de Gibbs para sistemas canônicos,

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i, \quad (\text{A.3})$$

onde p_i é probabilidade de cada estado.

Uma forma alternativa, todavia é a entropia de Shannon. Em 1948, o matemático e engenheiro eletricitista Claude E. Shannon publicou o artigo intitulado *A teoria matemática da comunicação* (SHANNON, 2001), onde define a entropia na forma:

$$S = -c \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad (\text{A.4})$$

onde c é uma constante positiva e p_i é a probabilidade de um sistema que está em uma coordenada do espaço de fase.

Quantidades da forma $S = -\sum p_i \log p_i$ desempenham um papel central na teoria da informação como medidas de informação, de escolha e de incerteza. A constante c equivale a uma mera escolha de uma unidade de medida. A forma de S será reconhecida como entropia, tal como definida em certas formulações de mecânica estatística.

Uma fonte de informação discreta pode ser representada como um processo de Markoff, que consiste num conjunto de objetos e num conjunto de estados tais que, em qualquer instante, cada objeto deve estar num estado e a probabilidade de que um objeto passe de um estado para outro, num período de tempo, depende apenas desses dois estados, ou seja, do estado atual e do estado seguinte. Dessa forma, é possível definir uma quantidade que medirá, em algum sentido, quanta informação será “produzida” por tal processo.

Supondo que temos um conjunto de eventos possíveis, cuja probabilidade de ocorrência é p_1, p_2, \dots, p_n . Essas probabilidades são conhecidas, mas isso é tudo que pode ser conhecido desse evento. Se existe tal medida e $S(p_1, p_2, \dots, p_n)$ possui as seguintes propriedades:

- S deve ser contínuo em p_i .
- Se todos os p_i são iguais, $p_i = \frac{1}{n}$, então S será uma função monótona crescente de n . Com eventos igualmente prováveis, há mais escolha, ou incerteza, quando há mais possíveis eventos.
- Se a escolha fosse dividido em duas escolhas sucessivas, o S original deve ser a soma ponderada dos valores individuais de S_i . O significado disto é ilustrado na Figura (A.1). À esquerda, temos três possibilidades $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ e $p_3 = \frac{1}{6}$. E

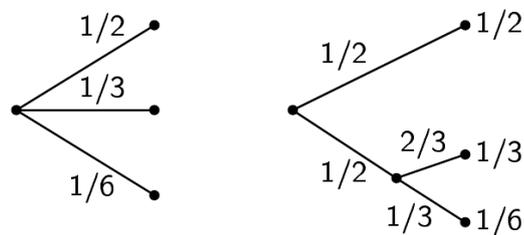


Figura A.1 - Decomposição de escolhas de três possibilidades.

à direita, temos que escolher primeiro entre duas possibilidades, cada um com

probabilidade $\frac{1}{2}$, e se o segundo ocorrer, fazemos novamente uma escolha com $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$. O resultado final tem a mesma probabilidade que o anterior. Requeremos, neste caso especial, que

$$S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}S\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad (\text{A.5})$$

O coeficiente $\frac{1}{2}$ é porque a segunda escolha somente ocorre na metade do tempo.

Então, assumindo que $S = -\sum p_i \log p_i$ é a entropia de um conjunto de probabilidades p_1, \dots, p_k , são as probabilidades de um nó i possuir grau do nó $p(k_i)$. Temos:

$$S(k_i) = -\sum p(k_i) \log(p(k_i)). \quad (\text{A.6})$$

ANEXO A - A AUTARQUIA DFTRANS

DFTRANS - Transporte Urbano do Distrito Federal - é uma autarquia criada pela Lei nº 241, de 28 de Fevereiro de 1992, para fiscalizar especificamente a área de transporte, com o nome de DMTU tendo a alteração de sua denominação para DFTRANS ocorrida com o Decreto 23.902 no dia 11 de Julho de 2003 (DFTRANS, 2008).

A alteração de denominação e o novo Regimento foram feitos considerando os estudos para implantação dos novos modelos de operação e gestão do Sistema de Transporte Público Coletivo do DF, com o objetivo de estruturar uma entidade de gerência dos transportes públicos coletivos mais ágil, capaz de acompanhar a nova dinâmica operacional de um sistema integrado e informatizados.

A responsabilidade da DFTRANS é garantir à população um transporte eficiente e seguro por meio da fiscalização e do planejamento do transporte. Dentre suas atribuições estão: o planejamento das linhas, a avaliação de desempenho, a caracterização da demanda e da oferta de serviços, a elaboração dos estudos dos custos de serviços e dos níveis tarifários, a gestão, o controle e a fiscalização dos serviços públicos de passageiros(DFTRANS, 2008).

À Transporte Urbano do Distrito Federal – DFTRANS compete (EXECUTIVO, 2007a):

- I – planejar, gerir, controlar e fiscalizar os serviços de transporte coletivo, público e privado;
- II – planejar, gerir, controlar e fiscalizar a infra-estrutura de apoio ao sistema de transporte público coletivo;
- III – executar políticas, programas e estudos definidos pela Secretaria de Estado de Transportes, referentes ao transporte público coletivo do Distrito Federal;
- IV – cumprir e fazer cumprir a legislação referente aos serviços de transporte público coletivo do Distrito Federal, bem como supervisionar, controlar e fiscalizar a sua prestação;
- V – assegurar a estabilidade nas relações entre o Poder Público, concessionários, permissionários e usuários;
- VI – assegurar a prestação adequada dos serviços de transporte público coletivo do Distrito Federal quanto à qualidade, regularidade, eficiência, segurança, conforto e modicidade da tarifa;

- VII – exigir o cumprimento de critérios e parâmetros operacionais, tecnológicos e demais normas e instrumentos, legalmente estabelecidos;
- VIII – assessorar a Secretaria de Estado de Transportes sempre que solicitada;
- IX – elaborar e promover a aplicação de normas e procedimentos operacionais referentes ao funcionamento dos serviços de transporte público coletivo do Distrito Federal, da Câmara de Compensação de Receitas e Créditos e do Fundo do Transporte Público Coletivo do Distrito Federal;
- X – gerir e operacionalizar o funcionamento da Câmara de Compensação de Receitas e Créditos;
- XI - gerir o Fundo do Transporte Público Coletivo do Distrito Federal;
- XII – promover a eficiência técnica e econômica dos serviços de transporte público coletivo delegados, submetidos à sua competência de gestão, controle e fiscalização;
- XIII – acompanhar o desempenho dos delegatários e demais contratados, tornando públicos os relatórios de atividades dos serviços prestados;
- XIV – celebrar convênios e contratos com entidades públicas ou privadas destinados à implementação de melhorias na prestação de serviços de transporte público coletivo no Distrito Federal;
- XV – analisar e se manifestar sobre propostas de legislação e normas relativas ao controle, fiscalização e gestão dos serviços de transporte público coletivo do Distrito Federal;
- XVI – estabelecer critérios para obter informações referentes aos delegatários e prestadores de serviços terceirizados;
- XVII – promover, quando necessário, a realização de auditoria técnico-operacional e econômico-financeira nos delegatários;
- XVIII – fixar normas complementares e disciplinares da prestação e utilização dos serviços de transporte público coletivo, determinando, inclusive, prazos para o cumprimento de obrigações;
- XIX – definir procedimentos e rotinas de fiscalização dos elementos componentes do sistema de transporte coletivo do Distrito Federal;
- XX – propor alterações em seu regimento interno;

- XXI – aplicar, na forma da lei, as sanções regulamentares ou penalidades para infrações previstas nos regulamentos e códigos disciplinares do Sistema de Transporte Público Coletivo do Distrito Federal;
- XXII – elaborar sua proposta orçamentária;
- XXIII – promover a integração entre a DFTRANS, órgãos do Distrito Federal e entidades representativas da sociedade e empresarial, visando ações que promovam a melhoria do Sistema de Transporte Público Coletivo do Distrito Federal;
- XXIV – relacionar-se com outros organismos públicos federais ou distritais no planejamento ou avaliação de planos, programas ou projetos de interesse da DFTRANS que envolvam participação comunitária;
- XXV – promover a gestão da qualidade dos serviços de transporte público coletivo e do atendimento prestados pelos delegatários e pela DFTRANS;
- XXVI – exercer outras atribuições correlatas às suas finalidades.

Sendo algumas das funções da DFTRANS(DFTRANS, 2008):

- Informar o usuário sobre os serviços;
- Manter dados estatísticos sobre o sistema de transportes;
- Administrar a comercialização de vales-transporte;
- Buscar a melhoria de serviços, ganho de produtividade e minimizar os custos;
- Projetar e implantar, abrigos e pontos de parada;
- Estimar custos e tarifas;
- Aplicar sanções ou penalidades por infrações cometidas pelas empresas operadoras e demais permissionários, de acordo com o Código Disciplinar Unificado de Transporte Coletivo do DF.

O Serviço de Transporte Público Coletivo (STPC) divide-se nos seguintes serviços (DFTRANS, 2008):

- Serviço Convencional (ônibus - STPC);

- Serviço Especial Vizinhança (zebrinha - STCEV);
- Serviço Autônomo Rural (rural - STPC/TA);
- Serviço de Transporte Coletivo Privado (fretamento - STCP);
- Serviço de Transporte Público Básico (Microônibus - STPB);
- Serviço Próprio de Empregados (fretamento - STPE).

O Serviço Convencional é classificadas em:

- Metropolitana 1 (Ligação Curta): Cidade-Satélite / Plano Piloto.
- Metropolitana 2 (Ligação Longa): Cidade-Satélite / Plano Piloto.
- Metropolitana 3 (Ligação Intermediária): Cidade-Satélite / Cidade-Satélite; Cidade-Satélite / Plano Piloto.
- Urbana 1 (Circular Curta): Cidade-Satélite e Plano Piloto.
- Urbana 2 (Circular Longa): Cidade-Satélite e Plano Piloto.
- Urbana 3 (Circular Interna): Cidade-Satélite.

No entanto, a Lei nº 4.011, de 12 de setembro de 2007, classifica os serviços de transporte público coletivo de que trata esta Lei em básico e complementar ([EXECUTIVO, 2007b](#)).

- Serviço Básico: que compreende linhas dos modos metroviário e rodoviário, que poderão operar mediante integração física, tarifária e operacional, e que visem proporcionar aos cidadãos o acesso universal, seguro e equânime ao espaço urbano.
- Serviço Complementar: que compreende linhas do modo rodoviário com características diferenciadas do serviço básico, que visem atender segmentos específicos de usuários.