Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

O Problema de Björling para Superfícies Máximas no Espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$

por

Hudson Pina de Oliveira

Orientadora: Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

Brasília

2011

A minha família,

e amigos

Agradecimentos

A realização deste trabalho não seria possível sem o apoio irrestrito de algumas pessoas.

Inicialmente a minha família. Em especial aos meus pais, Maria Aparecida Pina de Oliveira e Jaime Gomes de Oliveira, a minha irmã Lorena Pina de Oliveira, a minha grande namorada Lorena Lopes da Costa e a seus pais, Amarildo Lopes Queiros e Cláudia dos Santos Costa Queiros, que sempre me apoiaram nos estudos.

A professora Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues pela oportunidade única de trabalhar sob sua orientação, onde no decorrer do ano, me ajudou e proporcionou um grande aprendizado. Agradeço a paciência com a qual conduziu meu trabalho e compreensão de minhas limitações como estudante.

A meu primo, amigo e professor Dr. Romildo da Silva Pina por tantas vezes meu conselheiro, nas horas difíceis e nas decisões. Uma referência de pessoa, obrigado.

A todos professores do Departamento de Matemática da UnB que proporcionaram um ambiente de estudo. Agradeço aos funcionários pela competência de seus serviços. Aos professores da Universidade Federal de Goiás que me deram uma base sólida na graduação permitindo assim a conclusão do trabalho.

Aos amigos meu sincero obrigado, pelas risadas, pelo futebol e pelos momentos de descontração entre uma aula e outra. Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram com esta grandiosa conquista na minha vida

Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

"Não sabendo que era impossível, foi lá e fez"

Jean Cocteau

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma representação tipo Weierstrass para superfícies máximas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^n$. Baseado no trabalho de Asperti e Vilhena [5], consideramos esta representação para o caso $n = 4$ e resolvemos o Problema de Björling em $\mathbb{L}^4$. Introduzimos vários exemplos com propriedades geométricas interessantes. Baseado em [12] estudamos o problema de Calabi-Bernstein e encontramos condições para que uma superfície máxima completa em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, seja uma plano.

Palavras-chave: espaço de Lorentz-Minkowski, superfícies máximas, problema de Björling, Calabi-Bernstein.

Abstract

In this work we present a Weierstrass type representation for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space $\mathbb{L}^n$. Based on work by Asperti and Vilhena [5] we consider this representation for the case $n = 4$ and solved the Björling problem in $\mathbb{L}^4$. We introduce several examples with interesting geometric properties. Based on [12] we studied the of Calabi-Bernstein problem and find conditions for a maximum surfaces complete in $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, is a plan.

Keywords: Lorentz-Minkowski space, maximal surfaces, Björling's problem, Calabi-Bernstein.

Sumário

Introdução

No trabalho consideraremos o espaço de *Lorentz-Minkowski* $\mathbb{R}^n_1$, que denotaremos por $\mathbb{L}^n$. O espaço $\mathbb{L}^n$ é o espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$ dotado da forma bilinear Lorentziana

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_1 : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n. \end{aligned}$$

Superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^3$ (superfícies máximas) representam localmente um máximo para o funcional área [14], também admitem uma representação tipo Weierstrass [20]. Mas superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, representam localmente o máximo (resp. mínimo) para o funcional área , se a variação normal é feita numa direção tipo tempo (resp. tipo espaço) [19]. Para estas superfícies também temos uma repesentação tipo Weierstrass [3, 12].

Sabe-se que superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$ possuem curvatura de Gauss não positiva, já em $\mathbb{L}^3$ a curvatura de Gauss de superfícies tipo espaço com curvatura média zero é não negativa (veja [20]) e para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, a curvatura de Gauss pode mudar de sinal (veja Seção 3.1), este fato será explorado através de exemplos.

No espaço Euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, dada uma faixa analítica real (ver Seção 2.2), o clássico Problema de Björling [11] foi proposto por Björling [6] em 1844 e consiste na construção de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ contendo uma faixa dada. A solução para este problema foi dado por Schwarz em [25], por meio de uma fórmula explícita em termos da faixa prescrita. Esta fórmula fornece um bonito método, baseado na representação de Weierstrass [23], para a construção de superfícies minimas com propriedades interessantes. Por exemplo, propriedades de simetria.

O problema equivalente no espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional foi proposto e resolvido, através de uma representação complexa desenvolvido em [3]. Os autores introduziram a teoria local de superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^3$ de uma forma diferente da feita em [20, 21], através da representação de Weierstrass. Eles construíram novos exemplos de superfícies tipo espaço com curvatura média zero. Foram dadas provas alternativas de caracterização de superfícies de revolução tipo espaço com curvatura média zero e superfícies regradas em $\mathbb{L}^3$ e provaram princípios de simetria para estas superfícies. Também podemos encontrar na obra de Gálvez e Mira [13], a versão do Problema de Björling no espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$. Nesse trabalho, os autores construíram uma superfície com curvatura média única em $\mathbb{H}^3$ que passa através de uma curva dada com uma determinada normal unitária ao longo dela, e que oferece diversas aplicações.

No espaço Euclideano quadridimensional, o Problema de Björling para superfícies mínimas foi proposto e resolvido em [4] (ver também [2]), a partir de uma fórmula de representação complexa. Neste trabalho, os autores também recuperaram os princípios da simetria das superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ obtidos por Eisenhart [9].

O Nosso trabalho é baseado no artigo de Asperti e Vilhena [5] onde os autores motivados por resultados e técnicas de [3, 4], introduziram uma teoria local para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$, usando uma representação complexa - veja Teorema 1.1 - que descreve a geometria local dessas superfícies. Esta fórmula é usada para resolver o Problema de Björling em $\mathbb{L}^4$, que é ilustrado com dois exemplos. Como outra conseqüência do Teorema 1.1, recuperamos as fórmulas de representação do Problema de Björling para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^3$. Recuperamos também os princípios da simetria para estas superfícies, e o estudo dos princípios de simetria para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$ e apresentamos novos exemplos. Estes fatos serão descritos no capítulo 2.

Uma diferença importante entre a teoria global das superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^3$ e da teoria global de superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$ é estabelecido pelo chamado Teorema de Calabi-Bernstein, que será explorado no terceiro capítulo. Ele afirma que uma superfície tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^3$ é um plano [8]. No entanto, este resultado não pode ser estendido para $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, ver exemplos na Seção 3.1. Superfícies máximas no espaço de Lorentz-Minkowski n-dimensional são superfícies tipo espaço com curvatura média zero. A parir destas considerações o seguinte problema surge naturalmente:

Sobre que hipóteses adicionais, uma superfície máxima em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, *é um plano?*

Baseados no artigo de F.J.M. Estudillo e A. Romero [12], no capítulo 3, respondemos esta pergunta sob vários pontos de vista. No capítulo 1 introduzimos conceitos preliminares necessários para o desenvolvimento da teoria nos capítulos seguintes.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma pequena introdução de conceitos e resultados necessários para o estudo de superfícies no espaço de Minkowski com métrica de Lorentz de dimensão 4 que chamaremos de $\mathbb{L}^4$.

Daremos uma representação tipo Weierstrass para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^n$, onde usaremos tal representação para o estudo do Teorema de Calabi-Bernstein. No capítulo 2 daremos uma soloção para o Problema de Björling e no terceiro e ultimo capítulo faremos exemplos para mostrar o que difere as superfícies máximas de $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$ das superfícies máximas de $\mathbb{L}^3$ para então estudarmos o Teorema de Calabi-Bernstein.

1.1 Variedades Pseudo-Riemannianas

Iniciamos esta seção relembrando alguns conceitos de geometria Riemanniana.

Definição 1.1. Uma *variedade diferenciável*[1] *n-dimensional* (*n-variedade*) é um conjunto M juntamente com uma família $(U_\alpha)_{\alpha \in L}$ de subconjuntos tais que

1. $M = \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$,
2. para todo $\alpha \in L$ existe uma aplicação injetiva $X_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ tal que $X_\alpha(U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e

[1] Por *diferenciável* entenderemos por *classe* C^∞.

3. para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, $X_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e a composição

$$X_\beta \circ X_\alpha^{-1} : X_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to X_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), \tag{1.1}$$

é diferenciável para arbitrários α, β.

Referimos à cada X_α como uma *carta*, X_α^{-1} como uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) cujo domínio é o conjunto $X_\alpha(U_\alpha)$, e o par $(U_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in L}$ é chamado um *atlas*. A aplicação dada em (1.1) definida sobre a interseção de duas tais cartas, são chamadas *transformações coordenadas* ou *funções de transição*. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o atlas é *máximo* com respeito à adição de mais cartas satisfazendo as condições 2 e 3 da definição acima. Neste sentido, um atlas máximo é chamado uma *estrutura diferenciável*.

Observação 1.1. Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M. Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $X_\alpha(A \cap U_\alpha)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo α. É imediato verificar que M e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a interseção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos U_α são abertos e as aplicações X_α são contínuas.

Exemplo 1.1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.

Consideremos, então, M uma n-variedade e $p \in M$ um ponto fixado. Para falarmos no espaço tangente de M no ponto p é necessário o seguinte conceito geométrico:

Definição 1.2. Um *vetor tangente* em p é uma classe de equivalência de curvas diferenciáveis $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $c(0) = p$, onde $c \sim c^*$ se, e somente se, $(X \circ c)'(0) = (X \circ c^*)'(0)$ para toda carta X contendo p.

Então, o *espaço tangente* T_pM de M em p é definido como o conjunto de todos os vetores tangentes no ponto p. Por definição, T_pM e T_qM são disjuntos se $p \neq q$.

Para a próxima definição, é conveniente relembrarmos o seguinte fato de álgebra linear:

O espaço $\mathcal{L}^2(T_pM;\mathbb{R}) = \{\alpha : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ é bilinear}\}$ tem a base

$$\{dx_i|_p \otimes dx_j|_p \mid i,j = 1,..,n\},$$

onde o dx_i forma a *base dual* no *espaço dual*

$$(T_pM)^* = \mathcal{L}(T_pM;\mathbb{R}),$$

definida como segue:

$$dx_i|_p\,(\partial_j|_p) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

As formas bilineares $dx_i|_p \otimes dx_j|_p$ estão definidas em termos de suas ações sobre a base (esta ação sendo então estendida por linearidade):

$$(dx_i|_p \otimes dx_j|_p)\,(\partial_k|_p, \partial_l|_p) := \delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } j = l, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela ação de α na base, para os coeficientes da representação

$$\alpha = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot dx_i \otimes dx_j$$

obtemos a expressão $\alpha_{ij} = \alpha(\partial_i, \partial_j)$.

Isto posto, segue o conceito de métrica Riemanniana sobre uma n-variedade M:

Definição 1.3. Uma *métrica Riemanniana* g sobre M é uma correspondência da forma $M \ni p \mapsto g_p \in \mathcal{L}^2(T_pM;\mathbb{R})$ tal que as seguintes condições estão satisfeitas:

1. $g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$ para todo X, Y (simetria)

2. $g_p(X,X) > 0$ para todo $X \neq 0$ (positiva definida)

3. Os coeficientes g_{ij} em toda representação local (isto é, em toda carta)

$$g_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) \cdot dx_i|_p \otimes dx_j|_p$$

   são funções diferenciáveis. (diferenciabilidade)

As funções g_{ij} $(= g_{ji})$ são chamadas *expressões da métrica Riemanniana* (ou "os g_{ij} da métrica") em toda representação local em torno de p. E uma n-variedade M com uma dada métrica Riemanniana g, (M,g), chama-se uma *variedade Riemanniana.*

Observação 1.2. Uma métrica Riemanniana g define em todo ponto p um produto interno g_p sobre o espaço tangente T_pM, e portanto a notação $\langle X, Y\rangle$ em vez de $g_p(X, Y)$ é também usada.

Exemplo 1.2. *Seja* $M = \mathbb{R}^n$ com ∂_i identificado com $e_i = (0, .., 1, ..0)$. Neste caso, a métrica é dada por $\langle \partial_i, \partial_j\rangle = \delta_{ij}$. A geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica euclidiana.

Se na Definição **??** a condição que g é positiva definida é substituída pela condição mais fraca que ela é não-degenerada (isto é, $g(X, Y) = 0$ para todo Y implica $X = 0$), então obtemos a noção de uma métrica *pseudo-Riemanniana* (ou *semi-Riemanniana*), que denotamos por $\tilde{g}$. Estritamente falando, uma n-variedade M com uma dada métrica pseudo-Riemanniana $\tilde{g}$, $(M, \tilde{g})$, chama-se uma *variedade pseudo-Riemanniana.*

A dimensão máxima de um subespaço W de T_pM tal que a restrição $\tilde{g}|_W$ é negativa definida, isto é, para cada $w \in W$, $w \neq 0$, $\tilde{g}(w, w) < 0$, é chamada de índice no ponto p e denotada por $\vartheta(p)$. Entretanto, quando $\vartheta = \vartheta(p)$ é o mesmo para todo $p \in M$, chamamos $\vartheta(p)$ o índice da variedade: $0 \leq \vartheta \leq n = dim(M)$.

No caso em que $\vartheta = 1$ e $n \geq 2$, temos um tipo especial de variedade pseudo-Riemanniana, ou seja, dizemos que M é uma *variedade de Lorentz.*

Um típico exemplo de uma variedade Lorentziana é o *espaço de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{L}^n$, isto é, o espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$ dotado da forma bilinear Lorentziana

$$\begin{array}{rccl} \langle , \rangle_1 : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n. \end{array}$$

Como podemos ver existem vetores diferentes do vetor nulo mas que o produto interno é zero, como por exemplo o vetor $(1, 0, 0, 1) \in \mathbb{L}^4$. Dessa forma, vetores em $\mathbb{L}^n$ são definidos de acordo com sua norma.

Definição 1.4. Um vetor tangente $v \in \mathbb{L}^n$ é

tipo espaço	(*spacelike*)	se	$\langle v, v\rangle_1 > 0$
tipo luz	(*lightlike*)	se	$\langle v, v\rangle_1 = 0$
tipo tempo	(*timelike*)	se	$\langle v, v\rangle_1 < 0.$

1.2 Imersões Máximas em $\mathbb{L}^n$

Trabalharemos com superfícies tipo espaço com curvatura média nula, que serão chamadas de superfícies máximas. Considere a seguinte definição.

Definição 1.5. Seja M uma 2-variedade com atlas $(U_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in L}$. Uma função $X : M \to \mathbb{L}^n$ de classe C^2 é uma *imersão* se $dX_p : T_p(M) \to T_{X(p)}\mathbb{L}^n$ é injetiva para todo $p \in M$.

Se M é uma 2-variedade conexa e a imersão diferenciável X induz sobre M uma métrica Riemanniana, obtemos o seguinte conceito.

Definição 1.6. Uma imersão diferenciável $X : M \to \mathbb{L}^n$, de uma 2-variedade conexa é dita uma *superfície tipo espaço* em $\mathbb{L}^n$ se a métrica induzida sobre M por X é uma métrica Riemanniana.

Exemplo 1.3. (*Plano tipo espaço*) Dados dois vetores tipo espaço linearmente independentes u e v em $\mathbb{L}^n$, a aplicação dada por $X(s,t) = p_0 + su + tv$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ e $p_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n) \in \mathbb{L}^n$, claramente é uma superfície tipo espaço em $\mathbb{L}^n$.

Exemplo 1.4. Seja $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ uma superfície regular em $\mathbb{R}^n$, defina $\bar{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{L}^{n+1}$ por $\bar{X}(p) = (X(p), 0)$ com $p \in U$, vê-se facilmente que $\bar{X}$ é uma superfície tipo espaço em $\mathbb{L}^{n+1}$.

Em [12], é apresentado uma representação de Enneper-Weierstrass para superfícies máximas em $\mathbb{L}^n$. Faremos, na próxima seção, tal representação para que possamos estudar uma formulação do Teorema de Calabi-Bernstein, e esta representação também será útil para o estudo do Problema de Björling em $\mathbb{L}^4$. Para superfícies tipo espaço com curvatura média nula definimos:

Definição 1.7. Uma superfície tipo espaço em $\mathbb{L}^n$ é dita uma *imersão máxima* se sua curvatura média é identicamente nula.

Exemplo 1.5. Um exemplo trivial de imersão máxima é o plano tipo espaço.

1.3 Superfícies de Riemann

Nesta seção, faremos uma relação entre a teoria das superfícies máximas em $\mathbb{L}^n$ e a teoria das funções analíticas de variáveis complexas. A princípio definiremos uma *superfície de Riemann*. Como todo trabalho é feito em um espaço de Lorentz-Minkowski, para simplificar a notação denotaremos o produto interno em $\mathbb{L}^n$ apenas como $\langle \, , \, \rangle_1 = \langle \, , \, \rangle$.

Definição 1.8. Uma *superfície de Riemann* S é uma variedade bidimensional, conexa, de Hausdorff com um atlas máximo $\mathcal{A}$, onde as mudanças de coordenadas são funções analíticas complexas.

Se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, X_\alpha), \alpha \in L\}$, onde U_α e $X_\alpha\,(U_\alpha)$ são abertos de S e $\mathbb{C}$, respectivamente, então X_α é um homeomorfismo e para todo $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, $X_{\alpha\beta} = X_\beta \circ X_\alpha^{-1} : X_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to X_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é uma função analítica.

Dizemos que X_α define coordenadas ou parâmetros na vizinhança coordenada U_α de S e $X_{\alpha\beta}$ é uma mudança de coordenadas ou mudança de parâmetros. Dizemos que o atlas máximo $\mathcal{A}$ define uma estrutura complexa em S.

Seja M uma 2-variedade conexa e orientável e seja $X : M \to \mathbb{L}^n$ uma superfície tipo espaço. Sabemos que para uma vizinhança de $p \in M$ podemos tomar uma parametrização isotérmica e que tais parâmetros são chamados de parâmetros isotérmicos de (u, v). Além disso a métrica induzida em M pode ser representada localmente em termos dos parâmetros isotémicos por

$$\mathbf{I} = \lambda^2 \left\{du^2 + dv^2\right\} = \lambda^2 \left|dz\right|^2,$$

onde $z = u + iv \in \mathbb{C}$. Claramente, M é localmente conforme ao plano.

Desde que M seja orientável, ou seja, que a matriz mudança de coordenada não troque de sinal, podemos nos restringir somente à família de parâmetros isotérmicos cuja mudança de coordenadas preserva orientação. Isto significa que em termos da variável $z = u + iv$, a mudança de coordenadas é uma função analítica.

Observação 1.3. Uma superfície M juntamente com uma tal família de parâmetros isotérmicos torna-se uma superfície de Riemann, visto que esta família define uma estrutura complexa em M.

Vamos agora estabelecer um resultado de caracterização das superfícies máximas. Para tal considere $X : M^2 \to \mathbb{L}^n$ uma superfície tipo espaço do $\mathbb{L}^n$ com métrica induzida dada por $ds^2 = X^*\langle\, ,\, \rangle$ e $S = X(U)$.

Sejam $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^n$ e (M, ds^2), respectivamente. A *segunda forma fundamental* de S é definida por $\alpha(V,W) := (\overline{\nabla}_V W)^\perp$ e o *vetor curvatura média* dado por $H_p := \frac{1}{2}tr(\alpha_p)$ para todo $p \in M$.

Vamos denotar X_u e X_v as derivadas parciais de X com relação a u e v, respectivamente, e $N \in (T_pM)^\perp$ uma direção normal a superfície arbitrária. Os valores dados por

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle X_{u_i}, X_{u_j}\rangle \\ b_{ij}(N) &= \langle X_{u_i u_j}, N\rangle, \end{aligned}$$

com $u_1 = u \quad u_2 = v$ e $i, j = 1, 2$, são chamados de coeficientes da primera e segunda forma fundamental, respectivamente. A curvatura média de uma superfície tipo espaço em $\mathbb{L}^n$ é dada pela equação

$$H(N) = \frac{g_{22}b_{11}(N) - 2g_{12}b_{12}(N) + g_{11}b_{22}(N)}{2det(g_{ij})}. \tag{1.2}$$

Tomando (u, v) parâmetros isotérmicos a equação (1.2) pode ser escrita como:

$$H(N) = \frac{b_{11}(N) + b_{22}(N)}{2\lambda^2}. \tag{1.3}$$

Veja que da forma como é definido $H(N)$ é linear em N, com isto existe um único vetor $H \in (T_pM)^\perp$ tal que

$$H(N) = \langle H, N\rangle \quad \forall\, N \in (T_pM)^\perp. \tag{1.4}$$

O vetor H como foi definido, é chamado de *vetor curvatura média* de M no ponto p. Se $e_1, ..., e_{n-2}$ é uma base de $(T_pM)^\perp$, temos então que o *vetor curvatura média* pode ser expressado como

$$H = \sum_{k=1}^{n-2} H(e_k)e_k.$$

A partir destas definições conseguimos expressar o vetor curvatura média em termos das derivadas de X, para uma dada direção normal N a M, que segue abaixo.

Proposição 1.1. *Seja M uma 2-variedade conexa diferenciável, $X : M \to \mathbb{L}^n$ uma superfície tipo espaço, então*

$$\Delta X = 2\lambda^2 H$$

onde H é o vetor curvatura média.

Demonstração: Vamos seguir a demonstração de [23]. Supondo que (u, v) são parâmetros isotérmicos, por definição temos

$$\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle = \lambda^2 \quad \text{e} \quad \langle X_u, X_v\rangle = 0.$$

Diferenciando a primeira equação com relação a primeira variável (u) e a segunda com relação a segunda variável (v) temos que

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \langle X_{uv}, X_v\rangle \quad \text{e} \quad \langle X_{vu}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vv}\rangle = 0.$$

Vemos que

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u\rangle = 0$$

e por contas análogas, temos

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v\rangle = 0.$$

Com isso ΔX é perpendicular ao plano tangente de M. Mas se N é um vetor normal a M, arbitrário, nós temos

$$\langle \Delta X, N\rangle = \langle X_{uu}, N\rangle + \langle X_{vv}, N\rangle = b_{11}(N) + b_{22}(N) = 2\lambda^2 H(N)$$

Isto significa que $\frac{\Delta X}{\lambda^2}$ é um vetor que satisfaz a equação (1.4) do vetor curvatura média, assim

$$\frac{\Delta X}{2\lambda^2} = H$$

□

Observação 1.4. Veja a necessidade da superfície ser tipo espaço, na equação para o cálculo da curvatura média depende diretamente da primeira forma e que está relacionada com a norma dos vetores tangentes a superfície. Tomando a superfície tipo espaço garantimos a regularidade da superfície e a primeira fórmula fundamental não se anula podendo assim expressar a curvatura média em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental.

Uma consequência direta da Proposição 1.1 e da Definição 1.7 é o seguinte corolário.

Corolário 1.1. *Seja M uma 2-variedade. Uma aplicação $X : M \to \mathbb{L}^n$ é uma imersão máxima se, e somente se, X é harmônica. Em particular, M é não compacta.*

Agora considere M uma superfície de Riemann não compacta, e defina em termos de um parâmetro complexo local $z = u + iv$, (u, v) parâmetros isotérmicos de M, as funções complexas ϕ_1, ... , ϕ_n dadas por

$$\phi_k = \partial_z X_k = \frac{1}{2}(\partial_u X_k - i\partial_v X_k), \tag{1.5}$$

onde $1 \leq k \leq n$, com $X(p) = (X_1(p), X_2(p), ..., X_n(p))$. Vemos que $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ onde cada ϕ_k é dado por (1.5) , é uma função definida localmente sobre M com valores em $\mathbb{C}^n$. Na verdade, sua imagem está contida na quádrica $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{C}^n$ dada pela equação

$$\sum_{k=1}^{n-1} \phi_k^2 - \phi_n^2 = 0 \tag{1.6}$$

com efeito, podemos escrever a função ϕ como $\phi = \frac{1}{2}(X_u - iX_v)$, assim

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \frac{1}{4}(X_u - iX_v)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\langle X_u, X_u\rangle - \langle X_v, X_v\rangle - 2i\langle X_u, X_v\rangle\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois X é um sistema local isotérmico de M. Temos também que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |\phi_k|^2 - |\phi_n|^2 &= \phi_1\overline{\phi}_1 + ... + \phi_{n-1}\overline{\phi}_{n-1} - \phi_n\overline{\phi}_n \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}(\partial_u X_k)^2 - \frac{1}{4}(\partial_u X_n)^2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}(\partial_v X_k)^2 - \frac{1}{4}(\partial_v X_n)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[|\partial_u X|^2 + |\partial_v X|^2\right] \end{aligned}$$

Assim

$$|\phi|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} |\phi_k|^2 - |\phi_n|^2 = 2\lambda^2 > 0. \tag{1.7}$$

Segue daí que se $z = u+iv$ e $w = x+iy$ são parâmetros isotérmicos em torno de um ponto $p \in M$, então a mudança de coordenadas $w = w(z)$ é holomorfa com $\partial_z w \neq 0$. Assim, $\tilde{\phi} = \partial_w X$ está relacionada com ϕ por

$$\phi = \partial_z X = \partial_w X \partial_z w = \tilde{\phi}\partial_z w.$$

Com isto, se consideramos as *1-formas* complexas vetoriais dadas por $\Phi = \phi dz$ e $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} dw$, temos

$$\Phi = \phi dz = \tilde{\phi}\partial_z w dz = \tilde{\phi} dw = \tilde{\Phi}.$$

Logo temos uma *1-forma* vetorial diferenciável Φ definida globalmente sobre M, cuja expressão local é $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n)$, com

$$\Phi_k = \phi_k dz, 1 \leq k \leq n \tag{1.8}$$

Observação 1.5. No contexto de superfícies de Riemann é possível simplificar as expressões que aparecem no estudo de superfícies. Um exemplo disto ocorre quando consideramos localmente, em uma superfície de Riemann, os operadores

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\partial_u - i\partial_v\right) \quad \text{e} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_u + i\partial_v\right),$$

que nos fornece o seguinte operador Laplaciano

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v^2}\right) = \frac{4}{\lambda^2}\partial_z\partial_{\bar{z}}. \tag{1.9}$$

Observe que as *1-formas* dadas em (1.8) são holomorfas se, e somente se, M é uma imersão máxima em $\mathbb{L}^n$. De fato, das equações dadas em (1.7) e (1.9), obtemos

$$\partial_{\bar{z}}\Phi = \partial_{\bar{z}}\partial_z X = \frac{\lambda^2}{4}\Delta X.$$

Neste caso, se as *1-formas* Φ_k não tem períodos reais a imersão máxima X pode ser representada como

$$X(z) = 2\mathfrak{Re}\int_{\gamma_z}(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n), \tag{1.10}$$

onde γ_z é qualquer caminho de um ponto fixado à $z \in M$.

Observação 1.6. Quando a parte real da integral de Φ ao longo de qualquer caminho fechado em M é zero, dizemos que Φ não tem períodos reais. A não existência de períodos reais é equivalente a dizer que $\mathfrak{Re}\int_{\gamma_z}\Phi$ é independente de caminhos em M.

A recíproca é resolvida olhando para o seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Seja M uma superfície de Riemann conexa e $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n)$ 1-formas holomorfas com valores em $\mathbb{C}^n$ globalmente definidas sobre M satisfazendo:*

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \Phi_k^2 - \Phi_n^2 = 0$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |\Phi_k|^2 - |\Phi_n|^2 > 0,$

(c) *cada Φ_k não tem períodos reais.*

Então a aplicação $X : M \to \mathbb{L}^n$ dada pela equação (1.10) *é uma imersão máxima em $\mathbb{L}^n$.*

Observe que a condição (c) é necessária para garantir que $\mathfrak{Re} \displaystyle\int_{p_0}^{z} \Phi_k$ depende somente do ponto final z. Assim, cada X_k está bem definida independentemente do caminho γ_z de p_0 à z. Em (a) temos a garantia de existência de parâmetros isotemicos locais. O item (b) fornece a existência de um plano tangente tipo espaço em cada $p \in M$, ou seja, X é regular (logo uma imersão) tipo espaço. Como Φ é holomorfa segue-se que X é harmônica. Portando, X é uma superfície de tipo espaço com parâmetros isotérmicos e $H \equiv 0$, ou seja, concluimos que X é uma imersão máxima.

O seguinte teorema foi primeiramente provado por P. Koebe e H. Poincaré (veja [1] p. 181) e teve um grande impacto no estudo de superfícies de Riemann

Teorema 1.2. (Teorema de Uniformização) *A superfície de recobrimento universal de qualquer superfície de Riemann é conformemente equivalente ao disco unitário, ao plano ou à esfera de Riemann.*

Observação 1.7. A superfície de recobrimento universal de qualquer superfície é simplesmente conexa, e ela é fechada somente no caso de uma esfera.[2]

Como superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^n$ não são compactas, temos que M é conformemente equivalente a um subconjunto aberto do plano complexo. Como faremos um estudo local de imersões máximas, tudo que temos dito justifica a seguinte definição.

Definição 1.9. Uma *superfície máxima* é uma imersão máxima $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^n$ cuja métrica Riemanniana induzida é a métrica $\mathbf{I} = \lambda^2 |dz|^2$, onde $z = u + iv$.

[2] Veja [1] p. 181.

Capítulo 2

Problema de Björling em $\mathbb{L}^4$

Neste capítulo estudaremos o Problema de Björling para superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$ e mostraremos algumas propriedades de tais superfícies, como por exemplo simetrias. Durante a exposição faremos exemplos para melhor compreensão do assunto. Este capítulo baseia-se no artigo [5] (Björling problem for spacelike, zero mean curvature surfaces in $\mathbb{L}^4$), onde o problema é enunciado e resolvido para $\mathbb{L}^4$.

2.1 Estrutura de $\mathbb{L}^4$

Seja $\mathbb{L}^4$ denotando o espaço 4-dimensional de Lorentz-Minkowski, isto é, o espaço vetorial $\mathbb{R}^4 := \{(x^1, x^2, x^3, x^4) : x^i \in \mathbb{R}\}$ munido da métrica de Lorentz

$$\langle\ ,\ \rangle := (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2.$$

Dados $u, v \in \mathbb{L}^4$, definimos o *produto vetorial* $\boxtimes(u, v, w) \in \mathbb{L}^4$ por

$$\langle \boxtimes(u, v, w), x\rangle := -det(u, v, w, x), \tag{2.1}$$

que em coordenadas, é dado na forma

$$\boxtimes(u,v,w) = \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \\ u^4 & v^4 & w^4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^3 & v^3 & w^3 \\ u^4 & v^4 & w^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^4 & v^4 & w^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} \right).$$

Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base canônica de $\mathbb{R}^4$. A próxima proposição fornece algumas propriedades de $\boxtimes$.

Proposição 2.1. *O produto vetorial* $\boxtimes$ *tem as seguintes propriedades:*

(1) $\langle \boxtimes(u,v,w), u\rangle = \langle \boxtimes(u,v,w), v\rangle = \langle \boxtimes(u,v,w), w\rangle = 0$;

(2) $\boxtimes(u,v,e_4) = \hat{u}\times\hat{v}$, *onde* $\hat{u} = (u^1,u^2,u^3,0)$, $\hat{v} = (v^1,v^2,v^3,0) \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{L}^4$;

(3) $\boxtimes(u,v,e_2) = \breve{u}\times\breve{v}$, *onde* $\breve{u} = (u^1,0,u^3,u^4)$, $\breve{v} = (v^1,0,v^3,v^4) \in \mathbb{L}^3 \subset \mathbb{L}^4$;

(4) $\boxtimes(u,v,e_1) = -\breve{u}\times\breve{v}$ *e* $\boxtimes(u,v,e_3) = -\breve{u}\times\breve{v}$;

(5) $\langle \boxtimes(u_1,u_2,u_3), \boxtimes(v_1,v_2,v_3)\rangle = -det(\langle u_i, v_j\rangle)$, $\quad 1 \leqslant i,j \leqslant 3, \quad u_i, v_j \in \mathbb{L}^4$, *onde* $\times$ *é o produto vetorial de* $\mathbb{R}^3$ *ou de* $\mathbb{L}^3$.

Demonstração: O item (1) sai trivialmente da definição (2.1) já que teremos colunas múltiplas que implicará que o determinante da matriz será igual a zero. Para mostrar o item (2) observe que,

$$\boxtimes(u,v,e_4) = \left(\begin{vmatrix} u^2 & u^3 & u^4 \\ v^2 & v^3 & v^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & u^3 & u^4 \\ v^1 & v^3 & v^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^4 \\ v^1 & v^2 & v^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = \hat{u}\times\hat{v}$$

Vê-se que o produto vetorial é o de $\mathbb{R}^3$ já que a direção do tempo é eliminada. Para o item (3) temos

$$\boxtimes(u,v,e_4) = \left(\begin{vmatrix} u^2 & u^3 & u^4 \\ v^2 & v^3 & v^4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & u^3 & u^4 \\ v^1 & v^3 & v^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^4 \\ v^1 & v^2 & v^4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \breve{u}\times\breve{v}.$$

Nesse item a direção tipo tempo não é descartada, logo o produto vetorial é o de $\mathbb{L}^3$. O item (4) sai por contas análogas ao item (3). Resta então mostrar o item (5). Por (2.1) temos

$$\boxtimes(u_1,u_2,u_3) = \left(\begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \\ u_1^4 & u_2^4 & u_3^4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \\ u_1^4 & u_2^4 & u_3^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^4 & u_2^4 & u_3^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{vmatrix} \right)$$

$$\boxtimes(v_1,v_2,v_3) = \left(\begin{vmatrix} v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \\ v_1^4 & v_2^4 & v_3^4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \\ v_1^4 & v_2^4 & v_3^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^4 & v_2^4 & v_3^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{vmatrix} \right)$$

Tendo os vetores em mãos basta fazer o produtor interno e ver a validade da igualdade

$$\langle \boxtimes(u_1,u_2,u_3), \boxtimes(v_1,v_2,v_3)\rangle = -det(\langle u_i, v_j\rangle), \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 3$$

□

Observação 2.1. Para deixar claro o produto vetorial $\times$ de $\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial $\times$ de $\mathbb{L}^3$, sempre que necessário será especificado em que espaço estaremos trabalhando.

Antes de continuarmos precisamos de mais algumas ferramentas.

Definição 2.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. O Grassmanniano $G_r(V)$ é o conjunto de todos os subespaços lineares r-dimensionais de V.*

Exemplo 2.1. Um exemplo de Grassmanniano, que denotamos por $G_1(\mathbb{R}^n)$, é o Grassmanniano que parametriza todas as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^n$. Este Grassmanniano é identificado com o espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.

Denotamos o Grassmanniano $G_r(V)$, com dimensão de V igual a n, por $G_{r,n}(V)$. desta forma denotaremos por $G^+_{2,4}$ o Grassmanniano de $\mathbb{L}^4$ dos 2-planos tipo espaço e de forma análoga $G^-_{2,4}$ o Grassmanniano dos 2-planos tipo tempo de $\mathbb{L}^4$.

Seja $\mathbb{C}^4_1$ espaço vetorial complexo 4-dimensional munido de uma estrutura hermitiana, isto é;

$$\langle\langle z,w\rangle\rangle = \sum_{j=1}^{3} z^j\overline{w}^j - z^4\overline{w}^4.$$

Trataremos agora com os seguintes subconjuntos do espaço projetivo complexo $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4_1)$:

1. $\mathbb{CP}^3_1 := \{z \in \mathbb{C}^4\backslash\{0\} : \langle\langle z,z\rangle\rangle > 0\}/\mathbb{C}^*$;
2. $\mathbb{CH}^3 := \{z \in \mathbb{C}^4\backslash\{0\} : \langle\langle z,z\rangle\rangle < 0\}/\mathbb{C}^*$;
3. $\partial\mathbb{CH}^3 := \{z \in \mathbb{C}^4\backslash\{0\} : \langle\langle z,z\rangle\rangle = 0\}/\mathbb{C}^*$.

Observe que a definições acima podem ser extendidas para dimensão n.

Seja $G^+_{2,4}$ o Grassmanniano dos 2-planos tipo-espaço de $\mathbb{L}^4$ com a orientação induzida. Dados $u,v \in \mathbb{L}^4$, com $\langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle = \lambda^2 > 0$ e $\langle u,v\rangle = 0$, seja $\Pi^2 = span\{u,v\} \in G^+_{2,4}$. Podemos identificar $G^+_{2,4}$ com $Q^2_1 := \{[z] \in \mathbb{CP}^3_1 : \langle\langle z,\overline{z}\rangle\rangle = 0\}$ através da aplicação que envia cada $\Pi^2 \in G^+_{2,4}$ em $[z] \in \Pi^2$, onde $z = u + iv$.

De fato, defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & G^+_{2,4} & \longrightarrow & Q^2_1 \\ & \Pi^2 & \longmapsto & [z]=[u+iv] \end{array}$$

sendo Π^2 o 2-plano tipo espaço dito acima. Desta forma precisamos mostra que z estará em $\mathbb{CP}^3_1$ e também que $\langle\langle z,\overline{z}\rangle\rangle=0$, assim

$$\begin{aligned} \langle\langle z,z\rangle\rangle &= (z.\bar{z}) \\ &= (u+iv)(u-iv) \\ &= \langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle \\ &= 2\lambda^2>0 \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \langle\langle z,\overline{z}\rangle\rangle &= (z.z) \\ &= (u+iv).(u+iv) \\ &= \langle u,u\rangle-\langle v,v\rangle+2i\langle u,v\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $[z]\in Q^2_1$. Veja que φ é inversível e diferenciável, com isto temos que φ é um difeomorfismo.

Dado $\Pi^2=span\{u,v\}\in G^+_{2,4}$, seja $\nu_0:=\boxtimes(u,v,e_4)$ e $\tau_0:=\boxtimes(\frac{u}{\lambda},\frac{v}{\lambda},\nu_0)$; então $\{\nu_0,\tau_0\}$ gera o espaço $(\Pi^2)^\perp$. Tais vetores são importantes para o estudo das superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$, por esse motivo vamos explorá-los um pouco mais.

Proposição 2.2. *Seja ν_0,τ_0 definidos como acima. Temos:*

1. *$\nu_0=\hat{u}\times\hat{v}$, onde $\times$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}^3\subset\mathbb{L}^4$;*

2. *$\tau_0=\lambda^2e_4+u^4u+v^4v$, onde $\lambda^2=\langle u,u\rangle$;*

3. *$\langle\nu_0,\nu_0\rangle=\lambda^2(\lambda^2+(u^4)^2+(v^4)^2)$ e $\langle\tau_0,\tau_0\rangle=-\lambda^2(\lambda^2+(u^4)^2+(v^4)^2)$;*

4. *Se $\mu_0:=\sqrt{\lambda^2(\lambda^2+(u^4)^2+(v^4)^2)}$, $\tau:=\frac{\tau_0}{\mu_0}$ e $\nu:=\frac{\nu_0}{\mu_0}$, então $\{\frac{u}{\lambda},\frac{v}{\lambda},\nu,\tau\}$ é uma base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{L}^4$.*

Demonstração: As demonstrações abaixo usam diretamente a Proposição 2.1

1. $\nu_0=\boxtimes(u,v,e_4)=\hat{u}\times\hat{v}=$

$$=\left(\begin{vmatrix} u^2 & u^3 & u^4 \\ v^2 & v^3 & v^4 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u^1 & u^3 & u^4 \\ v^1 & v^3 & v^4 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^4 \\ v^1 & v^2 & v^4 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$= e_1(u^2v^3 - u^3v^2) - e_2(u^1v^3 - u^3v^1) + e_3(u^1v^2 - u^2v^1) + 0.e_4$

Aqui denotaremos $\nu_0 = (\nu_0^1, \nu_0^2, \nu_0^3, 0)$.

2. $$\tau_0 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\begin{vmatrix} u^2 & u^3 & u^4 \\ v^2 & v^3 & v^4 \\ \nu_0^2 & \nu_0^3 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u^1 & u^3 & u^4 \\ v^1 & v^3 & v^4 \\ \nu_0^1 & \nu_0^3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^4 \\ v^1 & v^2 & v^4 \\ \nu_0^1 & \nu_0^2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ \nu_0^1 & \nu_0^2 & \nu_0^3 \end{vmatrix}\right)$$

$= \frac{1}{\lambda^2}e_1(u^3v^4\nu_0^2 + u^4v^2\nu_0^3 - u^4v^3\nu_0^2 - u^2v^4\nu_0^3) - \frac{1}{\lambda^2}e_2(u^3v^4\nu_0^1 + u^4v^1\nu_0^3 - u^4v^3\nu_0^1 - u^1v^4\nu_0^3) + \frac{1}{\lambda^2}e_3(u^2v^4\nu_0^1 + u^4v^1\nu_0^2 - u^4v^2\nu_0^1 - u^1v^4\nu_0^2)$
$+\frac{1}{\lambda^2}e_4(u^1v^2\nu_0^3 + u^2v^3\nu_0^1 + u^3v^1\nu_0^2 - u^3v^2\nu_0^1 - u^2v^1\nu_0^3 - u^1v^3\nu_0^2)$

substituindo os valores de ν_0^i, $i = 1, 2, 3$ teremos

$$\tau_0 = \lambda^2 e_4 + u^4 u + v^4 v, \text{ onde } \lambda^2 = \langle u, u\rangle.$$

3. $\langle \nu_0, \nu_0\rangle = \langle \boxtimes(u, v, e_4), \boxtimes(u, v, e_4)\rangle$ usando o item (5) da Proposição 2.1 temos que,

$$\langle \boxtimes(u, v, e_4), \boxtimes(u, v, e_4)\rangle = -\begin{vmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle & \langle u, e_4\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle & \langle v, e_4\rangle \\ \langle e_4, u\rangle & \langle e_4, v\rangle & \langle e_4, e_4\rangle \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \lambda^2 & 0 & -u^4 \\ 0 & \lambda^2 & -v^4 \\ -u^4 & -v^4 & -1 \end{vmatrix}$$

fazendo o determinante teremos

$$\langle \nu_0, \nu_0\rangle = \lambda^2(\lambda^2 + (u^4)^2 + (v^4)^2).$$

Já para calcular $\langle \tau_0, \tau_0\rangle$, temos uma fómula explicita para τ_0, basta então fazer o produto interno de

$$\langle \tau_0, \tau_0\rangle = \langle \lambda^2 e_4 + u^4 u + v^4 v, \lambda^2 e_4 + u^4 u + v^4 v\rangle = -\lambda^2(\lambda^2 + (u^4)^2 + (v^4)^2)$$

4. Este quarto e último item é consequência direta do que foi feito nos itens acima. Primeiro vemos que todos os vetores são ortogonais e unitários assim temos uma base ortonormal de $\mathbb{L}^4$, por construção. E de fato é positivamente orientada, basta tomar o determinante da matriz formada por tais vetores.

□

Como foi dito anteriormente, denotamos por $G_{2,4}^-$ o Grassmanniano tipo tempo dos 2-planos de $\mathbb{L}^4$ com a orientação induzida. Dados $v_1, v_2 \in \mathbb{L}^4$, com $\langle v_1, v_1\rangle =$

$-\langle v_2, v_2\rangle = \lambda^2 > 0$ e $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, seja $\Pi^2 = span\{v_1, v_2\} \in G^-_{2,4}$. Podemos identificar, $G^-_{2,4}$ com a quádrica real $QR := \{[z] \in \partial\mathbb{CH}^3 : \langle \mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z)\rangle = 0$ *e* $\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z)$ são linearmente independentes $\}$. De fato, vamos definir a função:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}: & G^-_{2,4} & \longrightarrow & QR \\ & \Pi^2 & \longmapsto & [z] = [v_1 + iv_2] \end{array}$$

Primeiro temos que verificar que $z = v_1 + iv_2$ pertence a $\partial\mathbb{CH}^3$, mas

$$\begin{aligned} \langle\langle z, z\rangle\rangle &= (z.\bar{z}) \\ &= (v_1 + iv_2).(v_1 - iv_2) \\ &= \langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ isto implica que v_1 e v_2 são linearmente independentes, logo $[z] \in QR$. Observe que a função assim definida é inversível e diferenciável.

Em [17] e [18] é feito um estudo da aplicação de Gauss de superfícies em $\mathbb{R}^n$, para que possamos introduzir tal aplicação para superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^4$ precisamos de alguns conceitos herdados de $\mathbb{R}^4$.

Seja M uma superfície de Riemann e seja $X : M \to \mathbb{L}^4$ uma aplicação conforme local, com $X(z) = (x^1(z), x^2(z), x^3(z), x^4(z))$, se $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos locais sobre M, definimos localmente a aplicação de Gauss da superfície M como

$$G : M \to Q^2_1. \tag{2.2}$$

Na literatura encontramos, também, a aplicação de Gauss definida como $G : M \to G^+_{2,4}$ mas veja que anteriormente mostramos a existência de um difeomorfismo entre $G^+_{2,4}$ e Q^2_1 estando assim, bem definida. Escrevemos a aplicação de Gauss como

$$G(z) = \left[\frac{\partial X}{\partial u} + i\frac{\partial X}{\partial v}\right], \tag{2.3}$$

onde aqui usamos as derivadas complexas dadas da forma

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial u} - i\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial u} + i\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

Então podemos escrever a aplicação de Gauss como

$$G(z) = \left[\frac{\partial X}{\partial \bar{z}}\right] \tag{2.4}$$

Observação 2.2. A aplicação de Gauss de M é definida como a aplicação de M em Q_1^2 que leva cada $p \in M$ para $\varphi(T_pM)$, com φ aplicando $G_{2,4}^+$ em Q_1^2, onde cada plano tangente orientado T_pM e considerado como um elemento de $G_{2,4}^+$ após a translação paralela que aplica p para a origem. A aplicação de Gauss que acabamos de definir é igual ao conjugado da aplicação de Gauss ($\bar{G}(z) = [X_z]$) usual. É facil ver que $G(z)$ é uma aplicação de Gauss de uma superfície máxima se ela é antiholomorfa, ou seja, se seu conjugado é uma função holomorfa. Isto decorre do fato de sempre conseguirmos representar uma superfície máxima como parte real de uma função holomorfa.

Seja M uma 2-variedade diferenciável e $X : M \to \mathbb{L}^4$ uma imersão tipo espaço, com $S = X(p)$. Seja $(U, z = u + iv)$ coordenadas isotérmicas em uma vizinhança de um ponto $p \in M$, isto é, $\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle = \lambda^2$ e $\langle X_u, X_v\rangle = 0$. Isto induz uma estrutura holomorfa sobre M. Definimos uma base ortonormal $\{\nu, \tau\}$ de $(T_pS)^\perp$ por

$$\nu = \frac{\nu_0}{\mu_0} \ \text{ e } \ \tau = \frac{\tau_0}{\mu_0}, \tag{2.5}$$

onde,

$$\nu_0 = \boxtimes(X_u, X_v, e_4), \quad \tau_0 = \boxtimes(\tfrac{X_u}{\lambda}, \tfrac{X_v}{\lambda}, \nu_0), \quad \mu_0 = \sqrt{\lambda^2(\lambda^2 + (x_u^4)^2 + (x_v^4)^2)}.$$

Observe que ν e τ são respectivamente, campos de vetores normais tipo espaço e tipo tempo, da superfície $S = X(M)$, e que estão definidos globalmente sobre S. Além disso, seja $\beta = \{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$ uma base ortonormal adaptada (referencial adaptado) a S, onde

$$\partial_1 = \frac{X_u}{\lambda}, \qquad \partial_2 = \frac{X_v}{\lambda}, \qquad \partial_3 = \nu, \qquad \partial_4 = \tau. \tag{2.6}$$

A partir de β definimos a função complexa $A : M^2 \to \mathbb{C}^4$ por:

$$A(z) := \nu(z) + i\tau(z). \tag{2.7}$$

Observe que $[A(z)] \in QR$, pois ν e τ são tipo espaço e tipo tempo respectivamente e são linearmente independentes e que também gerão o espaço ortogonal $(T_pS)^\perp$.

Tome $\phi(z) = (\phi^1(z), \phi^2(z), \phi^3(z), \phi^4(z))$ e sejam $a(z)$, $b(z)$ funções complexas definidas em M. Defina a aplicação ϕ por

$$\phi : (a, b) \longmapsto \psi(1 + ab, i(1 - ab), a - b, a + b),$$

com $\psi \in \mathbb{C}$. Da forma como foi definida temos que

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \psi^2 \left\{(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2\right\} \\ &= \psi^2 \left\{(1 + ab)^2 - (1 - ab)^2 + (a - b)^2 - (a + b)^2\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |\psi|^2 \left\{|\phi^1(z)|^2 + |\phi^2(z)|^2 + |\phi^3(z)|^2 - |\phi^4(z)|^2\right\} \\ &= |\psi|^2 \left\{|1 + ab|^2 + |1 - ab|^2 + |a - b|^2 - |a + b|^2\right\} > 0. \end{aligned}$$

Portanto $[\phi] \in Q_1^2$ e sua inversa ϕ^{-1} é dada por

$$\phi^{-1} : (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4) \longmapsto (a, b) = \left(\frac{\phi^3 + \phi^4}{2\psi}, \frac{-\phi^3 + \phi^4}{2\psi}\right),$$

onde $\psi = \frac{\phi^1 - i\phi^2}{2}$, temos assim uma representação para ϕ em termos de a, b. Vamos agora representar $(T_pS)^\perp$ em termos de a e b. Vimos que,

$$\nu = \frac{\nu_0}{\mu_0}, \qquad \nu_0 = \boxtimes(X_u, X_v, e_4) = \hat{X}_u \times \hat{X}_v$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\mu_0}, \qquad \tau_0 = \boxtimes(\tfrac{X_u}{\lambda}, \tfrac{X_v}{\lambda}, \nu_0), \text{ onde}$$

$$\mu_0 := \sqrt{\lambda^2(\lambda^2 + (x_u^4)^2 + (x_v^4)^2)}$$

Vamos calcular ν_0, mas antes observe que

$$\begin{aligned} \nu_0 = \hat{X}_u \times \hat{X}_v &= \mathfrak{Im}\{\big(\phi_2\overline{\phi}_3, \phi_3\overline{\phi}_1, \phi_1\overline{\phi}_2, 0\big)\} \\ &= |\psi|^2\mathfrak{Im}\{\big((1 - ab)(\bar{a} - \bar{b})i, (a - b)(1 + \bar{a}\bar{b}), (1 + ab)(1 - \bar{a}\bar{b})i, 0\big)\} \end{aligned}$$

tendo isso em mãos vamos calcular a primeira coordenada do vetor ν_0. Iremos omitir o escalar $|\psi|^2$ uma vez que ele estará multiplicando todas as coordenadas do vetor.

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}\{\phi_2\overline{\phi}_3\} &= \mathfrak{Im}\{i(\bar{a} - |a|^2 b + a|b|^2 - \bar{b})\} \\ &= \mathfrak{Re}(a) - |a|^2\mathfrak{Re}(b) - \mathfrak{Re}(b) + |b|^2\mathfrak{Re}(a) \\ &= (1 + |b|^2)\mathfrak{Re}(a) - (1 + |a|^2)\mathfrak{Re}(b). \end{aligned}$$

Calculando a segunda coordenada de ν_0 temos

$$\begin{aligned}\mathfrak{Im}\{\phi_3\overline{\phi}_1\} &= \mathfrak{Im}\{a-b+|a|^2\bar{b}-\bar{a}|b|^2\}\\ &= \mathfrak{Im}(a)-\mathfrak{Im}(b)-|a|^2\mathfrak{Im}(b)+|b|^2\mathfrak{Im}(a)\\ &= (1+|b|^2)\mathfrak{Im}(a)-(1+|a|^2)\mathfrak{Im}(b).\end{aligned}$$

Da mesma forma, a terceira coordenada de ν_0 fica,

$$\begin{aligned}\mathfrak{Im}\{\phi_1\overline{\phi}_2\} &= \mathfrak{Im}\{-(1+ab)(1-\bar{a}\bar{b})i\}\\ &= \mathfrak{Im}\{(-1+\bar{a}\bar{b}-ab+|a|^2|b|^2)i\}\\ &= |a|^2|b|^2-1.\end{aligned}$$

Para calcular ν resta calcular apenas μ_0. Primeiro vamos calcular λ^2. Sabemos que

$$\lambda^2 = |X_u|^2 = \tfrac{1}{2}\left|\phi\right|^2,$$

assim,

$$\begin{aligned}\lambda^2=\frac{1}{2}\left|\phi\right|^2 &= \tfrac{|\psi|^2}{2}\left[|1+ab|^2+|1-ab|^2+|a-b|^2-|a+b|^2\right]\\ &= \tfrac{|\psi|^2}{2}\left[(1+ab)(1+\bar{a}\bar{b})+(1-ab)(1+\bar{a}\bar{b})+(a-b)(\bar{a}-\bar{b})-(a+b)(\bar{a}+\bar{b})\right]\\ &= \tfrac{|\psi|^2}{2}\left(2+2|a|^2|b|^2-2\bar{a}b-2a\bar{b}\right)\\ &= |\psi|^2\left\{1+|a|^2|b|^2-\bar{a}b-a\bar{b}\right\}=|\psi|^2|1-a\bar{b}|^2.\end{aligned}$$

Agora observe que, $|\phi_4|^2=|x_u^4|^2+|x_v^4|^2$ que implica em $\mu_0=\sqrt{\lambda^2(\lambda^2+|\phi_4|^2)}$, portanto

$$\begin{aligned}\mu_0 &= |\psi|^2|1-a\bar{b}|\sqrt{1+|a|^2|b|^2-\bar{a}b-a\bar{b}+(a+b)(\bar{a}+\bar{b})}\\ &= |\psi|^2|1-a\bar{b}|\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}.\end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever ν em função de $a(z)$ e $b(z)$ usando as expressões acima,

$$\nu=\frac{\nu_0}{\mu_0}=\frac{1}{|1-a\bar{b}|\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}}\begin{bmatrix}(1+|b|^2)\mathfrak{Re}(a)-(1+|a|^2)\mathfrak{Re}(b)\\ (1+|b|^2)\mathfrak{Im}(a)-(1+|a|^2)\mathfrak{Im}(b)\\ |a|^2|b|^2-1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Resta encontra τ em função das mesmas funções. Mas sabemos pela Proposição

2.2 que

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \lambda^2 e_4 + x_u^4 X_u + x_v^4 X_v, \text{ substituindo temos}\\ &= |\psi|^2|1-a\bar{b}|^2 e_4 + \mathfrak{Re}\{\psi(a+b)\}\mathfrak{Re}\{\psi(1+ab, i(1-ab), a-b, a+b)\}\\ &\quad +\mathfrak{Im}\{\psi(a+b)\}\mathfrak{Im}\{\psi(1+ab, i(1-ab), a-b, a+b)\}.\end{aligned}$$

Analogamente encontramos o valor de τ

$$\tau = \frac{\tau_0}{\mu_0} = \frac{1}{|1-a\bar{b}|\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}}\begin{bmatrix}(1+|b|^2)\mathfrak{Re}(a)+(1+|a|^2)\mathfrak{Re}(b)\\ (1+|b|^2)\mathfrak{Im}(a)+(1+|a|^2)\mathfrak{Im}(b)\\ |a|^2-|b|^2\\ (1+|a|^2)(1+|b|^2)\end{bmatrix}$$

Temos assim $A(z) := \nu(z) + i\tau(z)$ em termos de $a(z)$ e $b(z)$.

2.2 Problema de Björling em $\mathbb{L}^4$

Agora iremos propor e resolver o Problema de Björling para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$, que chamamos de superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$. Seja $c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{L}^4$ uma curva tipo espaço real analítica regular em $\mathbb{L}^4$ e seja $n : I \to \mathbb{C}_1^4$ um campo de vetores analíticos reais ao longo de c (isto é, $\mathfrak{Re}(n), \mathfrak{Im}(n) : I \to \mathbb{L}^4$ são campos de vetores ao longo de c) tal que,

$$\langle c'(s), \mathfrak{Re}(n)\rangle = \langle c'(s), \mathfrak{Im}(n)\rangle = 0, \tag{2.8}$$

$$\langle \mathfrak{Re}(n), \mathfrak{Re}(n)\rangle = -\langle \mathfrak{Im}(n), \mathfrak{Im}(n)\rangle = 1. \tag{2.9}$$

Além disso $\mathfrak{Im}(n)$ está na direção do tempo para todo $s \in I$. Vamos chamar o par (c, n) de *faixa analítica* em $\mathbb{L}^4$. Assim o Problema de Björling é encontrar uma superfície máxima S definida por $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$ com $I \subseteq \Omega$, tal que

1. $X(u, 0) := c(u)$
2. $A(u, 0) := n(u) \ \ \forall u \in I.$

Vamos definir o que é uma curva regular tipo espaço, e enunciar um importante teorema para funções analíticas complexas que usaremos frequentemente.

Definição 2.2. Uma curva regular $c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{L}^4$ é dita de *tipo espaço* se $\langle c', c' \rangle > 0$ em todo ponto.

Teorema 2.1 (Teorema da Identidade)**.** *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ analítica em Ω, considere o conjunto $D_f = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ se o conjunto D_f possui um ponto de acumulação então $f \equiv 0$ em Ω.* [1]

Observação 2.3. O problema de extensão de funções analíticas é um dos mais importantes da análise complexa. Temos que: *uma condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$, a valores no corpo dos reais e definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, admita uma extenção holomorfa $f(z)$ é que ela seja, neste intervalo, uma função analítica da variável real x. E tal complemento holomorfo, se existir, é único.*[2]

Observação 2.4. Vemos que se $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$ é uma superfície máxima em $\mathbb{L}^4$ então $c(u) := X(u, 0)$ e $n(u) := A(u, 0)$ satisfazem as condições acima e, em particular, são reais analíticas. Então existem extensões holomorfas $c(z)$ e $n(z)$ e estas extensões são únicas pelo Teorema da identidade para funções analíticas. Nessa situação podemos explicitar $X(z)$ em termos de c e n por meio de uma única representação complexa.

Podemos agora mostrar o teorema que resolve o Problema de Björling em $\mathbb{L}^4$.

Teorema 2.2. *Seja S uma superfície tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$ dada por $X : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$. Defina a curva $c(u) := X(u, 0)$ e o campo de vetores $n(u) := A(u, 0)$ ao longo de $c(u)$, sobre um intervalo real $I \subset U$. Tome um conjunto aberto $\Omega \subseteq U$ simplesmente conexo contendo I, sobre o qual podemos definir extensões holomorfas $c(z)$ e $n(z)$ de $c(u)$ e $n(u)$. Então $\forall z \in \Omega$, teremos*

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w))dw\right\} \tag{2.10}$$

onde, s_0 é um ponto fixo arbitrário de I e a integral é tomada ao longo de um caminho arbitrário em Ω ligando s_0 e z.

Demonstração: Como S tem curvatura média igual a zero, da função complexa

$\Psi : U \longrightarrow \mathbb{C}$, definida em (1.5) temos:

[1] Uma demonstração deste fato é encontrada em [7].

[2] Uma demonstração deste fato é encontrada em [24] pp. 346-347.

$\Psi = 2\dfrac{\partial X}{\partial z}$, com $\Psi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$.

Observe que Ψ é holomorfa em U e por (1.10) podemos escrever:

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left(\int_{s_0}^{z} \Psi dz\right) + k_0 \tag{2.11}$$

onde $k_0 \in \mathbb{L}^4$ uma constante conveniente, tal que, $X(u,0) = c(u) \quad \forall u \in I$. Seja $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$ base ortonormal adaptado para S dado em (2.6). Agora escrevemos $\boxtimes$ nesta base,

$\boxtimes(\partial_3, \partial_4, \partial_1) = \langle \boxtimes(\partial_3, \partial_4, \partial_1), \partial_2 \rangle \partial_2 = -det(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)\partial_2 = -\partial_2.$

Como $X_v = \lambda \partial_2$, temos

$\Psi = X_u(z) - iX_v(z) = X_u(z) + i \boxtimes (\nu(z), \tau(z), X_u(z))$

em coordenadas isotérmicas $(U, z = u + iv)$. Restrigindo $\Psi(z)$ a I e usando a definição de c e n obtemos,

$$\begin{aligned}
\Psi(u,0) &= X_u(u,0) + i \boxtimes (\nu(u,0), \tau(u,0), X_u(u,0)) \\
&= c'(u) + i \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(u,0)), \mathfrak{Im}(n(u,0)), c'(u))
\end{aligned}$$

Como essas funções são reais analíticas, podemos tomar suas extensões para duas funções holomorfas $\Psi(z)$ e $c'(z) + i \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(z)), \mathfrak{Im}(n(z)), c'(z))$ em um subconjunto aberto simplesmente conexo $\Omega \subseteq U$ e que elas coincidem em $I \subseteq \Omega$. Portanto pelo Teorema da Identidade para funções analíticas, e assim

$$\Psi(z) = c'(z) + i \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(z)), \mathfrak{Im}(n(z)), c'(z)) \quad \forall z \in \Omega.$$

Portanto,

$$\Gamma(z) := \int_{s_0}^{z} \Psi(w)dw = c(z) + i \int_{s_0}^{z} \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w))dw \quad \forall z \in \Omega$$

está bem definida em Ω e obviamente é primitiva da função holomorfa $\Psi(z)$. Assim de (2.11) temos:

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i \int_{s_0}^{z} \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w))dw\right\},$$

completando a demonstração do teorema.

$\square$

Observação 2.5. Veja que c e n já são tomadas reais analíticas, logo, sempre conseguimos extensões holomorfas em Ω. Se $\langle c'(s), c'(s)\rangle = 1$ observe que sua extensão holomorfa $c(z)$ também terá o mesmo comprimento. Por último a integral definida em (2.11) não depende do caminho que liga s_0 e z. Com isto $X(z)$ está bem definida para todo $z \in U$.

Podemos tomar qualquer $s_0 \in I$ em (2.10) e o valor de $X(z)$ irá permanecer o mesmo, pois $c'(z), \mathfrak{Re}(n(z)), \mathfrak{Im}(n(z))$ toma todos os valores reais em $I \subset \Omega$. Usando (2.1), mostraremos agora que o Problema de Björling tem solução única.

Teorema 2.3 (Existência e Unicidade)**.** *Existe uma única solução* $X : \Omega \to \mathbb{L}^4$ *do problema de Björling para superfícies máximas em* $\mathbb{L}^4$*, que é dada por*

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w))dw\right\}$$

com $w = u + iv \in \Omega, s_0 \in I$*, onde* Ω *é um subconjunto aberto simplesmente conexo de* $\mathbb{C}$ *contendo o intervalo real* I *e que* $c(s)$*,* $n(s)$ *admitem extensões holomorfas* $c(z)$*,* $n(z)$*.*

Demonstração: Defina a curva holomorfa $\Psi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}^4$ por,

$$\Psi(z) = c'(z) + i \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(z)), \mathfrak{Im}(n(z)), c'(z)), \quad \forall z \in \Omega, \tag{2.12}$$

onde Ω é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ contendo I no qual as extensões holomorfas de $c(z)$ e $n(z)$ existam. Pela Proposição 2.1, $c'(u)$ e $\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))$ são ortogonais e tem o mesmo comprimento. De fato,

$$\langle \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)), \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))\rangle =$$

$$= -det\begin{pmatrix} \langle c', c'\rangle & \langle \mathfrak{Im}(n), c'\rangle & \langle \mathfrak{Re}(n), c'\rangle \\ \langle c', \mathfrak{Im}(n)\rangle & \langle \mathfrak{Im}(n), \mathfrak{Im}(n)\rangle & \langle \mathfrak{Re}(n), \mathfrak{Im}(n)\rangle \\ \langle c', \mathfrak{Re}(n)\rangle & \langle \mathfrak{Im}(n), \mathfrak{Re}(n)\rangle & \langle \mathfrak{Re}(n), \mathfrak{Re}(n)\rangle \end{pmatrix}.$$

Mas de (2.8) e (2.9) temos que $\langle c', \mathfrak{Re}(n)\rangle = 0 = \langle c', \mathfrak{Im}(n)\rangle$ e que também $\langle \mathfrak{Re}(n), \mathfrak{Re}(n)\rangle = -\langle \mathfrak{Im}(n), \mathfrak{Im}(n)\rangle = 1$ e $\langle c', c'\rangle > 0$. Substituindo esse valores, a matriz resultante será;

$$\langle \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)), \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))\rangle = -\begin{vmatrix} \langle c', c'\rangle & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

logo o produto interno nos da

$$\langle \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)), \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))\rangle = \langle c', c'\rangle > 0,$$

portanto possuem o mesmo comprimento e da Proposição 2.1 temos que são ortogonais. Vejamos uma consequência imediata desse fato,

$$\begin{array}{rcl} (\Psi(u,0))^2 & = & (c'(u) + i \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)))^2 \\ & = & \langle c'(u), c'(u)\rangle + 2i\langle c'(u), \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))\rangle \\ & & -\langle \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)), \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))\rangle \\ & = & 0, \quad \forall\, u \in I \end{array},$$

onde usamos o fato de terem o mesmo comprimento e serem ortogonais. Além disso:

$$\begin{array}{rcl} |\Psi(u,0)|^2 & = & |c'(u) + i \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))|^2 \\ & = & |c'(u)|^2 + | \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))|^2 \\ & = & 2\langle c'(u), c'(u)\rangle > 0. \end{array}$$

Então $(\Psi(u,0))^2 = 0$ e $|\Psi(u,0)|^2 > 0$, portanto $[\Psi] \in Q_1^2$. A curva holomorfa Ψ não tem períodos reais, pois Ω é simplesmente conexo. Tomando a extensão holomorfa de Ψ temos pelo Teorema 1.1, $X(z) = \mathfrak{Re}\left(\int_{s_0}^{z} \Psi dz\right) + k_0$ define uma superfície tipo espaço com curvatura média igual a zero $S = X(\Omega)$ em $\mathbb{L}^4$, onde Ψ é dado por (2.12) e $s_0 \in I$. Agora devemos checar que tal superfície satisfaz as condições de Björling $X(u,0) = c(u)$ e $A(u,0) = n(u)$.

A primeira condição é satisfeita uma vez que $c(z)$ e $\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(z)), \mathfrak{Im}(n(z)), c'(z))$ são reais quando restritas a I. Resta assim mostrar a segunda condição, mas como

$\Psi(z) = 2\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)$

segue de (2.12) que, restrito a I, temos

$X_u(u,0) = c'(u)$,

$X_v(u,0) = - \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))$.

Por outro lado de (2.10), temos

$X_v(u,0) = -\boxtimes\,(\nu(u,0), \tau(u,0), X_u(u,0))$.

Logo $\mathfrak{Re}(n(u)) = \nu(u,0)$ e $\mathfrak{Im}(n(u)) = \tau(u,0)$.

Por último provaremos a unicidade. Neste sentido, se $\overline{X}(z)$, $z = u + iv \in \overline{\Omega}$ é outra solução, podemos definir uma função $\Gamma(z) = X(z) - \overline{X}(z), \quad \forall z \in \Omega \cap \overline{\Omega}$, que se anula em todo $I \subset \Omega \cap \overline{\Omega}$. Logo pelo Teorema da identidade para funções analíticas temos que $\Gamma \equiv 0$, logo $X(z) = \overline{X}(z) \quad \forall z \in \Omega \cap \overline{\Omega}$.

$\square$

Observe que a unicidade dada no teorema acima somente refere-se a superfícies tipo espaço com curvatura média zero, $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$, satisfazendo $X(u,0) = c(u)$ e $A(u,0) = n(u)$. Atualmente um pouco mais pode ser provado: Dado uma faixa analítica (c,n) em $\mathbb{L}^4$. Existe uma única imersão tipo espaço $X : M^2 \to \mathbb{L}^4$, com $H \equiv 0$, cuja imagem contém $c(I)$ e a restrição de c é n. A parte de existência desta afirmação segue do Teorema 2.3. Para a unicidade, nos referimos ao Corolário 3.4 de [13].

Faremos alguns exemplos resolvendo o Problema de Björling.

Exemplo 2.2. Considere

$$\begin{aligned} c(s) &= (s - s^3, 0, s^2, 0) \in \mathbb{L}^4, \\ n(s) &= \frac{1}{(1-2s^2+9s^4)^{\frac{1}{2}}}\left(2s, -2\sqrt{2}si, -(1-3s^2), (1+3s^2)i\right) \in \mathbb{C}^4 \end{aligned}$$

$\forall s \in \mathbb{R}$.

Primeiro vamos calcular $\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s))$. Sabendo que $c'(s) = (1-3s^2, 0, 2s, 0)$ teremos

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s)) =$$

$$= \frac{1}{(1-2s^2+9s^4)}\left(\begin{vmatrix} 0 & -(1-3s^2) & 0 \\ -2\sqrt{2}s & 0 & (1+3s^2) \\ 0 & 2s & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2s & -(1-3s^2) & 0 \\ 0 & 0 & (1+3s^2) \\ 1-3s^2 & 2s & 0 \end{vmatrix}, \right.$$

$$\left., \begin{vmatrix} 2s & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}s & (1+3s^2) \\ 1-3s^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2s & 0 & -(1-3s^2) \\ 0 & -2\sqrt{2}s & 0 \\ 1-3s^2 & 0 & 2s \end{vmatrix} \right)$$

o produto vetorial será

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s)) = (0, 1+3s^2, 0, -2\sqrt{2}s).$$

Tomando sua extensão holomorfa temos,

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w)) = (0, 1+3w^2, 0, -2\sqrt{2}w).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z}(\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w))dw\right\} \\ &= \mathfrak{Re}\left\{(z - z^3, 0, z^2, 0) + i\left(0, z + z^3 - s_0 - s_0^3, 0, -\sqrt{2}z^2 + \sqrt{2}s_0^2\right)\right\} \end{aligned}$$

Tomando $z = u + iv$ temos:

$z^2 = (u+iv)^2 = u^2 - v^2 + 2uv,$

$z^3 = (u+iv)^3 = (u+iv)^2(u+iv) = u^3 - iv^3 - 3uv^2 + 3iu^2v.$

Portanto a solução para o Problema de Björling para faixa dada é

$$X(z) = (u + 3uv^2 - u^3, -v - 3u^2v + v^3, u^2 - v^2, 2\sqrt{2}uv),$$

com $z = u + iv \in \mathbb{C}$

Exemplo 2.3. Considere

$$\begin{aligned} c(s) &= (1+\cos(s), 0, \operatorname{sen}(s), 2\operatorname{sen}(s/2)) \in \mathbb{L}^4 \\ n(s) &= (\cos(s), 0, \operatorname{sen}(s), 0) + i(-1-\cos(s), 0, \cos(s)\cot(s/2), \csc(s/2)) \in \mathbb{C}^4 \end{aligned}$$

$\forall s \in (0, 2\pi)$.

Veja que a segunda coordenada de ambos é zero, assim:

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s)) = \left(0, -\begin{vmatrix} \cos(s) & \operatorname{sen}(s) & 0 \\ -1-\cos(s) & \cos(s)\cot(s/2) & \csc(s/2) \\ -\cos(s) & \cos(s) & \cos(s/2) \end{vmatrix}, 0, 0\right)$$

$$= (0, \operatorname{sen}(s/2), 0, 0).$$

Tomando sua extensão holomorfa, temos

$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w)) = (0, \operatorname{sen}(w/2), 0, 0)$.

Aplicando o Teorema 2.2, a solução do Problema de Björling para a faixa dada é

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} (\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w))dw\right\}$$

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{(1+\cos(z), 0, \operatorname{sen}(z), 2\operatorname{sen}(z/2)) + e_2(-2\cos(z/2) + 2\cos(s_0/2)\right\}$$

onde usando as relações $\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{senh} x$ e $\cos(ix) = \cosh x$ chegamos em

$$X(z) = (1+\cos(u)\cosh(v), -2\operatorname{sen}(u/2)\operatorname{senh}(v/2), \cosh(v)\operatorname{sen}(u), 2\cosh(v/2)\operatorname{sen}(u/2)),$$

com $z = u + iv$, onde $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in \mathbb{R}$.

Como vimos na Proposição 2.1, fazendo o produto vetorial com os vetores da base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ podemos estar em $\mathbb{L}^3$ ou $\mathbb{R}^3$, com isso, podemos tomar campos de vetores em $\mathbb{L}^4$ de forma a se obter superfícies máximas com interessantes caracteristicas. Em [25] o Problema de Björling é proposto e resolvido para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ já em [3] o problema é feito para superfícies máximas em $\mathbb{L}^3$, veremos que a partir da representação complexa dada no Teorema 2.2 o Problema de Björling, tanto em $\mathbb{R}^3$ quanto em $\mathbb{L}^3$, são corolários do Teorema 2.2.

Corolário 2.1. *Seja $c : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \equiv \{x^4 = 0\} \subset \mathbb{L}^4$, uma curva analítica real regular e seja $n : I \to \mathbb{C}^4$ um campo de vetores analítico real ao longo de c, tal que, $n(s) = \xi(s) + ie_4$, onde $\xi(s) \in \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial unitário satisfazendo $\langle c'(s), \xi(s)\rangle = 0$ para todo $s \in I$. Então existe uma única solução do Problema de Björling para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, que é dado por*

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) - i\int_{s_0}^{z} (\xi(w) \times c'(w))dw\right\} \tag{2.13}$$

onde, $z = u + iv \in \Omega$, $s_0 \in I$, Ω é um conjunto aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ contendo I e $\times$ é o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.3 , temos que a solução para o Problema de Björling é dada por

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} \boxtimes(\xi(w), e_4, c'(w))dw\right\} \\ &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) - i\int_{s_0}^{z} \boxtimes(\xi(w), c'(w), e_4)dw\right\}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1, item 2 temos

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) - i\int_{s_0}^{z} \hat{\xi}(w) \times \hat{c'}(w)dw\right\} \\ &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) - i\int_{s_0}^{z} \xi(w) \times c'(w)dw\right\}. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2. *Seja $c: I \to \mathbb{L}^3$, $\mathbb{L}^3 \equiv \{x^2 = 0\} \subset \mathbb{L}^4$, uma curva analítica real regular tipo espaço e seja $n: I \to \mathbb{C}^4$ um campo de vetores analítico real ao longo de c, da forma $n(s) = e_2 + iV(s)$, onde $V(s) \in \mathbb{L}^3$ é um campo unitário tipo tempo tal que $\langle c'(s), V(s)\rangle = 0$ para todo $s \in I$. Então existe uma única solução do Problema de Björling para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^3$, que é dado por*

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} (V(w) \times c'(w))dw\right\} \tag{2.14}$$

onde $z = u + iv \in \Omega$, $s_0 \in I$, Ω é um conjunto aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ contendo I e $\times$ é o produto vetorial de $\mathbb{L}^3$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.3, temos que a solução para o Problema de Björling é dado por

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} \boxtimes(e_2, V(w), c'(w))dw\right\} \\ &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} \boxtimes(V(w), c'(w), e_2)dw\right\} \end{aligned}$$

pela Proposição 2.1, item 3 temos

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} \check{V}(w) \times \check{c'}(w)dw\right\} \\ &= \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} V(w) \times c'(w)dw\right\}. \end{aligned}$$

onde $z = u + iv \in \Omega$, $s_0 \in I$, Ω é um conjunto aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ contendo I e $\times$ é o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$.

□

Observação 2.6. Veja que não há necessidade de enunciar os mesmos Corolários trabalhando com os vetores canônicos e_1 e e_3, pois, a partir da Proposição 2.1 o produto vetorial destes vetores com a curva $c(u)$ são iguais, a menos de sinal, ao produto de $c(u)$ com e_2.

2.3 Simetrias

Estudaremos as simetrias das superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$ via representação complexa do Problema de Björling para superfícies máxima. Para tal vamos fixar a seguinte notação. Seja $f(z) = x(z)+iy(z)$, onde $x(z)$, $y(z)$ são funções de valores reais definidas em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se $x(z)$ é harmônica e $f(z)$ é holomorfia em Ω, então $x(\overline{z})$ é harmônica e $\overline{f(\overline{z})}$ é holomorfa como uma função de z em um conjunto aberto $\Omega^* := \{\overline{z} : z \in \Omega\}$. Note que, Ω é simétrico se e somente se $\Omega = \Omega^*$. Além disso temos que, se $I \subset \Omega$, f é holomorfa em Ω e f restrita a I admite apenas valores reais, então $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ em $I \subset \Omega \cap \Omega^*$. Por esta razão, $f(z)$ pode ser extendida holomorficamente à $\Omega \cup \Omega^*$.

Proposição 2.3. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$ uma solução para o Problema de Björling, para uma dada faixa (c, n) em $\mathbb{L}^4$, onde Ω é um conjunto aberto simétrico simplesmente conexo contendo o intervalo I e para o qual c, n admitem extensões holomorfas $c(z)$ e $n(z)$, onde $z = u + iv \in \Omega$. Então $\forall\, z \in \Omega$ temos;*

$$X(\overline{z}) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) - i\int_{s_0}^{z} \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w))dw\right\} \tag{2.15}$$

Demonstração. A superfície $\tilde{S} = \tilde{X}(\Omega)$ dada por $\tilde{X}(u, v) := X(u, -v)$, claramente satisfaz $\tilde{X}_{uu}(u, v) = X_{uu}(u, -v)$, $\tilde{X}_{vv}(u, v) = X_{vv}(u, -v)$ e continua sendo uma superfície tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$. Associado a $\tilde{X}$, seja $\tilde{A}(u, v) := \tilde{\nu}(u, v) + i\tilde{\tau}(u, v)$. Pela Proposição 2.1 e a definição de $\boxtimes$, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_0(u, v) &= (\lambda^2 e_4 + x_u^4 X_u + x_v^4 X_v)(u, -v)\\
\tilde{\nu}_0(u, v) &= \boxtimes(e_4, X_u(u, -v), -X_v(u, -v))\\
&= -\boxtimes(e_4, X_u(u, -v), X_v(u, -v)),
\end{aligned}$$

e então $\tilde{\tau}(u, v) = \tau(u, -v)$ e $\tilde{\nu}(u, v) = -\nu(u, -v)$. Temos assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(u, v) &= \tilde{\nu}(u, v) + i\tilde{\tau}(u, v)\\
&= -\nu(u, -v) + i\tau(u, -v)\\
&= -\overline{A(u, -v)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Isto implica que $\tilde{A}(u, 0) = -\overline{A(u, 0)} = -\overline{n(u)}$ e também que $\tilde{X}(u, 0) = X(u, 0) =$

$c(u)$. Então $\tilde{X}$ é uma solução do Problema de Björling para $\tilde{c} = c$, $\tilde{n} = -\overline{n}$ e então

$$\tilde{X}(z) = \mathfrak{Re}\left\{\int_{s_0}^{z} \tilde{\Psi}(w)dw\right\} + \tilde{k}_0$$

onde $\tilde{\Psi}(z) = \tilde{X}_u + i \boxtimes (\tilde{\nu}(z), \tilde{\tau}(z), \tilde{X}_u(z))$, por (2.10). Restringindo $\tilde{\Psi}(z)$ a I e usando (2.16) obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(u,0) &= X_u(u,0) + i \boxtimes (-\nu(u,0), \tau(u,0), X_u(u,0)) \\ &= c'(u) - i \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)).\end{aligned}$$

Quando tomamos suas extensões holomorfas em Ω^*, temos

$$\tilde{\Psi}(z) = c'(z) - i \boxtimes (\mathfrak{Re}(n(z)), \mathfrak{Im}(n(z)), c'(z)),$$

donde segue-se o resultado.

□

Corolário 2.3. *Sobre as hipóteses da Proposição 2.3, se $S = X(\Omega) \subset \mathbb{R}^3 \equiv \{x^4 = 0\}$ e $n(s) = \xi(s) + ie_4$, com $\xi(s) \in \mathbb{R}^3$ unitário tal que $\langle c'(s), \xi(s)\rangle = 0 \ \ \forall\, s \in I$, então*

$$X(\overline{z}) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} (\xi(w) \times c'(w))dw\right\}, \forall\, z \in \Omega. \tag{2.17}$$

Demonstração: Pelo Corolário 2.1 temos que a solução do Problema de Björling para a faixa analítica dada será

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) - i\int_{s_0}^{z} (\xi(w) \times c'(w))dw\right\}.$$

Pela Proposição 2.3 temos que a solução do Problema de Björling para o conjugado de $z \in \Omega$ é

$$X(\overline{z}) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z} (\xi(w) \times c'(w))dw\right\}.$$

Como queríamos mostrar.

□

Corolário 2.4. *Sobre as hipóteses da Proposição 2.3, se $S = X(\Omega) \subset \mathbb{L}^3 \equiv \{x^2 = 0\}$ e $n(s) = e_2 + iV(s)$, com $V(s) \in \mathbb{L}^3$ tipo tempo unitário, e tal que, $\langle c'(s), V(s)\rangle = 0 \ \ \forall\, s \in I$, então*

$$X(\overline{z}) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) - i\int_{s_0}^{z} (V(w) \times c'(w))dw\right\}, \forall\, z \in \Omega. \tag{2.18}$$

Demonstração: Pelo Corolário 2.2 temos que a solução do problema de Björling para esta faixa analítica é dada por,

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) + i\int_{s_0}^{z}(V(w) \times c'(w))dw\right\}$$

pela Proposição 2.3 temos que a solução do Problema de Björling para o conjugado de $z \in \Omega$ é

$$X(\overline{z}) = \mathfrak{Re}\left\{c(z) - i\int_{s_0}^{z}(V(w) \times c'(w))dw\right\}.$$

□

Observação 2.7. Usando as fómulas (2.13) e (2.17), não é difícil recuperar a simetria de dois princípios descoberto por Schwarz para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ (veja em [25]) . Além disso, usando (2.14) e (2.18), podemos recuperar os dois princípios de simetria para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^3$ dados em [[2] Teorema 3.10]

Agora usando (2.10) e (2.15) deduziremos três princípios de simetria para superfícies tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$. Eles foram motivados pelos trabalhos de Schwarz e [3] acima mencionados. Antes de iniciar tal estudo vejamos algumas definições.

Definição 2.3. Seja Π^k um k-plano em $\mathbb{L}^4$. Assuma que Π^k é tipo espaço se $k = 1$; Π^k é tipo espaço, tipo tempo ou degenerado se $k = 2$; Π^k é tipo tempo se $k = 3$. Sobre essas condições, dizemos que Π^k é um *k-plano de simetria* de uma superfície tipo espaço $X : M^2 \to \mathbb{L}^4$, se para todo $p \in M^2$ existe $q \in M^2$ tal que $X(p)$, $X(q)$ são simétricos com respeito a Π^k, isto é, tal que $(X(q)+X(p))/2 \in \Pi^k$ e $X(q)-X(p)$ é perpendicular a Π^k.

Teorema 2.4. *Seja S uma superfície tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$, dada por $X : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$, então temos:*

1. *Toda reta tipo espaço contida em S é um eixo de simetria de S;*

2. *Se S intersecta algum 2-plano tipo tempo ou tipo espaço Π^2, ortogonalmente ao longo de uma curva regular de S, então Π^2 é um plano de simetria de S;*

3. *Se S intersecta algum 3-espaço tipo tempo Π^3, ortogonalmente ou longo de uma curva regular de S, então Π^3 é um 3-plano de simetria de S.*

Antes de passarmos a prova do teorema, é conveniente fazer a seguinte observação. Suponha por exemplo, que a superfície tipo espaço com curvatura média zero S contenha um segmento de reta L, que podemos assumir que este segmento é uma parte do do eixo x^1. Então é possível definir coordenadas isotérmicas $z = u + iv$ em uma vizinhança de L de modo que $X(u, 0)$ parametrize L, veja [15]. Observações análogas são feitas no caso em que S intersecta ortogonalmente o x^1, x^4-plano, ou o x^1, x^2-plano ou o 3-espaço $\{x^3 = 0\}$. Com isso em mente, não é difícil ver que o Teorema acima é agora uma consequência do seguinte lema.

Lema 2.1. *Seja S uma superfície tipo espaço com curvatura média zero em $\mathbb{L}^4$, dada por $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$, com Ω simétrico e simplesmente conexo.*

1. *Se, para todo $u \in I$, a curva $c(u) = X(u, 0)$, esta contida em x^1-eixo, então*

$$X(u, -v) = (x^1(u, v), -x^2(u, v), -x^3(u, v), -x^4(u, v)). \tag{2.19}$$

2. *Se, para todo $u \in I$, a curva $c(u) = X(u, 0)$, esta contida em um x^1, x^4-plano tipo tempo Π^2, e se a superfície S intersecta Π^2 ortogonalmente ao longo de c, então*

$$X(u, -v) = (x^1(u, v), -x^2(u, v), -x^3(u, v), x^4(u, v)). \tag{2.20}$$

3. *Se, para todo $u \in I$, a curva $c(u) = X(u, 0)$, esta contida em um x^1, x^2-plano tipo espaço Π^2, e se a superfície S intersecta Π^2 ortogonalmente ao longo de c, então*

$$X(u, -v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), -x^3(u, v), -x^4(u, v)). \tag{2.21}$$

4. *Se, para todo $u \in I$, a curva $c(u) = X(u, 0)$, esta contida em um 3-espaço tipo tempo $\Pi^3 = \{x^2 = 0\}$, e se a superfície S intersecta Π^3 ortogonalmente ao longo de c, então*

$$X(u, -v) = (x^1(u, v), -x^2(u, v), x^3(u, v), x^4(u, v)). \tag{2.22}$$

Demonstração: Nas demonstrações seguintes denotaremos por $\boxtimes = (\boxtimes^1, \boxtimes^2, \boxtimes^3, \boxtimes^4)$ o produto vetorial e cada $\boxtimes^i, 1 \leq i \leq 4$, as coordenadas do vetor $\boxtimes$. Usaremos, sempre que houver matrizes, os valores da forma $c'^i(u) = c'^i$, $\nu^i(u,0) = \nu^i$ e $\tau^i(u,0) = \tau^i$, com $1 \leqslant i \leqslant 4$.

1. Seja $c(u) := X(u,0)$ e $n(u) := A(u,0)$. Por hipótese $c(u)$ está contido no x^1-eixo, então $c(u) = (c^1(u), 0, 0, 0)$. Assim,

$$\mathfrak{Re}(n(u)) = (0, \nu^2(u,0), \nu^3(u,0), \nu^4(u,0)) \text{ e } \mathfrak{Im}(n(u)) = (0, \tau^2(u,0), \tau^3(u,0), \tau^4(u,0)$$

pois $\langle c', \mathfrak{Re}(n)\rangle = \langle c', \mathfrak{Im}(n)\rangle = 0$. Temos então
$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} \nu^2 & \nu^3 & \nu^4 \\ \tau^2 & \tau^3 & \tau^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & \nu^3 & \nu^4 \\ 0 & \tau^3 & \tau^4 \\ c'^1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & \nu^2 & \nu^4 \\ 0 & \tau^2 & \tau^4 \\ c'^1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & \nu^2 & \nu^3 \\ 0 & \tau^2 & \tau^3 \\ c'^1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

é da forma $(0, \boxtimes^2(u), \boxtimes^3(u), \boxtimes^4(u))$. De acordo com (2.10) e (2.15) segue, respectivamente, que

$$\begin{aligned} X(z) &= \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)), -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^z \boxtimes^2(w)dw, -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^z \boxtimes^3(w)dw, -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^z \boxtimes^4(w)dw \right) \\ X(\overline{z}) &= \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)), \mathfrak{Im}\int_{s_0}^z \boxtimes^2(w)dw, \mathfrak{Im}\int_{s_0}^z \boxtimes^3(w)dw, \mathfrak{Im}\int_{s_0}^z \boxtimes^4(w)dw \right) \end{aligned}$$

que prova (2.19).

□

2. Por hipótese, S intersecta $\Pi^2 = span\{x^1, x^4\}$ ortogonalmente em $c(u) := X(u,0)$. Daí segue que $c(u) = (c^1(u), 0, 0, c^4(u))$. Veja que o 2-plano P^2 gerado por $\mathfrak{Re}(n(u))$ e $\mathfrak{Im}(n(u))$ é ortogonal a $T_{c(u)}S$ ao longo de c. Assim o produto vetorial $\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))$ será,
$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} \nu^2 & \nu^3 & \nu^4 \\ \tau^2 & \tau^3 & \tau^4 \\ 0 & 0 & c'^4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \nu^1 & \nu^3 & \nu^4 \\ \tau^1 & \tau^3 & \tau^4 \\ c'^1 & 0 & c'^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu^1 & \nu^2 & \nu^4 \\ \tau^1 & \tau^2 & \tau^4 \\ c'^1 & 0 & c'^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu^1 & \nu^2 & \nu^3 \\ \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 \\ c'^1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} &= e_1[c'^4(\nu^2\tau^3 - \nu^3\tau^2)] - e_2[c'^1(\nu^3\tau^4 - \nu^4\tau^3) + c'^4(\nu^1\tau^3 - \nu^3\tau^1)] \\ &\quad + e_3[c'^1(\nu^2\tau^4 - \nu^4\tau^2) + c'^4(\nu^1\tau^2 - \nu^2\tau^1)] + e_4[c'^1(\nu^2\tau^3 - \nu^3\tau^2)] \end{aligned}$$

Como $\langle c'(u), \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))\rangle = 0$, temos que

$$c'^1c'^4(\nu^2\tau^3 - \nu^3\tau^2) + c'^4c'^1(\nu^2\tau^3 - \nu^3\tau^2) = 0,$$

como $c'(u)$ é uma curva regular, logo temos que $\nu^2\tau^3 = \nu^3\tau^2$, e assim

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)) = (0, \boxtimes^2(u), \boxtimes^3(u), 0).$$

Usando (2.10) e (2.15) segue que

$$\begin{aligned} X(z) &= \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)), -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z}\boxtimes^2(w)dw, -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z}\boxtimes^3(w)dw, \mathfrak{Re}(c^4(z))\right) \\ X(\overline{z}) &= \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)), \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z}\boxtimes^2(w)dw, \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z}\boxtimes^3(w)dw, \mathfrak{Re}(c^4(z))\right) \end{aligned}$$

□

3. Por hipótese, S intersecta $\Pi^2 = \{x^3 = 0, x^4 = 0\}$ ortogonalmente ao longo de $c(u) := X(u, 0)$, logo $c(u) = (c^1(u), c^2(u), 0, 0)$. Veja que o 2-plano P^2 gerado por $\mathfrak{Re}(n(u))$ e $\mathfrak{Im}(n(u))$ é ortogonal a $T_{c(u)}S$ ao longo de c. Fazendo o produto vetorial $\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))$ temos
$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} \nu^2 & \nu^3 & \nu^4 \\ \tau^2 & \tau^3 & \tau^4 \\ c'^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \nu^1 & \nu^3 & \nu^4 \\ \tau^1 & \tau^3 & \tau^4 \\ c'^1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu^1 & \nu^2 & \nu^4 \\ \tau^1 & \tau^2 & \tau^4 \\ c'^1 & c'^2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu^1 & \nu^2 & \nu^3 \\ \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 \\ c'^1 & c'^2 & 0 \end{vmatrix}\right).$$

Por contas análogas ao item anterior temos que o produto vetorial será

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)) = (0, 0, \boxtimes^3(u), \boxtimes^4(u)),$$

usando (2.10) e (2.15) segue que

$$\begin{aligned} X(z) &= \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)), \mathfrak{Re}(c^2(z)), -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z}\boxtimes^3(w)dw, -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z}\boxtimes^4(w)dw\right) \\ X(\overline{z}) &= \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)), \mathfrak{Re}(c^2(z)), \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z}\boxtimes^3(w)dw, \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z}\boxtimes^4(w)dw\right) \end{aligned}$$

□

4. Pela hipótese temos que $c(u) = (c^1(u), 0, c^3(u), c^4(u))$. Como S intersecta Π^3 ortogonalmente, temos que $X_v(u,0) \in (\Pi^3)^\perp$ e então $X_v(u,0)$ é paralelo ao vetor unitário e_2 que é normal a Π^3. Assim $\mathfrak{Re}(n(u))$ e $\mathfrak{Im}(n(u))$ estão em Π^3, o que implica, que a segunda componente de ambos vetores são zero. Então
$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & \nu^3 & \nu^4 \\ 0 & \tau^3 & \tau^4 \\ 0 & c'^3 & c'^4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \nu^1 & \nu^3 & \nu^4 \\ \tau^1 & \tau^3 & \tau^4 \\ c'^1 & c'^3 & c'^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu^1 & 0 & \nu^4 \\ \tau^1 & 0 & \tau^4 \\ c'^1 & 0 & c'^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu^1 & 0 & \nu^3 \\ \tau^1 & 0 & \tau^3 \\ c'^1 & 0 & c'^3 \end{vmatrix} \right)$$

é da forma $(0, \boxtimes^2, 0, 0)$. Portanto em conjunto com (2.10) e (2.15) obtemos;

$$\begin{aligned} X(z) &= \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)), -\mathfrak{Im} \int_{s_0}^{z} \boxtimes^2(w)dw, \mathfrak{Re}(c^3(z)), \mathfrak{Re}(c^4(z)) \right) \\ X(\overline{z}) &= \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)), \mathfrak{Im} \int_{s_0}^{z} \boxtimes^2(w)dw, \mathfrak{Re}(c^3(z)), \mathfrak{Re}(c^4(z)) \right) \end{aligned}$$

donde segue-se o resultado.

□

Proposição 2.4. *Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$ uma superfície tipo espaço com curvatura média zero, com Ω simétrico e simplesmente conexo. Suponha que $S = X(\Omega)$ intersecta o 2-plano degenerado $\Pi^2 = span\{e_1 + e_4, e_2\}$ ortogonalmente ao longo da curva $c(u) = X(u,0)$. Então S está contida no 3-espaço degenerado $\Pi^3 = span\{e_1 + e_4, e_2, e_3\}$. Além disso, Π^2 é um plano de simetria para S se e somente se $X_v(u,0)$ é um múltiplo de e_3.*

Demonstração: Considere a Base $\mathfrak{F} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$ de $\mathbb{L}^4$, onde $\epsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_4)$, $\epsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_4)$, $\epsilon_3 = e_2$, $\epsilon_4 = e_3$ e observe que $\Pi^2 = \{\epsilon_1, \epsilon_3\}$. É claro que $c(u) = X(u,0)$ é da forma $c(s) = (c^1(s), c^2(s), 0, c^1(s))$ pois $c(u)$ intersecta ortogonalmente o 3-espaço degenerado Π^3 dado acima. Como o 2-plano $P^2 = span\{\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u))\}$ é ortogonal a $T_{c(u)}S$ ao longo de c, segue que $-X_v(u,0) = \boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u))$ será igual a

$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(u)), \mathfrak{Im}(n(u)), c'(u)) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & \nu^3 & \nu^1 \\ 0 & \tau^3 & \tau^1 \\ c'^2 & 0 & c'^1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \nu^1 & \nu^3 & \nu^1 \\ \tau^1 & \tau^3 & \tau^1 \\ c'^1 & 0 & c'^1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu^1 & 0 & \nu^1 \\ \tau^1 & 0 & \tau^1 \\ c'^1 & c'^2 & c'^1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu^1 & 0 & \nu^3 \\ \tau^1 & 0 & \tau^3 \\ c'^1 & c'^2 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (\boxtimes^1(u), 0, \boxtimes^3(u), \boxtimes^1(u)).$$

De (2.10) e (2.15), obtemos que

$$X(z) = \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)) - \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^1(w)dw, \mathfrak{Re}(c^2(z)), -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^3(w)dw, \mathfrak{Re}(c^1(z)) - \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^1(w)dw\right)$$

e

$$X(\overline{z}) = \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)) + \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^1(w)dw, \mathfrak{Re}(c^2(z)), \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^3(w)dw, \mathfrak{Re}(c^1(z)) + \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^1(w)dw\right)$$

que podem ser escritos na base $\mathfrak{F}$ dada, respectivamente por

$$X(z) = \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)) - \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^1(w)dw, 0, \mathfrak{Re}(c^3(z)), -\mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^4(w)dw\right)_{\mathfrak{F}}$$

$$X(\overline{z}) = \left(\mathfrak{Re}(c^1(z)) + \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^1(w)dw, 0, \mathfrak{Re}(c^3(z)), \mathfrak{Im}\int_{s_0}^{z} \boxtimes^4(w)dw\right)_{\mathfrak{F}}$$

A primeira parte é clara e S é simétrico com respeito a Π^2 se e somente se $\int_{s_0}^{z} \boxtimes^1(w)dw = 0$, isto é, $\int_{s_0}^{z} \boxtimes^1(w)dw \equiv 0$(onde usamos (2.15)). Isto mostra a última afirmação.

□

Observação 2.8. *1.* Não é difícil ver que o Lema 2.1 e a Proposição 2.4 continuam válidos sem a hipótese de Ω ser simplesmente conexo.

2. Observe que se Π^3 é tipo espaço ou degenerado, então não existe um vetor tipo espaço ortogonal a Π^3 em $\mathbb{L}^4$. Portanto o problema de simetria para superfícies máximas não está definido neste caso.

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 2.4. Considere

$$\begin{aligned}
c(s) &= (0,s,0,0)\in\mathbb{L}^4\\
n(s) &= \left(\frac{e^{-s}}{\sqrt{4+e^{-2s}}},0,-\frac{2}{\sqrt{4+e^{-2s}}},0\right)\\
&+i\left(-\frac{e^{-s}}{\sqrt{4+e^{-2s}}},0,-\frac{e^{-s}}{2\sqrt{4+e^{-2s}}},\frac{\sqrt{4+e^{-2s}}}{2}\right)\in\mathbb{C}^4,\forall\, s\,\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Vamos usar o Teorema 2.2 para obter a solução do Problema de Björling. Observe que $\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)),\mathfrak{Im}(n(s)),c'(s))=$

$$=\frac{1}{4+e^{-2s}}\left(\begin{vmatrix}0&-2&0\\0&\frac{e^{-s}}{2}&\frac{4+e^{-2s}}{2}\\1&0&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}e^{-s}&-2&0\\e^{-s}&\frac{e^{-s}}{2}&\frac{4+e^{-2s}}{2}\\0&0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}e^{-s}&0&0\\e^{-s}&0&\frac{4+e^{-2s}}{2}\\0&1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}e^{-s}&0&-2\\e^{-s}&0&\frac{e^{-s}}{2}\\0&1&0\end{vmatrix}\right).$$

Por um cálculo direto, obtemos:

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)),\mathfrak{Im}(n(s)),c'(s))=\left(-1,0,-\frac{e^{-s}}{2},\frac{e^{-s}}{2}\right)$$

tomando as extensões holomorfas de $c(s)$ e $\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)),\mathfrak{Im}(n(s)),c'(s))$, a solução do Problema de Björling para a faixa dada é;

$$X(z)=\mathfrak{Re}\left\{(0,z,0,0)+i\int_{s_0}^{z}(-1,0,-\frac{e^{-w}}{2},\frac{e^{-w}}{2})dw\right\}.$$

Como $z=u+iv$, temos:

$$X(z)=\left(v,u,\frac{1}{2}e^{-u}sen(v),-\frac{1}{2}e^{-u}sen(v)\right).$$

Note que x^2 é um eixo de simetria de uma superfície tipo espaço completa com curvatura média zero $S=X(\mathbb{C})$.

Exemplo 2.5. Considere

$$\begin{aligned}
c(s) &= (\operatorname{senh}(s),0,0,\cosh(s))\in\mathbb{L}^4\\
n(s) &= (0,\cos(s),\operatorname{sen}(s),0)+i(\operatorname{senh}(s),0,0,\cosh(s))\in\mathbb{C}^4,
\end{aligned}$$

para todo $s\in\mathbb{R}$. Usando os mesmos argumentos, temos:

$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)),\mathfrak{Im}(n(s)),c'(s))=$

$$=\left(\begin{vmatrix}\cos(s)&\operatorname{sen}(s)&0\\0&0&\cosh(s)\\0&0&\operatorname{senh}(s)\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0&\operatorname{sen}(s)&0\\\operatorname{senh}(s)&0&\cosh(s)\\\cosh(s)&0&\operatorname{senh}(s)\end{vmatrix},\right.$$

$$, \begin{vmatrix} 0 & \cos(s) & 0 \\ \operatorname{senh}(s) & 0 & \cosh(s) \\ \cosh(s) & 0 & \operatorname{senh}(s) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & \cos(s) & \operatorname{sen}(s) \\ \operatorname{senh}(s) & 0 & 0 \\ \cosh(s) & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg).$$

Então

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s)) = (0, -\operatorname{sen}(s), \cos(s), 0).$$

Tomando as extensões holomorfas de $c(s)$ e $\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s))$ a solução do Problema de Björling, para a faixa analítica dada é uma superfície tipo espaço completa com curvatura média zero, dada por

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{(\operatorname{senh}(z), 0, 0, \cosh(z)) + i\int_{s_0}^{z}(0, -\operatorname{sen}(w), \cos(w), 0)dw\right\}.$$

Usando as relações $\operatorname{senh} x = -\mathrm{i} \operatorname{sen} \mathrm{i}x$ e $\cosh x = \cos \mathrm{i}x$, podemos escrever a solução, $X(z)$, na forma de matriz

$$X(z) = \begin{bmatrix} \cosh(u) & 0 & 0 & \operatorname{senh}(u) \\ 0 & \cos(u) & -\operatorname{sen}(u) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(u) & \cos(u) & 0 \\ \operatorname{senh}(u) & 0 & 0 & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\operatorname{senh}(v) \\ \cos(v) \end{bmatrix},$$

com $z = u + iv \in \mathbb{C}$. Note que $\Pi^2 = span\{e_1, e_4\}$ é um 2-plano tipo tempo de simetria da superfície $S = X(\mathbb{C})$.

Exemplo 2.6. Considere

$$\begin{aligned} c(s) &= (\cos(s), \operatorname{sen}(s), 0, 0) \in \mathbb{L}^4, \\ n(s) &= (\cos(s), \operatorname{sen}(s), 0, 0) + i(0, 0, \operatorname{senh}(s), \cosh(s)) \in \mathbb{C}^4, \end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Analogamente temos:
$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s)) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(s) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{senh}(s) & \cosh(s) \\ \cos(s) & 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \cos(s) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{senh}(s) & \cosh(s) \\ -\operatorname{sen}(s) & 0 & 0 \end{vmatrix}, \right.$$

$$, \left| \begin{array}{ccc} \cos(s) & \operatorname{sen}(s) & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(s) \\ -\operatorname{sen}(s) & \cos(s) & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} \cos(s) & \operatorname{sen}(s) & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{senh}(s) \\ -\operatorname{sen}(s) & \cos(s) & 0 \end{array} \right| \Bigg).$$

Já tomando as extensões holomorfas, ficamos com

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(w)), \mathfrak{Im}(n(w)), c'(w)) = (0, 0, -\cosh(w), \operatorname{senh}(w)).$$

Assim a soluçao do Problema de Björling para a faixa dada é a superfície tipo espaço completa com curvatura média zero dada por

$$X(z) = \mathfrak{Re}\left\{(\cos(z), \operatorname{sen}(z), 0, 0) + i\int_{s_0}^{z} (0, 0, -\cosh(w), \operatorname{senh}(w))dw\right\}$$

Usando novamente as relações $\operatorname{senh} x = -\mathrm{i} \operatorname{sen} \mathrm{i}x$ e $\cosh x = \cos \mathrm{i}x$ podemos reescrever $X(z)$ na forma matricial por,

$$X(z) = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\operatorname{sen}(u) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(u) & \cos(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(u) & \operatorname{senh}(u) \\ 0 & 0 & \operatorname{senh}(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(v) \\ 0 \\ \operatorname{sen}(v) \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $z = u + iv \in \mathbb{C}$. Observe que $\Pi^2 = span\{e_1, e_2\}$ é um 2-plano tipo espaço de simetria da superfície $S = X(\mathbb{C})$

Exemplo 2.7. Considere

$$\begin{aligned} c(s) &= (s^2, s, 0, s^2) \in \mathbb{L}^4, \\ n(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+4s^2}}\{(1, -2s, -1, 0) + i(1+4s^2, 2s, 1, 2+4s^2)\} \in \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{L}^4$. Temos que,

$$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s)) =$$

$$= \frac{1}{2+4s^2}\left(\left| \begin{array}{ccc} -2s & 0 & 0 \\ 2s & 0 & 1+4s^2 \\ 1 & 0 & 2s \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 4s^2 & 0 & 1+4s^2 \\ 2s & 0 & 2s \end{array} \right|, \right.$$

$$\left., \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2s & 0 \\ 4s^2 & 2s & 1+4s^2 \\ 2s & 1 & 2s \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2s & 0 \\ 4s^2 & 2s & 0 \\ 2s & 1 & 0 \end{array} \right| \right)$$

$$= (-1, 0, -1, -1)$$

A solução para o Problema de Björling para a faixa dada é uma superfície máxima completa

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathfrak{Re}\left\{(z^2, z, 0, z^2) + i\int_{s_0}^{z}(-1,0,-1,-1)\,dw\right\} \\ &= (u^2 - v^2 + v, u, v, u^2 - v^2 + v) \end{aligned}$$

com $z = u + iv \in \mathbb{C}$. Esta superfície intersecta o 2-plano degenerado $\Pi^2 = span[e_1 + e_4, e_2]$ ortogonalmente ao longo de $X(u,0) = c(u)$, mas Π^2 não é um plano de simetria de S. Por outro lado, se tomamos

$$\begin{aligned} c(s) &= (s^2, s, 0, s^2) \in \mathbb{L}^4, \\ n(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}}\{(1,-2s,0,0) + i(4s^2, 2s, 0, 1+4s^2)\} \in \mathbb{C}^4, \end{aligned}$$

mudando o campo normal. Calculando o produto vetorial, temos

$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s)) =$

$$= \frac{1}{1+4s^2}\left(\begin{vmatrix} -2s & 0 & 0 \\ 2s & 0 & 1+4s^2 \\ 1 & 0 & 2s \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4s^2 & 0 & 1+4s^2 \\ 2s & 0 & 2s \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2s & 0 \\ 4s^2 & 2s & 1+4s^2 \\ 2s & 1 & 2s \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2s & 0 \\ 4s^2 & 2s & 0 \\ 2s & 1 & 0 \end{vmatrix}\right).$$

Calculando o determinante acima obtemos,

$\boxtimes(\mathfrak{Re}(n(s)), \mathfrak{Im}(n(s)), c'(s)) = (0, 0, -1, 0).$

Assim a solução para o Problema de Björling é dada por,

$X(z) = (u^2 - v^2, u, v, u^2 - v^2)$

com $z = u + iv \in \mathbb{C}$. Esta superfície intersecta o 2-plano degenerado $\Pi^2 = span\{e_1 + e_4, e_2\}$, ortogonalmente ao longo de $X(u,0) = c(u)$ que é um plano de simetria da superfície.

Capítulo 3

O Problema de Calabi-Bernstein para Superfícies Máximas no espaço n-dimensional de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^n$

Vamos agora, baseado em [12], fazer um estudo do Problema de Calabi-Bernstein. Como vimos uma superfície máxima no espaço n-dimensional de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^n$ é uma superfície tipo espaço M com curvatura média zero e que admite uma representação complexa (Teorema 1.1). O Problema de Calabi-Bernstein consiste basicamente em caracterizar as superfícies máximas completas em $\mathbb{L}^n$. É motivado a partir do Problema de Bernstein em $\mathbb{R}^3$, que se resume em determinar superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ (veja [23]).

No $\mathbb{L}^3$ o Problema de Calabi-Bernstein afirma que: As únicas superfícies máximas completas em $\mathbb{L}^3$ são os planos tipo espaço (veja [20]).

Veremos que esse resultado não pode ser extendido em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$. Na Seção 3.1 veremos exemplos de superfícies diferentes do plano e que possuem tais propriedades. Surge então uma pergunta natural a partir do Problema de Calabi-Bernstein:

Sobre quais hipóteses adicionais garantimos que uma superfície máxima completa em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, é um plano?

A solução deste problema será dada, usando o fato que, sobre uma superfície máxima temos globalmente definidos campos de vetores normais tipo tempo. Assim, a grosso modo, isso nos dá a possibilidade de considerar apenas uma direção normal previlegiada sobre qualquer ponto de M.

Antes de responder a pergunta acima vamos construir alguns exemplos de superfícies máximas para entender melhor o problema.

Como vimos, no Teorema 1.1, as superfícies máximas em $\mathbb{L}^n$ possuem uma representação complexa dada por

$$X(z) = 2\mathfrak{Re}\left\{\int_{s_0}^{z} \phi dz\right\} + k_0$$

com $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ funções holomorfas.

Seja K a curvatura Gaussiana de uma superfície máxima M em $\mathbb{L}^n$. Então da fórmula clássica $K = \left(\frac{-1}{\lambda^2}\right).\Delta log\lambda$ com $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$ e $\Delta = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\right) + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$, obtemos:

$$K_\phi = \left(\frac{4}{|\phi|^6}\right) \times \left\{\sum_{i=1}^{n-1} |\phi_i\phi_n' - \phi_i'\phi_n|^2 - \sum_{1\leqslant i<j<n} |\phi_i\phi_j' - \phi_i'\phi_j|^2\right\}. \tag{3.1}$$

Temos que para $n = 3$ K é não negativa (veja [20]). No entanto, isso não é verdade para $n \geqslant 4$, como veremos nos exemplos a seguir. Relembremos que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ é não-positiva.

Dado um vetor tipo tempo $w \in \mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, podemos considerar as componentes tangentes w^T e normais w^N, em qualquer ponto de M em $\mathbb{L}^n$. Além disso, de $g(w, w^N) < 0$ obtemos que w e w_p^N pertencem ao mesmo cone tipo tempo em qualquer ponto $p \in M$. Se w é um vetor tipo tempo unitário então obtemos que

$$g(w^N, w^N) = -1 - g(w^T, w^T) \leqslant -1,$$

em todo ponto de M. A mesma construção feita acima usando um vetor tipo luz v, fornece um campo normal de vetores tipo tempo globalmente definidos v^N de M em $\mathbb{L}^n$, que satisfazem

$$g(v^N, v^N) = -g(v^T, v^T) < 0$$

em todo M.

Estes campos de vetores normais (que podem ser construídos para qualquer superfície tipo espaço) são os instrumentos fundamentais utilizados nos teoremas que serão apresentados neste capítulo. Antes de iniciarmos vejamos alguns exemplos que ajudarão a entender melhor o problema em questão.

3.1 Exemplos

Nos exemplos a seguir, vamos explorar o comportamento do sinal da curvatura de Gauss, vendo assim as diferenças básicas de se trabalhar em $\mathbb{L}^3$ e em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$. A partir do exemplo 5 poderemos ter, de fato, o estimulo necessário para prosseguir o estudo de superfícies máximas em $\mathbb{L}^n$.

Exemplo 3.1. O plano definido por $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{L}^n, \quad n \geqslant 3$, dado por $X(u, v) = (u, v, 0, ..., 0)$ é um exemplo trivial de superfície máxima em $\mathbb{L}^n$.

Exemplo 3.2. Seja $(\tilde{X}, M)$ uma superfície máxima em $\mathbb{L}^n$. Escrevemos $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{L}^n$ e definimos $X : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ por $X(p) = (0, \tilde{X}(p))$ com $p \in M$. Então (X, M) é uma superfície máxima em $\mathbb{L}^{n+1}$. Desta forma, uma superfície máxima em $\mathbb{L}^3$ pode ser considerada uma superfície máxima em $\mathbb{L}^n, \quad n \geqslant 4$, com curvatura Gauss não negativa.

Exemplo 3.3. Seja $(\tilde{Y}, M)$ uma superfície mínima no espaço Euclideano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Considerando $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_1$, onde $\mathbb{R}^1_1$ representa $\mathbb{R}^1$ com a métrica oposta da usual. Defina $Y : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ por $Y(p) = (\tilde{Y}(p), 0), \quad p \in M$. Então (Y, M) é uma superfície máxima em $\mathbb{L}^{n+1}$. Com isso, uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ pode ser considerada uma superfície máxima em $\mathbb{L}^n, \quad n \geqslant 4$. Note que a superfície máxima terá curvatura de Gauss não positiva.

Com este exemplo e o anterior temos superfícies máximas em $\mathbb{L}^n$ com curvatura de Gauss não-negativa e negativa.

Exemplo 3.4. Considere um domínio aberto simplesmente conexo Ω de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $(\tilde{X}, \Omega)$ uma superfície máxima em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 3$. Definimos $X : \Omega \to \mathbb{L}^{n+2} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{L}^n$ colocando $X(p) = (f(p), \tilde{X}(p)), p \in \Omega$. Com isso (X, Ω) é uma superfície máxima de $\mathbb{L}^{n+2}$. Usando o fato de que,

$$\Delta X = (\Delta f, \Delta \tilde{X}),$$

como $f(z)$ é holomorfa temos que $\Delta f = 0$ e como $\tilde{X}$ é uma superfície máxima temos que $\Delta\tilde{X} = 0$, logo $\Delta X = 0$. Com isso (X, Ω) é uma superfície máxima de $\mathbb{L}^{n+2}$.

O exemplo a seguir fornece uma superfície máxima completa que não é um plano e cuja curvatura de Gauss K muda de sinal, dentre outras propriedades.

Exemplo 3.5. Vamos considerar as seguintes funções holomorfas definidas em todo $\mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rl} \phi^1(z) = -\dfrac{1}{2}, & \phi^2 = -\dfrac{3i}{2}, \\ \phi^3(z) = \dfrac{1}{2}(e^z + 2e^{-z}), & \phi^4(z) = \dfrac{1}{2}(e^z - 2e^{-z}). \end{array}$$

$z \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ fornece uma superfície máxima em $\mathbb{L}^4$ usando a representação complexa dada no Teorema 1.1. Para isto, faremos alguns cálculos. Iniciamos mostrando que $|\phi|^2 > 0$. De fato, observe que:

$$\begin{aligned} |\phi^1|^2 &= \tfrac{1}{4} \\ |\phi^2|^2 &= \tfrac{9}{4} \\ |\phi^3|^2 &= \tfrac{1}{4}|(e^z + 2e^{-z})|^2 \\ &= \tfrac{1}{4}|e^u(cosv + isenv) + 2e^{-u}(cosv - isenv)|^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left(cos^2v(e^u + 2e^{-u})^2 + sen^2v(e^u - 2e^{-u})^2\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(e^{2u} + 4e^{-2u} + 4cos^2v - 4sen^2v\right). \end{aligned}$$

Analogamente,

$|\phi^4|^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2u} + 4e^{-2u} - 4cos^2v + 4sen^2v\right).$

Assim

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |\phi^1|^2 + |\phi^2|^2 + |\phi^3|^2 - |\phi^4|^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 2cos^2v - 2sen^2v \\ &= \frac{10}{4} + 2cos(2v) \geqslant \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \phi^2 &= (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 \\ &= (-\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{3i}{2})^2 + (\tfrac{1}{2}(e^z + 2e^{-z}))^2 - (\tfrac{1}{2}(e^z - 2e^{-z}))^2 \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4}(e^{2z} + 4 + e^{-2z}) - \tfrac{1}{4}(e^{2z} - 4 + e^{-2z}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como cada ϕ_i, é uma função holomorfa pelo Teorema 1.1

$$X(z) = 2\mathfrak{Re}\left\{\int_{s_0}^{z} \phi(w)dw\right\}$$

é uma superfície máxima em $\mathbb{L}^4$. Como $|\phi|^2 \geqslant \frac{1}{2}$ temos que $X : \mathbb{C} \to \mathbb{L}^4$ é completa. Usando (3.1) podemos calcular a curvatura Gaussiana de X. Vamos calcular as derivadas de cada função $\phi_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant 4$.

Veja que $\partial_z\phi_1 = \partial_z\phi_2 = 0$ pois são funções constantes. Agora

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial z} = \frac{1}{2}(e^z - 2e^{-z})$$
$$\frac{\partial\phi_4}{\partial z} = \frac{1}{2}(e^z + 2e^{-z})$$

Por outro lado, considere a expressão da curvatura gaussiana K dada por

$$K_\phi \quad = \quad \left(\frac{4}{|\phi|^6}\right) \times \left\{\sum_{i=1}^{n-1} |\phi_i\phi_n' - \phi_i'\phi_n|^2 - \sum_{1\leqslant i<j<n} |\phi_i\phi_j' - \phi_i'\phi_j|^2\right\}.$$

Inicialmente observe que de (3.2), temos $|\phi|^6 = (\frac{10}{4} + 2cos(2v))^3$. Vamos agora calcular cada módulo do somatório separadamente. Observe que $\phi'^1 = \phi'^2 = 0$, logo:

$$\begin{aligned} |\phi^1\phi'^4 - \phi'^1\phi^4|^2 &= |\tfrac{1}{4}(e^z + 2e^{-z})|^2 \\ &= \tfrac{1}{16}|e^u(cosv + isenv) + 2e^{-u}(cosv - isenv)|^2 \\ &= \tfrac{1}{16}(e^{2u} + 4e^{-2u} + 4cos2v) \end{aligned}$$

onde $z = u + iv \in \mathbb{C}$. Analogamente,

$|\phi^2\phi'^4 - \phi'^2\phi^4|^2 = \frac{9}{16}(e^{2u} + 4e^{-2u} + 4cos2v)$.

Para calcular o próximo termo observe que $\phi^3 = \phi'^4$ portanto,

$|\phi^3\phi'^4 - \phi'^3\phi^4|^2 = 0$.

Finalmente, os últimos termos são dados por:

$$\begin{aligned} |\phi_1\phi_3' - \phi_1'\phi_3|^2 &= |\tfrac{1}{4}(e^z - 2e^{-z})|^2 \\ &= \tfrac{1}{16}|e^u(cosv + isenv) - 2e^{-u}(cosv - isenv)|^2 \\ &= \tfrac{1}{16}(e^{2u} + 4e^{-2u} - 4cos2v) \\ |\phi_2\phi_3' - \phi_2'\phi_3|^2 &= |\tfrac{1}{4}(e^z + 2e^{-z})|^2 \\ &= \tfrac{1}{16}|e^u(cosv + isenv) + 2e^{-u}(cosv - isenv)|^2 \\ &= \tfrac{9}{16}(e^{2u} + 4e^{-2u} - 4cos2v). \end{aligned}$$

Substituindo os fatores encontrados na expressão de K_ϕ temos:

$$\begin{aligned} K_\phi &= \tfrac{4}{(\frac{10}{4}+2cos2v)^3}\{\tfrac{1}{16}(e^{2u} + 4e^{-2u} + 4cos2v) + \tfrac{9}{16}(e^{2u} + 4e^{-2u} + 4cos2v) - \\ &\quad -\tfrac{1}{16}(e^{2u} + 4e^{-2u} - 4cos2v) - \tfrac{9}{16}(e^{2u} + 4e^{-2u} - 4cos2v)\} \end{aligned}$$

daí,

$$K_\phi = \frac{20cos2v}{(\frac{10}{4} + 2cos2v)^3}.$$

Da expressão de K vemos facilmente que K_ϕ muda de sinal. Temos então uma superfície máxima completa com curvatura gaussiana mudando de sinal. Retornaremos a este exemplo na próxima seção.

3.2 Resultados

Temos que uma superfície máxima completa no 3-dimensional espaço de Lorentz-Minkowisk $\mathbb{L}^3$ é um plano, [20]. Os exemplos da seção anterior mostraram que esse resultado não é verdade em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$. É natural então perguntarmos, quais condições adicionais precisamos impor sobre uma superfície máxima completa M em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, de tal forma que essa superfície M seja um plano. O próximo teorema irá nos responder esta pergunta.

Teorema 3.1. *Seja M uma superfície máxima completa em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$. Seja w um vetor tipo tempo unitário de $\mathbb{L}^n$. Se existe um número real $\delta > 1$ tal que*

$$g(w^N, w^N) \leqslant -\delta < -1 \tag{3.3}$$

em todo M, então M é um plano.

Demonstração: Vamos assumir que M é simplesmente conexo, passando para o recobrimento universal de M, se necessário. Seja w um vetor tipo tempo unitário de $\mathbb{L}^n$ nas hipóteses do teorema. Sejam (u, v) parâmetros isotérmicos em U. Se X representa uma imersão isométrica de M em $\mathbb{L}^n$ então podemos escrever

$$w^T = aX_u + bX_v$$

em U, onde a, b são funções diferenciáveis em U. Observe que $g(w^T, w^T) = (a^2 + b^2)\lambda^2$, pois (u, v) são parâmetros isotérmicos com $\langle X_u, X_u\rangle = \lambda^2$. Agora, seja $\alpha = X_u + iX_v$, então

$$\begin{aligned} |\langle w, \alpha \rangle|^2 &= |\langle aX_u + bX_v, X_u + iX_v \rangle|^2 \\ &= a^2 |\langle X_u, X_u \rangle|^2 + b^2 |\langle X_v, X_v \rangle|^2 \\ &= (a^2 + b^2)\lambda^4 \\ &= g(w^T, w^T)\lambda^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $\langle\, , \,\rangle$ é o produto Hermitiano sobre $\mathbb{C}_1^n$. De (3.3) e (3.4) temos:

$$\frac{|\langle w, \alpha \rangle|^2}{|\alpha|^2} = \frac{g(w^T, w^T)\lambda^2}{2\lambda^2} = \frac{g(w^T, w^T)}{2} \geqslant \epsilon > 0 \tag{3.5}$$

onde $\epsilon = \frac{1}{2}(-1 + \delta)$ e $|\alpha|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle$. Seja $U^1(n)$ o grupo que consiste de todos automosfismos $\mathbb{C}-$lineares de $\mathbb{C}^n$ que preserva $\langle\, , \,\rangle$. Em geometria conhecemos como o grupo das Isometrias lineares. Tome $A \in U^1(n)$, tal que, $Aw = e_n$, onde $e_n = (0, ..., 0, 1)$. Seja $\tilde{\phi} = A\phi$, onde X é representada em termos de $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$. Então

$$\frac{|\langle w, \phi \rangle|^2}{|\phi|^2} = \frac{|\langle Aw, A\phi \rangle|^2}{|A\phi|^2} = \frac{|\tilde{\phi}_n|^2}{|\tilde{\phi}|^2}$$

e por (3.5) temos

$$\frac{|\tilde{\phi}_n|^2}{|\tilde{\phi}|^2} \geqslant \epsilon > 0 \tag{3.6}$$

em qualquer ponto de M. Pelo Teorema de Uniformização[1] temos que M é conformemente equivalente a um disco unitário, ao plano ou a esfera de Riemann, mas como M não é compacta, M não pode ser equivalente a esfera de Riemann. Assim, suponha que M seja conformemente equivalente a um disco unitário. Da equação (3.6) concluimos que M não é completa pois, M teria uma curva divergente com comprimento finito[2]. Portanto M é conformemente equivalente a $\mathbb{C}$. Por outro lado, de (3.6) obtemos que $|\tilde{\phi}_k|^2/|\tilde{\phi}_n|^2, 1 \leqslant k \leqslant n$ é limitado em $\mathbb{C}$. Como ϕ é holomorfa, pelo Teorema de Liouville, temos que o quociente é constante, assim $\tilde{\phi}_k = c_k\tilde{\phi}_n$, com $c_k \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Pela equação clássica da curvatura de Gauss (equação (3.1)) temos que $K_{\tilde{\phi}} = 0$. Como $A \in U^1(n)$ é uma isometria, implica que $K_\phi = 0$. Assim M é uma superfície com curvatura média zero e com curvatura Gaussiana também igual a zero, logo um plano. $\square$

[1] Uma demonstração deste fato é encontrada em [1] pág.230

[2] Uma demonstração deste fato é encontrada em[23] Lema 8.5

Observação 3.1. A hipótese do Teorema 3.1, pode ser reformulada da seguinte maneira: existe um vetor tipo tempo $u \in \mathbb{L}^n$ e um número real $\epsilon > 0$ tal que

$$g(u^N, u^N)/g(u,u) \geqslant \epsilon > 1 \tag{3.7}$$

para todo ponto de M.

Como uma consequência do Teorema 3.1, temos

Corolário 3.1. *Seja M uma superfície máxima completa em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$. Seja v um vetor tipo luz de $\mathbb{L}^n$. Se existe um número real $\eta > 0$ tal que*

$$g(v^N, v^N) \leqslant -\eta < 0 \tag{3.8}$$

em todo M, então M é um plano.

Demonstração: Escolha $w \in \mathbb{L}^n$ tal que $g(w,w) = -1$ e $g(v,w) = -1$. Considere agora a sequência consistindo de vetores tipo tempo $v_n = v + (1/n)w$. Temos que $g(v_n, w) < 0$ e portanto $g(v_n^N, w) < 0$. Usando um argumento contínuo, veja que, por hipótese, a parte normal de v é tipo tempo para todo $p \in M$, assim v^N e w^N pertencem ao mesmo cone de luz de qualquer ponto. Vemos também que

$$-g(v_n^N, v_n^N) \geqslant -g(v^N, v^N) \tag{3.9}$$

para todo n e todo ponto de M. De (3.8) e (3.9) temos que existe algum m inteiro tal que $u = v_m$ é um vetor tipo tempo de $\mathbb{L}^n$ satisfazendo (3.7), donde segue-se o resultado.

□

Segue abaixo uma reformulação do Teorema 3.1, que nos dá um significado geométrico:

Teorema 3.2 (Reformulação)**.** *Se todo vetor normal tipo tempo a uma superfície máxima M em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, omite uma vizinhança de alguma direção tipo tempo, então M é um plano.*

Demonstração: O plano tangente T_pM de M em p é definido como o conjunto de todos os vetores tangentes no ponto p. Por definição, T_pM e T_qM são disjuntos se $p \neq q$, por M ser uma variedade diferenciável segue que a transição de T_pM para T_qM ocorre de forma diferenciável. Tome $w \in (T_pM)^\perp$ tipo tempo unitário, e sua projeção normal w^N com relação a T_pM, que denotamos por w_p^N. Assim, a transição de w_p^N para w_q^N também será de forma diferenciálvel, e lembrando também que g é contínua.

Tome V_w a vizinhança normal omitida de w, e que supomos ser a vizinhança de e_n canônico, assim existe $\delta > 0$ tal que

$$g(w^N, w^N) < -\delta < -1,$$

em todo M. Então M é um plano.

□

Veja que não podemos ter $g(w^N, w^N) > -1$, pois como havia dito, g é contínua e $g(w^N, w^N)$ é ilimitado logo teria algum ponto onde $g(w^N, w^N) = -1$ contrariando o fato de omitir alguma vizinhança.

Corolário 3.2. *Se todo vetor normal tipo luz a uma superfície máxima M em $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$, omite uma vizinhança no cone de luz de $\mathbb{L}^n$ de alguma direção tipo luz, então M é um plano.*

Demonstração: Seja v um vetor tipo luz que abrange tal direção. Por um raciocínio linear temos que,

$$g(v, v^N) \leqslant -\delta < 0 \tag{3.10}$$

para um número real positivo δ. Usando o Corolário 3.1 segue-se o resultado.

□

O resultado acima mostra que as normais tipo tempo (resp. tipo luz) a uma superfície máxima, que não é um plano, são densas em todas as direções de $\mathbb{L}^n$, $n \geqslant 4$. Note que as normais da superfície máxima dada no Exemplo 3.5, omite uma vizinhança do vetor tipo espaço $(1, 1, 0, 0)$ de $\mathbb{L}^4$. Por isso, resultados similares ao Teorema 3.2 e ao Corolário 3.2 não podem ser estendidos para direções tipo espaço. Com isso conseguimos mostrar o problema proposto inicialmente.

Referências Bibliográficas

[1] L.V. Ahlfors, e L. Sairo, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press (1960).

[2] L.J. Alías e P. Mira, *A Schwarz-type formula for minimal surfaces in Euclidean space* $\mathbb{R}^n$, C.R. Math. Acad. Sci. Paris 334 (5) (2002), pp. 389-394.

[3] L.J. Alías, R.M.B. Chaves e P. Mira, *Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2003), pp. 289-316.

[4] S. Alves, R.M.B. Chaves, e P.A. Simões, *Björling problem for minimal surfaces in the Euclidean four dimensional space*, preprint.

[5] A. Asperti e J.M. Vilhena, *Björling problem for spacelike, zero mean curvature surfaces in* $\mathbb{L}^4$, J. Geom. Phys. 56, n. 2 (2006), pp. 196-213.

[6] E.G. Björling, *In integrationem aequationis derivatarum partialum superfici, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt sngoque contrario*, Arch. Math. Phys. (1) 4 (1844), pp. 290-315.

[7] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Second Edition. Springer-Verlag, Berlin (1978).

[8] E. Calabi, *Example of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math. 15, (1970), pp. 223-230.

[9] L.P. Eisenhart, *Minimal surfaces in Euclidean four-space*, Am. Math. Soc. (1911), pp. 215-236.

[10] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Rio de janeiro - IMPA- 2005.

[11] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Kûster e O. Wohlrab, *Minimal Surfaces I*, A series of comprehensive studies in mathematics, 295, Springer-Verlag (1992).

[12] F.J.M. Estudillo e A. Romero, *On Maximal Surfaces in the n-Dimensional Lorentz-Minkowski Space*, Geometriae Dedicata, 38 (1991), pp. 167-174.

[13] J.A. Gálvez e P. Mira, *The Cauchy problem for the Liouville equation and Bryant surfaces*, Adv. Math., in press.

[14] V.P. Gorokh, *Stability of a minimal surface in pseudo-Euclidean space*, 33 (1990) Ukrain, Geom. Sb. [English translation in J. Sov. Math. 53 (1991)].

[15] D.A. Hoffman e H. Karcher,*Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, in: Geometry V, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 90, Springer, 1997, pp. 5-93, 267-272.

[16] K. Hoffman e R. Kunze, *Linear Algebra*, Second Edition. Prentice-Hall (1971).

[17] D.A. Hoffman e R. Osserman, *The gauss map of surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^4$, Proc. London Math. Soc. 1983, 27-56.

[18] D.A. Hoffman e R. Osserman, *The gauss map of surfaces in* $\mathbb{R}^n$, J. Differential Geometry 18 (1983), pp. 733-754.

[19] V.A. Klyachin e V.M. Miklyukov, *Criteria of instability of surfaces of zero mean curvature in warped Lorentz products*, Sbornik Math. 187 (11) (1996).

[20] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space* $\mathbb{L}^3$, Tokio J. Math. 2 (1983) 297-309.

[21] L.V. McNertney, *On parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Ph.D. Thesis, Brown University, 1980.

[22] F. Mercuri e I. Onnis, *On the Björling problem in a three-dimensional Lie group*, Illinois J. Math. Volume 53, Number 2 (2009), pp. 431-440.

[23] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Phoenix Editions (1969).

[24] C.M.F. Rodrigues, *Teoria das Funções de Uma Variável Complexa*, Edições de Livros de Ensino Universitário (LEU) (1979).

[25] H.A. Schwarz, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer-Verlag (1890).

[26] E.C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Second Edition. Oxford University Press (1939).