

Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e  
Documentação - FACE  
Departamento de Administração - ADM  
Programa de Pós-graduação em Administração - PPGA

THIAGO BERGMANN DE QUEIROZ

Evidências de bolhas especulativas na BOVESPA: uma aplicação do filtro de Kalman

BRASÍLIA  
2010

**THIAGO BERGMANN DE QUEIROZ**

**EVIDÊNCIAS DE BOLHAS ESPECULATIVAS NA BOVESPA: UMA  
APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Administração vinculado à FACE - Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação da UnB - Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Otávio Ribeiro de Medeiros

BRASÍLIA

2010.

DE QUEIROZ, Thiago Bergmann

Evidências de bolhas especulativas na BOVESPA: uma aplicação do filtro de Kalman, Thiago Bergmann de Queiroz, Brasília: UnB, 2010. 67 f.: il. Orientador: Prof. Otávio Ribeiro de Medeiros, PhD

Dissertação (Mestrado, Programa de Pós-Graduação e Administração) Universidade de Brasília.

1. Bolhas de preços. 2. Dividendos. 3. Preços das Ações. 4. Filtro de Kalman. 5. Modelo estado-espço.

**THIAGO BERGMANN DE QUEIROZ**

**EVIDÊNCIAS DE BOLHAS ESPECULATIVAS NA BOVESPA: UMA  
APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Administração vinculado à FACE - Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação da UnB - Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Aprovada em 28/05/2010 pela banca examinadora:

**Prof. Dr. Otávio Ribeiro de Medeiros**

Orientador

Programa de Pós-Graduação em Administração – Universidade de Brasília

**Prof. Dr. Anderson Luiz Rezende Mól**

Membro Externo

Programa de Pós-Graduação em Administração – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

**Prof. Dr. Ivan Ricardo Gartner**

Membro Interno

Programa de Pós-Graduação em Administração – Universidade de Brasília

## DEDICATÓRIA

À minha família pela força e incentivo nas horas difíceis.  
À minha esposa Aleana pelo apoio e amor.  
Ao filho Felipe pelo carinho e alegria

## AGRADECIMENTOS

*À minha esposa Aleana, por tudo que ela agüentou nesse período, desde o meu cansaço e desânimo à euforia, pela força que sempre me deu, pela serenidade que me ofereceu.*

*Aos meus pais, Silvana e Edgar, pela criação e valores e por terem conseguido incentivar-me a entender que o estudo é a base de tudo.*

*Aos meus avôs, Myrian e Max, pelo incentivo e apoio.*

*Aos meus pais postiços, Inês e Vilson, pelo seu interesse no meu trabalho, pelo apoio e pela ajuda fundamental que possibilitou as condições para a realização deste.*

*Ao meu filho Felipe, pela alegria diária que traz a minha vida.*

*Ao professor e amigo Otávio, orientador mais que presente, professor atencioso e criterioso, pesquisador ousado e competente. Por acreditar no desenvolvimento do projeto e por seu apoio incondicional.*

*À amiga Néria pela forma com que avaliou e conduziu meus diversos pedidos de “excepcionalização de horário”, permitindo o desenvolvimento deste trabalho com maior dedicação.*

*Aos amigos José Carneiro e Bruno Vinícius e ao primo Daniel, que permitiram a coleta de dados indispensável a esta dissertação.*

*Aos amigos Luis Gustavo e Cedric pelo apoio pedagógico e logístico.*

*A todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, deixaram sua contribuição neste trabalho, seja colaborando diretamente na execução da pesquisa, seja trocando impressões e experiências, seja incentivando e apoiando.*

*À Universidade de Brasília, em especial aos programas de Pós Graduação em Administração e Contabilidade, pela disponibilização de toda infra-estrutura e pessoal que tornou possível a obtenção deste título.*

## RESUMO

A existência de bolhas nos preços dos ativos é um assunto de grande importância para governos e investidores devido aos sérios problemas que podem acarretar às economias nacionais. No caso das ações, a presença de bolha de preços pode ser constatada pela comparação dos preços e dos respectivos dividendos no longo prazo. Este trabalho buscou verificar a ocorrência de bolhas de preços no mercado acionário brasileiro, através da comparação do IBOVESPA, como índice de preço, e um índice de dividendos distribuídos, construído a partir da metodologia do IBOVESPA. A bolha foi considerada um vetor estado não observável em um modelo estado-espço e foi estimada com o filtro de Kalman. Encontrou-se evidência de bolha na BOVESPA no período de janeiro de 2000 a março de 2009. Os resultados foram comparados com o modelo de valor presente e o modelo de *intrinsic bubbles*. O primeiro não foi adequado à série de dados, enquanto o segundo também encontrou evidências de bolhas com maior precisão das estimativas quando comparado com os demais.

**Palavras-chave:** Bolhas de preços, Dividendos, Precificação de ativos, Filtro de Kalman, Modelo estado-espço.

## ABSTRACT

The existence of bubbles in asset prices is a matter of great importance to governments and investors due to the serious problems that may lead to national economies. In the case of shares, the presence of a price bubble can be seen by comparing the prices and their dividends in the long run. This study aimed to assess the occurrence of price bubbles in the Brazilian stock market, by comparing the IBOVESPA as price index and an index of dividends, built from the methodology of IBOVESPA. The bubble was considered a not-observable state vector in a state-space model and was estimated with the Kalman filter. It was found evidence of a bubble at BOVESPA from January 2000 to March 2009. The results were compared with the standard present value and intrinsic bubbles model. The first was not adequate to the data set, while the second also found evidence of bubbles with more precise estimates when compared with others.

Keywords: Bubbles Price, Dividends, Asset Pricing, Kalman Filter, State-Space Model



## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
1.1 Identificação do Problema.....	14
1.2 Objetivos a atingir.....	14
1.2.1 Objetivo geral.....	14
1.2.2 Objetivos específicos.....	14
1.3 Relevância da Pesquisa.....	15
1.4 Organização do trabalho.....	16
1.5 Limitações do estudo.....	16
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	18
2.1 Evolução histórica do estudo de finanças.....	18
2.2 A Hipótese de Mercado Eficiente.....	19
2.2.1 Os Testes de Eficiência do Mercado.....	20
2.2.2 Os Testes de Eficiência de Mercado no Brasil.....	21
2.3 Finanças comportamentais.....	23
2.4 Bolhas especulativas racionais.....	24
2.4.1 Definição.....	24
2.4.2 Tipos de Bolhas.....	29
2.4.3 Estudos sobre Bolhas.....	30
2.5 Filtro de Kalman.....	32
2.6 Modelo Estado-Espaço.....	34
3. METODOLOGIA UTILIZADA.....	36
3.1 Modelo.....	36
3.2 Dados.....	38
3.3 Metodologia do IBOVESPA.....	39
3.4 Índice de Dividendos.....	45
3.5 Processo ARIMA.....	46
4. ANÁLISE DOS DADOS.....	48
4.1 Modelo Estado-Espaço.....	51
4.2 Modelo de Gordon.....	54
4.3 Modelo de <i>Intrinsic Bubbles</i> .....	55
4.4 Observações.....	57
5. CONCLUSÃO.....	59
REFERÊNCIAS.....	61
APÊNDICE.....	65

## Lista de figuras

Gráfico 1: Evolução das idéias que originaram o filtro de Kalman .....	33
Gráfico 2: Valores do IBOV .....	49
Gráfico 3: Valores do IDIV .....	50
Gráfico 4: Participação do valores do IDIV .....	50
Gráfico 5: Razão entre bolha/preço .....	53
Gráfico 6: Erro de predição do modelo .....	54
Gráfico 7: Erro de predição do preço: modelo de Gordon .....	55
Gráfico 8: Erro de predição do preço: modelo de <i>intrinsic bubbles</i> .....	57

## Lista de tabelas

Tabela 1: Divisões no IBOVESPA.....	39
Tabela 2: Estatísticas descritivas de IBOV e IDIV .....	48
Tabela 3: Teste de raiz unitária para $\ln(\text{IBOV})$ .....	51
Tabela 4: Teste de raiz unitária para $\ln(\text{IDIV})$ .....	51
Tabela 5: Valores críticos dos testes ADF e PP .....	52
Tabela 6: Valores críticos dos testes ADF e PP .....	52
Tabela 7: Estimativas dos parâmetros do modelo .....	53
Tabela 8: Estimativas dos parâmetros do modelo de gordon .....	54
Tabela 9: Estimação da equação (37) .....	56
Tabela 10: Estatísticas descritivas do retorno do IBOVESPA .....	56
Tabela 11: Estimação da equação (40) .....	56
Tabela 12: RMSE e MAE dos modelos.....	58

Lista de abreviaturas

ADF: *augmented Dickey and Fuller*

BOVESPA: Bolsa de valores de São Paulo

CAPM: Capital Asset Pricing Model

HME: Hipótese do Mercado Eficiente

IBOVESPA: Índice da Bolsa de Valores de São Paulo

PP: Phillips and Perron

AIC: *Akaike Information Criteria*

SBIC: *Schwartz's Bayesian Information Criteria*

RMSE: Raiz da média dos erros quadráticos

MAE: Média dos erros absolutos

## 1. Introdução

O Brasil apresenta, nos últimos sete anos, um cenário de redução sistemática da taxa de juros básica da economia, a SELIC. Ocorreram períodos de crescimento dessa taxa, mas a tendência observada é de queda. Em abril de 2003, o valor fixado era de 26,25% a.a, o valor máximo da série. Em maio de 2010, esse mesmo valor é de 9,5% a.a, sendo 8,75% a.a o valor mínimo da série. Apesar de ainda ser uma das maiores taxas reais de juros do mundo, a taxa média dos últimos anos é menor que a observada nos demais anos das duas últimas décadas. Esse movimento reduz a atratividade de ativos financeiros de renda fixa, atrelados à taxa de juros, e aumenta a procura por ativos financeiros de renda variável, expostos ao risco de mercado. Em busca de rentabilidade, um número cada vez maior de investidores transfere seus recursos para as bolsas de valores, cujos ativos são negociados segundo a lei de oferta e demanda.

No Brasil, o mercado de capitais vem apresentando forte crescimento e se firmando como uma opção de investimento nos últimos tempos, inclusive para as pessoas físicas. Segundo dados da BOVESPA, a participação de pessoas físicas correspondeu a 24,4% do volume financeiro das transações da Bovespa no primeiro semestre de 2008, contra 20,2% em 2000, fato que denota a importância desse mercado, não apenas para os investidores institucionais, mas também para os investidores individuais. No mesmo período, a participação de investidores institucionais passou de 15,8% para 26,3% e o volume transacionado saltou de 188 bilhões de reais para 800 bilhões de reais. Dessa maneira, o estudo desse mercado e seus respectivos componentes, dos quais se pode citar o risco, a precificação dos ativos e a divulgação das informações, torna-se cada dia mais relevante.

Dentro dessa área de interesse, a Hipótese de Mercado Eficiente (HME) desenvolvida por Fama (1970) dominou por cerca de 30 anos os estudos nos mercados de ações. Tal hipótese afirma que não é possível superar o mercado recorrentemente usando as informações disponíveis no mercado.

Nas últimas duas décadas, surgiram trabalhos em finanças que demonstraram empiricamente que o valor dos ativos não segue fielmente a HME. O comportamento dos investidores passa a ser considerado nos estudos, criando uma nova área de pesquisa chamada finanças comportamentais. Os pesquisadores dessa área defendem que os investidores não são racionais e os mercados não são eficientes como descreve a HME. Como exemplos, pode-se citar Shiller (1981) e Pontiff (1997). Shiller (1981) foi um dos primeiros a questionar a validade da HME. Ele analisou os mercados de ações dos Estados Unidos a partir da década

de 20 e observou variações maiores do que as esperadas por qualquer análise racional das informações disponíveis. Pontiff (1997) observa um excesso de volatilidade nos retornos de fundos em comparação às ações que o compõem. Atualmente, a existência ou não de bolhas na formação de preços dos ativos é um dos assuntos mais estudados no ramo das finanças comportamentais. Shiller (2000, p.14) define bolha de preços como “uma situação em que preços altos são sustentados em grande parte pelo entusiasmo dos investidores e não por uma estimativa consistente de valor real”.

Assim, o presente estudo visa identificar se há evidências de bolhas de preços no mercado acionário brasileiro no período de 1994 a 2009.

### 1.1 Identificação do Problema

O presente trabalho baseia-se na teoria de que qualquer ativo deve valer as expectativas de rendimentos futuros trazidos a valor presente, por uma taxa de retorno mínima exigida. As ações, como ativos que são, deveriam valer, a princípio, a expectativa de dividendos futuros trazidos a valor presente pelo custo de oportunidade do capital. De acordo com esta suposição teórica, não deve haver diferença - ou ela deve ser residual - entre o valor da ação estimado a partir dos dividendos e os preços das ações. O desvio persistente entre esses valores indica que pode haver um componente de bolha na formação do preço. Considerando estas premissas, o objetivo é responder a seguinte questão: “há evidências de bolhas de preços no mercado acionário brasileiro no período de 1994 a 2009?”

### 1.2 Objetivos a atingir

São objetivos os seguintes:

#### 1.2.1 Objetivo geral

De acordo com o problema apresentado, o presente trabalho tem como objetivo geral identificar se há evidências de bolhas de preços no mercado acionário brasileiro no período de 1994 a 2009.

#### 1.2.2 Objetivos específicos

São objetivos específicos, importantes para o alcance do objetivo geral:

- Construir um índice que represente a distribuição de dividendos no Brasil, utilizando as mesmas ações presentes nas carteiras teóricas do Índice BOVESPA no período de 1994 a 2009, possibilitando a comparação com o índice de preços.
- Utilizar o filtro de Kalman como estimação do modelo de estado-espço e validar sua escolha demonstrando o ganho em precisão dos valores estimados.
- Testar a precisão do modelo utilizado.

### 1.3 Relevância da Pesquisa

Os mercados financeiros cresceram bastante nos últimos tempos, tornando-se importante fonte de financiamento para as empresas e opções atrativas de rentabilidade para investidores e especuladores. O conhecimento dos fenômenos que envolvem esses sistemas é de extrema relevância, pois permitem que as decisões dos agentes econômicos tenham como base o maior conjunto possível de informações.

As quedas acentuadas nos mercados de ações são importantes eventos financeiros que fascinam os acadêmicos e práticos. As crises financeiras, como o estouro de bolhas de preços, podem causar grandes impactos sociais e econômicos, uma vez que diminuem os recursos disponíveis, reduzem as fontes de financiamentos e provocam movimentação dos investidores para aplicações mais seguras.

Uma das possíveis causas de quedas nas bolsas é a especulação. Os especuladores trabalham com objetivos de curto prazo, buscando retorno rápido sobre o investimento e não a possibilidade de crescimento e de geração de receitas da investida. Os especuladores, geralmente grandes investidores, podem restringir a oferta de ações provocando aumento artificial nos preços sem que estes estejam vinculados aos seus valores fundamentais. Quando os lucros de especulação forem realizados, aumentando a oferta de ações, os preços tendem a retornar aos valores fundamentais, provocando baixas, ocasionando grande volatilidade e incertezas que podem levar a fuga em massa de capitais da bolsa.

Instabilidades sistêmicas são as grandes preocupações dos órgãos reguladores, como a Comissão de Valores Mobiliários e o Banco Central do Brasil. Portanto, evidenciar a presença de bolhas de preços no mercado brasileiro permite às autoridades monetárias tomar medidas para evitar a ocorrência de uma crise no mercado de capitais e minimizar seus efeitos. Medidas como a regulação mais restritiva, o aumento da obrigatoriedade na divulgação das informações no sentido de ampliar a quantidade, a qualidade e a periodicidade do que é publicado, a investigação de vazamento de fatos relevantes a pequenos grupos bem como a

manipulação do mercado por especuladores são exemplos de ações que podem ser adotadas pelo poder estatal.

Assim, a relevância deste trabalho está em demonstrar se no Brasil há ou não evidências de ocorrências de bolhas de preços no mercado acionário, servindo de subsídio para investidores no processo de tomada de decisão de seus investimentos e para autoridades financeiras, que de posse desta informação, poderão adequar e planejar suas estratégias quanto à regulamentação e fiscalização do mercado financeiro e de capitais com maior quantidade de dados, além de adequar a política monetária para prevenir tais eventos.

#### 1.4 Organização do trabalho

O trabalho está estruturado em cinco capítulos que abordam as seguintes questões:

1. o primeiro capítulo traz a introdução do tema, com a identificação do problema a ser estudado, os objetivos a serem atingidos, a apresentação da relevância da pesquisa, a organização do trabalho e as limitações do estudo;
2. o segundo capítulo trata do referencial teórico, que contempla a evolução histórica do estudo das finanças e das finanças comportamentais, definições de bolhas de preços e seus tipos, estudos sobre bolhas e explicação sobre o filtro de Kalman;
3. o terceiro capítulo discorre sobre as metodologias utilizadas, o modelo econométrico, a relação valor fundamental e componente de bolha, os dados utilizados, a metodologia utilizada no Ibovespa e a construção do índice de dividendos;
4. o quarto capítulo demonstra a análise dos resultados e a comparação com modelos alternativos;
5. por fim, o quinto capítulo relata as conclusões e recomendações.

#### 1.5 Limitações do estudo

Essa pesquisa apresenta algumas limitações que não invalidam e nem reduzem a sua relevância no campo de estudos das finanças, mas que podem ser tratadas em novos trabalhos.

A primeira limitação importante é a quantidade de observações. Elas ficaram limitadas a 177, pois se optou por trabalhar apenas com os valores pós implantação do real como unidade monetária no Brasil, apesar de o IBOVESPA existir desde 1968. Além disso, os dividendos são pagos mensalmente, logo, apesar do índice ser apurado diariamente (foram desconsideradas as apurações durante a ocorrência dos pregões), a frequência das observações ficou limitada pelos dados de dividendos pagos.



A definição metodológica do índice prevê o rebalanceamento das quantidades teóricas como forma de se ajustar à distribuição de proventos. A limitação encontrada é a falta de informação da magnitude desses rebalanceamentos. Entende-se que eles não devem ser de grande monta uma vez que, segundo a teoria, o valor dos ativos seria reflexo de seus dividendos futuros na perpetuidade, logo a distribuição de proventos dentro do quadrimestre de vigência da carteira não provocaria mudanças significativas. Entretanto, apenas a obtenção da informação e apuração das variações acabaria com essa limitação.

## 2. Referencial teórico

### 2.1 Evolução histórica do estudo de finanças

Antes de conceituar o que são bolhas especulativas racionais, é importante mostrar a evolução histórica do estudo das finanças até o surgimento desse tipo de bolha como foco de pesquisas. O primeiro trabalho relevante é o de Markowitz (1991), que apresenta de forma pioneira a escolha eficiente das carteiras de ativos. Markowitz (1991, p.3) afirma que a escolha de um portfólio deve ser balanceada, visando prover o investidor de segurança e oportunidades frente às possíveis contingências. A escolha dos ativos se fundamenta nas informações disponíveis, mais notadamente o desempenho passado e a opinião dos analistas sobre as perspectivas. Além disso, Markowitz (1991, p.6) ressalta que os investidores têm como objetivo obter o maior retorno possível com o menor risco, considerando na montagem da carteira a correlação entre os ativos e a possibilidade de minimizar o risco via diversificação.

Tobin (1958) dá seqüência ao trabalho de Markowitz, incluindo os ativos livres de risco na Teoria de Seleção de Carteiras. Isso permitiu alavancar os portfólios na fronteira eficiente, trazendo os conceitos de portfólio super eficiente e de *capital market line*. Segundo Tobin, a seleção de um conjunto de ativos na *capital market line* seria capaz de ter desempenho melhor que as carteiras na fronteira eficiente.

Sharpe (1964) formalizou o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Esse modelo relaciona o risco e o retorno dos ativos, sendo que o retorno de um ativo qualquer é determinado pela soma do retorno do ativo livre de risco e pelo prêmio de mercado ajustado pelo fator beta. O fator beta descreve como o retorno de um ativo ou de um portfólio está correlacionado com os retornos da carteira de mercado<sup>1</sup>, medindo a parte da variância que não pode ser mitigada pela diversificação. Assim, um ativo com beta maior do que um, exige um retorno maior que o mercado para compensar o risco. Da mesma maneira, ativos com beta menor do que um exigem retornos menores do que os obtidos pelo mercado devido ao seu menor risco. O CAPM traz duas outras interessantes conclusões: o portfólio de mercado é o portfólio super eficiente de Tobin e está na fronteira eficiente e todos os investidores devem manter a carteira de mercado, alavancada ou não.

---

<sup>1</sup> Carteira de mercado, segundo a definição, é o portfólio que contém todos os ativos de risco do mercado na proporção do seu valor de mercado em relação ao valor total dos ativos, com o pressuposto de que os ativos são infinitamente indivisíveis.

Fama e French (1992) criticam o CAPM uma vez que ele não explica completamente os retornos dos ativos. O CAPM utiliza apenas o fator beta para comparar a carteira com o mercado. Então, para aprimorar o modelo de regressão, esses autores propõem o modelo de três fatores. Esse modelo, segundo Fama e French (1993), explica os retornos das ações através de três fatores de risco: o mercado, conforme definido por Sharpe no CAPM, o tamanho da empresa, definido pelo valor de mercado do patrimônio líquido, e o índice *Book-value-to-price*, definido pela relação entre o valor contábil e o valor de mercado do patrimônio líquido. Assim como o CAPM, o modelo de três fatores de Fama e French também obtém altos retornos como prêmio pelo alto risco e, em particular, prevê que se os retornos crescem com a razão valor contábil / preço, então as ações com alto valor nessa razão são mais arriscadas que a média. Esse fato é exatamente oposto da visão tradicional de um analista financeiro. Se essa razão é maior do que um, pode-se imaginar que o ativo está subavaliado. Entretanto, segundo Fama e French, de acordo a Hipótese de Mercado Eficiente, para essa razão ser maior do que um, a taxa de retorno deve ser alta, o que indica um ativo de alto risco.

## 2.2 A Hipótese de Mercado Eficiente

Fama (1970) apresenta a teoria de mercados eficientes, a qual afirma que os preços dos ativos financeiros refletem as informações relevantes, de forma imediata e correta, e que a melhor estimativa para o preço de um título é seu preço atual.

Fama (1991) revisa trabalhos sobre sua teoria e apresenta as impressões sobre a evolução do tema. Fama (1991, p. 2) altera a divisão feita originalmente em 1970 sobre os testes para testar a eficiência de mercado. Inicialmente, os testes são divididos em três categorias: forma fraca (qual a precisão dos retornos passados em prever retornos futuros?), forma semi-forte (Com que rapidez os preços refletem as novas informações?), e forma forte (Algum dos investidores tem informação privada que não está totalmente refletida nos preços de mercado?). No trabalho de 1991, o teste de forma fraca passa a se chamar de teste de predição dos retornos, incluindo a estimação de valores futuros dos retornos. Os testes da forma semi-forte e forte tem apenas mudança na nomenclatura passando a se chamar estudo de eventos e teste de informação privada, respectivamente.

Para que a hipótese de eficiência seja validada, alguns requisitos são necessários. Fama (1970, p. 387) estabelece que a validade de sua teoria depende que as informações

estejam disponíveis a todos; não haja custos de transação na negociação e todos os investidores possuam expectativas homogêneas.

Jensen e Meckling (1976) reescrevem as premissas citando que a Hipótese de Mercado Eficiente prevê que o mercado seja competitivo, ou seja, o preço dos títulos pode flutuar de forma a atingir um equilíbrio, que o retorno sistemático do investidor ajustado ao risco, não pode ser maior que o retorno do mercado; e que toda informação nova deve ser refletida no preço do título imediatamente ou em um curto período de tempo.

Observando as três formas de teste propostas por Fama (1970, 1991), pode-se deduzir que, a eficiência do mercado está diretamente ligada à maneira como uma determinada informação chega aos agentes de mercado e à maneira como eles interpretam essas informações. Quando determinado mercado é considerado eficiente, a expectativa de todos os participantes sobre as implicações que a informação disponível acarreta para distribuição futura de preço de cada ativo. Ao considerar que os investidores sejam racionais, a Hipótese de Mercado Eficiente supõe que os preços de todos os ativos refletem exatamente o valor presente dos fluxos de caixas futuros esperados para cada ativo.

Outra observação relevante é que os preços atuais não precisam ser exatamente iguais ao seu valor teórico, mas sim que não haja vieses nos seus desvios. Nesse sentido, Damodaran (2002) relata que alguns conceitos importantes estão implícitos na definição de mercados eficientes, quais sejam: os erros no preço não podem ser tendenciosos, ou seja, os desvios em relação ao valor real devem ser aleatórios; os desvios aleatórios do valor real não podem ser correlacionáveis com qualquer variável observada; nenhum investidor deve ser capaz de, consistentemente, encontrar ações supervalorizadas utilizando quaisquer estratégias de investimento.

### 2.2.1 Os Testes de Eficiência do Mercado

Conforme citados anteriormente, nessa seção são detalhados os testes de eficiência de mercado propostos por Fama (1991).

Segundo Fama (1970), na forma fraca de eficiência, os retornos esperados são formados pelo conjunto de informações disponíveis, que se encontram refletidas nos preços. Assim, exclui-se a possibilidade da existência de estratégias de negociação fundamentadas em informações passadas capazes de promover ganhos ou retornos que excedam os de equilíbrio, ou seja, informações contidas nos preços (ou retornos) passados não são úteis para a obtenção de retornos extraordinários. Na versão de Fama (1991), o teste de predição dos retornos

também inclui o trabalho de estimar os retornos com variáveis como os rendimentos de dividendos e taxas de juros. A discussão da previsibilidade também considera que a previsibilidade de testes de modelos de precificação de ativos e as anomalias (como o efeito do tamanho) descobertas nos testes. Finalmente, a evidência de que há retornos sazonais (como o efeito de Janeiro), e a alegação de que os preços dos ativos são muito voláteis, também são considerados.

De acordo com Fama (1970, p.404), na forma semiforte de eficiência, as informações publicamente disponíveis devem estar inteiramente refletidas no preço da ação. Assim sendo, os preços não refletem apenas o histórico passado, como também todas as informações disponíveis publicamente, em especial, os eventos futuros como divisão de ações, anúncio de relatórios financeiros e fatos relevantes. Desse modo, nenhum investidor pode obter retornos anormais baseados em informações publicamente disponíveis, visto que os preços se ajustam rapidamente à divulgação de novas informações. Dessa forma, os testes dessa forma de eficiência se concentram em verificar a reação dos preços às novas informações decorrentes dos respectivos eventos.

A forma forte de eficiência prevê que nenhum investidor pode obter retornos extraordinários, devido ao fato de todas as informações serem publicadas aos investidores. Neste teste da forma forte, afirma-se que todas as informações relevantes disponíveis são refletidas nos preços de títulos, ou melhor, que os preços de títulos refletem completamente informações privilegiadas, ou *insider information*, como também todas as informações disponíveis publicamente.

No trabalho de 1970, Fama aponta alguns dificultadores dos testes de eficiência da forma forte como a falta de uma *proxy* de comparação entre os retornos de agentes com e sem informações monopolísticas e o estudo da viabilidade de obtenção dessa informações quando relacionados os custos e os retornos desse processo. Quando da revisão dessas afirmações em 1991, Fama (1991, p. 1603) relata resultados nos quais os lucros das informações privilegiadas são estimadas em detalhes e que há evidências de precificações diferentes entre os diversos agentes do mercado, sugerido diferenças nas informações disponíveis.

### 2.2.2 Os Testes de Eficiência de Mercado no Brasil

De Medeiros (2007) usando de estudo de evento para testar a Hipótese de Mercado Eficiente e sua variante, a Hipótese de Informação Incerta (UIH), chegou a conclusão que nem a HME nem a sua variante UIH são sustentadas no mercado brasileiro. O autor

evidenciou que há uma sobre-reação (*overreaction*) para choques positivos e negativos, sugerindo a prevalência de ineficiência institucional.

Camargos e Barbosa (2006) , por meio de um estudo de eventos dos anúncios de fusões e aquisições de firmas negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), ocorridos entre julho de 1994 e julho de 2002, investigou-se se o mercado de capitais brasileiro pós-Plano Real passou a apresentar a forma de eficiência informacional semi-forte. No cálculo dos retornos anormais, foi utilizado o Modelo de Mercado, adaptado pelo procedimento *trade-to-trade*. Concluiu-se que, apesar dos avanços, informacionalmente o mercado de capitais brasileiro não se comportou de maneira eficiente no período analisado no que se refere à forma semi-forte. O que, somado às outras pesquisas analisadas com outros eventos, traz suporte de evidência contrária ao modelo de eficiência de mercado para essa forma. Os autores apresentam uma extensa lista de trabalhos que testaram a eficiência semi-forte do mercado brasileiro.

Belo e Brasil (2006) investigam a assimetria informacional no mercado de capitais brasileiro quando da convocação para a Assembléia Geral Ordinária (AGO) ou para a Reunião do Conselho de Administração (RCA), desde que na pauta conste a intenção de aumentar o capital, via subscrição de ações, ou quando do anúncio da decisão de aumentar o capital, verificando-se a eficiência semi-forte do mercado e a assimetria informacional. Os dados foram obtidos da Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e do banco de dados da empresa de consultoria Lafis. Com base em pesquisa teórica e empírica, os autores investigaram se há existência de retornos anormais quando do anúncio de novas subscrições, bem como de retornos anormais acumulados para um período anterior (-20 dias) e um período posterior (+20 dias) em relação à data do anúncio. Os resultados da pesquisa sugerem a existência de assimetria informacional no mercado de capitais brasileiro e a inexistência da eficiência semi-forte do mercado.

Bone e Ribeiro (2002) apresentam evidências sobre a hipótese de eficiência fraca no mercado acionário brasileiro. Estudando as ações do índice da Bolsa de Valores de São Paulo no período recente, verifica-se a importância de termos auto-regressivos lineares e não lineares e dos chamados efeito dia-da-semana e efeito feriado na previsão dos retornos das ações do índice. Os resultados obtidos sugerem que na maioria das ações algum dos efeitos é verificado, com particular importância da terça-feira na previsão dos retornos.

### 2.3 Finanças comportamentais

As origens da teoria comportamental na Economia nascem no início do século XVIII, com Bernoulli (1738). Nessa obra, o autor apresenta e resolve o paradoxo de São Petersburgo, o qual seria a base das teorias de aversão ao risco, prêmio de risco e utilidade.

Conforme detalha Bernstein (1998, p.103), Bernoulli defende que a teoria das expectativas é falha, pois ignora as conseqüências dos resultados em um futuro incerto. Dessa forma, a maneira mais acertada de avaliar as decisões é a utilidade, pois ela considera as circunstâncias particulares em que a pessoa está inserida. Segundo Bernstein (1998, p. 110), a noção de utilidade proposta por Bernoulli forneceu as bases da Lei de Oferta e Demanda e ajudou a entender como os mercados funcionam e como vendedores e consumidores acordam um preço. Além disso, a satisfação ou utilidade, conforme descrita por Bernoulli, gerada por um pequeno aumento de riqueza tende a ser inversamente proporcional à quantidade de bens previamente adquirida.

Neumann e Morgenstern (2004) apresentam a teoria da utilidade cardinal. Essa teoria atribui um número índice para a utilidade, com o propósito de permitir mensurar a utilidade de determinado bem ou serviço para as pessoas, tornando possível prever, em situação de jogo, as alternativas dos indivíduos em busca de maximizar sua própria função de utilidade.

Kahneman e Tversky (1979) desenvolveram a teoria das expectativas como um contraponto às inconsistências encontradas por eles na teoria da utilidade cardinal. Esses pesquisadores perceberam que escolhas, em situações com risco, apresentam vários efeitos psicológicos que precisam ser considerados, não se podendo limitar a análise apenas à premissa de aversão ao risco dos investidores. Kahneman e Tversky (1979, p.289) citam que a análise das decisões deve considerar como o panorama da situação é percebido e o julgamento das possibilidades de ganhos e perdas, com os respectivos pesos, feitos pelos agentes. Ressalta-se que a forma como é criado esse julgamento pode ser bastante influenciada pelos interessados na decisão e também deve ser foco de estudos, conforme indicam os autores.

Outra contribuição desses autores para as finanças comportamentais foi o estudo dos processos de tomadas de decisão, em especial, os processos heurísticos e os vieses. Processos heurísticos se referem a modelos criados pelo homem para tomar decisões complexas em ambientes incertos. O processo de tomada de decisão não é estritamente racional, onde todas as informações relevantes são coletadas e avaliadas objetivamente, ao invés disto, os tomadores de decisão usam “atalhos mentais” no processo (KAHNEMAN; TVERSKY, 1974, p. 1124).

Um dos processos heurísticos mais estudados atualmente é o excesso de autoconfiança dos investidores. Esse fenômeno leva o investidor a sobreestimar suas habilidades perceptivas, e acreditar que elas podem “medir” o mercado. O excesso de autoconfiança não é estudado apenas nos comportamentos dos investidores mas também em várias outras áreas como a habilidade de dirigir (SVENSON, 1981) e a probabilidade do próprio negócio ter sucesso (COOPER, WOO, DUKELBERG, 1988). Para trabalhos voltados para o mercado de capitais, podem-se citar Biaisi et al (2005), no qual se conclui que a falta de calibragem da informação reduz os retornos dos investidores e que a auto monitoração os aumenta, e Odean (1998), no qual se examina como o excesso de confiança influencia o mercado. O resultado foi a observação de que o fenômeno aumenta o volume esperado de transações e a profundidade do mercado e diminui a utilidade esperada dos investidores.

A ocorrência do excesso de confiança é explicado por Tversky e Kahneman (1974, p. 1128 – 1129) como fruto do fenômeno âncora, isto é, as pessoas se prendem às suas estimativas iniciais e não fazem os ajustes suficientes, o que provoca um viés em suas estimativas de intervalos de confiança, que, em geral, ficam pequenos demais.

Outro aspecto da autoconfiança excessiva é o fato dos investidores acreditarem que suas informações são melhores e mais confiáveis que as dos outros, que atuam no mesmo mercado. Geralmente, em uma negociação, as partes envolvidas possuem informações diferentes, possivelmente contraditórias. Sabendo disso, os agentes participantes de uma negociação deveriam refletir mais e apenas tomar decisões quando estivessem certos da confiabilidade das informações que recebem, porém a confiança exagerada em suas habilidades e informações faz com que eles tenham uma tendência a realizar um volume de negócios excessivos, arriscando mais do que o previsto.

Quando as pessoas são excessivamente autoconfiantes, estipulam estreitas faixas de confiança. Avaliam suas altas estimativas muito baixas e suas baixas estimativas muito altas, além de desconsiderar casos extremos de difícil mensuração.

## 2.4 Bolhas especulativas racionais

### 2.4.1 Definição

Segundo Lucas (1978, p. 1430 – 31), o valor fundamental de um ativo é o valor presente dos fluxos de caixa futuros gerados por esse ativo, considerando toda a informação disponível para estimar esses fluxos. A diferença entre o preço atual de um ativo financeiro e



o seu valor fundamental é chamada de bolha. Dessa forma, o preço de um ativo pode ser descrito pela seguinte equação:

$$P_t = p_t + b_t + u_t \quad (1)$$

onde  $P_t$  é o preço atual,  $p_t$  é o valor fundamental,  $b_t$  é o componente bolha e  $u_t$  é um termo de ruído aleatório.

Dessa definição, denota-se que o valor fundamental é aquele obtido considerando a HME. Essa teoria afirma que as informações relevantes estão disponíveis e são incorporadas, de forma imediata, aos preços dos ativos financeiros. Assim, a eficiência do mercado é que estabelece o preço justo, pois com todas as informações refletidas no valor atual, não há supervalorização nem subestimação.

O valor fundamental proporciona o ganho do mercado, que é a taxa de retorno ajustada ao risco de mercado por transacionar com aquela informação, ressaltando que não existe apenas uma taxa de retorno de mercado, mas uma para cada nível de risco encontrado. Para Damodaran (2002, p. 113), um mercado eficiente é aquele em que o valor de mercado não é necessariamente igual ao valor real do investimento, mas uma estimativa sem viés. Isso significa que o preço pode ser maior ou menor do que o valor real, desde que esses desvios sejam aleatórios, que há uma chance igual do ativo estar supervalorizado ou subestimado e que nenhum investidor deve ser capaz de, consistentemente, obter retornos maiores que o mercado.

O cálculo do valor fundamental é feito através do Modelo de Gordon o qual pressupõe que o preço de um ativo de uma empresa é o valor presente da soma dos dividendos do próximo período somados com o preço final da ação no mesmo tempo (Gordon, 1959, p. 100). Dessa forma, a remuneração do acionista é o dividendo mais o lucro econômico, função da variação do preço da ação como demonstra

$$VP_0 = \frac{D_1}{1+i} + \frac{VF_1}{1+i} \quad (2)$$

Onde  $D_1$  é o dividendo a ser pago ao final do primeiro período,  $VF_1$  é o preço esperado para esta mesma data,  $VP_0$  é o valor presente do investimento na ação e  $i$  é a taxa de desconto.

Aplicando a equação (2) recursivamente ao longo do tempo, tem-se que

$$VP_0 = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \frac{D_3}{(1+i)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+i)^t} \quad (3)$$

Onde  $D_t$  é o dividendo a ser pago ao final do período  $t$ ,  $VP_0$  é o valor presente do investimento na ação e  $i$  é a taxa de desconto.

Denota-se que o preço dos ativos é a soma dos dividendos futuros trazidos a valor presente. Este modelo pressupõe o interesse dos acionistas apenas nos dividendos e que o preço da ação no tempo  $t$  seria função dos dividendos futuros. A taxa de desconto dos dividendos deve ser a que melhor demonstra o custo de oportunidade do acionista, ou seja, o custo do capital próprio. A equação (3) acima representa um modelo que é aplicado independentemente de os dividendos esperados estarem em nível crescente, constante ou variável. Como os dividendos são obtidos por expectativas de seu valor no futuro, o modelo pode ser simplificado de acordo com cada situação.

O valor de uma ação com dividendo constante em uma perpetuidade é dado por:

$$VP_0 = \frac{D}{1+i} + \frac{D}{(1+i)^2} + \frac{D}{(1+i)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+i)^t} = \frac{D}{i} \quad (4)$$

O Modelo de Gordon com o valor de uma ação com dividendos crescentes a uma taxa constante em uma perpetuidade fica

$$VP_0 = \frac{D}{1+i} + \frac{D(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{D(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{t-1}}{(1+i)^t} = \frac{D}{i-g} \quad (5)$$

Onde  $g$  é a taxa de crescimento dos dividendos.

O cálculo do valor de uma ação com crescimento variável de dividendos é feita com o Modelo de Gordon descrito pela equação (3), visto que uma fórmula específica seria muito complexa.

Explicado o que é e como se calcula o valor fundamental, é necessário definir a componente bolha. Tradicionalmente, a teoria econômica pressupõe que os indivíduos são racionais e tomam decisões que visam maximizar seus retornos e sua utilidade. A hipótese da racionalidade vem sendo constantemente refutada, propondo a inserção de novos fatores na composição dos preços, como a bolha, por exemplo.

Se uma ação está sendo negociada a um preço inferior ao seu valor fundamental, os investidores experientes no mercado atacam a oportunidade de lucro através da compra de mais ações do estoque, provocando elevação do preço, o mesmo ocorre para corrigir as ações que estão sendo negociados acima de seus valores fundamentais. Assim, se um ativo é persistentemente negociado a um preço superior ao seu valor fundamental, diríamos que seu preço contém uma bolha e que está supervalorizado por um montante igual à diferença bolha entre o preço do ativo de negociação e seu valor fundamental.

Esta definição implica que, se persistirem as bolhas, os investidores são irracionais em sua incapacidade de lucrar com o sobre preço. Este tipo de bolha é denominada de

irracional. Scheinkman e Xiong (2003, p. 1184 – 86) propõe um modelo para esse tipo de bolha, ilustrando que a diferença entre os valores esperados por compradores e vendedores se deve ao excesso de confiança que as pessoas têm de que suas estimativas são mais precisas que as dos demais.

Ao longo das últimas décadas, vários estudos sugerem que os mercados de ativos são muito eficientes. Estes mercados compreendem milhares de profissionais que buscam constantemente a explorar as possibilidades de lucro. Se aparecer bolhas irracionais, os investidores podem usar uma variedade de instrumentos de mercado, como as opções e as posições curtas, para estourá-las rapidamente e obter lucros com isso. No entanto, episódios como a bolha da internet de 2000, pelo menos, sugerir a possibilidade de que os preços dos ativos pode persistentemente desviar de seus valores fundamentais.

A persistência é fundamental na caracterização de uma bolha racional. Como ilustrado por Scheinkman e Xiong (2003, p. 1187), as bolhas irracionais diferem das racionais no fato da segunda depender da maturidade de longo prazo para a geração do fenômeno.

Um processo de bolha especulativa, segundo Shiller (2000, p. XIV), pode ser definido como uma situação em que os preços altos são sustentados em grande parte pelo excesso de confiança dos investidores e não por estimativa consistente do valor real. Dessa maneira, o estudo das bolhas é assunto das finanças comportamentais, devido à consideração da falha na mensuração dos preços por processos psicológicos que distorcem as informações disponíveis ser determinante na existência de expectativas irracionais que superam o valor fundamental dos ativos.

De maneira didática, pode-se considerar um investimento em uma ação que está em negociação cinquenta unidades monetárias por ação. Não há expectativa de novos dividendos e têm as informações disponíveis indicam que o valor do ativo em um ano será de dez unidades monetárias por ação. No entanto, um investidor pode acreditar firmemente que pode vender as ações em seis meses por cem unidades monetárias cada. Pode-se considerar racional a compra dessas ações se o objetivo é vendê-las em seis meses. O investidor que assim procede e aqueles que compartilham sua opinião criam uma bolha, aumentando o preço das ações no processo. Este exemplo ilustra que as bolhas podem ser perpetuar de uma forma que, dificilmente, pode ser chamada de irracional.

Entender esse contexto significa perceber que o valor fundamental de um ativo inclui o seu preço esperado no momento da compra. Caso os investidores, por um motivo qualquer como assimetria nas informações ou por estimativas errôneas, esperam racionalmente que

preço de venda de um ativo aumente seguidamente, é possível, então, que o preço desses ativos cresça persistentemente mesmo se a viabilidade da sua empresa emissora não suporte estes preços indefinidamente. Esta situação pode ser chamada de bolha racional.

A criação das bolhas especulativas, de acordo com Shiller (2002, p. 18), se deve ao processo de *feedback*. Esse processo ocorre da seguinte forma: uma alta especulativa de preços aumenta o entusiasmo dos investidores, que por sua vez, gera um aumento na demanda pelos ativos, resultando em um aumento de preços. O aumento da demanda é decorrente da tendência das pessoas de supervalorizar os altos retornos passados como expectativa de altos retornos futuros. Esse movimento de alta dos ativos mostra a falta de racionalidade na interpretação das informações para tomada de decisão em relação aos investimentos por parte dos agentes de mercado. A subida dos preços não pode ser sustentada indefinidamente, o que causa o estouro da bolha. Barberis e Shleifer (2003, p. 173 – 174) também defendem que o processo de *feedback* provoca o movimento descrito acima. Eles propõem um modelo para apurar a influência dos retornos passados em determinados estilos de investimentos, chegando à conclusão que, além de amplificar os preços, os valores dos ativos de mesmo estilo seguem movimentos semelhantes.

Sornette (2004, p. 283) enumera cinco possíveis estágios, que vão desde a formação da bolha até seu estouro:

1. A bolha começa suavemente com algum aumento da produção e venda (ou demanda para alguma *commodity*) em contrapartida com um relativo aumento no otimismo do mercado.
2. A atração por investimentos com bons ganhos potenciais, levando o aumento dos investimentos feitos por investidores internacionais com novos recursos, inflacionando os preços.
3. Em relação a 2, há a atração de investidores menos sofisticados e, em adição, diminui-se as margens de ganho, a qual aumenta a demanda por ações mais rápido do que a taxa real de juros de mercado.
4. Neste estágio, o comportamento do mercado se distancia da real situação da produção industrial e de serviços.
5. Como os preços aumentaram muito, o número de novos investidores entrando no mercado especulativo diminui e o mercado mergulha numa fase de grande nervosismo, até o ponto em que a instabilidade é revelada e o mercado entra em colapso.

Este cenário se aplica há todas as quebras de mercado, incluindo algumas antigas como a de Outubro de 1929 nos Estados Unidos, que foi considerada à época como de bons investimentos potenciais tanto para os investidores nacionais quanto internacionais. Em complemento, o conceito de “Nova Economia” foi usado largamente nas mídias ao longo do

tempo, remanescente em várias outras fases, como o atual *crash* da bolha da internet e da bolha Imobiliária nos Estados Unidos. (SORNETTE, 2004, p. 283)

A questão temporal é extremamente relevante na obtenção de bolhas especulativas. Os desvios de curtos prazos originados do simples movimento especulativo não evidenciam a existência de uma bolha especulativa. Apenas desvios persistentes do valor fundamental e que não podem ser considerados aleatórios levam à formação de bolhas. Nessa linha, Martin *et. al* (2004, p. 223) considera como sendo bolha uma alta persistente dos preços de um ativo por um tempo suficientemente longo (*rally*), seguido por colapso dos mesmos (*crash*)”.

#### 2.4.2 Tipos de Bolhas

Esse trabalho trata de bolhas especulativas racionais. Entretanto, esse tipo de fenômeno não é exclusivo como foco de estudos. Existem várias tipos de bolhas já pesquisadas como: *sunspots*, *fads* e *intrinsic*. Na tentativa de maximizar seus retornos, cada agente deve tentar prever as ações dos demais. Nesse processo, existe a incerteza sobre os resultados. Quando ela é gerada pelos fundamentos da economia, é chamada de incerteza de Mercado. Quando é gerada por elementos fora da economia, é chamada de incerteza extrínseca. As bolhas *sunspots* são aquelas decorrente da incerteza extrínseca. De acordo com Camerer (1989, p.3), *fads* são desvios negativos em relação ao valor fundamental causados por forças sociais ou psicológicas. A bolha do tipo *intrinsic*, conforme proposta por Froot e Obstfeld (1991, p. 1189 – 1190), é aquele na qual toda a variabilidade está explicada por fundamentos exógenos da economia, sem nenhuma variável endógena.

Uma vez descritos outras espécies, a discussão se centrará no alvo desse trabalho que é a bolha especulativa. O modelo original de bolha especulativa racional surge com Blanchard (1979) e Blanchard e Watson (1982). De acordo com este modelo, a bolha surge quando o preço de um ativo é função crescente e positiva da variação esperada do preço futuro. O pressuposto é que os agentes econômicos, sob a condição de formar as suas expectativas de preço de forma racional, não cometem erros de forma sistemática, e, portanto, a relação positiva entre preço atual e sua variação futura esperada implica em relação igualmente positiva entre o seu preço atual e sua variação observada. Assim, as expectativas dos agentes se “auto-realizam”, fazendo com que a variação dos preços dirija o atual preço no sentido de sua expectativa, independentemente de seus fundamentos. Vale dizer que, por um determinado período de tempo, os agentes econômicos agem em função deste raciocínio ou crença e isto faz com que os preços subam, não importando a trajetória dos dividendos. Os

agentes têm ciência sobre a possibilidade de ruptura da bolha, porém o retorno esperado justifica assumir tal risco. O que se observa, porém, é que esse desvio entre o preço observado e o seu valor intrínseco pode ser tão demasiado, de tal maneira que pode ser considerado como fruto de especulação. Esse é o motivo para se denominar este fenômeno de bolha especulativa racional.

Segundo Brooks e Katsaris (2003, p. 320), bolhas especulativas são criadas por fatores exógenos que não tem correlação com as informações que interferem no valor fundamental dos ativos, podendo ser estimativas e análises incorretas dos fundamentos do mercado, informações assimétricas ou efeito manada.

#### 2.4.3 Estudos sobre Bolhas

Wu (1997, p. 310) estuda bolhas especulativas, usando o Filtro de Kalman, no mercado norte-americano de ações. Nesse estudo, o autor considera que as bolhas são estocásticas, com parametrização parcimoniosa e com fácil estimação.

Hong, Scheinkman e Xiong (2006) propõem um modelo para a relação existente entre uma bolha de preços no mercado acionário e o tempo em que a ação não pode ser vendida devido a restrições, como aquelas impostas aos funcionários que compram ações de uma oferta pública inicial. Esse tempo é chamado usualmente de *float*. A bolha estudada se forma devido às crenças heterogêneas, decorrente do excesso de confiança e às restrições de vendas pequenas. O modelo cria as seguintes implicações: a bolha de preços, as vendas das ações e a volatilidade dos retornos diminui com o aumento do *float* e o preço das ações tende a cair no fim das restrições de venda.

Brooks e Katsaris (2003) perceberam uma divergência entre os preços das ações e seus dividendos na Bolsa de Londres. Eles examinaram se esta divergência pode ser explicada pela existência de bolha especulativa, usando para isso três testes: teste de variância, teste de especificação de bolhas e teste de cointegração. Os resultados encontrados mostraram que os preços das ações divergem significativamente dos dividendos na década de 1990 e esta divergência tem todas as características de uma bolha especulativa.

Cajueiro e Tabak (2006) usam um teste para detectar bilinearidade em um processo estocástico de raiz unitária para verificar a presença de bolhas racionais nos índices das ações de bancos. A amostra continha 39 índices de bancos de diferentes países. Depois de ajustado para efeitos GARCH, o resultado sugere que, em mais de 69% dos dados, a hipótese de não existir bilinearidade da raiz unitária é rejeitada. Os autores observaram que a dinâmica dos

preços de ações dos bancos na maioria dos países, sejam eles emergentes ou desenvolvidos, segue as premissas das bolhas racionais e da alta especulação.

Martin *et. al* (2004) constataram a presença de bolhas especulativas racionais no Brasil, a partir da identificação de mudança de regime do processo de geração de retornos no mercado brasileiro de ações na BOVESPA, para o período pós Plano Real (julho de 1994 a março de 2004). O modelo utilizado foi o de regimes markovianos de conversão, que permite identificar a estrutura não linear dos dados seja em relação à média condicional, seja em relação à variância condicional. Como resultado, os autores encontraram que a dinâmica do processo de geração dos retornos pode ser descrita como função de dois regimes: *bull e bear markets*. Estes ciclos, porém, puderam ser decompostos em outros ciclos, fases iniciais e finais do ciclo de crescimento (*bull*) e de queda (*bear*). Esta decomposição mostrou-se mais coerente com o conceito de bolha especulativa, no qual há uma relação não linear entre o preço das ações e os seus fundamentos.

Sornette (2004, p. 285 - 304) utilizando-se da lei de potência combinada a uma função log-periódica, validada por uma análise espectral, encontrou bolhas especulativas nos mercados latino-americanos e asiáticos. Na América Latina, foram encontradas quatro bolhas na Argentina entre 1990 e 1999, uma no Brasil em 1997, duas no Chile entre 1991 e 1999, duas no México entre 1991 e 1999, duas no Peru entre 1993 e 1994, e apenas uma na Venezuela entre 1994 e 1999. Na Ásia, foram encontradas duas bolhas no período de 1991 a 1999, na Indonésia e na Coreia e uma bolha na Malásia, Filipinas e Tailândia.

Froot e Obstfeld (1991) propõem que o comportamento do mercado de ações pode ser explicado por *intrinsic bubbles*, que é um tipo específico de bolha racional que depende exclusivamente dos dividendos agregados. Para testar essa proposição, os autores verificam as oscilações anuais dos preços das ações de 1900 a 1988, baseando no índice de preços *Standard and Poor's* e nos índices de dividendos da *Securities Price Index Record*. Os resultados permitiram concluir que o modelo proporciona uma medida mais plausível dos desvios do preço dos ativos em relação ao valor fundamental do que outros modelos. O poder de explicação vem parcialmente de a habilidade observar, de forma persistente, os desvios no longo prazo.

De Medeiros e Daher (2008) testam se a volatilidade do mercado acionário brasileiro entre 1999 e 2006 pode ser atribuída à presença de bolhas. A metodologia envolve testes de raízes unitárias e de cointegração. Os resultados demonstraram que há evidências de que, em certos períodos, a volatilidade dos preços das ações negociadas no mercado brasileiro pode

ser decorrente da presença de bolhas. O teste através da cointegração se justifica, pois se existir cointegração entre os preços das ações num determinado mercado e os dividendos pagos aos portadores dessas ações, pode-se inferir que os preços não divergem significativamente dos fundamentos, isto é, dos dividendos, não havendo, portanto, bolhas de preços. Caso contrário, haverá indícios da presença de bolhas.

De Medeiros e Fernandes (2009) buscam evidências sobre ocorrência de bolhas de preços no mercado acionário brasileiro no período de 1994 a 2007. Foram feitos testes no mercado de forma geral e em 17 setores econômicos divididos conforme proposto pelo banco de dados Economática®. A metodologia consiste em testar a cointegração, no longo prazo, do IBOVESPA como proxy do preço médio das ações, e um índice de dividendos distribuídos, construído baseado nas próprias carteiras do Ibovespa no período. O resultado encontrado demonstra a possibilidade de terem ocorrido uma ou mais bolhas na formação dos preços das ações. Os testes setoriais demonstram o mesmo resultado do teste geral, havendo fortes indícios da possibilidade de bolhas de preços nos 17 setores pesquisados.

## 2.5 Filtro de Kalman

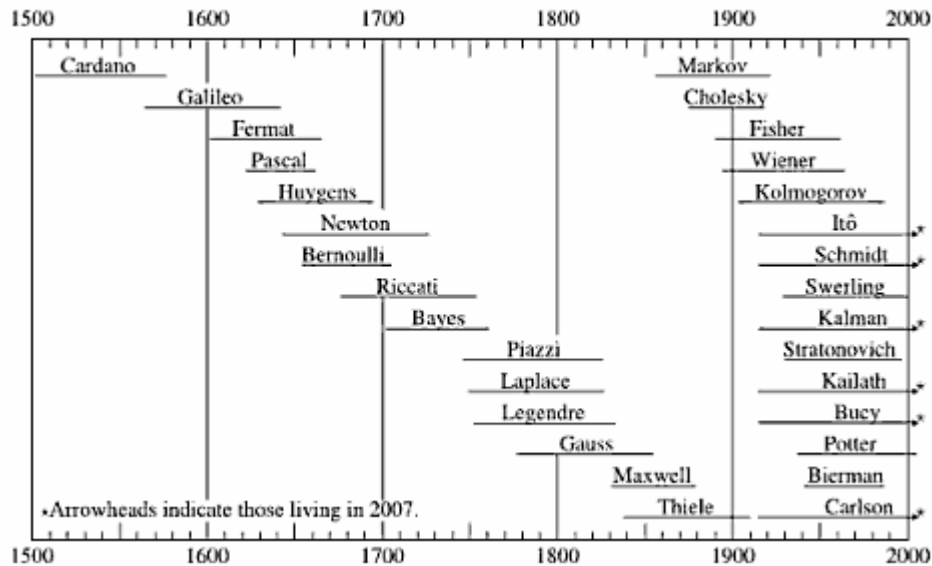
O filtro de Kalman foi proposto por Rudolf Emil Kalman em 1960 no trabalho “A new approach to linear filtering and prediction problems”. Originalmente, a metodologia foi desenvolvida para uso da área de controle e de comunicações, mas, com o passar do tempo, os estudos mostraram novas aplicações, em especial, em finanças.

Segundo Grewal e Andrews (2008, p. 1), o filtro de Kalman é o estimador adequado para o problema de estimar o estado instantâneo de um sistema dinâmico linear com ruído branco, usando medidas linearmente relacionada com o estado, mas corrompidas pelo ruído branco. Segundo os autores, essa característica possibilitou grandes avanços à humanidade como o controle de complexos sistemas dinâmicos como os processos contínuos de manufatura, aviões, navios e espaço-naves.

Grewal e Andrews (2008, p.5) afirmam ainda que o filtro de Kalman é o resultado de um processo evolutivo de grandes idéias de diversos pensadores. O gráfico 1 ilustra a evolução dessas ideias com os respectivos pensadores.



**Gráfico 1: Evolução das idéias que originaram o filtro de Kalman**



Fonte: Grewl e Andrews (2008, p. 5)

A escolha pelo filtro de Kalman também é justificada pelos relatos na obra de Maybeck (1979). Segundo o autor, o filtro combina todas as medições disponíveis, mais conhecimento anterior sobre o sistema e os instrumentos de medida, para produzir estimativa da variável desejada de tal forma que o erro é estatisticamente minimizado. Além disso, Maybeck afirma que o filtro é um algoritmo ótimo de processamento recursivo, entendendo que pode classificá-lo como ótimo, atendendo certas premissas, em relação a qualquer critério lógico. Os artigos de Welch e Bishop (2004) e Meinhold e Singpurwalla (1983) mostram também as vantagens operacionais e ganho de eficiência advindos dessa metodologia de estimativa devido ao fato dela minimizar os valor dos erros quadráticos.

Como exemplos de trabalhos na área de finanças que usaram o Filtro de Kalman, pode-se citar o trabalho de Burmesiter, Wall e Hamilton (1986) e Wu (1995). Burmesiter, Wall e Hamilton (1986) usam uma técnica para estimar a expectativa do mercado para a inflação baseada em valores passados da taxa de juros e da inflação. A técnica é baseada em uma representação estado – espaço derivada de um processo de vetor auto-regressivo das taxas esperadas de taxa de juros real e inflação em expectativas defasadas e valores da taxa de juros americanas e da inflação atual, também defasados. Para estimar os valores esperados da inflação, os autores usam o Filtro de Kalman. Wu (1995) usa o Filtro de Kalman para estimar e testar a existência de bolhas estocásticas nas taxas de câmbio entre o dólar americano e a libra esterlina, iene japonês e o marco alemão. O autor não acha evidências de bolhas.

## 2.6 Modelo Estado-Espaço

A técnica proposta por Kalman é especialmente útil na estimativa de valores não-observáveis em sistemas estado-espço. Eubank (2006, p.1) descreve os modelos estado-espço como uma classe de modelo estocástico que envolve variáveis discretas em séries temporais. Eles são exemplos de modelos de sinal mais ruído que, por suas características e que por usarem o Filtro de Kalman, estimam e predizem os valores de forma mais rápida e mais eficiente que qualquer outro arranjo que pode ser escolhido.

Nesse sentido, Wang (2003, p. 118) afirma que um sistema dinâmico pode ser descrito por modificações no estado de seus componentes. Nesse tipo de sistema, as variáveis observáveis são representadas por funções dinâmicas de variáveis não observáveis, as variáveis de estado, que por sua vez são regidas por leis que não podem ser diretamente aplicadas às variáveis observáveis. Essa modelagem dos sistemas dinâmicos é chamada de método estado-espço e pode ser representada pelas equações:

$$y_t = H \cdot \xi_t + A \cdot x_t + \mu_t \quad (6)$$

$$\xi_{t+1} = F \cdot \xi_t + B \cdot x_{t+1} + v_t \quad (7)$$

,onde  $y_t$  é uma matriz  $n \times 1$  de variáveis observáveis,  $\xi_t$  é uma matriz  $r \times 1$  de variáveis de estado,  $x_t$  é uma matriz  $k \times 1$  de variáveis exógenas, e  $H$ ,  $A$ ,  $F$  e  $B$  são matrizes de coeficientes de dimensões  $n \times r$ ,  $n \times k$ ,  $r \times r$  e  $r \times k$  respectivamente.  $\mu_t$  e  $v_t$  são matrizes dos resíduos de dimensões  $n \times 1$  e  $r \times 1$ , respectivamente e covariâncias:

$$Cov(\mu_t, \mu_t) = R \quad Cov(v_t, v_t) = Q \quad Cov(\mu_t, v_t) = 0$$

A equação (6) é chamada de equação de medida e a equação (7) é chamada de equação de transição.

Uma das formas de se estimar esse modelo, segundo Wang (2003, p. 119) é o filtro de Kalman. O autor explica o uso do filtro em três etapas: previsão, atualização e refinamento.

Na etapa de previsão, se prevê o vetor  $\xi_{t|t+1}$  e sua matriz de covariância  $P_{t|t+1}$  a partir das informações disponíveis em  $t-1$  gerado uma estimativa para  $y_t$  da seguinte maneira:

$$\xi_{t,t-1} = F \cdot \xi_{t-1|t-1} \quad (8)$$

$$P_{t,t-1} = F \cdot P_{t-1|t-1} \cdot F' + Q \quad (9)$$

$$y_{t|t-1} = H \cdot \xi_{t|t-1} + A \cdot x_{t|t-1} \quad (10)$$

Na etapa seguinte, a atualização, a inferência  $\xi_t$  é atualizada com o valor observado de  $y_t$ :

$$\psi_t = H \cdot P_{t|t-1} \cdot H' + R \quad (11)$$

$$K_t = P_{t|t-1} \cdot H' \cdot (\psi_t)^{-1} \quad (12)$$

$$\varepsilon_t = y_t - y_{t|t-1} \quad (13)$$

$$\xi_{t,t} = \xi_{t|t-1} + K_t \cdot \varepsilon_t \quad (14)$$

$$P_{t,t} = (I - K_t \cdot H)P_{t|t-1} \quad (15)$$

Onde  $K_t$  é o ganho do filtro de Kalman,  $\psi_t$  pode ser considerado como a grande matriz de variância/covariância do sistema e  $\varepsilon_t$  é o grande vetor de resíduos do sistema. A estimação do filtro de Kalman é contínua. A função de densidade condicional é:

$$f(y_t|I_{t-1}) = (2\pi)^{-n/2} \cdot |\psi_t|^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_t' \psi_t \varepsilon_t}{2}\right) \quad (16)$$

Onde  $I_{t-1}$  é o conjunto de informações em  $t-1$ . O filtro de Kalman pode ser estimado maximizando o logaritmo da verossimilhança da função densidade:

$$\text{Max: } \sum_{t=1}^T \log f(y_t|I_{t-1}) = -\frac{nT}{2} \log(2\pi) + \max\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \{\log(\psi_t) + (\varepsilon_t' \psi_t \varepsilon_t)\}\right) \quad (17)$$

Observando as equações utilizadas nessa etapa, Wang (2003, p.120) explica que na etapa de previsão, as estimativas foram realizadas usando somente as variáveis de estado. Entretanto, devem-se considerar também as variáveis observáveis, por isso, realiza-se mais uma interação com essas variáveis na etapa de atualização. O uso das variáveis de estado permite estimar e revelar o processo estocástico dominante em  $y_t$ , o que só é possível comparando o seu valor atual com o valor estimado pelas variáveis de estado. A correção do erro correspondente é feita pela atualização das variáveis de estado de forma que elas acompanhem o sistema dinâmico, o que faz também que a relação entre esse tipo de variáveis e as variáveis observáveis seja mantida.

A terceira etapa, o refinamento, é usada quando é de interesse conhecer a estimativa das variáveis de estado em qualquer tempo, dado todas as informações disponíveis até a última no tempo  $T$ . O processo de refinamento, que atualiza as variáveis de estado anteriores a partir de  $T-1$ , é regido pelas equações:

$$\xi_{t,T} = \xi_{t|t} + V_t(\xi_{t+1|T} - \xi_{t+1|t}) \quad (18)$$

$$P_{t,T} = P_{t|t} + V_t(P_{t+1|T} - P_{t+1|t})V_t' \quad (19)$$

onde  $V_t = P_{t|t} \cdot F' \cdot P_{t+1|t}^{-1}$ .  $\xi_{t|T}$  é a inferência de  $\xi_t$  baseada em toda a amostra e  $P_{t|T}$  é a sua matriz de covariância.

### 3. Metodologia Utilizada

A metodologia usada é semelhante ao trabalho de Wu (1997). Nesse trabalho, a bolha pode explodir e recomeçar continuamente e cresce à taxa de desconto. Além disso, ela pode assumir valores negativos. O retorno dos dividendos segue um processo ARIMA (p,1,q). O modelo de preços das ações com componente bolha, os dividendos e a bolha são expressos como uma equação estado-estado, sendo que a bolha é considerada como um vetor estado não-observável. Os parâmetros do modelo são estimados pelo método da máxima verossimilhança e a estimativa da bolha é conseguida através do filtro de Kalman. O resultado é comparado com dois outros modelos: o proposto por Froot e Obstfeld com *intrinsic bubbles* e o de Gordon.

#### 3.1 Modelo

Especificando e explicando o modelo, temos:

$$\frac{E_t(P_{t+1} + D_t)}{P_t} = r \quad (20)$$

onde,  $E_t$  é o operador de esperança matemática condicional com a informação disponível em  $t$ ,  $P_t$  é o preço da ação no tempo  $t$ ,  $D_t$  é o valor real dos dividendos pagos no período  $t$  e  $r$  é a taxa real de retorno esperada.

Campbell e Shiller (1988, p. 196) propõem um modelo dinâmico derivado do modelo de Gordon para mensurar o valor do preço da ação de acordo com o valor futuro dos dividendos, sob a premissa de permitir que a taxa de retorno esperada e que a taxa de crescimento dos dividendos seja variável ao longo do tempo. Nesse trabalho, os autores produzem uma aproximação logarítmica linear da equação (20) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{E_t(P_{t+1} + D_t)}{P_t} = r \therefore \ln r &= \ln(E_t(P_{t+1} + D_t)) - \ln P_t \therefore \\ \ln r &= E_t(\ln(P_{t+1} + D_t)) - \ln P_t \end{aligned} \quad (21)$$

Tendo em vista que  $P$  e  $D$  são números reais positivos, podemos usar a expansão de Taylor para obter o valor de  $\ln(P_{t+1} + D_t)$ . A expansão de Taylor é descrita pela expressão  $T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , onde  $f(x)$  é uma função derivável em um intervalo que contém o ponto  $x_0$ . O valor  $x_0$  utilizado será o valor anterior dos dividendos e o preço anterior da ação. Essa escolha faz todo o sentido uma vez que queremos descobrir os valores de  $P$  e  $D$  baseados em seus valores defasados um período. Dessa forma:

$$\ln(P_{t+1} + D_t) = \ln(P_t + D_{t-1}) + \frac{1}{P_t + D_{t-1}} [(P_{t+1} + D_t) - (P_t + D_{t-1})]$$

$$\ln(P_{t+1} + D_t) - \ln(P_t + D_{t-1}) = \frac{(P_{t+1} + D_t) - (P_t + D_{t-1})}{P_t + D_{t-1}}$$

$$\Delta \ln(P_{t+1} + D_t) = \frac{(P_{t+1} - P_t) + (D_t - D_{t-1})}{P_t + D_{t-1}}$$

Tomando  $\psi$  como  $P_t/P_t + D_{t-1}$  e  $1 - \psi$  será  $D_{t-1}/P_t + D_{t-1}$ , obtêm-se:

$$\Delta \ln(P_{t+1} + D_t) = \frac{\psi(P_{t+1} - P_t)}{P_t} + \frac{(1 - \psi)(D_t - D_{t-1})}{D_{t-1}}$$

Pela mesma expansão de Taylor,

$$\begin{aligned} \Delta \ln(P_{t+1} + D_t) &= \psi \Delta \ln(P_{t+1}) + (1 - \psi) \Delta \ln(D_t) \\ q &= \kappa + \psi E_t p_{t+1} + (1 - \psi) \cdot d_t - p_t \end{aligned} \quad (22)$$

Onde  $q$  é o logaritmo da taxa bruta de retorno requerido,  $\psi$  é a razão entre o preço da ação e a soma do preço da ação e seu dividendo,  $\kappa = -\ln(\psi) - (1 - \psi) \cdot \ln\left(\frac{1}{\psi - 1}\right)$ ,  $p_t = \ln(P_t)$  e  $d_t = \ln(D_t)$ .

A solução da equação (22), segundo Wu (1997, p. 311) é:

$$p_t^f = \frac{\kappa - q}{1 - \psi} + (1 - \psi) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i \cdot E_t(d_{t+i}) \quad (23)$$

Cumprе destacar que não há componente bolha na equação (23). Essa equação mostra que o logaritmo do preço no tempo  $t$  depende dos valores futuros dos dividendos. A solução é chamada de solução fundamental do mercado, e se baseia no Modelo de Gordon. Mas, como ilustrado em diversos estudos, o mercado não se comporta sempre desse modo, podendo existir desvio entre esse valor fundamental e o valor real praticado. Portanto, inserindo o componente bolha, teríamos que:

$$p_t = \frac{\kappa - q}{1 - \psi} + (1 - \psi) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i \cdot E_t(d_{t+i}) + b_t = p_t^f + b_t \quad (24)$$

Onde  $b_t$  é o componente bolha e satisfaz a seguinte equação:

$$E_t(b_{t+i}) = (1/\psi)^i \cdot b_t \quad (25)$$

A fim de evitar a não estacionariedade do logaritmo dos dividendos, toma-se a diferenciação de primeira ordem da equação (24), resultando em:

$$\Delta p_t = (1 - \psi) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i \cdot [E_t(d_{t+i}) - E_{t-1}(d_{t+i-1})] + \Delta b_t = \Delta p_t^f + \Delta b_t \quad (26)$$

Para garantir a parcimônia do modelo, Wu (1997, p.312) estabelece que o logaritmo dos dividendos que tem uma raiz unitária e que segue um processo ARIMA (h, 1, 0) da seguinte maneira:

$$\Delta d_t = \mu + \sum_{j=1}^h \varphi_j \cdot \Delta d_{t-j} + \delta_t \quad (27)$$

Onde  $\delta_t$  é um termo de erro independente e identicamente distribuído (i.i.d) com distribuição  $N(0, \sigma_\delta^2)$ .

Reescrevendo (26) na forma matricial temos:

$$Y_t = U + A.Y_{t-1} + \vartheta_t \quad (28)$$

Onde  $Y_t = (\Delta d_t, \Delta d_{t-1}, \dots, \Delta d_{t-h+1})^t$ ,  $U = (\mu, 0, \dots, 0)^t$  e  $\vartheta_t = (\delta_t, 0, \dots, 0)^t$ .

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \dots & \varphi_{h-1} & \varphi_h \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada } h \times h.$$

Wu (1997, p. 312) apud Cambell e Shiller (1987) obtém a seguinte solução da equação (21):

$$\Delta p_t = \Delta d_t + M.\Delta Y_t + \Delta b_t \quad (29)$$

Onde  $g = (1, 0, 0, \dots, 0)$  é uma matriz linha com  $h$  colunas.

$M = g.A(I - A)^{-1} \cdot [I - (1 - \psi) \cdot (I - \psi A)^{-1}]$  é uma matriz linha com  $h$  colunas e  $I$  é a matriz identidade de ordem  $h$ .

Assumindo a linearidade do componente bolha, a equação (25) pode ser reescrita na forma paramétrica:

$$b_t = (1/\psi) \cdot b_{t-1} + \eta_t \quad (30)$$

Onde a inovação  $\eta$  é não correlacionada com  $b$ , tem média zero e variância finita  $\sigma_\eta^2$ . Além disso, também é assumido que  $\eta$  não é correlacionado com o termo de erro  $\delta$  da equação (27).

### 3.2 Dados

Os dados coletados são os valores mensais do índice BOVESPA do período de julho de 1994 a março de 2009, totalizando, portanto, 177 meses. Os preços foram os de fechamento no último dia de cada mês, e os dividendos foram os pagos pela empresa no referido mês. Os valores de dividendos coletados agregam os valores dos dividendos e dos juros sobre capital próprio.

O índice BOVESPA (IBOVESPA) foi escolhido pela sua relevância no mercado de ações brasileiro. A BOVESPA o considera como seu mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Sua relevância advém do fato dele retratar o comportamento dos principais papéis negociados na BOVESPA e também

de sua tradição, pois o índice manteve a integridade de sua série histórica e não sofreu modificações metodológicas desde sua implementação, em 1968.

Todos os dados foram deflacionados utilizando como base o IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), conforme metodologia da Economática®. O preço das ações, além de corrigida pela inflação, foi ajustado para os proventos do período.

O índice de dividendos foi calculado através da soma ponderada da quantidade teórica de cada ação integrante do índice BOVESPA pelo dividendo por ela pago no mês. Sendo assim, foram colhidos os dados do IBOVESPA e dos dividendos pagos por cada ação no período estudado. Como a composição da carteira do índice tem validade quadrimestral, foram utilizadas quarenta e cinco no período analisado, para a construção do Índice de Dividendos. Os dados para as duas séries foram extraídos da base de dados Economática® e as carteiras teóricas do IBOVESPA foram obtidas da BOVESPA, após solicitação específica.

### 3.3 Metodologia do IBOVESPA

Segundo a BOVESPA<sup>2</sup>, o IBOVESPA é o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações constituída em 02/01/1968 (valor-base: 100 pontos) a partir de uma aplicação hipotética. Supõe-se não ter sido efetuado nenhum investimento adicional desde então, considerando-se somente os ajustes efetuados em decorrência da distribuição de proventos pelas empresas emissoras (tais como reinversão de dividendos recebidos e do valor apurado com a venda de direitos de subscrição, e manutenção em carteira de ações recebidas em bonificação). Dessa forma, o índice reflete não apenas as variações dos preços das ações, mas também o impacto na distribuição dos proventos, sendo considerado um indicador que avalia o retorno total de suas ações componentes. Para efeito de divulgação o Ibovespa, sofreu algumas divisões ao longo do tempo, que não alteraram a metodologia de cálculo do índice, como demonstra a tabela 1 abaixo:

**Tabela 1: Divisões no IBOVESPA**

Divisores	Datas
100	03/10/1983
10	02/12/1985
10	29/08/1988
10	14/04/1989
10	12/01/1990
10	28/05/1991
10	21/01/1992

<sup>2</sup> As informações desse tópico foram retiradas do prospecto do IBOVESPA, disponível em <www.bovespa.com.br>.

10	26/01/1993
10	10/02/1994
10	03/03/1997

A finalidade básica do IBOVESPA é a de servir como indicador médio do comportamento do mercado. Para tanto, sua composição procura aproximar-se da real configuração das negociações a vista (lote-padrão) na BOVESPA.

A sua representatividade pode ser medida observando a liquidez e a capitalização bursátil. Em termos de liquidez, as ações integrantes da carteira teórica do Índice Bovespa respondem por mais de 80% do número de negócios e do volume financeiro verificados no mercado a vista (lote-padrão) da Bovespa. As empresas emissoras das ações integrantes da carteira teórica do Índice Bovespa são responsáveis, em média, por aproximadamente 70% do somatório da capitalização bursátil de todas as empresas com ações negociáveis na Bovespa.

O índice é calculado em tempo real, considerando os preços dos últimos negócios efetuados no mercado a vista (lote-padrão) com ações componentes de sua carteira. A divulgação é feita pela rede de difusão da BOVESPA e também retransmitida por uma série de *vendors*, sendo possível, dessa forma, acompanhar em tempo real seu comportamento em qualquer parte do Brasil ou do mundo.

A participação de cada ação na carteira tem relação direta com a representatividade desse título no mercado a vista – em termos de número de negócios e volume financeiro – ajustada ao tamanho da amostra. Essa representatividade é obtida pelo índice de negociabilidade da ação, calculado pela seguinte fórmula:

$$IN = \sqrt{\frac{ni}{N} * \frac{vi}{V}} \quad (32)$$

onde:

$IN$  = índice de negociabilidade

$ni$  = número de negócios com a ação "i" no mercado à vista (lote-padrão)

$N$  = número total de negócios no mercado à vista da BOVESPA (lote-padrão)

$vi$  = volume financeiro gerado pelos negócios com a ação "i" no mercado à vista (lote-padrão)

$V$  = volume financeiro total do mercado à vista da BOVESPA (lote-padrão)

O Índice Bovespa é o resultado do somatório dos pesos (quantidade teórica da ação multiplicada pelo último preço da mesma) das ações integrantes de sua carteira teórica. Assim sendo, pode ser apurado, a qualquer momento, por meio da seguinte fórmula:



$$IBOVESPA_t = \sum_{i=1}^n Qi_t * Pi_t \quad (33)$$

onde:

$IBOVESPA_t$  = valor do índice no dia t

$n$  = número de ações integrantes da carteira teórica do índice;

$Qi_t$  = Quantidade teórica da ação “i” na carteira no instante t

$Pi_t$  = último preço da ação “i” na carteira no instante t.

A carteira teórica do IBOVESPA é composta pelas ações que atenderam cumulativamente aos seguintes critérios, com relação aos 12 meses anteriores à formação da carteira:

1. Estar incluída em uma relação de ações cujos índices de negociabilidade somados representem 80% do valor acumulado de todos os índices individuais;
2. Apresentar participação em termos de volume, superior a 0,1% do total;
3. Ter sido negociada em mais de 80% do total de pregões do período.

Uma ação selecionada para compor a carteira só deixará de participar quando não conseguir atender a, pelo menos, dois dos critérios de inclusão anteriormente indicados. Deve-se ressaltar que companhias que estiverem sob regime de recuperação judicial, processo falimentar, situação especial ou sujeitas a prolongado período de suspensão de negociação, não integrarão o IBOVESPA. No caso de suspensão de negociação de uma ação componente, o índice utilizará o preço do último negócio registrado em bolsa até a normalização das negociações com o papel. Não havendo liberação para negociação por 50 dias, a contar da data de suspensão, ou em caso de ausência de perspectivas de reabertura dos negócios ou rebalanceamento da carteira, a ação será excluída da carteira. Nesta eventualidade, são efetuados os ajustes necessários para garantir a continuidade do índice.

Para que a representatividade do IBOVESPA mantenha-se ao longo do tempo, sua carteira é reavaliada ao final de cada quadrimestre, utilizando-se os procedimentos e critérios integrantes desta metodologia. Nas reavaliações, identificam-se as alterações na participação relativa de cada ação no índice, bem como sua permanência ou exclusão, e a inclusão de novos papéis. A carteira teórica tem vigência de quatro meses, vigorando para os períodos de janeiro a abril, maio a agosto e setembro a dezembro.

Nos rebalanceamentos quadrimestrais são adotados os seguintes procedimentos:

1. A BOVESPA calcula o índice de negociabilidade para cada uma das ações nela negociadas nos últimos 12 meses. Esses índices são colocados em uma tabela em ordem decrescente e uma coluna apresenta a soma de tais índices à medida que percorre a tabela do maior para o menor. Calcula-se então a participação de cada índice de negociabilidade individual em relação à soma total, listando-se as ações até que o montante de suas participações atinja 80%.
2. As ações listadas vão compor a carteira do índice, desde que atendam aos outros dois critérios de inclusão. Caso não atendam, elas são substituídas pelas ações que vierem a seguir na listagem decrescente e que consigam atender a tais parâmetros.
3. O passo seguinte é identificar, entre as ações que pertencem à carteira vigente, se algumas delas serão excluídas.
4. Os índices de negociabilidade das ações escolhidas são listados novamente, apurando-se o percentual de participação de cada papel em relação a soma dos índices de todas as ações da carteira.
5. A participação ajustada de cada ação, aplicada sobre o valor do índice do último dia do quadrimestre anterior, determinará o “peso” inicial (número de pontos do índice) de cada ação.
6. A quantidade teórica de cada ação, resultante da divisão de sua parcela na composição do índice (peso) pelo seu preço de fechamento no último dia do quadrimestre anterior, permanecerá constante pelos quatro meses de vigência da carteira, somente sendo alterada caso ocorra à distribuição de proventos (dividendos, bonificações, subscrições etc.) por parte da empresa.

Objetivando auxiliar os participantes do mercado que utilizam a carteira do Ibovespa como instrumento na elaboração de suas políticas de investimento, a Bovespa divulga regularmente três prévias das novas composições, quando faltam 30 dias, 15 dias, e um dia para a entrada em vigor da nova carteira do quadrimestre. Em situações especiais, entretanto, visando tranquilizar o mercado, a Bovespa poderá antecipar a difusão das prévias e/ou ampliar seu número.

De forma a medir o retorno real da carteira teórica, o Índice Bovespa será ajustado para todos os proventos distribuídos pelas companhias emissoras das ações integrantes do seu portfólio. O ajuste é efetuado considerando-se que o investidor vendeu as ações ao último preço de fechamento anterior ao início da negociação “ex-provento” e utilizou os recursos na

compra das mesmas ações sem o provento distribuído (“ex-provento”). Segue abaixo a fórmula de alteração na quantidade teórica, por ocasião da distribuição de proventos:

$$Q_n = \frac{Q_0 * P_c}{P_{ex}} \quad (34)$$

onde:

$Q_n$  = quantidade nova;

$Q_0$  = quantidade antiga;

$P_c$  = último preço de fechamento anterior ao início da negociação “ex-provento”;

$P_{ex}$  = preço ex-teórico, calculado com base em  $P_c$ .

Para calcular o preço ex-teórico ( $P_{ex}$ ), utiliza-se a seguinte fórmula:

$$P_{ex} = \frac{P_c + (S * Z) - D - J - V_{et}}{1 + B + S} \quad (35)$$

Onde:

S = percentual de subscrição, em número-índice;

Z = valor de emissão da ação a ser subscrita, em moeda corrente;

D = valor recebido a título de dividendo, em moeda corrente;

J = juros sobre capital, em moeda corrente;

$V_{et}$  = valor econômico teórico, resultante do recebimento de provento em outro tipo/ativo;

B = percentual de bonificação (ou desdobramento), em número-índice.

O  $V_{et}$  é calculado considerando-se o montante financeiro que seria apurado com a venda das ações do outro tipo e/ou outro ativo (debêntures, ações de outra empresa etc.) recebidos.

O anúncio da decisão da empresa emissora de efetuar uma cisão não altera sua situação na carteira teórica do índice. Após a efetivação da cisão e enquanto se aguarda a operacionalização/registo das empresas resultantes, essas companhias serão consideradas como uma unidade de negociação e permanecerão na carteira do índice “com cisão”. Para efeito de negociação na Bovespa, a efetivação da cisão significa o ato pelo qual as ações das empresas originadas pela cisão passam a ser negociadas em pregão.

No início da negociação em bolsa das empresas resultantes de cisão, a carteira teórica do índice incluirá as empresas. A participação apresentada pela empresa originadora da cisão na carteira teórica do Ibovespa será distribuída entre as empresas resultantes. Para cada

empresa incluída no índice, a quantidade de títulos e o preço teórico serão determinados em função da razão de proporção de cisão patrimonial informada pela empresa.

Para efeito de seleção das empresas/ações que atendem cumulativamente aos critérios de inclusão no índice, serão adotados os seguintes procedimentos:

1. As empresas resultantes da cisão serão tratadas como uma unidade de negociação e os dados de negociabilidade serão considerados em conjunto com os da empresa que foi cindida;
2. As participações individuais de cada um dos novos ativos nas carteiras serão definidas, a critério da BOVESPA, com base no período decorrido, em função da efetiva negociabilidade de cada papel ou do nível de preços de cada ativo;
3. Até que se complete um período de rebalanceamento inteiro de negociação individual das empresas (mínimo de quatro meses e máximo de sete meses), a BOVESPA manterá na carteira do índice de ações com a mesma quantidade teórica;
4. Nas recomposições efetuadas após esse período mínimo, a BOVESPA continuará utilizando, na sua análise dos 12 meses anteriores, os dados compostos conforme descrito acima, mas a participação de cada empresa no IBOVESPA passará a ser definida em função de seu desempenho individual com base no período disponível de negociação individual;
5. Depois de 12 meses da cisão, a BOVESPA excluirá as ações que não apresentarem um perfil de negociação adequado, tomando por base sua presença em pregão, número de negócios e volume financeiro.

Sempre que uma empresa efetuar uma oferta pública que resulte na aquisição de parte expressiva de suas ações em circulação, a BOVESPA poderá adotar um dos dois procedimentos:

1. Quando a aquisição for inferior a  $2/3$  (dois terços) das ações em circulação, retirar do índice o percentual do capital em circulação que foi comprado pela empresa, e distribuir a participação relativa desse percentual proporcionalmente aos demais papéis; ou
2. Retirar a ação do índice quando a aquisição for superior a  $2/3$  (dois terços) das ações em circulação, e distribuir sua participação relativa na carteira proporcionalmente aos demais papéis (procedimento idêntico ao adotado para as empresas que entram em regime de recuperação judicial, falência ou deixam de ser listadas em bolsa).

Quando uma empresa com ação no índice incorpora empresa cujas ações também pertencem ao índice, as ações da empresa incorporadora permanecem no índice, sendo sua quantidade teórica ajustada em função da proporção de troca das ações da incorporada pela incorporadora. Já quando uma empresa com ação no índice incorpora empresa cujas ações não pertencem ao índice, as ações da empresa incorporadora permanecem no índice com a mesma quantidade teórica. Por fim, quando uma empresa com ação no índice é incorporada por empresa cujas ações não pertencem ao índice, a situação será analisada, podendo a Bovespa, a seu critério:

1. Excluir a ação do índice, redistribuindo sua participação pelos demais papéis da carteira;
2. Substituir a ação da empresa incorporada pela incorporadora, efetuando os ajustes necessários na quantidade teórica, em função da proporção de troca entre as ações.

Em qualquer situação, quando ocorrerem às reavaliações quadrimestrais, os dados de negociabilidade da empresa incorporada serão somados aos da empresa incorporadora.

### 3.4 Índice de Dividendos

O Índice de Dividendos foi criado com base na metodologia de apuração do IBOVESPA. Essa metodologia é a mesma utilizada no trabalho de De Medeiros e Fernandes (2009). Para a construção do índice de dividendos, foi utilizada a quantidade teórica da série histórica da carteira disponibilizada pela BOVESPA para cada ação componente da carteira. A quantidade teórica de cada ação é função da participação da mesma no índice. O Índice de Dividendos pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$Idiv = \sum_{i=1}^n D_{i,t} \times Q_{i,t} \quad (36)$$

Onde:

$Idiv$  = Índice de Dividendos;

$D_{i,t}$  = Dividendos e juros sobre capital próprio da ação “i” no tempo t;

$Q_{i,t}$  = Quantidade teórica da ação “i” no tempo t;

Para a construção do índice de dividendos, foram utilizadas as carteiras teóricas do IBOVESPA, no período de 1994 a 2009. Como as mesmas são divulgadas a cada quadrimestre, foram tratadas no intervalo de tempo pesquisado quarenta e cinco carteiras. Uma mesma quantidade teórica foi utilizada por quatro meses consecutivos, visto que, este é o período de vigência de cada composição do índice de ações. Os dados dos dividendos

colhidos foram os pagos pelas empresas em cada mês. Estes dados, fornecidos pelo banco de dados Economática®, contêm os Juros sobre Capital Próprio (JCP), também pagos no período, conforme informado pelo Economática®. Ainda de acordo com as explicações obtidas, estes valores são declarados à BOVESPA para fins de ajuste no preço das ações.

### 3.5 Processo ARIMA

No modelo utilizado, assume-se que o retorno dos dividendos segue um processo ARIMA. Segundo Brooks (2002, p. 229), os modelos *AutoRegressive Integrated Moving Average* (ARIMA) são uma classe importante dos modelos de séries temporais. Um processo ARIMA (p,d,q), onde p é ordem do processo autoregressivo, d é número de diferenciações e q é a ordem do processo média móvel, é equivalente a um processo *AutoRegressive Moving Average* (ARMA) com a variável diferenciada “d” vezes, sendo que a principal propriedade é a existência de uma raiz unitária.

Segundo Brooks (2002, p. 249), um modelo ARIMA expressa que o valor atual de uma série y depende linearmente dos seus próprios valores passados mais uma combinação linear dos valores atual e passados de um termo de erro ruído branco. A construção do modelo, segundo Brooks (2002, p. 255) ocorre em três etapas:

1. Identificação
2. Estimação
3. Diagnóstico

Na identificação, é feita a escolha do número de parâmetros que serão estimados de forma a minimizar o valor do critério de informação. Assim, um novo parâmetro só será acrescentado se a queda na soma dos quadrados dos resíduos compensa a perda de graus de liberdade. Nesse trabalho, o critério de informação usado será o proposto por Akaike e o por Schwarz.

A qualidade do modelo depende da estacionariedade das variáveis, a fim de evitar a persistência dos choques, regressões espúrias e a perda da validade dos testes de significância. De acordo com Brooks (2002, p. 375), séries não-estacionárias podem ser diferenciadas “d” vezes, de forma a se tornar estacionária, dita integrada de ordem “d”.

Nesse trabalho, o teste da estacionariedade das séries será feita com os testes de Dick-Fuller aumentado (ADF) e de Phillips and Perron (PP). Esses métodos se baseiam em um teste de hipótese com a nula testando a existência de raiz unitária e a alternativa testando a estacionariedade da série. Os valores críticos são derivados de simulações e não seguem as distribuições usuais.

A etapa de estimação é extremamente importante e de muito interesse, uma vez que as decisões presentes afetam os resultados futuros, assim quanto melhor as estimações, maior será a utilidade gerada pelo uso adequado das previsões. A estimação de séries temporais busca prever os valores futuros da série, conhecidos os valores passados.

Na etapa de diagnóstico, avalia-se a precisão dos valores estimados. Segundo Brooks (2002, p. 286), o erro de estimação é a diferença entre o valor previsto e valor atual da variável. Duas medidas para se avaliar a qualidade do modelo utilizado são a raiz média dos erros quadráticos (RMSE) e a média dos erros absolutos (MAE). Dessa maneira, comparam-se as medidas para dois modelos distintos, podendo, assim, afirmar, qual é o modelo mais preciso.

A RMSE é calculada segundo a fórmula:

$$RMSE = \left[ \left( \frac{1}{T} \right) \sum_{t=1}^T (\hat{p} - p_t)^2 \right]^{1/2} \quad (37)$$

Já o MAE segue a seguinte expressão:

$$MAE = \left[ \left( \frac{1}{T} \right) \sum_{t=1}^T |\hat{p} - p_t| \right] \quad (38)$$

Onde  $\hat{p}$  é o valor estimado da variável  $p_t$ .

#### 4. Análise dos dados

Conforme descrito da seção anterior, a partir dos dividendos pagos pelos ativos que compõem o índice de preços, o IBOVESPA, criou-se o índice de dividendos referente às carteiras teóricas mensais de julho de 1994 a março de 2009, totalizando assim 177 observações. A série de dados do IBOVESPA será referenciada por IBOV, enquanto o índice de dividendos será referenciado por IDIV. Foram utilizados os softwares Eviews® e o SAS® para tratamento dos dados e estimação dos modelos.

A teoria econômica, tratada no referencial teórico, sugere que os preços dos ativos devem espelhar seus benefícios futuros. No caso das ações, o seu preço deve ser reflexo dos seus dividendos futuros. Dessa forma, a comparação entre o índice de preços e um índice de dividendos construído com a mesma metodologia deve permitir concluir se existem desvios não explicados pela teoria, desvios esses chamados de bolhas.

Abaixo, na tabela 2, são demonstradas as estatísticas descritivas do IBOV e do IDIV. O índice BOVESPA teve média de 28519,72 e desvio padrão de 15729,29. Já o índice de dividendos teve como resultado 1376,46 e 720,27 para as mesmas medidas, respectivamente. Pode-se observar que a dispersão das duas séries é bem próxima. A série IBOV tem coeficiente de variação de aproximadamente 55% enquanto a IDIV tem 52% nessa mesma medida de dispersão. A amplitude total da primeira foi de 68575,12, com máximo de 76942,75 e mínimo de 8367,63. Já a segunda série teve amplitude total de 3096,36, com máximo em 3434,23 e mínimo de 337,87.

Para testar a normalidade das séries, foi utilizado o teste de Jarque-Bera. Os valores encontrados demonstram a não normalidade das duas séries de dados, com *p-value* menor que 5%. Quando as duas variáveis são transformadas em logaritmos naturais, observa-se uma mudança com relação à normalidade. Para o logaritmo natural do IBOV, o teste Jarque-Bera foi 3,85; com *p-value* de 14,55%, não rejeitando a hipótese de normalidade. Já para o logaritmo natural do IDIV, o teste foi 11,85; com *p-value* de 0,26%, rejeitando a hipótese de normalidade.

**Tabela 2: Estatísticas descritivas de IBOV e IDIV**

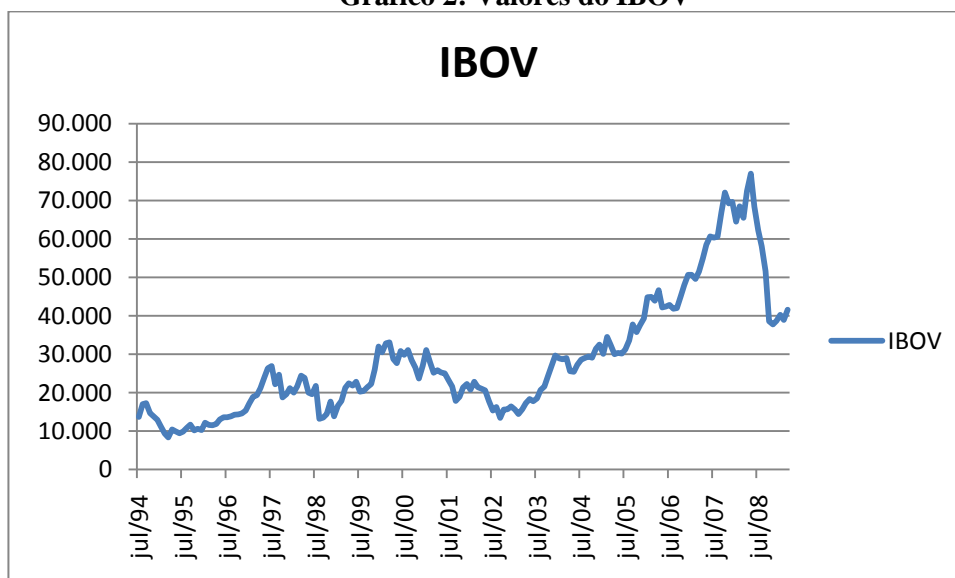
<b>Estatística</b>	<b>IBOV</b>	<b>IDIV</b>
Média	28519,72	1376,46
Mediana	24232,9	1370,34
Desvio Padrão	15729,29	720,27
Máximo	76942,75	3434,23



Mínimo	8367,63	337,87
Coefficiente de Variação	55,15%	52,33%
Assimetria	1,2053	0,4778
Curtose	3,8079	-2,7114
Jarque-Bera	47,67104	7,348757

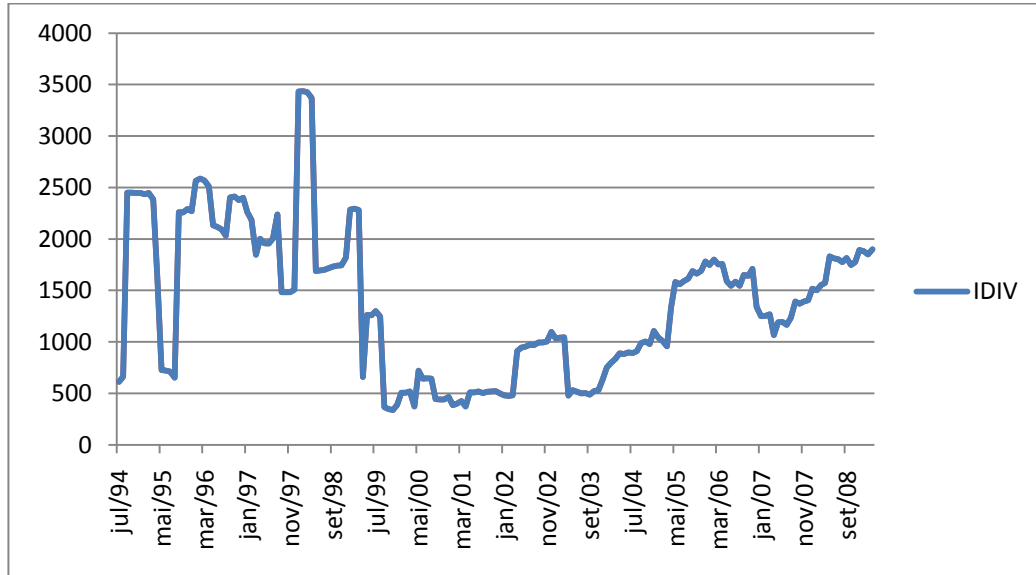
Ainda expressando os dados coletados, o gráfico 2 abaixo representa os valores do IBOV. Pode-se relacionar as variações com alguns fatos socioeconômicos brasileiros e mundiais. No período de 1994 a 1995, a baixa no índice se dá em função do início do Plano Real, onde se encontrava por volta dos 17.000 pontos até chegar ao ponto mínimo do período de 8.300 em função da Crise do México. Deste período até meados de 1997, o IBOVESPA teve uma forte alta, ultrapassando a barreira dos 25.000 pontos. Seguiu-se um novo período de queda, principalmente em função das crises Russa e Asiática, externamente, e da desvalorização do Real, internamente, baixando a casa dos 14.000 pontos. Passado as turbulências, em 1999 o índice voltou a subir, ultrapassando os 33.000 em mar/2000, logo depois passando por mais um período de baixa por causas externas como a Nova Crise Argentina, o atentado terrorista de 11 de setembro de 2001, os problemas contábeis em corporações americanas e a Guerra do Iraque e, internamente, em 2002 as eleições, onde o investidor estrangeiro estava cauteloso quanto ao futuro político e econômico do Brasil. O patamar de mar/2000 só foi alcançado novamente em fev/2005. A BOVESPA passou por um grande momento de alta que só foi interrompido no final de 2008 devido a crise financeira mundial.

**Gráfico 2: Valores do IBOV**



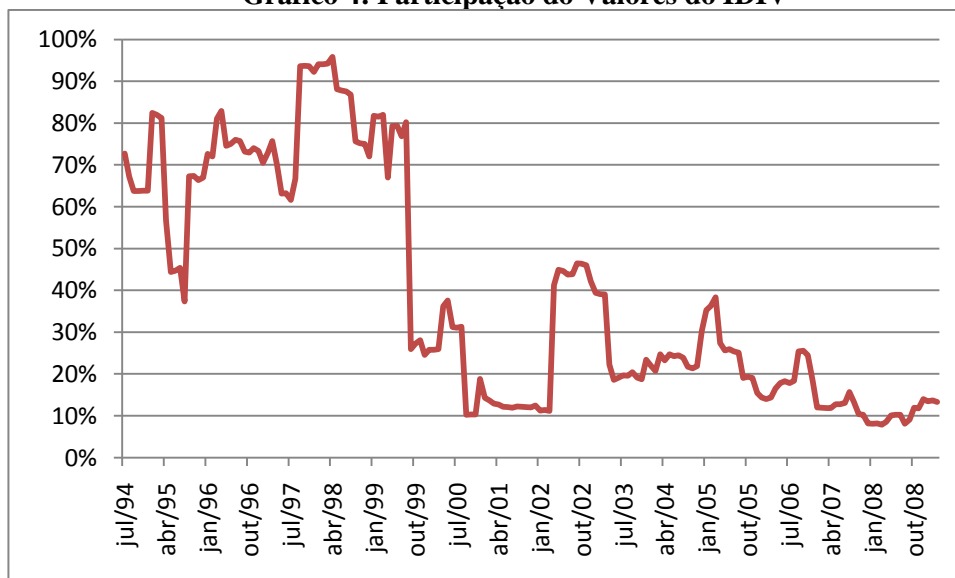
A evolução do índice de dividendos é demonstrada pelo gráfico 3 seguinte. Pode-se observar que no período entre jul/1994 e dez/1999, o IDIV oscilava em torno da média de 1.829 pontos. A partir do ano 2000, surge uma tendência crescente, exceto o período da primeira eleição do Presidente Lula.

**Gráfico 3: Valores do IDIV**



Ao observar o gráfico 3, percebe-se que o comportamento da série nos meses anteriores ao ano 2000 é bastante instável sem aparente correspondência com os preços ou com qualquer evento. Para investigar esse movimento, foram calculadas as participações de cada ativo na composição do índice de dividendos. O gráfico 4 ilustra o maior percentual de participação em cada valor mensal.

**Gráfico 4: Participação do Valores do IDIV**



Denota-se do gráfico 4 que, previamente ao ano 2000, um único ativo chegava a representar mais de 90% do índice de dividendos. Para evitar os problemas decorrentes dessa

concentração, optou-se por trabalhar com as séries em intervalos de tempos que vão de julho de 2000 a março de 2009, reduzindo as 177 observações a 105. Esse procedimento diminui bastante o impacto de um único ativo na série. A média das maiores participações de um único ativo no período de julho de 1994 a junho de 2000 é de 68%, enquanto para o período subsequente é de 20%.

Além disso, quando realizada análise semelhante da participação de cada um dos ativos sobre o índice de preços, observa-se que, no período anterior a janeiro de 2000, os ativos de maior participação no índice de preços não eram os de maior participação no índice de dividendos. Já no período seguinte, nota-se uma correspondência entre os ativos mais representativos nas duas séries de dados.

#### 4.1 Modelo Estado-Espaço

O primeiro teste feito, antes de testar o modelo, é o de estacionariedade das variáveis. A tabela 3 abaixo mostra os resultados dos testes ADF e PP para a série dos logaritmos naturais de IBOV, enquanto a tabela 4 mostra os mesmos resultados só que para os logaritmos naturais de IDIV. Ambos os testes têm como hipótese nula a existência de raiz unitária, contra a hipótese alternativa de inexistência dessa raiz. Os valores críticos dos testes são demonstrados pela tabela 5.

**Tabela 3: Teste de raiz unitária para ln(BOV)**

Série	Tipo de teste	ADF	PP
Ln em level	Média zero	0,763	0,738
	Média Simples	-1,359	-1,421
	Tendência	-2,423	-2,637
Ln em primeira diferença	Média zero	-13,262	-13,260
	Média Simples	-13,258	-13,220
	Tendência	-13,217	-13,265

**Tabela 4: Teste de raiz unitária para ln(IDIV)**

Série	Tipo de teste	ADF	PP
Ln em level	Média zero	0,261	0,326
	Média Simples	-1,323	-4,219
	Tendência	-1,253	-4,245
Ln em primeira diferença	Média zero	-9,567	-24,398
	Média Simples	-9,536	-24,320
	Tendência	-9,548	-24,179

**Tabela 5: Valores críticos dos testes ADF e PP**

Modelo	Nível de significância	
	1%	5%
Constante	-3,467	-2,877
Constante e tendência temporal	-4,011	-3,435
Sem constantes e tendência temporal	-2,578	-1,942

Observando os resultados, denota-se que o teste ADF nas duas séries não rejeita a hipótese de existência de uma raiz unitária. Procedendo ao teste para buscar uma segunda raiz unitária, ou seja, realizando o teste após realizar uma diferenciação, rejeita-se a hipótese nula de existência raiz unitária ao nível de significância de 1%. Logo, existe pouca evidência da presença de uma segunda raiz unitária.

Segundo a metodologia, o modelo aqui utilizado assume que o índice de dividendos segue um ARIMA(p,1,0). Para determinar a ordem do processo autoregressivo, calculou-se os valores de *Akaike Information Criteria* (AIC) e de *Schwarz's Bayesian Information Criteria* (SBIC) para valores de p variando de 1 a 10. Os resultados encontrados são apresentados na tabela 6.

**Tabela 6: Valores críticos dos testes ADF e PP**

p	AIC	SBIC
1	0,8896	0,9256
2	0,8493	0,9036
3	0,7950	0,8676
4	0,7850	0,8761
5	0,7898	0,8996
6	0,8026	0,9311
7	0,8182	0,9658
8	0,8303	0,9970
9	0,8416	1,0276
10	0,8395	1,0449

Segundo Brooks (2002, p. 238), o SBIC sempre escolhe o modelo com uma quantidade de parâmetros menor ou igual ao AIC pois o primeiro penaliza mais fortemente a inclusão de novos termos em comparação ao segundo. Dessa maneira, o menor valor encontrado para SBIC se dá para p igual a três. Logo, assume-se que o índice de dividendos seguirá um processo ARIMA (3,1,0).

Pode-se então especificar o modelo utilizado nesse trabalho, que consiste em estimar as equações (28), (29) e (30). A equação (29) está na forma matricial. A forma polinomial é desenvolvida no apêndice e tem como resultado a expressão:

$$\Delta p_t = \Delta d_t + [m_1 \quad m_2 \quad m_3] \cdot \begin{bmatrix} \Delta d_t - \Delta d_{t-1} \\ \Delta d_{t-1} - \Delta d_{t-2} \\ \Delta d_{t-2} - \Delta d_{t-3} \end{bmatrix} + \Delta b_t$$

$$\Delta p_t = (1 + m_1)\Delta d_t + (m_2 - m_1)\Delta d_{t-1} + (m_3 - m_2)\Delta d_{t-2} - m_3\Delta d_{t-3} + \Delta b_t$$

onde  $m_1, m_2$  e  $m_3$  são as expressões calculadas no apêndice.

A estimação das equações é realizada por máxima verossimilhança através do Filtro de Kalman. O modelo tem sete coeficientes a serem estimados ( $\mu, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \sigma_\delta, \sigma_\eta$ ). A tabela 7 apresenta as estimativas com seus respectivos erros padrões. O resultado indica que a maioria dos parâmetros foi precisamente estimada e são valores plausíveis.

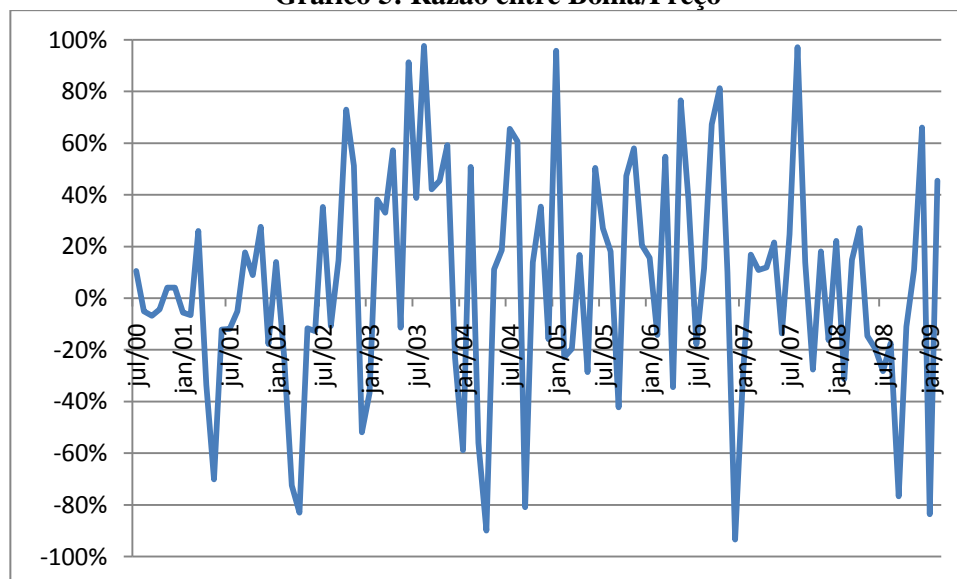
**Tabela 7: Estimativas dos parâmetros do modelo Estado-Espaço**

$\mu$	$\psi$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\sigma_\delta$	$\sigma_\eta$
3,744	0,938*	0,712*	-0,614*	0,593*	7,037*	30,739
(180,663)	(0,00034)	(0,00045)	(0,00030)	(0,00028)	(0,00028)	75,446

Os desvios padrão são representados nos parênteses. Os parâmetros estaticamente significantes ao nível de 5% estão marcados com \*.

As razões entre a estimativa da bolha e o índice de preços é plotada no gráfico 5.

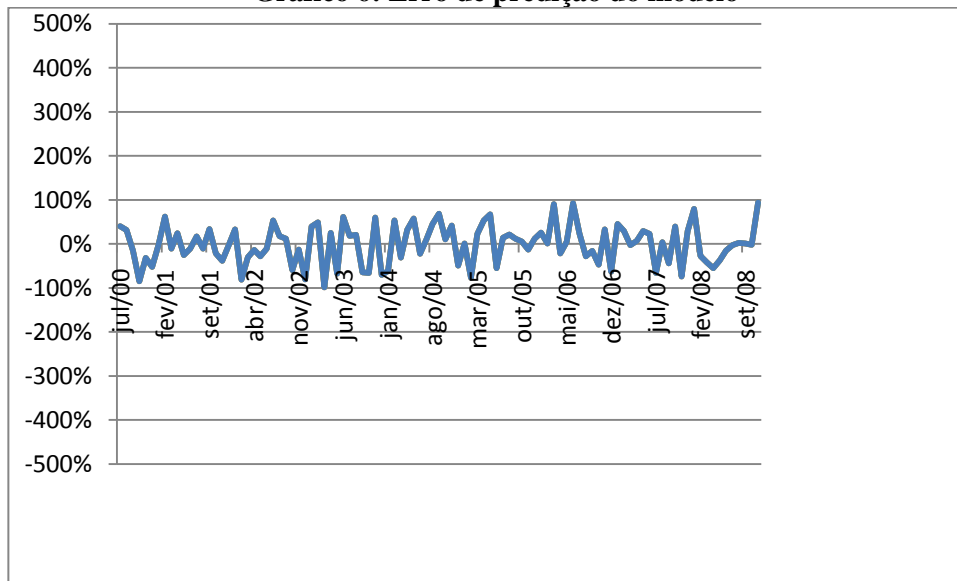
**Gráfico 5: Razão entre Bolha/Preço**



Fica claro que a bolha oscila bastante, tanto para valores negativos quanto valores positivos, indicando um distanciamento entre os preços e os dividendos.

Os maiores percentuais de explicação da bolha frente aos preços ocorrem em períodos próximos às maiores variações do índice de preço, o que pode caracterizar um mercado bastante especulativo.

O gráfico 6 abaixo mostra o percentual do erro de predição do modelo.

**Gráfico 6: Erro de predição do modelo**

A performance do modelo utilizado é comparada com dois outros modelos alternativos, o modelo de Gordon e o modelo de *intrinsic bubbles* conforme descrito por Froot e Obstfeld (1991).

#### 4.2 Modelo de Gordon

O modelo de Gordon a ser estimado é o sistema de equações formado pelas expressões (28), sem o componente bolha, e (29). O sistema é estimado usando o *Generalized method of moments* (GMM), proposto por Hansen, permitindo uma correlação serial de quarta ordem e heterocedacidade condicional na matriz de covariância de Newey e West.

Os coeficientes do modelo são  $(\mu, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \sigma_\delta)$ . Os resultados são apresentados na tabela 8:

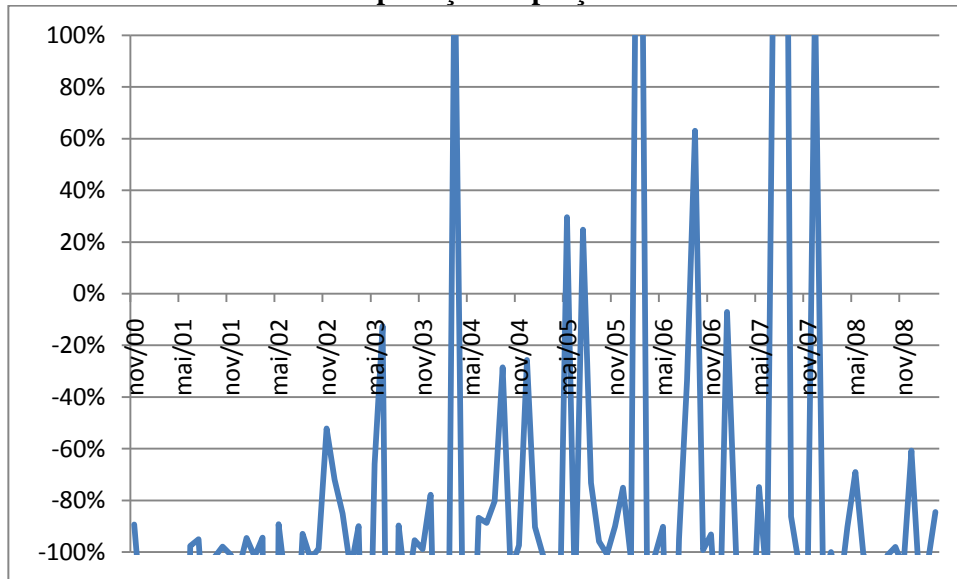
**Tabela 8: Estimativas dos parâmetros do Modelo de Gordon**

$\mu$	$\psi$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\sigma_\delta$
0,040323	0,168003*	-0,75164*	-0,85065*	-0,76604*	0,37602*
(0,04351)	(0,009619)	(0,11122)	(0,37765)	(0,14647)	(0,01045)

Os desvios padrão são representados nos parênteses. Os parâmetros estaticamente significantes ao nível de 5% estão marcados com \*.

O gráfico 7 apresenta o percentual do erro de predição do modelo de Gordon.

Gráfico 7: Erro de predição do preço: Modelo de Gordon



#### 4.3 Modelo de *Intrinsic Bubbles*

Segundo o modelo de *intrinsic bubbles*, os dividendos seguem um *geometric random walk* com *drift* da seguinte maneira:

$$\ln(D_t) = \alpha + \ln(D_{t-1}) + u_t \quad (39)$$

onde  $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$ .

Usando (39), o preço das ações é dado por:

$$P_t = c_0(D_t) + c_1(D_t^\lambda) \quad (40)$$

O primeiro termo do lado direito da equação é o valor fundamental enquanto o segundo é a *intrinsic bubble*, que é exclusivamente função dos dividendos. O parâmetro  $\lambda$  na equação (40) é a solução positiva da equação quadrática:

$$(\sigma_u^2/2)\lambda^2 + \alpha\lambda - \rho = 0 \quad (41)$$

onde  $\rho$  é a taxa real instantânea de juros. O modelo de *intrinsic bubble* a ser estimado é:

$$\frac{P_t}{D_t} = c_0 + c_1(D_t^{\lambda-1}) + v_t \quad (42)$$

onde  $v_t$  é um termo de erro.

Ressalta-se que o modelo é estimado segundo a equação (42) e não segundo a equação (40) devido a estimação da segunda é complicada pela colineariedade entre os regressores, o que é resolvido pela divisão de toda equação por  $D_t$ .

A estimação da equação (39) com a série de dividendos obtém  $\alpha = 0,010311$  e  $\sigma_u^2 = 0,01680$ , conforme indicado na tabela 9.

**Tabela 9: Estimação da equação (37)**

Dependent Variable: LN_IDIV				
Method: Least Squares				
Sample: 2000M07 2009M03				
Included observations: 105				
LN_IDIV=C(19)+LN_IDIV(-1)				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(19)	0.010311	0.012711	0.811194	0.4191
R-squared	0.932842	Mean dependent var		6.896643
Adjusted R-squared	0.932842	S.D. dependent var		0.502608
S.E. of regression	0.130250	Akaike info criterion		-1.229237
Sum squared resid	1.764379	Schwarz criterion		-1.203961
Log likelihood	65.53495	Durbin-Watson stat		2.064071

A taxa real instantânea de juros é estimada pelo retorno médio do IBOVESPA. Dessa maneira,  $\rho = 1,1279\%$ .

**Tabela 10: Estatísticas descritivas do retorno do IBOVESPA**

Média	0,011279
Mediana	0,016559
Máximo	0,249866
Mínimo	-0,392437
Desvio Padrão	0,097589
Skewness	-0,487767
Kurtose	4,294653
Jarque-Bera	19,270490
Observações	176

A estimação da equação (41) resulta em  $\lambda = 1,92502$ . Utilizando esse valor, a estimação da equação (42) por mínimos quadrados resulta em:

**Tabela 11: Estimação da equação (40)**

Dependent Variable: IBOV/IDIV				
Method: Least Squares				
Sample: 2000M07 2009M03				
Included observations: 105				
(IBOV/IDIV)=C(21)+C(22)*(IDIV^0.92502)				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(21)	53.10245	3.050593	17.40726	0.0000
C(22)	-0.027300	0.004336	-6.296126	0.0000
R-squared	0.277909	Mean dependent var		35.33826
Adjusted R-squared	0.270898	S.D. dependent var		13.92034

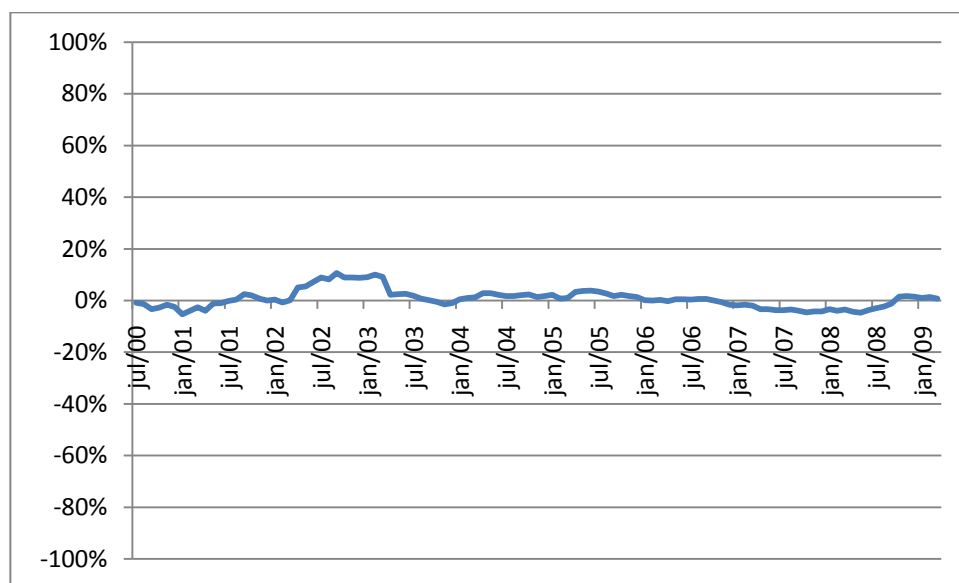


S.E. of regression	11.88623	Akaike info criterion	7.807502
Sum squared resid	14552.09	Schwarz criterion	7.858053
Log likelihood	-407.8938	Durbin-Watson stat	0.167079

Conforme proposto por Froot e Obstfeld (1991), foi encontrada uma estimativa estatisticamente significativa para  $c_1$ , o parâmetro no termo de bolha, o que sugere a existência de *intrinsic bubbles*.

O gráfico 8 apresenta o percentual do erro de predição do modelo com *intrinsic bubbles*.

**Gráfico 8: Erro de predição do preço: Modelo de *intrinsic bubbles***



#### 4.4 Observações

Após a construção dos três modelos, podem-se comparar os resultados. Primeiro, o modelo de Gordon é o que pior se ajustou aos dados, mesmo com os dividendos sendo tratados como um processo ARIMA (3,1,0) ao invés de um simples passeio aleatório.

Surpreendentemente, ao contrário do trabalho de Wu (1997), o modelo de *intrinsic bubbles* foi o que melhor explicou as variações do índice de preços. Esse resultado é comprovado pelo pequeno erro de predição encontrado nesse modelo em comparação com os outros dois.

Apesar do maior erro nesses períodos, é o método de Froot e Obstfeld que mostra mais claramente os efeitos da crise pré-eleitoral de 2002 e a crise internacional de 2008.

Finalmente, são calculados os valores de RMSE e MAE, em termos percentuais para os três modelos. O resultado é reportado na tabela 12. Fica aparente a maior

precisão do modelo de Froot e Obstfeld, que trata de *intrinsic bubbles*, sobre os demais para o conjunto de dados do IBOVESPA.

**Tabela 12: RMSE e MAE dos modelos**

	Modelo 4.1	Modelo 4.2	Modelo 4.3
RMSE(%)	71,86	88,80	42,18
MAE(%)	54,77	69,70	32,09

## 5. Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo geral identificar se há evidências de bolhas de preços no mercado acionário brasileiro no período de 1994 a 2009. Para a consecução deste objetivo geral, foram considerados os seguintes objetivos específicos:

- Construir um índice que represente a distribuição de dividendos no Brasil, utilizando as mesmas ações presentes nas carteiras teóricas do Índice BOVESPA no período de 1994 a 2009, possibilitando a comparação com o índice de preços.
- Utilizar o filtro de Kalman como estimação do modelo estado-espço e validar sua escolha demonstrando o ganho em precisão dos valores estimados.
- Testar a precisão do modelo utilizado

A obtenção do índice de dividendos era indispensável para a consecução do objetivo a fim de viabilizar a comparação proposta pela teoria de precificação de ativos. Essa tarefa mostrou-se bastante árdua pois a Bolsa de Valores de São Paulo não divulga tal informação.

Foi necessária a construção de um índice de dividendos que apresentasse correspondência metodológica com o IBOVESPA. A partir das informações conseguidas com a BOVESPA e no software Economática®, conseguiu-se o resultado requerido. Após a observação desse resultado, optou-se pela utilização dos dados a partir de julho de 2000, a fim de limitar aparentes problemas nos dados.

A etapa seguinte foi a de estimação do modelo estado-espço e dos modelos alternativos, conforme descrito na seção de metodologia. O modelo estado-espço encontrou evidências de bolhas bem como o modelo de *intrinsic bubbles*, sendo o segundo mais preciso em sua modelagem. O modelo de valor presente não se ajustou adequadamente.

Desta forma, buscando responder ao problema de pesquisa: **“há evidências de bolhas de preços no mercado acionário brasileiro no período de 1994 a 2009?”** fica constatado neste estudo que, no mercado brasileiro, de acordo com a metodologia utilizada, há indícios da existência de bolhas de preços no período.

Estes resultados estão em consonância com os encontrados pelos trabalhos que pesquisaram a existência de bolhas no mercado brasileiro e citados no referencial teórico. Pode-se destacar desses o de Martin *et. al* (2004), que constataram a presença de bolhas de preços racionais no mercado acionário brasileiro, a partir da identificação de mudança de regime do processo de geração de retornos, para o período pós Plano Real (julho de 1994 a março de 2004), Sornette (2004), que com métodos da econofísica, encontrou uma bolha

especulativa no mercado acionário do Brasil entre maio e agosto de 1997, De Medeiros e Daher (2008) e De Medeiros e Fernandes (2009), que constaram a evidência da presença de bolhas no mercado brasileiro com base na metodologia de cointegração entre preços e dividendos.

Esta pesquisa não buscou identificar o que causou a formação do processo de bolha de preços, nem sua data de início, e sim verificar a possível existência de bolha de preços mercado brasileiro no período de 1994 a 2009. A identificação do início das bolhas e dos fatos geradores deste processo fica aqui registrada como recomendação para uma nova pesquisa.

Outra recomendação é que novos estudos abordem a possibilidade de construção e divulgação de um índice de dividendos para cada um dos índices divulgados pela BOVESPA, observando as respectivas metodologias desses índices e dos índices de dividendos de outras bolsas mundiais como aquele usado por Wu (1997).

## Referências

- BARBERIS, NICHOLAS. SHLEIFER, ANDREI. Style Investing. **Journal of Financial Economics**, v. 68, p. 161 – 199, 2003.
- BELO, Neuza M.; BRASIL, Haroldo G. Assimetria Informacional e Eficiência Semiforte do Mercado. **Revista de Administração de Empresas**, Vol. 46, Edição Especial Minas Gerais, 2006.
- BERNOULLI, DANIEL. Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperiales Petropolitanae*, V. 5, p. 175-192, 1738. In: Tradução Econometrica, V. 22, p. 23-26, 1954.
- BERNSTEIN, PETER. L. **Against the gods: the remarkable story of risk**. New York: John Wiley & Sons, 1998. 383 p.
- BIAIS, BRUNO. HILTON, DENIS. MAZURIER, KARINE. POUGET, SEBASTIEN. Judgemental Overconfidence, Self-Monitoring, and Trading Performance in an Experimental Financial Market. **Review of Economic Studies**. n. 72, p. 287–312, 2005.
- BLANCHARD, OLIVIER J. Speculative bubbles, crashes and rational expectations. **Economic Letters**, n. 3, p. 387–389, 1979.
- BLANCHARD, OLIVIER J. WATSON, MARK W. Bubbles, rational expectations and financial markets. **NBER Working Paper Series 945**, p. 1–30, 1982.
- BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO – BOVESPA. Site oficial. Disponível em <[www.bovespa.com.br](http://www.bovespa.com.br)> acessado em 26/mar. 2009.
- BONE, ROSE M. B.; RIBEIRO, EDUARDO P. Eficiência Fraca, Efeito Dia-da-Semana e Efeito Feriado no Mercado Acionário Brasileiro: Uma Análise Empírica Sistemática e Robusta. **RAC**, Vol. 6, Nº 1, Jan/Abr 2002, pg.19-37.
- BROOKS, CHRIS. **Introductory Econometrics for Finance**. 1 ed. Cambridge, 2002. 701 p.
- BROOKS, CHRIS. KATSARIS, APOSTOLOS. Rational speculative bubbles: an empirical investigation of the London Stock Exchange. **Bulletin of Economic Research**, v. 55, n. 4, p. 319 – 343, 2003.
- BURMEISTER, EDWIN. WALL, KENT D. HAMILTON, JAMES D. Estimation of Unobserved Expected Monthly Inflation Using Kalman Filtering. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 4, n. 2, p. 147-160, Abril, 1986.
- CAJUEIRO, DANIEL O. TABAK, BENJAMIN M. Testing for rational bubbles in banking indices. **Physica A**, v. 366, p. 365–376, 2006.
- CAMARGOS, MARCOS ANTÔNIO. BARBOSA, FRANCISCO VIDAL. Eficiência informacional do mercado de capitais brasileiro pós-Plano Real: um estudo de eventos dos anúncios de fusões e aquisições. **Revista de Administração – USP**, v. 41, n.1, p. 43 – 58, jan/fev/mar 2006.

CAMERER, COLIN. Bubbles and fads in stock prices. **Journal of Economic Surveys**, v. 3, n.1, p. 3 – 38, 1989.

CAMPBELL, JOHN Y. SHILLER, ROBERT J. The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors. **The Review of Financial Studies**, v. 1, n. 3, p. 195-228, 1988.

COOPER, ARNOLD C., WOO, CAROLYN Y. , DUNKELBERG, WILLIAM C. Entrepreneurs' perceived chances for success. **Journal of Business Venturing**, n. 3, p. 97–108, 1988

DAMODARAN, ASWATH. **Investment Valuation: Tools and techniques for determining the value of any asset**. 2.ed. John Wiley and Sons, 2002. 992 p.

DE MEDEIROS, OTÁVIO. R. ; DAHER, CECÍLIO. E. . Evidências de Bolhas Especulativas no Mercado de Ações Brasileiro. In: XXXII ENANPAD Encontro Nacional da ANPAD, 2008, Rio de Janeiro. Anais do XXXII ENANPAD Encontro Nacional da ANPAD. Rio de Janeiro : ANPAD, 2008. v. 1. p. 300-315.

DE MEDEIROS, OTÁVIO R. ;FERNANDES, BRUNO. V. R. ;. . Evidências de Bolhas de Preços no Mercado Acionário Brasileiro. In: 9º CONGRESSO USP DE CONTROLADORIA E CONTABILIDADE, 2009, São Paulo. ANAIS DO 9º CONGRESSO USP DE CONTROLADORIA E CONTABILIDADE. São Paulo : FEA-USP, 2009. v. 1. p. 1-20.

ENGSTED, T., TANGGAARD, C. Speculative bubbles in stock prices? Tests based on the price-dividend ratio. **Journal of Economic Literature**, 2004.

EUBANK, RANDALL, F. **A Kalman Filter Primer**. 1 ed. Chapman e Hall, 2006. 186 p.

FAMA, EUGENE. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. **Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383-417, Maio, 1970.

\_\_\_\_\_. Efficient capital markets II. **The Journal of Finance**, v. 46, n. 5, p. 1575-1617,1991.

FAMA, EUGENE F.; FRENCH, KENNETH R. The cross-section of expected stock returns. **Journal of Finance**, v. 47, p. 427-465, Junho, 1992.

FAMA, EUGENE F.; FRENCH, KENNETH R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. **Journal of Financial Economics**, v. 33, p.3-56, 1993.

FROOT, KENNETH A., OBSTFELD, MAURICE. Intrinsic Bubbles: The Case of Stock Prices. **The American Economic Review**, v. 81, n. 5 , p. 1189-1214, Dezembro, 1991.

GREWAL, MOHINDER S. ANDREWS, ANGUS P. **Kalman filtering: theory and practice using MATLAB**. 3 ed. Wiley, 2008. 575 p.

GORDON, M. J. Dividends, earnings, and stock prices. **The Review of Economics and Statistics**, v. 41, n. 2, p. 99-105, 1959.

HONG, HARRISON. SCHEINKMAN, JOSÉ. XIONG, WEI. Asset Float and Speculative Bubbles. **The Journal of Finance**, v. 61, n. 3, p. 1073 – 1117, Junho, 2006.

JENSEN, M. C., MECKLING, W. Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs, and Capital Structure. **Journal of Financial Economics**, v. 3, p. 305-360, 1976

KAHNEMAN, DANIEL, TVERSKY, AMOS. Prospect theory: an analysis of decision making under risk. **Econometrica**, v.47, n.2, p.263-291, 1979.

\_\_\_\_\_. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. **Science**, v. 185, n. 4157, p. 1124-1131, Setembro, 1974.

LUCAS, ROBERT. E. JR. Asset prices in an exchange economy. **Econometrica**, v. 46, n. 6, p. 1429 – 1455, Novembro, 1978.

MARKOWITZ, HARRY. **Portfolio Selection: Efficient diversification of investments**. 2.ed. Blackwell Publishing, 1991. 384 p.

MARTIN, DIOGENES M. L., KAYO, EDUARDO K, KIMURA, HERBERT, NAKAMURA, WILSON. T. Identificando bolhas especulativas racionais no IBOVESPA (Pós-Plano Real), a partir de Regimes Markovianos de Conversão. **Economia**, v. 5, n.3, p. 219 – 252, Dezembro, 2004.

MAYBECK, PETER S. **Stochastic Models, Estimation, and Control**, Volume 1, Academic Press, Inc. 1979

MEINHOLD, R. J., SINGPURWALLA, N. D. Understanding the Kalman Filter. **The American Statistician**, Vol. 37, No. 2., pp. 123-127, May, 1983.

NEUMANN, JOHN VON, MORGENSTERN, OSKAR. *Theory of games and economic behavior*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 2004. 739 p.

ODEAN, TERRANCE. Volume, Volatility, Price, and Profit When All Traders Are Above Average. **The Journal of Finance**. v. 53, n. 6, p. 1887 – 1934, Dezembro, 1998.

PONTIFF, JEFFREY. Excess volatility and closed-end funds. **The American Economic Review**. v. 87, n. 1, p. 155-169, Março, 1997.

SCHEINKMAN, J. A., XIONG, W. Overconfidence and speculation Bubbles. **Journal of Political Economy**, v. 111, n. 6, p. 1183 – 1219, 2003.

SHARPE, WILLIAN F. Capital Asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425 – 442, Setembro, 1964.

SHILLER, ROBERT. Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends ? . **The American Economic Review**. v. 71, n. 3, p. 421-436, Junho, 1981.

\_\_\_\_\_. **Exuberância irracional**. São Paulo: Editora Makron Books, 2000. 276 p.

\_\_\_\_\_. Bubbles, human judgment, and expert opinion. **Financial Analysts Journal**, v. 58, n. 3; p. 18 - 26, Maio/Junho, 2002.

SORNETTE, DIDIER. **Why stock markets crash**: critical events in complex financial systems. Princeton University Press, 2003. 421 p.

SVENSON, OLA. Are we all less risky and more skillful than our fellow drivers? **Acta Psychologica**, n. 47, p. 143–148, 1981

TOBIN, JAMES. Liquidity preference as behavior toward risk. **The Review of Economic Studies**, n. 67, p. 65-86, February, 1958.

WANG, PEIJIE. **Financial Econometrics**: Methods and models.1.ed. Oxforshire:Routledge, 2003. 178 p.

WELCH, GREG, BISHOP, GARY. An Introduction to the Kalman Filter, University of North Carolina, 2004.

WU, YANGRU. Rational bubbles in the stock market: Accounting for the U.S. stock price volatility. **Economic Inquiry**, v. XXXV, p. 309 – 319, Abril 1997.



## Apêndice

A equação  $\Delta p_t = \Delta d_t + M \cdot \Delta Y_t + \Delta b_t$  está na forma matricial uma vez  $M$  e  $\Delta Y_t$  são matrizes de formato distinto a  $1 \times 1$ . Primeiramente, deve-se expressar  $M$  em função dos respectivos parâmetros.

$$M = g \cdot A \cdot (I - A)^{-1} \cdot [I - (1 - \psi) \cdot (I - \psi A)^{-1}]$$

$$g = (1, 0, 0)_{1 \times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Serão desenvolvidos as expressões de  $g \cdot A$ ,  $(I - A)^{-1}$  e  $[I - (1 - \psi) \cdot (I - \psi A)^{-1}]$  para posterior multiplicação.

$$a) g \cdot A = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]$$

$$b) I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \varphi_1 & -\varphi_2 & -\varphi_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{x} & \frac{\varphi_3}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1 - \varphi_1}{x} & \frac{\varphi_3}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1 - \varphi_1}{x} & \frac{1 - \varphi_1 - \varphi_2}{x} \end{bmatrix}, \text{ onde } x = \det(I - A) = 1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3.$$

$$g \cdot A \cdot (I - A)^{-1} =$$

$$[\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{x} & \frac{\varphi_3}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1 - \varphi_1}{x} & \frac{\varphi_3}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1 - \varphi_1}{x} & \frac{1 - \varphi_1 - \varphi_2}{x} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \frac{1}{x} \cdot [\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad \varphi_2 + \varphi_3 \quad \varphi_3]_{1 \times 3}$$

$$c) [I - (1 - \psi) \cdot (I - \psi A)^{-1}]$$

$$\psi A = \begin{bmatrix} \psi \varphi_1 & \psi \varphi_2 & \psi \varphi_3 \\ \psi & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$I - \psi A = \begin{bmatrix} 1 - \psi \varphi_1 & -\psi \varphi_2 & -\psi \varphi_3 \\ -\psi & 1 & 0 \\ 0 & -\psi & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$(I - \psi A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & \frac{\psi\varphi_2 + \psi^2\varphi_3}{y} & \frac{\psi\varphi_3}{y} \\ \frac{\psi}{y} & \frac{1 - \psi\varphi_1}{y} & \frac{\psi^2\varphi_3}{y} \\ \frac{\psi^2}{y} & \frac{\psi - \psi^2\varphi_1}{y} & \frac{1 - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2}{y} \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \text{ onde } y = \det(I - \psi A)^{-1} = 1 -$$

$$\psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \psi^3\varphi_3.$$

$$\begin{aligned} [I - (1 - \psi) \cdot (I - \psi A)^{-1}] &= \left[ I - \frac{(1 - \psi)}{y} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \psi\varphi_2 + \psi^2\varphi_3 & \psi\varphi_3 \\ \psi & 1 - \psi\varphi_1 & \psi^2\varphi_3 \\ \psi^2 & \psi - \psi^2\varphi_1 & 1 - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 \end{bmatrix} \right] \\ &= \\ \frac{1}{y} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \psi^3\varphi_3 & (\psi - 1)(\psi\varphi_2 + \psi^2\varphi_3) & (\psi - 1)(\psi\varphi_3) \\ (\psi - 1)\psi & \psi - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \psi^3\varphi_3 & (\psi - 1)\psi^2\varphi_3 \\ (\psi - 1)\psi^2 & (\psi - 1)(\psi - \psi^2\varphi_1) & \psi - \psi^2\varphi_1 - \psi^3\varphi_2 - \psi^3\varphi_3 \end{bmatrix} \\ &= \\ \frac{1}{y} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \psi^3\varphi_3 & \psi^2\varphi_2 + \psi^3\varphi_3 - \psi\varphi_2 - \psi^2\varphi_3 & \psi^2\varphi_3 - \psi\varphi_3 \\ \psi^2 - \psi & \psi - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \psi^3\varphi_3 & \psi^3\varphi_3 - \psi^2\varphi_3 \\ \psi^3 - \psi^2 & \psi^2 - \psi^3\varphi_1 - \psi + \psi^2\varphi_1 & \psi - \psi^2\varphi_1 - \psi^3\varphi_2 - \psi^3\varphi_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Efetuadaos esses cálculos parciais, pode-se definir a expressão para

$$M = g \cdot A \cdot (I - A)^{-1} \cdot [I - (1 - \psi) \cdot (I - \psi A)^{-1}]. \text{ } M \text{ é uma matriz } 1 \times 3 \text{ pois } g \cdot A \cdot (I - A)^{-1} \text{ é } 1 \times 3 \text{ e } [I - (1 - \psi) \cdot (I - \psi A)^{-1}] \text{ é } 3 \times 3.$$

$g \cdot A \cdot (I - A)^{-1}$  tem como coeficiente  $\frac{1}{x}$  e  $[I - (1 - \psi) \cdot (I - \psi A)^{-1}]$  tem como coeficiente  $\frac{1}{y}$ , logo o coeficiente de  $M$  será  $\frac{1}{xy}$ .

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \cdot (1 - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \psi^3\varphi_3) = 1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \\ &\psi\varphi_1 + \psi\varphi_1^2 + \psi\varphi_1\varphi_2 + \psi\varphi_1\varphi_3 - \psi^2\varphi_2 + \psi^2\varphi_2^2 + \psi^2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2\varphi_2\varphi_3 - \psi^3\varphi_3 + \\ &\psi^3\varphi_1\varphi_3 + \psi^3\varphi_2\varphi_3 + \psi^3\varphi_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } M = \frac{1}{xy} [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \cdot (1 - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \psi^3\varphi_3) + (\varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\psi^2 - \psi) + \\ &\varphi_3 \cdot (\psi^3 - \psi^2) \end{aligned}$$

$$a_{11} = \psi\varphi_1 - \psi\varphi_1^2 - \psi\varphi_1\varphi_2 - \psi\varphi_1\varphi_3 - \psi^2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2\varphi_2 - \psi^2\varphi_2^2 - \psi^2\varphi_2\varphi_3 + \psi^3\varphi_3 - \psi^3\varphi_1\varphi_3 - \psi^3\varphi_2\varphi_3 - \psi^3\varphi_3^2$$

$$a_{12} = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\psi^2\varphi_2 + \psi^3\varphi_3 - \psi\varphi_2 - \psi^2\varphi_3) + (\varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\psi - \psi\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \psi^3\varphi_3 + \varphi_3\psi^2 - \psi^3\varphi_1 - \psi + \psi^2\varphi_1)$$

$$a_{12} = \psi\varphi_2 - \psi\varphi_2^2 - \psi\varphi_1\varphi_2 - \psi\varphi_2\varphi_3 + (\varphi_2 + \varphi_3) - \psi^2\varphi_1\varphi_3 + \psi^2\varphi_3 - \psi^2\varphi_3^2 - \psi^2\varphi_2\varphi_3$$

$$a_{13} = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\psi^2\varphi_3 - \psi\varphi_3) + (\varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\psi^3\varphi_3 - \psi^2\varphi_3) + \varphi_3 \cdot (\psi - \psi^2\varphi_1 - \psi^3\varphi_2 - \psi^3\varphi_3)$$

$$a_{13} = \psi\varphi_3 - \psi\varphi_3^2 - \psi\varphi_1\varphi_3 - \psi\varphi_2\varphi_3$$

Finalmente, para obter as expressões dos coeficientes da equação  $\Delta p_t = \Delta d_t + M \cdot \Delta Y_t + \Delta b_t$ , calcula-se :

$$a) \quad 1 + a_{11} = 1 + \psi\varphi_1 - \psi\varphi_1^2 - \psi\varphi_1\varphi_2 - \psi\varphi_1\varphi_3 - \psi^2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2\varphi_2 - \psi^2\varphi_2^2 - \psi^2\varphi_2\varphi_3 + \psi^3\varphi_3 - \psi^3\varphi_1\varphi_3 - \psi^3\varphi_2\varphi_3 - \psi^3\varphi_3^2$$

$$b) \quad a_{12} - a_{11} = \psi\varphi_2 - \psi\varphi_1 + \psi\varphi_1^2 - \psi\varphi_2^2 - \psi\varphi_2\varphi_3 + \psi\varphi_1\varphi_3 - \psi^2\varphi_3^2 - \psi^2\varphi_1\varphi_3 + \psi^2\varphi_3 - \psi^2\varphi_2 - \psi^2\varphi_2^2 - \psi^2\varphi_1\varphi_2 - \psi^3\varphi_3 + \psi^3\varphi_1\varphi_3 + \psi^3\varphi_2\varphi_3 + \psi^3\varphi_3^2$$

$$c) \quad a_{13} - a_{12} = \psi\varphi_3 - \psi\varphi_2 + \psi\varphi_2^2 - \psi\varphi_3^2 + \psi\varphi_1\varphi_2 - \psi\varphi_1\varphi_3 + \psi^2\varphi_3^2 + \psi^2\varphi_1\varphi_3 + \psi^2\varphi_2\varphi_3 - \psi^2\varphi_3$$

$$d) \quad -a_{13} = -\psi\varphi_3 + \psi\varphi_3^2 + \psi\varphi_1\varphi_3 + \psi\varphi_2\varphi_3$$

Deve-se agora multiplicar cada termo acima por  $\frac{1}{xy}$  conforme calculado acima.