Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções antissimétricas para a equação de Schrödinger não linear

por

Janete Soares de Carvalho

Brasília
2010

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções antissimétricas para a equação de Schrödinger não linear.

por

Janete Soares de Carvalho *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

26 de março de 2010

Comissão Examinadora:

Prof[a]. Dra. Liliane de Almeida Maia - Orientadora (MAT/UnB)

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva (MAT/UnB)

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (MAT/UnB)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros (UFPB)

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares (ICMC/USP)

*A autora foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais e ao Franklin

Agradecimentos

- A Deus, pois creio que sem Ele jamais conseguiria.

- Ao meu noivo Franklin Gamboa, pelo apoio, compreensão e carinho. E acima de tudo, por sempre ter acreditado nesta conquista.

- A minha família, pelo constante amor a mim dedicado.

- A minha orientadora, professora Liliane de Almeida Maia, pela orientação, apoio e dedicação na realização deste trabalho.

- Ao meu coorientador, professor Olimpio Hiroshi Miyagaki pelo constante apoio, dedicação e paciência na realização deste trabalho.

- Aos professores Everaldo Souto de Medeiros, Sérgio Henrique Monari Soares, Marcelo Fernandes Furtado e Elves Alves de Barros e Silva, pelas sugestões e contribuições para a finalização deste trabalho.

- Aos professores de graduação e pós-graduação, que fizeram a diferença na minha formação acadêmica. Em especial aos professores Francisco José de Andrade, Uberlandio Batista Severo, Flávia Jerônimo Barbosa, João Marcos Bezerra do Ó, Everaldo Souto de Medeiros, Elves Alves de Barros e Silva e Marcelo Fernandes Furtado. Novamente, a professora Liliane de Almeida Maia e ao professor Olimpio Hiroshi Miyagaki.

- Aos colegas de curso e amigos, pelo esforço e contribuição nos estudos comunitários e ainda, pela força e apoio nos momentos difíceis. Em especial, aos meus grandes amigos Ricardo Ruviaro e Manuela Rezende.

- Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro e a Universidade de Brasília, em particular, a Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, por me possibilitar esta conquista.

Resumo

Neste trabalho, consideramos a existência de soluções que mudam de sinal para equações de Schrödinger não lineares em $\mathbb{R}^N$ com um potencial invariante sob uma involução ortogonal. Na prova de nossos resultados utilizamos argumentos de concentração de compacidade devidos a Pierre Louis Lions.

Palavras chaves: Equações de Schrödinger não lineares; Soluções que mudam de sinal; Princípio de Concentração de Compacidade.

Abstract

In this work we deal with the existence of solutions which change sign for nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ with a potential invariant under an orthogonal involution. In the proof of our results we use arguments of concentration-compactness due to Pierre Louis Lions.

Key words: Nonlinear Schrödinger equations; Solutions which changes sign; Concentration Compactness Principle.

Sumário

Introdução

Consideramos a seguinte equação de Schrödinger não linear

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad\qquad u(x) \to 0 & \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

em que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não linear, com crescimento subcrítico e superlinear quando $|u| \to \infty$.

A equação (1) aparece em várias aplicações na Física-Matemática. Em particular, em muitos campos da Física, quando são descritos, por exemplo, os condensados de Bose-Einstein [30, 32] e a propagação da luz em alguns materiais óticos não lineares [33]. Aparece ainda, quando procuramos soluções denominadas ondas estacionárias da seguinte equação

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + W(x)\psi - \tilde{f}(|\psi|)\psi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Neste caso, as ondas estacionárias da forma $\psi(x,t) = u(x)e^{\frac{-iEt}{h}}$ são soluções da equação (2) se, e somente se, u é solução de (1) com $V(x) = \frac{2m}{h^2}(W(x) - t)$ e $f(u) = \frac{2m}{h^2}\tilde{f}(|u|)u$.

Considerando várias hipóteses sobre V e f, a existência de soluções positivas tem sido extensivamente estudada. É sabido que a existência de solução positiva para os problemas do tipo (1) com potencial e não linearidade periódicos tem sido estudado não só pela importância nas aplicações mas também pelo interesse em pesquisa matemática, (ver por exemplo [1] e [19] e como referência adicional Michel Willem [41]).

Sem a condição de periodicidade, em [12, 13] encontramos um trabalho pioneiro para esta classe de problemas não lineares no $\mathbb{R}^N$. Em 1983 Berestycki e Lions mostraram, usando minimização com vínculo, a existência de uma solução positiva para o problema (1) em que V é uma constante positiva ou $V \equiv 0$ quando $f'(0) = 0$, e f tem crescimento subcrítico no infinito. Quando o potencial V é limitado inferiormente por uma constante positiva, mas satisfazendo uma condição de coercividade do tipo $V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$, e supondo que f tem crescimento subcrítico no infinito, Rabinowitz [37] em 1992 mostrou a existência de soluções positivas para (1) usando argumentos do tipo minimax. Ainda no caso de existência de solução positiva, mas sem a condição de periodicidade bem como a condição de coercividade, mas impondo uma condição de que o potencial seja assintótico a uma constante, no infinito, ou seja, $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty > 0$ e $V(x) \lneqq V_\infty$ mencionamos, por exemplo os trabalhos [3, 5, 34, 36, 43] e suas referências, (aqui $\lneqq$ denota que a desigualdade é estrita num subconjunto de medida de Lebesgue positiva em $\mathbb{R}^N$). Já em 2005, Benci, Grisanti e Micheletti em [11], usando Princípio de Concentração de Compacidade e supondo $\lim\limits_{x\to\infty} V(x) = 0$, mostraram que se $V(x) \geq 0$ para todo

$x \in \mathbb{R}^N$ e $V(x) > 0$ sobre um conjunto de medida positiva, o problema (1) não tem solução de energia mínima positiva. Por outro lado, se $V(x) \leq 0$ e $V(x) < 0$ sobre um conjunto de medida positiva, então o problema (1) tem uma solução de energia mínima. Neste sentido, podemos citar alguns resultados recentes onde V muda de sinal, como em [17, 18, 20, 21, 29, 38].

Estamos interessados, em particular, na existência de uma classe especial de soluções que mudam de sinal. Mencionaremos alguns trabalhos recentes que tratam da existência de soluções que mudam de sinal para (1). Antes porém, esclareceremos algumas definições. Dada $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma involução ortogonal não trivial, ou seja, uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$, aqui Id denota a identidade em $\mathbb{R}^N$, se $u(\tau x) = -u(x)$ dizemos que u é τ-antissimétrica. Um exemplo da involução dada acima é $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\tau(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Em nosso trabalho soluções antissimétricas não triviais são soluções que mudam de sinal ou soluções nodais. Com potencial $V = 1$, Noussair e Wei [35], estudando (1) em um domínio limitado, mostraram a existência de soluções nodais. Ainda em domínio limitado, mas invariante sob uma involução ortogonal Castro e Clapp em [16] mostraram a multiplicidade de soluções antissimétricas se f tem um comportamento crítico no infinito. Em [6] e [7] foram obtidas soluções que mudam de sinal de (1) em $\mathbb{R}^N$, com a não linearidade $f(x, u)$ subcrítica no infinito, mas impondo uma condição de coercividade no potencial. Além disso, em domínios ilimitados, podemos mencionar [42] entre outros. Em [25] Furtado, Maia e Medeiros mostraram a existência de uma solução de energia mínima positiva e também a existência de uma solução nodal para (1) com V sendo um potencial que (possivelmente) muda de sinal. Eles usaram argumentos de minimização com vínculo sobre conjuntos tipo Nehari e uma versão do conhecido "lema de splitting"por Struwe [40] como a ferramenta principal nos argumentos de compacidade.

Recentemente, Ghimenti e Micheletti [26] considerando $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = 0$ e uma classe apropriada de potenciais V mostraram a existência de pelo menos um par de soluções τ-antissimétricas do problema (1). Mostraram ainda que a energia dessas soluções é mínima e que elas mudam de sinal exatamente uma vez.

Finalizando nossos comentários, Furtado em [24] mostrou a existência de solução τ-antissimétrica para o problema semilinear $-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u$ em um domínio limitado e suave Ω, onde $u = 0$ na $\partial\Omega$, $2 < p < 2^*$ e $\lambda > \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(p)$. Podemos ainda mencionar [28] onde Hirano provou, para $V \equiv 1$ e $q(x)$ convenientemente escolhido, $||q - 1||_\infty$ pequeno, a existência de pelo menos dois pares de soluções que mudam de sinal para o problema

$$-\Delta u + u = q(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Inicialmente, estudaremos um caso particular do problema (1), mais exatamente formularemos um resultado de existência de soluções τ-antissimétricas para o problema elíptico não linear

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad u(\tau x) = -u(x) & \\ \qquad\qquad u(x) \to 0 & \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{P_V}$$

onde $N \geq 3$ e $1 < p < 2^* - 1$. Um dos nossos objetivos é formular um resultado de existência de solução τ-antissimétrica para (P_V). Para tanto, consideramos algumas hipóteses básicas sobre o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

(V1) V é contínua e existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$;

(V2) $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty, \quad V(x) \lneqq V_\infty$;

(V3) $V(\tau x) = V(x)$;

(V4) $V(x) \leq V_\infty - Ce^{-\gamma|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ com $0 < \gamma < \sqrt{V_\infty}$ e $C > 0$.

Como exemplo de um potencial verificando as condições $(V1) - (V4)$ temos

$$V(x) = \frac{b + |x|^2}{1 + |x|^2},$$

onde $0 < b < 1$.

Enunciamos a seguir nosso primeiro resultado.

Teorema 0.1 *Suponhamos que V satisfaz $(V1) - (V4)$. Então existe uma solução τ-antissimétrica não trivial do problema (P_V), isto é, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que $u(\tau x) = -u(x)$. Além disso, u é uma solução que muda de sinal exatamente uma vez.*

Em um segundo momento, nosso propósito é estabelecer as condições necessárias à generalização do problema (P_V). Assim, trabalhamos com o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u), & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) = -u(x) & \\ u(x) \to 0 & \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{P_f}$$

em que $N \geq 3$ e f é uma não linearidade mais geral do que aquela considerada na primeira parte e, como antes, a função V satisfaz as hipóteses $(V1)-(V4)$. Um dos nossos objetivos é estabelecer um resultado de existência de solução τ-antissimétrica para (P_f) quando f é ímpar.

Para a não linearidade f, assumimos que

(f1) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f2) $f(0) = 0 = f'(0)$;

(f3) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $1 < p < 2^* - 1$ tais que

$$|f'(s)| \leq a_1 + a_2|s|^{p-1} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R};$$

(f4) existe uma constante $\mu > 2$ tal que, se $F(s) := \int_0^s f(t)dt$,

$$0 < \mu F(s) \leq sf(s) \quad \text{e} \quad (\mu - 1)sf(s) < f'(s)s^2 \quad \text{para todo } s \neq 0;$$

(f5) f é ímpar.

Como exemplo,

$$f(s) = \begin{cases} as^2 + |s|^{p-1}s & \text{se} \quad s > 0 \\ -as^2 + |s|^{p-1}s & \text{se} \quad s < 0, \end{cases}$$

onde $a > 0$ e $2 < p < 2^* - 1$, verifica as condições $(f1) - (f5)$.

Nos inspiramos na parte do trabalho onde $f(s) = |s|^{p-1}s$. A principal diferença é a não linearidade mais geral f. Neste caso, a maior dificuldade encontrada é a perda de homogeneidade.

Enunciamos então o nosso segundo resultado.

Teorema 0.2 *Sob as hipóteses $(V1) - (V4)$ e $(f1) - (f5)$ existe uma solução não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ τ-antissimétrica do problema (P_f), que muda de sinal exatamente uma vez.*

Por argumentos conhecidos de regularização mostraremos, (cf. Observação A.3), que a solução $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Para verificar que $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, ver Observação A.4.

A condição $(V2)$ impõe um comportamento para o potencial V no infinito, que exercerá um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho.

Tanto o problema (P_V) quanto (P_f) têm uma abordagem variacional. Aqui, estamos considerando V limitado inferiormente, esta hipótese juntamente com $(V2)$, nos permitem definir uma norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e considerar o espaço de funções apropriado para obter soluções de não só de (P_V) mas também de (P_f). Uma vez que a imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ $2 \leq r < 2^*$ não é compacta, a nossa principal dificuldade consiste no fato de que o funcional associado pode não satisfazer a condição de compacidade definida no Capítulo 1. Para superarmos esta dificuldade apresentamos e provamos duas versões do "lema de splitting" relacionadas aos nossos problemas. Este resultado juntamente com a hipótese $(f4)$, que é uma versão da condição de Ambrosetti-Rabinowitz [4], nos permitem descrever para quais níveis de energia nosso funcional associado I_V, sobre a variedade de Nehari considerada, satisfaz a condição de compacidade.

As provas dos nossos resultados foram inspiradas e adaptadas em parte nos trabalhos de Ghimenti e Micheletti [26] e também Furtado, Maia e Medeiros [25]. Em nosso caso, não precisamos exibir uma classe apropriada de potenciais V como foi feito em [26], simplesmente consideramos um potencial mais geral satisfazendo algumas condições, como por exemplo, o comportamento do potencial V no infinito. Observe que nosso potencial não está na classe de potenciais considerada em [26]. Por outro lado, Furtado, Maia e Medeiros em [25], embora tenham considerado um potencial satisfazendo $(V2)$, não obtiveram solução nodal com a mesma antissimetria das soluções apresentadas neste trabalho. Além disso, a hipótese $(V4)$ de ordem de crescimento de $V(x)$ no infinito foi melhorada com respeito a [25].

As maiores dificuldades encontradas em nosso trabalho foram estabelecer uma versão do "lema de splitting" para cada um dos problemas estudados e também as comparações das energias.

Nossa contribuição neste trabalho consiste em encontrar uma classe especial de soluções que mudam de sinal. Nosso trabalho está dividido em dois capítulos e dois apêndices.

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo do problema (P_V).

No Capítulo 2, nosso interesse é esclarecer um pouco mais questões relacionadas à existência e características de soluções que mudam de sinal do problema (P_V), para tanto, verificamos sob quais condições podemos generalizar este problema. Mais especificamente, estudamos o problema (P_f).

Se u é uma solução antissimétrica do problema (P_f) então

$$(V(\tau x) - V(x))u(x) = -(f(-u(x)) + f(u(x)))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, isto implica que as hipóteses $(V3)$ e $(f5)$ são equivalentes quando $u(x) \neq 0$. Com isto, é natural assumirmos ambas as hipóteses. Em particular, em muitos resultados de multiplicidade de soluções, como em [12, 26, 25], é natural assumir que f é uma função ímpar.

Nos Capítulos 1 e 2, usamos o fato que o problema limite associado à equação (1) possui uma solução radialmente simétrica e positiva, devido a Berestycki-Lions [12].

No apêndice A apresentamos alguns resultados que serão usados no decorrer de todo o trabalho. Entre outros, apresentamos um lema devido a Brézis e Lieb, no qual damos uma nova versão para a demonstração do Lema 8.1 em [41].

Finalmente, no apêndice B, enunciamos a versão geral do Lema de Brézis-Lieb [15]. Além disso, apresentamos o resultado de existência de solução, dado por Berestycki-Lions [12], para o problema limite associado a (1). Entre outros resultados, apresentamos ainda, uma importante desigualdade dada por Alves, Carrião e Medeiros em [2].

O conteúdo deste trabalho está organizado em dois artigos intitulados "Antisymmetric solutions for the nonlinear Schrödinger equation", aceito para publicação em Differential and Integral Equations e "A note on existence of antisymmetric solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations"aceito para publicação em Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.

Enunciaremos novamente, em cada capítulo, os resultados principais, bem como, as hipóteses sobre a função V e as não linearidades.

Capítulo 1

Existência de soluções antissimétricas para a equação de Schrödinger com não linearidade do tipo potência pura

O principal objetivo deste capítulo, é mostrar que, usando um princípio de concentração de compacidade, é possível encontrar condições suficientes para a existência de uma classe de soluções que mudam de sinal do problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) = -u(x) & \\ u(x) \to 0 \quad \text{se} \quad |x| \to \infty, & \end{cases} \tag{P_V}$$

onde $N \geq 3$, $1 < p < 2^* - 1$ e $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma involução ortogonal não trivial que é uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$, aqui Id sendo a identidade em $\mathbb{R}^N$. Para tanto, consideramos algumas hipóteses básicas sobre $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

(V1) V é contínua e existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$;

(V2) $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty, \quad V(x) \lneqq V_\infty$;

(V3) $V(\tau x) = V(x)$;

O seguinte teorema contém o nosso resultado principal:

Teorema 1.1 *Suponhamos que V satisfaz $(V1) - (V3)$. Se para algum $0 < \gamma < \sqrt{V_\infty}$ temos*

(V4) $V(x) \leq V_\infty - Ce^{-\gamma|x|}$ *para todo $x \in \mathbb{R}^N$,*

então existe uma solução τ-antissimétrica não trivial do problema (P_V), isto é, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que $u(\tau x) = -u(x)$. Além disso, u é uma solução que muda de sinal exatamente uma vez.

1.1 A estrutura variacional

Nesta seção apresentaremos a estrutura variacional do Problema (P_V).

Em vista do Lema A.1, podemos considerar E como sendo o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_E := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx, \quad \text{para todo } u, v \in E$$

com a norma associada dada por

$$\|u\|_E := \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A involução τ de $\mathbb{R}^N$ induz uma involução $T_\tau : E \to E$ definida como segue,

$$T_\tau(u(x)) := -u(\tau(x)).$$

Denotemos por $E^\tau := \{u \in E : T_\tau(u(x)) = u(x)\}$ o subespaço das funções τ-invariantes.

Seja $I_V : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_V(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx.$$

Notemos que pelo Lema A.1 o funcional I_V está bem definido. Além disso, $I_V \in C^1(E, \mathbb{R})$ com

$$I_V'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\varphi dx \quad \text{para todo } u, \varphi \in E.$$

Consequentemente, pontos críticos do funcional I_V são precisamente soluções fracas do problema (P_V). A variedade de Nehari associada é dada por

$$N_V = \{u \in E \setminus \{0\} : \langle I_V'(u), u\rangle = 0\} = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \|u\|_E^2 = ||u||_{L^{p+1}}^{p+1}\right\}.$$

Para obtermos soluções τ-invariantes, estudamos pontos críticos de I_V restrito à seguinte variedade de Nehari τ-invariante

$$N_V^\tau = \{u \in N_V : T_\tau(u(x)) = u(x)\} = N_V \cap E^\tau.$$

Notaremos, posteriormente, que N_V^τ é não vazio. Além disso, seu espaço tangente em u é dado por

$$T_u N_V^\tau = \{v \in E : 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - (1+p)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}uvdx = 0\}.$$

Aqui, denotaremos por

$$m_V = \inf_{u \in N_V} I_V(u) \quad \text{e} \quad m_V^\tau = \inf_{u \in N_V^\tau} I_V(u).$$

Consideraremos ainda o seguinte problema limite de (P_V):

$$-\Delta u + V_\infty u = |u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \ , \qquad (P_\infty)$$

cujo funcional associado é dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2\right) dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Além disso, denotaremos por

$$N_\infty := \{u \in E \setminus \{0\} : \langle I'_\infty(u), u\rangle = 0\} = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \|u\|^2 = ||u||^{p+1}_{L^{p+1}}\right\}$$

e

$$N_\infty^\tau := \{u \in N_\infty : T_\tau(u(x)) = u(x)\} = N_\infty \cap E^\tau,$$

onde

$$\|u\| = \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_\infty u^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma associada ao produto interno

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V_\infty uv) dx, \quad \text{para todo } u, v \in E.$$

Na sequência, denotaremos

$$m_\infty = \inf_{u \in N_\infty} I_\infty(u) \quad \text{e} \quad m_\infty^\tau = \inf_{u \in N_\infty^\tau} I_\infty(u).$$

1.2 Uma versão do "Lema de Splitting" devida a M. Struwe

Relembremos a seguinte condição de compacidade: dizemos que I_V satisfaz a condição de Palais-Smale, abreviadamente (PS), se qualquer sequência $\{u_n\} \subset E$ tal que $I_V(u_n)$ é limitada e $I'_V(u_n) \to 0$ possui subsequência convergente.

Nesse mesmo sentido, dizemos que I_V satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, abreviadamente $(PS)_c$, se qualquer sequência $\{u_n\} \subset E$ tal que $I_V(u_n) \to c$ e $I'_V(u_n) \to 0$ possui subsequência convergente.

No nosso caso, como estamos lidando com um problema elíptico modelado no $\mathbb{R}^N$, o funcional I_V sobre N_V^τ pode não satisfazer a condição $(PS)_c$ para todo nível de energia c. A fim de superar esta falta de compacidade apresentaremos a seguir um lema que descreve as sequências (PS) em E^τ. Este lema é uma versão do resultado devido a M. Struwe [40] (ver também [10]), conhecido como Lema de "Splitting".

Lema 1.1 *Seja* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N_V^\tau$ *tal que*

$$I_V(u_n) \to c \quad e \quad I'_V|_{N_V^\tau}(u_n) \to 0.$$

Então, a menos de subsequência, existem dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2$ *sequências* $\{y_n^j\}_n$, *uma solução* τ*-antissimétrica* u_0 *do problema* (P_V), k_1 *soluções* u^j, $j = 1, ..., k_1$ *e* k_2 *soluções* τ*-antissimétricas* u^j, $j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2$ *do problema* (P_∞), *tais que, ou*

1. $u_n \to u_0$ *fortemente em* E, *ou*

2. *se* $j = 1, ..., k_1$, *então* $\tau y_n^j \neq y_n^j$, *e* $|y_n^j| \to \infty$ *quando* $n \to \infty$;

3. *se* $j = k_1 + 1, ..., k_2$, *então* $\tau y_n^j = y_n^j$, *e* $|y_n^j| \to \infty$ *quando* $n \to \infty$;

4. $u_n(x) = u_0(x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k_1}[u^j(x - y_n^j) + T_\tau u^j(x - y_n^j)] + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} u^j(x - y_n^j) + o(1)$;

5. $I_V(u_n) \to I_V(u_0) + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j)$.

Prova. Desde que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_V restrito à variedade N_V^τ, então $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_V. De fato, sabemos que

$$E \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N) \quad \text{continuamente, para } 2 \leq r \leq 2^*.$$

Com isto e usando o fato que $\{u_n\} \subset N_V$ afirmamos que existe $\rho > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \geq \rho^{p+1} > 0. \tag{1.1}$$

De fato, da imersão de E em L^{p+1} existe $C > 0$ tal que

$$C||u_n||^2_{L^{p+1}} \leq ||u_n||^2_E. \tag{1.2}$$

Como $u_n \in N_V$ então $I'_V(u_n)u_n = 0$, isto é,

$$||u_n||^2_E = ||u_n||^{p+1}_{L^{p+1}}. \tag{1.3}$$

Assim, por (1.2), (1.3) e $p + 1 > 2$ obtemos que

$$\|u_n\|_{L^{p+1}} \geq C^{\frac{1}{p-1}} := \rho > 0, \tag{1.4}$$

de onde obtemos (1.1).

Consideremos agora, $\{u_n\}$ a sequência dada acima. Temos que

$$I_V(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'_V(u_n)v \to 0 \quad \text{para todo} \quad v \in T_{u_n}N_V^\tau. \tag{1.5}$$

Para concluirmos que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_V, precisamos mostrar que

$$I'_V(u_n)v \to 0, \quad \text{para todo } v \in E. \tag{1.6}$$

Definamos
$$J(u) = I_V'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}$$
logo
$$J'(u)z = 0, \quad \text{para todo } z \in T_u N_V^\tau.$$

Agora, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que
$$I_V'(u_n) = I_V'|_{N_V^\tau}(u_n) - \lambda_n J'(u_n). \tag{1.7}$$
Segue que
$$\begin{aligned} J'(u_n)u_n &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 - (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} - (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \\ &= (1-p)\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} < (1-p)\rho^{p+1} < -C < 0, \end{aligned}$$
de onde segue que
$$J'(u_n)u_n < -C < 0. \tag{1.8}$$
Além disso, por (1.5), temos que
$$I_V'|_{N_V^\tau}(u_n)u_n = o(1). \tag{1.9}$$
Por outro lado, como $u_n \in N_V^\tau$ então
$$I_V'(u_n)u_n = 0. \tag{1.10}$$
Assim, por (1.10), temos em (1.7) que
$$I_V'|_{N_V^\tau}(u_n)u_n - \lambda_n J'(u_n)u_n = 0. \tag{1.11}$$
Portanto, considerando (1.8), (1.9) e (1.11) obtemos que $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Segue que
$$I_V'(u_n)v \to 0 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad v \in E^\tau. \tag{1.12}$$
Visto que a ação T_τ é isométrica e por $(V3)$ temos que $I_V'(u_n) = T_\tau I_V'(T_\tau u_n) = T_\tau I_V'(u_n)$, então $I_V'(u_n)v = 0$ para todo $v \in (E^\tau)^\perp$. Portanto $I_V'(u_n)v$ converge a zero para todo $v \in E$, e (1.6) segue.

A seguir, mostraremos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em E. De fato, por (1.5) e (1.6) temos que
$$I_V(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I_V'(u_n)v \to 0 \quad \text{para todo} \quad v \in E. \tag{1.13}$$
Assim, para n suficientemente grande
$$I_V(u_n) \leq 1 + c \quad \text{e} \quad I_V'(u_n)(-u_n) \leq (p+1)\|u_n\|_E.$$
logo
$$1 + c + \|u_n\|_E \geq I_V(u_n) - \frac{1}{p+1} I_V'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|_E^2,$$

de onde segue que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em E, e portanto, $u_n \rightharpoonup u_0$ em E.

Mostraremos agora que $I'_V(u_0) = 0$. De fato, visto que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, da imersão compacta de $E \hookrightarrow L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ obtemos que $u_n \to u_0$ em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq r < 2^*$. Logo, se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$,

$$u_n(x) \to u_0(x) \quad \text{para quase todo } x \in K,$$

e existe

$$h \in L^p(K) \quad \text{tal que } |u_n(x)|, |u_0(x)| \leq h(x) \quad \text{para quase todo } x \in K.$$

Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E, podemos fixar $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e considerar $K = supp(\varphi)$. Então, pelas observações acima

$$|u_n(x)|^{p-1}u_n(x)\varphi(x) \to |u_0(x)|^{p-1}u_0(x)\varphi(x) \quad \text{para quase todo } x \in K.$$

Além disso,

$$||u_n(x)|^{p-1}u_n(x)\varphi(x)| \leq h_1(x) \quad \text{para quase todo } x \in K,$$

onde $h_1(x) := \|\varphi\|_\infty h(x)^p \in L^1(K)$. Assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtendo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1}u_n\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p-1}u_0\varphi, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.14}$$

Por outro lado, segue da convergência fraca de u_n a u_0 em E que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla\varphi + V(x)u_n\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla\varphi + V(x)u_0\varphi, \text{ para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.15}$$

Assim, por (1.14) e (1.15), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} I'_V(u_n)\varphi = I'_V(u_0)\varphi, \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Mas, por hipótese $\lim_{n\to\infty} I'_V(u_n)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$I'_V(u_0)\varphi = 0 \text{ para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.16}$$

Agora devemos verificar que $u_0 \in N_V^\tau$. De fato, sabemos que $u_n(x) \to u_0(x)$ para quase todo x, além disso, $u_n \in N_V^\tau$ implica que $T_\tau(u_n(x)) = u_n(x)$, logo

$$\begin{aligned} T_\tau(u_0(x)) &:= -u_0(\tau x) = -\lim_{n\to\infty} u_n(\tau x) = \lim_{n\to\infty} -u_n(\tau x) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_\tau(u_n(x)) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u_0(x). \end{aligned}$$

Segue, portanto, que $u_0 \in N_V^\tau$.

Seja $u_n^1 := u_n - u_0$. Temos que

(i) $\|u_n^1\|_E^2 = \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 + o(1)$;

(ii) $I_\infty(u_n^1) \to c - I_V(u_0)$;

(iii) $I'_\infty(u_n^1) \to 0$.

De fato,

(i) como $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ então

$$\langle u_n, u_0\rangle \to \langle u_0, u_0\rangle = \|u_0\|_E^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|u_n^1\|_E^2 &= \|u_n - u_0\|_E^2 = \|u_n\|_E^2 - 2\langle u_n, u_0\rangle + \|u_0\|_E^2 \\
&= \|u_n\|_E^2 - 2\|u_0\|_E^2 + \|u_0\|_E^2 + o(1) \\
&= \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 + o(1),
\end{aligned}$$

como queríamos.

(ii) Note que, se $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n u_0 dx = \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_0^2 dx + o(1).$$

Para tanto, devemos verificar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_0(u_n - u_0) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{1.17}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_0(u_n - u_0) &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V_\infty u_0(u_n - u_0) + \int_{B_R(0)} V_\infty u_0(u_n - u_0) \\
&\leq V_\infty\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}\|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} \\
&\quad + V_\infty\|u_0\|_{L^2(B_R(0))}\|u_n - u_0\|_{L^2(B_R(0))}.
\end{aligned}$$

Sabemos que, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $R > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon. \tag{1.18}$$

Além disso, desde que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ então existe $M > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

De (1.18) e (1.19) obtemos que

$$V_\infty\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}\|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} < \epsilon M V_\infty, \tag{1.20}$$

se $R > 0$ é suficientemente grande e para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $u_n \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ então

$$V_\infty\|u_0\|_{L^2(B_R(0))}\|u_n - u_0\|_{L^2(B_R(0))} \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{1.21}$$

Assim, por (1.20) e (1.21) obtemos (1.17).

Afirmamos que, por (1.17), pela convergência fraca de $\{u_n\}$ e pelo Lema A.2, segue que

$$I_\infty(u_n^1) - I_V(u_n) + I_V(u_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big((V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2)\big)\, dx + o(1). \tag{1.22}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^1) - I_V(u_n) + I_V(u_0) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2 + |\nabla u_0|^2) \\ &+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty u_n^2 - V_\infty 2u_n u_0 + V_\infty u_0^2 - V(x)u_n^2 + V(x)u_0^2) \\ &+\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} (-|u_n - u_0|^{p+1} + |u_n|^{p+1} - |u_0|^{p+1}). \end{aligned}$$

Por (1.17) obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 - 2V_\infty u_n u_0 + V_\infty u_0^2 dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty u_n^2 - 2V_\infty u_0^2 + V_\infty u_0^2) dx + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty u_n^2 - V_\infty u_0^2) dx + o(1). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 - V_\infty 2u_n u_0 + V_\infty u_0^2 - V(x)u_n^2 + V(x)u_0^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} ((V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2))dx + o(1).$$

Finalmente, desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2 + |\nabla u_0|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 - 2\nabla u_n \nabla u_0 + |\nabla u_0|^2 - |\nabla u_n|^2 + |\nabla u_0|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (-2\nabla u_0 \nabla u_0 + 2|\nabla u_0|^2) dx + o(1) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Diante das observações acima, obtemos a afirmação (1.22).

Por $(V2)$, dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|V_\infty - V(x)| < \epsilon \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_R(0).$$

Usando esta desigualdade, $(V1)$, a limitação de $\{u_n\}$, a desigualdade de Hölder e o fato que $u_n \to u_0$ em $L^2(B_R)$ mostremos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2) = o(1). \tag{1.23}$$

De fato, temos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2)\right| \\
&\leq \int_{B_R} |(V_\infty - V)||(u_n)^2 - (u_0)^2| + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} |(V_\infty - V)||(u_n)^2 - (u_0)^2| \\
&< C\int_{B_R} |((u_n)^2 - (u_0)^2)| + \epsilon \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} |((u_n)^2 - (u_0)^2)| \\
&\leq C\int_{B_R} ||u_n| - |u_0||(|(u_n)| + |(u_0)|) + \epsilon\left(\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C\|u_n - u_0\|_{L^2(B_R)}\|u_n + u_0\|_{L^2(B_R)} + \epsilon\left(C\|u_n\|^2_E + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C\epsilon\left(\|u_n\|_{L^2(B_R)} + \|u_0\|_{L^2(B_R)}\right) + \epsilon\left(CM^2 + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C\epsilon\left(\tilde{c}\|u_n\|_E + \|u_0\|_{L^2(B_R)}\right) + \epsilon\left(CM^2 + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C\epsilon\left(\tilde{c}M + \|u_0\|_{L^2(B_R)}\right) + \epsilon\left(CM^2 + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) = o(1).
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos (1.23). Substituindo em (1.22) obtemos que

$$I_\infty(u_n^1) - I_V(u_n) + I_V(u_0) = o(1). \tag{1.24}$$

De onde segue que

$$I_\infty(u_n^1) \to c - I_V(u_0),$$

como queríamos.

(iii) Agora devemos mostrar que

$$I'_\infty(u_n^1) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.25}$$

Para tanto, mostraremos primeiramente que

$$I'_\infty(u_n^1) = I'_V(u_n^1) + o(1), \tag{1.26}$$

e para isto é suficiente termos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V(x))u_n^1\varphi \to 0, \quad n \to \infty, \text{ para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

De fato, visto que $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em E então $u_n^1 \to 0$ em $L^2(B_R(0))$. Usando isto, a limitação de u_n^1 em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $(V2)$ segue que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V(x))u_n^1\varphi\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |V_\infty - V(x)||u_n^1||\varphi| + \int_{B_R(0)} |V_\infty - V(x)||u_n^1||\varphi| \\
&\leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|V_\infty - V(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}\|u_n^1\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \|\varphi\|_{L^2(B_R(0))}2V_\infty\|u_n^1\|_{L^2(B_R(0))} \\
&\leq C\epsilon k + C\epsilon = o(1),
\end{aligned}
$$

de onde segue (1.26). Em seguida, vejamos que

$$I'_V(u_n^1) = I'_V(u_n) - I'_V(u_0) + o(1). \tag{1.27}$$

De fato, pelo Lema A.2 temos que

$$-\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^{p-1}(u_n - u_0)\varphi = -\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1}u_n\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p-1}u_0\varphi + o(1),$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\begin{aligned} I'_V(u_n^1)\varphi = I'_V(u_n - u_0)\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla\varphi + V(x)u_n\varphi - |u_n|^{p-1}u_n\varphi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_0 \nabla\varphi + V(x)u_0\varphi - |u_0|^{p-1}u_0\varphi))dx + o(1) \\ &= I'_V(u_n)\varphi - I'_V(u_0)\varphi + o(1), \end{aligned}$$

de onde segue (1.27). Dessa forma, por (1.26), (1.27), usando o fato que $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) de I_V e que por (1.16) temos que $I'_V(u_0) = 0$, obtemos

$$I'_\infty(u_n^1) = I'_V(u_n^1) + o(1) = I'_V(u_n) - I'_V(u_0) + o(1) = o(1),$$

de onde segue (1.25). Portanto, obtemos que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞. Além disso, desde que $u_n, u_0 \in N_V^\tau$ e T_τ é linear segue que $T_\tau(u_n^1)(x) = u_n^1(x)$. Sabemos que $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então consideremos agora

$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_n^1(x)|^2 dx.$$

Se $\delta = 0$, segue do Lema de Lions [31] que

$$u_n^1 \to 0 \quad \text{em } L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para qualquer } 2 < q < 2^*. \tag{1.28}$$

Por (1.25) temos que $I'_\infty(u_n^1) \to 0$ e desde que $\{u_n^1\}$ é uma sequência limitada então $I'_\infty(u_n^1)u_n^1 \to 0 \quad$ quando $n \to \infty$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^1|^2 + V_\infty(u_n^1)^2 - |u_n^1|^{p+1} \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{1.29}$$

Sendo $1 < p < 2^* - 1$ então $2 < p + 1 < 2^*$, logo por (1.28)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1|^{p+1} \to 0.$$

Assim, substituindo em (1.29)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^1|^2 + V_\infty(u_n^1)^2 \to 0,$$

segue que

$$u_n \to u_0 \quad \text{em } E,$$

isto é, u_0 é uma solução τ-antissimétrica do problema (P_V), o que completa a prova. Agora, se $\delta > 0$, obtemos uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n)} |u_n^1(x)|^2 dx > \frac{\delta}{2}. \tag{1.30}$$

Definamos uma nova sequência $\{v_n^1\} \subset E$ fazendo

$$v_n^1 := u_n^1(. + y_n).$$

Como $\{u_n^1\}$ é limitada então $\{v_n^1\}$ também o é, e portanto podemos assumir que $v_n^1 \rightharpoonup u^1$ em E e $v_n^1(x) \to u^1(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por (1.30) temos que

$$\int_{B_1(0)} |v_n^1(x)|^2 dx > \frac{\delta}{2}. \tag{1.31}$$

Da convergência fraca sabemos que $v_n^1 \to u^1$ fortemente em $L^2(B_1(0))$ e, portanto, para n suficientemente grande

$$\int_{B_1(0)} |u^1(x)|^2 dx \geq \frac{\delta}{2},$$

de onde segue que $u^1 \neq 0$. Além disso, como $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em E, segue que $\{y_n\}$ é uma sequência ilimitada. Portanto, a menos de subsequência, podemos assumir que $|y_n| \to \infty$. Finalmente, visto que estamos sob as hipóteses do Lema B.2, (cf. Lema 8.3 de [41]), obtemos que $I'_\infty(u^1) = 0$.

Consideremos $\mathbb{R}^N = \Gamma \oplus \Gamma^\perp$, onde $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^N : \tau(x) = x\}$. Consideremos ainda P_Γ a projeção sobre o subespaço Γ. Neste ponto, podemos distinguir dois casos:

Caso I: Se $|y_n - \tau y_n|$ é limitada, definimos $y_n^1 := P_\Gamma(y_n)$;

Caso II: Se $|y_n - \tau y_n|$ é ilimitada, definimos $y_n^1 := y_n$.

Vejamos cada um dos casos:

Caso I: Observemos primeiramente que $|y_n^1| \to \infty$. De fato, pela Observação A.1 sabemos que a transformação linear ortogonal $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é diagonalizável e, pela Observação A.2, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\tau(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N) = (x_1, ..., x_k, -x_{k+1}, ..., -x_N). \tag{1.32}$$

Denotando por

$$y_n = P_\Gamma(y_n) + w_n = y_n^1 + w_n,$$

então $y_n^1 := P_\Gamma(y_n)$ implica $\tau(y_n^1) = y_n^1$. Seja $y_n = (x_1^n, ..., x_k^n, x_{k+1}^n, ..., x_N^n)$, onde $y_n^1 = (x_1^n, ..., x_k^n, 0, ..., 0)$ e $w_n = (0, ..., 0, x_{k+1}^n, ..., x_N^n)$. Temos que

$$\tau(y_n) = (x_1^n, ..., x_k^n, -x_{k+1}^n, ..., -x_N^n),$$

e

$$|y_n - \tau y_n| = |(0, ..., 0, 2x_{k+1}^n, ..., 2x_N^n)| = 2|w_n|.$$

Assim, na nova base temos que $|y_n - \tau y_n|$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|y_n - \tau y_n| \leq 2M$, isto é, $|w_n| \leq M$. Logo, desde que $y_n = y_n^1 + w_n$, $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $|w_n| \leq M$ então $|y_n^1| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Portanto, podemos considerar a sequência $\{u_n^1(\cdot + y_n^1)\}_n$, que é limitada, logo, a menos de subsequência, $u_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1$ em E, e $u^1 \neq 0$ é solução do problema limite (P_∞). Além disso, como $\tau(y_n^1) = y_n^1$ então

$$\begin{aligned} T_\tau(u^1(x)) := -u^1(\tau x) &= -\lim_{n\to\infty} u_n^1(\tau x + y_n^1) \\ &= \lim_{n\to\infty} -u_n^1(\tau(x + y_n^1)) \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n^1(x + y_n^1) = u^1(x). \end{aligned}$$

Definamos

$$u_n^2(x) := u_n^1(x) - u^1(x - y_n^1).$$

Verificaremos que $\{u_n^2\}_n$ é uma sequência (PS) para I_∞. Temos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^2) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n^1(x) - u^1(x - y_n^1))|^2 + V_\infty((u_n^1)(x) - u^1(x - y_n^1))^2 \\ &\quad - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x) - u^1(x - y_n^1)|^{p+1}. \end{aligned}$$

Se $z = x - y_n^1$ então $x = z + y_n^1$ e $dx = dz$. Renomeando z por x na mudança de variável, obtemos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^2(x)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n^1(x + y_n^1) - u^1(x))|^2 + V_\infty(u_n^1(x + y_n^1) - u^1(x))^2 \\ &\quad - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x + y_n^1) - u^1(x)|^{p+1}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\|u_n^1(\cdot + y_n^1) - u^1\|^2 = \|u_n^1(\cdot + y_n^1)\|^2 - 2\langle u_n^1(\cdot + y_n^1), u^1\rangle + \|u^1\|^2 \tag{1.33}$$

Visto que $u_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1$ em E, pela definição de convergência fraca e o Teorema da Representação de Riesz, obtemos que

$$\langle u_n^1(\cdot + y_n^1), \varphi\rangle \to \langle u^1, \varphi\rangle, \text{ para toda } \varphi \in E.$$

Em particular,

$$\langle u_n^1(\cdot + y_n^1), u^1\rangle \to \langle u^1, u^1\rangle,$$

de onde segue que,

$$\langle u_n^1(\cdot + y_n^1), u^1\rangle = \|u^1\|^2 + o(1).$$

Substituindo em (1.33) obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_n^1(\cdot + y_n^1) - u^1\|^2 &= \|u_n^1(\cdot + y_n^1)\|^2 - 2\|u^1\|^2 + o(1) + \|u^1\|^2 \\ &= \|u_n^1\|^2 - \|u^1\|^2 + o(1). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Por outro lado, pelo Lema de Brézis-Lieb [15], obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x + y_n^1) - u^1(x)|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x + y_n^1)|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |u^1(x)|^{p+1} + o(1). \tag{1.35}$$

Assim, de (1.34) e (1.35), obtemos que

$$
\begin{aligned}
I_\infty(u_n^2) &= \frac{1}{2}\|u_n^1\|^2 - \frac{1}{2}\|u^1\|^2 + o(1) - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x+y_n^1)|^{p+1} \\
&+ \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u^1(x)|^{p+1} + o(1) \\
&= I_\infty(u_n^1) - I_\infty(u^1) + o(1).
\end{aligned} \tag{1.36}
$$

Sendo $\{u_n^1\}$ uma sequência (PS) para I_∞, temos que $I_\infty(u_n^1)$ converge, e portanto, $I_\infty(u_n^2)$ também converge.

Finalmente, mostraremos que

$$
I'_\infty(u_n^2)\varphi \to 0 \quad \text{para} \ \ \text{toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.37}
$$

Visto que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞, sabemos que

$$
I'_\infty(u_n^1)\varphi = o(1) \quad \text{para} \ \ \text{toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.38}
$$

Além disso, como u^1 é uma solução do problema (P_∞) temos

$$
I'_\infty(u^1)\varphi = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.39}
$$

Assim, com uma mudança de variável, (1.38) e (1.39) obtemos que

$$
\begin{aligned}
|I'_\infty(u_n^2)\varphi| \;&=\; \Big|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1(x)\nabla\varphi(x) + V_\infty u_n^1(x)\varphi(x) - \nabla u^1(x-y_n^1)\nabla\varphi(x) - V_\infty u^1(x-y_n^1)\varphi \\
&\quad -|u_n^1(x) - u^1(x-y_n^1)|^{p-1}(u_n^1(x) - u^1(x-y_n^1))\varphi(x)\Big| \\
&=\; \Big|\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x)|^{p-1}u_n^1(x)\varphi(x) - |u^1(x-y_n^1)|^{p-1}u^1(x-y_n^1)\varphi(x) \\
&\quad -|u_n^1(x) - u^1(x-y_n^1)|^{p-1}(u_n^1(x) - u^1(x-y_n^1))\varphi(x) + o(1)\Big| \\
&=\; \Big|\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(z+y_n^1)|^{p-1}u_n^1(z+y_n^1)\varphi(z+y_n^1) - |u^1(z)|^{p-1}u^1(z)\varphi(z+y_n^1) \\
&\quad -|u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)|^{p-1}(u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z))\varphi(z+y_n^1) + o(1)\Big|.
\end{aligned}
$$

Agora, se $f(v) := |v|^{p-1}v$, procedendo como no Lema A.2, obtemos que

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n^1(z+y_n^1)) - f(u_n^1(z+y_n^1) - u_1(z)) - f(u_1(z)))\varphi(z+y_n^1)\right| \le C\epsilon\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},
$$

de onde segue (1.37). Portanto, $\{u_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência (PS) para I_∞.

Caso II: Aqui, sabemos que $|y_n - \tau y_n|$ é ilimitada e definimos $y_n^1 = y_n$. Além disso, sabemos que $u^1 \neq 0$ é solução fraca do problema (P_∞). Seja $u_n^2 := u_n^1 - \gamma_n$, onde

$$
\gamma_n(x) := u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right) - u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right), \tag{1.40}
$$

com

$$
\rho_n := \frac{|y_n^1 - \tau y_n^1|}{6} \to \infty, \quad n \to \infty,
$$

e a função corte $\chi : \mathbb{R}_0^+ \to [0,1]$ é uma função C^∞ tal que

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & \text{para todo} \quad s \geq 2, \\ 1 & \text{para todo} \quad s \leq 1, \end{cases}$$

e $|\chi'(s)| \leq 2$, para todo s.

Como τ é uma transformação linear ortogonal, segue que

$$\begin{aligned} T_\tau(\gamma_n(x)) &:= -\gamma_n(\tau x) = -u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right) + u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - \tau y_n^1|}{\rho_n}\right) \\ &= u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) - u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right) = \gamma_n(x). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} T_\tau(u_n^2(x)) &= T_\tau(u_n^1(x) - \gamma_n(x)) = T_\tau(u_n^1(x)) - T_\tau(\gamma_n(x)) \\ &= u_n^1(x) - \gamma_n(x) = u_n^2(x). \end{aligned}$$

Devemos mostrar que $\{u_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência (PS) para I_∞. Para tanto, mostraremos que

$$I_\infty(u_n^2) = I_\infty(u_n^1) - 2I_\infty(u^1) + o(1) \tag{1.41}$$

e utilizaremos o fato que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) de I_∞.

Temos que

$$\|u_n^2\|^2 = \|u_n^1 - \gamma_n\|^2 = \|u_n^1\|^2 - 2\langle u_n^1, \gamma_n\rangle + \|\gamma_n\|^2, \tag{1.42}$$

onde

$$\begin{aligned} \langle u_n^1, \gamma_n\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla\gamma_n + V_\infty u_n^1 \gamma_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left\{ u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) - u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - \tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\right\} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^1 \left\{ u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) - u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - \tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla\left(u^1(x - y_n^1)\right)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) + \nabla u_n^1 u^1(x - y_n^1)\nabla\left(\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla\left(u^1(\tau x - y_n^1)\right)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 u^1(\tau x - y_n^1)\nabla\left(\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^1 u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) - V_\infty u_n^1 u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\langle u_n^1, \gamma_n\rangle = 2\|u^1\|^2 + o(1). \tag{1.43}$$

De fato, sejam

$$A_n^1 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla\left((u^1(x - y_n^1)\right)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) + V_\infty u_n^1 u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right);$$

$$A_n^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left(u^1(\tau x - y_n^1)\right) \chi \left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right) + V_\infty u_n^1 u^1(\tau x - y_n^1) \chi \left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right);$$

$$A_n^3 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 u^1(x - y_n^1) \nabla \left(\chi \left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right);$$

$$A_n^4 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 u^1(\tau x - y_n^1) \nabla \left(\chi \left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right).$$

Mostremos que

$$A_n^1 \to \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2), \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Temos que

$$\left|A_n^1 - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2\right)\right| \leq \left|A_n^1 - \left[\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left(u^1(x - y_n^1)\right) + V_\infty u_n^1 u^1(x - y_n^1)\right]\right|$$
$$+ \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left(u^1(x - y_n^1)\right) + V_\infty u_n^1 u^1(x - y_n^1) - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2\right)\right|.$$

Seja $z = x - y_n^1$ então $x = z + y_n^1$ e $dx = dz$, então

$$A_n^1(1) = \left|A_n^1 - \left[\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left(u^1(x - y_n^1)\right) + V_\infty u_n^1 u^1(x - y_n^1)\right]\right|,$$

e

$$A_n^1(2) = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left(u^1(x - y_n^1)\right) + V_\infty u_n^1 u^1(x - y_n^1) - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2\right)\right|.$$

Avaliando-se $A_n^1(1)$:

$$\begin{aligned} A_n^1(1) &\leq \int_{z \in B_R(0)} \left|\left[\nabla u_n^1(z + y_n^1) \nabla (u^1(z)) + V_\infty u_n^1(z + y_n^1) u^1(z)\right] \left[\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) - 1\right]\right| \\ &+ \int_{z \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left|\left[\nabla u_n^1(z + y_n^1) \nabla (u^1(z)) + V_\infty u_n^1(z + y_n^1) u^1(z)\right] \left[\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) - 1\right]\right| \end{aligned}$$

Para $z \in B_R(0)$ e $n \geq n_0$ temos que $\frac{|z|}{\rho_n} < \frac{R}{\rho_n} \to 0$ quando $n \to \infty$, daí, para todo $z \in B_R(0)$ e para todo $n \geq n_0$ temos que $\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) = 1$, de onde segue que a primeira parcela de $A_n^1(1)$ é igual a zero, se n for suficientemente grande. Por outro lado, pela desigualdade de Hölder e, usando o fato que $|\chi(s)| \leq 1$ para todo s, dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$, independente de n, tal que

$$\begin{aligned} &\int_{z \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left|\left[\nabla u_n^1(z + y_n^1) \nabla (u^1(z)) + V_\infty u_n^1(z + y_n^1) u^1(z)\right] \left[\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) - 1\right]\right| \\ \leq\ & 2\left\{\int_{z \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left|\nabla u_n^1(z + y_n^1) \nabla (u^1(z)) + V_\infty u_n^1(z + y_n^1) u^1(z)\right|\right\} \\ \leq\ & 2\|\nabla u_n^1\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \|\nabla u^1\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} + 2V_\infty \|u_n^1\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \|u^1\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \\ \leq\ & C\|\nabla u^1\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} + V_\infty C \|u^1\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \\ <\ & C\epsilon + V_\infty C\epsilon, \end{aligned}$$

de onde segue que a segunda parcela de $A_n^1(1)$ converge a zero, se R for suficientemente grande e independente de n. Consequentemente, $A_n^1(1)$ converge a zero, quando $n \to \infty$.

Trabalharemos agora com $A_n^1(2)$. Pela mudança de variável, temos que

$$A_n^1(2) = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1(z+y_n^1)\nabla(u^1(z)) + V_\infty u_n^1(z+y_n^1)u^1(z) - \left(|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2\right) \right|.$$

De $u_n^1(z+y_n^1) \rightharpoonup u^1(z)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1(z+y_n^1)\nabla(u^1(z)) + V_\infty u_n^1(z+y_n^1)u^1(z) \to \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2\right),$$

e portanto $A_n^1(2)$ converge a zero quando $n \to \infty$. Dessa forma, podemos concluir a afirmação.

Para avaliarmos A_n^2, consideremos a seguinte mudança de variável $\tau x - y_n^1 = z$ então $x = \tau(z+y_n^1)$ e $dx = dz$. Assim,

$$A_n^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1(\tau(z+y_n^1))\nabla(u^1(z))\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) + V_\infty u_n^1(\tau(z+y_n^1))u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right).$$

Visto que u_n^1 é τ-antissimétrica, então

$$A_n^2 = -\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1((z+y_n^1))\nabla(u^1(z))\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) + V_\infty u_n^1((z+y_n^1))u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \right\}.$$

Logo, de maneira análoga ao que fizemos para A_n^1, obtemos que

$$A_n^2 \to -\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2) \right\} \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

Para concluirmos nossa afirmação em (1.43), resta-nos mostrar que tanto A_n^3 como A_n^4 convergem a zero. Temos que

$$\begin{aligned}
\left| \nabla \left(\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n} \right) \right) \right| &= \left| \chi'\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n} \right) \right| \left| \nabla \left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n} \right) \right| \\
&\leq \frac{2}{\rho_n} \left| \frac{(\tau x - y_n^1)}{|\tau x - y_n^1|} \right| \|\tau'\| \\
&= \frac{2}{\rho_n}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando mudança de variável novamente, a majoração acima, a desigualdade de Hölder e a limitação de $\{u_n^1\}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
|A_n^3| &\leq \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |\nabla u_n^1(z+y_n^1)||u^1(z)| \left| \nabla\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \right| dz \\
&\leq \frac{2}{\rho_n} \|\nabla u_n^1\|_{L^2(\rho_n<|z|<2\rho_n)} \|u^1\|_{L^2(\rho_n<|z|<2\rho_n)} \\
&\leq \frac{2}{\rho_n} \|u_n^1\|_{H_0^1} \|u^1\|_{L^2(\rho_n<|z|<2\rho_n)} \\
&\leq \frac{2}{\rho_n} M \|u^1\|_{L^2(\rho_n<|z|<2\rho_n)}.
\end{aligned}$$

Assim, $A_n^3 \to 0$ quando $n \to \infty$. De maneira análoga, obtemos que A_n^4 também converge a zero quando $n \to \infty$ e portanto, concluímos o que afirmamos em (1.43).

Agora, afirmamos que

$$\|\gamma_n\|^2 = 2\|u^1\|^2 + o(1). \tag{1.44}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \gamma_n|^2 + V_\infty (\gamma_n)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left[u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) - u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]\right|^2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \left[u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) - u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left[u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]\right|^2 \\
&- 2\left(\nabla \left[u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]\right) \cdot \left(\nabla \left[u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left[u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]\right|^2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \left[u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2 \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} 2V_\infty u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \left[u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2.
\end{aligned}$$

Por definição

$$\chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) \neq 0 \quad \text{se, somente se } |x - y_n^1| < 2\rho_n.$$

Além disso, pela escolha de ρ_n

$$\begin{aligned}
|\tau x - y_n^1| &= |\tau(\tau x - y_n^1)| = |x - \tau y_n^1| = |x - y_n^1 + y_n^1 - \tau y_n^1| \\
&\geq |y_n^1 - \tau y_n^1| - |x - y_n^1| \\
&> 6\rho_n - 2\rho_n = 4\rho_n > 2\rho_n.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right) = 0, \quad \text{sempre que } \chi\left(\frac{|x - y_n^1|}{\rho_n}\right) \neq 0.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^1(x-y_n^1)|^2 \left[\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} 2\nabla u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right) u^1(x-y_n^1)\nabla\left(\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} [u^1(x-y_n^1)]^2 \left|\nabla\left(\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right)\right|^2 + |\nabla u^1(\tau x-y_n^1)|^2 \left[\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} 2\nabla u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right) . u^1(\tau x-y_n^1)\nabla\left(\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} [u^1(\tau x-y_n^1)]^2 \left|\nabla\left(\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right)\right|^2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty[u^1(x-y_n^1)]^2 \left[\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2 + V_\infty[u^1(\tau x-y_n^1)]^2 \left[\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2 .
\end{aligned}$$

Como já feito anteriormente para A_n^3 e A_n^4, usando mudança de variável, a desigualdade de Hölder, a imersão de E nos espaços L^q para $1 \leq q < 2^*$, $|\chi(z)| \leq 1$ para todo z e ainda que $|\nabla\chi(\frac{z}{\rho_n})| \leq \frac{2}{\rho_n}$, obtemos que as integrais nas quais aparecem o termo $\nabla\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)$ tendem a zero quando $n \to \infty$. Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u^1(x-y_n^1)|^2 + V_\infty[u^1(x-y_n^1)]^2\right] \left[\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2 dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u^1(\tau x-y_n^1)|^2 + V_\infty[u^1(\tau x-y_n^1)]^2\right] \left[\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right]^2 dx + o(1).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\|\gamma_n\|^2 \to 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^1|^2 + V_\infty(u^1)^2,$$

de onde segue o que afirmamos em (1.44). Substituindo em (1.42), obtemos

$$\|u_n^2\|^2 = \|u_n^1\|^2 - 2\|u^1\|^2 + o(1). \tag{1.45}$$

Para concluirmos (1.41) precisamos avaliar os termos não lineares em $I_\infty(u_n^2)$ e mostrar que

$$|u_n^2|_{L^{p+1}}^{p+1} = |u_n^1|_{L^{p+1}}^{p+1} - 2|u^1|_{L^{p+1}}^{p+1} + o(1). \tag{1.46}$$

Para tanto, estimemos finalmente

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^2(x)|^{p+1} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x) - \gamma_n(x)|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x) - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right)|^{p+1} \\
&= \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} |u_n^1 - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)|^{p+1} \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} |u_n^1 + u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right)|^{p+1} \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus[B_{2\rho_n}(y_n^1)\cup B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)]} |u_n^1(x)|^{p+1}.
\end{aligned}$$

Sejam

$$B_n^1 = \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} |u_n^1 - u^1(x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)|^{p+1},$$

$$B_n^2 = \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} |u_n^1 + u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x-y_n^1|}{\rho_n}\right)|^{p+1} \quad \text{e}$$

$$B_n^3 = \int_{\mathbb{R}^N\setminus[B_{2\rho_n}(y_n^1)\cup B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)]} |u_n^1(x)|^{p+1}.$$

Assim, por mudança de variável, obtemos que

$$B_n^1 = \int_{|z|<2\rho_n} |u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)|^{p+1} \quad \text{e}$$

$$B_n^2 = \int_{|z|<2\rho_n} |u_n^1(\tau(z+y_n^1)) + u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)|^{p+1}.$$

Desde que u_n^1 é τ-antissimétrica então $u_n^1(\tau(\cdot+y_n^1)) = -u_n^1(\cdot+y_n^1)$. Logo,

$$B_n^2 = \int_{|z|<2\rho_n} |u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)|^{p+1} = B_n^1$$

Vamos mostrar que

$$u_n^1(\cdot+y_n^1) - u^1\chi\left(\frac{|\cdot|}{\rho_n}\right) \rightharpoonup 0 \quad \text{em } E.$$

Visto que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E, podemos considerar $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com suporte contido em $B_R(0)$. Temos que

$$\begin{aligned}\langle u_n^1(\cdot+y_n^1) - u^1\chi\left(\frac{|\cdot|}{\rho_n}\right), \varphi\rangle &= \int_{B_R(0)} \left[\nabla u_n^1 - \nabla\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right)\right]\nabla\varphi \\ &+ \int_{B_R(0)} \left[u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right]\varphi.\end{aligned}$$

Se $z \in B_R(0)$ então $\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) = 1$, para todo $n \geq n_0$, assim,

$$\langle u_n^1(\cdot+y_n^1) - u^1\chi\left(\frac{|\cdot|}{\rho_n}\right), \varphi\rangle = \langle u_n^1(\cdot+y_n^1) - u^1, \varphi\rangle + o(1),$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com suporte na $B_R(0)$. Desde que $u_n^1(\cdot+y_n^1) - u^1 \rightharpoonup 0$ em E, então se $n \to \infty$

$$\langle u_n^1(\cdot+y_n^1) - u^1\chi\left(\frac{|\cdot|}{\rho_n}\right), \varphi\rangle \to 0, \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Daí,

$$u_n^1(\cdot+y_n^1) - u^1\chi\left(\frac{|\cdot|}{\rho_n}\right) \rightharpoonup 0 \quad \text{em } E.$$

Além disso, $\{u_n^1\}$ é limitada em E, logo por imersão de Sobolev $\{u_n^1\}$ e $\left\{u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right\}$ são limitadas em L^{p+1}. Assim, por argumento idêntico ao da prova do Lema A.2 com $u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)$ no lugar de $u_0(x)$ e $\left|u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right| \leq |u^1(z)|$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$, obtemos que

$$B_n^1 = \int_{|z|<2\rho_n} |u_n^1(z+y_n^1)|^{p+1} - \int_{|z|<2\rho_n} |u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)|^{p+1} + o(1).$$

Da mesma maneira,

$$B_n^2 = \int_{|z|<2\rho_n} |u_n^1(z+y_n^1)|^{p+1} - \int_{|z|<2\rho_n} |u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)|^{p+1} + o(1).$$

Afirmamos que

$$\int_{|z|<2\rho_n} |u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^N} |u^1(z)|^{p+1} + o(1).$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u^1(z)|^{p+1} - \int_{|z|<2\rho_n} |u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)|^{p+1} &= \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |u^1(z)|^{p+1} + \int_{|z|>2\rho_n} |u^1(z)|^{p+1} \\ &- \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)|^{p+1} = o(1),\end{aligned}$$

pois $u^1 \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$B_n^1 = \int_{|z|<2\rho_n} |u_n^1(z+y_n^1)|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |u^1(z)|^{p+1} + o(1).$$

Da mesma maneira,

$$B_n^2 = \int_{|z|<2\rho_n} |u_n^1(z+y_n^1)|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |u^1(z)|^{p+1} + o(1).$$

Portanto segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^2(x)|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1(x)|^{p+1} - 2\int_{\mathbb{R}^N} |u^1(x)|^{p+1} + o(1). \tag{1.47}$$

De (1.45) e (1.47), obtemos (1.41). Como $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞, então $I_\infty(u_n^2) \to C$, para algum $C \in \mathbb{R}$.

Para completar a prova, vamos mostrar que se $n \to \infty$,

$$I'_\infty(u_n^2)\varphi \to 0, \quad \text{para toda} \quad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.48}$$

Definindo $S_n := \mathbb{R}^N \backslash \{B_{2\rho_n}(y_n^1) \cup B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)\}$, temos que,

$$
\begin{aligned}
|I'_\infty(u_n^2)\varphi| =& \Big| \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla(u_n^1 - \gamma_n)\nabla\varphi + V_\infty(u_n^1 - \gamma_n)\varphi - |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)\varphi \Big| \\
=& \Big| \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi - \nabla\gamma_n\nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - V_\infty\gamma_n\varphi - |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)\varphi \Big| \\
=& \Big| \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \nabla\gamma_n\nabla\varphi - V_\infty\gamma_n\varphi - \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)\varphi \\
&- \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)\varphi - \int_{S_n} |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)\varphi \\
&- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi \Big| \\
=& \Big| \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \nabla\gamma_n\nabla\varphi - V_\infty\gamma_n\varphi \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} [|u_n^1|^{p-1}u_n^1 - |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} [|u_n^1|^{p-1}u_n^1 - |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi + \int_{S_n} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi \\
&- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi - \int_{S_n} |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)\varphi \Big| \\
=& \Big| \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \nabla\gamma_n\nabla\varphi - V_\infty\gamma_n\varphi \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} [|u_n^1|^{p-1}u_n^1 - |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} [|u_n^1|^{p-1}u_n^1 - |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi + \int_{S_n} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi \\
&- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi - \int_{S_n} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi \Big| \\
=& \Big| \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi \\
&- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla\gamma_n\nabla\varphi + V_\infty\gamma_n\varphi + \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} [|u_n^1|^{p-1}u_n^1 - |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} [|u_n^1|^{p-1}u_n^1 - |u_n^1 - \gamma_n|^{p-1}(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi \Big|
\end{aligned}
$$

Desde que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞ temos que

$$I'_\infty(u_n^1)\varphi = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_n^1|^{p-1}u_n^1\varphi = o(1). \tag{1.49}$$

De (1.49), da definição de γ_n e desigualdade triangular, obtemos que

$$|I'_\infty(u_n^2)\varphi| \le K_n^1 + K_n^2 + o(1), \tag{1.50}$$

onde

$$K_n^1 := \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} |[|u_n^1|^{p-1}u_n^1 - \left|u_n^1 - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1}(u_n^1 - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right))]\varphi$$
$$- \nabla u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi|$$
$$+ \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} |u^1(x-y_n^1)\nabla\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi|,$$

e

$$K_n^2 := \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} |[|u_n^1|^{p-1}u_n^1 - \left|u_n^1 - u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1}$$
$$(u_n^1 - u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right))]\varphi$$
$$- \nabla u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi|$$
$$+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} |u^1(\tau x-y_n^1)\nabla\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi|.$$

Estimemos K_n^1 como segue. Desde que u^1 é solução do Problema (P_∞), fazendo uma mudança de variável, afirmamos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} \nabla u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi \\
&= \int_{|z|<2\rho_n} \left[\left|u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1}\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi(z+y_n^1)dz.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

De fato, por mudança de variável, temos que

$$\int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} \nabla u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi$$

$$= \int_{|z|<2\rho_n} \nabla u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi(z+y_n^1) + V_\infty u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\varphi(z+y_n^1)dz$$

Desde que $\chi = 0$ quando $|z| \geq 2\rho_n$ então

$$\int_{|z|<2\rho_n} \nabla u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi(z+y_n^1) + V_\infty u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\varphi(z+y_n^1)dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi(z+y_n^1) + V_\infty u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\varphi(z+y_n^1)dz$$

Agora, somando e subtraindo o termo $\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^1(z)\nabla\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\varphi(z+y_n^1)dz$ obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi(z+y_n^1) + V_\infty u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\varphi(z+y_n^1)dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^1(z) \nabla \left(\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) \right) + V_\infty u^1(z) \left(\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) \right) dz$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^1(z) \nabla \chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) dz$$

Como fizemos para A_n^3 o último termo converge a zero quando $n \to \infty$. Com isto e usando o fato que u^1 é solução de (P_∞), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^1(z) \nabla \left(\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) \right) + V_\infty u^1(z) \left(\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) \right) dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} |u^1(z)|^{p-1} u^1(z) \left(\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) \right) dz$$

Agora, desde que $\chi = 0$ quando $|z| \geq 2\rho_n$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u^1(z)|^{p-1} u^1(z) \left(\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) \right) dz$$
$$= \int_{|z|<2\rho_n} |u^1(z)|^{p-1} u^1(z) \left(\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) \right) dz.$$

Somando e subtraindo o termo $\int_{|z|<2\rho_n} \left| u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1)dz$, obtemos que

$$\int_{|z|<2\rho_n} |u^1(z)|^{p-1} u^1(z) \left(\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1) \right) dz.$$
$$= \int_{|z|<2\rho_n} \left| u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \varphi(z+y_n^1)dz$$
$$- \int_{|z|<2\rho_n} \left[|u^1(z)|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) - \left| u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \right] \varphi(z+y_n^1)dz$$

Resta-nos mostrar que o último termo converge a zero quando $n \to \infty$, isto é,

$$\int_{|z|<2\rho_n} \left[|u^1(z)|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) - \left| u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \right] \varphi(z+y_n^1)dz = o(1).$$

De fato, desde que $\chi = 1$ quando $|z| < \rho_n$ então

$$\int_{|z|<2\rho_n} \left[|u^1(z)|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) - \left| u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \right] \varphi(z+y_n^1)dz$$

$$= \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} \left[|u^1(z)|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) - \left| u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \right] \varphi(z+y_n^1)dz = D_n^1 - D_n^2,$$

onde

$$D_n^1 := \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |u^1(z)|^{p-1}u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\varphi(z+y_n^1)dz$$

e

$$D_n^2 := \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} \left|u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\varphi(z+y_n^1)dz.$$

Mostremos que D_n^1 converge a zero quando $n \to \infty$. Usando a desigualdade de Hölder e o fato que $|\chi| \leq 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
|D_n^1| &\leq \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |u^1(z)|^p \left|\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right| |\varphi(z+y_n^1)|dz \\
&\leq \left(\int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |u^1(z)|^{p+1}dz\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |\varphi(z+y_n^1)|^{p+1}dz\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&= \left(\int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |u^1(z)|^{p+1}dz\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} |\varphi(z)|^{p+1}dz\right)^{\frac{1}{p+1}} = o(1).
\end{aligned}$$

Da mesma forma estimamos D_n^2. Assim, obtemos que

$$\int_{|z|<2\rho_n} \left[|u^1(z)|^{p-1}u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) - \left|u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1} u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right]\varphi(z+y_n^1)dz$$

converge a zero quando $n \to \infty$. Segue, portanto (1.51).

Fazendo uma mudança de variável e (1.51) , obtemos que

$$\begin{aligned}
K_n^1 = &\int_{|z|<2\rho_n} |u_n^1(z+y_n^1)|^{p-1}(u_n^1(z+y_n^1))\varphi(z+y_n^1)dz \\
&- \int_{|z|<2\rho_n} \left|u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1}\left(u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right)\varphi(z+y_n^1)dz \\
&- \int_{|z|<2\rho_n} \left[\left|u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right|^{p-1}\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi(z+y_n^1)dz \\
&- \int_{|z|<2\rho_n} u^1(z)\nabla\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi(z+y_n^1)dz + o(1),
\end{aligned}$$

Como fizemos anteriormente para A_n^3 o termo com $\nabla\chi$ converge a zero quando $n \to \infty$. Usando isto, o Lema A.2, a convergência fraca $u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \rightharpoonup 0$ em E, usando o Teorema do Valor Médio, da mesma forma como fizemos em (1.37), obtemos que $K_n^1 = o(1)$. Da mesma maneira podemos estimar K_n^2, substituindo em (1.50) obtemos (1.48).

Segue portanto que $\{u_n^2\}$ é uma sequência PS para I_∞, também no caso II.

Agora procedemos por iteração. Notemos que se u é um ponto crítico não trivial de I_∞ e $\bar{u}$ é a solução de energia mínima do Problema (P_∞) dada por Berestycki e Lions [12], ver Proposição B.1, então temos que

$$I_\infty(u) \geq I_\infty(\bar{u}) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) |\bar{u}|^{p+1} > 0. \tag{1.52}$$

Por outro lado, por (1.41) e (1.24) obtemos

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^2) &= I_\infty(u_n^1) - 2I_\infty(u^1) + o(1) = I_V(u_n) - I_V(u_0) - 2I_\infty(u^1) + o(1) \\ &= c - I_V(u_0) - 2I_\infty(u^1) + o(1). \end{aligned} \tag{1.53}$$

De (1.52) e (1.53) a iteração deve ser finalizada em algum índice $k \in \mathbb{N}$.

■

No lema seguinte obteremos uma relação entre m_∞^τ e $2m_\infty$.

Lema 1.2

$$2m_\infty \leq m_\infty^\tau. \tag{1.54}$$

Prova.

Mostremos primeiramente que se $u \in N_\infty^\tau$ então $u^+, u^- \in N_\infty$. Usando mudança de variável e definindo $A^\tau := \{x : \ -u(\tau x) \geq 0\}$, obtemos que

$$\begin{aligned} I'_\infty(u^+)(u^+) &= \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty(u)^2)dx - \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} |u|^{p+1}dx \\ &= \int_{A^\tau} (|\nabla(-u(\tau x))|^2 + V_\infty((-u(\tau x)))^2)dx - \int_{A^\tau} |(-u(\tau x))|^{p+1}dx \\ &= \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty(u)^2)dz - \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} |u|^{p+1}dz \\ &= \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty(u^-)^2)dz - \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} |u^-|^{p+1}dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty(u^-)^2)dz - \int_{\mathbb{R}^N} |u^-|^{p+1}dz \\ &= I'_\infty(u^-)(u^-). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} 0 = I'_\infty(u)(u) &= \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} (|\nabla u^+|^2 + V_\infty(u^+)^2)dx - \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} |u^+|^{p+1}dx \\ &+ \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty(u^-)^2)dx - \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} |u^-|^{p+1}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^+|^2 + V_\infty(u^+)^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^{p+1}dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty(u^-)^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u^-|^{p+1}dx \\ &= I'_\infty(u^+)(u^+) + I'_\infty(u^-)(u^-) = 2I'_\infty(u^+)(u^+) = 2I'_\infty(u^-)(u^-). \end{aligned}$$

Segue que $I'_\infty(u^+)(u^+) = 0$ e $I'_\infty(u^-)(u^-) = 0$, ou seja, $u^+, u^- \in N_\infty$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
I_\infty(u^+) &= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty(u)^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} |u|^{p+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{A^\tau} (|\nabla(-u(\tau x))|^2 + V_\infty((-u(\tau x)))^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{A^\tau} |(-u(\tau x))|^{p+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty(u)^2)dz - \frac{1}{p+1}\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} |u|^{p+1}dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty(u^-)^2)dz - \frac{1}{p+1}\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} |u^-|^{p+1}dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty(u^-)^2)dz - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u^-|^{p+1}dz \\
&= I_\infty(u^-).
\end{aligned}
$$

Finalmente temos que

$$
\begin{aligned}
I_\infty(u) &= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty(u)^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} |u|^{p+1}dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)< 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty(u)^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\{x:\ u(x)< 0\}} |u|^{p+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} (|\nabla u^+|^2 + V_\infty(u^+)^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} |u^+|^{p+1}dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)< 0\}} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty(u^-)^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\{x:\ u(x)< 0\}} |u^-|^{p+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^+|^2 + V_\infty(u^+)^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^{p+1}dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty(u^-)^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u^-|^{p+1}dx \\
&= I_\infty(u^+) + I_\infty(u^-).
\end{aligned}
$$

Assim, para todo $u \in N^\tau_\infty$, temos que

$$I_\infty(u) = I_\infty(u^+) + I_\infty(u^-) = 2I_\infty(u^+) \geq 2m_\infty.$$

Pela definição de ínfimo

$$m^\tau_\infty := \inf_{u\in N^\tau_\infty} I_\infty(u) \geq 2m_\infty.$$

■

1.3 A Condição de Palais-Smale

Nesta seção verificaremos sob quais condições o funcional associado ao problema (P_V) satisfaz a condição de Palais-Smale.

Pelo Lema 1.2 é suficiente mostrarmos, como consequência do Lema 1.1, o seguinte resultado de compacidade que será usado na prova de nosso principal teorema.

Corolário 1.1 *O funcional $I_V|_{N_V^\tau}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$.*

Prova. Seja $\{u_n\} \subset N_V^\tau$ tal que $I_V(u_n) \to c < 2m_\infty$ e $I'_V(u_n) \to 0$. Com isto, segue como no Lema 1.1 que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em E. Portanto, a menos de subsequência, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E e argumentando como na prova do Lema 1.1 obtemos que $I'_V(u_0)\varphi = 0$, para toda $\varphi \in E$. Em particular,

$$0 = I'_V(u_0)u_0 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + V(x)u_0^2 - |u_0|^{p+1},$$

isto é,

$$\|u_0\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p+1}. \tag{1.55}$$

Assim, por (1.55), como $p > 1$ obtemos que

$$I_V(u_0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)|u_0|^{p+1} \geq 0.$$

Se u_n não converge fortemente a u_0 em E então, pelo Lema 1.1 mais uma vez, obtemos dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, em que $k_1 \geq 1$ ou $k_2 \geq 1$, k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u^j, $j = k_1+1, ..., k_1+k_2$ do problema (P_∞), satisfazendo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} I_V(u_n) &= c = I_V(u_0) + 2\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j) \\ &\geq I_V(u_0) + 2k_1 m_\infty + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j) \\ &\geq k_1 2m_\infty + k_2 m_\infty^\tau \geq 2m_\infty, \end{aligned}$$

o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, $u_n \to u_0$ em E e segue que o funcional $I_V|_{N_V^\tau}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$. ■

1.4 Demonstração do Teorema 1.1

Esta seção será dedicada à demonstração do teorema de existência deste capítulo.

Consideremos o seguinte resultado.

Lema 1.3 *Para cada $u \in E\backslash\{0\}$ existe um único número real $t_u > 0$ tal que $t_u u \in N_V$ e $I_V(t_u u)$ é o máximo para a função*

$$t \mapsto I_V(tu), \quad t > 0.$$

Prova. De fato, dado $u \neq 0$, coloquemos, para $t \geq 0$,

$$g_u(t) := I_V(tu) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^2}{2}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^{p+1}}{p+1}|u|^{p+1}.$$

Temos que

$$g_u'(t) = \int_{\mathbb{R}^N} t\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - \int_{\mathbb{R}^N} t^p|u|^{p+1},$$

e,

$$g_u''(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - \int_{\mathbb{R}^N} pt^{p-1}|u|^{p+1}.$$

Se $g_u'(\bar{t}) = 0$ temos que

$$\bar{t}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) = \bar{t}^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}.$$

Com isso e $p > 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} \bar{t}g_u''(\bar{t}) &= \bar{t}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - p\bar{t}^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \\ &= \bar{t}^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} - p\bar{t}^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} < 0. \end{aligned}$$

Logo, $\bar{t}$ é um ponto de máximo para g_u.

Além disso, $g_u(0) = 0 = g_u'(0)$ e como $u \neq 0$, por $(V1)$ obtemos

$$\begin{aligned} g_u''(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_0u^2\right) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} V_0u^2 > 0, \end{aligned}$$

donde segue que 0 é um ponto de mínimo local para g_u.

Para $t \geq 1$, visto que $p > 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} g_u(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^2}{2}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - \frac{1}{p+1}\int_{\{|tu|\leq 1\}} |tu|^{p+1} - \frac{1}{p+1}\int_{\{|tu|>1\}} |tu|^{p+1} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^2}{2}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - \frac{1}{p+1}\int_{\{|tu|>1\}} |tu|^{p+1} \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\{|u|>1\}} |u|^{p+1} \to -\infty, \quad \text{quando } t \to \infty. \end{aligned}$$

Assim, $g_u(\bar{t}) = \max_{t\geq 0} g_u(t)$ e portanto $g_u'(\bar{t}) = 0$, isto é

$$0 = g_u'(\bar{t}) = I_V'(\bar{t}u)u.$$

Logo,

$$I_V'(\bar{t}u)(\bar{t}u) = \bar{t}I_V'(\bar{t}u)u = \bar{t}0 = 0,$$

e assim, $\bar{t}u \in N_V$, como queríamos.

■

Em nosso próximo resultado estabeleceremos uma relação entre m_V^τ e $2m_\infty$.

Proposição 1.1 *Suponha que V satisfaz $(V1)$, $(V2)$ e $(V4)$. Então*

$$m_V^\tau < 2m_\infty. \tag{1.56}$$

Prova.

Seja $\bar{u} \in N_\infty$ a solução positiva e radialmente simétrica de (P_∞) (ver [12] e [27]), então $I_\infty(\bar{u}) = m_\infty$.

Definamos

$$z_y(x) = \bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)$$

onde $|y|$ será escolhido posteriormente de forma que $|y|$ e $|y-\tau y|$ sejam suficientemente grandes. Assim, $z_y(x) \neq 0$. Além disso, como $\bar{u}$ é radialmente simétrica e $|\tau x| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ é fácil ver que

$$T_\tau(z_y(x)) = z_y(x).$$

Nosso objetivo agora é mostrar que $t_{z_y} > 0$ do Lema 1.3 é tal que $t_{z_y} z_y \in N_V^\tau$ e t_{z_y} é limitado. É claro que $t_{z_y} z_y \in E^\tau \backslash \{0\}$.

Do Lema 1.3, temos que existe um único $t_{z_y} > 0$ tal que

$$I_V'(t_{z_y} z_y) t_{z_y} z_y = 0,$$

isto é, $t_{z_y} z_y \in N_V^\tau$. Segue portanto que

$$m_V^\tau =: \inf_{N_V^\tau} I_V \leq I_V(t_{z_y} z_y). \tag{1.57}$$

Mostraremos agora que t_{z_y} é limitado inferiormente e superiormente da seguinte forma: existem $t_1, t_2 > 0$ tais que $t_1 < t_{z_y} < t_2$ quando $|y-\tau y| \to \infty$. Para tanto, provemos primeiramente o seguinte resultado

Afirmação 1

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-y)|^{p+1} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-\tau y)|^{p+1} dx + o_y(1) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p+1} dx + o_y(1),
\end{aligned}$$

quando $|y| \to \infty$ e $|y-\tau y| \to \infty$. Aqui, $o_y(1) = C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}(1-2\delta)}$, para algum $\delta > 0$ a ser escolhido posteriormente.

Pelo Lema B.4, mudança de variável e o fato que $\bar{u}$ é radialmente simétrica, temos que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-y)|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-\tau y)|^{p+1} \right| \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-y)|^p |\bar{u}(x-\tau y)| dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-\tau y)|^p |\bar{u}(x-y)| dx \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(\hat{z})|^p |\bar{u}(\hat{z}-(y-\tau y))| d\hat{z} \\
&= 4\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz.
\end{aligned}$$

Seja $A_y = B_{\frac{|y-\tau y|}{p+1}(1-\delta)}(0) \subset \mathbb{R}^N$, para algum $\delta > 0$ a ser escolhido posteriormente. Pela Observação B.2 e pela desigualdade de Hölder, definindo $R_y := \frac{|y-\tau y|}{p+1}(1-\delta)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{A_y} |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^{p+1} \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{A_y} |\bar{u}(z+y-\tau y)|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq \|\bar{u}\|_{p+1}^p \left(\int_{A_y} e^{-\sqrt{V_\infty}(p+1)|z+y-\tau y|} dz \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|} \left(\int_0^{\frac{|y-\tau y|}{p+1}(1-\delta)} e^{\sqrt{V_\infty}(p+1)r} r^{N-1} dr \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|} \left(e^{\sqrt{V_\infty}(p+1)\frac{|y-\tau y|}{p+1}(1-\delta)} \int_0^{R_y} r^{N-1} dr \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&= Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|} e^{\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{(1-\delta)}{p+1}} \left(r^N \,\Big|_0^{R_y} \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&= Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\left(1-\frac{(1-\delta)}{p+1}\right)} \left(\frac{|y-\tau y|}{p+1}(1-\delta) \right)^{\frac{N}{p+1}} \\
&= C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p+1-1+\delta}{p+1}} |y-\tau y|^{\frac{N}{p+1}} \\
&= C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}} e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{\delta}{p+1}} |y-\tau y|^{\frac{N}{p+1}} \\
&\leq C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{A_y} |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz \leq C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}}. \tag{1.58}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_y} |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_y} |\bar{u}(z)|^{p+1} \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z+y-\tau y)|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_y} |\bar{u}(z)|^{p+1} \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq C\|\bar{u}\|_{p+1}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_y} e^{-\sqrt{V_\infty}(p+1)|z|} dz \right)^{\frac{p}{p+1}} \\
&= C\|\bar{u}\|_{p+1}^p \left(\int_{\frac{|y-\tau y|}{p+1}(1-\delta)}^{\infty} e^{-\sqrt{V_\infty}(p+1)r} r^{N-1} dr \right)^{\frac{p}{p+1}}.
\end{aligned}$$

Agora, da integração por partes, para qualquer $k > 0$ temos

$$\int e^{-kr} r^{N-1} dr = e^{-kr} P(r),$$

onde

$$P(r) := \frac{r^{N-1}}{k} - \frac{(N-1)}{k^2} r^{N-2} + \frac{(N-1)(N-2)}{k^3} r^{N-3} + \ldots + (-1)^{N+1} \frac{(N-1)!}{k^N}.$$

Assim,

$$\int_{R_y}^{\infty} e^{-kr} r^{N-1} dr = e^{-kr} P(r) \mid_{R_y}^{\infty} = e^{-kR_y} P(R_y) \tag{1.59}$$

Portanto, tomando $k := -\sqrt{V_\infty}(p+1)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_y} |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz &\leq C\|\bar{u}\|_{p+1}^p \left(e^{-\sqrt{V_\infty}(p+1)|y-\tau y|\frac{1-\delta}{p+1}}\right)^{\frac{p}{p+1}} P\left(|y-\tau y|\frac{1-\delta}{p+1}\right)^{\frac{p}{p+1}} \\
&= C\|\bar{u}\|_{p+1}^p e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}(1-2\delta)} \\
&\quad \left(e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\delta} P\left(|y-\tau y|\frac{1-\delta}{p+1}\right)\right)^{\frac{p}{p+1}} \\
&\leq C(\delta)\|\bar{u}\|_{p+1}^p e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}(1-2\delta)}.
\end{aligned}$$

Assim, com δ suficientemente pequeno, tal que $(1-2\delta) > 0$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_y} |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz \leq C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}(1-2\delta)}. \tag{1.60}$$

Assim, por (1.58) e (1.60), com $0 < (1-2\delta) < 1$ obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz \leq C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}(1-2\delta)}, \tag{1.61}$$

e a Afirmação 1 está provada.

Na sequência, provemos o seguinte

Afirmação 2

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y) dx = o_y(1), \tag{1.62}$$

quando $|y| \to \infty$ *e quando* $|y-\tau y| \to \infty$. *Aqui,* $o_y(1) = C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}$.

Fazendo uma mudança de variável, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y) dx = \int_{A_y} \bar{u}(z)\bar{u}(z+y-\tau y) dz + \int_{\mathbb{R}^N \setminus A_y} \bar{u}(z)\bar{u}(z+y-\tau y) dz,$$

onde $A_y = B_{\frac{|y-\tau y|}{2}(1-\delta)}(0) \subset \mathbb{R}^N$.

Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{A_y} \bar{u}(z)\bar{u}(z+y-\tau y)dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_y} |\bar{u}(z+y-\tau y)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\bar{u}\|_2 \left(\int_{A_y} e^{-\sqrt{V_\infty}|z+y-\tau y|2} dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|} \left(\int_0^{\frac{|y-\tau y|}{2}(1-\delta)} e^{\sqrt{V_\infty}2r} r^{N-1} dr\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|} \left(e^{\sqrt{V_\infty}2\frac{|y-\tau y|}{2}(1-\delta)} \int_0^{R_y} r^{N-1} dr\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|} e^{\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{(1-\delta)}{2}} \left(r^N \,\Big|_0^{R_y}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{\delta}{2}} |y-\tau y|^{\frac{N}{2}}.
\end{aligned}$$

Desde que $|y-\tau y| \to \infty$ então

$$\int_{A_y} \bar{u}(z)\bar{u}(z+y-\tau y)dz \leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}}. \tag{1.63}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, invariância por translação e (1.59), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} \bar{u}(z)\bar{u}(z+y-\tau y)dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} |\bar{u}(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z+y-\tau y)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} |\bar{u}(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}\|_2 \\
&\leq C\|\bar{u}\|_2 \left(\int_{|y-\tau y|\frac{1-\delta}{2}}^{\infty} e^{-\sqrt{V_\infty}2r} r^{N-1} dr\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|\bar{u}\|_2 \left(e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|(1-\delta)} P\left(|y-\tau y|\frac{1-\delta}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\delta)\|\bar{u}\|_2 e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1-2\delta}{2}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} \bar{u}(z)\bar{u}(z+y-\tau y)dz \leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}. \tag{1.64}$$

Segue de (1.63) e (1.64) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y)dx \\ &= 2\int_{A_y} \bar{u}(z)\bar{u}(z+y-\tau y)dz \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} \bar{u}(z)\bar{u}(z+y-\tau y)dz \\ &\leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}} + C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}.\end{aligned}$$

Desde que $0 < (1-2\delta) < 1$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y)dx \leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}. \tag{1.65}$$

E a prova da Afirmação 2 está completa.

Observação 1.1 *Em [27] Proposição 4.1, temos que*

$$|\nabla\bar{u}(x)| \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|x|}|x|^{-(\frac{N-1}{2})}.$$

Assim, argumentando como na prova da Afirmação 2, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\bar{u}(x-y))\nabla(\bar{u}(x-\tau y))dx \leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}.$$

Agora, estamos prontos para provar que t_{z_y} é limitado quando $|y-\tau y| \to \infty$. Devemos encontrar um limite inferior para t_{z_y}. Segue de $g'_{z_y}(t_{z_y}) = 0$ que

$$t_{z_y}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V(x)|z_y|^2 = t_{z_y}^p\|z_y\|_{p+1}^{p+1},$$

isto é,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V(x)|z_y|^2}{\|z_y\|_{p+1}^{p+1}} = t_{z_y}^{p-1}.$$

Com isto e $(V1)$

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V_0|z_y|^2}{\|z_y\|_{p+1}^{p+1}} \leq t_{z_y}^{p-1}.$$

Como antes, segue que

$$\frac{2\|\bar{u}\|^2 + o_y(1)}{2\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1} + o_y(1)} \leq t_{z_y}^{p-1}.$$

Desde que

$$\|\bar{u}\|^2 \leq 2\|\bar{u}\|^2 + o_y(1) \quad e \quad 2\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1} + o_y(1) < 2\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1} + 1$$

obtemos que

$$0 < \frac{\|\bar{u}\|^2}{2\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1} + 1} \leq \frac{2\|\bar{u}\|^2 + o_y(1)}{2\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1} + o_y(1)} \leq t_{z_y}^{p-1}. \tag{1.66}$$

Por outro lado, sabemos que

$$I_V'(t_{z_y}z_y)t_{z_y}z_y = 0.$$

Com isto, usando $(V2)$, a Afirmação 2 e a Observação 1.1 obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |t_{z_y}z_y|^{p-1}(t_{z_y}z_y)^2 &= t_{z_y}^2\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V(x)z_y|^2\right) \\
&\leq t_{z_y}^2\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V_\infty z_y|^2\right) \\
&= 2t_{z_y}^2\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 + V_\infty \bar{u}|^2\right) + o_y(1),
\end{aligned}$$

isto é,

$$t_{z_y}^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} |z_y|^{p+1} \leq 2\|\bar{u}\|^2 + o_y(1),$$

ou ainda

$$t_{z_y}^{p-1} \leq \frac{2\|\bar{u}\|^2 + o_y(1)}{\|z_y\|_{p+1}^{p+1}}.$$

Com isto e a Afirmação 1, temos que

$$t_{z_y}^{p-1} \leq \frac{2\|\bar{u}\|^2 + o_y(1)}{2\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1} + o_y(1)}.$$

Para $|y - \tau y|$ suficientemente grande, temos que $o_y(1) < 1$. Além disso,

$$2\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1} + o_y(1) > \|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1},$$

logo

$$t_{z_y}^{p-1} \leq \frac{2\|\bar{u}\|^2 + 1}{\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1}}. \tag{1.67}$$

Segue de (1.66) e (1.67) que existem $t_1, t_2 > 0$ tais que

$$0 < t_1 < t_{z_y} < t_2,$$

para todo $|y - \tau y|$ suficientemente grande.

Provemos agora, o seguinte resultado

Afirmação 3 *Para $|y| \to \infty$ e $|y - \tau y| \to \infty$ obtemos que*

$$I_V(t_{z_y}z_y) < 2m_\infty. \tag{1.68}$$

Com efeito, para simplicar a notação denotemos $t = t_{z_y}$, assim,

$$
\begin{aligned}
I_V(tz_y) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\bar{u}(x-y)|^2dx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\bar{u}(x-\tau y)|^2dx \\
&+ 2\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\bar{u}(x-y)\nabla\bar{u}(x-\tau y)dx \\
&+ \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\bar{u}(x-y)|^2dx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\bar{u}(x-\tau y)|^2dx \\
&+ 2\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y)dx \\
&- \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-y)-\bar{u}(x-\tau y)|^{p+1}dx \\
&= I_\infty(t\bar{u}(x-y)) + I_\infty(t\bar{u}(x-\tau y)) \\
&+ \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)-V_\infty)|\bar{u}(x-y)|^2dx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)-V_\infty)|\bar{u}(x-\tau y)|^2dx \\
&+ t^2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\bar{u}(x-y)\nabla\bar{u}(x-\tau y)dx \\
&+ \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-y)|^{p+1}dx + \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-\tau y)|^{p+1}dx \\
&- \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x-y)-\bar{u}(x-\tau y)|^{p+1}dx \\
&+ t^2\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y)dx \\
&:= I_\infty(t\bar{u}(x-y)) + I_\infty(t\bar{u}(x-\tau y)) + R(V, V_\infty, |y-\tau y|).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, defina

$$g_{\bar{u}}^{\infty}(t) := I_\infty(t\bar{u}) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\bar{u}|^2 + V_\infty(\bar{u})^2dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p+1}dx.$$

Como $\bar{u}$ é solução do problema limite então

$$g_{\bar{u}}^{\infty}(t) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p+1} - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p+1}. \tag{1.69}$$

Assim, derivando (1.69) obtemos

$$g_{\bar{u}}^{\prime\infty}(t) = (t-t^p)\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p+1}.$$

Logo, $g_{\bar{u}}^{\prime\infty}(t) = 0$ se, e somente se $t = 0$ ou $t = 1$. Como $g_{\bar{u}}^{\infty}(t)$ é uma função côncava e na origem é igual a zero então atinge o máximo exatamente em $t = 1$. Isto é, a função $t \mapsto I_\infty(t\bar{u})$ atinge o máximo em $t = 1$. Com isto e invariância por translação, temos que

$$I_\infty(t\bar{u}(x-y)) = I_\infty(t\bar{u}(x)) \leq I_\infty(\bar{u}(x)) = m_\infty$$

e

$$I_\infty(t\bar{u}(x-\tau y)) = I_\infty(t\bar{u}(x)) \leq I_\infty(\bar{u}(x)) = m_\infty.$$

Portanto,

$$I_V(tz_y) \leq 2m_\infty + R(V, V_\infty, |y - \tau y|). \tag{1.70}$$

Provaremos a seguir, que para $|y - \tau y|$ suficientemente grande e $t_{z_y} = t$ temos que

$$R(V, V_\infty, |y - \tau y|) < 0.$$

Primeiramente, por $(V4)$, mudança de variável e pela Observação B.2, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)|\bar{u}(x - y)|^2 dx &< -C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|x|} |\bar{u}(x - y)|^2 dx \\
&= -C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|z+y|} \bar{u}^2(z) dz \\
&\leq -Ce^{-\gamma|y|} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|z|} \bar{u}(z) dz \\
&\leq -Ce^{-\gamma|y|} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|z|} e^{-\sqrt{V_\infty}|z|} dz.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)|\bar{u}(x - y)|^2 dx \leq -Ce^{-\gamma|y|}. \tag{1.71}$$

Da mesma forma, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)|\bar{u}(x - \tau y)|^2 dx \leq -Ce^{-\gamma|\tau y|} = -Ce^{-\gamma|y|}. \tag{1.72}$$

Estudaremos agora, o sinal de $R(V, V_\infty, |y - \tau y|)$. Por (1.71), (1.72), (1.61) e pela observação 1.1, temos que

$$\begin{aligned}
R(V, V_\infty, |y - \tau y|) &\leq \frac{t^2}{2} 2 \left(-Ce^{-\gamma|y|}\right) + t^2 C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y - \tau y| \frac{1-2\delta}{2}} \\
&+ \frac{t^{p+1}}{p+1} C(\delta) e^{-\sqrt{V_\infty}|y - \tau y| \frac{p}{p+1}(1-2\delta)}.
\end{aligned}$$

Como $t = t_{z_y}$ é limitado e $\frac{1}{2} < \frac{p}{p+1}$, temos que

$$\begin{aligned}
R(V, V_\infty, |y - \tau y|) &\leq -C_1 e^{-\gamma|y|} + C_2 e^{-\sqrt{V_\infty}|y - \tau y| \frac{(1-2\delta)}{2}} + C_3 e^{-\sqrt{V_\infty}|y - \tau y| \frac{p}{p+1}(1-2\delta)} \\
&\leq -C_1 e^{-\gamma|y|} + C_2 e^{-\sqrt{V_\infty}|y - \tau y| \frac{(1-2\delta)}{2}},
\end{aligned}$$

onde C_1, C_2, C_3 são constantes positivas. Seja

$$\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n),$$

$$\tau\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_k, -y_{k+1}, \ldots, -y_n),$$

$$P_\Gamma \tilde{y} = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0),$$

$|\tilde{y} - \tau\tilde{y}| = |(0, \ldots, 0, 2y_{k+1}, \ldots, 2y_n)| = 2|(0, \ldots, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n)|$ tal que

$$|(0, \ldots, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n)| \to \infty.$$

Se escolhermos $y := P_\Gamma^\perp \tilde{y} = (0, \ldots, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n)$, tal que $2|y| = |y - \tau y|$, então

$$R(V, V_\infty, |y - \tau y|) \leq -C_1 e^{-\gamma|y|} + C_2 e^{-\sqrt{V_\infty}|y|(1-2\delta)}.$$

Por hipótese

$$\gamma < \sqrt{V_\infty},$$

então podemos escolher um $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tal que

$$\gamma < \sqrt{V_\infty}(1 - 2\delta).$$

Logo, para $|y|$ suficientemente grande

$$e^{-\gamma|y|} > \frac{C_2}{C_1} e^{-\sqrt{V_\infty}|y|(1-2\delta)}.$$

Isto implica que

$$R(V, V_\infty, |y - \tau y|) \leq -C_1 e^{-\gamma|y|} + C_2 e^{-\sqrt{V_\infty}|y|(1-2\delta)} < 0. \tag{1.73}$$

Segue, de (1.70) e (1.73) que

$$I_V(t_{z_y} z_y) \leq 2m_\infty + R(V, V_\infty, |y - \tau y|) < 2m_\infty, \tag{1.74}$$

para este subconjunto de $y \in \mathbb{R}^N$ escolhido tal que $|y - \tau y| = 2|y| \to \infty$ obtemos (1.68). Portanto, visto que $t_{z_y} z_y \in N_V^\tau$ então segue de (1.74) que

$$m_V^\tau \leq I_V(t_{z_y} z_y) < 2m_\infty,$$

e segue (1.56), como queríamos.

■

Visto que $I_V|_{N_V^\tau}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$, resta-nos mostrar que existe uma sequência $(PS)_c$ no nível $c = m_V^\tau$. Faremos isto no resultado a seguir.

Proposição 1.2 *Existe uma sequência $\{u_n\} \subset N_V^\tau$ satisfazendo*

$$I_V(u_n) \to m_V^\tau \quad e \quad I_V'(u_n) \to 0.$$

Prova. Afirmamos que existe $\alpha > 0$ tal que

$$||u||_E \geq \alpha > 0, \quad \text{para todo } u \in N_V. \tag{1.75}$$

De fato, de (1.1) no Lema 1.1, sabemos que existe $\rho > 0$ tal que

$$||u||_{L^{p+1}}^{p+1} \geq \rho^{p+1} > 0.$$

Assim, visto que $u \in N_V$ temos que

$$||u||_E^2 = ||u||_{L^{p+1}}^{p+1} \geq \rho^{p+1} > 0,$$

de onde segue que

$$||u||_E \geq (\rho^{p+1})^{\frac{1}{2}} := \alpha > 0,$$

como queríamos. Juntamente com o fato que $N_V = J^{-1}(0)$, onde

$$J \in C^1(E, \mathbb{R}), \quad J(u) := ||u||_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx,$$

segue que N_V é fechado em E. Além disso, para toda $u \in N_V$, desde que $p > 1$, temos que

$$\begin{aligned} J'(u)u &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 - (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} - (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \\ &= (1-p)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} < 0, \end{aligned}$$

e segue que

$$J'(u) \neq 0. \tag{1.76}$$

Logo, N_V é uma variedade de classe C^1 de E. Como E^τ é um subespaço fechado de E e $N_V^\tau = N_V \cap E^\tau$, então N_V^τ é uma subvariedade fechada de N_V em E^τ.

Seja $\{u_n\} \subset N_V^\tau$ uma sequência minimizante, isto é, $\{u_n\}$ é tal que $I_V(u_n) \to m_V^\tau$. Para toda $u \in N_V^\tau$, usando (1.75), obtemos

$$\begin{aligned} I_V(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) ||u||_E^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \alpha^2 := \alpha_1 > 0, \end{aligned}$$

de onde segue que I_V é limitado inferiormente sobre a subvariedade fechada N_V^τ. Dessa forma, podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland (ver [23]) em E^τ e obtermos $\{w_n\} \subset N_V^\tau$ e $\lambda_n \subset \mathbb{R}$ tais que $I_V(w_n) \to m_V^\tau$ e

$$I_V'(w_n)v - \lambda_n J'(w_n)v = o(1) \quad \text{para todo} \quad v \in E^\tau. \tag{1.77}$$

Para obtermos que $I_V'(w_n)v = o(1)$ para todo $v \in E^\tau$ é suficiente mostrarmos que $\lambda_n = o(1)$. Por (1.75), desde que $p > 1$ obtemos que

$$\begin{aligned} J'(w_n)w_n &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + V(x)w_n^2 - (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} - (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} \\ &= (1-p)\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} < (1-p)\rho^{p+1} < -C < 0. \end{aligned}$$

Além disso, a limitação de $\{w_n\}$ implica que $J'(w_n)w_n$ também é limitado. Por outro lado, como $w_n \in N_V^\tau$ então $I_V'(w_n)w_n = 0$. Portanto, considerando (1.77) com $v = w_n$, temos que $I_V'(w_n)w_n - \lambda_n J'(w_n)w_n = o(1)$, de onde segue que $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Substituindo em (1.77) segue que $I_V'(w_n)v \to 0$ para todo $v \in E^\tau$. Mas, desde que a ação T_τ é isométrica e por $(V3)$ temos que $I_V'(w_n) = T_\tau I_V'(T_\tau w_n) = T_\tau I_V'(w_n)$, então

$I'_V(w_n)v = 0$ para todo $v \in (E^\tau)^\perp$. Assim, $I'_V(w_n)v \to 0$ para todo $v \in E$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$I_V(u_n) \to m_V^\tau \quad \text{e} \quad I'_V(u_n) \to 0.$$

■

Dizemos que uma solução do problema (P_V) muda de sinal k vezes se o conjunto

$$\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$$

tem $k+1$ componentes conexas.

A proposição a seguir será usada para mostrarmos que a solução do problema (P_V) muda de sinal exatamente uma vez.

Proposição 1.3 *Se u é uma solução do problema (P_V) que muda de sinal $2k-1$ vezes, então $I_V(u) \geq km_V^\tau$.*

Prova. Suponhamos que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > 0\}$ tem k componentes conexas $A_1, ..., A_k$. Consideremos

$$u^i(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in A_i \cup \tau A_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.78}$$

Temos que

$$\begin{aligned} 0 = I'_V(u)(u^i) &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus (A_i \cup \tau A_i)} (\nabla u \nabla u^i + V(x)uu^i - |u|^{p-1}uu^i)dx \\ &+ \int_{(A_i \cup \tau A_i)} (\nabla u \nabla u^i + V(x)uu^i - |u|^{p-1}uu^i)dx \\ &= \int_{(A_i \cup \tau A_i)} (\nabla u \nabla u^i + V(x)uu^i - |u|^{p-1}uu^i)dx \\ &= \int_{(A_i \cup \tau A_i)} (|\nabla u^i|^2 + V(x)|u^i|^2 - |u^i|^{p+1})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^i|^2 + V(x)|u^i|^2 - |u^i|^{p+1})dx = I'_V(u^i)(u^i). \end{aligned}$$

Assim, $u^i \in N_V^\tau$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e

$$I_V(u) = I_V(u^1) + \cdots + I_V(u^k) \geq km_V^\tau,$$

como queríamos. ■

Finalmente, no que segue, provaremos nosso principal resultado.

Prova do Teorema 1.1. Seja $\{u_n\} \subset N_V^\tau$ uma sequência minimizante. Pela Proposição 1.2, temos que

$$I_V(u_n) \to m_V^\tau \quad \text{e} \quad I'_V(u_n) \to 0.$$

Claramente, $\{u_n\}$ é limitada em E. Portanto, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E com $I'_V(u_0) = 0$. Em vista do Lema 1.1 temos que ou $u_n \to u_0$ fortemente em E ou existem dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u_j, $j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2$ do problema (P_∞), satisfazendo as conclusões do Lema 1.1. Desde que pela Proposição 1.1, $m_V^\tau < 2m_\infty$ segue do Lema 1.1 item *5* que $k_1, k_2 = 0$. De fato, suponhamos por contradição e sem perda de generalidade que $k_1 \geq 1$ então

$$\begin{aligned} m_V^\tau &= I_V(u_0) + 2\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u_j) \\ &\geq I_V(u_0) + 2k_1 m_\infty + k_2 m_\infty^\tau \\ &\geq I_V(u_0) + 2m_\infty + k_2 m_\infty^\tau \geq 2m_\infty, \end{aligned}$$

contrariando $m_V^\tau < 2m_\infty$. Assim, $k_1 = k_2 = 0$, e portanto, $u_n \to u_0$ fortemente em E e $m_V^\tau = I_V(u_0)$. Na Proposição 1.2 temos que $I_V(u) > 0$ para todo $u \in N_V^\tau$ de onde segue que $m_V^\tau = I_V(u_0) > 0$, e portanto, $u_0 \neq 0$.

Desde que $u_0 \neq 0$ é τ-antissimétrica então é uma solução que muda de sinal. Devemos mostrar que u_0 muda de sinal exatamente uma vez. De fato, pela Proposição 1.3 obtemos que

$$m_V^\tau = I_V(u_0) \geq k m_V^\tau,$$

dessa forma $k = 1$ e a prova do teorema está completa.

Capítulo 2

Existência de soluções antissimétricas para uma classe de equações de Schrödinger não lineares

Neste capítulo consideramos a equação de Schrödinger não linear

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad u(\tau x) = -u(x) \\ \qquad\quad u(x) \to 0 \quad \text{if} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{P_f}$$

em que $N \geq 3$ e $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma transformação linear ortogonal tal que $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$, onde Id é a função identidade no $\mathbb{R}^N$. Consideramos $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com as mesmas hipóteses do Capítulo 1.

Estamos interessados no caso em que o termo não linear é mais geral, assim para a não linearidade f, começamos assumindo que

(f1) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f2) $f(0) = 0 = f'(0)$;

(f3) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $1 < p < 2^* - 1$ tais que

$$|f'(s)| \leq a_1 + a_2|s|^{p-1} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R};$$

(f4) existe uma constante $\mu > 2$ tal que, se $F(s) := \int_0^s f(t)dt$,

$$0 < \mu F(s) \leq sf(s) \quad \text{e} \quad (\mu - 1)sf(s) < f'(s)s^2 \quad \text{para todo } s \neq 0;$$

(f5) f é ímpar;

Usando uma versão do resultado devido a M. Struwe [40], denominado "lema de splitting", cuja prova é ligeiramente diferente daquela dada no capítulo anterior, estabelecemos a existência de solução antissimétrica para o problema (P_f). Além disso, mostramos que essa solução muda de sinal exatamente uma vez.

O próximo teorema contém o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.1 *Se V satisfaz $(V1) - (V4)$ e f satisfaz $(f1) - (f5)$ então o problema (P_f) tem uma solução não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, τ-antissimétrica, que muda de sinal exatamente uma vez.*

2.1 A estrutura variacional e alguns resultados técnicos

Consideremos E, E^τ e T_τ como no Capítulo 1. Definamos $I_V : E \to \mathbb{R}$ por

$$I_V(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Notemos que pelo Lema A.1 o funcional I_V está bem definido. Além disso, $I_V \in C^1(E,\mathbb{R})$ com

$$I'_V(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi dx \quad \text{para todo } u, \varphi \in E.$$

Consequentemente, pontos críticos do funcional I_V são precisamente soluções fracas do problema (P_f). A variedade de Nehari associada é dada por

$$N_V = \{u \in E \setminus \{0\} : \langle I'_V(u), u\rangle = 0\} = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \|u\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx\right\}.$$

Para obtermos soluções τ-invariantes, estudamos pontos críticos de I_V restrito à seguinte variedade de Nehari τ-invariante

$$N_V^\tau = \{u \in N_V : T_\tau(u(x)) = u(x)\}.$$

Veremos posteriormente que N_V^τ não é vazio. Como antes, denotaremos por

$$m_V = \inf_{u \in N_V} I_V(u) \quad \text{e} \quad m_V^\tau = \inf_{u \in N_V^\tau} I_V(u).$$

Consideraremos ainda o seguinte problema limite associado a (P_f)

$$-\Delta u + V_\infty u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N\ , \tag{P_∞}$$

cujo funcional associado é dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Além disso, denotaremos a variedade de Nehari desse funcional por

$$N_\infty := \{u \in E \setminus \{0\} : \langle I'_\infty(u), u\rangle = 0\} = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx\right\}$$

e

$$N_\infty^\tau := \{u \in N_\infty : T_\tau(u(x)) = u(x)\} = N_\infty \cap E^\tau,$$

onde

$$\|u\| = \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2\right) dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma associada ao produto interno

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V_\infty uv)dx, \quad \text{para todo } u, v \in E.$$

Na sequência, denotaremos

$$m_\infty = \inf_{u \in N_\infty} I_\infty(u) \quad \text{e} \quad m_\infty^\tau = \inf_{u \in N_\infty^\tau} I_\infty(u).$$

2.2 Uma versão do "Lema de Splitting" relacionado ao problema (P_f) devida a M. Struwe

Como no Capítulo 1, também neste caso o funcional I_V sobre N_V^τ pode não satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo nível de energia c. Para superar a falta de compacidade apresentaremos uma versão generalizada do Lema 1.1.

Lema 2.1 *Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N_V^\tau$ tal que*

$$I_V(u_n) \to c \quad e \quad I'_V|_{N_V^\tau}(u_n) \to 0.$$

Então, a menos de subsequência, existem dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2$ sequências $\{y_n^j\}_n$, uma solução τ-antissimétrica u_0 do problema (P_f), k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u^j, $j = k_1+1, ..., k_1+k_2$ do problema (P_∞), tais que, ou

1. *$u_n \to u_0$ fortemente em E, ou*
2. *se $j = 1, ..., k_1$, então $\tau y_n^j \neq y_n^j$, e $|y_n^j| \to \infty$ quando $n \to \infty$;*
3. *se $j = k_1+1, ..., k_2$, então $\tau y_n^j = y_n^j$, e $|y_n^j| \to \infty$ quando $n \to \infty$;*
4. $u_n(x) = u_0(x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k_1} [u^j(x - y_n^j) + T_\tau u^j(x - y_n^j)] + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} u^j(x - y_n^j) + o(1);$
5. $I_V(u_n) \to I_V(u_0) + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j).$

Prova. Desde que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_V restrito à variedade N_V^τ, então $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_V. A prova deste fato está contida na prova da Proposição 2.2. Usando isto e $(f4)$ mostraremos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em E. De fato, para n suficientemente grande, temos que

$$I_V(u_n) \leq 1 + c \quad \text{e} \quad I'_V(u_n)(-u_n) \leq \mu \|u_n\|_E.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + c + \|u_n\|_E &\geq I_V(u_n) - \frac{1}{\mu} I'_V(u_n)(u_n) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_n\|_E + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{\mu} f(u_n)(u_n) - F(u_n)\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_n\|_E^2, \end{aligned}$$

de onde segue que $\{u_n\}$ é limitada em E. Portanto, $u_n \rightharpoonup u_0$ em E. Mostremos que $I'(u_0) = 0$. De fato, como

$$E \hookrightarrow L^r_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \text{está imerso compactamente, para } 1 \leq r < 2^*.$$

temos que $u_n \to u_0$ em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq r < 2^*$. Logo, a menos de subsequência

(i) $u_n(x) \to u_0(x)$ para quase todo $x \in K$,

(ii) existe $h \in L^p(K)$ tal que $|u_n(x)|, |u_0(x)| \leq h(x)$ para quase todo $x \in K$,

onde K é um compacto qualquer em $\mathbb{R}^N$. Por (i) e pela continuidade de f, temos

$$f(u_n(x)) \to f(u(x)) \quad \text{para quase todo } x \in K. \tag{2.1}$$

Fixada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, consideremos $K = supp(\varphi)$, por $(f2)$ e $(f3)$ temos que

$$|f(u_n(x))\varphi(x)| \leq ||\varphi||_\infty h_1(x) \quad \text{para quase todo } x \in K,$$

e por (2.1)

$$f(u_n(x))\varphi(x) \to f(u(x))\varphi(x) \quad \text{para quase todo } x \in K.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n(x))\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))\varphi(x)dx \tag{2.2}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Por outro lado, segue da convergência fraca em E que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla\varphi + V(x)u_n\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla\varphi + V(x)u_0\varphi, \text{ para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.3}$$

Assim, por (2.2) e (2.3), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} I'_V(u_n)\varphi = I'_V(u_0)\varphi, \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Mas, por hipótese $\lim_{n\to\infty} I'_V(u_n)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$I'_V(u_0)\varphi = 0 \quad \text{para toda} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{2.4}$$

como queríamos.

Desde que $u_n(x) \to u_0(x)$ para quase todo $x \in K$ e $u_n \in N_V^\tau$, então

$$T_\tau(u_0(x)) = u_0(x),$$

logo, $u_0 \in N_V^\tau$.

Seja $u_n^1 := u_n - u_0$, temos que

(i) $\|u_n^1\|_E^2 = \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 + o(1)$;

(ii) $I_\infty(u_n^1) \to c - I_V(u_0)$;

(iii) $I'_\infty(u_n^1) \to 0$.

De fato,

(i) Segue imediatamente da convergência fraca;

(ii) Desde que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n u_0 = \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_0^2 dx + o(1). \tag{2.5}$$

Por $(f2)$ e $(f3)$ podemos aplicar o Lema B.1 com $j(s) = F(s)$. Com isto, usando (2.5) e a convergência fraca de (u_n), argumentando como em (1.22), obtemos que

$$I_\infty(u_n^1) - I_V(u_n) + I_V(u_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big((V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2)\big)\,dx + o(1). \tag{2.6}$$

Por (2.6) e (1.23), obtemos que

$$I_\infty(u_n^1) - I_V(u_n) + I_V(u_0) = o(1). \tag{2.7}$$

De onde segue (ii).

(iii) Mostraremos que

$$I'_\infty(u_n^1) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.8}$$

Em (1.26), temos que

$$I'_\infty(u_n^1) = I'_V(u_n^1) + o(1), \tag{2.9}$$

Agora afirmamos que

$$I'_V(u_n^1) = I'_V(u_n) - I'_V(u_0) + o(1). \tag{2.10}$$

De fato, por $(f2)$ e $(f3)$ podemos aplicar o Lema B.1 com $j(s) = f(s)\varphi$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ obtendo que

$$-\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n - u_0)\varphi = -\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\varphi + o(1), \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$\begin{aligned} I'_V(u_n^1)\varphi = I'_V(u_n - u_0)\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla\varphi + V(x)u_n\varphi - f(u_n)\varphi)dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_0 \nabla\varphi + V(x)u_0\varphi - f(u_0)\varphi)dx + o(1) \\ &= I'_V(u_n)\varphi - I'_V(u_0)\varphi + o(1). \end{aligned}$$

De onde segue (2.10). Dessa forma, por (2.9), (2.10), usando o fato que $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) de I_V e que por (2.4) temos que $I'_V(u_0) = 0$, obtemos

$$I'_\infty(u_n^1) = I'_V(u_n^1) + o(1) = I'_V(u_n) - I'_V(u_0) + o(1) = o(1),$$

de onde segue (2.8). Portanto, obtemos que (u_n^1) é uma sequência (PS) para I_∞. Além disso, desde que $u_n, u_0 \in N_V^\tau$ e T_τ é linear segue que $T_\tau(u_n^1)(x) = u_n^1(x)$. Sabemos que $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então consideremos agora

$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_n^1(x)|^2 dx.$$

Se $\delta = 0$, segue do Lema de Lions [31] que

$$u_n^1 \to 0 \quad \text{em } L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para qualquer } 2 < q < 2^*. \tag{2.11}$$

Por (2.8) temos que $I'_\infty(u_n^1) \to 0$ e desde que $\{u_n^1\}$ é uma sequência limitada então $I'_\infty(u_n^1)u_n^1 \to 0 \quad$ quando $n \to \infty$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^1|^2 + V_\infty (u_n^1)^2 - f(u_n^1)u_n^1 \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.12}$$

Como $2 < p+1 < 2^*$, por (2.11), de maneira análoga ao que fizemos para mostrar (2.2), usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1)u_n^1 \to 0.$$

Assim, substituindo em (2.12)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^1|^2 + V_\infty (u_n^1)^2 \to 0,$$

segue que

$$u_n \to u_0 \text{ em } E,$$

isto é, u_0 é uma solução τ-antissimétrica do problema (P_f) e a prova está completa. Agora, se $\delta > 0$, obtemos uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n)} |u_n^1(x)|^2 dx > \frac{\delta}{2}. \tag{2.13}$$

Definamos uma nova sequência $\{v_n^1\} \subset E$ fazendo

$$v_n^1 := u_n^1(. + y_n).$$

Como $\{u_n^1\}$ é limitada então $\{v_n^1\}$ também o é, e portanto podemos assumir que $v_n^1 \rightharpoonup u^1$ em E e $v_n^1(x) \to u^1(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por (2.13) temos que

$$\int_{B_1(0)} |v_n^1(x)|^2 dx > \frac{\delta}{2}. \tag{2.14}$$

Da convergência fraca sabemos que $v_n^1 \to u^1$ fortemente em $L^2(B_1(0))$ e, portanto, para n suficientemente grande

$$\int_{B_1(0)} |u^1(x)|^2 dx \geq \frac{\delta}{2},$$

de onde segue que $u^1 \neq 0$. Além disso, como $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em E, segue que $\{y_n\}$ é uma sequência ilimitada. Portanto, a menos de subsequência, podemos assumir que $|y_n| \to \infty$. Desde que estamos sob as hipóteses do Lema B.2, obtemos que $I'_\infty(u^1) = 0$.

Como no Capítulo 2, consideremos $\mathbb{R}^N = \Gamma \oplus \Gamma^\perp$, onde $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^N : \tau(x) = x\}$. Consideremos ainda P_Γ a projeção sobre o subespaço Γ. Assim, distinguiremos dois casos:

Caso I: Se $|y_n - \tau y_n|$ é limitada, definimos $y_n^1 := P_\Gamma(y_n)$;

Caso II: Se $|y_n - \tau y_n|$ é ilimitada, definimos $y_n^1 := y_n$.

Estudaremos cada caso:

Caso I: Pelo Lema 1.1, sabemos que $|y_n^1| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo, podemos considerar a sequência $\{u_n^1(. + y_n^1)\}_n$, que é limitada, logo, a menos de subsequência,

$u_n^1(.+y_n^1) \rightharpoonup u^1$ em E, e $u^1 \neq 0$ é solução do problema limite (P_∞). Além disso, como $\tau(y_n^1) = y_n^1$ então u^1 é τ-antissimétrica. Definamos

$$u_n^2(x) := u_n^1(x) - u^1(x - y_n^1).$$

Verificaremos que $\{u_n^2\}_n$ é uma sequência (PS) para I_∞. Temos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^2) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n^1(x) - u^1(x-y_n^1))|^2 + V_\infty((u_n^1)(x) - u^1(x-y_n^1))^2 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x) - u^1(x-y_n^1)). \end{aligned}$$

Se $z = x - y_n^1$ então $x = z + y_n^1$ e $dx = dz$. Renomeando z por x na mudança de variável, obtemos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^2(x)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n^1(x+y_n^1) - u^1(x))|^2 + V_\infty(u_n^1(x+y_n^1) - u^1(x))^2 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x+y_n^1) - u^1(x)). \end{aligned}$$

Como $u_n^1(.+y_n^1) \rightharpoonup u^1$ em E então

$$\|u_n^1 - u^1\|^2 = \|u_n^1\|^2 - \|u^1\|^2 + o(1). \tag{2.15}$$

Por outro lado, pelo Lema B.1 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x+y_n^1) - u^1(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x+y_n^1))dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(x))dx + o(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^2) &= \frac{1}{2}\|u_n^1\|^2 - \frac{1}{2}\|u^1\|^2 + o(1) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x+y_n^1))dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(x))dx + o(1) \\ &= I_\infty(u_n^1) - I_\infty(u^1) + o(1), \end{aligned} \tag{2.16}$$

de onde segue que $I_\infty(u_n^2)$ converge.

A seguir, mostraremos que

$$I'_\infty(u_n^2)\varphi \to 0 \quad \textit{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.17}$$

De fato, sabemos que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞ e u^1 é uma solução fraca do problema (P_∞) . Por uma mudança de variável, obtemos que

$$\begin{aligned} |I'_\infty(u_n^2)\varphi| &= |\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1(x)\nabla\varphi(x) + V_\infty u_n^1(x)\varphi(x) - \nabla u^1(x-y_n^1)\nabla\varphi(x) - V_\infty u^1(x-y_n^1)\varphi(x) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1(x) - u^1(x-y_n^1))\varphi(x)| \\ &= |\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1(z+y_n^1))\varphi(z+y_n^1) - f(u^1(z))\varphi(z+y_n^1) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z))\varphi(z+y_n^1) + o(1)\,|. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Usando $(f3)$ e procedendo como no Lema A.2, obtemos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n^1(z+y_n^1)) - f(u_n^1(z+y_n^1) - u_1(z)) - f(u_1(z)))\varphi(z+y_n^1)\right| \le C\epsilon\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

Aplicando a desigualdade acima para (2.18) obtemos que $I'_\infty(u_n^2) \to 0$. Logo, $\{u_n^2\}$ é uma sequência (PS) para I_∞.

Caso II: Neste caso, $|y_n - \tau y_n|$ é ilimitada e definimos $y_n^1 = y_n$. Além disso, sabemos que $u^1 \neq 0$ é solução fraca do problema (P_∞). Consideremos $u_n^2 := u_n^1 - \gamma_n$, onde γ_n é dada em (1.40). Desde que τ é uma transformação linear ortogonal, segue que

$$T_\tau(u_n^2(x)) = u_n^2(x).$$

Mostraremos que $\{u_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência (PS) para I_∞. Afirmamos, primeiramente, que

$$I_\infty(u_n^2) = I_\infty(u_n^1) - 2I_\infty(u^1) + o(1) \tag{2.19}$$

De fato, por (1.45), temos que

$$\|u_n^2\|^2 = \|u_n^1\|^2 - 2\|u^1\|^2 + o(1). \tag{2.20}$$

Para concluirmos (2.19) precisamos avaliar os termos não lineares em $I_\infty(u_n^2)$ e mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^2) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1) - 2\int_{\mathbb{R}^N} F(u^1) + o(1). \tag{2.21}$$

Para tanto, estimemos finalmente

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^2(x)) &= \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x) - \gamma_n(x)) = \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} F\left(u_n^1 - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right) \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} F\left(u_n^1 + u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus[B_{2\rho_n}(y_n^1)\cup B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)]} F(u_n^1(x)).
\end{aligned}$$

Sejam

$$B_n^1 = \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} F\left(u_n^1 - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right),$$

$$B_n^2 = \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} F\left(u_n^1 + u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|\tau x - y_n^1|}{\rho_n}\right)\right) \quad e$$

$$B_n^3 = \int_{\mathbb{R}^N\setminus[B_{2\rho_n}(y_n^1)\cup B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)]} F(u_n^1(x)).$$

Assim, por mudança de variável, obtemos que

$$B_n^1 = \int_{|z|<2\rho_n} F\left(u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right) \quad e$$

$$B_n^2 = \int_{|z|<2\rho_n} F\left(u_n^1(\tau(z+y_n^1)) + u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right).$$

Desde que u_n^1 é τ-antissimétrica então $u_n^1(\tau(z+y_n^1)) = -u_n^1(z+y_n^1)$. Logo,

$$B_n^2 = \int_{|z|<2\rho_n} F\left(u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right) = B_n^1.$$

Por outro lado, sabemos que

$$u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \rightharpoonup 0 \quad em\ H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, $\{u_n^1\}$ é limitada em E, logo por imersão de Sobolev $\{u_n^1\}$ e $\left\{u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right\}$ são limitadas em L^{p+1}. Assim, pelo Lema B.1 obtemos que

$$B_n^1 = \int_{|z|<2\rho_n} F(u_n^1(z+y_n^1)) - \int_{|z|<2\rho_n} F\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right) + o(1).$$

Da mesma maneira,

$$B_n^2 = \int_{|z|<2\rho_n} F(u_n^1(z+y_n^1)) - \int_{|z|<2\rho_n} F\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right) + o(1).$$

Afirmamos que

$$\int_{|z|<2\rho_n} F\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(z)) + o(1).$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(z)) - \int_{|z|<2\rho_n} F\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right) &= \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} F(u^1(z)) + \int_{|z|>2\rho_n} F(u^1(z)) \\ &- \int_{\rho_n<|z|<2\rho_n} F\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right) = o(1). \end{aligned}$$

Assim,

$$B_n^1 = \int_{|z|<2\rho_n} F(u_n^1(z+y_n^1)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(z)) + o(1).$$

Da mesma maneira,

$$B_n^2 = \int_{|z|<2\rho_n} F(u_n^1(z+y_n^1)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(z)) + o(1).$$

Portanto segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^2(x)) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x)) - 2\int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(x)) + o(1). \tag{2.22}$$

De (2.20) e (2.22), obtemos (2.19). Como $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞, então $I_\infty(u_n^2)$ converge.

Para completar a prova, mostraremos que se $n \to \infty$, então

$$I'_\infty(u_n^2)\varphi \to 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.23}$$

Se $S_n := \mathbb{R}^N \backslash \{B_{2\rho_n}(y_n^1) \cup B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)\}$, temos que

$$
\begin{aligned}
|I'_\infty(u_n^2)\varphi| =& \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla(u_n^1 - \gamma_n)\nabla\varphi + V_\infty(u_n^1 - \gamma_n)\varphi - f(u_n^1 - \gamma_n)\varphi\right| \\
=& \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \nabla\gamma_n\nabla\varphi - V_\infty\gamma_n\varphi - \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} f(u_n^1 - \gamma_n)\varphi\right. \\
&- \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} f(u_n^1 - \gamma_n)\varphi - \int_{S_n} f(u_n^1 - \gamma_n)\varphi \\
&\left.- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(u_n^1)\varphi + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(u_n^1)\varphi\right| \\
=& \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \nabla\gamma_n\nabla\varphi - V_\infty\gamma_n\varphi + \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} [f(u_n^1) - f(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi\right. \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} [f(u_n^1) - f(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi + \int_{S_n} f(u_n^1)\varphi \\
&\left.- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(u_n^1)\varphi - \int_{S_n} f(u_n^1 - \gamma_n)\varphi\right| \\
=& \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \nabla\gamma_n\nabla\varphi - V_\infty\gamma_n\varphi + \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} [f(u_n^1) - f(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi\right. \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} [f(u_n^1) - f(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi + \int_{S_n} f(u_n^1)\varphi \\
&\left.- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(u_n^1)\varphi - \int_{S_n} f(u_n^1)\varphi\right| \\
=& \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(u_n^1)\varphi\right. \\
&- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla\gamma_n\nabla\varphi + V_\infty\gamma_n\varphi + \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} [f(u_n^1) - f(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi \\
&\left.+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} [f(u_n^1) - f(u_n^1 - \gamma_n)]\varphi\right|.
\end{aligned}
$$

Desde que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞ temos que

$$
I'_\infty(u_n^1)\varphi = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(u_n^1)\varphi = o(1). \tag{2.24}
$$

De (2.24), da definição de γ_n e desigualdade triangular, obtemos que

$$
\begin{aligned}
|I'_\infty(u_n^2)\varphi| =& |o(1) - \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} \nabla u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi \\
&+ V_\infty u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi + \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} u^1(x-y_n^1)\nabla\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi \\
&- \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} \nabla u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} u^1(\tau x-y_n^1)\nabla\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} \left[f(u_n^1) - f\left(u_n^1 - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} \left[f(u_n^1) - f\left(u_n^1 - u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi| \\
\leq& \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} |\left[f(u_n^1) - f\left(u_n^1 - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi \\
&- \nabla u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi| \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(y_n^1)} \left|u^1(x-y_n^1)\nabla\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi\right| \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} |\left[f(u_n^1) - f\left(u_n^1 - u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi \\
&- \nabla u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(\tau x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi| \\
&+ \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} \left|u^1(\tau x-y_n^1)\nabla\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi\right| + o(1)
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$|I'_\infty(u_n^2)\varphi| \leq K_n^1 + K_n^2 + o(1), \tag{2.25}$$

onde

$$
\begin{aligned}
K_n^1 :=& \int_{B(y_n^1)_{2\rho_n}} |\left[f(u_n^1) - f\left(u_n^1 - u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi \\
&- \nabla u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(x-y_n^1)\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi| \\
&+ \int_{B(y_n^1)_{2\rho_n}} \left|u^1(x-y_n^1)\nabla\chi\left(\frac{|x-y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi\right|,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
K_n^2 :=& \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} | \left[f(u_n^1) - f\left(u_n^1 - u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi \\
& - \nabla u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi + V_\infty u^1(\tau x - y_n^1)\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\varphi| \\
& + \int_{B_{2\rho_n}(\tau y_n^1)} \left| u^1(\tau x - y_n^1)\nabla\chi\left(\frac{|x-\tau y_n^1|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi\right|.
\end{aligned}
$$

Estimemos K_n^1 como segue. Por mudança de variável e o fato que u^1 é solução do problema (P_∞), usando (1.51), obtemos que

$$
\begin{aligned}
K_n^1 =& \int_{|z|<2\rho_n} f(u_n^1(z+y_n^1))\varphi(z+y_n^1)dz \\
& - \int_{|z|<2\rho_n} f\left(u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right)\varphi(z+y_n^1)dz \\
& - \int_{|z|<2\rho_n} \left[f\left(u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\right)\right]\varphi(z+y_n^1)dz \\
& - \int_{|z|<2\rho_n} \left| u^1(z)\nabla\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)\nabla\varphi(z+y_n^1)\right| dz + o(1).
\end{aligned}
$$

Como fizemos anteriormente para A_n^3, o termo com $\nabla\chi$ converge a zero quando $n \to \infty$. Usando isto, o Lema B.1, a convergência fraca $u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)\chi\left(\frac{|z|}{\rho_n}\right) \rightharpoonup 0$ em E, e da mesma forma como fizemos em (2.17) usando o Teorema do Valor Médio obtemos que $K_n^1 = o(1)$. Da mesma maneira podemos estimar K_n^2, substituindo em (2.25) obtemos (2.23). Segue portanto que $\{u_n^2\}$ é uma sequência (PS) para I_∞.

Agora procedemos por iteração. Notemos que se u é um ponto crítico não trivial de I_∞ e $\bar{u}$ é a solução do problema (P_∞) dada por Berestycki e Lions [12], então temos por $(f4)$ que

$$
I_\infty(u) \geq I_\infty(\bar{u}) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(\bar{u})\bar{u} - F(\bar{u})\right) > 0. \tag{2.26}
$$

Por outro lado, por (2.19) e (2.7) obtemos

$$
\begin{aligned}
I_\infty(u_n^2) &= I_\infty(u_n^1) - 2I_\infty(u^1) + o(1) = I_V(u_n) - I_V(u_0) - 2I_\infty(u^1) + o(1) \\
&= c - I_V(u_0) - 2I_\infty(u^1) + o(1).
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

De (2.26) e (2.27) a iteração deve ser finalizada em algum índice $k \in \mathbb{N}$.

■

Lema 2.2 *Temos que*

$$
2m_\infty \leq m_\infty^\tau. \tag{2.28}
$$

Prova.

Mostraremos que se $u \in N_\infty^\tau$ então $u^+, u^- \in N_\infty$. De fato, usando mudança de variável e definindo $B^\tau := \{x : \ -u(\tau x) \geq 0\}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
I'_\infty(u^+)(u^+) &= \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty (u)^2)dx - \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} f(u)(u)dx \\
&= \int_{B^\tau} (|\nabla(-u(\tau x))|^2 + V_\infty((-u(\tau x)))^2)dx - \int_{B^\tau} f(-u(\tau x))(-u(\tau x))dx \\
&= \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty (u)^2)dz - \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} f(-u(z))(-u(z))dz \\
&= \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty (u^-)^2)dz - \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} f(u^-))(u^-)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty (u^-)^2)dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(u^-))(u^-)dz \\
&= I'_\infty(u^-)(u^-).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
0 = I'_\infty(u)(u) &= \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty (u)^2)dx - \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} f(u)(u)dx \\
&+ \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} (|\nabla u|^2 + V_\infty (u)^2)dx - \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} f(u)(u)dx \\
&= \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} (|\nabla u^+|^2 + V_\infty (u^+)^2)dx - \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} f(u^+)(u^+)dx \\
&+ \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty (u^-)^2)dx - \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} f(u^-)(u^-)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^+|^2 + V_\infty (u^+)^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u^+)(u^+)dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V_\infty (u^-)^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u^-)(u^-)dx \\
&= I'_\infty(u^+)(u^+) + I'_\infty(u^-)(u^-) = 2I'_\infty(u^+)(u^+) = 2I'_\infty(u^-)(u^-).
\end{aligned}$$

Segue que $I'_\infty(u^+)(u^+) = 0$ e $I'_\infty(u^-)(u^-) = 0$. Logo $u^+, u^- \in N_\infty$.

Agora, temos que

$$
\begin{aligned}
I_\infty(u^+) &= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}(|\nabla u|^2+V_\infty(u)^2)dx-\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}F(u)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{B^\tau}(|\nabla(-u(\tau x))|^2+V_\infty((-u(\tau x)))^2)dx-\int_{B^\tau}F(-u(\tau x))dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}}(|\nabla u|^2+V_\infty(u)^2)dz-\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}}F(-u)dz\\
&= \frac{1}{2}\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}}(|\nabla u^-|^2+V_\infty(u^-)^2)dz-\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}}F(u^-)dz\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u^-|^2+V_\infty(u^-)^2)dz-\int_{\mathbb{R}^N}F(u^-)dz\\
&= I_\infty(u^-).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I_\infty(u) &= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}(|\nabla u|^2+V_\infty(u)^2)dx-\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}F(u)dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)<0\}}(|\nabla u|^2+V_\infty(u)^2)dx-\int_{\{x:\ u(x)<0\}}F(u)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}(|\nabla u^+|^2+V_\infty(u^+)^2)dx-\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}F(u^+)dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)<0\}}(|\nabla u^-|^2+V_\infty(u^-)^2)dx-\int_{\{x:\ u(x)<0\}}F(u^-)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u^+|^2+V_\infty(u^+)^2)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(u^+)dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u^-|^2+V_\infty(u^-)^2)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(u^-)dx\\
&= I_\infty(u^+)+I_\infty(u^-).
\end{aligned}
$$

Logo, para todo $u\in N_\infty^\tau$, temos que

$$I_\infty(u)=I_\infty(u^+)+I_\infty(u^-)=2I_\infty(u^+)\geq 2m_\infty.$$

Assim,

$$m_\infty^\tau := \inf_{u\in N_\infty^\tau} I_\infty(u)\geq 2m_\infty.$$

■

2.3 A condição de Palais-Smale

Nesta seção verificaremos que o funcional I_V associado ao problema (P_f) satisfaz $(PS)_c$ abaixo de um nível dado.

Como consequência do Lema 2.1, apresentaremos o seguinte resultado de compacidade que será usado na prova do Teorema 2.1.

Corolário 2.1 *Se f satisfaz $(f1)-(f4)$, o funcional $I_V|_{N_V^\tau}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$.*

Prova. Consideremos $\{u_n\} \subset N_V^\tau$ tal que $I_V(u_n) \to c < 2m_\infty$ e $I_V'(u_n) \to 0$.

Usando $(f4)$, segue como no Lema 2.1 que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em E. Portanto, a menos de subsequência, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E e argumentando como na prova do Lema 2.1 novamente, obtemos que $I_V'(u_0)\varphi = 0$, para toda $\varphi \in E$. Em particular,

$$0 = I_V'(u_0)u_0 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + V(x)u_0^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)(u_0),$$

isto é,

$$\|u_0\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)(u_0). \tag{2.29}$$

Assim, novamente por $(f4)$ e (2.29) obtemos que

$$I_V(u_0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_0)(u_0) - F(u_0)\right) \geq 0.$$

Se u_n não converge fortemente a u_0 em E então, pelo Lema 2.1 mais uma vez, obtemos dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, em que $k_1 \geq 1$ ou $k_2 \geq 1$, k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u^j, $j = k_1+1, ..., k_1+k_2$ do problema (P_∞), satisfazendo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I_V(u_n) &= c = I_V(u_0) + 2\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j) \\
&\geq I_V(u_0) + 2k_1 m_\infty + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j) \\
&\geq k_1 2m_\infty + k_2 m_\infty^\tau \geq 2m_\infty,
\end{aligned}$$

o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, $u_n \to u_0$ em E e segue que o funcional $I_V|_{N_V^\tau}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$. ■

2.4 Demonstração do Teorema 2.1

Nesta seção provaremos o resultado de existência deste capítulo.

Lema 2.3 *Para cada $u \in E\backslash\{0\}$ existe um único número real $t_u > 0$ tal que $t_u u \in N_V$ e $I_V(t_u u)$ é o máximo para a função*

$$t \mapsto I_V(tu), \quad t > 0.$$

Prova. De fato, dado $u \neq 0$, coloquemos, para $t \geq 0$,

$$g_u(t) := I_V(tu) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^2}{2}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu)dx.$$

Temos que

$$g_u'(t) = \int_{\mathbb{R}^N} t\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - uf(tu)dx,$$

e,

$$g_u''(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - u^2 f'(tu)dx.$$

Se $g_u'(\bar{t}) = 0$ temos que

$$\bar{t}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} uf(\bar{t}u)dx. \tag{2.30}$$

De (2.30) e $(f4)$ segue que

$$\begin{aligned} \bar{t}^2 g_u''(\bar{t}) &= \bar{t}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx - \bar{t}^2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 f'(\bar{t}u)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\bar{t}uf(\bar{t}u) - \bar{t}^2 u^2 f'(\bar{t}u)\right) dx < 0, \end{aligned}$$

Assim, $\bar{t}$ é um ponto de máximo para g_u.

Mostremos agora que $\bar{t}$ é único. Seja $t \leq \bar{t}$, assim, por $(f4)$ temos que $\frac{f(tu)}{tu} \leq \frac{f(\bar{t}u)}{\bar{t}u}$. Logo, desde que $g_u'(\bar{t}) = 0$ obtemos que

$$\begin{aligned} g_u'(t) &= t\|u\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} uf(tu)dx \\ &= t\left[\|u\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \frac{f(tu)}{tu}dx\right] \\ &\geq t\left[\|u\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \frac{f(\bar{t}u)}{\bar{t}u}dx\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é, se $t \leq \bar{t}$

$$g_u'(t) \geq 0. \tag{2.31}$$

De maneira análoga, se $t \geq \bar{t}$

$$g_u'(t) \leq 0. \tag{2.32}$$

Segue de (2.31) e (2.32) que $\bar{t}$ é o único ponto de máximo para a função $t \mapsto I_V(tu),\ t > 0$. Assim,

$$g_u(\bar{t}) = \max_{t \geq 0} g_u(t),$$

e portanto

$$0 = g_u'(\bar{t}) = I_V'(\bar{t}u)u.$$

Logo,

$$I_V'(\bar{t}u)\bar{t}u = \bar{t}I_V'(\bar{t}u)u = 0.$$

Assim, $\bar{t}u \in N_V$ e a prova do Lema 2.3 está completa. ■

Estabeleceremos a seguir uma relação entre m_V^τ e $2m_\infty$.

Proposição 2.1 *Suponhamos que V satisfaz $(V1)$, $(V2)$, $(V4)$ e f satisfaz $(f3)$ e $(f4)$. Então*

$$m_V^\tau < 2m_\infty. \tag{2.33}$$

Prova. Seja $\bar{u} \in N_\infty$ a solução do Problema (P_∞) dada por Berestycki e Lions [12].

Definamos

$$z_y(x) = \bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)$$

onde $|y|$ e $|y-\tau y|$ são suficientemente grandes com $|y|$ escolhido posteriormente. Assim, $z_y(x) \neq 0$. Além disso, como $\bar{u}$ é radialmente simétrica e $|\tau x| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ é fácil ver que

$$T_\tau(z_y(x)) = z_y(x).$$

Mostraremos na sequência que $t_{z_y} > 0$ do Lema 2.3 é tal que $t_{z_y} z_y \in N_V^\tau$ e t_{z_y} é limitado. É claro que $t_{z_y} z_y \in E^\tau \backslash \{0\}$.

Do Lema 2.3, segue que existe um único $t_{z_y} > 0$ tal que

$$I_V'(t_{z_y} z_y) t_{z_y} z_y = 0,$$

isto é, $t_{z_y} z_y \in N_V^\tau$, e portanto que

$$m_V^\tau =: \inf_{N_V^\tau} I_V \leq I_V(t_{z_y} z_y). \tag{2.34}$$

Na sequência, mostraremos que t_{z_y} é limitado quando $|y - \tau y|$ é suficientemente grande. Para tanto, provaremos o seguinte

Afirmação 4

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(z_y) &= \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y)) + \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-\tau y)) + o_y(1) \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}) dx + o_y(1). \end{aligned}$$

quando $|y| \to \infty$ *e* $|y - \tau y| \to \infty$.

De fato, pelo Lema B.4 e mudança de variável, temos que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^N} F(z_y) - \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-\tau y)) \right| \\ \leq\ & 2\int_{\mathbb{R}^N} [f(\bar{u}(x-y))\bar{u}(x-\tau y) + f(\bar{u}(x-\tau y))\bar{u}(x-y)] \\ =\ & 2\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y) + 2\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(\hat{z}))\bar{u}(\hat{z}-(y-\tau y)) \\ =\ & 4\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y). \end{aligned}$$

Seja $A_y = B_{\frac{|y-\tau y|}{p+1}(1-\delta)}(0) \subset \mathbb{R}^N$, onde $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Assim, por $(f3)$, $(f4)$, obtemos que

$$\begin{aligned} &\int_{A_y} |f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)| dz \\ \leq\ & \int_{A_y} (a_1|\bar{u}(z)|dz + a_2|\bar{u}(z)|^p)\, |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz \\ =\ & \int_{A_y} a_1 |\bar{u}(z)||\bar{u}(z+y-\tau y)| dz + \int_{A_y} a_2 |\bar{u}(z)|^p |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz. \end{aligned}$$

Como nas Afirmações 1 e 2 do Capítulo 1, segue que

$$\int_{A_y} |f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)|dz \leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}} + C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}}. \tag{2.35}$$

De maneira análoga, usando $(f3)$, $(f4)$ e as Afirmações 1 e 2 do Capítulo 1, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} |f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)|dz \leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)} + C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}(1-2\delta)}. \tag{2.36}$$

Com $0 < (1-2\delta) < 1$, por (2.35), (2.36) e o fato que $\frac{1}{2} < \frac{p}{p+1}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)dz &\leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)} \\ &+ C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{p}{p+1}(1-2\delta)} \\ &\leq C(\delta)e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)},\end{aligned}$$

de onde segue a Afirmação 4. Observe que $o_y(1) := Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}$.

Na sequência, provaremos que t_{z_y} é limitado quando $|y-\tau y| \to \infty$. Pelas observações 1.1 e B.2, temos que

$$\|z_y\|_E^2 = 2\|\bar{u}\|_E^2 + o(1).$$

Portanto,

$$\|\bar{u}\|_E^2 \leq \|z_y\|_E^2 \leq 3\|\bar{u}\|_E^2, \quad \text{para} \quad |y| \to \infty. \tag{2.37}$$

Por outro lado, por $(f4)$, obtemos que

$$F(s) \geq Cs^\mu, \quad \text{para todo} \quad s \geq 1. \tag{2.38}$$

Agora, desde que $t_{z_y}z_y \in N_V^\tau$ então

$$t_{z_y}^2\|z_y\|_E^2 \geq \rho^2. \tag{2.39}$$

Por $(V2)$, como em (2.37) temos que

$$\begin{aligned}\|z_y\|_E^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V(x)|z_y|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V_\infty|z_y|^2 \\ &= 2\|\bar{u}\|^2 + o(1) \leq 3\|\bar{u}\|^2.\end{aligned}$$

Com isto e (2.39) obtemos que

$$t_{z_y}^2 \geq \frac{\rho^2}{\|z_y\|_E^2} \geq \frac{\rho^2}{3\|\bar{u}\|^2} = C > 0. \tag{2.40}$$

Suponhamos que $t_{z_y} \to \infty$ quando $|y-\tau y| \to \infty$ ou $|y| \to \infty$. Desde que $\bar{u}$ é uma função contínua e $\bar{u}(x-y) \to 0$ quando $|y| \to \infty$, então dada $B_1(y) \subset \mathbb{R}^N$ a bola fechada unitária, centrada em $y \in \mathbb{R}^N$, existe uma constante positiva m_1 tal que para $|y|$ e $|y-\tau y|$ suficientemente grandes, pela definição de z_y

$$t_{z_y}z_y(x) > 1 \quad \text{e} \quad z_y(x) > m_1 > 0 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in B_1(y).$$

De onde segue que

$$\int_{B_1(y)} |t_{z_y} z_y|^\mu \geq m_1 t_{z_y}^\mu \int_{B_1(y)} 1 = m_1^\mu t_{z_y}^\mu |B_1(y)| = m_1^\mu t_{z_y}^\mu |B_1(0)|. \tag{2.41}$$

Agora, por (2.38) temos que

$$\int_{B_1(y)} |t_{z_y} z_y|^\mu \leq \int_{B_1(y)} F(t_{z_y} z_y) < \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} F(t_{z_y} z_y) dx. \tag{2.42}$$

Além disso, desde que

$$I'_V(t_{z_y} z_y) t_{z_y} z_y = 0,$$

então, usando $(V2)$, a Afirmação 3 e a observação 1.1 obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f(t_{z_y} z_y)(t_{z_y} z_y) &= t_{z_y}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V(x) z_y^2 \right) \\
&\leq t_{z_y}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 + V_\infty z_y^2 \right) \\
&= 2t_{z_y}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 + V_\infty \bar{u}^2 \right) + o_y(1) \\
&\leq 2t_{z_y}^2 ||\bar{u}||^2 + o(1).
\end{aligned}$$

Com isto, usando (2.41), (2.42) e $(f4)$ obtemos que

$$Ct_{z_y}^\mu \leq \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \mu F(t_{z_y} z_y) dx < \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} f(t_{z_y} z_y)(t_{z_y} z_y) \leq 2t_{z_y}^2 ||\bar{u}||^2 + o(1).$$

Assim,

$$t_{z_y}^{\mu-2} \leq \frac{2||\bar{u}||^2}{C} + o(1),$$

isto é,

$$t_{z_y}^{\mu-2} \leq C,$$

o que é uma contradição, uma vez que, $\mu - 2 > 0$ e estamos supondo $t_{z_y} \to +\infty$. Com isto e (2.40) obtemos que existem constantes $t_1, t_2 > 0$ tais que $0 < t_1 \leq t_{z_y} \leq t_2$.

Provemos agora que

Afirmação 5 *Para* $|y| \to \infty$ *e* $|y - \tau y| \to \infty$ *obtemos que*

$$I_V(t_{z_y} z_y) < 2m_\infty. \tag{2.43}$$

Com efeito, fazendo $t_{z_y} = t$, temos que

$$
\begin{aligned}
I_V(tz_y) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}(x-y)|^2 dx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}(x-\tau y)|^2 dx \\
&+ 2\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u}(x-y)\nabla \bar{u}(x-\tau y) dx \\
&+ \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\bar{u}(x-y)|^2 dx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\bar{u}(x-\tau y)|^2 dx \\
&+ 2\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u}(x-y) - t\bar{u}(x-\tau y)) dx \\
&= I_\infty(t\bar{u}(x-y)) + I_\infty(t\bar{u}(x-\tau y)) \\
&+ \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)-V_\infty)|\bar{u}(x-y)|^2 dx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)-V_\infty)|\bar{u}(x-\tau y)|^2 dx \\
&+ t^2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u}(x-y)\nabla \bar{u}(x-\tau y) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u}(x-y)) dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u}(x-\tau y)) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u}(x-y) - t\bar{u}(x-\tau y)) dx \\
&+ t^2\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y) dx \\
&:= I_\infty(t\bar{u}(x-y)) + I_\infty(t\bar{u}(x-\tau y)) + R(V, V_\infty, |y-\tau y|).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, defina

$$g_{\bar{u}}^\infty(t) := I_\infty(t\bar{u}) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 dx + V_\infty(\bar{u})^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u}) dx.$$

Como $\bar{u}$ é solução do problema limite então

$$g_{\bar{u}}^\infty(t) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u})\bar{u} - \int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u}). \tag{2.44}$$

Assim, derivando (2.44) obtemos

$$g_{\bar{u}}'^\infty(t) = t\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u})\bar{u} - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u} f(t\bar{u}).$$

Logo, $g_{\bar{u}}'^\infty(t) = 0$ se, e somente se $t = 0$ ou $t = 1$. Como $g_{\bar{u}}^\infty(t)$ é uma função côncava e na origem é igual a zero então atinge o máximo exatamente em $t = 1$. Isto é, a função $t \mapsto I_\infty(t\bar{u})$ atinge o máximo em $t = 1$. Com isto e invariância por translação, temos que

$$I_\infty(t\bar{u}(x-y)) = I_\infty(t\bar{u}(x)) \leq I_\infty(\bar{u}(x)) = m_\infty$$

e

$$I_\infty(t\bar{u}(x-\tau y)) = I_\infty(t\bar{u}(x)) \leq I_\infty(\bar{u}(x)) = m_\infty.$$

Portanto,

$$I_V(tz_y) \leq 2m_\infty + R(V, V_\infty, |y - \tau y|). \tag{2.45}$$

Provaremos a seguir, que para $|y - \tau y|$ suficientemente grande e $t_{z_y} = t$ temos que

$$R(V, V_\infty, |y - \tau y|) < 0.$$

Primeiramente, desde que $t_{z_y} = t$ é limitado, assim como na Afirmação 4, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} F(tz_y) &= \int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u}(x-y)) + \int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u}(x-\tau y)) + o_y(1) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} F(t\bar{u})dx + o_y(1).
\end{aligned}$$

quando $|y| \to \infty$ e $|y - \tau y| \to \infty$.

Por outro lado, por $(V4)$, mudança de variável e pela observação B.2, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)|\bar{u}(x-y)|^2 dx &< -C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|x|}|\bar{u}(x-y)|^2 \\
&= -C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|z+y|}\bar{u}^2(z)dz \\
&\leq -Ce^{-\gamma|y|}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|z|}\bar{u}(z)dz \\
&\leq -Ce^{-\gamma|y|}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|z|}e^{-\sqrt{V_\infty}|z|}dz.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)|\bar{u}(x-y)|^2 dx \leq -Ce^{-\gamma|y|}. \tag{2.46}$$

Da mesma forma, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)|\bar{u}(x-\tau y)|^2 dx \leq -Ce^{-\gamma|\tau y|} = -Ce^{-\gamma|\tau y|}. \tag{2.47}$$

Estudaremos agora, o sinal de $R(V, V_\infty, |y - \tau y|)$. Aplicando a observação (1.1), (2.46) e (2.47) na expressão que define $R(V, V_\infty, |y - \tau y|)$, relembrando que t_{z_y} é limitado e $\frac{1}{2} < \frac{p}{p+1}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
R(V, V_\infty, |y - \tau y|) &\leq -C_3 e^{-\gamma|y|} + C_4 e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{(1-2\delta)}{2}} + C_5 e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)} \\
&\leq -C_3 e^{-\gamma|y|} + C_6 e^{-\sqrt{V_\infty}|y-\tau y|\frac{(1-2\delta)}{2}},
\end{aligned}$$

onde C_3, C_4, C_5, C_6 são constantes positivas. Seja

$$\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n),$$

$$\tau\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_k, -y_{k+1}, \ldots, -y_n),$$

$$P_\Gamma\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0),$$

$|\tilde{y}-\tau\tilde{y}| = |(0,\ldots,0,2y_{k+1},\ldots,2y_n)| = 2|(0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n)|$ tal que

$$|(0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n)| \to \infty.$$

Se escolhermos $y := P_\Gamma^\perp \tilde{y} = (0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n)$, tal que $2|y| = |y-\tau y|$, então

$$R(V,V_\infty,|y-\tau y|) \leq -C_3 e^{-\gamma|y|} + C_6 e^{-\sqrt{V_\infty}|y|(1-2\delta)},$$

Por hipótese

$$\gamma < \sqrt{V_\infty},$$

então podemos escolher um $0<\delta<\frac{1}{2}$ tal que

$$\gamma < \sqrt{V_\infty}(1-2\delta).$$

Logo, para $|y|$ suficientemente grande

$$R(V,V_\infty,|y-\tau y|) \leq -C_3 e^{-\gamma|y|} + C_6 e^{-\sqrt{V_\infty}|y|(1-2\delta)} < 0. \tag{2.48}$$

Segue, de (2.45) e (2.48) que

$$I_V(t_{z_y} z_y) \leq 2m_\infty + R(V,V_\infty,|y-\tau y|) < 2m_\infty, \tag{2.49}$$

para $|y-\tau y| = |P_\Gamma y|$ suficientemente grande, de onde segue (2.43). Portanto, desde que $t_{z_y} z_y \in N_V^\tau$ então, por (2.49) obtemos que

$$m_V^\tau \leq I_V(t_{z_y} z_y) < 2m_\infty,$$

e segue (2.33), como queríamos.

■

Desde que $I_V|_{N_V^\tau}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$ e $m_V^\tau < 2m_\infty$, mostraremos que existe uma sequência $(PS)_c$ no nível $c = m_V^\tau$, como segue.

Proposição 2.2 *Existe uma sequência* $\{u_n\} \subset N_V^\tau$ *satisfazendo*

$$I_V(u_n) \to m_V^\tau \quad e \quad I_V'(u_n) \to 0.$$

Prova. Usando $(f1)$, $(f2)$ e $(f3)$, obtemos que N_V é limitado inferiormente, isto é, existe $\rho > 0$ tal que

$$||u||_E \geq \rho > 0, \quad \text{para todo } u \in N_V. \tag{2.50}$$

De fato, por $(f1)$ e $(f2)$, temos que

$$f(s)s \leq \epsilon s^2 \quad \text{se} \quad |s| \leq \delta. \tag{2.51}$$

Por outro lado, por $(f3)$ existe $M > 0$ tal que

$$f(s)s \leq M|s|^{p+1} \quad \text{se} \quad |s| \geq \delta. \tag{2.52}$$

Assim, por (2.51) e (2.52), obtemos que

$$f(s)s \leq \epsilon s^2 + M|s|^{p+1}. \tag{2.53}$$

Desde que $u \in N_V$, por (2.53), obtemos que

$$\begin{aligned}\|u\|_E^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + M \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \\ &\leq \epsilon C_1 \|u\|_E^2 + MC_2 \|u\|_E^{p+1},\end{aligned}$$

isto é,

$$(1 - \epsilon C_1)\|u\|_E^2 \leq MC_2 \|u\|_E^{p+1},$$

assim,

$$\|u\|_E \geq (1 - \epsilon C_1)^{\frac{1}{p-1}} := \rho > 0, \quad \text{para} \quad \epsilon \text{ suficientemente pequeno,}$$

de onde segue (2.50). De (2.50) e o fato que $N_V = J^{-1}(0)$, onde

$$J \in C^1(E, \mathbb{R}), \quad J(u) := ||u||_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx,$$

obtemos que N_V é fechado em E. Além disso, usando $(f4)$, para $u \in N_V$ temos $J'(u) \neq 0$ uma vez que

$$\begin{aligned}J'(u)u &= 2||u||_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (f'(u)u^2 + f(u)u)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (f(u)u - f'(u)u^2)dx < 0.\end{aligned}$$

Logo, N_V é uma variedade de classe C^1 de E. Como E^τ é um subespaço fechado de E e $N_V^\tau = N_V \cap E^\tau$, então N_V^τ é uma subvariedade fechada de N_V em E^τ.
Seja $\{u_n\} \subset N_V^\tau$ uma sequência minimizante, isto é, u_n é tal que $I_V(u_n) \to m_V^\tau$. Notemos que I_V restrito a N_V^τ é limitado inferiormente. De fato, se $u \in N_V^\tau$ então $u \in E\backslash\{0\}$ e

$$||u||_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u.$$

Logo, por $(f4)$ obtemos que

$$I_V(u) = \frac{1}{2}||u||_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u)u - F(u)\right) > 0.$$

Desde que I_V restrito a N_V^τ, subvariedade fechada, é limitado inferiormente, podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland (ver [23]) em E^τ e obtermos sequências $\{w_n\} \subset N_V^\tau$ e $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tais que $I_V(w_n) \to m_v^\tau$ e

$$I'_V(w_n)v - \lambda_n J'(w_n)v = o(1) \quad \text{para todo} \quad v \in E^\tau. \tag{2.54}$$

Para obtermos que $I'_V(w_n)v = o(1)$ para todo $v \in E^\tau$ é suficiente mostrarmos que $\lambda_n = o(1)$. De fato, por $(f4)$ e o limite inferior em (2.50), obtemos que

$$\begin{aligned}J'(w_n)w_n &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + V(x)w_n^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \left[f'(w_n)w_n^2 + f(w_n)w_n\right] \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N} f(w_n)w_n - \int_{\mathbb{R}^N} (f'(w_n)w_n^2 - f(w_n)w_n) \\ &= (2-\mu)\int_{\mathbb{R}^N} f(w_n)w_n dx < -C < 0.\end{aligned}$$

Além disso, a limitação de $\{w_n\}$ implica que $J'(w_n)w_n$ também é limitado. Por outro lado, como $w_n \in N_V^\tau$ então $I_V'(w_n)w_n = 0$. Portanto, considerando (2.54) com $v = w_n$, temos que $I_V'(w_n)w_n - \lambda_n J'(w_n)w_n = o(1)$, de onde segue que $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Substituindo em (2.54) segue que $I_V'(w_n)v \to 0$ para todo $v \in E^\tau$. Mas, desde que a ação T_τ é isométrica, provemos por $(V3)$ e $(f5)$ que

$$T_\tau I_V'(w_n) = I_V'(w_n). \tag{2.55}$$

Pela hipótese $(f5)$ obtemos que $F(s) = F(-s)$. Com isto, usando mudança de variável, $(V3)$ e a definição de T_τ temos que

$$I_V(T_\tau(w_n)) = I_V(w_n). \tag{2.56}$$

Por outro lado, novamente por $(f5)$, mudança de variável e $(V3)$, temos que

$$\begin{aligned} I_V'(T_\tau w_n(.))v(.) &= I_V'(-w_n(\tau(.)))v(.) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n(y)\nabla(-v(\tau y)) + V(y)w_n(y)(-v(\tau y))dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_n(y))(-v(\tau y))dy. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$I_V'(T_\tau w_n(x))v(x) = I_V'(w_n(x))T_\tau(v(x)). \tag{2.57}$$

Como T_τ é isométrica então

$$\langle I_V'(w_n), T_\tau(v)\rangle = \langle T_\tau(I_V'(w_n))), T_\tau(T_\tau(v))\rangle = \langle T_\tau(I_V'(w_n))), v\rangle\,. \tag{2.58}$$

Segue de (2.57) e (2.58) que

$$I_V'(T_\tau(w_n)) = T_\tau(I_V'(w_n)). \tag{2.59}$$

Desde que $w_n \in E^\tau$ então por (2.59) obtemos que

$$T_\tau(I_V'(w_n)) = I_V'(T_\tau(w_n)) = I_V'(w_n), \tag{2.60}$$

e (2.55) segue. Com isto, obtemos que $I_V'(w_n)v = 0$ para todo $v \in (E^\tau)^\perp$. Assim, $I_V'(w_n)v \to 0$ para todo $v \in E$.

$$I_V(w_n) \to m_V^\tau \quad \text{e} \quad I_V'(w_n) \to 0.$$

Logo, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$I_V(u_n) \to m_V^\tau \quad \text{e} \quad I_V'(u_n) \to 0.$$

■

O próximo resultado é uma versão mais geral da Proposição 1.3 e será útil para mostrar que a solução do problema (P_f) muda de sinal exatamente uma vez.

Proposição 2.3 *Se u é uma solução do problema (P_f) que muda de sinal $2k-1$ vezes, então $I_V(u) \geq km_V^\tau$.*

Prova. Suponhamos que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > 0\}$ tem k componentes conexas $A_1, ..., A_k$. Consideremos

$$u^i(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in A_i \cup \tau A_i, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{2.61}$$

Temos que

$$\begin{aligned} 0 = I_V'(u)(u^i) &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus (A_i \cup \tau A_i)} (\nabla u \nabla u^i + V(x) u u^i - f(u) u^i) dx \\ &+ \int_{(A_i \cup \tau A_i)} (\nabla u \nabla u^i + V(x) u u^i - f(u) u^i) dx \\ &= \int_{(A_i \cup \tau A_i)} (\nabla u \nabla u^i + V(x) u u^i - f(u) u^i) dx \\ &= \int_{(A_i \cup \tau A_i)} (|\nabla u^i|^2 + V(x) |u^i|^2 - f(u^i) u^i) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^i|^2 + V(x) |u^i|^2 - f(u^i) u^i) dx = I_V'(u^i)(u^i). \end{aligned}$$

Assim, $u^i \in N_V^\tau$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e

$$I_V(u) = I_V(u^1) + \cdots + I_V(u^k) \geq k m_V^\tau,$$

como queríamos. ■

Na sequência, provaremos o principal resultado deste capítulo.

Prova do Teorema 2.1. Seja $\{u_n\} \subset N_V^\tau$ uma sequência minimizante. Pela Proposição 2.2

$$I_V(u_n) \to m_V^\tau \quad \text{e} \quad I_V'(u_n) \to 0.$$

Assim, $\{u_n\}$ é limitada em E. Logo, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E com $I_V'(u_0) = 0$. Pelo Lema 2.1 temos que ou $u_n \to u_0$ fortemente em E ou existem dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u_j, $j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2$ do problema (P_∞), satisfazendo as conclusões do Lema 2.1. Visto que pela Proposição 2.1, $m_V^\tau < 2m_\infty$ segue do Lema 2.1 item *5* que $k_1, k_2 = 0$. Pois, caso contrário, sem perda de generalidade, se $k_1 \geq 1$ então

$$\begin{aligned} m_V^\tau &= I_V(u_0) + 2 \sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u_j) \\ &\geq I_V(u_0) + 2k_1 m_\infty + k_2 m_\infty^\tau \\ &\geq I_V(u_0) + 2m_\infty + k_2 m_\infty^\tau \geq 2m_\infty, \end{aligned}$$

contrariando $m_V^\tau < 2m_\infty$. Assim, $k_1 = k_2 = 0$, e portanto, $u_n \to u_0$ fortemente em E e $m_V^\tau = I_V(u_0)$. Na Proposição 2.2 temos que $I_V(u) > 0$ para todo $u \in N_V^\tau$ de onde segue que $m_V^\tau = I_V(u_0) > 0$, e portanto, $u_0 \neq 0$.

Visto que $u_0 \neq 0$ é τ-antissimétrica então é uma solução que muda de sinal. Finalmente, pela Proposição 2.3 obtemos que

$$m_V^\tau = I_V(u_0) \geq k m_V^\tau,$$

dessa forma $k = 1$, e portanto, u_0 muda de sinal exatamente uma vez, com isto, segue a prova do teorema.

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Nesta seção, apresentaremos e provaremos alguns resultados que foram usados no trabalho.

Denotaremos por $|x|$ a norma euclidiana para $x \in \mathbb{R}^N$, $B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ e C é uma constante genérica.

Lema A.1 *Assuma* $(V1)$ *e* $(V2)$ *então* $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx$ *define uma norma em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *que é equivalente à norma usual.*

Prova. De fato, por $(V1)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_0 u^2 dx \geq \min\{1, V_0\} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 dx. \tag{A.1}$$

Por outro lado, por $(V2)$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_\infty u^2 dx \leq \max\{1, V_\infty\} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 dx. \tag{A.2}$$

Segue, portanto, que

$$\|u\| := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx$$

define uma norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$, equivalente à norma usual. ■

A seguir apresentaremos um lema devido a Brézis-Lieb [15], (ver Lema B.1).

Lema A.2 *Se* $1 < p < 2^* - 1$ *e se* $u_n \rightharpoonup u_0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$*, então,*

$$|u_n|^{p-1}u_n - |u_n - u_0|^{p-1}(u_n - u_0) \to |u_0|^{p-1}u_0$$

em $H^{-1}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Para a prova desse lema seguiremos as idéias encontradas em ([41], Lema 8.1).

Prova. Defina $f(v) := |v|^{p-1}v$, assim,

$$\begin{aligned}
f'(v) =& (p-1)|v|^{p-2}(|v|)'v + |v|^{p-1} \\
=& (p-1)|v|^{p-2}\frac{v}{|v|}v + |v|^{p-1} \\
=& (p-1)|v|^{p-1} + |v|^{p-1} \\
=& p|v|^{p-1}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
|f(u_n) - f(u_n - u_0)| &= |f'(u_n - u_0 + \theta u_0)u_0| \\
&= |p|u_n - (1-\theta)u_0|^{p-1}u_0| \\
&\leq p\left[|u_n| + (1-\theta)|u_0|\right]^{p-1}|u_0| \\
&\leq p\left[|u_n| + |u_0|\right]^{p-1}|u_0|.
\end{aligned}
$$

Assim, fixados $R > 0$ e $\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos pela desigualdade de Hölder, por imersão de Sobolev e pela limitação de $\{u_n\}$, que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{|x|>R} |f(u_n) - f(u_n - u_0)|\omega dx\right| &\leq p\int_{|x|>R}\left[|u_n| + |u_0|\right]^{p-1}|u_0||\omega|dx \\
&\leq p\left[\|u_n\|_{L^{p+1}} + \|u_0\|_{L^{p+1}}\right]^{p-1}\|\omega\|_{L^{p+1}}\left[\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq 2^{p-1}p\left[\|u_n\|_{L^{p+1}}^{p-1} + \|u_0\|_{L^{p+1}}^{p-1}\right]\|\omega\|_{L^{p+1}}\left[\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq C\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}
$$

Novamente pela desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, temos que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{|x|>R} f(u_0)\omega dx\right| &\leq \int_{|x|>R}|u_0|^{p-1}|u_0||\omega|dx = \int_{|x|>R}|u_0|^p|\omega|dx \\
&\leq \left[\int_{|x|>R}\left||u_0|^p\right|^{\frac{p+1}{p}}dx\right]^{\frac{p}{p+1}}\|\omega\|_{L^{p+1}} \\
&\leq C\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{p}{p+1}}.
\end{aligned}
$$

Como para cada $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$
\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx < \epsilon,
$$

então, para todo $\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando as desigualdades acima, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{|x|>R}(f(u_n) - f(u_n - u_0) - f(u_0))\omega dx\right| &\leq \int_{|x|>R}|f(u_n) - f(u_n - u_0)||\omega|dx \\
&\quad + \int_{|x|>R}|f(u_0)||\omega|dx \\
&\leq C\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\
&\quad + C\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{p}{p+1}} \\
&\leq C\epsilon\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que

$$f(u_n) - f(u_n - u_0) \to f(u_0) \quad \text{em } L^r(B_R(0)) := L^r(B), \tag{A.3}$$

onde $r := \frac{p+1}{p}$.

Admitindo a nossa afirmação acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|x|<R} (f(u_n) - f(u_n - u_0) - f(u_0))\omega dx \right| &\leq \|\omega\|_{L^{p+1}} \|f(u_n) - f(u_n - u_0) - f(u_0)\|_{L^r(B)} \\
&\leq C\epsilon \|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Resta-nos verificar (A.3). De fato, temos que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, assim, $u_n \to u_0$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, para $1 \leq q < 2^*$. Logo,

$$u_n - u_0 \to 0 \quad \text{em } L^q(B_R(0)),$$

$$u_n(x) \to u_0(x) \quad \text{para quase todo} \quad x \in B_R(0).$$

Daí segue que

$$u_n(x) - (u_n - u_0)(x) \to u_0(x) \quad \text{para quase todo} \quad x \in B_R(0). \tag{A.4}$$

Também,

$$|u_n(x)|, |u(x)| \leq g(x), \quad g \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}),$$

e

$$|(u_n - u_0)(x)| \leq h(x), \quad h \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|f(u_n) - f(u_n - u_0) - f(u_0)|^{\frac{p+1}{p}} &= \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u_n - u_0|^{p-1}(u_n - u_0) - |u_0|^{p-1}u_0 \right|^{\frac{p+1}{p}} \\
&\leq (|u_n|^p + |u_n - u_0|^p + |u_0|^p)^{\frac{p+1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{p+1}{p}} \left(|u_n|^{p+1} + |u_n - u_0|^{p+1} + |u_0|^{p+1} \right) \\
&\leq Cg(x)^{p+1} + Ch(x)^{p+1}.
\end{aligned}$$

Desde que $1 < p < 2^* - 1$ então $g, h \in L^{p+1}(B_R(0))$, daí, $g^{p+1}, h^{p+1} \in L^1(B_R(0))$. Com isso, e usando (A.4), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtendo que

$$f(u_n) - f(u_n - u_0) \to f(u_0) \quad \text{em } L^r(B),$$

onde $r := \frac{p+1}{p}$. Dessa forma concluímos a prova do lema.

■

Observação A.1 *Se $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma involução ortogonal não trivial, ou seja, uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$, aqui Id denota a identidade em $\mathbb{R}^N$, então τ é diagonalizável.*

Prova. De fato, é suficiente mostrar que τ é simétrica, isto é, $\tau = \tau^t$.

Temos que $\tau^2 = Id$ se, e somente se, $\tau = \tau^{-1}$, onde τ^{-1} é a inversa de τ. Mas, τ é uma transformação linear ortogonal, logo, $\tau^{-1} = \tau^*$, onde τ^* é a adjunta de τ. Por outro lado, $\tau^* = \tau^t$, aqui τ^t denota a trasposta de τ. Assim, $\tau = \tau^t$, e portanto, τ é simétrica, de onde segue que τ é diagonalizável.

■

Observação A.2 *Usando a Observação A.1, podemos supor, sem perda de generalidade, que*

$$\tau(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N) = (x_1, ..., x_k, -x_{k+1}, ..., -x_N). \tag{A.5}$$

Prova. De fato, visto que τ é diagonalizável, podemos considerar $\{e_1, ..., e_N\}$ a base de autovetores. Sabemos que $\tau(e_i) = \lambda_i e_i$, onde λ_i é o autovalor associado a e_i. Por outro lado, desde que τ é ortogonal, então $|\tau(e_i)| = |e_i|$, de onde segue que $|e_i| = |\tau(e_i)| = |\lambda_i e_i| = |\lambda_i||e_i|$, isto implica que $\lambda_i = \pm 1$. Assim, qualquer que seja $v = (x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N)$ em $\mathbb{R}^N$, temos que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i e_i$, logo $\tau(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i \tau(e_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i \lambda_i e_i$, isto é, $\tau(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N) = (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_k x_k, \lambda_{k+1} x_{k+1}, ..., \lambda_N x_N)$, onde $\lambda_i = \pm 1$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor $\lambda_i = 1$, $i = 1, ..., k$ e $\lambda_i = -1$, $i = k+1, ..., N$, de onde segue (A.5). ■

Observação A.3 *Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (P_f), então $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $0 < \alpha < 1$.*

Prova. De fato, definamos

$$h(u) = f(u) - V(x)u,$$

assim, u é solução fraca de

$$-\Delta u = h(u) \text{ em } B_R(0).$$

Por $(f1) - (f4)$ e o fato de V ser limitado em $B_R(0)$, encontramos $C > 0$ tal que

$$|h(u)| \leq C\left[|u| + |u|^p\right], \text{ em } B_R(0), \tag{A.6}$$

$1 < p < 2^* - 1$. Consideremos $s > 1$ tal que $sp = 2^*$, pela relação (A.6), existe uma constante $C_1 > 0$, dependendo exclusivamente de s, tal que

$$|h(u)|^s \leq C_1\left[|u|^s + |u|^{sp}\right], \text{ em } B_R(0). \tag{A.7}$$

Por Brézis-Kato [14], $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $q > 1$, e desde que

$$-\Delta u = h(u) \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } s > 1,$$

então

$$u \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } s > 1,$$

e portanto,

$$u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^\infty}(\Omega) \leq C\|u\|_E, \tag{A.8}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e C depende somente do diâmetro de Ω. ■

Observação A.4 *Se $u \in E$ é a solução τ-antissimétrica apresentada neste trabalho, pela Observação A.3, obtemos que $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $0 < \alpha < 1$. Com isto, notemos que $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.*

Prova. De fato, visto que $\|u\|_E = M$ então dado $\epsilon > 0$ existe $R = R(\epsilon)$ tal que

$$\int_{|x|>R} |\nabla u(x)|^2 + V(x)(u(x))^2 dx < \epsilon. \tag{A.9}$$

Consideremos $|y| > R + 2$, $\Omega = B_1(y) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - y| < 1\}$ e $\Omega' = B_2(y)$, então

$$\|u\|_{L^\infty}(B_1(y)) \leq C\|u\|_E(B_2(y)) \leq C\epsilon, \tag{A.10}$$

onde C é independente de y, mas depende do diâmetro de B_1 e da distância da fronteira de B_1 à fronteira de B_2. Portanto, $|u(x)| < C\epsilon$ para todo $|x| > R + 2$, isto é, $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. ■

Apêndice B

Resultados Técnicos

Esta seção apresenta alguns resultados que foram usados nos capítulos anteriores.

A prova do próximo resultado pode ser encontrada em Brézis-Lieb [15].

Lema B.1 *Considere $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua com $j(0) = 0$. Em adição considere j satisfazendo as seguintes hipóteses: Para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existem duas funções contínuas e não negativas φ_ϵ e ψ_ϵ tais que*

$$|j(a+b) - j(a)| \leq \epsilon\varphi_\epsilon(a) + \psi_\epsilon(b) \tag{B.1}$$

para todo $a, b \in \mathbb{C}$.
Considere $f_n = f + g_n$ uma sequência de funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{C}$ tais que:
(i) $g_n \to 0$ quase sempre;
(ii) $j(f) \in L^1$;
(iii) $\int \varphi_\epsilon(g_n(x))d\mu(x) \leq C < \infty$ para alguma constante C, independente de ϵ e n.
(iv) $\int \psi_\epsilon(f(x))d\mu(x) < \infty$ para todo $\epsilon > 0$. Então, se $n \to \infty$

$$\int |j(f + g_n) - j(g_n) - j(f)| d\mu \to 0. \tag{B.2}$$

O próximo lema pode ser encontrado em [41], (cf. Lema 8.3).

Lema B.2 *Se $|y_n| \to \infty$ e*

$$u_n(. + y_n) \rightharpoonup u \ \text{em} \ \ H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n(. + y_n) \to u \ \text{quase} \ \ \text{sempre} \ \ \text{em}\ \mathbb{R}^N,$$

$$\psi(u_n) \to c,$$

$$\psi'(u_n) \to 0 \ \text{em} \ H^{-1}(\Omega),$$

então $\psi'(u) = 0$ e $v_n := u_n - u(. - y_n)$ é tal que

$$||v_n||^2 = ||u_n||^2 - ||u||^2 + o(1),$$

$$\psi(v_n) \to c - \psi(u),$$

$$\psi'(v_n) \to 0, \ \text{em} \ H^{-1}(\Omega).$$

No que segue apresentaremos um lema devido a Lions [31].

Lema B.3 *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^\mathbb{N}} \int_{B_r(y)} |u_n|^q \to 0, \quad \textit{quando} \quad n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Segue um resultado de existência de solução para o Problema (P_∞), devido a Berestycki-Lions [12].

Proposição B.1 *O Problema (P_∞) tem uma solução positiva e radialmente simétrica $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ tal que $I_\infty(\bar{u}) = m_\infty$. Além disso, se a função f é ímpar, para qualquer $0 < \delta < \sqrt{V_\infty}$ existe uma constante $C = C(\delta) > 0$ tal que*

$$\bar{u}(x) \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}. \tag{B.3}$$

O próximo lema apresenta uma importante desigualdade dada por Alves, Carrião e Medeiros em [2].

Lema B.4 *Seja $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ uma função convexa e par talque $F(0) = 0$ e $f(s) = F'(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \infty)$. Então, para todo $u, v \geq 0$,*

$$|F(u - v) - F(u) - F(v)| \leq 2(f(u)v + f(v)u). \tag{B.4}$$

O teorema a seguir é um resultado devido a Gidas, Ni e Nirenberg [27].

Teorema B.1 *Seja $u \in C^2$ uma solução positiva de*

$$-\Delta u + m^2 u = g(u), \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2, \quad m > 0 \tag{B.5}$$

com $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ e g contínua, $g(u) = O(u^\alpha)$, $\alpha > 1$ próximo de $u = 0$. Sobre o intervalo $0 \leq s \leq u_0 = \max u(x)$, assuma

$$g(s) = g_1(s) + g_2(s)$$

com g_2 não decrescente e $g_1 \in C^1$ satisfazendo, para algum $C > 0$, $p > 1$,

$$|g_1(u) - g_1(v)| \leq C|u - v|/|\log \min(u, v)|^p, \quad 0 \leq u, v \leq u_0.$$

Então u é esfericamente simétrica sobre algum ponto do $\mathbb{R}^N$ e $u_r < 0$ para $r > 0$, onde r é a coordenada radial sobre este ponto. Além disso,

$$\lim_{r \to \infty} r^{(n-1)/2} e^{mr} u(r) = \mu > 0. \tag{B.6}$$

Observação B.1 *Em particular, se $u > 0$ tende a zero no infinito e satisfaz*

$$-\Delta u + f(u) = 0,$$

$f \in C^{1+\mu}$, $\mu > 0$, $f(0) = 0$ e $f'(0) < 0$ então o Teorema B.1 se aplica.

Como uma consequêcia do Teorema B.1, temos que

Observação B.2 *O limite em B.6 permite-nos encontrar um decaimento exponencial para $u(r)$, mais precisamente, obtemos que*

$$u(r) \leq Cr^{-\frac{(N-1)}{2}} e^{-mr}. \tag{B.7}$$

Referências Bibliográficas

[1] A. Alama and Y. Y. Li, *On "multi bump" bound states for certain semilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., **41** (1992), 983-1026.

[2] C. O. Alves, E. S. Medeiros and P. C. Carrião, *Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problem in exterior domains with Neumann conditions*, Abstr. Appl. Anal., **3** (2004), 251-268.

[3] C. O. Alves, P. C. Carrião and O. H. Miyagaki, *Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth*, J. Math. Anal. Appl., **260** (2001), 133-146.

[4] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., **14** (1973), 349-381.

[5] J. G. Azorero and J. P. Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with a nonsymmetric term,* Trans. Amer. Math. Soc., **323** (1951), 877-895.

[6] T. Bartsch, Z. Liu and T. Weth, *Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations*, Comm. Partial Differential Equations, **29** (2004), 25-42.

[7] T. Bartsch and Z. Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptics problems on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), no. 9-10, 1725-1741.

[8] T. Bartsch and Z. Q. Wang, *On the existence of sign changing solutions for semilinear Dirichlet problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **7** (1996), no. 1, 115-131.

[9] T. Bartsch and T. Weth, *A note on additional properties of sign changing solutions to superlinear elliptic equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **22** (2003), 1-14.

[10] V. Benci, G. Cerami, *Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains,* Arch. Rational Mech. Anal. **99** (1987), no 4, 283-300.

[11] V. Benci, C. R. Grisanti and A. M. Micheletti, *Existence and non existence of the ground state solution for the nonlinear schrödinger equations with* $V(\infty) = 0$, Topol. Methods Nonlinear Anal. **26** (2005), 203-219.

[12] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state,* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no 4, 313-345.

[13] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions,* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 347-375.

[14] H. Brézis and T. Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials*, J. Math. Pures Appl. **58** (1979), no. 9 , 137-151.

[15] H. Brézis and E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 3, 486-490.

[16] A. Castro, M. Clapp, *The effect of the domain topology on the number of minimal nodal solutions of an elliptic equation at critical growth in a symmetric domain,* Nonlinearity. **16** (2003), no 2, 579-590.

[17] J. Chen and S. J. Li, *Existence and multiplicity of nontrivial solutions for an elliptic equation on $\mathbb{R}^N$ with indefinite linear part*, Manuscripta Math., **111** (2003), no. 2, 221-239.

[18] J. Chen and Y. Li, *On a semilinear elliptic equation with indefinite linear part*, Nonlinear Anal. **48** (2002), no. 3, Ser. A: Theory Methods, 399-410.

[19] V. Coti-Zelati and P. H. Rabinowitz, *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$*, Comm. Pure. Appl. Math., **46** (1992), 1217-1269.

[20] Y. Ding and A. Szulkin, *Bound states for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007), no. 3, 397-419.

[21] Y. Ding and J. Wei, *Semiclassical states for nonlinear Schrödinger equations with sign-changing potentials*, J. Funct. Anal. **251** (2007), no. 2, 546-572.

[22] W. Y. Ding and W. M. Ni, *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **91** (1986), no. 4, 283-308.

[23] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324-353.

[24] M. F. Furtado, *A note on the number of nodal solutions of an elliptic equation with symmetry*, Applied Mathematics Letters. **19** (2006), 326-331.

[25] M. F. Furtado, L. A. Maia and E. S. Medeiros, *Positive and nodal solutions for a nonlinear Schrodinger equation with indefinite potential*, Advanced Nonlinear Studies, **8** (2008), 353-373.

[26] M. Ghimenti and A. M. Micheletti, *Existence of minimal nodal solutions for the nonlinear Schrödinger equations with* $V(\infty) = 0$, Advances in Differential Equations. **11** (2006), no. 12, 1375-1396.

[27] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$*, Adv. Math., Suppl. Stud. **7A** (1981), 369-402.

[28] N. N. Hirano, *Multiple existence of sign changing solutions for semilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$,* Nonlinear Analysis. **46** (2001), no 7, 997-1020.

[29] L. Jeanjean and K. Tanaka, *A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^N$*, Indiana University Mathematics Journal **54** (2005), no. 2, 443-464.

[30] E.H. Lieb, R. Seiringer, *Proof of Bose−Einstein condensation for dilute trapped gases*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 170409.

[31] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **1** (1984), 109-145 e 223-283.

[32] P. Meystre, Atom Optics, Springer, 2001.

[33] D.L. Mills, Nonlinear Optics, Springer, 1998.

[34] P. Montecchiari, *Multiplicity results for a class of semilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^N$, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **95** (1996), 217-252.

[35] E. S. Noussair and J. Wei, *On the effect of domain geometry on the existence of nodal solutions in singular perturbations problems* Indiana Univ. Math. J., **46** (1997), no. 4, 1255-1271.

[36] E. S. Noussair and C. A. Swanson and J. Yans, *Quasilinear elliptic problem with critical exponents* Nonlinear Anal., **20** (1993), 285-301.

[37] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), no. 2, 270-291.

[38] B. Sirakov, *Existence and multiplicity of solutions of semi-linear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Calc. Var. Partial Differential Equations, **11** (2000), no. 2, 119-142.

[39] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions,* Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.

[40] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities,* Math. Z. **187** (1984), no 4, 511-517.

[41] M. Willem, *Minimax Theorems*, Volume 24, Birkhauser, Boston, 1996.

[42] X. P. Zhu, *Multiple entire solutions of a semilinear elliptic equation*, Nonlinear Anal. **12** (1988), no. 11, 1297-1316.

[43] X. P. Zhu and J. Yang, *On the existence of nontrivial solution of a quasilinear elliptic boundary value problem for unbounded domain*, Acta. Math. Sci. **7** (1987), 341-359.