Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções radiais para problemas elípticos quasilineares com não-linearidades singulares que mudam de sinal

por

Thiago Williams Siqueira Ramos

2010

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções radiais para problemas elípticos quasilineares com não-linearidades singulares que mudam de sinal

por

Thiago Williams Siqueira Ramos*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 19 de novembro de 2010.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto P. dos Santos - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva - Mat/UnB

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva - IME/UFG

*O autor foi bolsista da CNPQ durante a elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, em especial as minhas mães, Judite e Marina, pelo apoio e confiança depositados e mim;

ao Professor Carlos Alberto Pereira dos Santos pela confiança em mim depositada, pela paciência, conselhos e pelo competente e cuidadoso trabalho de orientação;

aos professores Elves Alves Barros e Silva, Edcarlos Domingos da Silva e Antônio Luiz de Melo, respectivamente, membros e suplente da banca examinadora;

aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB que contribuiram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho;

aos meus amigos Jorge, Henrique, Luis, Rafaela e Fábio por tudo o que passamos em todo este tempo;

aos companheiros de UnB, em especial, ao Silver, Gardel, Robson, Bruno, Tarcísio e Facó;

a minha namorada, Tatiara, pela compreensão, apoio, companherismo e incentivo nas mais diversas ocasiões;

ao CNPQ pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a classe de problemas quasilineares elípticos

$$(Q) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = u^q - g(u), & B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

para diferentes valores de q.

Estudamos este problema onde a perturbação não-linear do operador apresenta algum tipo de singularidade e, utilizando argumentos de ponto fixo associados ao Método Variacional, mostramos a existência e não-existência de solução para o problema (Q) quando $q = p - 1$. Por outro lado, se $p = 2$ e $1 < q < (N + 2)(N - 2)$, então utilizando, principalmente, o Método de "Shooting"mostramos existência, não-existência e unicidade de solução para (Q).

Palavras-chaves: Método de "Shooting", Problemas Singulares, Soluções Clássicas e Radialmente Simétricas, Operadores Laplaciano e p-Laplaciano.

ABSTRACT

In this work we study the following quasilinear elliptic classe equation

$$(Q) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = u^q - g(u), & B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

for differents values of q.

We have studied this problem where the disturbance nonlinear operator has some kind of singularity and, using arguments associated with fixed-point Variational method, we show the existence and nonexistence of solution to the problem (Q) when $q = p - 1$. On the other hand, if $p = 2$ and $1 < q < 2^* - 1$ then mainly using the "Shooting "Method we showed the existence, nonexistence and uniqueness of solution (Q).

Key words: Shooting Method, Singular problems, Radially symmetric classical solutions, Laplace and P-Laplace operators.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é o estudar as questões de existência, não-existência, unicidade, multiplicidade e regularidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos

$$(Q): \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = u^q - g(u), & B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ é uma função de classe C^1, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$, é o operador p-Laplaciano, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ é a bola de raio $R > 0$ centrada na origem do $\mathbb{R}^N, N \geq 1$ e $q > -1$.

Uma motivação para o estudo do problema (Q) reside no fato do mesmo aparecer em vários modelos sobre catálises químicas heterogêneas, fluídos não-Newtonianos e na Teoria de condução do calor em materiais eletricamente condutores.

Este trabalho consiste na pesquisa de soluções radiais para o problema (Q), isto é, funções do tipo $u(x) = v(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^N$, satisfazendo (Q) onde $v : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função apropriada. Neste trabalho, usaremos o abuso de notação $u(x) = u(|x|)$ quando estiver claro o sentido de radialidade.

Além disso, estamos interessados em estudar o problema (Q) quando $|g(s)| \stackrel{s \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Funções que apresentam tal comportamento são conhecidas como *funções singulares em* $s = 0$. Neste sentido, problemas que apresentam esse tipo de não-linearidade são chamados de *problemas singulares*.

O estudo do problema singular (Q) sob o nosso ponto de interesse é recente. Em contra partida, a pesquisa quanto a existência, não existência, unicidade, multiplicidade e comportamento assintótico de soluções para a classe de problemas mais geral

$$(P): \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f é uma função dada e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tem sido amplamente investigado por vários pesquisadores no decorrer dos últimos anos.

Este estudo tem se desenvolvido, principalmente, quando o termo não-linear f não apresenta qualquer tipo de singularidade. Neste sentido podemos citar Hai, Schmitt e Shivaji [37], Clement, Figueiredo e Mitidieri [11], Clement, Manasevich e Mitidieri [12], Figueiredo, Gonçalves e Miyagaki [24], Wei, Wang e Zhu [56], Figueiredo, Gossez e Ubila [25] e suas referências.

Por outro lado, quando o termo $f(x,s)$ é singular em $s = 0$, isto é, $|f(x_n, s_n)| \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, para algum $s_n > 0$ com $s_n \to 0$ e algum $x_n \in \Omega$, $x_n \to x_0 \in \overline{\Omega}$, o estudo do problema (P) tem se dividido, principalmente, em dois casos: $f(x,s) \geq 0,\ x \in \Omega,\ s > 0$ e $f(x,s)$ mudando de sinal.

Em particular, para não lineariedades singulares da forma $f(x,s) = a(x)g(s),\ a > 0$, isto se torna

$$(+) \qquad g(s) > 0, s > 0$$

$$(-) \qquad med\{s > 0 \ / \ g(s) > 0\},\ med\{s > 0 \ / \ g(s) < 0\} > 0.$$

De agora em diante, desiguinaremos essas singularidades como sendo do "*tipo* (+)" e do "*tipo* (−)" para cada um dos casos acima.

Para o singularidades do primeiro tipo, isto é, do " "*tipo*(+)", os pioneiros neste campo foram, ao que nos parece, Maybee e Fulks [31], em 1960. No entanto, o trabalho que impulsionou o estudo deste tipo de problema foi o artigo publicado em 1977 por Crandall, Rabinowitz e Tartar [20]. Eles, assim como Maybee e Fulks, estudaram o problema (P) considerando $p = 2$. Em particular, foi mostrado em [20] que se $f(x,s) = s^{-\alpha},\ \alpha > 1$ então o problema (P) tem solução $C^{\frac{2}{1+\alpha}}(\overline{\Omega})$.

Desde então, vários casos particulares para o problema (P) foram investigados. Considere o caso

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = a(x)u^{-\alpha}, & x \in \Omega \\ u > 0,\ \Omega & \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

Gática, Oliker e Waltman [27] mostraram, em 1989, a existência de solução quando $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^N$ é a bola unitária, $\alpha > 0$ e $a(x) \geq 0$.

Em 1991, Lazer e McKenna [43] mostraram que se $a(x)$ é uma função positiva em $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ então o problema (P_1) tem solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Ainda para singularidades do "tipo (+)", considere o problema mais geral de (P_1) dado por

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)h(u) + \sigma b(x)g(u), & x \in \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

Coclite e Palamieri [13] mostraram, em 1989, que existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (P_1) possui solução para $0 < \lambda \leq \lambda^*$ e não possui solução para $\lambda > \lambda^*$. Para tanto consideraram, $\Omega = B_R \subset \mathbb{R}^N,\ a(x) = b(x) \equiv 1,\ h(s) = s^q,\ s > 0,\ g(s) = s^{-\gamma},\ s > 0,$ onde $1 < q < (N+2)/(N-2),\ 0 < \gamma < 1$ e $\sigma = 1$.

Em 2001, Su e Wu [55] consideraram $\lambda = \sigma = 1,\ h(s) = s^\alpha,\ s > 0$, e $g(s) = s^{-\gamma},\ s > 0,$ com $\alpha \in (0,1),\ 0 < \gamma < \frac{1}{N},\ \Omega$ um domínio limitado e $a(x), b(x)$ funções Hölder contínuas em $\overline{\Omega}$ e mostraram sob algumas condições de suavidade em Ω, que existe uma única solução $u \in C^{2+min(\alpha,\gamma)}(\Omega) \cap C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$, para algum $\theta > 0$.

Em 2005, Zhang [59] considerou $a(x) = \sigma = 1$, $b \in L^2(\Omega)$ uma função não-negativa e $g(s) = s^{-\gamma},\ s > 0$, em (P_2) com $0 < \gamma < 1,\ \lambda > 0,\ \Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave e h uma função singular e mostrou que sob algumas hipóteses específicas, (P_2) tem pelo menos uma solução positiva.

Continuando nesta linha de raciocínio, Cirstea, Ghergu e Radulesco [10], em 2004, estudaram o problema (P_2) para $\sigma = a(x) = 1$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $0 < h \in C^{0,\beta}[0,\infty)$ e $0 \leq g \in C^{0,\beta}[0,\infty)$, com $0 < \beta < 1$, onde somente g é singular e g, h são mais gerais que no trabalho de Zhang [59]. Eles mostraram que sob algumas hipóteses em h, g, se $\lim_{s\to 0} h(s)/s = 0$ então (P_2) possui única solução em $C^2(\Omega) \cap C^{1,1-\beta}(\overline{\Omega})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e se $\lim_{s\to 0} h(s)/s > 0$ então existe $\lambda^* > 0$ tal que (P_2) não possui solução para $\lambda \geq \lambda^*$.

Em 2007, Gonçalves e Santos [34] estudaram o problema (P_2) mais geral, por admitir g e/ou h funções singulares com $(\sigma(g,h)/t)' < 0$ e $\sigma(0,h)$, $\sigma(g,0)$ satisfazendo $\lim_{t\to 0}(\sigma(g,h)(t)/t) = \sigma_0(g,h)$, $\lim_{t\to\infty}(\sigma(g,h)(t)/t) = \sigma_\infty(g,h)$, onde $\sigma_\infty(g,h) \in [0,\infty)$, $\sigma_0(g,h) \in (0,\infty]$ e $\sigma(g,h)(t) = g(t) + h(t)$. Eles mostraram que sob estas hipóteses (P_2) possui solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ se $a(x)\sigma_\infty(h,0) + b(x)\sigma_\infty(0,g) < \lambda_1,\ q.t.p\ x \in \Omega$, onde λ_1 [e o primeiro autovalor do problema de Dirichilet.

Silva e Perera [50], em 2007, consideraram o problema (P) com $f(x,u) = h(x,u) + \sigma g(x,u)$, onde g, h são funções de Carathéodory em $\Omega \times (0,\infty)$ e $\Omega \times [0,\infty)$ e $\sigma \geq 0$ é um parâmetro, e obtiveram solução para (P_2) no espaço $W^{1,p}_{loc}$, onde Ω apresenta uma condição de fronteira bem geral.

Em 2009, Mohammed [45] estudou (P) para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ onde $\partial\Omega \in C^{1,\gamma},\ \gamma \in (0,1)$ onde f é singular em $\Omega \times (0,\infty)$ mostrando que sob algumas hipóteses em f, então (P) possui solução em $W^{1,p}_0(\Omega)$.

Em 2010, Gonçalves, Rezende e Santos [32], mostraram que (P) tem solução para $f(x,u) = \lambda h(x,u)$, onde $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$, para alguns $\lambda_*, \lambda^* > 0$. Em particular, se $h(x,u)$ satisfaz $h(x,s) \overset{s\to 0}{\to} \infty$ e $h(x,s) \overset{s\to\infty}{\to} 0$, então $\lambda_* = 0$ e $\lambda^* = \infty$, para cada $x \in \Omega$.

Mas, quando voltamos a nosso interesse principal, isto é, considerar a perturbação do operador em (Q) do "tipo (-)", o que é equivalente a considerar g singular do "tipo (+)", a quantidade de trabalhos é mais restrita.

Em 1995, Chen [8] considerou o problema parabólico não linear

$$(C) \qquad \begin{cases} v_t = v^a(\Delta v + v), & \text{em } \{x \in B_R,\ t > 0\} \\ v(x,t) = 0, & \text{sobre } \{x \in B_R,\ t > 0\} \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & x \in B_R, \end{cases}$$

e estabeleceu condições em a, R e $v_0(x)$ para que o tempo de "blow-up"de v, digamos $T > 0$, seja finito. Deste modo, Chen mostrou que encontrar uma solução para o problema (C) da forma $v(x,t) = (T-t)^{-\frac{1}{a}}u(x)$ é equivalente a mostrar que u é uma solução para o problema

$$(Q_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u - \dfrac{u^{1-\alpha}}{\alpha}, & x \in B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

para $1 < \alpha < 2$, isto é, um caso particular para o problema (Q).

Em 1997, utilizando principalmente o Método de Shooting, Chen [9] mostrou que existem números reais $0 < R_1 < R_2,\ R_i = R_i(N,\alpha),\ i = 1,2$, tais que o problema (Q_2) tem solução $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ se, e somente se, $R_1 < R \leq R_2$. Além disso, se u é uma solução de (Q_2) para $R = R_2$, então $u(R_2) = u'(R_2) = 0$.

Em 2001, Hirano e Shioji [35] melhoraram os resultados obtidos por Chen, pois consideraram o problema

$$(Q_3) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u - g(u), & x \in B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R \end{cases}$$

e provaram que (Q_3) tem solução positiva e radialmente simétrica em $C^1(\overline{B_R}) \cap C^\infty(B_R)$ se $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ é de classe $C^\infty(B_R)$ tal que $(g(s)/s)' < 0$ para todo $s > 0$ satisfazendo $m_1 s^{-\alpha} \leq g(s) \leq m_2 s^{-\alpha},\ s > 0$, para constantes positivas m_1, m_2 e $\alpha \in (0, 1)$ satisfazendo $m_1 \leq m_2 < 2m_1/(1 - \alpha)$, onde o domínio B_R é tal que o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com a condição de fronteira de Dirichilet homogênea, digamos $\lambda_1 = \lambda_1(R)$, satisfaz:

$$1 - \frac{2(1-\alpha)m_1}{2Nm_2 - (1-\alpha)(N-2)m_1} \leq \lambda_1 < 1.$$

Em 2003, Gonçalves e Santos [33] melhoraram os trabalhos Hirano e Shioji por considerarem, além de outras coisas, o operador p-Laplaciano, $p > 1$ e g não necessariamente limitada por múltiplos da função $s^{-\alpha},\ s > 0$. Mais especificamente, consideraram o problema

$$(GS) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = u^{p-1} - g(u), & B_R, \\ u > 0, & B_R, \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

para $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ de classe C^1 satisfazendo as hipóteses

$$(GS_1) \qquad (i)\ \lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s^{p-1}} = \infty,\ (ii)\ \lim_{s \to \infty} \frac{g(s)}{s^{p-1}} = 0,\ (iii)\ \left(\frac{g(s)}{s^{p-1}}\right)' < 0,\ s > 0$$

(GS_2) $\quad$ (i) $F_{\frac{1}{p}}(s) \to \infty,$ quando $s \to \infty,$ (ii) $F_\theta(s) \leq 0$ para todo $s \geq 0$ e para algum $\theta > \frac{1}{p},$ onde $F_\theta(s) := G(s) - \theta s g(s),\ s > 0,$ e $1 \leq p \leq p^* := \frac{Np}{N-p},$ se $p < N$ e $1 \leq p < \infty,$ se $N \leq p$

Utilizando principalmente Métodos Variacionais no espaço X_R, argumentos de Ponto Fixo e técnicas de EDO, Gonçalves e Santos [33] demonstraram o seguinte resultado, cuja demonstração será o principal objetivo do capítulo 2.

Teorema GS: *Suponha* (GS_1) *e* (GS_2). *Então existem* $R_1, R_2 > 0$ *tal que* (GS) *possui:*

i) *pelo menos uma solução radial* $u = u_R \in C^2(B_R \setminus \{0\}) \cap C^1(\overline{B}_R)$, $u'(r) < 0$, *com* $r \in (0, R)$, *dado* $R_1 < R \leq R_2$. *Além disso,* $u \in C^2(B_R)$ *se, e somente se,* $1 < p \leq 2$;

ii) *nenhuma solução quando* $R \leq R_1$.

Ainda sob o ponto de vista de singularidades do "tipo $(-)$", Ouyang, Shi e Yao [48], em 1997, e Dávila e Montenegro [21], em 2009, e Peng, em 2010, utilizaram, principalmente, o Método de "Shooting"para estudar a seguinte classe de problemas

$$(DM_R): \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^q - u^{-\beta}, & B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $q > -1$, $q \neq 1$ (isto é, $q \neq p - 1$, se $p = 2$) e $0 < \beta < 1$. Dávila e Montenegro [21] obtiveram um resultado de existência e unicidade para o problema (DM_R) cuja demonstração será o objetivo do capítulo 3.

Teorema DM_R**:** *Suponha* $1 < q < (N+2)/(N-2)$ *se* $N \geq 3$, $1 < q < \infty$ *se* $N = 2$. *Então existe* $R_2 > 0$ *tal que* (DM_R) *possui única solução radial* $u = u_R \in C^2(B_R \setminus \{0\}) \cap C^1(\overline{B}_R)$ *se, e somente se,* $0 < R \leq R_2$. *Além disso, essa solução* u_R *satisfaz* $u_{R_2}(R_2) = u'_{R_2}(R_2) = 0$ *e* $u'_R(R) < 0$, *se* $0 < R < R_2$.

Ouyang, Shi e Yao, em 1997, utilizando, além do Método de "Shooting", o Lema de Bifurcação de Crandall-Rabinowitz [19], obteram, em particular, o seguinte resultado, cuja demonstração não será feita neste trabalho.

Teorema OSY: *Suponha* $0 < q < 1$. *Então existem* $0 < R_1 < R_2$ *tal que o problema* (DM_R) *possui em* $C^2(B_R \setminus \{0\}) \cap C^1(\overline{B}_R)$:

i) *nenhuma solução para* $R < R_1$;

ii) *pelo menos uma solução para* $R = R_1$;

ii) *pelo menos duas soluções para* $R_1 < R \leq R_2$;

iv) *pelo menos uma solução para* $R > R_2$.

onde tal solução satisfaz $u = u_R \in C^2(B_R \setminus \{0\}) \cap C^1(\overline{B}_R)$.

Peng [49], em 2010, estudou o problema (DM_R) quando $-1 < q < 0$ e obteve o seguinte resultado, cuja demonstração não será realizada neste trabalho:

Teorema PG: *Suponha* $0 < -q < \beta < 1$. *Então existe* $R_1 > 0$ *tal que o problema* (DM_R) *possui em* $C^2(B_R \setminus \{0\}) \cap C^1(\overline{B}_R)$*:*

i) *nenhuma solução* $R < R_1$.

ii) *pelo menos uma solução para* $R = R_1$*;*

iii) *exatamente duas soluções para* $R > R_1$.

Por outro lado, se $0 < \beta < -q < 1$, *então para cada* $R > 0$ *o problema* (P) *possui única solução radial.*

Observe que os Teoremas (GS), (DM_R), (OSY) e (PG), em particular, esclarecem a importancia da variação do expoente q quanto a existência, não existência, unicidade e multiplicidade de solução para o seguinte caso particular do problema (Q)

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q - u^{-\beta}, & \text{em } B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $0 < \beta < 1$ e $q > -1$.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições e propriedades referentes a um espaço de funções que será utilizado no decorrer do trabalho.

No Capítulo 2 estudaremos o problema (GS). Trataremos a questão de existência de soluções clássicas positivas via Método Variacional.

No Capítulo 3 estudaremos o problema (DM_R), tratando a questão de existência e unicidade de soluções positivas via Método de "Shooting", combinado com propriedades da aplicação $T : D(T) \subset (0, \infty) \to (0, \infty)$, a qual designaremos por extremo maximal à direita.

Os Apêndices A, B e C estarão relacionados respectivamente aos Capítulos $1, 2$ e 3, onde serão demonstrados alguns resultados utilizados no decorrer do trabalho. Por fim, o Apêndice D apresentará alguns resultados clássicos de Análise utilizados no decorrer do trabalho.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS CLÁSSICOS

Neste capítulo, faremos uma breve apresentação de alguns tópicos relacionados a um subespaço do espaço das funções absolutamente contínuas e equações diferenciais, tais como existência de solução, regularização e estudo de primeiro autovalor. Além disso apresentaremos algumas propriedades provindas de um certo PVI.

1.1 Sobre os Espaços X_R e L^p_{N-1}

Esta seção consiste em introduzir os espaços de funções sob os quais estaremos trabalhando, além de apresentar propriedades utilizadas no decorrer das demonstrações. Para tanto, consideremos as definições

Definição 1.1. *Considere* $1 \leq p < \infty$ *e* $v \in L^p(a,b)$, $v > 0$. *Definimos o espaço de Lebesgue com peso* v, $L^p(a,b;v)$, *como o conjunto de todas as funções mensuráveis em* (a,b) *tais que a norma*

$$||u||_{p,v} = \int_a^b v(r)|u(r)|^p dr,$$

é finita.

Note que $u \in L^p(a,b;v)$ se, e somente se, o produto $uv^{\frac{1}{p}} \in L^p(a,b)$. Neste caso

$$||u||_{p,v} = ||uv^{\frac{1}{p}}||_p,$$

o que mostra que $L^P(a,b;v)$ munido com a norma $||\cdot||_{p,v}$ é um espaço de Banach.

Neste sentido, considere os espaços

$$L^p_{N-1} := \{u : (0, R] \to \mathbb{R} \text{ mensurável à Lebesgue } / \int_0^R r^{N-1}|u|^p dr < \infty\},$$

munido com a norma

$$||u||_L = \int_0^R r^{N-1}|u(r)|^p dr.$$

Definição 1.2. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita abso contínua em I se, para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para toda sequência de subintervalos disjuntos finitos $[x_k, y_k] \subset I$*

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \textit{ implica } \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon.$$

Considere o subconjunto de $AC((0, R])$:

$$X_R := X_R^{N-1} = \{u : (0, R] \to \mathbb{R} \text{ absolutamente contínua } / \; u(R) = 0, \int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr < \infty\},$$

munido com a norma

$$||u||^p_{N-1} = \int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr.$$

O mesmo argumento utilizado acima, tanto L^p_{N-1} quanto X_R são espaços de Banach.

Definição 1.3. *Dizemos que o espaço normado X está imerso no espaço normado Y, e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ para designar esta imersão, se*

(i) *X é um subespaço vetorial de Y, e*

(ii) *o operador identidade I definido de X em Y por $Ix = x$, para todo $x \in X$ é contínuo.*

Observação 1.4. *Desde que, I seja linear,* ***(ii)*** *é equivalente à existência de uma constante M tal que*

$$||Ix||_Y \leq M||x||_X, \qquad x \in X$$

onde $||.||_X$ e $||.||_Y$ são as normas dos espaços X e Y respectivamente.

Definição 1.5. *Considere X e Y espaços normados. Dizemos que, $T : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação compacta se $T(A)$ é relativamente compacto em Y quando A é limitado em X, isto é, $\overline{T(A)}^{||.||_Y} \subset Y$ é compacto.*

Definição 1.6. *Dizemos que X está compactamente imerso em Y se o operador I for compacto.*

Lema 1.7. *Considere os espaços X_R e L^p_{N-1}. Então:*

$$X_R \overset{cpta}{\hookrightarrow} L^p_{N-1}, \text{ para } p < N \text{ e } 1 \leq p < p^* := \frac{Np}{N-p} \tag{1.1}$$

$$X_R \overset{cpta}{\hookrightarrow} L^p_{N-1}, \text{ para } p \geq N \text{ e } 1 \leq p < \infty \tag{1.2}$$

$$X_R \text{ é uniformemente convexo} \tag{1.3}$$

Adicionalmente $p = p^*$, então as imersões (1.1) *e* (1.2) *são apenas contínua.*

Demonstração: Para (1.1), confira Clement, Figueiredo & Mitidieri [11]. Para (1.2), considere $u \in X_R$ e $N-1 < \tilde{N}$, então

$$\begin{aligned} ||u||^p_{\tilde{N}} &= \int_0^R r^{\tilde{N}}|u'(r)|^p dr = \int_0^R r^{\tilde{N}-(N-1)+N-1}|u'(r)|^p dr \\ &\leq R^{\tilde{N}-(N-1)} \int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr = C_2||u||^p_{N-1}. \end{aligned}$$

Isto garante a imersão contínua de X_R^{N-1} em $X_R^{\tilde{N}}$. Para compacidade, seja $N-1 \leq p < N_1$ tal que $p < \frac{N_1 p}{N_1 - p}$, onde $1 \leq p < \infty$. Segue de (1.1) e a imersão anterior

$$X_R \hookrightarrow X_R^{N_1} \overset{cpta}{\hookrightarrow} L^p_{N-1}$$

como queríamos.

Para (1.3), considere a aplicação linear $\varphi : X_R \to L^p$ definida por $\varphi(u) = r^{\frac{N-1}{p}} u'$. Logo

$$||\varphi(u)||^p_{L^p} = \int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr = ||u||^p_{X_R},$$

isto é, φ é um isomorfismo isométrico do espaço de Banach X_R sobre um subespaço fechado uniformemente convexo $\varphi(X_R) \subset L^p$, de onde segue que X_R é uniformemente convexo. ■

Observação 1.8. *Um resultado mais geral pode ser encontrado em Gonçalves e Santos* [33]*, onde é garantida a imersão compacta para espaços X_R e L^p_{N-1} com pesos mais gerais.*

1.2 Regularização de soluções em X_R

Considere o problema

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}k(r), \text{ em } (0,R) \\ u \geq 0 \text{ em } (0,R), \; u(R) = u'(0) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $N \geq 1,\ p > 1$ e $k(0, R) \to \mathbb{R}$ é uma função apropriada.

Entenderemos como uma solução clássica para (1.4) uma função $u : [0, R] \to [0, \infty)$ onde $u \in C^1([0, R)) \cap C([0, R])$ tal que $r^{N-1}|u'|^{p-2}u'$ é derivável em $(0, R)$ e satisfaz (1.4).

Considere $v \in X_R,\ v \geq 0$ com $supp(v) \subset (0, R)$ compacto. Multiplicando (1.4) por v e integrando, obtemos

$$\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)v'(r)dr = \int_0^R r^{N-1}k(r)v(r)dr,\ r \in (0, R) \tag{1.5}$$

Neste sentido, dizemos que u é uma *solução fraca* do problema (1.4) se a igualdade (1.5) ocorrer para toda $v \in X_R$ com $supp(v) \in (0, R)$ compacto. Obviamente toda solução clássica de (1.4) é uma solução fraca. O próximo lema nos dará condições para garantir regularidade das soluções fracas de (1.4).

Lema 1.9. *Seja $k \in L^1_{loc}(0, R)$. Se $u \in X_R$ é uma solução fraca para (1.4), então $u \in C^1(0, R)$, $r^{N-1}|u'|^{p-2}u'$ é derivável em $(0, R)$ e $-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}k(r)$ em $(0, R)$. Além disso, se $k \in C(0, R)$, então $u \in C^2(\mathbb{A}_p)$ onde*

$$\mathbb{A}_p = \left\{r \in (0, R)\ /\ |u'(r)|^{p-2} < \infty\right\}. \tag{1.6}$$

Note que se $p \geq 2$, então $\mathbb{A}_p = (0, R)$

Demonstração: Dado $r \in (0, R)$ com $r \neq R/2$ e $\epsilon > 0$ tal que $r + \epsilon < R/2$ ou $R/2 + \epsilon < r$ defina as funções $v^-_{r,\epsilon}$, se $0 < r < R/2$ e $v^+_{r,\epsilon}$, se $R/2 < r < R$ por

$$v^-_{r,\epsilon}(s) = \begin{cases} 0, 0 \leq s \leq r, \\ linear, r \leq s \leq r + \epsilon, \\ 1, r + \epsilon \leq s \leq \frac{R}{2}, \\ linear, \frac{R}{2} \leq s \leq \frac{R}{2} + \epsilon, \\ 0, \frac{R}{2} + \epsilon \leq s \leq R, \end{cases} \qquad v^+_{r,\epsilon}(s) = \begin{cases} 0, 0 \leq s \leq \frac{R}{2}, \\ linear, \frac{R}{2} \leq s \leq \frac{R}{2} + \epsilon, \\ 1, \frac{R}{2} + \epsilon \leq s \leq r, \\ linear, r \leq s \leq r + \epsilon, \\ 0, r + \epsilon \leq s \leq R, \end{cases}$$

e note que $v^-_{r,\epsilon}, v^-_{r,\epsilon} \in X_R$ e $supp(v^-_{r,\epsilon}), supp(v^+_{r,\epsilon}) \subset (0, R)$. Tomando $v = v^-_{r,\epsilon}$, segue de (1.5)

$$\frac{1}{\epsilon}\int_r^{r+\epsilon} s^{N-1}|u'(s)|^{p-2}u'(s)ds - \frac{1}{\epsilon}\int_{\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}+\epsilon} s^{N-1}|u'(s)|^{p-2}u'(s)ds - \int_r^{r+\epsilon} s^{N-1}k(s)v^-_{r,\epsilon}ds$$
$$- \int_{r+\epsilon}^{\frac{R}{2}} s^{N-1}k(s)ds - \int_{\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}+\epsilon} s^{N-1}k(s)v^-_{r,\epsilon}ds = 0,$$

Analogamente, para $v = v^+_{r,\epsilon}$

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}+\epsilon} s^{N-1}|u'(s)|^{p-2}u'(s)ds - \frac{1}{\epsilon}\int_{r}^{r+\epsilon} s^{N-1}|u'(s)|^{p-2}u'(s)ds - \int_{\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}+\epsilon} s^{N-1}k(s)v_{r,\epsilon}^{-}(s)ds$$
$$-\int_{\frac{R}{2}+\epsilon}^{r} k(s)s^{N-1}ds - \int_{r}^{r+\epsilon} s^{N-1}k(s)v_{r,\epsilon}^{-}(s)ds = 0.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ em ambos os casos e usando o Teorema $D.6$, obtemos

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_{\frac{R}{2}}^{r} s^{N-1}k(s)ds + C, \text{ q.t.p em } (0,R), \tag{1.7}$$

onde $C = C(R)$ é uma constante real. Derivando (1.7), obtemos

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}k(r), r \in (0,R). \tag{1.8}$$

Além disso, dado $r_0 \in (0,R)$ com $u'(r_0) \neq 0$, então $|\int_{\frac{R}{2}}^{r} s^{N-1}k(s)ds + C_R| > 0$, para alguma vizinhança de r_0, digamos V_{r_0}. Assim, para $r \in V_{r_0}$, segue por (1.7) que $u'(r)$ não muda de sinal e, portanto, u' é contínua em r_0.

Se $u'(r_0) = 0$, então dada uma sequência $r_n \to r_0$, temos

$$|u'(r_n)-u'(r_0)|^{p-1} = \left|r_n^{1-N}\left[\int_{\frac{R}{2}}^{r} s^{N-1}k(s)ds + C_R\right]\right| \overset{n\to\infty}{\to} \left|r_0^{1-N}\left[\int_{\frac{R}{2}}^{r} s^{N-1}k(s)ds + C_R\right]\right| = 0,$$

o que mostra a contínuidade em r_0 também neste caso, isto é, $u \in C^1(0,R)$.

Por fim, note que

$$u'(r) = r^{-\frac{N-1}{p-1}}\left|\int_0^r t^{N-1}k(t)dt\right|^{\frac{1}{p-1}},$$

e, se $r \in \mathbb{A}_p$, então por (1.8)

$$(p-1)r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u''(r) = -(N-1)r^{N-2}|u'(r)|^{p-2}u'(r) - r^{N-1}k(r)$$

isto é

$$u''(r) = -\frac{(N-1)}{r(p-1)}u'(r) - \frac{1}{p-1}\frac{k(r)}{|u'(r)|^{p-2}},$$

mostrando que $u \in C^2(\mathbb{A}_p)$ se $k \in C(0,R)$. ∎

O próximo resultado irá nos mostrar o comportamento de u e u', onde u é solução de (1.4) perto da origem. Este resultado será importante no Capítulo 2 por garantir que $\lim_{r\to 0} u(r) \neq \infty$.

Lema 1.10. *Seja* $H : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *uma função contínua tal que*

$$\left(\frac{H(s)}{s^{p-1}}\right)' \leq 0, \;\; s > 0.$$

Se $u \in X_R$ *satisfaz* $u(r) > 0, \;\; u'(r) < 0$ *e*

$$r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} \leq \int_0^r s^{N-1} H(u(s)) ds$$

para algum $\epsilon \in (0,R)$ *e* $r \in (0,\epsilon)$. *Então* $u \in L^\infty(0,R)$ *e* $u'(r) \overset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Demonstração: Seja $\epsilon \in (0,R), r \in (0,\epsilon)$ e $r_0 \leq \min\{\epsilon, 1\}$. Segue que

$$\begin{aligned} r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} &\leq \int_0^r s^{N-1} H(u(s)) ds = \int_0^r s^{N-1} \frac{H(u(s))}{u(s)^{p-1}} u(s)^{p-1} ds \\ &\leq \underbrace{\frac{H(u(r_0))}{u(r_0)^{p-1}}}_{K_1} \int_0^r s^{N-1} u(s)^{p-1} ds, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é garantida sempre que $s \leq r_0$.

Pelo Lema 1.7:

$$\begin{aligned} r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} &\leq K_1 \int_0^r s^{N-1} |u(s)|^{p-1} ds \leq \frac{K_1}{u(r_0)} \int_0^r s^{N-1} |u(s)|^p ds \\ &\leq \underbrace{K_2 \int_0^R s^{N-1} |u'(s)|^p ds}_{K_3}. \end{aligned}$$

Deste modo, $|u'(r)| \leq K_4 r^{\frac{1-N}{p-1}}$.

Integrando de r até r_0

$$\begin{aligned} u(r) - u(r_0) &= -\int_r^{r_0} u'(s) ds \leq \int_r^{r_0} |u'(s)| ds \\ &\leq K_4 \int_r^{r_0} s^{\frac{1-N}{p-1}} ds \\ &= M_1 + M_2 r^{\frac{p-N}{p-1}}, \end{aligned}$$

isto é, $u(r)^{p-1} \leq M_3 + M_4 r^{p-N}, \;\; r \in (0,\epsilon)$.

Assim

$$\begin{aligned} r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} &\leq K_1 \int_0^r s^{N-1} u(s)^{p-1} ds \leq K_1 \int_0^r s^{N-1}(M_3 + M_4 s^{p-N}) ds \\ &= K_1 \int_0^r M_3 s^{N-1} ds + K_1 \int_0^r M_3 s^{p-1} ds = K_1 \left(\frac{M_3}{N} r^N + \frac{M_4}{p} r^p\right) \\ &= K_1 r^{N-1} \left(\frac{M_3}{N} r + \frac{M_4}{p} r^{p-N+1}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio

$$u(r) - u(r_0) = |u'(\theta_r)||r - r_0| \leq |u'(\theta_r)||r_0|, \text{ para } \theta_r \in (r, r_0).$$

Logo

$$\begin{aligned} u(r)^{p-1} &\leq (|u'(\theta_r)||r_0| - u(r_0))^{p-1} \leq 2^{p-2}(|u'(\theta_r)|^{p-1}|r_0|^{p-1} + u(r_0)^{p-1}) \\ &\leq 2^{p-2}\left(K_1\left(\frac{M_3}{N}\theta_r + \frac{M_4}{p}\theta_r^{p-N+1}\right)r_0^{p-1} + u(r_0)^{p-1}\right) < \infty, \end{aligned}$$

o que nos mostra que $u(r)$ é limitada numa vizinhança à direita da origem de onde se conclui que $u \in L^\infty(0, R)$.

Por fim,

$$r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} \leq K_1 \int_0^r s^{N-1}u(s)^{p-1}ds \leq K_1 r^{N-1} \int_0^r u(s)^{p-1}ds.$$

Assim, $|u'(r)|^{p-1} \leq K_1 \int_0^r u(s)^{p-1}ds \overset{r\to 0}{\to} 0$, como queríamos. ■

Observação 1.11. *Os lemas (1.9) e (1.10) podem ser encontrados para situações mais gerais em Gonçalves e Santos [33].*

1.3 Sobre o primeiro autovalor em X_R

Considere o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = \mu(r^{N-1}|u|^{p-2}u), \text{ em } (0, R) \\ u(R) = u'(0) = 0, u \neq 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

O Lema a seguir é um caso particular de um resultado demonstrado por Gonçalves e Santos [33], em 2003, que determina o comportamento do primeiro autovalor, com respeito a R.

Lema 1.12. *O número*

$$\mu_1 = \mu_1(R) = \inf_{\substack{u \in X_R \\ u \neq 0}} \frac{\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr}{\int_0^R r^{N-1}|u(r)|^p dr},$$

é o menor autovalor positivo de (1.9). *Além disso, o ínfimo é atingido em uma autofunção correspondente $\psi_1 \in C^1([0, R]) \cap C^2((0, R])$ com $\psi_1 > 0$ em $[0, R)$ e $\psi_1' < 0$ em $(0, R]$. Adicionalmente, $\mu_1(R)$ é contínua, decrescente em relação a R, $\mu_1(R) \overset{R\to 0}{\longrightarrow} \infty$ e $\mu_1(R) \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Demonstração: Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = \lambda r^{N-1}|u|^{p-2}u, & \text{em } (0,\infty) \\ u'(0) = 0, \ u(0) = a. \end{cases} \tag{1.10}$$

Vamos supor $\lambda = 1$. Primeiramente, note que (1.10) é equivalente ao problema integral

$$u(r) = a - \int_0^r \left| s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}|u|^{p-2}udt \right|^{\frac{2-p}{p-1}} \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}|u|^{p-2}udt \right) ds. \tag{1.11}$$

Escolhendo $\kappa_a > 1$ tal que a função $|s|^{p-2}s$ é Lipschitziana em $[\frac{a}{\kappa_a}, a]$ e introduzindo, para, $\epsilon > 0$

$$X_{a,\epsilon} := \left\{ u \in C([0,\epsilon]) \mid u(0) = a, \ \frac{a}{\kappa_a} \leq u(r) \leq a, \ r \in [0,\epsilon] \right\}$$

e observando que $(X_{a,\epsilon}, ||\cdot||_\infty)$, onde $||\cdot||_\infty$ é a norma do supremo, é um espaço métrico completo. Assim, as possíveis soluções de (1.12) em $[0,\epsilon)$ são os pontos fixos do operador Ψ em $X_{a,\epsilon}$, onde

$$\Psi u(r) = a - \int_0^r \left[s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}u^{p-1}dt \right]^{\frac{1}{p-1}} ds, \ u \in X_{a,\epsilon}.$$

Note que, para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, para todo $u_1, u_2 \in X_{a,\epsilon}$ e algum $k \in (0,1)$, valem:

i) $\Psi(X_{a,\epsilon}) \subset X_{a,\epsilon}$
De fato, para $u \in X_{a,\epsilon}$

$$\begin{aligned} \int_0^r \left[s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}u^{p-1}dt \right]^{\frac{1}{p-1}} ds &\leq \int_0^r \left[s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}a^{p-1}dt \right]^{\frac{1}{p-1}} ds \\ &\leq a \left(\frac{1}{N} \right)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^r s^{\frac{1}{p-1}} ds \\ &\leq a \left(\frac{1}{N} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} \epsilon^{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de $\Psi(u)$ e a desigualdade obtida acima, $\Psi(u) \in C([0,\epsilon])$. Como u foi arbitrário, segue a afirmação.

ii) $||\Psi(u_1) - \Psi(u_2)||_\infty \leq k||u_1 - u_2||_\infty$
De fato, seja $u_j \in X_{a,\epsilon}, \ j = 1, 2$. Definindo

$$A_{u_j}(s) = s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}u_j^{p-1}dt,$$

e usando o Lema D.16 temos

$$\begin{aligned}|\Psi u_1(r)-\Psi u_2(r)| &\leq \int_0^r |[A_{u_1}(s)]^{\frac{1}{p-1}}-[A_{u_2}(s)]^{\frac{1}{p-1}}|ds\\ &\leq c\int_0^r (A_{u_1}(s)^{\frac{2-p}{p-1}}-A_{u_2}(s)^{\frac{2-p}{p-1}})|A_{u_1}(s)-A_{u_2}(s)|ds,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}|A_{u_1}(s)-A_{u_2}(s)| &\leq s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}|u_1^{p-1}-u_2^{p-1}|dt\\ &= s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}|(u_1-u_2)P(u_1,u_2)|dt \leq \frac{C}{N}||u_1-u_2||_\infty s,\end{aligned}$$

para $P(u_1,u_2)(u_1-u_2)=u_1^{p-1}-u_2^{p-1}$.

Assim, para $p>2$

$$|A_{u_j}(s)|^{\frac{2-p}{p-1}} \leq \left(\frac{a}{\kappa_a}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} s^{\frac{2-p}{p-1}}$$

Logo

$$|\Psi u_1(r)-\Psi u_2(r)| \leq \underbrace{2c\frac{(p-1)C}{p}\left(\frac{a}{\kappa_a}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}}\epsilon^{\frac{p}{p-1}}}_{=\,C_1}||u_1-u_2||_\infty.$$

De maneira análoga, para $1<p\leq 2$

$$|\Psi u_1(r)-\Psi u_2(r)| \leq \underbrace{2c\frac{(p-1)C}{p}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}}\epsilon^{\frac{p}{p-1}}}_{=\,C_2}||u_1-u_2||_\infty,$$

como afirmado.

Portanto, pelo Teorema do Ponto fixo de Banach, Ψ tem um único $u\in X_{a,\epsilon}$ e, assim, (1.10) admite única solução. Afirmamos que $T(a)=\infty$, onde

$$T(a)=\sup\left\{r>0,\ |\ (1.10) \text{ tem uma única solução em } [0,r)\right\},$$

A prova deste fato é não trivial e pode ser encontrada do Apêndice A.

Tomando isto como verdade, então existe $z_a^*>0$ tal que $u(z_a^*)=0$, caso contrário, se $u(r)>0$ para todo $r>0$, então por (1.11), $u'(r)<0$ para todo $r>0$ de forma que $r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\leq -C_0$, sempre que $r\geq M$, para algum $M>0$. Assim

$$-u'(r)\geq C_0 r^{\frac{p-N}{p-1}},\ r\geq M. \tag{1.12}$$

Temos três casos a se considerar. Se $p > N$, então integrando de M a r,

$$u(r) \leq u(M) + C_0 \frac{p-N}{p-1}\left(M^{\frac{p-N}{p-1}} - r^{\frac{p-N}{p-1}}\right) \stackrel{r\to\infty}{\to} -\infty$$

o que é um absurdo.

Se $N = p$, então integrando novamente de M a r,

$$u(r) \leq u(M) + C_0(\ln M - \ln r) \stackrel{r\to\infty}{\to} -\infty$$

o que é um absurdo.

Se $N > p$, então $u(r) \stackrel{r\to\infty}{\to} 0$ pois se $u(r) \geq C_1 > 0,\ r > 0$, seguiria da integração de (1.10) de 0 a r que

$$|u'(r)|^{p-1} > \frac{1}{N} C_1^{p-1} r,\ r > 0,$$

e portanto

$$u(r) < u(0) - C_2 r^{\frac{p}{p-1}} \stackrel{r\to\infty}{\to} -\infty$$

o que é impossível. Assim, integrando (1.12) de r a ∞, obtemos

$$u(r) \geq C_3 r^{\frac{p-N}{p-1}},\ r > M_2.$$

Por outro lado, como $u'(r) < 0,\ r > 0$, então integrando (1.10) de 0 a r

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_0^r t^{N-1}u^{p-1}dt \geq u(r)^{p-1}\int_0^r t^{N-1}dt = u(r)^{p-1}\frac{r^N}{N},$$

ou seja,

$$-\frac{u'(r)}{u(r)} \geq \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} r^{\frac{1}{p-1}}.$$

Integrando de M_2 a r

$$\ln u(r) - \ln M_2 \leq \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} r^{\frac{p}{p-1}},$$

ou seja,

$$u(r) \leq C_4 e^{-C_5 r^{\frac{p}{p-1}}},\ r \geq M_2.$$

Assim

$$0 < C_3 \leq C_6 r^{\frac{N-p}{p-1}} e^{-C_5 r^{\frac{p}{p-1}}} \stackrel{r\to\infty}{\to} -\infty$$

o que é um absurdo. Portanto, $u(z_a^*) = 0$ para algum $z_a^* > 0$. Para simplificar notação, tomemos $a = \lambda = 1$ e seja $z^* := z_1^*$ o menor zero de u. O caso geral é tratado de maneira análoga.

Afirmação: $\tilde{\mu}_1 := \tilde{\mu}_1(R) = \left(\dfrac{z^*}{R}\right)^p$ é o menor autovalor de (1.9) cuja autofunção correspondente é

$$\psi_1(r) = u\left(\frac{z^*}{R}r\right), \; r \in [0, R].$$

De fato, pela forma que foi definida, $\psi_1 \in C^1([0,R]) \cap C^2((0,R])$, $\psi_1'(0) = 0$, com $\psi_1 > 0$ em $[0, R)$ e $\psi_1' < 0$ em $(0, R]$. Além disso, temos

$$r^{N-1}|\psi_1'(r)|^{p-2}\psi_1'(r) = \left(\frac{z^*}{R}\right)^{p-1} r^{N-1}\left|u'\left(\frac{z^*}{R}r\right)\right|^{p-2} u'\left(\frac{z^*}{R}r\right).$$

Assim

$$-(r^{N-1}|\psi_1'(r)|^{p-2}\psi_1'(r))' = \left(\frac{z^*}{R}\right)^{p}\left(r^{N-1}\left|u'\left(\frac{z^*}{R}r\right)\right|^{p-2} u'\left(\frac{z^*}{R}r\right)\right)',$$

o que mostra que $\tilde{\mu}_1$ é um autovalor para (1.10) com autofunção ψ_1.

Vamos mostrar que de fato ele é o menor. Seja μ um autovalor de (1.9) com autofunção associada φ. Definindo

$$z(r) = \varphi(0)u(\mu^{\frac{1}{p}}r), \; r \in [0, R]$$

onde u é a única solução de (1.10). Segue que

$$-(r^{N-1}|z'(r)|^{p-2}z'(r))' = -\mu(r^{N-1}|z(r)|^{p-2}z(r))$$

ou seja, z é solução de (1.10) para $a = \varphi(0)$ e $\lambda = \mu$.

Por unicidade de solução para (1.10), segue que $z = \varphi$. Como φ é autofunção de (1.9), então $u(\mu^{\frac{1}{p}}R) = 0$ e, como $z^\star$ é o menor zero de u, $\mu^{\frac{1}{p}}R \geq z^\star$, mostrando que $\mu \geq \tilde{\mu}_1$.

Por outro lado, observe que μ_1 definido no enunciado pode ser reescrito por

$$\mu_1 = \inf_{\substack{v \in X_R \\ |v|_L = 1}} \int_0^R r^{N-1}|v'(r)|^p dr \tag{1.13}$$

e, pela imersão de X_R em L^p_{N-1}, $\int_0^R r^{N-1}|v'(r)|^p dr \geq C_7$, de modo que $\mu_1(R) \geq C_7$. Considere

$$S := \{u \in X_R \mid K(u) = 1\}, \text{ onde } K(u) = \int_0^R r^{N-1}|u(t)|^p dt,$$

e $J : S \to \mathbb{R}$ definida por $J(u) = \int_0^R r^{N-1}|u'(t)|^p dt$.

Claramente, $J, K \in C^1(X_R)$ e $\mu_1 = \inf_{u \in S} J(u)$. Seja u_n uma sequência em S tal que $J(u_n) \to \mu_1$. Logo, $||u_n||_{X_R} < \infty$ e, sendo X_R reflexivo, converge fracamente, a menos de subsequencia, digamos $u_n \rightharpoonup \phi_1$. Mas, como $X_R \overset{cpta}{\hookrightarrow} L^p_{N-1}$, $u_n \overset{L^p_{N-1}}{\to} \phi_1$ de forma que, por (1.13), $|\phi_1|_{L^p_{N-1}} = 1$, isto é, $\phi \in S$. Adicionalmente, $\mu_1 \leq J(\phi_1) \leq \liminf J(u_n) = \mu_1$ e, como $J(\phi_1) = J(|\phi_1|)$, ϕ_1 é não negativo.

Considere $\Lambda \in \mathbb{R}$ um multiplicador de Lagrange satisfazendo $\langle J'(\phi_1), v\rangle = \Lambda \langle K'(\phi_1), v\rangle$, $v \in X_R$, onde [cf, Apêndice B]

$$\langle J'(u), v\rangle = p\int_0^R r^{N-1}|u'|^{p-2}u'v'dr \tag{1.14}$$

$$\langle F'(u), v\rangle = p\int_0^R r^{N-1}|u|^{p-2}uvdr. \tag{1.15}$$

Em especial, se tomarmos $v = \phi_1$, então

$$\langle J'(\phi_1), \phi_1\rangle = \int_0^R r^{N-1}|\phi_1'|^p dr = \Lambda \underbrace{\int_0^R r^{N-1}\phi_1^p dr}_{=1} = \Lambda$$

donde segue que $\Lambda = \mu_1$. Portanto

$$\int_0^R r^{N-1}|\phi_1'(r)|^{p-2}\phi_1'(r)v'(r) = \mu_1 \int_0^R r^{N-1}|\phi_1(r)|^{p-2}\phi_1(r)v(r)dr,\ \forall v \in X_R. \tag{1.16}$$

Além disso, pela definição de solução fraca

$$\int_0^R (r^{N-1}|\psi_1'(r)|^{p-2}\psi_1'(r))v'(r) = \tilde{\mu}_1 \int_0^R r^{N-1}|\psi_1(r)|^{p-2}\psi_1(r)v(r)dr,\ \forall v \in X_R.$$

Por fim, $\mu_1 = \tilde{\mu}_1$. De fato, pela definição de μ_1 e a igualdade anterior segue que $\mu_1 \geq \tilde{\mu}_1$. Por outro lado, dado $r \in (0, R)$ e $\epsilon > 0$ considere a função $v := v_{\epsilon,r}$ definida por

$$v(s) = \begin{cases} 1,\ \text{se } 0 \leq s \leq r, \\ \text{linear},\ \text{se } r \leq s \leq r+\epsilon, \\ 0,\ \text{se } r+\epsilon \leq s \leq R. \end{cases}$$

Se tomarmos esta v em (1.16), então

$$-\frac{1}{\epsilon}\int_r^{r+\epsilon} t^{N-1}|\phi'(t)|^{p-2}\phi'(t)dt = \mu_1\left(\int_0^r t^{N-1}|\phi(t)|^{p-2}\phi(t)dt + \int_r^{r+\epsilon} t^{N-1}|\phi(t)|^{p-2}\phi(t)v(t)dt\right).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ e usando o Teorema (D.6), segue que

$$-r^{N-1}|\phi'(r)|^{p-2}\phi'(r) = \mu_1 \int_0^r t^{N-1}|\phi(t)|^{p-2}\phi(t)dt = \mu_1 \int_0^r t^{N-1}\phi(t)^{p-1}dt > 0,$$

donde segue que

$$-(r^{N-1}|\phi'(r)|^{p-2}\phi'(r))' = \mu_1 r^{N-1}|\phi(r)|^{p-2}\phi(r).$$

Além disso, como $\phi_1' < 0$, segue que $\phi_1 > 0$ em $[0, R)$. Por outro lado, definindo $H(s) = \mu_1\phi_1(s)$, então

$$\left(\frac{H(s)}{s^{p-1}}\right)' = \left(\frac{\mu_1\phi_1(s)}{s^{p-1}}\right)' = \mu_1\left(\frac{\phi_1'(s)s^{p-1} - (p-1)\phi_1(s)}{s^{2p-2}}\right) < 0.$$

Pelo Lema 1.10, $\phi_1(r) \overset{r\to 0}{\to} 0$ o que mostra que μ_1 é um autovalor de (1.12). Mas, sendo $\tilde{\mu}_1$ o menor, segue que $\tilde{\mu}_1 \geq \mu_1$. Logo $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, como queríamos.

Por fim, considerando (1.16) e a definição de primeira autofunção, μ_1 é também atingido em ψ_1 e, pela definição de $\tilde{\mu}_1$, $\mu_1(R)$ é contínua e decrescente em R com $\mu_1(R) \overset{R\to 0}{\to} \infty$ e $\mu_1(R) \overset{R\to\infty}{\to} 0$. ■

1.4 Sobre o problema de Valor Inicial (NN_a)

Consideremos o PVI

$$(NN_a) \qquad \begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}f(u), & (0, T(a)) \\ u(0) = a, \ u'(0) = 0, \ u > 0 \end{cases}$$

onde $a > 0$ é dado e $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função dada. Considere $u(\cdot, a)$ uma solução positiva para (NN_a) e seja

$$D(T) = \left\{a \in \mathbb{R}_+^* \ / \ u(r, a) = 0 \text{ para algum } r > 0\right\}$$

Defina a aplicação $T : D(T) \to \mathbb{R}_+^*$ por

$$T(a) = \sup\{r > 0 \ / \ u(r, a) > 0\}$$

Lema 1.13. *Suponha $f \in C^1(0, \infty)$. Então o problema (NN_a) admite única solução $u = u(r, a) \in C^1([0, T(a))) \times C^2(\mathbb{A}_p)$. Além disso, considerando $p = 2$, então a solução $u(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T(a))) \times C^2(0, \infty)$.*

Demonstração: Dado $a > 0$, note que resolver (NN_a) é equivalente a resolver o seguinte sistema de equações integrais

$$\begin{cases} u(r, a) = a + \displaystyle\int_0^r v(s, a)ds, \\ v(r, a) = -\left|r^{1-N}\displaystyle\int_0^r s^{N-1}f(u(s, a))ds\right|^{\frac{1}{p-1}}, \end{cases} \tag{1.17}$$

onde $v(r,a) = u'(r,a)$.

Para isso, tome $a_0, B > 0$ tal que $|a - a_0| \leq B$ e $a_0 > 3B$. Dado $\epsilon > 0$, defina o espaço

$$X_\epsilon = (X_\epsilon, ||\cdot||) = \{(u,v)|u,v : [0,\epsilon] \to \text{ R são contínuas e } v(0) = 0\},$$

que munido com a norma

$$||(u,v)|| = \max\left\{\max_{0\leq r\leq\epsilon}|u(r)|, \max_{0\leq r\leq\epsilon}|v(r)|\right\} \tag{1.18}$$

é um espaço de Banach [cf, Apêndice A].

Seja $\phi_a : X_\epsilon \to C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon])$, onde $\phi_a = \left(\phi_a^{(1)}, \phi_a^{(2)}\right)$, definida por

$$\phi_a(u,v) = \left(a + \int_0^r v(s)ds, -\left|r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}f(u(s))ds\right|^{\frac{1}{p-1}}\right), \ r > 0.$$

e o espaço de Banach (cf, Apêndice A)

$$C_{a,\epsilon} = \left\{(u,v) \in X_\epsilon : \max_{0\leq t\leq\epsilon}|u(t) - a| \leq B, \max_{0\leq t\leq\epsilon}|v(t)| \leq B\right\} \subset X_\epsilon.$$

Note que:

i) Existe $\epsilon > 0$ sufcientemente pequeno tal que $\phi_a(C_{a,\epsilon}) \subset C_{a,\epsilon}$.

Primeiramente notemos que ϕ_a está bem definida, isto é, que cada entrada de $\phi_a^{(i)} \in C([0,\epsilon])$, para i = 1,2. Como $v \in C([0,\epsilon])$, então $\phi_a^{(1)} \in C([0,\epsilon])$, para todo $\epsilon > 0$. Por outro lado, pela continuidade de f, então $\phi_a^{(2)} \in C((0,\epsilon])$, para todo $\epsilon > 0$. Para $r = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\phi_a^{(2)}(u,v)(r) &= \left|\lim_{r\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^r s^{N-1}f(u(s))ds}{r^{N-1}}\right|^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left|\lim_{r\to 0}\frac{r^{N-1}f(u(r))}{(N-1)r^{N-2}}\right|^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left|\lim_{r\to 0}\frac{rf(u(r))}{N-1}\right|^{\frac{1}{p-1}} = 0 = \phi_a^{(2)}(u,v)(0).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Assim, $\phi_a^{(2)} \in C([0,\epsilon])$. Logo se $(u,v) \in C_{a,\epsilon}$, então $\phi_a(u,v) \in X_\epsilon$. Seja

$$M = \sup\{|f(u(r))|, |f'(u(r))| : |u - a_0| \leq 2B\} < \infty.$$

Então

$$\begin{aligned}\left|\lim_{r\to 0}\phi_a^{(2)}(u,v)(r)-a\right| &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon}\left|\int_0^r v(s)ds\right| \\ &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon}\int_0^r ||v(s)||_\infty ds \\ &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon} Br \leq B\epsilon,\ r\in(0,\epsilon)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\lim_{r\to 0}\phi_a^{(2)}(u,v)(r)\right| &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon}\left|r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}f(u(s))ds\right|^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon}\left|r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}||f||_\infty ds\right|^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon}\left(\frac{Mr}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \left(\frac{M\epsilon_1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}},\ r\in[0,\epsilon_1)\end{aligned}$$

para $\epsilon_1>0$ tal que $(M\epsilon_1/N)^{\frac{1}{p-1}}<B$. Assim $\phi_a(C_{a,\epsilon_1})\in C_{a,\epsilon_1}$, como queríamos.

ii) ϕ_a é k-contrativa em C_{a,ϵ_1}

De fato, sejam $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in C_{a,\epsilon_1}$. Pela definição da norma em X_{ϵ_1}, temos dois casos a considerar

$$||\phi_a(u_1,v_1)-\phi_a(u_2,v_2)|| \leq \max_{0\leq r\leq\epsilon_1}\int_0^r |v_1(s)-v_2(s)|ds$$

ou

$$||\phi_a(u_1,v_1)-\phi_a(u_2,v_2)|| \leq \max_{0\leq r\leq\epsilon_1}\left||A|^{\frac{1}{p-1}}-|D|^{\frac{1}{p-1}}\right|$$

onde $A=\left(r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}f(u_1(s))ds\right)$ e $D=\left(r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}f(u_1(s))ds\right)$.

Para o primeiro caso, segue que

$$||\phi_a(u_1,v_1)-\phi_a(u_2,v_2)|| \leq \max_{0\leq r\leq\epsilon_1}\int_0^r |v_1(s)-v_2(s)|ds \leq \epsilon_1||(u_1,v_1)-(u_2,v_2)||.$$

Para o segundo caso, observe que

$$\begin{aligned}||\phi_a(u_1,v_1)-\phi_a(u_2,v_2)|| &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon_1}\left|A^{\frac{1}{p-1}}-D^{\frac{1}{p-1}}\right| \\ &= \max_{0\leq r\leq\epsilon_1} r^{\frac{1-N}{p-1}}\left||A|^{\frac{p}{p-1}-2}A-|D|^{\frac{p}{p-1}-2}D\right| \\ &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon_1} r^{\frac{1-N}{p-1}}C_p\left||A|^{\frac{p}{p-1}-2}-|D|^{\frac{p}{p-1}-2}\right||A-D|.\end{aligned}$$

onde usamos o Lema D.16. Como $B \leq u_i(r,a) \leq a_0 + B, r \in [0,\epsilon_1)$, i = 1,2, então $f(u_i(r))$ está bem definida, é contínua em $[0,\epsilon_1]$ e derivável em $(0,\epsilon_1)$. Pelo Teorema do Valor Médio

$$|f(u_1(s)) - f(u_2(s))| = |f'(\theta(s))||u_1(s) - u_2(s)|,$$

onde $\theta(s) \in (\min\{u_1,u_2\}, \max\{u_1,u_2\})$. Assim $|f'(\theta(s))| \leq M$.

Logo

$$\begin{aligned} |A - D| &\leq \left| r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} |f(u_1(s)) - f(u_2(s))| ds \right| \\ &\leq \frac{Mr}{N} ||(u_1,v_1) - (u_2,v_2)|| \end{aligned}$$

e como consequência

$$||\phi_a(u_1,v_1) - \phi_a(u_2,v_2)|| \leq C||(u_1,v_1) - (u_2,v_2)||$$

onde

$$C = \max_{0 \leq r \leq \epsilon_1} \frac{M}{N} r^{\frac{p-N}{p-1}} C_p \left| |A|^{\frac{p}{p-1}-2} - |D|^{\frac{p}{p-1}-2} \right|.$$

Seja, então, $k = \min\{\epsilon_1, C\} \in (0,1)$. Deste modo

$$||\phi_a(u_1,v_1) - \phi_a(u_2,v_2)|| \leq k||(u_1,v_1) - (u_2,v_2)||,$$

como queríamos.

Estes argumentos nos permitem concluir, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que ϕ_a tem um único ponto fixo em C_{a,ϵ_1}, isto é, existem únicos $(u,v) = (u_a,v_a) \in C_{a,\epsilon_1}$ solução de (NN_a).

Para mostrar que $u \in C^1(0,\infty)$ na variável a, considere

$$\varphi : C([0,\epsilon_1]) \times C([0,\epsilon_1]) \times (0,\infty) \to C([0,\epsilon_1]) \times C([0,\epsilon_1])$$

definida por

$$\varphi(u,v,a) = (u,v) - \phi_a(u,v)$$

para $\epsilon_1 > 0$ e ϕ_a definidos anteriormente. Então

$$\varphi(u,v,a) = \left(u - a - \int_0^r v(s)ds,\ v - \left| r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds \right|^{\frac{1}{p-1}} \right),\ r > 0$$

com $\varphi(u,v,a)(0) = 0$. Consideremos $p = 2$, $a_0, B > 0$ como definidos anteriormente e

$$h = (h_1,h_2,h_3) \in C([0,\epsilon_1]) \times C([0,\epsilon_1]) \times (a_0 - B, a_0 + B)$$

. Então

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi'(u,v,a), h\rangle &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\varphi\left((u,v,a)+\delta(h_1,h_2,h_3)\right)-\varphi(u,v,a)}{\delta}\\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{\varphi\left(u+\delta h_1, v+\delta h_2, a+\delta h_3\right)-\varphi(u,v,a)}{\delta}\\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{\left(\delta(h_1-h_3-\displaystyle\int_0^r h_2 ds),\ \delta h_2+r^{1-N}\displaystyle\int_0^r s^{N-1}(f(u+\delta h_1)-f(u))ds\right)}{\delta}\\
&= \left(h_1-h_3-\int_0^r h_2 ds,\ h_2+\lim_{\delta\to 0}\frac{r^{1-N}\displaystyle\int_0^r s^{N-1}(f(u+\delta h_1)-f(u))ds}{\delta}\right).
\end{aligned}
$$

Mostraremos que para $r\in(0,\epsilon_1)$

$$
\lim_{\delta\to 0}\frac{r^{1-N}\displaystyle\int_0^r s^{N-1}(f(u(s)+\delta h_1(s))-f(u(s)))ds}{\delta}=r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}f'(u(s))h_1(s)ds.
$$

Para isso seja, para cada $r\in(0,\epsilon)$,

$$
g_\delta(s)=\frac{s^{N-1}f(u(s)+\delta h_1(s))-f(u(s)))}{\delta},\ \ s\in(0,r).
$$

Notemos que:

i) $\{g_\delta(s)\}$ é uma seqûência de funções mensuráveis, pois g_δ é contínua em $(0,r)$

ii) $\lim\limits_{\delta\to 0} g_\delta(s)=s^{N-1}f'(u(s))h_1(s)$

De fato, pelo Teorema do valor médio

$$
|f(u+\delta h_1)(s)-f(u(s))|\leq |f'(\theta_\delta)||\delta h_1|
$$

onde $\theta_\delta(s)\in(\min\limits_{0\leq s\leq r}\{u(s),u(s)+\delta h_1(s)\},\max\limits_{0\leq s\leq r}\{u(s),u(s)+\delta h_1(s)\})$.

Como u é limitada, segue que $\theta_\delta(s)$ é limitada. Então

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} g_\delta(s) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{s^{N-1}(f(u(s)+\delta h_1(s))-f(u(s)))}{\delta}\\
&= s^{N-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(\theta_\delta(s))\delta h_1}{\delta}=s^{N-1}f'(u(s))h_1
\end{aligned}
$$

iii) $g_\delta \leq H \in L^1([0,r])$

$$|g_\delta(s)| = \frac{s^{N-1}}{\delta}|(f(u+\delta h_1)(s) - f(u(s)))\delta| \leq |f'(\theta_\delta)h_1| \leq M|h_1(s)|$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue nossa afirmação e assim

$$\langle \varphi'(u,v,a), h\rangle = \left(h_1 - h_3 - \int_0^r h_2(s)ds, \quad h_2 + r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}h_1(s)f'(u(s))ds\right),$$

para todo $h \in C([0,\epsilon_1]) \times C([0,\epsilon_1]) \times (0,\infty)$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} ||\,\langle \varphi'(u,v,a), h\rangle - \langle \varphi'(u_1,v_1,a_1), h\rangle\,||_\infty &= \left\|\left(0, r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}h_1\left[f'(u) - f'(u_1)\right]ds\right)\right\|_\infty \\ &\leq \max_{0\leq r\leq\epsilon} r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}||h_1||_\infty\,|f'(u) - f'(u_1)|\,ds. \end{aligned}$$

Desde que $f \in C^1((0,r])$, $u \in C^2([0,r])$ e $B \leq u(s) \leq a + B$, $0 \leq s \leq r$, segue que

$$||\,\langle \varphi'(u,v,a), h\rangle - \langle \varphi'(u_1,v_1,a_1), h\rangle\,||_\infty \to 0,$$

quando $(u,v,a) \to (u_1,v_1,a_1)$, isto é, $\varphi'(u,v,a)$ é contínua em $C([0,\epsilon])\times C([0,\epsilon])\times(0,\infty)$, o que implica que $\varphi(u,v,a)$ é C^1, pelo Teorema (D.13).

Por fim, notemos que

i) $\varphi \in C^1, \forall (u,v,a) \in C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon]) \times (0,\infty)$

ii) $\varphi(u_0,v_0,a_0) = 0$, onde (u_0,v_0,a_0) é o ponto fixo de $\phi(u,v)$

iii) $\varphi_x(u_0,v_0,a_0)$ é injetiva, onde $x = (u,v)$. De fato, sendo $\varphi_x(u,v,a)$ linear, então é suficiente mostrar que $Ker(\varphi_x(u,v,a)) = 0$. Assim, se $\varphi_x(u,v,a)(h_2,h_2) = 0$ então

$$\begin{cases} h_1(r) - \displaystyle\int_0^r h_2(s)ds = 0 \\ h_2(r) + r^{1-N}\displaystyle\int_0^r s^{N-1}f'(u_0(s))h_1(s)ds = 0 \end{cases}$$

Assim h_1 é diferenciável e

$$\begin{cases} h_1'(r) = h_2(r) \\ r^{N-1}h_2(r) = -\displaystyle\int_0^r s^{N-1}f'(u_0(s))h_1(s)ds \end{cases}$$

de onde concluímos que

$$\begin{cases} (r^{N-1}h_1'(r))' = r^{N-1}f'(u_0(r))h_1(r) \\ h_1(0) = h_1'(0) = 0. \end{cases}$$

Como a função $h \equiv 0$ satisfaz a EDO acima, segue do Teorema de existência e unicidade que $h_1 \equiv 0$ e, consequentemente, $h_2 \equiv 0$, como queríamos.

Logo $\varphi_x(u_0, v_0, a_0) \neq 0$. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita [cf, D.14], existem vizinhanças Λ de a_0 em $(0, \infty)$, Ω de (u_0, v_0) em $C([0, \epsilon_1]) \times C([0, \epsilon_1])$ e uma aplicação $g \in C^1(\Lambda, C([0, \epsilon_1]) \times C([0, \epsilon_1]))$, tais que

i) $\varphi(g(a), a) = 0, \forall a \in \Lambda$

ii) $\varphi(u, v, a) = 0, \forall (u, v, a) \in \Lambda \times \Omega \Rightarrow (u, v) = g(a) = (g_1(a), g_2(a))$

De onde segue que $u \in C^1(0, \infty)$ em a. ■

1.5 Propriedades da solução $u(\cdot, a)$ de (NN_a)

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que serão utilizados nas demonstrações dos resultados apresentados no Capítulo 2. Considere o problema

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{(N-1)}{r}u' + f(u) = 0, \quad 0 < r < R, \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases}$$

onde $f \in C^2$.

O teorema a seguir, retirado de Smoller e Wasserman [54], 1984, constitui-se na base para a demonstração do Teorema DM_R

Teorema 1.14. *Suponha $f \in C^2$ tal que $f(s) \geq m > 0$ para $s \geq M$, $m, M \in \mathbb{R}$. Então*

(i) Para qualquer $a > M$, existe um $r_a > 0$ tal que $u(r_a, a) = M$.

(ii) Seja $g = u'(r_a, a)$. Se $gr_a \to -\infty$ quando $a \to \infty$, então o problema

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{(N-1)}{r}u' + f(u) = 0, \quad 0 < r < R, \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases}$$

tem uma solução positiva, com $R = T(a)$, para algum $a > 0$.

Considere o seguinte caso particular para (NN_a), tomando $p = 2$ e $f(s) = s^q - s^{-\beta}$

$$(DM_a) \qquad \begin{cases} u' + \frac{N-1}{r}u' + f(u) = 0, & (0, T(a)) \\ u(0) = a, \ u'(0) = 0, \ u > 0. \end{cases}$$

Dada uma solução $u(\cdot, a)$ de (DM_a), defina o funcional energia

$$E_u(r) = \frac{1}{2}(u')^2(r) + F(u(r)),$$

onde

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt = \frac{s^{q+1}}{q+1} - \frac{s^{1-\beta}}{1-\beta}$$

Neste caso temos

$$E_u'(r) = -\frac{N-1}{r}(u')^2(r).$$

Em particular, $E_u'(\overline{r}) = 0$ se, e somente se, $u'(\overline{r}) = 0$, para algum $\overline{r} > 0$. Se isso acontece e $u(\overline{r}) = 1$, então pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDO's, $u(r) \equiv 1$. Se $u(\overline{r}) \neq 0$, então por (DM_a), $u''(\overline{r}) = -f(\overline{r}) \neq 0$ o que implica que $E_u'(r) < 0$ numa vizinhança de $\overline{r}$ com $r \neq \overline{r}$. Neste caso, se $u \neq 1$, então $E_u'(r) < 0$.

O Lema apresentado a seguir apresenta algumas propriedades qualitativas da solução $u(\cdot, a)$ de (DM_a).

Lema 1.15. *Seja $p_2 = [(q+1)/(1-\beta)]^{\frac{1}{q+\beta}} > 1$ tal que $F(p_2) = 0$ e $u = u(\cdot, a)$ uma solução de (DM_a). Então*

a) $0 \leq u(r) \leq max\,\{a, p_2\}$, para todo $r \in [0, T(a))$.

b) Se $E_u(r_0) < 0$ para algum $r_0 \in [0, T(a))$, então $T(a) = \infty$.

c) Se $0 < a \leq p_2$ então $T(a) = \infty$.

d) Se $T(a) = \infty$, então $\lim_{r\to\infty} u(r) = 1$ e $\lim_{r\to\infty} u'(r) = 0$

e) Se $T(a) < \infty$, então $u'(r) < 0,\ r \in (0, T(a))$, $u \in C^1([0, T(a))$ com $u(T(a)) = 0$ e $u'(T(a)) \leq 0$.

Demonstração: Conferir Dávila e Montenegro [21], Lema 2.1. ∎

Os próximos Lemas apresentam o comportamento assintótico da solução $u(\cdot, a)$ numa vizinhança de $T(a)$, além de serem ferramentas essenciais para a demonstração da unicidade de solução para a equação (DM_a)

Lema 1.16. *Seja $u = u(\cdot, a)$ uma solução de (DM_a) com $T(a) < \infty$ satisfazendo $u'(T(a)) = 0$. Então para algum $\delta > 0$ temos, para $r \to T(a)$:*

$$u(r) = c(T(a) - r)^{\alpha} + O((T(a) - r)^{\alpha+\delta}), \tag{1.20}$$

$$u'(r) = -c\alpha(T(a) - r)^{\alpha-1} + O((T(a) - r)^{\alpha+\delta-1}), \tag{1.21}$$

$$u''(r) = c\alpha(\alpha - 1)(T(a) - r)^{\alpha-2} + O((T(a) - r)^{\alpha+\delta-2}), \tag{1.22}$$

onde $\alpha = 2/(1+\beta) > 1$ e $c > 0$ satisfaz $c^{-1-\beta} = \alpha(\alpha - 1)$.

Demonstração: Conferir Dávila e Montenegro [21], Lema 2.2. ∎

Lema 1.17. *Seja $u = u(\cdot, a)$ uma solução de (DM_a) com $T(a) < \infty$ e $u'(T(a)) < 0$. Então, para $r \to T(a)$, tem-se:*

$$u(r) = O(T(a) - r), \tag{1.23}$$

$$u'(r) = O(1), \tag{1.24}$$

$$u''(r) = O\left((T(a) - r)^{-\beta}\right), \tag{1.25}$$

Demonstração: Conferir Dávila e Montenegro [21], Afirmação 2.3. ∎

Um próximo Lema será de vital importância neste trabalho por garantir a diferenciabilidade da aplicação $T(a)$.

Lema 1.18. *Seja $u = u(\cdot, a_1)$ uma solução de (DM_a) com $T(a_1) < \infty$ e $u'(T(a_1), a_1) < 0$. Então a aplicação $a \to T(a)$ é finita e diferenciável numa vizinhança de a_1.*

Demonstração: Conferir Dávila e Montenegro [21], Lema 2.5. ∎

Por fim apresentaremos um resultado que garante a unicidade de solução, desde que $u(T(a), a) = 0$ e $u'(T(a), a) = 0$.

Lema 1.19. *Suponha que $u_1(\cdot, a_1)$ e $u_2(\cdot, a_2)$ sejam soluções de (DM_a) satisfazendo $T(a_1) = T(a_2) = T < \infty$, $u_1(T) = u_1'(T) = 0$ e $u_2(T) = u_2'(T) = 0$. Então $u_1 \equiv u_2$ em $(0, T(a))$.*

Demonstração: Conferir Dávila e Montenegro [21], Lema 2.4. ∎

Observação 1.20. *Propriedades semelhantes as mencionadas acima podem ser encontradas em Chen [9], Ouyang, Shi e Yao [48], Peng [49], Gazzola, Serrin e Tang [26], dentre outros.*

CAPÍTULO 2

ESTUDO RADIAL DO PROBLEMA GS

Neste capítulo, nos propomos a investigar a existência de soluções radiais para uma forma particular do problema (Q) utilizando $q = p - 1$, isto é,

$$(GS): \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = u^{p-1} - g(u) & B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ é de classe C^1.

Formas particulares do problema (Q) começaram a ser estudados recentemente. Mais especificamente, Chen [9], em 1997, considerou o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u - \dfrac{u^{1-\alpha}}{\alpha}, & x \in B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $1 < \alpha < 2$ e demonstrou que existem $R_1, R_2 > 0$, com $R_1 < R_2$ tal que o problema tem solução radialmente simétrica em $C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B}_R)$ se, e somente se, $R_1 < R \leq R_2$.

Hirano e Shioji [35], em 2001, melhoraram o trabalho de Chen por considerarem o problema mais geral

$$\begin{cases} -\Delta u = u - g(u), & x \in B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases} \tag{2.1}$$

e provaram que o problema tem solução positiva e radialmente simétrica no espaço $C^1(\overline{B_R}) \cap C^\infty(B_R)$ se $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ é de classe $C^\infty(B_R)$ tal que $(g(s)/s)' < 0$ para todo $s > 0$, $m_1 s^{-\alpha} \leq g(s) \leq m_2 s^{-\alpha}$, $s > 0$, para constantes positivas m_1, m_2 e $\alpha \in (0, 1)$ satisfazendo $2m_1/(1-\alpha) > m_2 \geq m_1$, onde o domínio B_R é tal que o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com a condição de fronteira de Dirichilet homogênea, digamos λ_1, satisfaz

$$1 - \frac{2(1-\alpha)m_1}{2Nm_2 - (1-\alpha)(N-2)m_1} \leq \lambda_1 < 1.$$

A técnica adotada por Hirano e Shioji consistia em encontrar uma solução fraca para (2.1) em $W^{1,2}_{rad}(B_R)$ e, utilizando um argumento de regularização, determinar uma solução $C^\infty(B_R) \cap C^1(\overline{B}_R)$.

Inspirados neste trabalho, Gonçalves e Santos [33], em 2003, melhoraram o resultado de Hirano e Shioji por considerarem o operador p-Laplaciano e exigirem hipóteses mais gerais para g, a saber,

(GS_1) $$(i)\ \lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s^{p-1}} = \infty,\ (ii)\ \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s^{p-1}} = 0,\ (iii)\ \left(\frac{g(s)}{s^{p-1}}\right)' < 0,$$

(GS_2) (i) $F_{\frac{1}{p}}(s) \to \infty$, quando $s \to \infty$, (ii) $F_\theta(s) \leq 0$ para todo $s \geq 0$ e para algum $\theta > \frac{1}{p}$, onde $F_\theta(s) := G(s) - \theta s g(s)$, $s > 0$, e $1 \leq p \leq p^* := \frac{Np}{N-p}$, se $p < N$ ou $1 \leq p < \infty$, se $N \leq p$

Tais hipóteses permitem linearidades menos restritivas do que as exigidas por Hirano e Shioji como, por exemplo, $g(s) = c_1 s^{-p} + c_2 s^q$, $s > 0$, onde $p \in [0, 1)$, $q \in (-1, q^* - 1]$ e $c_1, c_2 \geq 0$, além de englobar todas as funções consideradas em [35]. Notemos que a a hipótese considerada em $(GS_2)(i)$ é uma caso geral da hipótese de não quadraticidade considerada por Costa e Magalhães [18].

Observação 2.1. *Por $(GS_1) - (GS_2)$ temos $pG(s) - sg(s) \geq 0$ para $s > 0$. Deste modo, segue que*

$$\frac{1}{\theta s} \leq \frac{G(s)}{g(s)}$$

Assim, para $s > 1$, segue por integração que

$$G(s) \leq as^p, a > 0.$$

Por outro lado, se $0 \leq s \leq 1$, então pela continuidade de $G(s)$ tem-se $G(s) \leq M$, onde $M = \max_{s\in[0,1]} G(s)$. Deste modo,

$$G(s) \leq as^p + M, \text{ para todo } s > 0.$$

Para a prova do Teorema (GS) a principal técnica utililzada foi o Método Variacional. Tal prova consistia, essencialmente, em minimizar um funcional associado ao problema em uma variedade do tipo Nehari em X_R, isto é, determinar os pontos minimizantes sobre uma variedade do tipo

$$\mathcal{N} = \{u \in X_R \backslash \{0\}\,; \langle \phi'(u), u\rangle = 0\}\,.$$

Uma motivação para a aplicação desta técnica reside no fato das hipóteses utilizadas admitirem singularidades para g. Assim, o funcional associado ao problema pode não possuir derivadas de Gâteaux em todas as direções o que impossibilita, por exemplo, o uso argumentos de deformação e princípios de máximo.

Determinar soluções radiais para o problema espacial (GS) é equivalente a encontrar soluções para o problema [cf, Apêndice B]

$$(GS_{rad}): \qquad \begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}(u^{p-1} - g(u)), \text{ em } (0,R) \\ u > 0, \text{ em } [0,R), \; u(R) = u'(0) = 0. \end{cases}$$

Consideremos então o funcional associado a (GS_{rad}), $I : X_R \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + \int_0^R r^{N-1}G(u)dr, \; u \geq 0,$$

e observamos que pela Observação 2.1 e o Lema 1.7 segue que I está bem definido, pois

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + \int_0^R r^{N-1}G(u)dr \\ &\leq \frac{1}{p}\left(C\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr\right) + \int_0^R s^{N-1}(as^p + M)ds \\ &= \frac{1}{p}\left(C\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr\right) + a\frac{R^{p+N}}{p+N} + M\frac{R^N}{N} \\ &= C_2||u||^p + a\frac{R^{p+N}}{p+N} + M\frac{R^N}{N} < \infty, \text{ para cada } u \in X_R \end{aligned}$$

Dividiremos este capítulo em 3 seções. A primeira delas tratará de um funcional energia cuja utilização transcende esta dissertação. A segunda trará informações acerca do funcional I, enquanto a terceira trará a conclusão deste capítulo, isto é, a finalização da demonstração do Teorema GS.

2.1 Sobre o Funcional Energia associado a $u(\cdot, a)$

Seja u uma solução clássica para (GS_{rad}) e consideremos o funcional energia, definido por

$$E_u(r) = \frac{p-1}{p}|u'(r)|^p + F(u(r)),\ r > 0$$

onde $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ e $f(s) = s^{p-1} - g(s),\ s > 0.$

Lema 2.2. *Considere* (GS_1). *Então:*

a) f *é crescente,* $f(s) \overset{s\to 0^+}{\to} -\infty$, $f(s) \overset{s\to\infty}{\to} \infty$ *e* $f(p_1) = 0.$

b) $F(0) = F'(p_1) = F(p_2) = 0,\ F'(s) < 0,\ s < p_1$ *e* $F'(s) > 0,\ s > p_1$ *com* $F(s) \overset{s\to\infty}{\to} \infty$. *Em particular,* $p_1 < p_2$ *são únicos.*

Demonstração: Note que $f(s) = s^{p-1} - g(s) = s^{p-1}\left(1 - \frac{g(s)}{s^{p-1}}\right),\ s > 0.$ Assim

i) $f(s) \to \infty$, quando $s \to \infty$, por $(GS_1)(ii)$

ii) $f(s) < 0$ para s suficientemente pequeno, por (GS_1) (i)

Pela continuidade de f, (i) e (ii), f possui pelo menos um zero, digamos p_1. Tal zero é único, pois do contrário, existiria q_1 tal que

$$\frac{g(p_1)}{p_1^{p-1}} = 1 = \frac{g(q_1)}{q_1^{p-1}},$$

o que é um absurdo por (GS_1) (iii). Logo, $f(s) > 0, s > p_1$ e $f(s) < 0,\ s < p_1$.

Por fim, note que $F'(s) < 0,\ s < p_1$ e $F'(s) > 0,\ s > p_1$, o que mostra que p_1 é um ponto de mínimo de F, ou seja, $F(p_1) < F(s),\ s > 0$. Em especial $F(p_1) < F(0) = 0$. Além disso, por (GS_1) (i), existe $S > 0$ tal que

$$1 - \frac{g(s)}{s^{p-1}} \geq \frac{1}{2},\ s \leq S.$$

Daí,

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt = \int_0^S f(t)dt + \int_S^s f(t)dt \geq C + \frac{1}{2p}s^p, \qquad s \geq S.$$

ou seja, $F(s) \to \infty$, para $s \to \infty$. Isto mostra que F possui um zero, digamos p_2, que é único pois F é crescente para $s > p_1$. ∎

Lema 2.3. *Suponha* (GS_1) *e seja* $u > 0$ *uma solução clássica para* (GS_{rad})*. Então* $E_u(r)$ *é decrescente em* $(0, R)$*.*

Demonstração: Primeiramente, note que

$$\lim_{r\to 0} E_u(r) = \frac{p-1}{p}|u'(0)|^p + F(u(0)) = 0 =: E_u(0)$$

isto é, $E_u \in C^1([0, R))$. Por outro lado, se $u \in \mathbb{A}_p$ [cf, (1.6)]

$$\begin{aligned} E_u'(r) &= (p-1)|u'(r)|^{p-2}u'(r)u''(r) + f(u(r))u'(r) \\ &= (p-1)|u'(r)|^{p-2}u'(r)u''(r) - \frac{N-1}{r}|u'(r)|^p - (p-1)|u'(r)|^p u'(r)u''(r) \qquad (2.2) \\ &= -\frac{N-1}{r}|u'(r)|^p \leq 0, \ r \in \mathbb{A}_p \end{aligned}$$

onde usamos (GS_{rad}) para a segunda igualdade

Note que E_u é não crescente em $(0, R)$. De fato, suponha o contrário, isto é, que existam $x, y \in (0, R)$ com $x < y$ e $E_u(x) < E_u(y)$. Como consequência, existiria um intervalo $(a, b) \subset [x, y]$ com E crescente em (a, b), pois, do contrário, qualquer intervalo $I \subset [x, y]$ conteria $c, d \in \mathbb{R}$ com $c < d$ e $E_u(c) \geq E_u(d)$, ou seja, existiriam sequências x_n e y_n com $x_n < y_n$, $x_n \searrow x$ e $y_n \nearrow y$ tal que $E_u(x_n) \geq E_u(y_n)$. Como E é contínua, passando o límite obteríamos $E_u(x) \geq E_u(y)$, o que é um absurdo, mostrando a existência do intervalo (a, b).

A existência de (a, b) implica que u é constante em (a, b) pois, caso contrário, existiria r_0 tal que $u'(r_0) \neq 0, r_0 \in (a, b)$. Pela continuidade de u, existe um intervalo $I_\delta \in (a, b)$, tal que $u'(r) \neq 0, \forall r \in I_\delta$. Neste caso, $E' \leq 0$ em I_δ o que é novamente impossível visto que E_u é crescente em (a, b). Assim u é constante em (a, b), ou seja, E_u é constante em (a, b), o que é novamente impossivel já que E_u é crescente em (a, b). Assim $E_u' < 0$ em $(0, R)$, como afirmado.

∎

2.2 Sobre a função de Euller associada ao problema GS

Como discutido anteriormente, o funcional

$$I(u) := \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + \int_0^R r^{N-1}G(u)dr, \qquad u \in \mathbb{A}_p,\ u \geq 0$$

pode não ser Gâteaux diferenciável em algumas direções.

No sentido de restringir o domínido da definição de I e contornar este problema, consideremos o conjunto:

$$U := U_R = \left\{ u \in X_R \ / \ u \geq 0, \int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr < \int_0^R r^{N-1}u^p dr \right\},$$

e a variedade em X_R do tipo Nehari [cf, Apêndice B]

$$\begin{aligned} V := V_R &= \{u \in U \ / \ \langle I'(u), u\rangle = 0\} \\ &= \left\{ u \in U \ / \ \int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr + \int_0^R r^{N-1}ug(u)dr = \int_0^R r^{N-1}u^p dr \right\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Observemos que U é não vazio pois, pelo Lema 1.12, existe um único $R_1 > 0$ tal que $\mu_1(R_1) = 1$. Como μ_1 é decrescente, segue diretamente da definição de μ_1 e U que para $R_1 < R$ a autofunção ψ_1 pertence a U.

Caminhando no sentido de mostrar que V é não-vazio utilizaremos um lema técnico acerca de uma função auxiliar.

Lema 2.4. *Suponha* (GS_1) *e* (GS_2)*, então dado* $u \in U$*, a função*

$$\xi(t) = \int_0^R r^{N-1}g(tu(r))\frac{u(r)}{t^{p-1}}dr, t > 0$$

é contínua, decrescente e satisfaz, $\xi(t) \overset{t\to 0}{\to} \infty, \xi(t) \overset{t\to\infty}{\to} 0$

Demonstração: Primeiramente, notemos que ξ está bem definida, pois por $(GS_1)(iii)$, obtemos $sg'(s) < (p-1)g(s)$ e, integrando de 0 a s,

$$0 \leq sg(s) < pG(s),\ s > 0.$$

Assim, por (GS_2)

$$\xi(t) = \int_0^R r^{N-1} g(tu(r)) \frac{u(r)}{t^{p-1}} dr < p \int_0^R r^{N-1} \frac{G(tu(r))}{t^p} dr \leq p \int_0^R r^{N-1} \frac{(a(tu)^p + b)}{t^p} dr < \infty.$$

Também por (GS_2), $G(s) \overset{s \to 0}{\to} 0$. Em particular,

$$\xi(t) = \int_0^R r^{N-1} g(tu(r)) \frac{u(r)}{t^{p-1}} dr = \int_{\{u>0\}} r^{N-1} g(tu(r)) \frac{u(r)}{t^{p-1}} dr.$$

Assim, para $s < t$, segue por $(GS_1)(iii)$, que

$$\xi(t) = \int_{\{u>0\}} r^{N-1} \frac{g(tu(r))}{(tu(r))^{p-1} u(r)^p} dr < \int_{\{u>0\}} r^{N-1} \frac{g(su(r))}{(su(r))^{p-1} u(r)^p} dr = \xi(s),$$

mostrando que ξ é decrescente.

Afirmação: $\xi(t) \overset{t \to 0}{\to} \infty$.

De fato, se $t_n \to 0$, então por $(GS_1)(iii)$

$$g(t_n u(r)) \frac{u(r)}{t_n^{p-1}} = u(r)^p \frac{g(t_n u(r))}{(t_n u)^{p-1}} \overset{t_n \to 0}{\to} \infty, \text{ para cada } r \in \{u > 0\}.$$

Pelo Lema de Fatou e $(GS_1)(i)$

$$\lim_{t_n \to 0} \xi(t_n) \geq \liminf \int_{\{u>0\}} r^{N-1} g(t_n u(r)) \frac{u(r)}{t_n^{p-1}} dr \geq \int_{\{u>0\}} r^{N-1} u(r) \liminf \frac{g(t_n u(r))}{t_n^{p-1}} dr \geq \infty,$$

como queríamos.

Afirmação: $\xi(t) \overset{t \to \infty}{\to} 0$.

De fato, se $t_n \to \infty$, então por $(GS_1)(iii)$

$$u(r)^p \frac{g(t_n u(r))}{(t_n u)^{p-1}} \overset{t_n \to \infty}{\to} 0, \ r \in \{u > 0\}.$$

Novamente por $(GS_1)(iii)$

$$u(r)^p \frac{g(tu(r))}{(tu)^{p-1}} \leq (u(r))^p \frac{g(u(r))}{(u)^{p-1}} = ug(u) \in L^1(0, R),$$

para $t \geq 1$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada $\xi(t) \overset{t\to\infty}{\to} 0$. A continuidade de ξ também segue do Teorema da Convergência Dominada. ∎

De posse deste lema, podemos mostrar que V é não-vazio.

Lema 2.5. *Suponha* (GS_1) *e* (GS_2)*. Então* $V = V_R$ *é não vazio para* $R_1 < R$ *onde* $R_1 > 0$ *é tal que* $\mu(R_1) = 1$*.*

Demonstração: Dado $u \in U$, note que existe único $t = t_u > 0$ tal que $tu \in V$. De fato, se $u \in U$, então

$$\int_0^R r^{N-1} u^p dr - \int_0^R r^{N-1} |u'|^p dr > 0, \text{ para } u \geq 0.$$

Mas, pelo Lema 2.2, $\xi(t)$ é positiva e decrescente. Logo existe único $t = t_u > 0$ tal que

$$\int_0^R r^{N-1} |u'|^p dr - \int_0^R r^{N-1} u^p dr + \int_0^R r^{N-1} g(tu(r)) \frac{u(r)}{t^{p-1}} dr = 0. \tag{2.4}$$

Multiplicando a expressão acima por t^p, segue que

$$\int_0^R r^{N-1} |tu'|^p dr - \int_0^R r^{N-1} (tu)^p dr + \int_0^R r^{N-1} g(tu(r)) tu(r) dr = 0,$$

mostrando que $tu \in V$, como queríamos ∎

Estamos prontos para mostrar que I assume mínimo em V.

Lema 2.6. *Suponha* (GS_1) *e* (GS_2)*. Então o funcional*

$$I(u) := \frac{1}{p} \int_0^R r^{N-1} |u'|^p dr - \frac{1}{p} \int_0^R r^{N-1} |u|^p dr + \int_0^R r^{N-1} G(u) dr, \; u \in X_R, \; u \geq 0,$$

assume mínimo em V*.*

Demonstração: Seja $u \in V$, que sabemos ser não vazio pelo Lema anterior. Então pela definição de V

$$\frac{1}{p} \int_0^R r^{N-1} |u'|^p dr - \frac{1}{p} \int_0^R r^{N-1} |u|^p dr = \int_0^R r^{N-1} u g(u) dr. \tag{2.5}$$

Por (2.2) e (2.5), podemos reescrever $I(u)$ como

$$I(u) = \int_0^R r^{N-1} F_{\frac{1}{p}}(u) dr,$$

onde $F_{\frac{1}{p}}(s) = G(s) - (1/p)sg(s) > 0,\ s > 0$ com $F_{\frac{1}{p}}(0) = 0$ e $F_{\frac{1}{p}}$ crescente, por $(GS_1)(iii)$.

Como $u \in V$, então $u \in U$ e, consequentemente, $u \geq 0$ e $\inf\limits_V I \geq 0$. Seja $(u_n) \subset V$ uma sequência tal que $I(u_n) \searrow \inf\limits_V I$ e defina

$$t_n = ||u_n||_{X_R} \text{ e } w_n = \frac{u_n}{||u_n||_{X_R}}.$$

Pelo fato de X_R ser reflexivo e w_n limitada, $w_n \stackrel{X_R}{\rightharpoonup} w$. Além disso, pela imersão garantida pelo Lema 1.7, $w_n \stackrel{L^p_{N-1}}{\rightarrow} w$. Logo, pelo Lema D.3, $w_n \to w$ q.t.p. em $(0, R)$.

Afirmamos que, a menos de subsequência, $||w_n||_{X_R} \to ||w||_{X_R}$. De fato, note que $t_n \to t$, para algum $t \in (0, \infty)$ pois, do contrário, $t_n \to \infty$ ou $t_n \to 0$. Suponha o primeiro caso, então $u_n(r) = t_n w_n(r) \to \infty$, para cada r tal que $w(r) > 0$. Note que, como $u_n \in V \subset U$ e $w_n \to w \in L^{p-1}_{N-1}$, então $|w|_{L^{p-1}_{N-1}} \geq 1$, logo $w > 0$ em pelo menos um conjunto de medida positiva.

Por outro lado, como $u_n \in V$, então

$$I(u_n) = \int_0^R r^{N-1} F_{\frac{1}{p}}(u_n) dr.$$

Logo, pelo fato de $F_{\frac{1}{p}}(u_n) \geq 0$ e o lema de Fatou

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) \geq \liminf \int_0^R r^{N-1} F_{\frac{1}{p}}(u_n) dr \geq \int_0^R \lim_{n\to\infty} r^{N-1} F_{\frac{1}{p}}(u_n) dr \geq \infty,$$

o que é um absurdo visto que $\lim I(u_n) = \inf_V I$.

Se por outro lado, $t_n \to 0$, então $t_n w_n(r) \to 0$ para cada $r \in (0, R)$ em $\{w_n > 0\}$. Como $u_n \in V$, temos que

$$\underbrace{\int_0^R r^{N-1} |w_n'|^p dr}_{=1} + \int_0^R r^{N-1} \frac{w_n}{t_n^{p-1}} g(t_n w_n) dr = \int_0^R r^{N-1} |w_n|^p dr. \tag{2.6}$$

Mas, por $(GS_1)(i)$

$$\frac{w_n(r)}{t_n^{p-1}}g(t_nw_n(r)) = \frac{g(t_nw_n(r))}{(t_nw_n(r))^{p-1}}w_n(r)^p \overset{n\to\infty}{\to} \infty, \text{ em } \{w_n > 0\}.$$

Por outro lado

$$\int_0^R r^{N-1}\frac{w_n}{t_n^{p-1}}g(t_nw_n)dr \geq \int_{\{w>0\}} r^{N-1}\frac{w_n}{t_n^{p-1}}g(t_nw_n)dr = \int_{\{w>0\}} r^{N-1}\frac{g(t_nw_n(r))}{(t_nw_n(r))^{p-1}}w_n(r)^p dr.$$

Então, pelo Lema de Fatou e $(GS_1)(i)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^R r^{N-1}\frac{w_n}{t_n^{p-1}}g(t_nw_n)dr \geq \liminf_n \int_{\{w>0\}} r^{N-1}\frac{w_n(r)^p}{(t_nw_n(r))^{p-1}}g(t_nw_n(r))dr \geq \infty,$$

contrariando, novamente, o fato de $\lim I(u_n) = \inf_V I$. Logo, $t_n \to t \in (0,\infty)$.

Deste modo, $u_n(r) = t_nw_n(r) \overset{q.t.p}{\to} tw(r) := u(r)$ em $(0,R)$ e por (2.6) e o Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}\int_0^R r^{N-1}|w|^p dr &= \lim \int_0^R r^{N-1}|w_n|^p dr \\ &= 1 + \lim \int_0^R r^{N-1}\frac{w_n}{t_n^{p-1}}g(t_nw_n)dr \geq 1 + \int_0^R r^{N-1}\frac{w}{t^{p-1}}g(tw)dr.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Por outro lado, como $w_n \overset{X_R}{\rightharpoonup} w$, então $||w||_{X_R} \leq \liminf_n ||w_n||_{X_R}$ e

$$\int_0^R r^{N-1}|w'|^p dr \leq \liminf \int_0^R r^{N-1}|w_n'|^p dr = 1 < \int_0^R r^{N-1}|w|^p dr, \tag{2.8}$$

onde a última desigualdade é garantida por (2.6) e 2.7). Note que o raciocínio acima garante que $w \in U$ e, pelo Lema 2.5, existe $s > 0$ tal que $sw \in V$.

Por fim note que $||w|| = 1$, pois, caso contrário, $||w|| < 1$ e, pelo Lema 2.2

$$\begin{aligned}
\xi_w(s) &= \int_0^R r^{N-1} g(sw(r)) \frac{w(r)}{s^{p-1}} dr \\
&= \int_0^R r^{N-1} |w|^p dr - \int_0^R r^{N-1} |w'|^p dr \\
&> \int_0^R r^{N-1} |w|^p dr - 1 \\
&\geq \int_0^R r^{N-1} g(tw(r)) \frac{w(r)}{t^{p-1}} dr = \xi_w(t).
\end{aligned}$$

Como ξ é decrescente, então, pelo raciocínio acima, $s > t$. Assim

$$\inf_{v \in V} I(v) \geq \liminf \int_0^R r^{N-1} F_{\frac{1}{p}}(u_n) dr > \int_0^R r^{N-1} F_{\frac{1}{p}}(tw) dr > \int_0^R r^{N-1} F_{\frac{1}{p}}(sw) dr = I(sw),$$

o que impossível visto que $sw \in V$. Logo $||w|| = 1$ e nossa afirmação está provada.

Assim, como $w_n \overset{X_R}{\rightharpoonup} w$, $||w_n|| \to ||w||$ e X_R é uniformemente convexo, então $w_n \overset{X_R}{\to} w$. Consequentemente, $u_n \overset{X_R}{\to} u$, mostrando que $u \in V$, como queríamos. ∎

2.3 Conclusão da demonstração do Teorema GS

Inicialmente, seja $R_1 > 0$ tal que U é não-vazio, isto é, $\mu_1(R_1) = 1$. Considere também o único $R_2 > R_1$ satisfazendo

$$\mu_1(R_2) = \begin{cases} 1 - \dfrac{p}{\theta p N - (N-p)}, & \text{se } p < N \\ 1 - \dfrac{1}{\theta p}, & \text{se } p > N. \end{cases}$$

onde a existência de tal R_2 segue do fato de μ_1 ser decrescente em relação a R. Assim, dado $R \in (R_1, R_2]$, tomemos $u = u_R \in V$ dado pelo Lema 2.5, isto é, $u \in V$ tal que $I(u) = \min_{v \in V} I(v)$. Afirmamos que tal u é a solução de (GS). Provaremos esta afirmação por passos.

Passo 1. $u > 0$ *em* $(0, R)$

<u>**Afirmação:**</u> Não existe $r_0 \in (0, R)$ tal que $u(r_0) = 0$, $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$, onde

$$u_1(r) = \begin{cases} u(r), r \leq r_0 \\ 0, r \geq r_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad u_2(r) = \begin{cases} 0, r \leq r_0 \\ u(r), r \geq r_0 \end{cases}$$

De fato, suponha que tal r_0 exista e que $u_1, u_2 \neq 0$. Então, como $u_1 + u_2 = u \in V$

$$\int_0^R r^{N-1}|u_1' + u_2'|^p dr + \int_0^R r^{N-1}(u_1 + u_2)g(u_1 + u_2)dr = \int_0^R r^{N-1}|u_1 + u_2|^p dr.$$

Mas, pela forma que u_1 e u_2 foram definidas, podemos reescrever e expressão acima como

$$\int_0^R r^{N-1}|u_1'|^p dr + \int_0^R r^{N-1}u_1 g(u_1)dr + \int_0^R r^{N-1}|u_2'|^p dr + \int_0^R r^{N-1}u_2 g(u_2)dr =$$
$$\int_0^R r^{N-1}|u_1|^p dr + \int_0^R r^{N-1}|u_2|^p dr.$$

Assim podemos supor (caso contrário, consideraríamos u_2)

$$\int_0^R r^{N-1}|u_1'|^p dr + \int_0^R r^{N-1}|u_1| g(u_1)dr \leq \int_0^R r^{N-1}|u_1|^p dr,$$

ou seja, $u_1 \in U$. Pelo Lema 2.5 existe único $s > 0$ tal que $su_1 \in V$. Dividindo a expressão acima por s^{p-1} e usando o fato de $su_1 \in V$ obtemos

$$\xi(s) = \int_0^R r^{N-1}\frac{|su_1|^p}{s^p}dr - \int_0^R r^{N-1}\frac{|su_1'|^p}{s^p}dr \geq \int_0^R r^{N-1}u_1 g(u_1)dr = \xi(1),$$

o que mostra que $s \in (0, 1]$. Assim $u(r) \geq su_1(r), r \in (0, R)$. Por outro lado, como $u(r) \neq su_1(r), r \in (0, r_0)$

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + \int_0^R r^{N-1}G(u)dr \\ &> \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u_1'|^p dr - \frac{1}{p}\int_0^R r^{N-1}|u_1|^p dr + \int_0^R r^{N-1}G(u_1)dr = I(u_1) \end{aligned}$$

contradizendo o fato de $I(u) = \min_V I$.

Afirmação: Não existe $r_0 \in (0, R)$ tal que $u(r) = 0$ para $r \in [r_0, R]$.

De fato, suponha que não seja verdade, ou seja, existe $r_0 \in (0, R)$ tal que $u(r) = 0$ para $r \in [r_0, R]$. Para cada $s > 0$ seja $u_s(r) := u(r/s)$. Note que $u_s \in U$, para cada $s \in [1, 1 + \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$, pois

- $u_s \in X_R$ se, e somente se, $r_0 \leq R/s \leq R$. Em especial, $s \geq 1$
- Pelo Teorema D.5

$$\int_0^R r^{N-1}|u_s'|^p dr = s^{N-p}\int_0^{R/s} r^{N-1}|u'|^p dr. \tag{2.9}$$

Pelo mesmo Teorema

$$\int_0^R r^{N-1}|u_s|^p dr = s^{N}\int_0^{R/s} r^{N-1}|u|^p dr. \tag{2.10}$$

Definindo, então

$$H(s) = s^{-p}\frac{\displaystyle\int_0^{R/s} r^{N-1}|u'|^p dr}{\displaystyle\int_0^{R/s} r^{N-1}|u|^p dr},\ s>0$$

temos que $H(1) < 1$ pois $u \in U$. Então, pela continuidade de H, $H(s) < 1$ para $s \in [1, 1+\epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$.

Considere as seguintes funções, definidas para $t > 0$ e $s \in [1, 1+\epsilon)$

$$\varphi(s,t) = \frac{t^p}{p}\left(s^{N-p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - s^N\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr\right) + s^N\int_0^R r^{N-1}G(tu)dr,$$

$$\psi(s,t) = t^p\left(s^{N-p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - s^N\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr\right) + s^N\int_0^R r^{N-1}(tu)g(tu)dr.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
&\varphi(s,t) = I(tu_s) \\
&\psi(s,t) = \int_0^R r^{N-1}|tu_s'|^p dr - \int_0^R r^{N-1}|tu_s|^p dr + \int_0^R r^{N-1}(tu_s)g(tu_s)dr.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Isto é, $\psi(1,1) = 0$, pois $u \in V$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,s) &= pt^{p-1}\left(s^{N-p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - s^N\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr\right) \\
&+ s^N\int_0^R r^{N-1}(ug(tu)+tu^2g'(tu))dr.
\end{aligned}$$

Logo, por $(GS_1), (iii)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t}(1,1) &= p\left(\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \int_0^R r^{N-1}|u|^p dr\right) + \int_0^R r^{N-1}(ug(u)+u^2g'(u))dr \\
&= \int_0^R r^{N-1}u(ug'(u) - (p-1)g(u))dr < 0.
\end{aligned}$$

Segue do Teorema da Função Implícita que existem $\delta \in (0, \epsilon]$ e uma função diferenciavel $t = t(s)$ com $t(1) = 1$ tal que $\psi(t(s), s) = 0$, para todo $s \in [1, 1+\epsilon)$. Logo $t(s)u_s \in V$, para $s \in [1, 1+\epsilon)$.

Como $\varphi(1,1) = I(u) = \min_{1\le s\le 1+\delta} \varphi(t(s), s)$, segue do fato que $u \in V$,

$$
\begin{aligned}
0 \le \frac{d}{ds}\varphi(t(s), s)\bigg|_{s=1} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,1)\frac{dt}{ds}(1) + \frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,1) \\
&= \frac{N-p}{p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \frac{N}{p}\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + N\int_0^R r^{N-1}G(u)dr.
\end{aligned}
$$

Mas, por (GS_2), para $\theta > 1/p$ temos $G(s) \le \theta s g(s)$. Logo, segue de $\psi(1,1) = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &\le \frac{N-p}{p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \frac{N}{p}\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + N\int_0^R r^{N-1}G(u)dr \\
&\le \frac{N-p}{p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \frac{N}{p}\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + N\int_0^R r^{N-1}\theta u g(u) \\
&\le \frac{N-p}{p}\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \frac{N}{p}\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr - \theta N\int_0^R r^{N-1}(|u'|^p - |u|^p)dr \\
&= (\frac{N-p}{p} - \theta N)\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr + N(\theta - \frac{1}{p})\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $u(r) = 0$ para $r \in [r_0, R]$, então

$$
\mu_1(R)\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr < \int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr. \qquad (2.13)
$$

Portanto, por (2.12) e (2.13) e pelo fato de $\theta N > (N-p)/p$ segue que

$$
\begin{aligned}
0 &\le (\frac{N-p}{p} - \theta N)\int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr + N(\theta - \frac{1}{p})\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr \\
&< \mu_1(R)(\frac{N-p}{p} - \theta N)\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + N(\theta - \frac{1}{p})\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr \\
&= \left[\mu_1(R)(\frac{N-p}{p} - \theta N) + N(\theta - \frac{1}{p})\right]\int_0^R r^{N-1}|u|^p dr.
\end{aligned}
$$

Isto é

$$
\mu_1(R) < \frac{N(\frac{1}{p} - \theta)}{\frac{N-p}{p} - \theta N} = 1 - \frac{p}{(\theta p N) - (N-p)} = \mu_1(R_2)
$$

contradizendo a monotonicidade de μ_1, pois $R < R_2$.

Afirmação: Não existe $r_0 \in [0, R)$ tal que $u(r) = 0$ para $r \in [0, r_0]$

De fato, suponha que o resultado seja falso e seja $M = \max_{0<r<R} u(r)$. Como $u \in V$

$$\begin{aligned} \int_0^R r^{N-1}|u|^p dr &= \int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr + \int_0^R r^{N-1} u g(u) dr \\ &> \mu_1(R) \int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + \int_0^R r^{N-1} u g(u) dr \\ &> \mu_1(R) \int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + \int_{\{u>0\}} r^{N-1} \frac{g(u)u^p}{u^{p-1}} dr \\ &\geq \left(\mu_1 + \frac{g(M)}{M^{p-1}}\right) \int_0^R r^{N-1}|u|^p dr. \end{aligned}$$

De onde se conclui que

$$(1 - \mu_1)\frac{M^{p-1}}{g(M)} > 1.$$

Além disso, pela definição de $\mu_1(R_2)$ e $\theta > 1/p$, então

$$\theta p(1 - \mu_1) \leq 1.$$

Por outro lado, afirmamos que

$$1 \leq p\frac{G(M)}{M^p}. \tag{2.14}$$

Sendo isto verdade, então para $\theta > \frac{1}{p}$

$$1 \leq p\frac{G(M)}{M^p} < p\frac{G(M)}{M^p}\frac{(1-\mu_1)M^{p-1}}{g(M)} = p(1-\mu_1)\frac{G(M)}{g(M)M} \leq \theta p(1-\mu_1) \leq 1$$

o que é um absurdo, finalizando o primeiro passo.

Para provar (2.14) considere, para $s \geq 0$, a função

$$u_s(r) = \begin{cases} u(r+s),\ 0 \leq r \leq \tilde{R} - s, \\ M,\ \tilde{R} - s \leq r \leq \tilde{R} \\ u(r), \tilde{R} \leq r \leq R \end{cases}$$

Note que $u_s \in U$. De fato, pela definição de u_s e o Teorema D.4

$$\begin{aligned}
\int_0^R r^{N-1}|u_s'|^p dr &= \int_0^{\tilde{R}-s} r^{N-1}|u'(r+s)|^p dr + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr \\
&= \int_s^{\tilde{R}} (r-s)^{N-1}|u'(r)|^p dr + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr \\
&\leq \int_s^{\tilde{R}} r^{N-1}|u'(r)|^p dr + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr \\
&= \int_s^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr \\
&\leq \int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr \leq \int_0^R r^{N-1}|u(r)|^p dr,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

pois $u \in U$, por hipótese.

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\int_0^R r^{N-1}|u_s|^p dr &= \int_0^{\tilde{R}-s} r^{N-1}|u(r+s)|^p dr + \int_{\tilde{R}-s}^{\tilde{R}} r^{N-1}M^p dr + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u(r)|^p dr \\
&\leq \int_s^{\tilde{R}} (r-s)^{N-1}|u(r)|^p dr + \int_{\tilde{R}-s}^{\tilde{R}} r^{N-1}|u(r)|^p dr + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u(r)|^p dr.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Definindo

$$H(s) = \int_s^{\tilde{R}} (r-s)^{N-1}|u(r)|^p dr - \int_0^{\tilde{R}-s} r^{N-1}|u(r)|^p dr,$$

segue que $H(0) = 0$ e

$$H'(s) = -(N-1)\int_s^{\tilde{R}} (r-s)^{N-2}|u(r)|^p dr + (\tilde{R}-s)^{N-1}|u(\tilde{R}-s)|^p$$

Assim, usando a hipótese de contradição

$$\begin{aligned}
H'(0) &= -(N-1)\int_{r_0}^{\tilde{R}} r^{N-2}|u(r)|^p dr + \tilde{R}^{N-1}|u(\tilde{R})|^p \\
&= -(N-1)\int_{r_0}^{\tilde{R}} r^{N-2}|u(r)|^p dr + \tilde{R}^{N-1}M^p > M^p r_0^{N-1} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Assim, por continuidade, $H(s) > 0$, para todo $0 \leq s < \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Segue que

$$\int_0^{\tilde{R}-s} r^{N-1}|u(r)|^p dr \geq \int_s^{\tilde{R}} (r-s)^{N-1}|u(r)|^p dr, \ \forall\, 0 \leq s < \epsilon.$$

De (2.15), (2.16) e (2.17), segue que $u_s \in U$ para $0 \leq s < \epsilon$.

Agora, considere as funções

$$\begin{aligned} \phi(t,s) &= \frac{t^p}{p}\left(\int_s^{\tilde{R}}(r-s)^{N-1}|u'|^p + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u'|^p - \int_s^{\tilde{R}}(r-s)^{N-1}|u|^p\right) \\ - & \quad \frac{t^p}{p}\left(\frac{M^p}{N}[\tilde{R}^N - (\tilde{R}-s)^N] - \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u|^p\right) + \int_s^{\tilde{R}}(r-s)^{N-1}G(tu) \\ + & \quad \frac{[\tilde{R}^N - (\tilde{R}-s)^N]}{N}G(tM) + \int_s^{\tilde{R}} r^{N-1}G(tu) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(t,s) &= t^p\left(\int_s^{\tilde{R}}(r-s)^{N-1}|u'|^p + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u'|^p - \int_s^{\tilde{R}}(r-s)^{N-1}|u|^p\right) \\ - & \quad \frac{(tM)^p}{N}[\tilde{R}^N - (\tilde{R}-s)^N] + \int_s^{\tilde{R}}(r-s)^{N-1}(tu)g(tu) \\ + & \quad \frac{(tM)g(tM)}{N}[\tilde{R}^N - (\tilde{R}-s)^N] - t^p\int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}|u|^p + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}(tu)g(tu) \end{aligned}$$

Segue que

$$\phi(t,s) = I(tu_s) \text{ e } \varphi(t,s) = \int_0^R r^{N-1}|tu_s'|^p dr - \int_0^R r^{N-1}|tu_s|^p dr + \int_0^R r^{N-1}(tu_s)g(tu_s)dr.$$

Como $u \in V$, segue que $\varphi(1,0) = 0$. Além disso

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,s) = pt^{p-1}\left(\int_0^R r^{N-1}|u_s'|^p dr - \int_0^R r^{N-1}|u_s|^p dr\right) + \int_0^R r^{N-1}u_s\left(g(tu_s) + tu_s g'(tu_s)\right)dr$$

Daí, usando a Observação 2.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0) &= p\left[\left(\int_0^{\tilde{R}} r^{N-1}(|u'|^p - |u|^p)dr + \int_{\tilde{R}}^R r^{N-1}(|u'|^p - |u|^p)dr\right)\right] \\ &+ \int_0^R r^{N-1}u(g(u) + ug'(u))dr = \int_0^R r^{N-1}u(ug'(u) - (p-1)g(u))dr. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem $\delta \in (0,\epsilon]$ e uma função diferenciável $t = t(s), s \in [0,\delta)$, tal que $\varphi(t(s),s) = 0$, ou seja, $t(s)u_s \in V$

Como $\varphi(1,0) = \min\limits_{0\leq s\leq\delta}\varphi(t(s),s)$, então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0)\frac{dt}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0) \\ &= \frac{1-N}{p}\int_0^{\tilde{R}} r^N|u'|^p + \frac{N-1}{p}\int_0^{\tilde{R}} r^N|u|^p - (N-1)\int_0^{\tilde{R}} r^N G(u) - \frac{M^p}{p}\tilde{R}^{N-1} + \tilde{R}^{N-1}G(M) \\ &\leq \frac{N-1}{p}\int_0^{\tilde{R}} r^N|u|^p - (N-1)\int_0^{\tilde{R}} r^N G(u) - \frac{M^p}{p}\tilde{R}^{N-1} + \tilde{R}^{N-1}G(M) \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\left(-(N-1)\int_0^{\tilde{R}} r^N|\frac{u}{M}|^p + \tilde{R}^{N-1}\right) &= \frac{-(N-1)}{pM^p}\left(\int_0^{\tilde{R}} r^N|u|^p + \tilde{R}^{N-1}\right)\\
&\leq \frac{-(N-1)}{M^p}\int_0^{\tilde{R}} r^N G(u) + \tilde{R}\frac{G(M)}{M^p}\\
&\leq \frac{1}{M^p}\left(-(N-1)\int_0^{\tilde{R}} r^N|u|^p\frac{G(M)}{M^p} + \tilde{R}G(M)\right)\\
&= \frac{G(M)}{M^p}\left(\underbrace{-(N-1)\int_0^{\tilde{R}} r^N|\frac{u}{M}|^p + \tilde{R}^{N-1}}_{>0}\right),
\end{aligned}$$

o que confirma a afirmação.

Observação 2.7. *Segue da demonstração da última afirmação que u não pode atingir um máximo global, digamos M, em $(0, R)$.*

Passo 2. $u \in C^1([0, R]) \cap C^2(\mathbb{A}_p)$ *e* u *satisfaz* (GS_{rad}).

De fato, tome $v \in X_R$ tal que $v \geq 0$, $suppv \in (0, R)$ e t, h com $t > 0$ e $|h| \leq u_0/||v||_\infty$, onde $u_0 = \max\limits_{r\in suppv} u(r)$ e as seguintes funções

$$\varphi(t, h) = \frac{t^p}{p}\left(\int_0^R r^{N-1}|u' + hv'|^p dr - \int_0^R r^{N-1}|u + hv|^p dr\right) + \int_0^R r^{N-1}G(t(u + hv))dr,$$

$$\phi(t, h) = t^p\left(\int_0^R r^{N-1}|u'+hv'|^p dr - \int_0^R r^{N-1}|u+hv|^p dr\right) + \int_0^R r^{N-1}t(u+hv)g(t(u+hv))dr.$$

Note que $\varphi(t, h) = I(t(u + hv))$ e $\phi(1, 0) = 0$. Assim, temos [cf, Apêndice B]

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(1, 0) = \int_0^R r^{N-1}(u^2g'(u) + (p-1)ug(u))dr, \tag{2.18}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem $\delta \in (0, \epsilon]$ e uma função diferenciável $t = t(h)$ tal que $t(0) = 1$ e $\phi(t(h), h) = 0$, para todo $h \in (-\delta, \delta)$, isto é, $t(h)(u + hv) \in V$, para $h \in (-\delta, \delta)$.

Logo $\varphi(1, 0) = I(u) = \min\limits_V I(v) = \min\limits_{h\in(-\delta,\delta)} I(t(h)(u + hv)) = \min\limits_{h\in(-\delta,\delta)} \varphi(t(h), h)$ e, assim, pela definição da Derivada de Gâteaux

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dh}\varphi(t(h),h)\Big|_{h=0} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0)\frac{dt}{dh}(0) + \frac{\partial\varphi}{\partial h}(1,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(1,h)-\varphi(1,0)}{h} \\
&= \int_0^R r^{N-1}|u'|^{p-2}u'v'dr - \int_0^R r^{N-1}|u|^{p-2}uvdr + \int_0^R r^{N-1}g(u)vdr \\
&= \langle I'(u), v\rangle
\end{aligned}$$

Definindo $f(s) := s^{p-1} - g(s), s > 0$, temos que f é contínua e

$$\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)v'(r)dr - \int_0^R r^{N-1}f(u(r))v(r)dr = 0,\ \ v \in X_R,$$

tal que $v \geq 0$ e $supp(v) \subset (0,R)$ é compacto.

Como u é contínua e $u > 0$ em $(0,R)$, segue que $f \in L^1_{loc}(0,R)$. Pelo Lema 1.14, $u \in C^1(0,R) \cap C^2(\mathbb{A}_p)$ e satisfaz a equação

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}f(u(r)),\ \text{em } (0,R), \tag{2.19}$$

finalizando o passo 2.

Passo 3. *u é decrescente, $u \in C^1([0,R])$ com $u(R) = 0$*

Suponha que exista $\overline{r} \in (0,R)$ tal que $u'(\overline{r}) = 0$. Como,

$$F(u(\overline{r})) = E_u(\overline{r}) \geq E_u(R) = \frac{p-1}{p}|u'(R)|^p + F(u(R)) \geq 0,$$

segue que $u(\overline{r}) \geq p_2$ de forma que $f(u(\overline{r})) > 0$. Afirmamos que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $u'(r) \neq 0$ para $r \in (\overline{r}-\epsilon_1, \overline{r}) \cap (\overline{r}, \overline{r}+\epsilon_1)$. Caso contrário, existiria uma sequência $r_n \to \overline{r}$ tal que $u'(r_n) = 0$. Integrando (2.19) de r_n a r_{n+1}, temos

$$\int_{r_n}^{r_{n+1}} t^{N-1}f(u(t))dt = 0.$$

Assim, pela continuidade do integrando, existiria $\theta_n \in (r_n, r_{n+1})$ satisfazendo $f(u(\theta_n)) = 0$ de forma que

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(u(\theta_n)) = f(u(\overline{r})),$$

ou seja, $u(\overline{r}) = p_1 < p_2$, o que é impossível. Assim, para $r \in (\overline{r}-\epsilon_1, \overline{r}) \cap (\overline{r}, \overline{r}+\epsilon_1)$, segue de (2.2) que

$$(p-1)r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u''(r) = -(N-1)r^{n-2}|u'(r)|^{p-2}u'(r) - r^{N-1}f(u(r)). \tag{2.20}$$

Portanto
$$\lim_{r\to\overline{r}} |u'(r)|^{p-2}u''(r) = -\frac{1}{p-1}f(u(\overline{r})) < 0.$$

Assim, existe $\epsilon_2 \in (0, \epsilon_1]$ tal que $u''(r) < 0$ para $r \in (\overline{r} - \epsilon_2, \overline{r}) \cap (\overline{r}, \overline{r} + \epsilon_2)$, ou seja, $u'(r) > 0$ para $r \in (\overline{r} - \epsilon_2, \overline{r})$ e $u'(r) < 0$ para $r \in (\overline{r}, \overline{r} + \epsilon_2)$.

Afirmamos que

$$u'(r) > 0 \text{ para } r \in (0, \overline{r}) \text{ e } u'(r) < 0 \text{ para } r \in (\overline{r}, R).$$

Caso contrário, suponha que exista $r_1 > \overline{r}$ tal que $u'(r_1) = 0$ e $u'(r) < 0$ para $r \in [\overline{r}, r_1)$. Por (2.20)

$$\lim_{r\to r_1^-} \frac{f(u(r))}{|u'(r)|^{p-1}} = -(p-1)\lim_{r\to r_1^-} u''(r) = \upsilon \leq 0,$$

pois

$$\lim_{r\to r_1^-} u''(r) = \lim_{r\to r_1^-} \frac{u'(r)}{r - r_1} \geq 0.$$

Se $p \geq 2$ e $\upsilon \in (\infty, 0]$, então

$$f(u(r_1)) = \lim_{r\to r_1^-} \frac{f(u(r))}{|u'(r)|^{p-1}}|u'(r)|^{p-1} \leq 0,$$

se $\upsilon = -\infty$, então existe $\epsilon_3 \in (0, \epsilon_2]$ tal que

$$f(u(r)) < 0, \text{ para } r \in (r_1 - \epsilon_3, r_1),$$

mostrando que $f(u(r_2)) = \lim r \to r_1^- f(u(r)) \leq 0$.

Se $1 < p < 2$, então

$$\frac{f(u(r_1))}{p-1} = \lim_{r\to r_1^-} \frac{f(u(r_1))}{p-1} = \lim_{r\to r_1^-} |u'(r)|^{p-1}u''(r) = \delta,$$

donde segue que $\delta \geq 0$ pois, do contrário, existiria $\epsilon_4 \in (0, \epsilon_3)$ tal que

$$|u'(r)|^{p-1}u''(r) < \delta + \epsilon < 0, \ r \in (r_1 - \lambda_3, r_1),$$

isto é, $u''(r) < 0$ para $r \in (r_1 - \epsilon_4, r_1)$ de forma que u' é decrescente em $(r_1 - \epsilon_4, r_1)$. Assim $u'(r) > u'(r_1) = 0$, contradizendo o fato de $u'(r) < 0$ para $r < r_1$. Logo $f(u(r_1)) \leq 0$ para todo $p > 1$, ou seja, $u(r_1) \leq p_1$ e, assim

$$0 > F(u(r_1)) = E_u(r_1) \leq E_u(R) \leq 0,$$

mostrando a contradição. O caso $r_1 < \overline{r}$ é tratado analogamente, mostrando nossa afirmação. Logo $\overline{r}$ é um máximo global de u em $(0, R)$ o que é um absurdo pela Observação 2.7.

Para finalizar precisamos mostrar que $u'(0)$ está bem definido. Para isso lembremos que

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_0^r t^{N-1}f(u(t))dt, \tag{2.21}$$

onde $f(s) = s^{p-1} - g(s)$. Assim

$$r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} \leq \int_0^r t^{N-1}H(u(t))dt,$$

onde $H(s) = s^{p-1} + g(s)$ é tal que $(H(s)/s^{p-1})'$ é não-crescente, por $(GS_1)(iii)$. Logo, pelo Lema 1.10, concluímos que $u \in C^1([0, R))$, finalizando o Passo 3.

Passo 4. *$u \in C^2([0, R))$ se, e somente se, $p \leq 2$*

Primeiramente, como $u' < 0$, em $(0, R)$ e satisfaz

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}f(u(r)),$$

então

$$u'(r) = -r^{-\frac{N-1}{p-1}} \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}f(u(t))dt\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

e

$$\begin{aligned} u''(r) &= (-r^{-\frac{N-1}{p-1}})' \left(\int_0^r t^{N-1}f(u(t))dt\right)^{\frac{1}{p-1}} - f(u)\frac{r^{-\frac{N-1}{p-1}+N-1}}{p-1}\left(\int_0^r t^{N-1}f(u(t))dt\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \\ &= -\frac{1}{p-1}h(r)\left(r^{1-N}\int_0^r t^{N-1}f(u(t))dt\right)^{\frac{2-p}{p-1}}, \end{aligned}$$

onde

$$h(r) = f(u(r)) - (N-1)r^{-N} \int_0^r t^{N-1} f(u(t))ds$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} h(r) &= \lim_{r\to 0} f(u(r)) - (N-1) \lim_{r\to 0} \frac{\int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt}{r^N} \\
&= f(u(0)) - (N-1) \lim_{r\to 0} \frac{r^{N-1} f(u(r))}{N r^{N-1}} \\
&= f(u(0)) - \frac{N-1}{N} f(u(0)) = \frac{1}{N} f(u(0)).
\end{aligned}$$

Note que $u(0) > p_1$ pois, do contrário, $u(r) < p_1$ para todo $r \in (0, R)$, então $f(u(r)) < 0,\ r \in (0, R)$. Mas por (2.21) teríamos $u' > 0$ o que impossível.

Assim $u(0) > p_1$ e, consequentemente, $\lim_{r\to 0} h(r) > 0$. Tome $r_0 > 0$ tal que $f(u(r)) > 0$ para $r \in [0, r_0]$. Logo m e M definidos por

$$m(r) = \min_{[0,r_0]} f(u(t)) \text{ e } M(r) = \max_{[0,r_0]} f(u(t)),\ r \in [0, r_0]$$

são ambas positivas e satisfazem

$$\frac{m(r)}{N} r^N \leq \int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt \leq \frac{M(r)}{N} r^N.$$

Então,

$$\left(\frac{m(r)}{N}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} r^{\frac{2-p}{p-1}} \leq \left(r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \leq \left(\frac{M(r)}{N}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} r^{\frac{2-p}{p-1}}.$$

Logo

$$\lim_{r\to 0} \left(r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt\right)^{\frac{2-p}{p-1}},$$

está bem definido se, e somente se, $p \leq 2$. Assim, $\lim_{r\to 0} u''(r)$ existe se, e somente se, $p \leq 2$, finalizando o passo 4.

Por fim, para mostrar a não-existência de solução suponha, por absurdo, que (GS_{rad}) tem uma solução $u = u_R$ para $R \leq R_1$. Neste caso, u satisfaz

$$-r^{N-1} |u'(r)|^{p-2} u'(r) = \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds.$$

Multiplicando a expressão acima por v', onde $v \in X_R$ e integrando, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)v'(r)dr &= -\int_0^R v'(t)\int_0^r s^{N-1}f(u(s))dsdt \\
&= \int_0^R r^{N-1}f(u(r))v(r)ds \\
&= \int_0^R r^{N-1}u(r)^{p-1}v(r)ds - \int_0^R r^{N-1}g(u)v(r)ds,
\end{aligned}$$

Tomando $v = u$, então

$$\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr = \int_0^R r^{N-1}u(r)^p ds - \int_0^R r^{N-1}g(u)u(r)ds < \int_0^R r^{N-1}u(r)^p ds.$$

Logo

$$\mu_1(R) = \inf_{\substack{v\in X_R \\ v\neq 0}} \frac{\int_0^R r^{N-1}|v'(r)|^p dr}{\int_0^R r^{N-1}|v(r)|^p dr} \leq \frac{\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr}{\int_0^R r^{N-1}|u(r)|^p dr} < 1 = \mu_1(R_1),$$

contradizendo o fato de μ_1 ser decrescente, finalizando a prova do Teorema GS.

CAPÍTULO 3

ESTUDO RADIAL DO PROBLEMA DM_R

O estudo do problema (Q) apresentando singularidades do "tipo $(-)$"tem recebido grande atenção nos últimos anos. Em Física podemos citar, por exemplo, o estudo de fluídos Não-Newtonianos e a teoria de condução de calor em materiais eletricamente condutores. Em química, podemos citar problemas envolvendo catálises químicas heterogêneas. Para maiores detalhes, podemos citar [6] e [15].

Neste sentido, considere o problema singular

$$(T): \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q - \sigma(x) u^{-\beta}, & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde σ é uma função dada, $\lambda > 0$ um parâmetro real e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado. Obviamente o problema (T) não admite solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ se σ não se anular perto de $\partial\Omega$. Entretanto, sob hipóteses apropriadas em σ e λ pode-se obter soluções em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ com $u > 0$ em Ω. Neste sentido, definiremos u como solução clássica de (T) se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Se σ é negativo, então o problema (T) apresenta singularidade do "tipo $(+)$". Em especial, o caso σ negativo e $\lambda = 0$ foi amplamente estudado por vários matemáticos dentre os quais podemos citar, por exemplo, Crandall, Rabinowitz & Tartar [20], Coclite & Palmieri [13] e Lazer & McKenna [43].

Por outro lado, para σ positivo, Zhang [58], em 1996, trabalhou no problema (T)

para $\lambda \neq 0$, $\beta, q \in (0,1)$ e $\sigma \equiv 1$, provando que (T) tem uma solução positiva u_λ para λ suficientemente grande.

Shi & Yao [53], em 1997, consideraram o caso mais geral $\sigma = K(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha, \beta, q \in (0,1)$. Fazendo

$$\begin{aligned} K_* &= \min_{x \in \Omega} K(x) \\ K^* &= \max_{x \in \Omega} K(x) \\ E &= \left\{ u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^(\overline{\Omega}) \ : \ u^\beta \in L^1(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

Eles mostraram que

i) Se $K^* < 0$, então (T) tem única solução se, e somente se, $u_\lambda \in E$, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$;

ii) Se $K_* > 0$, então existe $\lambda_* > 0$ tal que (T) admite uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^(\overline{\Omega})$ para $\lambda > \lambda_*$ e não admite solução para $\lambda < \lambda_*$;

iii) Se $K_* < K < K^*$, então existe $\lambda_* > 0$ tal que (T) tem pelo menos uma solução $u_\lambda \in E$ para $\lambda > \lambda_*$.

Em contraste com o caso $\sigma < 0$, a unicidade não é preservada para $\sigma > 0$, como citado em [53]. Ouyang, Shi e Yao [48], em 1996, consideraram o caso $\sigma \equiv \lambda$, isto é,

$$(OSY): \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda(u^q - u^{-\beta}), & x \in B_1 \\ u > 0, & B_1 \\ u = 0, & \partial B_1, \end{cases}$$

onde $B_1 \subset \mathbb{R}^N$ é a bola unitária. Neste trabalho, foi provado o seguinte teorema

<u>Teorema OSY</u> *Suponha* $0 < \beta, q < 1$. *Então, existe* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *tal que* (OSY) *possui:*

i) *nenhuma solução para* $\lambda < \lambda_1$,

ii) *uma solução para* $\lambda = \lambda_2$,

iii) *duas soluções para* $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2$,

iv) *uma única solução para* $\lambda = \lambda_1$.

Além disso, todas as soluções podem ser encontradas em uma curva $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, *onde*

$$\Gamma_1 := \{(\lambda, u_1(\cdot, \lambda) : \lambda \in [\lambda_1, \infty),\ u_1 \text{ é solução maximal de (OSY)}\}$$
$$\Gamma_2 := \{(\lambda, u_2(\cdot, \lambda) : \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],\ u_2 \text{ é solução minimal de (OSY)}\}$$

E em $\lambda = \lambda_1$, $u_1(\cdot, \lambda_1) = u_2(\cdot, \lambda_1)$ *e em* $\lambda = \lambda_2$ *a solução satisfaz:*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q - u^{-\beta}, & \text{em } B_1 \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial B_1, \end{cases}$$

Onde $(\lambda_2, u_2(\cdot, \lambda_2))$ *é a única solução do problema acima.*

Este resultado sugere que a questão de unicidade, existência, não existência e comportamento assintótico da solução deve estar associado ao parâmetro λ e ao expoente q.

Em 2009, Dávila e Montenegro [21] consideraram o problema $\sigma = 1$ e $\Omega = B_1$, isto é

$$(DM_\lambda): \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q - u^{-\beta}, & x \in B_1 \\ u > 0, & B_1 \\ u = 0, & \partial B_1, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro real e provaram que o seguinte resultado:

Teorema DM_λ *Suponha que* $0 < \beta < 1$ *e que* $1 < q < (N+2)/(N-2)$ *se* $N \geq 3$, $1 < p < \infty$ *se* $N = 2$. *Então existe* $\lambda_1 > 0$ *tal que* (DM_λ) *tem única solução radial* $u_\lambda \in C^2(B_1 \backslash \{0\}) \cap C^1(\overline{B}_1)$ *se, e somente se,* $0 < \lambda \leq \lambda_1$. *Além disso,* $u'_\lambda(1) < 0$ *se* $0 < \lambda < \lambda_1$ *e* $u'_\lambda(1) = 0$ *se* $\lambda = \lambda_1$.

Na próxima seção apresentaremos o paralelo que existe entre os problemas (DM_R) e (DM_λ).

3.1 Equivalência entre os problemas (DM_λ) e (DM_R)

Sob nosso ponto de interesse, isto é, casos particulares do problema (Q), considere a seguinte mudança de parâmetros em (DM_λ):

$$R = \lambda^{\frac{-1-\beta}{2(q+\beta)}} \text{ e } v(r) = \lambda^{\frac{1}{q+\beta}} u(\lambda^{\frac{-1-\beta}{2(q+\beta)}} r), \; r \in (0, R]$$

Lema 3.1. *Considere* $0 < \beta < 1$, $1 < q < (N+2)/(N-2)$ *e* $\lambda > 0$. *Então* u *é uma solução radial para* (DM_λ) *se, e somente se,* v *é uma solução radial para* DM_R *definido por*

$$(DM_R) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^q - u^{-\beta}, & B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $B_R \subset \mathbb{R}^N$ *é a bola de raio* R

Demonstração: A forma radial do problema (DM_R) é:

$$u''(t) + \frac{N-1}{t}u'(t) + \lambda u^q(t) - u(t)^{-\beta} = 0,\ t \in (0,1). \tag{3.1}$$

Considerando $t = \lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r$, onde $t \in (0,1)$, então $r \in (0,R)$, para $R := \lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}$, e podemos reescrever (3.1) como

$$u''(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r) + \frac{N-1}{\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r}u'(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r) + \lambda u(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r)^q - u(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r)^{-\beta} = 0$$

Definindo $v(r) := \lambda^{\frac{1}{q+\beta}}u(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r)$, então

$$\begin{aligned} v'(r) &= \lambda^{\frac{1}{q+\beta}}u'(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r)\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}} = \lambda^{\frac{1-\beta}{2(q+\beta)}}u'(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r) \\ v''(r) &= \lambda^{\frac{1-\beta}{2(q+\beta)}}u''(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r)\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}} = \lambda^{\frac{-\beta}{(q+\beta)}}u''(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= u''(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r) + \frac{N-1}{\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r}u'(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r) + \lambda u(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r)^q - u(\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r)^{-\beta} \\ &= v''(r)\lambda^{\frac{\beta}{(q+\beta)}} + \frac{N-1}{\lambda^{-\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}r}v'(r)\lambda^{\frac{-1+\beta}{2(q+\beta)}} + \lambda\left(\lambda^{-\frac{1}{q+\beta}}v(r)\right)^q + \left(\lambda^{-\frac{1}{q+\beta}}v(r)\right)^{-\beta} \\ &= \lambda^{\frac{\beta}{(q+\beta)}}\left(v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) + v^q(r) - v^{-\beta}(r)\right). \end{aligned}$$

Deste modo, resolver (3.1) é equivalente a resolver

$$v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) + v(r)^q - v(r)^{-\beta} = 0,\ r \in (0,R),\ R = \lambda^{\frac{1+\beta}{2(q+\beta)}}$$

como queríamos. ■

Neste caso, o Teorema (DM_λ) pode ser reescrito como:

__**Teorema DM**__ *Suponha $0 < \beta < 1$ e que $1 < q < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$, $1 < q < \infty$ se $N = 2$. Então existe $R_2 > 0$ tal que (DM) admite única solução radial $u = u_R \in C^2(B_R \setminus \{0\}) \cap C^1(\overline{B}_R)$ se, e somente se, $0 < R \leq R_2$. Além disso, $u'(R) < 0$ se $0 < R < R_2$ e $u'(R_2) = 0$.*

A demonstração do Teorema (DM) será o objetivo deste capítulo. Para tanto, consideremos a forma radial de (DM), que é um caso especial de (GS_{rad}) simplesmente considerando $p = 2$ e $g(s) = s^{-\beta},\ s > 0$

$$(DM_{rad}) \qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{N-1}{r}u' + u^q - u^{-\beta} = 0, & (0,R) \\ u'(0) = u(R) = 0,\ u > 0, & [0,R) \end{cases}$$

Para estudar o problema DM_{rad}, vamos considerar o seguinte caso particular de (NN_a)

$$(DM_a) \qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{N-1}{r}u' + u^q - u^{-\beta} = 0, & (0, T(a)) \\ u(0) = a, \ u'(0) = 0, \ u > 0 \end{cases}$$

onde $a > 0$ é o parâmetro de "shooting"e $T(a)$ o intervalo maximal a direita onde a solução $u(r, a)$ de DM_a é definida, isto é [cf, pág 20]

$$T(a) = \sup\{r \ / \ u(r, a) > 0\}.$$

onde $D(T)$ é definido por:

$$D(T) = \left\{a \in \mathbb{R}_+^\star \ / \ u(r, a) = 0, \ \text{para algum } r > 0\right\}$$

Como visto na Seção (1.3) do Capítulo 1, a equação

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}f(u), & r > 0 \\ u(0) = a, \ u'(0) = 0, \ u > 0 \end{cases}$$

admite solução se $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ for de classe C^1. Além disso, para o caso $p = 2$, a solução desta EDO é C^2 na variável "r" e C^1 na variável "a", como visto no Lema 1.13. Deste modo, temos garantido que (DM_a) admite única solução com as características acima.

Ainda no Capítulo 1 vimos algumas propriedades qualitativas da solução de (DM_a). Assim, iniciaremos este capítulo com as propriedades associadas a $\phi(r, a) = \frac{\partial u}{\partial a}(r, a)$ onde $u(r, a)$ é a solução de DM_a. Tendo concluído este passo teremos todas as ferramentas necessárias para a demonstração do Teorema DM.

3.2 Propriedades de $\phi(r, a) = (\partial u/\partial a)(r, a)$

Nesta seção nos concentraremos em apresentar algumas propriedades que a função $\phi(r, a) = \frac{\partial u}{\partial a}(r, a)$ apresenta. Ao que nos parece, Coffman [14], em 1972, introduziu o estudo da função $\phi(r, a)$, utilizando idéias de Kolodner , de 1955. Desde então vários autores utilizaram tal técnica, por exemplo, Cortazar, Elgueta e Felmer [17], Kwong e Zhang [42], Chen e Lin [7], McLeod e Serrin [44], Yanagida [57] entre outros.

Em especial provaremos as seguintes propriedades de $\phi(r, a)$:

Lema 3.2. *Seja $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$, então existe $r_0 \in (0, T(a))$ tal que $\phi(r_0) = 0$.*

Lema 3.3. *Seja $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$. Então a função $\phi(r)$ tem um único zero em $(0, T(a))$. Além disso $\phi > 0$ em $[0, r_0)$ e $\phi < 0$ em $(r_0, T(a))$, onde $\phi(r_0) = 0$.*

Lema 3.4. *Seja $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$. Então:*

i) se $u'(T(a)) < 0$, então $\phi(T(a)) < 0$;

ii) se $u'(T(a)) = 0$, então $\lim\limits_{r\to T(a)} \phi(T(a)) = 0$. Além disso, existe único $r_1 \in (r_0, T(a))$ tal que $\phi'(r_1) = 0$ $\phi' < 0$ em $[r_0, r_1)$ e $\phi' > 0$ em $(r_1, T(a))$, onde $\phi(r_0) = 0$ e $\phi'(r) = d\phi(r)/dr$;

Entretanto precisaremos de dois lemas técnicos auxiliares para nossas demonstrações. Para tanto, considere o PVI

$$\begin{cases} w'' + \dfrac{N-1}{r} w' - f'(u)w = 0, & r \in (0, T(a)) \\ w'(0) = 0, \; w(0) = 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $f'(s) = qs^{q-1} + \beta s^{-\beta-1}, \; s > 0$.

Lema 3.5. *Seja $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$ e $u = u(\cdot, a)$ uma solução para (DM_a). Então a função $\phi(r,a) = \frac{\partial u}{\partial a}(r,a)$ é a única solução para o problema (3.2).*

Demonstração: Vimos que, como $u = u(\cdot, a)$ satisfaz (DM_a), então u satisfaz a equação integral

$$\begin{aligned} u(r,a) &= a + \int_0^r v(s,a)ds, \; r \in (0, T(a)) \\ v(r,a) &= -r^{-(N-1)} \int_0^r s^{N-1} f(u(s,a))ds, \; r \in (0, T(a)) \end{aligned}$$

onde $v(r,a) = u'(r,a)$. Derivando u em relação a a

$$\phi(r,a) = \frac{\partial u}{\partial a}(r,a) = 1 + \int_0^r \frac{\partial v}{\partial a}(s,a)ds,$$

onde

$$\frac{\partial v}{\partial a}(r,a) = -r^{-(N-1)} \int_0^r s^{N-1} f'(u(s,a)) \frac{\partial u}{\partial a}(s,a)ds.$$

Isso mostra que $\phi(r,a)$ é uma solução para (3.2). A unicidade é garantida pelo Lema 1.13. ∎

O próximo lema apresenta uma importante idéia introduzida por Kwong [41] que provou que o quociente $-ru'(r,a)/u(r,a)$ é decrescente. Isto será uma ferramenta essencial para determinar a existência de solução para (DM_a).

Lema 3.6. *Seja $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$. Então $-ru'(r,a)/u(r,a)$ é estritamente decrescente em $(0, T(a))$.*

Demonstração: Seja $w(r) = ru'(r)$, então:

$$\left(\frac{ru'(r)}{u(r)}\right)' = \frac{(ru''(r) + u'(r))u(r) - r(u'(r))^2}{u^2(r)} = \frac{ru''(r)u(r) + u'(r)u(r) - r(u'(r))^2}{u^2(r)}.$$

Logo

$$r^{N-1}\left(\frac{ru'(r)}{u(r)}\right)' u^2(r) = r^{N-1}(w'(r)u(r) - u'(r)w(r)), \ \forall r \in (0, T(a)). \tag{3.3}$$

Para provar nossa afirmação é suficiente mostrar que $(w'(r)u(r) - u'(r)w(r)) > 0, \ r \in (0, T(a))$. Para tanto, note que como $u \in C^3(0, T(a))$, então

$$\begin{aligned} w' &= ru'' + u' \\ w'' &= ru''' + 2u'', \end{aligned}$$

e, derivando, (DM_a)

$$u''' + \frac{N-1}{r}(\frac{u''r - u'}{r}) + f'(u)u' = 0.$$

Juntando estas equações

$$\begin{aligned} 0 &= w'' - 2u'' + \frac{N-1}{r}(w' - 2u') + f'(u)u'r \\ &= w'' + \frac{N-1}{r}w' - 2(u'' + \frac{N-1}{r}u') + f'(u)u'r \\ &= w'' + \frac{N-1}{r}w' + 2f(u) + f'(u)u'r, \end{aligned}$$

ou seja

$$-(r^{N-1}w')' = (2f(u) + f'(u)u')r^{N-1}, \ r \in (0, T(a)).$$

Equivalentemente

$$-\Delta w = 2f(u) + f'(u)u', \ \text{em } B_{T(a)} \tag{3.4}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Green

$$\int_0^r (u\Delta w - w\Delta u)t^{N-1}dt = r^{N-1}(w'(r)u(r) - u'(r)w(r)), \ r \in (0, T(a)),$$

onde

$$u\Delta w - w\Delta u = (2f(u)u + ruf'(u)u' - ru'f(u))$$

por (3.4) e (DM_a).

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^r & t^{N-1}(2f(u)u + tuf'(u)u' - tu'f(u))dt \\
= & \int_0^r t^N f'(u)uu'dt + \int_0^r t^N f(u)u'dt + 2\int_0^r t^{N-1}f(u)udt \\
= & t^N f(u)u\Big|_0^r - \int_0^r f(u)(t^N u)'dt - t^N F(u)\Big|_0^r + N\int_0^r t^{N-1}F(u)dt + 2\int_0^r t^{N-1}f(u)udt \\
= & r^N(f(u)u - F(u)) - \int_0^r t^N f(u)u'dt - (N-2)\int_0^r t^{N-1}f(u)udt + N\int_0^r t^{N-1}F(u)dt \\
= & r^N(f(u)u - F(u)) - t^N F(u)\Big|_0^r + 2N\int_0^r t^{N-1}F(u)dt - (N-2)\int_0^r t^{N-1}f(u)udt \\
= & r^N(f(u)u - 2F(u)) + \int_0^r t^{N-1}(2NF(u) - (N-2)f(u)u)dt
\end{aligned}$$

O que nos fornece

$$r^{N-1}(w'u - u'w) = r^N(f(u)u - 2F(u)) + \int_0^r t^{N-1}(2NF(u) - (N-2)f(u)u)dt \tag{3.5}$$

Percebamos que

$$\begin{aligned}
f(s)s - 2F(s) &= \left(s^q - s^{-\beta}\right)s - 2\left(\frac{s^{p+1}}{p+1} - \frac{s{-}\beta+1}{-\beta+1}\right) \\
&= s^{p+1}\left(1 - \frac{2}{p+1}\right) + s^{1-\beta}\left(\frac{2}{\beta+1} - 1\right) > 0,\ s > 0 \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Afirmação:

$$\int_0^r t^{N-1}(2NF(u) - (N-2)f(u)u)dt > 0,\ r \in (0, T(a))$$

Definindo

$$G(s) := 2NF(s) - (N-2)f(s)s,$$

segue de $1 < q < (N+2)(N-2)$ e de $0 < s < 1$ que G é crescente e possui um zero, digamos $d > 0$, de modo que $G(s) > 0$ se $s > d$ e $G(s) < 0$ se $0 < s < d$. Se $s \geq d$, então a afirmação está provada. Supondo que $0 < s < 1$, então, por (3.5) e (3.6)

$$\begin{aligned}
\int_0^r t^{N-1}(2NF(u) - (N-2)f(u)u)dt &> \int_0^{T(a)} t^{N-1}(2NF(u) - (N-2)f(u)u)dt \\
&= \lim_{r\to T(a)} \left[r^{N-1}(w'u - wu')\right].
\end{aligned}$$

pois $T(a)^N(f(u(T(a)))u(T(a)) - 2F(u(T(a)))) = 0$.

Por outro lado, sendo $a > 1$ e $T(a)$ finito tem-se E_u limitado. Logo u' e u'' são limitadas e, consequentemente, $w' = ru'' + u'$ é limitado. Assim, se $u'(T(a)) = 0$, então $\lim\limits_{r\to T(a)} w'(r)u(r) = \lim\limits_{r\to T(a)} w(r)u'(r) = 0$ e nosso resultado está provado. Por outro lado, se $u'(T(a)) < 0$, então, pelo Lema 1.17 e o fato de $0 < \beta < 1$,

$$\begin{aligned} w'(r)u(r) &= (ru'' + (c+1)u')u \\ &= (T(a)-r)^{1-\beta} \underbrace{\frac{u}{T(a)-r}}_{limitado} \underbrace{\frac{u''}{(T(a)-r)^{-\beta}}}_{limitado} + (c+1)u' \underbrace{\frac{u}{(T(a)-r)}}_{limitado} (T(a)-r), \end{aligned}$$

mostrando que $w'(r)u(r) \to 0$, se $r \to T(a)$. De maneira análoga, $\lim_{r\to T(a)} w(r)u'(r) = 0$

Em ambos os casos

$$\int_0^{T(a)} t^{N-1}(2NF(u) - (N-2)f(u)u)dt = 0$$

O que confirma nossa afirmação e, consequentemente, o lema. ■

Demonstração do Lema 3.2: Inicialmente, note que existe $b \geq 0$ suficientemente pequeno tal que $f'(s)(s-b) - f(s) > 0, \forall s \geq b$. De fato,

$$\begin{aligned} f'(s)(s-b) - f(s) &= (qs^{q-1} + \beta s^{-\beta-1})(s-b) - (s^q - s^{-\beta}) \\ &= s^{q-1}[-bq + (q-1)s + (\beta+1)(s^{-\beta-q-1} - b\beta s^{-\beta-q}] \\ &= s^{q-1}[-bq + (q-1)s + s^{-\beta-q}((\beta+1)s - b\beta] \\ &\geq s^{q-1}[-bq + (q-1)s + s^{-\beta-q}((\beta+1)b - b\beta] \\ &= s^{q-1}(-bq + (q-1)s + bs^{-\beta-q}). \end{aligned}$$

Definindo $v(s) = -bq + (q-1)s + bs^{-\beta-q}$, $s > 0$, então $v(s) \overset{s\to 0^+}{\to} \infty$, e

$$v''(s) = b(\beta+q)(\beta+q+1)s^{-\beta-q-2} > 0, \;\; s > 0$$

Isto mostra que v é convexa o que garante a existência de um único ponto de mínimo, digamos s_1, dado explicitamente por

$$s_1 = (\frac{a(\beta+q)}{q-1})^{\frac{1}{1+q+\beta}}.$$

Substituindo s_1 em $v(s)$,

$$\begin{aligned}
v(s_1) &= (q-1)\left(\frac{b(\beta+q)}{q-1}\right)^{\frac{1}{1+q+\beta}} - bq + \left(\frac{b(\beta+q)}{q-1}\right)^{\frac{\beta-q}{1+q+\beta}} \\
&= -bq + \left(\frac{b(\beta+q)}{q-1}\right)^{\frac{1}{1+q+\beta}}\left[q-1+\frac{(q-1)b}{b(q+\beta)}\right] \\
&= -bq + \left(\frac{b(\beta+q)}{q-1}\right)^{\frac{1}{1+q+\beta}}\left[\frac{(q-1)(q+\beta+1}{q+\beta})\right].
\end{aligned}$$

Logo, para $s > 0$

$$f'(s)(s-b) - f(s) \geq b^{\frac{1}{1+q+\beta}}\left\{\left(\frac{(\beta+q)}{q-1}\right)^{\frac{1}{1+q+\beta}}\left[\frac{(q-1)(q+\beta+1}{q+\beta})\right] - qb^{\frac{q+\beta}{1+q+\beta}}\right\}.$$

que é positivo para b suficientemente pequeno, como afirmado.

Agora, sendo $u' < 0$ em $(0, T(a))$ e $u(T(a), a) = 0$, então existe $r_1 \in (0, T(a))$ tal que $u(r_1) = b$ e $u(r) > b,\ r \in [0, r_1)$. Pelo Lema 3.5, ϕ satisfaz

$$(r^{N-1}\phi(r))' + r^{N-1}\phi f'(u) = 0,\ r \in (0, T(a))$$

então

$$(r^{N-1}\phi(r))'(u(r)-a) + r^{N-1}\phi f'(u(r))(u(r)-a) = 0,\ r \in (0, T(a))$$

Integrando de 0 a r_1

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{r_1} (r^{N-1}\phi(r)')'(u(r)-a)dr + \int_0^{r_1} r^{N-1}\phi(r)f'(u(r))(u(r)-a)dr \\
&= \underbrace{r^{N-1}\phi'(r)\ (u(r)-a)\Big|_0^{r_1}}_{=\,0} - \int_0^{r_1} r^{N-1}\phi'(r)u'(r)dr + \int_0^{r_1} r^{N-1}\phi(r)f'(u(r))(u(r)-a)dr \\
&= -r^{N-1}u'(r)\phi(r)\ \Big|_{r_1}^{0} + \int_0^{r_1} \underbrace{(r^{N-1}u'(r))'}_{-r^{N-1}f(u(r))}\phi(r)dr + \int_0^{r_1} r^{N-1}\phi(r)f'(u(r))(u(r)-a)dr.
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\int_0^{r_1} r^{N-1}\phi(r)\left[f'(u)(u-a) - f(u)\right]dr = r_1^{N-1}u'(r_1)\phi(r_1). \tag{3.7}$$

Se ϕ fosse não-negativa em $(0, r_1)$, então da continuidade de ϕ e de $\phi(0) = 1$ teríamos a integral acima positiva. Em contra-partida, o lado direito é não-positivo pois $\phi(r_1) \geq 0$ e $u'(r_1) \leq 0$. Assim, existe $r_0 \in (0, r_1)$ tal que $\phi(r_0) = 0$.

Demonstração do Lema 3.3: Seja $v(r) = ru'(r) + cu,\ r \in (0, T(a))$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante a ser determinada. Segue que

$$v'(r) = ru''(r) + (c+1)u'(r)$$

$$v''(r) = ru'''(r) + (c+2)u''(r).$$

Derivando (DM_a) em relação a r, obtemos

$$0 = u''' + \frac{N-1}{r}\left(\frac{u''r - u'}{r}\right) + f'(u)u' = \frac{1}{r}\left[u'''r + \frac{N-1}{r}(u''r - u') + rf'(u)u'\right].$$

Reescrevendo essas equações

$$\begin{aligned} 0 &= v'' - (c-2)u' + \frac{N-1}{r}(v' - (c+1)u' - u') + rf'(u)u' \\ &= v'' + \frac{N-1}{r}v' - (c+2)(u'' + \frac{N-1}{r}) + f'(u)(u'r + uc) - cf'(u)u \\ &= v'' + \frac{N-1}{r}v' - (c+2)(u'' + \frac{N-1}{r}u') + f'(u)(ru' + uc) - cf'(u)u. \end{aligned}$$

Daí

$$v'' + \frac{N-1}{r}v' + f'(u)v = -(c+2)f(u) + cf'(u)u. \tag{3.8}$$

Suponha, por absurdo, que ϕ admita mais de um zero, digamos r_0 e r_1, e seja r_0 o menor. Tomemos c de forma que

$$0 = -(c+2)f(s_0) + f'(s_0)s_0c, \text{ onde } u(r_0) = s_0,$$

isto é,

$$c = \frac{2(s_0^{q+\beta} - 1)}{(q-1)s_0^{q+\beta} + \beta + 1}.$$

Dado c como acima consideremos $\psi(s) = -(c+2)f(s) + cf'(s)s,\ s > 0$. Assim $\psi(s_0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \psi(s) &= -(c+2)f(s) + cf'(s)s \\ &= -(2+c)(s^q - s^{-\beta}) + c(ps^{q-1} + \beta s^{-\beta-1})s \\ &= s^{-\beta}\left[s^{\beta+q}(-2 + c(q-1)) + 2 + c(\beta+1)\right]. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\psi'(s) &= -\beta s^{-\beta-1}\left\{s^{\beta+q}\left[-2+c(q-1)+2+c(\beta+1)\right]+s^{-\beta}\left[(q+\beta)s^{\beta+q-1}(-2-c+cq)\right]\right\}\\
&= -\beta s^{-q-1}(-2+c(p-1))-\beta s^{-\beta-1}(2+c(\beta+1))+(\beta+q)s^{q-1}(-2+c(q-1))\\
&= -\beta s^{-q-1}(2+c(\beta+1))+ps^{q-1}(-2+c(q-1))\\
&< qs^{q-1}(-2+c(q-1))<0,
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
c &= \frac{2s_0^{q+\beta}-2}{(q-1)s_0^{q+\beta}+\beta+1}\\
&< \frac{2s_0^{q+\beta}}{(q-1)s_0^{q+\beta}+\beta+1}\\
&< \frac{2s_0^{q+\beta}}{(q-1)s_0^{q+\beta}}<\frac{2}{q-1}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $\psi(s)$ é decrescente e, consequentemente

$$\begin{cases} \text{Se } s<s_0, \text{ então } \psi(s)>0,\\ \text{Se } s>s_0, \text{ então } \psi(s)<0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Por outro lado, sabemos, pelo Lema 3.5 e por (3.8), que

$$\Delta\phi+f'(u)\phi=0,$$

e

$$\Delta v+f'(u)v=\psi(u),$$

de onde concluímos que

$$v\Delta\phi-\phi\Delta v=\psi(u)\phi.$$

Multiplicando a equação encontrada por r^{N-1} e integrando, segue que

$$\int_0^r t^{N-1}\phi(t)\psi(u(t))dt=\int_0^r t^{N-1}(v\phi''-\phi v'')dt=r^{N-1}(\phi v'-v\phi')(r) \tag{3.10}$$

Mas, usando (3.9), conclui-se que

$$\int_0^r t^{N-1}\phi(t)\psi(u)dt<0,\ \forall r\in(0,r_1), \tag{3.11}$$

pois:

- Se $0 < r \leq r_0$, então $\phi(r) > 0$ e $\psi(u(r)) < 0$, pois $u(r) > u(r_0) = s_0$,

- Se $r_0 < r \leq r_1$, então $\phi(r) < 0$ e $\psi(u(r)) > 0$, pois $u(r) < u(r_0) = s_0$.

Tomando $r = r_0$ em (3.10) e usando (3.11), $v(r_0)\phi'(r_0) < 0$, pois $\phi(r_0) = 0$. Mas $\phi'(r_0) \leq 0$, pois $\phi(0) = 1$, $\phi(r_0) = 0$ e $\psi(r) > 0, r \in [0, r_0]$, de onde concluimos que $v(r_0) < 0$. Por outro lado, o Lema 3.6 garante que $v'(r) < 0$, $r \in (0, T(a))$. Logo $v(r_1) < v(r_0) < 0$ e de forma análoga, segue de (3.10) que $\phi'(r_1) < 0$, o que é um absurdo.

Deste modo, segue a unicidade de r_0 e, como consequência do raciocínio acima, que $\phi > 0$ em $[0, r_0)$ e $\phi < 0$ em $(r_0, T(a))$, como queríamos.

Demonstração do Lema 3.4: Consideremos $v = ru' + cu$, onde c é dado pelo lema anterior.

i)Suponha, por contradição, que $u'(T(a)) < 0$ e $\phi(T(a)) = 0$, então $v(T(a)) < 0$. Fazendo $r \to T(a)$ em (3.10) e usando (3.11), segue que

$$0 > \int_0^{T(a)} t^{N-1}\phi(t)\psi(u(t))dt = \lim_{r \to T(a)} \left[r^{N-1}(v\phi' - \phi v')\right] = \lim_{r \to T(a)} r^{N-1}v(r)\phi'(r)$$

de onde concluímos que $\lim\limits_{r \to T(a)} \phi'(r)v(r) < 0$. Isto implica que $\lim\limits_{r \to T(a)} \phi'(r) = -\epsilon < 0$, pois $v(T(a)) < 0$. Então $\phi'(r) < -\epsilon/2$, $r \in (T(a) - \delta, T(a))$, para algum $\delta > 0$. Assim

$$\phi(T(a) - \lambda) - \phi(r) = \int_r^{T(a)+\lambda} \phi'(t)dt < -\frac{\epsilon}{2}(T(a) + \lambda - r),$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Logo, fazendo $\lambda \to 0$ segue que

$$\phi(r) > \frac{\epsilon}{2}(T(a) - r),\ r < T(a),$$

contradizendo o fato de $\phi < 0$ em $(r_0, T(a))$.

ii) Primeiramente, notemos que $\phi' > 0$ para algum $r \in (r_0, T(a))$. De fato, suponha que $\phi' \leq 0$ em $[r_0, T(a))$. Então $\lim_{r \to T(a)} \phi(r) = k < 0$. Mas, pelo Lema 3.5,

$$\phi'' + \frac{N-1}{r}\phi' + f'(u)\phi = 0.$$

Pelo Lema 1.16 temos $u \geq O((T(a)-r)^{\alpha})$. Assim

$$\begin{aligned} f'(u) &= qu^{q-1} + \beta u^{-\beta-1} \\ &\leq C_1(T(a)-r)^{\alpha(q-1)} + C_2(T(a)-r)^{-2} \\ &\leq C(T(a)-r)^{-2}(1+(T(a)-r)^{\alpha(q-1)+2}) \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante real. Neste caso,

$$0 = \phi'' + \frac{N-1}{r}\phi' + f'(u)\phi \leq \phi'' + f'(u)\phi \leq \phi'' + C_3\phi(T(a)-r)^{-2}.$$

Como, por hipótese, $\phi < 0$ para $r > r_0$, então

$$\phi'' \geq C_4(T(a)-r)^{-2}$$

onde C_4 é uma constante positiva e r perto de $T(a)$, o que implica que $\phi(r) \to \infty$ quando $r \to T(a)$, o que é um absurdo.

Como $f'(s) > 0$, concluímos que ϕ não possui máximo local quando $\phi < 0$ e não possui mínimo local quando $\phi > 0$. Logo, em $(0, r_0)$, tem-se $\phi' \leq 0$. Por outro lado, como ϕ' muda o seu sinal, seja r_1 o menor zero para $\phi'(r)$, $r \in (r_0, T(a))$. Segue que ϕ' não possui outro zero em $(r_1, T(a))$ pois isto iria contra o fato de ϕ não possuir máximo local em $(r_0, T(a))$. Logo $\phi' > 0$ perto de $T(a)$ e existe $\lim_{r\to T(a)} \phi(r) = k$. Suponha que $k < 0$. Pelo mesmo argumento utilizado acima, concluímos que $\phi(r) \to \infty$, quando $r \to T(a)$, o que é um absurdo. Logo, $\lim_{r\to T(a)} \phi(r) = 0$, como afirmado.

3.3 Conclusão da demonstração do Teorema DM

Esta seção é destinada a completar a demonstração o Teorema DM. Para tanto, provaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.7. *Existe $a_1 > 1$ tal que*

i) se $0 < a < a_1$ então $T(a) = \infty$,

ii) se $a = a_1$, então $T(a) < \infty$ e a correspondente solução para (DM_a) satisfaz $u'(T(a_1), a_1) = 0$;

iii) se $a > a_1$, então $T(a) < \infty$ e a correspondente solução para (DM_a) satisfaz $u'(T(a), a) < 0$.

Para provar este resultado, precisamos de alguns resultados técnicos, enunciados em lemas.

Lema 3.8. *Suponha $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$ e $u'(T(a)) = 0$. Seja $r_0 \in (0, T(a))$ tal que $\phi(r_0) = 0$ e $r_1 \in (r_0, T(a))$ tal que $\phi'(r_1) = 0$. Então existe $r^\star \in (r_0, r_1)$ onde $u(r^\star) < 1$.*

Demonstração: Suponha, do contrário, que $u \geq 1$ em $[r_0, r_1]$ e seja b $= u(r_0)$. Como $u' < 0$, então $1 \leq u \leq b$ em $[r_0, r_1]$. Sabemos, por (3.7) e de $\phi(r_1) < 0$, pois $r_0 < r_1$, que

$$\int_{r_0}^{r_1} \phi(r)[f'(u(r))(u(r) - b) - f(u(r)]r^{N-1}dr = r_1^{N-1}u'(r_1)\phi(r_1) < 0.$$

Por outro lado, para $1 \leq s \leq b$

$$\begin{aligned}
f'(s)(s-b) - f(s) &= (qs^{q-1} + \beta s^{-\beta-1})(s-b) - (s^q - s^{-\beta}) \\
&= s^{q-1}\left[-bq + (q-1)s + (\beta+1)(s^{-\beta-q-1} - b\beta s^{-\beta-q})\right] \\
&= s^{q-1}\left\{-bq + (q-1)s + s^{-\beta-q}\left((\beta+1)s - b\beta\right]\right\} \\
&\leq s^{q-1}\left\{-bq + (q-1)s + s^{-\beta-q}\left((\beta+1)b - b\beta\right]\right\} \\
&= s^{q-1}\left[(q-1)s + b(s^{-\beta-p} - q)\right] \\
&\leq s^{q-1}\left[(q-1)s + b(1-q)\right] \\
&= s^{q-1}(q-1)(s-b) \leq 0.
\end{aligned}$$

Assim, como $\phi < 0$ em (r_0, r_1), então pelas contas acima

$$\int_{r_0}^{r_1} \phi(r)(f'(u(r))(u(r) - b) - f(u(r))r^{N-1}dr \geq 0,$$

o que é um absurdo. ∎

Lema 3.9. *Suponha $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$ e $u'(T(a)) = 0$. Assim para $a_1 \in (1, a)$ com $a - a_1$ suficientemente pequeno, tem-se $T(a_1) = \infty$.*

Demonstração: Pelos Lemas 3.4 e 3.10, existe $r_2 \in (r_0, T(a))$ tal que $u(r_2, a) < 1$, com $\phi(r_2) < 0$ e $\phi'(r_2) < 0$. Então para $a_1 < a$ com $a - a_1$ suficientemente pequeno,

$$1 > u(r_2, a_1) > u(r_2, a) \text{ com } 0 > u'(r_2, a_1) > u'(r_2, a),$$

pois $u(r_2, \cdot) \in C^1(0, \infty)$. Denotando $u_1 = u(r_2, a_1)$ e $u = u(r_2, a)$, então as desigualdades acima garantem

$$F(u_1(r_2)) < F(u(r_2)) \text{ e } u_1'(r_2)^2 < u'(r_2)^2.$$

Logo,

$$E_{u_1}(r_2) < E_u(r_2).$$

Mostraremos, em três passos, que $T(a) = \infty$.

Passo 1: $u_1 > u, \forall r \in (r_2, T(a))$

Suponha que o resultado seja falso e considere $r_3 = \inf \{r \in (r_2, T(a)) \mid u(r) = u_1(r)\}$. Como $u(r_2) < u_1(r_2)$, podemos concluir que $u_1'(r_3) \leq u'(r_3)$. De fato, $u_1'(r_3) < u_1'(r_3)$ pois, do contrário, sendo $u(r_3) = u_1(r_3)$ e $u'(r_3) = u_1'(r_3)$, então pelo teorema de unicidade de EDO's, $u_1 \equiv u$ em $[r_2, r_3]$. Assim, de $0 < u_1'(r_3) < u'(r_3)$ e $u_1(r_3) = u(r_3)$, temos

$$E_{u_1}(r_3) > E_u(r_3).$$

Seja $r_4 = inf \{r \in (r_2, r_3) \mid E_u(r) = E_{u_1}(r)\}$. Então

$$E_{u_1}(r_2) < E_u(r_2) \text{ e } E_{u_1}(r_4) < E_u(r_4),$$

indicam que $E_{u_1}'(r_4) \geq E_u'(r_4)$ o que implica $u'(r_4)^2 \geq u_1'(r_4)^2$. Por outro lado, pela definição de r_3, $u_1 > u$ em (r_2, r_3). Em particular, $u_1(r_4) > u(r_4)$ e, consequentemente, $F(u_1(r_4)) < F(u(r_4))$ de onde concluímos que $E_u(r_4) > E_{u_1}(r_4)$, contradizendo a definição de r_4.

Passo 2: $E_{u_1} < E_u, \forall r \in (r_2, T(a))$.

Suponha que seja falso. Defina $r_5 = inf \{r \in (r_2, T(a)) | E_u(r) = E_{u_1}(r)\}$. Pelo raciocínio anterior, $E_{u_1}'(r_5) \geq E_u'(r_5)$ o que implica $u'(r_5)^2 \geq u_1'(r_5)^2$. Como $u(r_5) > u_1(r_5)$ temos $F(u_1(r_5)) < F(u(r_5))$. Logo $E_u(r_5) > E_{u_1}(r_5)$, contradizendo a definição de r_5.

Passo 3: $u_1(T(a)) > 0$. Em particular, $T(a_1) > T(a)$

Suponha que $u_1(T(a)) = 0$. Como $E_{u_1}(T(a)) \leq E_u(T(a)) = 0$ concluímos que $u_1'(T(a)) = 0$. Pelo Lema 1.19, $u \equiv u_1$ em $(0, T(a))$ o que nos gera um absurdo visto que, $u_1(0) = a_1 \neq a = u(0)$.

Assim $u_1(T(a)) > 0$ e $E_{u_1}(T(a)) < 0$. Logo, pelo Lema 1.15, $T(a_1) = \infty$. ■

Lema 3.10. *Suponha $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$ e $u'(T(a)) = 0$. Então para $a_1 > a$ com $a_1 - a$ suficientemente pequeno, tem-se $T(a_1) < \infty$ e $u'(T(a_1), a_1) < 0$.*

Demonstração: Analogamente ao lema anterior, tomemos $\overline{r}_1 \in (r_0, T(a))$ onde $u(\overline{r}_1) < 1, \phi(\overline{r}_1) < 0$ e $\phi'(\overline{r}_1) < 0$. Denotemos $u_1 = u(\overline{r}_1, a_1)$ e $u = u(\overline{r}_1, a)$. Então para $a_1 > a$, com $a_1 - a$ suficientemente pequeno,

$$1 > u(\overline{r}_1) > u_1(\overline{r}_1) > 0 \text{ e } 0 > u'(\overline{r}_1) > u_1'(\overline{r}_1),$$

de onde segue que

$$E_{u_1}(\overline{r}_1) > E_u(\overline{r}_1).$$

<u>Passo 1</u>: Seja $[0, T(a_1))$ um intervalo para o qual u_1 existe. Então $T(a_1) \leq T(a)$ e $u_1 < u$, para todo $r \in [\overline{r}_1, T(a_1))$.

É suficiente mostrarmos que $u_1 < u$ em $[\overline{r}_1, \min(T(a), T(a_1))]$. Suponha o contrário e defina $r_2 = \inf\{r \in [\overline{r}_1, \min(T(a_1), T(a)) \mid u_1(r) > u(r)\}$. Então $u(r_2) = u_1(r_2)$ e $u'(r_2) < u_1'(r_2) < 0$. Assim $u'(r_2)^2 > u_1'(r_2)^2$ e $F(u(r_2)) > F(u_1(r_2))$, o que implica $E_u(r_2) > E_{u_1}(r_2)$. Por outro lado, sendo $E_u(\overline{r}_1) < E_{u_1}(\overline{r}_1)$, fica bem definido

$$r_3 = \inf\{r \in (\overline{r}_1, r_2) \mid E_{u_1}(r) = E_u(r)\}.$$

Assim, $E_{u_1}(r_3) = E_u(r_3)$ e $E_{u_1}'(r_3) \leq E_u'(r_3)$. Neste caso $u_1'(r_3)^2 \geq u'(r_3)^2$. Por outro lado, como $u_1(r_3) < u(r_3) < 1$ e $u'(r_3))^2 > (u_1'(r_3))^2$ temos $E_{u_1}(r_3) > E_u(r_3)$, contradizendo a definição de r_3. Isto mostra que $u_1 < u$ em $[\overline{r}_1, \min(T(a), T(a_1))]$

<u>Passo 2</u>: $E_{u_1} > E_u$, em $[\overline{r}_1, T(a_1))$

Suponha o contrário e defina $r_4 = \inf\{r \in [\overline{r}_1, T(a_1)) \;/\; E_{u_1}(r) > E_u(r)\}$. Então $E_{u_1}(r_4) = E_u(r_4)$ e $E_{u_1}'(r_4) \leq E_u'(r_4)$. Neste caso, $u_1'(r_3)^2 \geq u'(r_4)^2$. Por outro lado, pelo Passo 1, $u_1(r_4) < u(r_4) < 1$ e, portanto, $F(u_1(r_4)) > F(u(r_4))$. Concluimos que $E_{u_1}(r_4) > E_u(r_4)$, contradizendo a definição de r_4.

<u>Passo 3</u>: $T(a_1) < T(a)$ **e** $u'(T(a_1)) < 0$.

Se $T(a_1) = R$, então $u_1(T(a_1)) = u_1'(T(a_1)) = 0$. Assim, pelo Lema 1.19, $u_1 = u$ em $[0, T(a_1)]$, o que é um absurdo. Logo $T_1 < R$ e, como consequência do Passo 2, $E_u(R) < E_{u_1}(T(a_1)) \geq 0$. Como $u(T_1) < u_1(\overline{r}_1) < 1$, então $F(u_1(T(a_1)) \leq 0$ de onde concluimos que $u_1'(T(a_1)) \neq 0$, como queríamos. ∎

De posse destes lemas, estamos aptos a demonstrar a a Proposição 3.7.

Demonstração da Proposição 3.7: Pelo Lema 1.15, considere

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \{a > 1 \;/\; T(a) = \infty\} \\
\mathbb{B} &= \{a > 1 \;/\; T(a) < \infty \text{ e } u'(T(a), a) < 0\} \\
\mathbb{C} &= \{a > 1 \;/\; T(a) < \infty \text{ e } u'(T(a), a) = 0\}.
\end{aligned}$$

onde $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ são disjuntos e $(1, \infty) = \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}$.

Lema 3.11. *$D(T) \neq \emptyset$. Isto é, existe $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$.*

Demonstração: Inicialmente, notemos que pelo Lema 1.15(b), uma condição necessária para $T(a) < \infty$ é $a \geq p_2$. Neste sentido, considere $a > \overline{a} > p_2 > 1$ e $u(\cdot, a)$ uma solução para DM_a e definamos $q(a) = u'(T_{\overline{a}}, a))$, onde $T_{\overline{a}} = T_{\overline{a},a}$ é o "tempo" que a solução $u(\cdot, a)$ partindo de $s = 0$ leva para atingir a reta $u = T_{\overline{a}}$, que existe pelo Teorema 1.14. Faremos duas afirmações cuja prova poderão ser encontradas no Apêndice C.

Afirmação 1.
$$u'(r, a) < 0, \ r \in (0, T_{\overline{a}}) \tag{3.12}$$
.

Afirmação 2. *Seja $u = u(\cdot, a)$ solução de DM_a. Então*

$$-q(a)T_{\overline{a},a} \geq -(N-2)(a - \overline{a}) + \frac{f(\overline{a})}{2\overline{a}} \int_{\overline{a}}^{a} {T_\xi}^2 d\xi, \tag{3.13}$$

para cada $\overline{a} > 1$.

Observemos agora que, como $f(s) = s^q - s^{-\beta}$, então

$$-(r^{N-1}u'(r))' = r^{N-1}f(u(r)) \leq r^{N-1}u^q(r) \leq r^{N-1}a^q.$$

Integrando de 0 a r,

$$-r^{N-1}u'(r) \leq \frac{a^q r^N}{N}, \quad \text{ou seja,} \quad -u'(r) \leq \frac{pr}{N}.$$

Integrando novamente de $r = 0$ a $r = T_\xi$, temos

$$-u(T_\xi) + u(0) \leq \frac{a^q {T_\xi}^2}{2N},$$

e, então,

$${T_\xi}^2 \geq \frac{2N(a - \xi)}{a^q}.$$

Substituindo em (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
-q(a)T_{\overline{a}} &\geq -(N-2)(a - \overline{a}) + \frac{f(\overline{a})}{2\overline{a}} \int_{\overline{a}}^{a} \frac{2N}{a^q}(a - \xi) d\xi \\
&= -(N-2)(a - \overline{a}) + \frac{f(\overline{a})}{2\overline{a}} \left[2N(a - \overline{a}) - \frac{2N}{a^q} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{\overline{a}^2}{2} \right) \right] \\
&= -(N-2)a + (N-2)\overline{a} + \frac{f(\overline{a})Na}{2\overline{a}} - f(\overline{a})N - \frac{f(\overline{a})N\overline{a}}{2a^q} - \frac{f(\overline{a})N}{2a^{q-2}\overline{a}} \\
&= \left[\frac{f(\overline{a})N}{2\overline{a}} - \frac{f(\overline{a})N}{2a^{q-1}\overline{a}} - (N-2) \right] a + (N-2)\overline{a} - f(\overline{a})N - \frac{f(\overline{a})N\overline{a}}{2a^q}
\end{aligned}$$

Como $f(s)/s \to \infty$, quando $s \to \infty$, então podemos tomar $\overline{a}$ suficientemente grande tal que

$$\frac{f(\overline{a})N}{2\overline{a}} - \frac{f(\overline{a})N}{2a^{q-1}\overline{a}} > (N-2).$$

Deste modo,

$$-q(a)T_{\overline{a}} \to \infty \text{ quando } a \to \infty.$$

Assim, pelo Teorema 1.14 existe $a > 1$ tal que $T(a) < \infty$. ■

Sabemos pelo Lema 1.15 que $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Além disso, pelo Lema 3.11 temos $\mathbb{B} \cup \mathbb{C} \neq \emptyset$.

Afirmação: $\mathbb{B} \neq \emptyset$ e $\mathbb{C} \neq \emptyset$.

Se $\mathbb{C} = \emptyset$, então como $\mathbb{B} \cup \mathbb{C} \neq \emptyset$ temos $\mathbb{B} \neq \emptyset$. Neste caso, note que:

- $\mathbb{A}$ é aberto

  Primeiramente, observe que $a \in \mathbb{A}$ se, e somente se, existe $r_1 \in (0, R)$ tal que $E_u(r_1) < 0$. De fato, o item b) do Lema 1.15 garante a condição suficiente, enquanto o item d) garante a condição necessária pois se $\lim_{r\to\infty} u(r) = 1$ e $\lim_{r\to\infty} u'(r) = 0$, então $E_u(r) \overset{r\to\infty}{\to} F(1) < 0$. Assim, dado $a_0 \in \mathbb{A}$, existe $r_{a_0} \in (0, R)$ tal que $E_u(r_{a_0}, a_0) < 0$. Da continuidade de E_u em a, temos $E_u(r_{a_0}, a) < 0$ numa vizinhança de a_0. Daí, $T(a) = \infty$ de onde segue que $\mathbb{A}$ é aberto.

- $\mathbb{B}$ é aberto.

  Dado $\hat{a} \in \mathbb{B}$, segue do Lema 1.18 que garante que a aplicação $T(a)$ é difenciável e finita numa vizinhança V de $\hat{a}$. Além disso, da continuidade de u' em relação a "a" segue que $u'(T(a), a) < 0$ numa vizinhança W de $\hat{a}$. Assim, a vizinhança $W \cap U \subset \mathbb{B}$ mostrando que o mesmo é aberto.

Assim, sendo $\mathbb{C} = \emptyset$, então $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ é uma cisão não trivial para o intervalo $(1, \infty)$, contradizendo a conexidade $(1, \infty)$. Logo $\mathbb{C} \neq \emptyset$ e pelo Lema 3.10, dado $a \in \mathbb{C}$ existe $\delta > 0$ tal que $(a, a + \delta) \subset \mathbb{B}$ mostrando que $\mathbb{B}$ é não-vazio.

Note que $\mathbb{C}$ é um conjunto unitário. De fato, suponha por absurdo que exista $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, com $a_1 < a_2$. Pelos Lemas 3.9 e 3.10, o intervalo $(a_1, a_2) \subset \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Novamente pelos Lemas 3.9 e 3.10, $(a_1, a_2) \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$ e $(a_1, a_2) \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$ o que contradiz a conexidade de (a_1, a_2), visto que $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ são disjuntos.

Concluímos que $\mathbb{C} = \{a_1\}$, $\mathbb{A} = (1, a_1)$ e $\mathbb{B} = (a_1, \infty)$, finalizando a prova. ■

Para finalizar a demonstração do Teorema DM, seja $\hat{a} \in \mathbb{B}$. A aplicação $a \mapsto T(a)$ é diferenciável, como visto no Lema 1.18, enquanto pelo Lema 1.13 a aplicação $u(\cdot,\cdot) \in C^2(0,T(a)) \times C^1(0,\infty)$. Derivando $u(T(a),a) = 0$ em relação a a,

$$\underbrace{u'(T(a),a)}_{<0} T'(a) + \underbrace{\phi(T(a))}_{<0} = 0,$$

segue que $T'(a) < 0$. Para finalizar, precisamos mostrar que

$$\lim_{a\to\infty} T(a) = 0.$$

Suponha, do contrário, que $\lim_{a\to\infty} T(a) > 0$ e seja

$$v_a(r) = \frac{1}{a} u\left(a^{\frac{1-q}{2}} r\right),$$

onde $|r| \leq T(a)a^{\frac{q-1}{2}} \to \infty$ quando $a \to \infty$.

Temos que v_a é radialmente simétrica, decrescente e uniformemente limitada pelo 1. Além disso, v_a satisfaz

$$-\Delta v_a = \underbrace{v_a^q - a^{-q-\beta} v_a^{-\beta}}_{h_a}, \; x \in B_{T(a)a^{\frac{q-1}{2}}}(0) \tag{3.14}$$

<u>**Afirmação:**</u> $v_a \overset{a\to\infty}{\to} v$ em $C^2(\mathbb{R}^N)$.

De fato, consideremos $\Omega' \in \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave $C^{2,\alpha}$, Ω_1, Ω_2 abertos com fronteiras suaves $C^{2,\alpha}$ e k_1 suficientemente grande tais que

$$\Omega' \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset B(0,k_1) \subset\subset B(0,a), \; a \geq k_1$$

No que segue, considere $p > N$ suficientemente grande tal que $\nu := 1 - N/p \in (0,1)$. Pelo Teorema da Regularidade em L^p, o Teorema (D.7), segue que

$$\begin{aligned} ||v_a||_{W^{2,p}(\Omega_1)} &\leq C_1\left(||h_a||_{L^p(\Omega_2)} + ||v_a||_{L^p(\Omega_2)}\right) \\ &\leq C_1(M|\Omega_2|^{\frac{1}{p}}) = M_2. \end{aligned}$$

onde $h_a = v_a^q - a^{-q-\beta} v_a^{-\beta}$.

Assim, pelo Teorema (D.9), temos que $W^{2,p}(\Omega_1) \hookrightarrow C^{0,\nu}(\overline{\Omega_1})$. Logo

$$||v_a||_{C^{0,\nu}(\overline{\Omega}_1)} \leq M_3.$$

Pelo Teorema (D.8),

$$||v_a||_{C^{2,\nu}(\overline{\Omega'})} \leq C_2\left(||h_a||_{C^{0,\nu}(\overline{\Omega}_1)} + ||v_a||_{C(\overline{\Omega}_1)}\right)$$

Note que

$$
\begin{aligned}
||h_a||_{C^{0,\nu}(\overline{\Omega}_1)} &= ||h_a||_{C(\overline{\Omega}_1)} + H_\nu[h_a] \\
&= \max_{x\in\overline{\Omega}_1} |h_a(x)| + \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\overline{\Omega}_1}} \frac{|h_a(x)-h_a(y)|}{|x-y|^\nu} \\
&= \max_{x\in\overline{\Omega}_1} |v_a^q(x) - a^{-q-\beta}v_a^{-\beta}(x)| + \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\overline{\Omega}_1}} \frac{1}{a^q}\frac{\left|f\left(u\left(a^{\frac{1-q}{2}}x\right)\right) - f\left(u\left(a^{\frac{1-q}{2}}y\right)\right)\right|}{|x-y|^\nu} \\
&\leq 1 + \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\overline{\Omega}_1}} \frac{1}{a^q}\frac{\left|f\left(u\left(a^{\frac{1-q}{2}}x\right)\right) - f\left(u\left(a^{\frac{1-q}{2}}y\right)\right)\right|}{|x-y|^\nu}.
\end{aligned}
$$

Mas, pelo Teorema (C.1), $(f\circ u) \in C^{0,\nu}(\overline{\Omega}_1)$. Logo

$$||h_a||_{C^{0,\nu}(\overline{\Omega}_1)} \leq M_4$$

e, consequentemente,

$$||v_a||_{C^{2,\nu}(\overline{\Omega'})} \leq M_5. \tag{3.15}$$

Pelo Teorema (D.10),

$$C^{2,\nu}(\overline{\Omega'}) \overset{cpta}{\hookrightarrow} C^2(\overline{\Omega'}).$$

Assim, existe uma subsequência $\left\{v_{a_j}\right\}_{j=1}^\infty \subset \{v_a\}_{a=k_1}^\infty$ tal que

$$v_{a_j} \longrightarrow v \in C^2(\overline{\Omega'}).$$

Além disso

$$
\begin{aligned}
||v_{a_j} - v||_{C^2(\overline{\Omega'})} &= \sum_{|\alpha|\leq 2} ||D^\alpha(v_{a_j}-v)||_\infty \\
&= \sum_{|\alpha|\leq 2} \max_{x\in\overline{\Omega'}} |D^\alpha(v_{a_j}-v)| \\
&\geq |\Delta(v_{a_j}-v)| \longrightarrow 0
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Para finalizar, tome $\Omega' = B(0,k_1) =: B_{k_1}$, $\Omega_1 = B(0,k_1+1)$, $\Omega_1 = B(0,k_1+2)$ e $a \geq k_1+3$. Assim, por (3.15)

$$||v_a||_{C^{2,\nu}(\overline{B_{k_1}})} \leq N_{k_1},\ a \geq k_1+3,$$

isto é, para cada $k_1 = 1,2,3,...$, encontramos $N_1, N_2, N_3, ...$ tais que

$$||v_a||_{C^{2,\nu}(\overline{B_1})} \leq N_1,\ a \geq 4$$

$$||v_a||_{C^{2,\nu}(\overline{B_2})} \leq N_2, \ a \geq 5$$
$$||v_a||_{C^{2,\nu}(\overline{B_3})} \leq N_3, \ a \geq 6$$
$$\vdots$$

Defina, para cada inteiro $k_1 = 1 \geq 1$,

$$v_i^a := v_a|_{B_i}, \ a \geq i+3.$$

Assim, para cada $i = 1, 2, ...$, existem subsequências de $\{v_i^a\}_{a=1+3}^{\infty}$ e $v_i \in C^2(\overline{B_i})$, tais que

$$v_i^{a_{ij}} \longrightarrow v_i \in C^2(\overline{B_i}).$$

Defina $v : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

$$v(x)|_{B_i} = v_i(x), \text{ para cada i} = 1, 2, ...$$

Segue da posividade de cada v_i que $v > 0$, e da regularidade de cada v_i que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Além disso, a sequência

$$w_n = v_n^{a_{nn}}, \ n = 1, 2, 3...$$

é tal que

$$w_n \overset{C^2(\overline{B_i})}{\longrightarrow} v, \text{ para cada } i \geq 1.$$

pois, para cada $i \geq 1$ e para cada $n \geq 1$, temos

$$w_n|_{B_i} = v_n^{a_{nn}}|_{B_i}.$$

Por sua vez, a sequência $\{v_n^{a_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$ restrita a B_i é uma subsequência da sequência $\{v_i^{a_{in}}\}_{n=1}^{\infty}$ e

$$v_i^{a_{in}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_i = v, \forall x \in B_i.$$

Assim, por (3.16)

$$-\Delta w_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\Delta v, \text{ em } B_i.$$

Por outro lado, por (3.14) segue que

$$\Delta w_n(x) \longrightarrow v^q(x), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, tomando $i \to \infty$, temos

$$-\Delta v = v^q, \text{ em } \mathbb{R}^N$$

como afirmado.

Assim, pelo Teorema de Gidas e Spruck [29], $v \equiv 0$, provando a afirmação.

Por outro lado, notemos que, por (3.14)

$$r^{N-1}v_a'(r) = a^{-q-\beta}\int_0^r s^{N-1}v_a^{-\beta}ds - \int_0^r s^{N-1}v_a^q ds \geq -\int_0^r s^{N-1}v_a^q ds \geq -r^N,$$

de onde concluímos, integrando de 0 a r, que $v_r(r) \geq 1 - \frac{1}{2}r^2$, para $r \geq 0$. Logo, para $0 \leq r \leq 1$, temos $\frac{1}{2} \leq \lim_{a\to\infty} v_a(r) \leq v(r)$, o que é um absurdo visto que $v \equiv 0$.

Logo,

$$\lim_{a\to\infty} T(a) = 0$$

Por fim, suponha que existam u_1, u_2 soluções para DM_a, então $T(u_1(0)) = T(u_2(0))$. Como $\lim_{a\to\infty} T(a) = 0$ segue que $u_1(0) = u_2(0)$. Além disso, como $u_1'(0) = u_2'(0)$, então pelo Teorema de Existência e Unicidade teríamos $u_1 \equiv u_2$ provando a unicidade de solução.

APÊNDICE A

APÊNDICE A

Neste apêndice apresentaremos as demonstrações que foram omitidas no decorrer desta dissertação. Os Capítulos aqui presentes, assim como suas respectivas seções, seguirão a mesma ordem apresentadas em seus capítulos de origem.

A.1 Sobre o primeiro autovalor em X_R

Demonstração que $T(a) = \infty$:

Se $T(a) < \infty$, considere $u := u(\cdot, a) : [0, T(a)) \to \mathbb{R}$ a solução de (1.10). Assim, u pode ser escrita por

$$u(r) = a - \int_0^r \left| s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}|u|^{p-2}udt \right|^{\frac{2-p}{p-1}} \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}|u|^{p-2}udt \right) ds.$$

De onde obtemos

$$u'(r) = -r^{\frac{1-N}{p-1}} \left| \int_0^r t^{N-1}|u|^{p-2}udt \right|^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\int_0^r t^{N-1}|u|^{p-2}udt \right), \ r \in (0, T(a)). \tag{A.1}$$

O mesmo argumento utilizado na parte final do Lema 1.9 nos garante que $u \in C^1([0, T(a)) \cap C^2(\mathbb{A}_{T(a)})$. Definindo

$$E(r) = \frac{p-1}{p}|u'(r)|^p + \frac{1}{p}|u(r)|^p,\ r \in (0, T(a)),$$

observamos que $\lim_{r\to 0} E(r) = (1/p)a^p := E(0)$, pela continuidade de u na origem. Deste modo, $E \in C([0, T(a)))$. Além disso, por um cálculo direto,

$$E' = (p-1)|u'|^{p-2}u'u'' + |u|^{p-2}uu',\ r \in \mathbb{A}_{T(a)}. \tag{A.2}$$

Por outro lado, desenvolvendo (1.10) com $\lambda = 1$

$$(p-1)r^{N-1}|u'|^{p-2}u'' + (N-1)r^{N-2}|u'|^{p-2}u' = -r^{N-1}|u|^{p-2}u,\ r \in \mathbb{A}_{T(a)}.$$

Dividindo a expressão por r^{N-1} e multiplicando por u', obtemos

$$(p-1)|u'|^{p-2}u'u'' + (N-1)r^{-1}|u'|^p = -|u|^{p-2}uu',\ r \in \mathbb{A}_{T(a)}. \tag{A.3}$$

Substituindo (A.3) em (A.2), obtemos

$$E'(r) = -(N-1)r^{-1}|u'|^p \leq 0,\ r \in \mathbb{A}_{T(a)}.$$

Um argumento análogo ao utilizado na demonstração do Lema 2.3 nos mostra que E é não-crescente em $(0, T(a))$. Como consequência

$$0 \leq E(r) \leq E(0),\ r \in (0, T(a)),$$

o que implica, pela definição de E, que u é limitada em $[0, T(a))$. Além disso, como $u \in C^1([0, T(a))$, segue que u' também é limitada em $[0, T(a))$.

Deste modo, existe $\lim_{r\to T(a)} u(r)$ pois, do contrário, existiriam sequências $r_n, s_n \to T(a)$ tal que $u(r_n) \to b_1$ e $u(s_n) \to b_2$ com $b_1 \neq b_2$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta_n \in (0, T(a))$ tal que

$$0 \neq |b_1 - b_2| = \lim_{n\to\infty} |u(r_n) - u(s_n)| = \lim_{n\to\infty} |u'(\theta_n)||r_n - s_n| = \infty,$$

o que é um absurdo, visto que u' é limitado em $[0, T(a))$. Portanto $u(r) \overset{r\to T(a)}{\longrightarrow} \tilde{a}$ e, por (A.1), $u'(r) \overset{r\to T(a)}{\longrightarrow} \upsilon$, para algum $\tilde{a}, \upsilon \in \mathbb{R}$.

Considere o problema de valor incial,

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}|u|^{p-2}u, \text{ em } r > T(a) \\ u(T(a)) = \tilde{a},\ u'(T(a)) = \upsilon, \end{cases} \tag{A.4}$$

e observemos que resolver (A.4) é equivalente a encontrar um ponto fixo para o operador

$$\Psi u(r) = \tilde{a} - \int_{T(a)}^{r} |\Gamma_u(s)|^{\frac{2-p}{p-1}} \Gamma_u(s) ds, \ r > T(a)$$

onde

$$\Gamma_u(s) = s^{1-N} \left(-T(a)^{N-1} |\upsilon|^{p-2} \upsilon + \int_{T(a)}^{s} t^{N-1} |u|^{p-2} u dt \right), \ s > T(a)$$

Para finalizar esta demonstração, consideremos dois casos, a saber:

Caso 1: $\tilde{a} = 0$ e $1 < p < 2$.

Considerando $\lambda = 1$ em (1.10) e integrando de R_i a T_{i+1}, $i = 1, 2, \cdots$, onde $R_0 = 0$ e T_i, R_i, se existirem, são tais que $u(T_i) = 0$ e $u'(R_i) = 0$ com $R_i \in (T_i, T_{i+1})$, obtemos

$$-T_i^{N-1} |u'(T_i)|^{p-2} u'(T_i) + \underbrace{R_i^{N-1} |u'(R_i)|^{p-2} u'(R_i)}_{=\ 0} = \underbrace{\int_{R_i}^{T_i} r^{N-1} |u|^{p-2} u \, dr}_{\neq\ 0}$$

de onde concluímos que $\upsilon \neq 0$.

Como $u \in C^1[0, T(a)]$, existe $\delta > 0$ tal que $u'(r) \neq 0$ para todo $r \in (T(a) - \delta, T(a))$. Neste caso, repetindo os argumentos utilizados acima ao substituir $\mathbb{A}_{T(a)}$ por $(T(a) - \delta, T(a))$, concluímos que $u \in C^2((T(a) - \delta, T(a)])$ e, ao derivar (A.1),

$$\begin{aligned} u''(r) &= -\frac{1-N}{p-1} r^{\frac{1-N}{p-1}-1} \left(\int_0^r t^{N-1} |u|^{p-2} u dt \right)^{\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p-1} r^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^r t^{N-1} |u|^{p-2} u dt \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \\ &= -\frac{1-N}{(p-1)r} u'(r) - \frac{1}{p-1} |u'(r)|^{2-p} u(r) := H(r, u, u'), \ r \in (T(a) - \delta, T(a)], \end{aligned}$$

onde

$$H(r, x, y) = -\frac{1-N}{(p-1)} \frac{y}{r} - \frac{1}{p-1} |y|^{2-p} x$$

é contínua numa vizinhança de $(T(a), 0, \upsilon)$.

Reduzindo a equação acima a um sistema de duas equações de primeira ordem e em seguida aplicando o Teorema de Peano [51] estendemos a solução $u(\cdot, a)$ de (1.10) a um intervalo $[T(a), T(a) + \delta)$.

Tal extensão é única. De fato, sejam u_1, u_2 extensões de u. Então $u_i'(r) \neq 0$, $i = 1, 2$, para todo $r \in [T(a), T(a) + \epsilon_1]$, para algum $\epsilon_1 > 0$. Segue, por (A.3), que

$$\left(\frac{p-1}{p} |u_i'|^{p-2} + \frac{1}{p} |u_1|^{p-2} \right)' = -\frac{N-1}{r} |u_i'|^{p-2}, \ i = 1, 2.$$

Integrando de $T(a)$ a r, obtemos

$$\frac{p-1}{p}|u_i'(r)|^{p-2} + \frac{1}{p}|u_1(r)|^{p-2} - \frac{p-1}{p}|v|^{p-2} = -(N-1)\int_{T(a)}^{r} s^{-1}|u_i'|^{p-2}ds,$$

Fazendo $i = 1, 2$ e substraindo

$$\frac{p-1}{p}\left(|u_1'|^{p-2} - |u_2'|^{p-2}\right) + \frac{1}{p}\left(|u_1|^{p-2} - |u_2|^{p-2}\right) = -(N-1)\int_{T(a)}^{r} s^{-1}\left(|u_1'|^{p-2} - |u_2'|^{p-2}\right)ds. \tag{A.5}$$

Considere as funções $v(r) = u_1(r) - u_2(r)$ e A, B definidas por

$$A(r) = \begin{cases} \dfrac{|u_1'|^{p-2} - |u_2'|^{p-2}}{u_1'(r) - u_2'(r)}, \text{ se } u_1'(r) \neq u_2'(r) \\ p|u_1'(r)|^{p-2}u_1'(r), \text{ se } u_1'(r) = u_2'(r), \end{cases}$$

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\dfrac{|u_1|^{p-2} - |u_2|^{p-2}}{u_1(r) - u_2(r)}, \text{ se } u_1(r) \neq u_2(r) \\ f(u_1(r)), \text{ se } u_1(r) = u_2(r), \end{cases}$$

Assim, podemos reescrever (A.5) por

$$\frac{p-1}{p}A(r)v'(r) + B(r)v(r) = -(N-1)\int_{T(a)}^{r} s^{-1}A(s)v'(s)ds. \tag{A.6}$$

Afirmamos que existe $\epsilon_2 > 0$, com $\epsilon_2 < \epsilon_1$ tal que

i) $A \in C^1([T(a), T(a) + \epsilon_2))$,

ii) $B \in C([T(a), T(a) + \epsilon_2))$.

De fato, para (i) é suficiente analizarmos os casos:

- Se $r < T(a)$, então, por definição, A é contínua, pois para $r < T(a)$ temos $u_1'(r) = u_2'(r)$.
- Se $r > T(a)$, então temos duas possibilidades:
    1. Se $u_1'(r) \neq u_2'(r)$, então existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) \neq u_2'(s)$, para todo $s \in (r - \delta_r, r + \delta_r)$. Novamente, pela definição, A é contínua.
    2. Se $u_1'(r) = u_2'(r)$, então
        2.1) Se existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) = u_2'(s)$, para todo $s \in (r - \delta_r, r + \delta_r)$. Novamente, pela definição, A é contínua em r.

2.2) Se existe $r_n \to r$ tal que $u_1'(r_n) = u_2'(r_n)$ temos que

$$A(r_n) = p|\theta(r_n)|^{p-2}\theta(r_n),$$

onde $\min\{u_1'(r_n), u_2'(r_n)\} \leq \theta(r_n) \leq \max\{u_1'(r_n), u_2'(r_n)\}$.
Fazendo $n \to \infty$ segue que $\theta(r_n) \to u_1'(r)$ e, por tanto

$$A(r_n) = p|\theta(r_n)|^{p-2}\theta(r_n) \to p|u_1'(r)|^{p-2}u_1'(r) = A(r),$$

mostrando que A é contínha em r.

Além disso $\theta(r_n) \to u_1'(T(a))$ quando $r_n \to T(a)$. Assim, $A(r_n) \to A(T(a)$. Logo $A \in C([T(a), T(a)+\delta))$, para algum $\delta > 0$. De forma análoga se mostra (ii), isto é, $B \in C([T(a), T(a)+\delta))$, para algum $\delta > 0$.

Para mostrar que A é continuamente derivável, considere o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em Santos [52].

Lema A.1. *Sejam $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, f e g funções diferenciáveis em (b,c) com $f(a) = g(a)$ e $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in (b,c)\setminus\{a\}$, para algum $a \in (b,c)$. Então a função $h : (b,c) \to \mathbb{R}$, dada por*

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|^{p-2} - |g(x)|^{p-2}}{f(x) - g(x)}, & se\ x \neq a \\ p|f(x)|^{p-2}f(x), & se\ x = a), \end{cases}$$

é continuamente diferenciável em (b,c) com

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(p-1)|f(x)|^{p-2} - |g(x)|^{p-2} - p|f(x)|^{p-2}f(x)g(x)}{(f(x)-g(x))^2} f'(x) \\ &+ \frac{(p-1)|g(x)|^{p-2} - |f(x)|^{p-2} - p|g(x)|^{p-2}g(x)f(x)}{(f(x)-g(x))^2} g'(x) \end{aligned}$$

se $x \neq a$ e

$$h'(a) = \frac{p(p-1)}{2}|f(a)|^{p-2}\left(f'(a) + g'(a)\right).$$

De posse deste Lema, seja $\delta > 0$ tal que $u_1'(s), u_2'(s) \neq 0$, para todo $s \in (T(a) - \delta, T(a)+\delta)$. Se $r \in (T(a)-\delta, T(a))$, então, por definição, A é continuamente diferenciável em r com $A'(r) = p(p-1)|u_1'(r)|^{p-2}u_1'(r)$.

Supondo $r \in (T(a), T(a)+\delta)$. Neste caso, podemos ter

1) Se $u_1'(r) \neq u_2'(r)$, então existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) \neq u_2'(s)$, para todo $s \in (r-\delta_r, r+\delta_r)$. Assim $r \in C^2(r-\delta_r, r+\delta_r)$ e, novamente pela definição, A é continuamente diferenciável em r.

2) Se $u_1'(r) = u_2'(r)$, é suficiente analizarmos os subcasos

   2.1) Existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) = u_2'(s)$, para todo $s \in (r-\delta_r, r+\delta_r)$. Então $A(s) = p|u_1'(s)|^{p-2}u_1'(s)$ é continuamente diferenciável.

   2.2) Existem sequências

$$r_n \to r,\ r_n \neq r \text{ tal que } u_1'(r_n) \neq u_2'(r_n)$$

$$t_n \to t,\ t_n \neq t \text{ tal que } u_1'(t_n) = u_2'(t_n).$$

Neste caso, $A(r_n) = p|\theta(r_n)|^{p-2}\theta(r_n)$, onde

$$\min\{u_1'(r_n), u_2'(r_n)\} \leq \theta(r_n) \leq \max\{u_1'(r_n), u_2'(r_n)\}$$

Logo,

$$A'(r) = \lim_n \frac{A(r_n) - A(r)}{r_n - r} = \lim_n \frac{p|\theta(r_n)|^{p-2}\theta(r_n) - p|u_1'(r)|^{p-2}u_1'(r)}{r_n - r} = pg'(r)$$

onde $g(s) = |\theta(s)|^{p-2}\theta(s)$. Além disso, θ é diferenciável em r, pois, se $s_n \to r$, então

$$\frac{u_1'(s_n) - u_1'(r)}{s_n - r} \leq \frac{\theta(s_n) - \theta(r)}{s_n - r} \leq \frac{u_2'(s_n) - u_2'(r)}{s_n - r},$$

ou

$$\frac{u_2'(s_n) - u_2'(r)}{s_n - r} \leq \frac{\theta(s_n) - \theta(r)}{s_n - r} \leq \frac{u_1'(s_n) - u_1'(r)}{s_n - r}.$$

Como,

$$u_1''(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1'(t_n) - u_1'(r)}{t_n - r} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_2'(t_n) - u_2'(r)}{t_n - r} = u_2''(r),$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(s_n) - \theta(r)}{s_n - r} = u_1''(r) = u_2''(r).$$

Logo, $g'(r) = (p-1)|u_1'(r)|^{p-2}u_1''(r)$ e, portanto

$$A'(r) = p(p-1)|u_1'(r)|^{p-2}u_1''(r),$$

o que mostra que A é continuamente diferenciável numa vizinhança de r.

2.3) Se não existe $t_n \to t,\ t_n \neq t$ tal que $u_1'(t_n) = u_2'(t_n)$. Logo, existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) \neq u_2'(s)$, para todo $s \in (r-\delta_r, r) \cap (r, r+\delta_r)$. Assim

$$A(r) = \begin{cases} \dfrac{|u_1'|^{p-2} - |u_2'|^{p-2}}{u_1'(r) - u_2'(r)}, & \text{se } s \in (r-\delta_r, r) \cap (r, r+\delta_r) \\ p|u_1'(r)|^{p-2}u_1'(r), & \text{se } s = r, \end{cases}$$

Logo, pelo Lema A.1, A é continuamente derivárvel em r.

Analogamente, mostra-se que A é difenrenciável em $T(a)$. Portanto, A é continuamente derivável em uma vizinhança de $T(a)$, mostrando nossa afirmação.

Como $A(T(a)) = p|v|^{p-2}v \neq 0$, segue de (i) que $1/A$ é contínua e limitada numa vizinhança de $T(a)$.

Multiplicando (A.6) por $p/[(p-1)A(r)]$, obtemos

$$v'(r) + \frac{p}{p-1}\frac{B(r)}{A(r)}v(r) = -\frac{p(N-1)}{(p-1)A(r)}\int_{T(a)}^{r} s^{-1}A(s)v'(s)ds,$$

Integrando o segundo membro,

$$\begin{aligned} v'(r) + \frac{p}{p-1}\frac{B(r)}{A(r)}v(r) &= -\frac{p(N-1)}{(p-1)A(r)}\left(s^{-1}A(s)v(s)\Big|_{T(a)}^{r} - \int_{T(a)}^{r}(s^{-1}A(s))'v(s)ds \right) \\ &= -\frac{p(N-1)v(r)}{(p-1)r} + \frac{p(N-1)}{(p-1)}\int_{T(a)}^{r}(s^{-1}A(s))'v(s)ds, \end{aligned}$$

isto é

$$v'(r) = C(r)v(r) + D(r)\int_{T(a)}^{r} F(s)v(s)ds,$$

onde C, D e F são contínuas e limitadas em uma vizinhança de $T(a)$.

Integrando de $T(a)$ a r

$$|v(r)| \leq ||C||_\infty \int_{T(a)}^{r} |v(s)|ds + \int_{T(a)}^{r} |D(s)| \int_{T(a)}^{s} |F(t)v(t)|dtds \leq C_1 \int_{T(a)}^{r} |v(s)|ds.,$$

onde C_1 é uma constante positiva.

Pelo Lema de Gronwall [51], segue que $v = 0$ em uma vizinhança de $T(a)$. Logo existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $u_1(r) = u_2(r)$, para todo $r \in [T(a), T(a) + \epsilon)$. Isto mostra que $u(\cdot, a)$ é unicamente extendida a um intervalo $[0, T(a) + \epsilon)$ o que contraria a definição de $T(a)$. Logo, neste caso, $T(a) = \infty$.

Caso 2: $\tilde{a} \neq 0$ ou $p \geq 2$.

Neste caso, consideremos, $\delta,\ m,\ M \in \mathbb{R}$ positivos tais que $m < \tilde{a} < M$. Definindo

$$X_{\tilde{a},\delta} = \{u \in C([T(a), T(a) + \delta]) \mid u(T(a)) = \tilde{a},\ m \leq u(r) \leq M,\ r \in [T(a), T(a) + \delta]\}$$

que munido com a norma $||\cdot||_\infty$ é um espaço de Banach.

Mostraremos que o operador Ψ admite um ponto fixo em $X_{\tilde{a},\delta}$. Note que isso é um absurdo, pois contraria a definição de $T(a)$. Logo, também neste caso, $T(a) = \infty$ e nossa prova está completa.

De fato, note que

- $\Psi(X_{\tilde{a},\delta}) \subset X_{\tilde{a},\delta}$

  Dado $u \in X_{\tilde{a},\delta}$, temos $m \leq u \leq M$, para $r \in [T(a), T(a) + \delta)$. Assim

$$\left| \int_{T(a)}^{r} |\Gamma_u(s)|^{\frac{2-p}{p-1}} \Gamma_u(s) ds \right| \leq \int_{T(a)}^{r} |\Gamma_u(s)|^{\frac{1}{p-1}} ds$$
$$\leq \int_{T(a)}^{r} s^{\frac{1-N}{p-1}} \left| T(a)^{N-1} |v|^{p-1} + \int_{T(a)}^{s} t^{N-1} |u|^{p-1} dt \right|^{\frac{1}{p-1}} ds$$
$$\leq \int_{T(a)}^{r} s^{\frac{1-N}{p-1}} \left| T(a)^{N-1} |v|^{p-1} + \frac{M^{p-1}}{N} \left(r^N - T(a)^N\right) \right|^{\frac{1}{p-1}} ds$$
$$\leq T(a)^{\frac{1-N}{p-1}} \left| T(a)^{N-1} |v|^{p-1} + \frac{M^{p-1}}{N} \left(r^N - T(a)^N\right) \right|^{\frac{1}{p-1}} \delta \xrightarrow{\delta \to 0} 0,$$

  isto é, podemos tomar δ suficientemente pequeno, tal que $\Psi u \in X_{\tilde{a},\delta}$, como afirmado.

- $|\Psi u_1(r) - \Psi u_2(r)| \leq k||u_1 - u_2||_\infty$, onde $k \in (0, 1)$

  Sejam $u_i \in X_{\tilde{a},\delta},\ i = 1, 2$. Assim

$$\begin{aligned} |\Psi u_1(r) - \Psi u_2(r)| &\leq \int_{T(a)}^{r} \left[|\Gamma_{u_1}(s)|^{\frac{1}{p-1}} - |\Gamma_{u_2}(s)|^{\frac{1}{p-1}} \right] ds \\ &\leq C_p \int_{T(a)}^{r} \left[|\Gamma_{u_1}(s)|^{\frac{2-p}{p-1}} + |\Gamma_{u_2}(s)|^{\frac{2-p}{p-1}} \right] |\Gamma_{u_1}(s) - \Gamma_{u_2}(s)| ds \end{aligned}$$

  onde, para a última desigualdade usamos o Lema D.16.

Como estamos supondo $p \geq 2$ ou $\tilde{a}$, segue novamente do Lema D.16 que

$$\begin{aligned} |\Gamma_{u_1}(s) - \Gamma_{u_2}(s)| &\leq S^{1-N} \int_{T(a)}^{r} t^{N-1} \, ||u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2| \, dt \\ &\leq C_1 ||u_1 - u_2||_\infty s^{1-N}(s^N - T(a)^N) \end{aligned}$$

Para finalizar, precisamos de uma estimativa para $|\Gamma_{u_1}(s)|^{\frac{2-p}{p-1}} + |\Gamma_{u_2}(s)|^{\frac{2-p}{p-1}}$. Neste sentido

$i)$ Se $1 < p < 2$, então pela definição de $\Gamma_{u_i},\ i = 1, 2$, para $T(a) \leq s \leq T(a) + \delta$

$$\begin{aligned} |\Gamma_{u_i}(s)|^{\frac{2-p}{p-1}}| &\leq s^{1-N} \left[T(a)^{N-1} |\upsilon|^{p-1} + \frac{M^{p-1}}{N} \left(s^N - T(a)^N \right) \right] \\ &\leq \left(T^{-1} |\upsilon|^{p-1} + \tfrac{M^{p-1}}{N} \right) s. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} |\Psi u_1(r) - \Psi u_2(r)| &\leq C_p \int_{T(a)}^{r} \left[|\Gamma_{u_1}(s)|^{\frac{2-p}{p-1}} + |\Gamma_{u_2}(s)|^{\frac{2-p}{p-1}} \right] |\Gamma_{u_1}(s) - \Gamma_{u_2}(s)| \\ &\leq C_p \int_{T(a)}^{r} (C_2 s^{\frac{2-p}{p-1}}) C_1 ||u_1 - u_2||_\infty s^{1-N}(s^N - T(a)^N) \\ &\leq C_3 ||u_1 - u_2||_\infty \left(\int_{T(a)}^{r} s^{\frac{2-p}{p-1}+1} ds \right) \\ &\leq \underbrace{C_4 \left[(T(a)+\delta)^{\frac{p}{p-1}} - T(a)^{\frac{p}{p-1}} \right]}_{=\,k} ||u_1 - u_2||_\infty. \end{aligned}$$

$ii)$ Se $p \geq 2$ e $\upsilon \neq 0$, então

$$|\Gamma_{u_i}(s)| \geq s^{1-N} \left[T(a)^{N-1} |\upsilon|^{p-2} - \left| \int_{T(a)}^{r} t^{N-1} |u_i|^{p-2} u_i dt \right| \right].$$

Mas,

$$\left| \int_{T(a)}^{r} t^{N-1} |u_i|^{p-2} u_i dt \right| \leq \frac{M^{p-1}}{N} ((T(a)+\delta)^N - T(a)^N) \xrightarrow{\delta \to 0},$$

isto é, podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$|\Gamma_{u_i}(s)| \geq \frac{T(a)^{N-1}}{2} |\upsilon|^{p-1} s^{1-N} \geq \frac{T(a)^{N-1}}{2(T(a)+\delta)^N} |\upsilon|^{p-1} s,\ T(a) \leq s \leq T(a) + \delta.$$

Por outro lado, se $v = 0$, então

$$|\Gamma_{u_i}(s)| \geq m^{p-1} s^{1-N}(s^N - T^N).$$

Em ambos os casos,

$$|\Psi u_1(r) - \Psi u_2(r)| \leq \underbrace{C_5 \left[(T(a)+\delta)^{\frac{p}{p-1}} - T(a)^{\frac{p}{p-1}} \right]}_{=\,k} ||u_1 - u_2|_\infty$$

Assim, Pelo Teorema do Ponto fixo de Banach, segue a afirmação e o fim da demonstração.

A.2 Sobre o problema de valor inicial (NN_a)

X_ϵ **é um espaço de Banach**:

(i) $X_\epsilon \subset C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon])$.

Da definição da norma em (1.18), segue que $C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon])$ é espaço de Banach.

(ii) X_ϵ é fechado.

Seja $\{(u_n, v_n)\} \in X_\epsilon$ uma seqüência convergente. Então, dado $\delta > 0,$ existe $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $\|(u_n, v_n) - (u_0, v_0)\| < \delta$. Vamos mostrar que $(u_0, v_0) \in X_\epsilon$.

Por hipótese,

$$\max\{\max_{0\leq t\leq\epsilon} |u_n(t) - u_0(t)|, \max_{0\leq t\leq\epsilon} |v_n(t) - v_0(t)|\} < \delta,$$

ou seja,

$$\max_{0\leq t\leq\epsilon} |u_n(t) - u_0(t)| < \delta \quad \text{e} \quad \max_{0\leq t\leq\epsilon} |v_n(t) - v_0(t)| < \delta.$$

Segue que

$$|u_n(t) - u_0(t)| < \delta \quad \text{e} \quad |v_n(t) - v_0(t)| < \delta, \quad \forall\ t \in [0,\epsilon],$$

e, então, $u_n(t) \longrightarrow u_0(t)$ e $v_n(t) \longrightarrow v_0(t)$ uniformemente para $t \in [0,\epsilon]$.

Logo, $(u_0, v_0) \in C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon])$, por ser limite uniforme de funções contínuas.

Como $(u_n, v_n) \in X_\epsilon,\ v_n(0) = 0,$ para todo n. Daí, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(0) = 0 = v_0(0)$.

Portanto, X_ϵ é um espaço de Banach.

$C_{q,\epsilon}$ é um espaço de Banach.

(i) $C_{q,\epsilon} \subset X_\epsilon$ e X_ϵ é um espaço de Banach.

(ii) $C_{q,\epsilon}$ é fechado.

Se $(u_n, v_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u_0, v_0)$, já vimos que $(u_0, v_0) \in X_\epsilon$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0,$ para todo $t \in [0, \epsilon],$ $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - a) = u_0 - a,$ para todo t.

Como $\max\limits_{0\leq t\leq\epsilon} |u_n(t) - a| \leq B,$ para todo $n,$ $\max\limits_{0\leq t\leq\epsilon} |u_0(t) - a| \leq B.$

Da mesma forma, $\max\limits_{0\leq t\leq\epsilon} |v_0(t)| \leq B$, o que implica que $(u_0, v_0) \in C_{q,\epsilon}$.

APÊNDICE B

APÊNDICE B

Lema B.1. *Suponha $N \geq 2$ e $p > 1$. Então uma função $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ com $u(x) = v(|x|)$, com $v : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $v \in C^2(0, R) \cap C([0, R])$ é uma solução (radialmente simétrica) de (GS) se, e somente se, v for uma solução de (GS_{rad}).*

Demonstração: Dado $x \in \mathbb{R}^N$ e observando que $u(x) = v(|x|)$, onde $|x| = r$, então

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{dv}{dr}\frac{x_i}{r} := v'(r)\frac{x_i}{r}, i = 1, 2, \ldots, n,$$

ou seja

$$|\nabla u|^{p-2}\nabla u = |v'|^{p-2}v'\frac{x}{r}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|v'|^{p-2}v'\frac{x}{r}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dr}(|v'|^{p-2}v')\frac{x_i^2}{r} + \sum_{i=1}^{N} |v'|^{p-2}v' \left[\frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2}\right] \\ &= (|v'|^{p-2}v')' + \frac{N-1}{r}(|v'|^{p-2}v'). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(r^{N-1}|v'|^{p-2}v')' &= r^{N-1}(|v'|^{p-2}v')' + (N-1)r^{n-2}|v'|^{p-2}v' \\
&= r^{N-1}(|v'|^{p-2}v')' + \frac{N-1}{r}r^{N-1}|v'|^{p-2}v'.
\end{aligned}
$$

Daí

$$
div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = r^{1-N}(r^{N-1}|v'|^{p-2}v')',
$$

ou seja, u é radialmente simétrica e satisfaz (GS) se somente se v satisfaz (GS_{rad}). Por fim, como $u(x) = v(|x|)$, então

$$
v'(r)\frac{x_i}{r} = -v'(r)\frac{x_i}{r}, i = 1, \dots, n.
$$

Donde segue que $v'(0) = 0$, finalizando nossa prova. ■

B.1 Sobre o funcional I

Verificação de (2.3):

Queremos mostrar que, caso exista, a derivada de Gâteaux de I é dada por

$$
\langle I'(u), v\rangle = p\int_0^R r^{N-1}|u'|^{p-2}u'v'dr - p\int_0^R r^{N-1}|u|^{p-2}uvdr + \int_0^R r^{N-1}ug(u).
$$

Para tanto, considere $u, v \in X_R$ e as funções

$$
J(u) = \int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr
$$

$$
K(u) = \int_0^R r^{N-1}|u|^p dr
$$

$$
H(u) = \int_0^R r^{N-1}G(u)dr.
$$

Assim, pela definição da derivada de Gâteaux (D.12)

$$
\langle J'(u), v\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^R r^{N-1}\left(|u' + tv'|^p - |u'|^p\right)dr
$$

caso o límite acima exista. Se definirmos $L(s) = |s|^p$ então, pelo Teorema do Valor Médio

$$|u' + tv'|^p - |u'| = L'(\theta_t)|tv'|.$$

onde $\min\{u' + tv', u'\} \leq \theta_t(r) \leq \max\{u' + tv', u'\}, \ r \in (0, R)$

Além disso, temos

a) $L'(s) = p|s|^{p-2}s, \ s \to 0$

b) $\theta_t(r) \overset{t\to 0}{\to} u'(r), \ r \in (0, R).$

c) $r^{N-1}(|u' + tv'|^p - |u'|^p)$ é uma função integrável em $(0, R)$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\int_0^R \frac{r^{N-1}\left(|u' + tv'|^p - |u'|\right)}{t}dr &= \lim_{t\to 0}\int_0^R \frac{r^{N-1}L'(\theta_t)tv'}{t}dr \\ &= p\lim_{t\to 0}\int_0^R r^{N-1}|\theta_t|^{p-2}\theta_t v' dr = \int_0^R r^{N-1}|u'|^{p-2}u'v'dr\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que

$$\langle K'(u), v\rangle = p\int_0^R r^{N-1}|u'|^{p-2}uvdr.$$

Para finalizar, temos, pelo Teorema do Valor Médio que

$$\frac{H(u + tv) - H(u)}{t} = \int_0^R r^{N-1}\frac{(G(u + tv) - G(u))}{t}dr = \int_0^R r^{N-1}\frac{G'(\theta_t)tv}{t}dr,$$

onde $\min\{u + tv, u\} \leq \theta_t(r) \leq \max\{u + tv, u\}$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada e a continuidade de g,

$$\lim_{t\to 0}\int_0^R r^{N-1}\frac{G'(\theta_t)tv}{t}dr = \lim_{t\to 0}\int_0^R r^{N-1}g(\theta_t)vdr = \int_0^R r^{N-1}g(u(r))vdr$$

como queríamos.

Assim, fazendo $v = u$, temos

$$\langle I'(u), u\rangle = \int_0^R r^{N-1}|u'|^p dr - \int_0^R r^{N-1}|u|^p dr + p\int_0^R r^{N-1}ug(u)dr.$$

finalizando nossa prova.

APÊNDICE C

APÊNDICE C

C.1 Conclusão da demonstração do Teorema DM_R

Verificação da Afirmação (1): Desde que $u(0,a) = a > 1$ e $u'(0,a) = 0$ temos

$$
\begin{aligned}
u''(0,a) &= (u')'(0,a) = \lim_{r\to 0} \frac{u'(0+r,a) - u'(0,a)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{u'(r,a)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{-r^{1-N}\displaystyle\int_0^r s^{N-1} f(u(s,a))ds}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{-\displaystyle\int_0^r s^{N-1} f(u(s,a))ds}{r^N} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{-r^{N-1} f(u(r,a))}{Nr^{N-1}} = -\frac{f(u(0,a))}{N} = -\frac{f(a)}{N},
\end{aligned}
$$

isto é

$$u''(0,a) = -\frac{f(a)}{N} < 0.$$

e de DM_a podemos concluir que $u'(r,a) < 0$ em algum intervalo $[0,\delta)$, pois temos

$$u''(0,a) = \lim_{r\to 0} \frac{u'(r,a)}{r} < 0.$$

Desta forma, se não existem pontos críticos em $(0, T_{\overline{a}})$, é óbvio que $u'(r,a) < 0$ para $r \in (0, T_{\overline{a}})$. Vamos supor, por contradição, que exista $\xi \in (0, T_{\overline{a}})$ sendo o primeiro ponto crítico de u ,isto é, $u'(\xi,a) = 0$ e $u'(r,a) < 0,$ para todo $r \in (0,\xi)$.

Daí,

$$u''(\xi,a) = \lim_{r\to \xi} \frac{u'(r,a) - u'(\xi,a)}{r-\xi} = \lim_{r\to\xi} \frac{u'(r,a)}{r-\xi} \geq 0.$$

Assim, por DM_a, temos

$$u''(\xi,a)+\frac{(N-1)}{r}u'(\xi,a)+f(u(\xi,a))=0,$$

o que nos leva a

$$f(u(\xi,p))\leq 0.$$

Portanto, de acordo com o comportamento de f, temos $\overline{a}\leq u(\xi,a)\leq 1$, o que é um absurdo. Logo $u'(r,a)<0,\ r\in(0,T_{\overline{a}})$, como afirmado.

Verificação da Afirmação (2): Considere $\overline{a}<\xi_s<\xi_{s-1}<\cdots<\xi_1<\xi_0=a$. Se T_{ξ_j} denota o "tempo"que a solução $u(\cdot,a)$ leva para interceptar $u=\xi_j$, então, por 1, $T_{\xi_j}=u^{-1}(\xi_j,a)$. Tomando $T_0=0$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{T_{\overline{a}}} rf(u(r,a))dr &= \sum_{j=0}^{s-1}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} rf(u(r,a))dr+\int_{T_{\xi_s}}^{T_{\overline{a}}} rf(u(r,p))dr\\ &\geq \sum_{j=0}^{s-1}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} rf(u(r,a))dr. \end{aligned}\tag{C.1}$$

Desde que $f(s)/s$ é crescente e $u(r,a)\geq\overline{a},\ r\in[0,T_{\overline{a}}]$,

$$\begin{aligned}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} rf(u(r,a))dr &= \int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} r\frac{f(u(r,a))}{u(r,a)}u(r,a)dr\geq\frac{f(\overline{a})}{\overline{a}}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} ru(r,a)dr\\ &\geq \frac{f(\overline{a})}{\overline{a}}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}}\xi_{j+1}rdr=\frac{f(\overline{a})}{\overline{a}}\xi_{j+1}\frac{(T_{\xi_{j+1}})^2-(T_{\xi_j})^2}{2}.\end{aligned}$$

Logo, retomando (C.1),

$$\begin{aligned}\int_0^{T_{\overline{a}}} rf(u(r,a))dr &\geq \frac{f(\overline{a})}{\overline{a}}\sum_{j=0}^{s-1}\xi_{j+1}\frac{(T_{\xi_{j+1}})^2-(T_{\xi_j})^2}{2}\\ &= \frac{f(\overline{a})}{2\overline{a}}[\xi_1{T_{\xi_1}}^2+\xi_2({T_{\xi_2}}^2-{T_{\xi_1}}^2)+\cdots+\xi_s({T_{\xi_s}}^2-(T_{\xi_{s-1}})^2)]\\ &= \frac{f(\overline{a})}{2\overline{a}}[{T_{\xi_1}}^2(\xi_1-\xi_2)+{T_{\xi_2}}^2(\xi_2-\xi_3)+\cdots+(T_{\xi_{s-1}})^2(\xi_{s-1}-\xi_s)+{T_{\xi_s}}^2\xi_s]\\ &\geq \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}}[{T_{\xi_1}}^2(\xi_1-\xi_2)+{T_{\xi_2}}^2(\xi_2-\xi_3)+\cdots+(T_{\xi_{s-1}})^2(\xi_{s-1}-\xi_s)]\end{aligned}$$

e esta soma converge, quando $s\to\infty$, para a integral de Riemann-Stieltjes

$$\frac{f(\overline{a})}{2\overline{a}}\int_{\overline{a}}^{a}{T_\xi}^2d\xi.$$

Logo,

$$\int_0^{T_{\overline{a}}} rf(u(r,a))dr \geq \frac{f(\overline{a})}{2\overline{a}} \int_{\overline{a}}^{a} {T_\xi}^2 d\xi. \tag{C.2}$$

Por outro lado, de

$$-(u'r)' = -u''r - u' \quad \text{e} \quad u'' + \frac{N-1}{r}u' + f(u) = 0,$$

obtemos

$$-(u'r)' = (N-2)u' + rf(u).$$

Então, integrando essa equação de $r = 0$ até $r = T_{\overline{a}}$,

$$\begin{aligned} -u'(T_{\overline{a}})T_{\overline{a}} &= (N-2)u(T_{\overline{a}}) - (N-2)u(0) + \int_0^{T_{\overline{a}}} rf(u(r))dr \\ &= (N-2)\overline{a} - (N-2)p + \int_0^{T_{\overline{a}}} rf(u(r))dr. \end{aligned}$$

Daí,

$$-q(a)T_{\overline{p}} = -(N-2)(a-\overline{a}) + \int_0^{T_{\overline{a}}} rf(u(r))dr.$$

Portanto, por (C.2),

$$-q(a)T_{\overline{a}} \geq -(N-2)(a-\overline{a}) + \frac{f(\overline{a})}{2\overline{a}} \int_{\overline{a}}^{a} {T_\xi}^2 d\xi. \tag{C.3}$$

C.2 Conclusão do Teorema DM

Proposição C.1. *Sejam $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(0,\infty)$ e $u : \Omega \to (0,\infty)$ de classe $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um domínio limitado. Então $g \circ u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração: Considere um domínio $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Então existem $s_0, s_1 > 0$ tais que

$$s_0 < u(x) < s_1, \; x \in \overline{\Omega_0}. \tag{C.4}$$

Desde que $g\Big|_{[s_0,s_1]}$ é contínua, $g\Big|_{(s_0,s_1)}$ é diferenciável e $|g'(s)| \leq M$ para $s \in (s_0, s_1)$, então pelo Teorema do Valor Médio

$$|g(s) - g(t)| \leq M|s-t|, \; s,t \in (s_0,s_1).$$

Em particular, por (C.4)

$$|g(u(x)) - g(u(y))| \leq M|u(x) - u(y)|, \; x, y \in \overline{\Omega_0}.$$

Assim, para $x \neq y$

$$\frac{|g(u(x)) - g(u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \leq M\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \; x, y \in \overline{\Omega_0}. \tag{C.5}$$

Além disso, da hipótese $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, segue que

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_0}}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} = ||u||_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_0})}, \; x, y \in \overline{\Omega_0}.$$

Daí, passando o supremo em (C.5)

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_0}}} \frac{|(g \circ u)(x) - (g \circ u)(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \leq M||u||_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_0})} < \infty,$$

ou seja, $(g \circ u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_0})$. Como Ω_0 foi arbitrário, segue que $(g \circ u) \in C^{0,\alpha}_{loc}(\overline{\Omega_0})$. ∎

APÊNDICE D

RESULTADOS CLÁSSICOS DE ANÁLISE

Finalizaremos esta dissertação apresentando alguns resultados clássicos que foram utilizados no decorrer deste trabalho.

Lema D.1 (Lema de Fatou)**.** *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável. Se $h_1, h_2,\ldots$ são funções mensuráveis em Ω, não negativas q.t.p., então*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} h_n dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h_n dx.$$

Demonstração: Conferir G. de Barra [3], Teorema 3, pág. 57. ∎

Teorema D.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável. Seja também $\{f_k\}$ uma seqüência de funções mensuráveis sobre Ω tais que $f_k \to f$ q.t.p. em Ω. Se existe $\phi \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_k| \leq \phi$ q.t.p. em Ω para todo k, então*

$$\int_\Omega f_k \to \int_\Omega f.$$

Demonstração: Conferir G. de Barra [3], Teorema 10, pág. 63 ∎

Teorema D.3. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável. Se $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, então existem uma subsequência (u_{n_k}) e $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$u_{n_k} \to u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

$$|u_{n_k}| \leq h \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração: Conferir Brezis [4], Teorema $IV.9$, pág. 58 ∎

Os próximos resultados generalizam algumas propriedades obtidas para integrais de funções contínuas, aos quais foram utilizados no decorrer de nossas demonstações.

Teorema D.4. *Sejam $a, b, h \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $f \in L^1(a+h, b+h)$, então*

$$\int_{a+h}^{b+h} f(t)dt = \int_a^b f(t+h)dt.$$

Demonstração: Conferir G. de Barra [3], exemplo 25, pág. 75 ∎

Corolário D.5. *Sejam $a, b, h \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a < b, h > 0$ e $f \in L^1(a, \frac{b}{h})$, então*

$$\int_a^{\frac{b}{h}} f(t)dt = \int_a^b f(\frac{t}{h})dt.$$

Teorema D.6. *Sejam (a, b) um intervalo finito e $f \in L^1(a, b)$, então existe um conjunto $E \subset (a, b)$ tal que $med([a, b] \backslash E) = 0$, e*

$$\lim_{h \to 0^+} \int_x^{x+h} |f(t) - \xi| dt = |f(x) - \xi|,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e para cada $x \in E$

Demonstração: Conferir G. de Barra [3], exemplo 10, pág. 91 ∎

Os próximos resultados apresentam alguns teoremas de regularidades e estimativas elípticas

Teorema D.7. *[Teorema da estimativa interior para L^p]Sejam Ω_0, Ω domínios abertos limitados em $\mathbb{R}^N$ com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ e $p > N$. Então existe uma constante real C tal que*

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega_0)} \leq C(||\Delta u||_{L^p(\Omega)} + ||u||_{L^p(\Omega)}), \ \forall u \in W^{2,p}(\Omega),$$

onde a constante C depende de: p, N, diametro de Ω e da distância de $\partial\Omega$ a Ω_0.

Demonstração: Conferir Feng e Liu [22], Lema 2.2. ∎

Teorema D.8. *[Teorema da estimativa interior de Schauder] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio e $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^{0,\nu}_{loc}(\Omega)$, $0 < \nu < 1$, tal que $\Delta u = f$ em Ω. Então $u \in C^{2,\nu}(\Omega)$ e para $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega_1}$ compacto temos*

$$||u||_{C^{2,\nu}(\Omega_0)} \leq C(||u||_{C(\Omega_1)} + ||f||_{C^{0,\nu}(\Omega_1)},$$

onde $k \equiv k(\Omega_0, \Omega_1)$.

Demonstração: Conferir Figueiredo [23], Teorema 1.7, página 11. ∎

Teorema D.9. *Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, $k \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $kp > N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. onde $\alpha = k - N/p$ se $k - N/p < 1$; $\alpha \in (0,1)$ se $k - N/p = 1$ e $p > 1$; $\alpha = 1$ se $k - N/p > 1$.*

Demonstração: Conferir Ambrosetti e Prodi [2], Teorema 0.4, página 4. ∎

Teorema D.10. *Sejam m um número inteiro não negativo e $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Então:*

i) $C^{m,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\Omega)$;

ii) $C^{m,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\Omega)$.

Se Ω é limitado, então as imersões (i) e (ii) são compactas.

Demonstração: Conferir Adams [1], Teorema 1.31, página 11. ∎

A *derivada de Frechét* é uma extensão do conceito usual de derivada em espaços Euclidianos para espaços de Banach. Dados X um espaço de Banach, $U \subset X$ um aberto e uma aplicação $F : U \to Y$, temos as seguintes definições [cf, Kavian [38]]

Definição D.11. *Seja $u \in U$. Dizemos que F é (Fréchet) diferenciável em u se existe $A \in L(X,Y)$ tal que, se tomarmos*

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A(h),$$

teremos

$$R(h) = o(\|h\|), \quad \|h\| \to 0,$$

isto é,

$$\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ quando } \|h\| \to 0.$$

Tal A é unicamente determinada e será chamada a (Fréchet) diferencial de F em u e denotada por $A = dF(u)$.

Se F é diferenciável em todo $u \in U$, dizemos que F é diferenciável em U.

Assim como para funções em $\mathbb{R}^N$, podemos definir derivada direcional em espaços de Banach. Nestes espaços ela é conhecida como *derivada de Gâteaux.*

Definição D.12. *Sejam $F : U \to Y$ e $u \in U$. Dizemos que F é Gâteaux-diferenciável em u se existe $A \in L(X,Y)$ tal que para todo $h \in X$ temos*

$$\frac{F(u+\varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} \to Ah \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

A aplicação A é unicamente determinada, chamada a G-diferencial de F em u e denotada por $\langle F'(u), h\rangle$.

Claramente, se F é Fréchet-diferenciável em u, então F é Gâteaux-diferenciável, e as duas diferenciais coincidem. Quanto à recíproca, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema D.13. *Suponha que $F : U \to Y$ seja Gâteaux-diferenciável em U e seja*

$$F'_G : U \to L(X,Y),\ \ F'_G(u) = d_G F(u),$$

contínua em $u^* \in U$. Então F é Fréchet-diferenciável em u^* e $dF(u^*) = \langle F'(u), u^* \rangle$.

Demonstração: Conferir Ambrosetti e Prodi [2], Teorema 1.9, pág. 14

■

Tendo em vista estas definições, podemos enunciar uma versão do Teorema da Função Implícita para Espaços de Banach

Teorema D.14 (Teorema da Função Implícita)**.** *Seja $F \in C^k(\Lambda \times U, Z), k \geq 1$, onde Z é um espaço de Banach e Λ, U são subconjuntos abertos de espaços de Banach X e Y. Suponha que $F(\lambda^*, u^*) = 0$ e que $F_u(\lambda^*, u^*) \in Inv(Y,Z)$.*

Então existem vizinhanças Θ de λ^* em X e U^* de u^* em Y e uma aplicação $g \in C^k(\Theta, Y)$ tais que

(i) $F(\lambda, g(\lambda)) = 0,\ \forall\ \lambda \in \Theta$

(ii) $F(\lambda, u) = 0,\ (\lambda, u) \in \Theta \times U^*$ *implica* $u = g(\lambda)$

(iii) $g'(\lambda) = -[F_u(p)]^{-1} \circ F_\lambda(p)$, *onde* $p = (\lambda, g(\lambda))$ *e* $\lambda \in \Theta$.

Obs.: $Inv(Y,Z) := \{A : Y \to Z);\ A$ é linear, contínua e inversível$\}$

Demonstração: Conferir Ambrosetti e Prodi [2], Teorema 2.3, pág. 38 ■

Segue abaixo um importante resultado acerca de uma solução de uma equação.

Teorema D.15 (Gidas e Spruck [29])**.** *Suponha $N > 2$ e seja $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N)$ uma solução não negativa para o problema*

$$-\Delta u = u^p,\ \ \text{em } \mathbb{R}^N,$$

com $1 \leq p \leq (2N/N-2) - 1$. Então $u \equiv 0$.

Demonstração: Conferir Gidas e Spruck [29]. ■

Lema D.16. *Seja $p > 1$. Então existe uma constante $C_p > 0$ tal que*

$$\big||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\big| \leq C_p(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x-y|,\ \ \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^N$$

onde $x \neq y$ se $1 < p < 2$.

Demonstração: Conferir Santos [52]. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Ambrosetti, A. and Prodi, G., *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, (1993).

[3] de Barra, G., *Measure Theory and Integration*, John Wiley and Sons, New York, 1981.

[4] Brézis H., *Analisis Funcional,Teoria y Aplicaciones* ,Alianza Editorial,1984.

[5] Calabi, E., *A construction of nonhomogeneous Einstein metrics*, Differential geometry, Part2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, 17-24.

[6] Callegari A.; Nachman A., *A nonlinear singular boundary-value problem in theory os psedoplastic fluids.* SIAM J. Appl. Math. 38 (1980) 275-281.

[7] Chen C.C, Lin C.S., *Uniqueness of the ground state solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *in* R^n*,* $n > 3$., Comm. Partial Diferential Equations 16 (1991), no.8-9, 1549-1572.

[8] Chen, H.,*Analysis of blowup for a nonlinear degenerate parabolic equation*, J. Math. Anal. Appl. 192, (1995), no. 1, 180-193.

[9] Chen, H., *On a singular nonlinear elliptic equation*, Nonlinear Anal. 29, (1997), no. 3, 337-345.

[10] Cirstea, F.; Ghergu, M.; Radulescu, V., *Combined effects of asymptotically linear and singular nonlinearities in bifurcation problems of Lane-Emden-Fowler type.* J. Math. Pures Appl. (9) 84 (2005), no. 4, 493–508.

[11] Clément, Ph.; Manásevich, R.; Mitidieri, E., *Positive solutions for a quasilinear system via blow up.* Comm. Partial Differential Equations 18 (1993), no. 12, 2071–2106.

[12] Clément, Ph.; de Figueiredo, D. G.; Mitidieri, E., *Positive solutions of semilinear elliptic systems.* Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), no. 5-6, 923–940.

[13] Coclite, M. M.; Palmieri, G., *On a singular nonlinear Dirichlet problem.* Comm. Partial Differential Equations 14 (1989), no. 10, 1315–1327.

[14] Coffman C.V, *Uniqueness of the ground state solution for* $\Delta u - u + u^3 = 0$ *and a variational characterization of other solutions.* Arch. Rational Mech.Anal. 46 (1972),81-95.

[15] Cohen D.S.; Keller H.B, *Some positive problems suggested by nonlinear heat generators.* J. Math. Mech. 16 (1967), 1361-76.

[16] Cortázar, C.; Elgueta, M. and Felmer, P., *Symmetry in an elliptic problem and the blow-up set of a quasilinear heat equation*, Comm. Partial Differential Equations 21, no. 3, 4, (1996), 507-520.

[17] Cortázar, C.; Elgueta, M. and Felmer, P., *On a semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$ *with a non-Lipschitzian nonlinearity*, Adv. Differential Equations 1, no. 2, (1996), 199-218.

[18] Costa, D.G.; Magalhães, C.A., *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity*, Nonlinear Anal. 23 (1994), 1401- 1412.

[19] Crandall, M.G. and Rabinowitz, P.H., *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability*, Arch. Rational Mech. Anal. 52 (1973), 161-180.

[20] Crandall, M. G.; Rabinowitz, P. H.; Tartar, L., *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity.* Comm. Partial Differential Equations 2 (1977), no. 2, 193–222.

[21] Dávila, J.; Montenegro, M., *Radial solutions of an elliptic equation with singular nonlinearity.* J. Math. Anal. Appl. 352 (2009), no. 1, 360–379.

[22] Feng, W., Liu, X., *Existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, Acta Math. Sin. 20 (2004), 983-988.

[23] de Figueiredo, D.G., *Equações Elípticas Não-Lineares*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[24] de Figueiredo, D.G.; Gonçalves, J. V.; Miyagaki, O. H., *On a class of quasilinear elliptic problems involving critical exponents.* Commun. Contemp. Math. 2 (2000), no. 1, 47–59.

[25] de Figueiredo, D. G.; Gossez, J.; Ubilla, P., *Local "superlinearity" and "sublinearity" for the p-Laplacian*. J. Funct. Anal. 257 (2009), no. 3, 721–752. 35J60

[26] Gazzola F., Serrin J., Tang M., *Existence of ground states and free boundary problems for quasilinear elliptic operators*, Adv. in Diff. Equations (2000), no. 5, 1-30.

[27] Gatica, J. A.; Oliker, V.; Waltman, P., *Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations*, J. Differential Equations 79 (1989), no. 1, 62-78.

[28] Gidas, B.; Ni, W. M. and Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68 , no. 3, (1979), 209-243.

[29] Gidas, B.; Spruck, J., *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), no. 4, 525–598.

[30] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Third edition, Berlin, (1997).

[31] Fulks, W.; Maybee, J. S., *A singular non-linear equation.* Osaka Math. J. 12 1960 1–19.

[32] Goncalves J.V.A., Rezende M.C., Santos C.A., *Positive solutions for a mixed and singular quasilinear problem.* Nonlinear Anal. (2010).

[33] Goncalves, J.V.A.; Santos, C. A. P., *Quasilinear singular equations: a variational approach for nondifferentiable functionals*. Nonlinear Anal. 55 (2003), no. 5, 583–607.

[34] Goncalves, J. V.; Santos, C. A., *Singular elliptic problems: existence, non-existence and boundary behavior.* Nonlinear Anal. 66 (2007), no. 9, 2078–2090.

[35] Hirano, N. and Shioji, N., *Existence of positive solutions for singular Dirichlet problems*, Diff. and Int. Eq. 14, no. 12, (2001), 1531-1540.

[36] Hernández, J.; Karátson, J., Simon, P. L., *Multiplicity for semilinear elliptic equations involving singular nonlinearity*, Nonlinear Analysis 65, (2006), 265-283.

[37] Hai, D.; Schmitt, K.; Shivaji, R., *Positive solutions of quasilinear boundary value problems.* J. Math. Anal. Appl. 217 (1998), no. 2, 672–686.

[38] Kavian, O., *Introduction à La Théorie Des Points Critiques*, Springer-Verlag, Paris, (1993).

[39] Kaper, H. G.; Kwong, M. K. and Li, Y., *Simmetry results for reaction-diffusion equations*, Differential Integral Equations 6, no. 5, (1993), 1045-1056.

[40] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Applications*, Wiley, United States of America, (1978).

[41] Kwong M.K., *Uniqueness of positive solutions of* $\Delta u - u + u^p = 0$ *in* R^n. Arch. Rational Mech. Anal. 105 (1989),no.3, 243-266.

[42] Kwong M.K., Zhang L.Q., *Uniqueness of thepositive solution of* $\Delta u + f(u) = 0$ *in a nannulus.* Diferential Integral Equations 4 (1991),no.3, 583-599.

[43] Lazer, A. C.; McKenna, P. J., *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem.* Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), no. 3, 721–730.

[44] McLeod K., Serrin J., *Uniqueness of positive radial solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *in* R^n., Arch. Rational Mech. Anal. 99 (1987), no.2, 115-145.

[45] Mohammed, A., *Positive solutions of the p-Laplace equation with singular nonlinearity.* J. Math. Anal. Appl. 352 (2009), no. 1, 234–245.

[46] Ni, W. N., *Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems*, Journal of Differential Equations 50, (1983), 289-304.

[47] Ni, W.M., Nussbaum, R., *Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of* $\Delta u + f(u, r) = 0$. Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), no. 1, 67–108.

[48] Ouyang T., Shi J., Yao M., *Exact multiplicity and bifurcation of solutions of a singular equation* ,preprint.

[49] Peng F., *On the structure ofpositive solutions to an elliptic problem arising in thin film equations.* J. Math. Anal. Appl. 370, no. 2, (2010), 573–5

[50] Perera, K.; Silva, E. A. B., *On singular p-Laplacian problems.* Differential Integral Equations 20 (2007), no. 1, 105–120.

[51] Piccini, L.C., Stampacchia, G., Vidossich, G., *Ordinary differential equations in* $\mathbb{R}^N$. Problems and Methods, Applied Mathmatical Sciences, 39, Springer-Verlag, New York, 1984.

[52] Santos, C.A.P., *Soluções radialmente simétricas de problemas quasilineares singulares*, Tese de Doutorado,UnB,(2003).

[53] Shi J.; Yao M., *On a singular nonlinear semi linear elliptic problem* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 128 (1998), 1389-1401.

[54] Smoller, J. A. and Wasserman, G., *Existence, uniqueness and nondegeneracy of positive solutions of semilinear elliptic equations*, Communications in Mathematical Physics 95, (1984), 129-159.

[55] Sun, Y.; Wu, S., *Iterative solution for a singular nonlinear elliptic problem.* Appl. Math. Comput. 118 (2001), no. 1, 53–62.

[56] Wei, L; Wang, M; Zhu, J., *Multiple nontrivial solutions for a class of p-Laplacian equations.* Acta Appl. Math. 110 (2010), no. 3, 1153–1167.

[57] Yanagida E., *Uniqueness of positive radial solutions of* $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ *in* R^n., Arch. Rational Mech. Anal. 115 (1991),no.3, 257-274.

[58] Zhang Z., *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity.* J. Math. Ana Appl. 194 (1995), 103-113.

[59] Zhang, Z., *Critical points and positive solutions of singular elliptic boundary value problems.* J. Math. Anal. 83 Appl. 302 (2005), no. 2, 476–483.