Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas de Soma Zero com Peso sobre Grupos Abelianos Finitos

por

Abílio Lemos Cardoso Júnior

Brasília
2010

À minha esposa Mariana.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado a vida e ter me sustentado durante a realização deste trabalho.

A minha amada esposa Mariana por ser uma grande ajudadora.

A minha família pelo apoio e orações.

Aos irmãos da Igreja Cristã Maranata do Lago Norte e de São Miguel do Anta pelas orações.

Ao meu orientador Prof. Hemar Godinho pelo incentivo e paciência em todos os momentos.

Ao Prof. Diego Marques pela ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

Aos profesores que aceitaram participar da banca examinadora desta tese.

Aos demais professores que participaram de toda minha formação acadêmica.

Aos meus grandes amigos e amigas do departamento de matemática da UnB pelo apoio e ajuda durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Estudamos uma variação de um clássico problema em Teoria Aditiva dos Números: o problema de soma zero com peso. Apresentamos vários resultados para os invariantes $\eta_A(G)$, $g_A(G)$ e $s_A(G)$, quando G é um grupo abeliano finito específico e $A = \{-1, 1\}$.

Palavras-chave: soma zero com peso, grupo abeliano finito.

Abstract

We study a variation of a classical problem in Additive Number Theory: the zero-sum problem with weight. We present several results for the invariants $\eta_A(G)$, $g_A(G)$ and $s_A(G)$ when G is a specific finite abelian group and $A = \{-1, 1\}$.

Keywords: zero-sum with weight, finite abelian group.

Sumário

Introdução **1**

1 Algumas definições e resultados sobre problemas de soma zero **12**

1.1 Resultados para os invariantes $\eta_A(G)$, $D_A(G)$, $s_A(G)$ e $E_A(G)$ 14

2 Limitantes para $s_A(G)$, quando $A = \{-1, 1\}$ e resultados relacionados **23**

2.1 Limite inferior para $s_A(C_n^r)$, com $A = \{-1, 1\}$ 23

2.2 Limites superiores para $s_A(G)$ 26

2.2.1 Relação entre $s_A(G)$ e $g_A(G)$ quando $\exp(G) = n$ é par 26

2.3 Igualdades e limitantes para $s_A(C_n^r)$, quando n é par 27

2.3.1 Valor exato de $s_A(C_4^2)$ 28

3 Igualdades e limitantes para $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$ **31**

3.1 Limite inferior para $\eta_A(C_3^r)$ e relação entre os invariantes $\eta_A(C_3^r)$, $s_A(C_3^r)$ e $g_A(C_3^r)$ 31

3.1.1 Limites inferiores para $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$ 31

3.1.2 Relação entre $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$ 34

3.2 Limite superior e valores exatos de $\eta_A(C_3^r)$ 36

3.2.1 Um limite superior para $\eta_A(C_3^r)$, com $A = \{-1, 1\}$ 36

3.2.2 Aplicação: valor exato de $\eta_A(C_3^r)$, com $r = 1, 2, 3, 4$ 42

3.3 O caso $C_{3^a}^3$ 45

3.4 Limite inferior para $\eta_A(C_3^r)$, quando $A = \{-1, 1\}$ e $r > 4$ é par 46

Referências Bibliográficas **54**

Aspectos históricos

História dos problemas de soma zero

Começamos falando do estudo de somas de classes de congruências e temos um particular interesse no teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv que foi provado em 1961(ver [13]), pois a partir dele iniciou-se o estudo que gerou o nosso trabalho. O teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv diz o seguinte: Qualquer sequência de inteiros de comprimento $2n-1$ possui uma subsequência de comprimento n cuja soma de seus elementos é zero módulo n. Alguns anos depois, Erdös propôs a determinação do menor comprimento de uma sequência em $C_p^2 = C_p \oplus C_p$, onde C_p é o grupo cíclico de ordem p, tal que esta sequência possua uma subsequência de comprimento p cuja soma de seus elementos é zero módulo p.

Em abril de 1966, durante a *Midwestern conference on Group Theory and Number Theory, Ohio State University*, H. Davenport propôs a seguinte questão:

Se R é o anel de inteiros de um corpo F de números algébricos, qual é o número maximal de classes de ideais primos (contando a multiplicidade) na decomposição em ideais primos de aR para um inteiro irredutível a em R?

Aqui fazemos a seguinte definição: Para um grupo abeliano finito G o invariante $D(G)$ é o menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência de elementos de G, com comprimento maior ou igual a ℓ, possui uma subsequência cuja soma de seus elementos representa o zero de G. Sendo G o grupo de classes de ideais primos de R na questão proposta por Davenport, ele provou que o número procurado é o $D(G)$, o qual é chamado de constante de Davenport de G.

Em 1969, J. Olson (ver [27]) provou para um p-grupo, $G \cong C_{p^{n_1}} \oplus \cdots \oplus C_{p^{n_r}}$, onde p é um número primo e r, n_i para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ são inteiros positivos que $D(G) = 1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{n_i} - 1)$ e no mesmo ano em [28] Olson provou que para o grupo $G = C_m \oplus C_n$, com m divisor de n tem-se $D(G) = m + n - 1$.

Em 1973, Harborth em [20] definiu dois invariantes e um deles formaliza o que foi feito no teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv. A saber, dado o grupo C_n^r, com $r \in \mathbb{N}$, o invariante $s(C_n^r)$ (chamado na época de $f(n,r)$ por Harborth) é o menor inteiro ℓ tal que toda sequência S de elementos de C_n^r, com comprimento maior ou igual a ℓ, possui uma subsequência T tal que seu comprimento é n e a soma de seus elementos é o zero de C_n^r; e o invariante $g(C_n^r)$ (chamado na época de $g(n,r)$ por Harborth) é o menor inteiro ℓ tal que toda sequência S de elementos distintos de C_n^r, com comprimento maior ou igual a ℓ, possui uma subsequência T tal que seu comprimento é n e a soma de seus elementos é o zero de C_n^r. Assim, em se tratando do teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv temos que $s(C_n) = 2n - 1$. Harborth provou os seguintes resultados neste trabalho:

(1) $2^r(n-1)+1 \leq s(C_n^r) \leq n^r(n-1)+1$, onde $C_n^r = C_n \oplus \cdots \oplus C_n, r$ vezes;

(2) $2^{r-1}(n-1)+1 \leq g(C_n^r) \leq n^{r-1}(n-1)+1$;

(3) $s(C_3^r) = 2g(C_3^r) - 1$;

(4) Se n é par então $g(C_n^r) \geq 2^{r-1}n+1$ e se n é ímpar então $g(C_n) = n$;

(5) $s(C_{mn}^r) \leq \min\{(s(C_m^r)-1)n + s(C_n^r), (s(C_n^r)-1)m + s(C_m^r)\}$;

(6) Além de valores exatos destes invariantes para grupos específicos.

Em 1983, A. Kemnitz em [23] provou que $g(C_p^2) = 2p-1$ para $p \in \{3,5,7\}$ e conjecturou o seguinte:

Conjectura 1. $s(C_n^2) = 4n - 3$.

O que diz-nos que o limite inferior dado em (1) acima é atingido. Ele também provou que basta considerarmos n primo para a demonstração desta conjectura. Alguns resultados para o invariante $g(C_3^r)$ foram obtidos para r fixo e consequentemente para $s(C_3^r)$ por (3) acima. Os valores de $g(C_3^3) = 10$ e $g(C_3^4) = 21$ estão em vários trabalhos na internet; aqui mencionamos apenas o programa de computador de Knuth(ver [24]). O valor de $g(C_3^5) = 46$ pode ser encontrado em [9]. Para $r = 6$ não temos o valor exato, mas temos o seguinte resultado $112 \leq g(C_3^6) \leq 114$, sendo que o limite inferior pode ser encontrado aplicando a elementar duplicação devido à Mukhopadhyay [26] ao 56 pontos do cap de Hill em $PG(5,3)$ [21] e [22] e o limite superior pode ser encontrado em [7]. Para um limite geral, com $r \in \mathbb{N}$, temos o resultado de R. Menshulam que pode ser encontrado em [25]. Neste artigo está provado que $g(C_3^r) \leq (1+o(1))\frac{3^r}{r}$; aqui o problema é visto de uma forma um pouco diferente, a abordagem é feita estudando conjunto de inteiros sem subconjunto de cardinalidade 3 em progressão aritmética (um conjunto $\{g_1, \ldots, g_l\}$, com

$g_i \in C_p^r$ é chamado uma progressão aritmética de comprimento l se existem $a, b \in C_p^r$ tais que $g_{i+1} = a + ib$, para todos $i \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$).

Em 2004, no trabalho de Gao e Thangadurai em [15] está provado que $g(C_p^2) = 2p - 1$ para todo $p \geq 67$ e dai temos a seguinte conjectura.

Conjectura 2.

$$g(C_n^2) = \begin{cases} 2n-1, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ 2n+1, & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$$

A conjectura para o caso n par é motivada pelo limite inferior dado pela sequência $S = (0,0)(0,1)\cdots(0,n-1)(1,0)(1,1)\cdots(1,n-1)$ que não possui subsequência de comprimento n cuja soma é o zero de C_n^2. Para o caso n ímpar a sequência para o limite inferior é $S = (0,0)(0,1)\cdots(0,n-2)(1,1)(1,2)\cdots(1,n-1)$.

Em 2003, C. Reiher provou a veracidade da conjectura de Kemnitz, em artigo que só foi publicado em 2007 (ver [29]).

Antes de continuarmos com os resultados, iremos definir mais um invariante associado ao grupo abeliano finito G de expoente n. Definimos $\eta(G)$ como o menor inteiro l tal que todo sequência de elementos de G, com comprimento maior ou igual a l, possui uma subsequência de comprimento no máximo igual a n tal que a soma de seus elementos é igual ao zero de G.

Após o resultado de Reiher iniciou-se o estudo para grupos de posto 3 e em 2007 Gao *et al* provaram em [17] que

$$\begin{aligned} \eta(C_n^3) + n - 1 &= s(C_n^3) = 9n - 8, \quad \text{se } n = 3^a \cdot 5^b, a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \eta(C_n^3) + n - 1 &= s(C_n^3) = 8n - 7, \quad \text{se } n = 2^a \cdot 3, a \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A partir deste resultado surgiu a seguinte conjectura, a saber,

Conjectura 3.

$$s(C_n^3) = \begin{cases} 9n-8 & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ 8n-7 & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$$

Neste mesmo artigo Gao *et al* provaram que $s(G) = \eta(G) + n - 1$, onde n é o expoente de G, para grupos G específicos, com algumas hipóteses adicionais sobre o grupo G e sobre o invariante $s(G)$. A relação $s(G) = \eta(G) + n - 1$ é uma conjectura de outro artigo de Gao que pode ser encontrado em [14].

Conjectura 4. *$s(G) = \eta(G) + n - 1$, onde n é o expoente de G.*

Outro resultado obtido, ainda, em 2007 por Edel *et al* em [10] é $s(C_n^4) \geq 20n - 19$ para n ímpar e a igualdade se verifica para $n = 3^a$, com $a \in \mathbb{N}$. Neste artigo também é feito um longo estudo de caps maximais em geometria finita (um cap maximal é o maior subconjunto de $AG(r, q)$ que não possui três pontos colineares, $AG(r, q)$ é a parte afim do espaço projetivo $PG(r, q)$ sobre $\mathbb{F}_q$), além de ter uma demonstração mais simples para o seguinte resultado sobre C_n^3: se n é ímpar então existe uma subsequência T de S de comprimento 9 tal que T^{n-1} não tem subsequência de comprimento n cuja a soma de seus elementos seja o zero de C_n^3; em particular, $\eta(C_n^3) \geq 8n - 7$ e $s(C_n^3) \geq 9n - 8$. Este resultado já havia sido provado por C. Elsholtz em [12], mas de uma forma mais complicada.

Em 2008, Edel provou, em [11], que $s(C_n^5) \geq 42n - 41$, $s(C_n^6) \geq 96n - 95$ e $s(C_n^7) \geq 196n - 195$ usando, ainda, a teoria de caps maximais em geometria finita.

História dos problemas de soma zero com peso

Começaremos com as definições dos invariantes com peso, sendo que alguns já foram definidos anteriormente só que sem peso. Mas, antes de fazermos estas definições, definiremos o que é uma sequência A-soma zero. Para $A \subseteq \mathbb{Z}$ e $T = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ uma sequência de elementos não necessariamente distintos de G, definimos

$$\sigma_A(T) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i g_i, \ \ a_i \in A \right\}.$$

Se $0 \in \sigma_A(T)$, cuja soma está em G, dizemos que T é uma sequência A-soma zero.

Para um grupo abeliano finito G de expoente n e $A \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definimos

(i) $\eta_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência S de elementos de G, com comprimento maior ou igual a ℓ, satisfaz a condição (η_A), onde a condição (η_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que o comprimento de T é no máximo n e T é uma sequência A-soma zero.

(ii) $D_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência S de elementos de G, com comprimento maior ou igual a ℓ, satisfaz a condição (D_A), onde a condição (D_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que T é uma sequência A-soma zero.

(iii) $g_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência S de elementos distintos de G, com comprimento maior ou igual a ℓ, satisfaz a condição (g_A), onde a condição (g_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que o comprimento de T é n e T é uma sequência A-soma zero.

(iv) $s_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência S de elementos de G, com comprimento maior ou igual a ℓ, satisfaz a condição (s_A), onde a condição (s_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que o comprimento de T é n e T é uma sequência A-soma zero.

(v) $E_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência S de elementos de G, com comprimento maior ou igual a ℓ, satisfaz a condição (E_A), onde a condição (E_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que o comprimento de T é igual a ordem de G e T é uma sequência A-soma zero.

Aqui observamos que para o grupo em que a ordem de G é igual ao expoente de G, tem-se $E_A(G) = s_A(G)$.

O primeiro resultado que mencionaremos é o resultado de Adhikari *et al* em [1] que estabelece que $E_A(C_n) = s_A(C_n) = n + \lfloor \log_2 n \rfloor$, quando $A = \{-1, 1\}$, onde para um número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x, que é equivalente ao teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv para o peso $A = \{-1, 1\}$, este resultado foi publicado em 2006. Para uma generalização do teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv com peso A mais geral podemos citar o trabalho de Grynkiewicz que pode ser encontrado em [19].

No mesmo sentido do primeiro artigo, Adhikari *et al* provaram, em [3], que $s_A(C_n^2) = 2n - 1$ para todo natural ímpar n e $A = \{-1, 1\}$. Neste mesmo trabalho temos alguns resultados para a constante de Davenport com peso $D_A(C_p)$. Alguns resultados aparecem como citação. São os seguintes: o primeiro é que para $a \in \mathbb{F}_p^*$ temos pelo princípio da casa dos pombos que $D_{\{a\}}(C_p) = p$. O segundo é que para $A = \{a, p - a\}$, novamente para $a \in \mathbb{F}_p^*$, temos que $D_A(C_p) = 1 + \lfloor \log_2 p \rfloor$, onde para o número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x. O terceiro é que se $A = \{1, \ldots, p - 1\}$ então $D_A(C_p) = 2$. O quarto é se $A = \{1, \ldots, t\}$, onde t é um inteiro tal que $1 < t < p$, então $D_A(C_p) = \lceil \frac{p}{t} \rceil$, onde para o número real x, $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x. O quinto é que se A é o conjunto dos resíduos quadráticos (ou resíduos não quadráticos)(mod p), então $D_A(C_p) = 3$. Os dois resultados para constante de Davenport deste artigo estão nos dois teoremas abaixo.

Teorema 1. *Seja* $A \subseteq \mathbb{F}_p^*$ *tal que* $|A| \geq \frac{p+2}{3}$, *e suponha que existe* $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ *tal que* $\frac{a}{b} \neq \alpha$ *para quaisquer* $a, b \in A$. *Então*

$$D_A(C_p) = 3.$$

Teorema 2. *Seja* $A \subseteq \mathbb{F}_p^*$ *tal que* $|A| = t$, *onde* t *é um inteiro tal que* $1 < t < p$, *então*

$$D_A(C_p) \leq \left\lceil \frac{p}{t} \right\rceil.$$

Já o trabalho de Thangadurai, que pode ser encontrado em [30], aborda a constante de Davenport com peso para um p-grupo abeliano finito aditivo G. O artigo se resume no teorema abaixo e seus dois corolários.

Teorema 3. *Seja* $G \cong C_{p^{n_1}} \oplus \cdots \oplus C_{p^{n_l}}$, *onde* $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_l$ *são inteiros. Então para qualquer* $A \subseteq [1, p^{n_l}]$ *não vazio tal que os elementos de* A *são incongruentes módulo* p *e não nulos módulo* p, *temos*

$$D_A(G) \leq \left\lceil \frac{1}{|A|} \left(1 + \sum_{i=1}^{l} (p^{n_i} - 1) \right) \right\rceil.$$

Corolário 3.1. *Se* $G \cong C_p^r$, *onde* $r > 0$ *é inteiro. Então para qualquer* $A \subseteq [1, p-1]$ *não vazio, temos*

$$D_A(G) \leq \left\lceil \frac{1}{|A|} (r(p-1) + 1) \right\rceil.$$

Corolário 3.2. *Se* $G \cong C_p^r$, *onde* $r > 0$ *é inteiro. Se*

(1) $A = [1, p-1]$, *então* $D_A(G) = r + 1$;

(2) $A_1 = \{a \in [1, p-1] : a \equiv x^2 (mod\ p)$ *para algum* $x \in [1, p]\}$, *então* $D_{A_1}(G) = 2r + 1$;

(3) $A_2 = \{a \in [1, p-1] : a \not\equiv x^2 (mod\ p)$ *para todo* $x \in [1, p]\}$, *então* $D_{A_2}(G) = 2r + 1$;

(4) $A_3 = \{a \in [1, p-1] : \langle a \rangle = \mathbb{F}_p^*\}$, *então* $D_{A_3}(G) = 2r + 1$;

(5) $A_4 = \{a \in [1, p-1] : a \in A_2 \backslash A_3\}$, *então* $D_{A_4}(G) = 2r + 1$ *para todos primos* $p \neq 2^{2^m} + 1$ *para algum* $m \in \mathbb{N}$;

(6) $A_5 \subset [1, p-1]$ *tal que* $|A_5| = (p-1)/2$ *e se* $x \in A_5$, *então* $p - x \notin A_5$, *então* $D_{A_5}(G) = 2r + 1$;

(7) $A = [1, d] \subset [1, p]$ *e* $d \geq r$, *então*

$$D_A(G) \leq \left\lceil \frac{r(p-1)+1}{d} \right\rceil$$

.

Aqui $[a, b]$ representa o conjunto $\{a, a+1, \ldots, b\}$, para $a, b \in \mathbb{N}_0$, com $a < b$. Notação que será usada ao longo de todo trabalho apresentado nesta tese.

Do estudo da relação entre os invariantes E_A e D_A temos alguns resultados interessantes sendo que o de grande destaque é o seguinte: para $A \subseteq \mathbb{Z}$ e G um grupo abeliano finito aditivo Ordaz *et al* em [19] provaram que $E_A(G) = D_A(G) + |G| - 1$. Resultado que foi provado um pouco antes por Yuan e Zeng para $G = C_n$ em [33].

Para o invariante $E_A(G)$ temos alguns resultados. Como vimos anteriormente para $A = \{-1, 1\}$ temos que $E_A(C_n) = n + \lfloor \log_2 n \rfloor$. Em [6] Adhikari e Rath provaram que $E_A(C_p) = p+2$, onde A é o conjunto dos resíduos quadráticos módulo p. Outros resultados sobre o invariante $E_A(G)$ e $D_A(G)$ podem ser encontrados em [2], [4], [5], [31] e [32].

Para o leitor que deseja conhecer mais acerca da teoria de soma zero em grupos abelianos finitos, indicamos o artigo (survey) de Weidong Gao e Alfred Geroldinger que pode ser encontrado em [16]. Neste artigo são retratados vários invariantes para grupos abelianos finitos e seus problemas inversos relacionados.

Estrutura da tese

No Capítulo 1 apresentamos as definições dos invariantes juntamente com outras definições que serão necessárias. Generalizamos naturalmente a Proposição 3.1 de [8] para $A = \{-1, 1\}$. Como consequência desta proposição generalizada obtemos uma generalização para $A = \{-1, 1\}$ do Teorema 1.4 de [10]. Com estes resultados, damos uma demonstração para o teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv e para o Teorema 3 de [3], fazendo uso do famoso teorema de Chevalley-Warning. Neste capítulo, ainda, comentamos sobre vários resultados dos invariantes definidos.

No Capítulo 2 apresentamos um teorema que dá um limite superior e um limite inferior para $s_A(C_n^r)$, quando n é impar e $A = \{-1, 1\}$. Também, apresentamos vários resultados quando o expoente do grupo G é par. Os resultados obtidos neste capítulo são os seguintes.

Teorema 2.3. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $G = C_n^r$, n ímpar, temos $2^{r-1}(n-1)+1 \leq s_A(G) \leq (n^r - 1)\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$. Sendo que o limite superior vale com a seguinte restrição se $n = 3$, então $r \neq 1$.*

Sendo que neste teorema o limite inferior é atingido para os seguintes grupos C_n^2 (ver Teorema 3 de [3]), $C_{3^a}^3$, $a \in \mathbb{N}$ (ver Teorema 3.20).

Quando o expoente do grupo G é par maior que 2, obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.4. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $\exp(G) = n > 2$ par, temos que*

$$s_A(G) \leq g_A(G) + n - 2.$$

Este lema é usado como ferramenta para obter os seguintes resultados $s_A(C_4^2) = 8$ e $\eta_A(C_4^2) = 5$. Também, obtemos o seguinte resultado, que dá um limite inferior para $s_A(C_n^r)$ quando n é par.

Lema 2.6. *Para $A = \{-1, 1\}$, $n > 2$ par e $r \in \mathbb{N}$, temos que*

$$s_A(C_n^r) \geq n + r\left\lfloor \log_2 n \right\rfloor.$$

Este lema dá o limite inferior para $s_A(C_4^2) \geq 8$. Mas, pode ser melhorado para um r dado em função de n, isto pode ser visto com um comentário logo após sua demonstração.

Como consequência do Teorema 3 de [3], dos resultados do capítulo e da Proposição 1.6 do Capítulo 1, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 2.9. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos que*

(i) $2k + 2\left\lfloor \log_2 2k \right\rfloor \leq s_A(C_{2k}^2) \leq 4k + 1$, $(2, k) = 1$;

(ii) $4k + 2\left\lfloor \log_2 4k \right\rfloor \leq s_A(C_{4k}^2) \leq 8k$, $(4, k) = 1$;

(iii) $14 \leq s_A(C_8^2) \leq 19$;

(iv) $24 \leq s_A(C_{16}^2) \leq 36$.

No Capítulo 3 tratamos especialmente do caso em que $G = C_3^r$ e $A = \{-1, 1\}$. Aproveitando o fato de C_3^r ser um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_3$, obtemos vários resultados para os invariantes $s_A(C_3^r)$, $g(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$. Eles estão listados abaixo.

Lema 3.1. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $G = C_3^r$, temos $\eta_A(G) \geq 2^{r-1} + 1$.*

Para $r > 4$ ímpar, conseguimos uma melhora que esta na proposição abaixo.

Lema 3.2. *Se r é ímpar e $r \geq 5$ então $\eta_A(C_3^r) \geq 2^{r-1} + \binom{r-1}{\delta}$, onde*

$$\delta = \delta(r) = \begin{cases} \frac{(r-3)}{2} & se\ r \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{(r-5)}{2} & se\ r \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Também, obtemos dois importantes resultados envolvendo $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$.

Teorema 3.4. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos*

(i) $s_A(C_3) = g_A(C_3) + 1 = 4$;

(ii) $s_A(C_3^2) = g_A(C_3^2) = 5$;

(iii) $s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r)$, *com* $r \geq 3$.

Teorema 3.5. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos*

$$g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r) - 1,\ para\ r \geq 1.$$

Próximo ao fim do capítulo conseguimos dois resultados para $\eta_A(C_3^r)$, um que fornece um limitante superior para $\eta_A(C_3^r)$, outro que fornece valores exatos para $\eta_A(C_3^r)$ quando $r \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Proposição 3.18. *Se $A = \{-1, 1\}$ e $r \geq 4$, então*

$$\eta_A(C_3^r) \leq 4 + \binom{r}{3} + \sum_{j=4}^{r} 2^{j-2} \binom{r}{j}.$$

Proposição 3.19. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos*

(i) $\eta_A(C_3) = 2$;

(ii) $\eta_A(C_3^2) = 3$*;*

(iii) $\eta_A(C_3^3) = 5$*;*

(iv) $\eta_A(C_3^4) = 11$*.*

Por fim temos o principal teorema do capítulo que é consequência de todos os resultados anteriores.

Teorema 3.6. *Se* $A = \{-1, 1\}$ *e* $r \geq 5$*, então*

$$2^r + 1 \leq s_A(C_3^r) \leq 7 + 2\binom{r}{3} + \sum_{j=4}^{r} 2^{j-1}\binom{r}{j},$$

e para r *ímpar então*

$$s_A(C_3^r) \geq \begin{cases} 2^r + 2\binom{r-1}{\frac{r-3}{2}} - 1 & se\ r \equiv 1 (mod 4) \\ 2^r + 2\binom{r-1}{\frac{r-5}{2}} - 1 & se\ r \equiv 3 (mod 4) \end{cases}.$$

Em particular, $s_A(C_3) = 4$*,* $s_A(C_3^2) = 5$*,* $s_A(C_3^3) = 9$ *e* $s_A(C_3^4) = 21$*.*

Ainda, neste capítulo, obtemos um resultado para $s_A(C_{3^a}^3)$, com $a \in \mathbb{N}$, usando resultados do Capítulo 3, do Capítulo 1 e do Capítulo 2.

Teorema 3.20. *Seja* $A = \{-1, 1\}$*. Então*

$$s_A(C_{3^a}^3) = 4 \cdot 3^a - 3,$$

onde $a \in \mathbb{N}$*.*

Na última seção do Capítulo 3 obtemos uma melhora para o limite inferior de $\eta_A(C_3^r)$, com $A = \{-1, 1\}$ e $r > 4$ par. Os resultados são distribuídos em cinco lemas. A saber,

Lema 3.21. *Para* $A = \{-1, 1\}$*,* $r \in A_1 = \{6, 14, 22, 30, 38 \ldots\}$ *e* $t = \frac{r-2}{4}$*, temos* $\eta_A(C_3^r) \geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3t \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-2}{2}} + 1$*.*

Lema 3.22. *Para* $A = \{-1, 1\}$, $r \in A_2 = \{10, 18, 26, 34, 42, 50, 58, \dots\}$ *e* $t = \frac{r-2}{4}$, *temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq j \leq 3t-1 \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-2}{2}} + 1.$

Lema 3.23. *Para* $A = \{-1, 1\}$, $r \in A_3 = \{12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, \dots\}$ *e* $t = \frac{r}{4}$, *temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq j \leq 3t-2 \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-4}{2}} + 1.$

Lema 3.24. *Para* $A = \{-1, 1\}$, $r \in A_4 \backslash A_5$ *e* $t = \frac{r}{4}$, *onde* $A_4 = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots\}$ *e* $A_5 = \{8, 16, 32, 64, 128 \dots\}$, *temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq j \leq 3t-3 \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-4}{2}} + 1.$

Lema 3.25. *Para* $A = \{-1, 1\}$, $r \in A_5 = \{8, 16, 32, 64, 128 \dots\}$ *e* $t = \frac{r}{4}$, *temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq j \leq 3t-1 \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \frac{\binom{r}{\frac{r}{2}}}{2} + 1.$

Capítulo 1

Algumas definições e resultados sobre problemas de soma zero

Estamos interessados em estudar sequências finitas de elementos de um grupo abeliano finito G com propriedades específicas. E para facilitar a descrição começaremos com algumas definições e notações que serão usadas ao longo de todo trabalho.

Seja G um grupo abeliano finito aditivo, com $|G| > 1$, ou seja, $G = C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$, com $1 < n_1 | n_2 | \ldots | n_r = n$, onde $n = \exp(G)$ e $r = posto(G)$. Se $G = \langle e_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_r \rangle$ dizemos que $\{e_1, \ldots, e_r\}$ é uma base de G.

Uma sequência S de elementos de G será $g_1, \ldots, g_l$, com $g_i \in G$, para todo $i \in [1, l]$. E como foi colocado na introdução deste trabalho $[1, l] = \{1, \ldots, l\}$. Para facilitar a notação vamos escrever S como um produto formal $S = \prod_{i=1}^{l} g_i$. Assim,

$$S = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)} = \prod_{i=1}^{l} g_i,$$

onde $v_g(S)$ é chamado a multiplicidade de g em S. Com esta notação dizemos que se $v_g(S) \leq 1$, para todo $g \in G$ então S é uma sequência livre de quadrados.

O conjunto de todas as sequências, que denotamos por $\mathcal{F}(G)$, é um monoide abeliano, onde a multiplicação de duas sequências $S = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)}$ e $S' = \prod_{g \in G} g^{v_g(S')}$ é dada por

$$S \cdot S' = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)+v_g(S')}.$$

Aqui lembraremos a definição de monoide e veremos que $\mathcal{F}(G)$ satisfaz esta definição.

Definição 1.1. Um monoide K é um conjunto munido de uma operação binária $*$ para a qual valem as seguintes propriedades:

1. Fechamento: dado $a, b \in K$, $a * b \in K$;
2. Associatividade: para todos $a, b, c \in K$ vale $(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$;
3. Existência do elemento neutro: existe um único e tal que para todo $a \in K$, vale $a * e = a = e * a$.

Claramente o conjunto $\mathcal{F}(G)$ satisfaz 1 e 2 e considerando a sequência vazia como o elemento neutro, $\mathcal{F}(G)$ satisfaz a condição 3. Assim, podemos dizer que uma sequência S' é uma subsequência de $S \in \mathcal{F}(G)$, e escrevemos $S'|S$, se existir uma sequência $S'' \in \mathcal{F}(G)$ tal que $S = S' \cdot S''$, ou seja, $v_g(S') \leq v_g(S)$ para todo $g \in G$. Também definimos o comprimento de uma sequência como $\ell \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|S| = \sum_{g \in G} v_g(S) = \ell \in \mathbb{N}_0,$$

onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definição 1.2. Para $A \subseteq \mathbb{Z}$ e $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$, definimos

$$\sigma_A(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} a_i g_i, \ \ a_i \in A \right\}.$$

Se $0 \in \sigma_A(S)$, cuja soma está em G, dizemos que S é uma sequência A-soma zero.

Observação 1.3. A multiplicação de g_i por a_i é a multiplicação usual por escalar, ou seja, $a_i g_i = a_i(x_1, \ldots, x_r) = (a_i x_1, \ldots, a_i x_r)$.

Definição 1.4. Sejam G um grupo abeliano finito, $A \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n = \exp(G)$. Definimos

(i) $\eta_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência $S \in \mathcal{F}(G)$, $|S| \geq \ell$, satisfaz a condição (η_A), onde a condição (η_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que o comprimento de T é no máximo igual a n e T é uma sequência A-soma zero.

(ii) $D_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência $S \in \mathcal{F}(G)$, $|S| \geq \ell$, satisfaz a condição (D_A), onde a condição (D_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que T é uma sequência A-soma zero.

(iii) $g_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência livre de quadrados $S \in \mathcal{F}(G)$, $|S| \geq \ell$, satisfaz a condição (g_A), onde a condição (g_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que o comprimento de T é igual a n e T é uma sequência A-soma zero.

(iv) $s_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência $S \in \mathcal{F}(G)$, $|S| \geq \ell$, satisfaz a condição (s_A), onde a condição (s_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que o comprimento de T é igual a n e T é uma sequência A-soma zero.

(v) $E_A(G)$ como o menor ℓ tal que toda sequência $S \in \mathcal{F}(G)$, $|S| \geq \ell$, satisfaz a condição (E_A), onde a condição (E_A) significa que existe uma subsequência T de S tal que o comprimento de T é igual a ordem de G e T é uma sequência A-soma zero.

Aqui observamos que para o grupo em que $|G| = \exp(G)$, tem-se $E_A(G) = s_A(G)$. É importante lembrar que se $\exp(G) = n$ então $g + \cdots + g = n \cdot g = 0$, para qualquer $g \in G$.

1.1 Resultados para os invariantes $\eta_A(G)$, $D_A(G)$, $s_A(G)$ e $E_A(G)$

Quando $A = \{1\}$ e $G = C_n^r$, existem vários resultados sobre o problema. Quando $A = \{1\}$ denotaremos $s_A(G)$ simplesmente por $s(G)$. Vejamos alguns resultados para este caso.

O primeiro resultado é o famoso teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv que pode ser encontrado em [13]; este teorema mostra que $s(C_n) = 2n - 1$. Uma versão deste teorema com peso pode ser encontrado em [18]. Faremos aqui uma demonstração do teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv, mas antes demonstraremos alguns resultados que são generalizações naturais de resultados já existentes.

O primeiro é uma generalização de um resultado para um grupo abeliano finito G e $A = \{-1, 1\}$. Este resultado foi provado para o caso $A = \{1\}$ em [8] por Gao, na Proposição 3.1.

Para grupos abelianos finitos aditivos H, G e uma função $f : G \to H$, definiremos uma função de $\mathcal{F}(G)$ em $\mathcal{F}(H)$ por $f(S) = \prod_{i=1}^{\ell} f(g_i)$ para toda sequência $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i \in \mathcal{F}(G)$, fazendo um abuso de notação usaremos o mesmo símbolo para denotar estas funções.

Lema 1.5. *Sejam $A \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, G um grupo abeliano finito e f um homomorfismo. Então $0 \in \sigma_A(f(S))$ em G se, e só se, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} a_i(g_i) \in ker(f)$, onde $S \in \mathcal{F}(G)$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} a_i(g_i) \in \sigma_A(S)$.*

Demonstração: Segue diretamente da igualdade.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{\ell} a_i f(g_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^{\ell} a_i g_i). \end{aligned}$$

■

Proposição 1.6. *Sejam G um grupo abeliano finito, $A = \{1\}$ ou $A = \{-1, 1\}$, $H \leq G$ e $S \in \mathcal{F}(G)$, com $|S| \geq (s_A(H) - 1)\exp(G/H) + s_A(G/H)$. Então S tem uma subsequência T tal que $0 \in \sigma_A(T)$, cuja soma é feita em G e $|T| = \exp(H)\exp(G/H)$. Em particular, se $\exp(G) = \exp(H)\exp(G/H)$, então*

$$s_A(G) \leq (s_A(H) - 1)\exp(G/H) + s_A(G/H).$$

Demonstração: Seja $\phi : G \to G/H$ o epimorfismo canônico, dado por $\phi(g) = g + H$ para cada $g \in G$. De $|\phi(S)| = |S|$ e $|S| \geq s_A(G/H)$ segue que $\phi(S)$ possui uma subsequência $\phi(S_1)$ com $|S_1| = \exp(G/H)$ e $0 \in \sigma_A(\phi(S_1))$, cuja soma é feita em G/H. Resta, ainda, uma subsequência com tamanho maior ou igual a $(s_A(H) - 2)\exp(G/H) + s_A(G/H)$. De novo, repetimos este procedimento para obter mais uma subsequência $\phi(S_2)$ com $|S_2| = \exp(G/H)$ e $0 \in \sigma_A(\phi(S_2))$, cuja soma é feita em G/H. Ainda resta uma subsequência com tamanho maior ou igual a $(s_A(H) - 3)\exp(G/H) + s_A(G/H)$.

Após repetirmos este procedimento $s_A(H) - 1$ vezes obteremos esta quantidade de subsequências disjuntas aos pares, $\phi(S_i), 1 \leq i \leq s_A(H) - 1$, com $|S_i| = \exp(G/H)$, $0 \in \sigma_A(\phi(S_i))$, cuja soma é feita em G/H, e restará uma subsequência com tamanho maior ou igual a $s_A(G/H)$. Mais uma vez, aplicamos o procedimento anterior para obter uma sequência $\phi(S_{s_A(H)})$, com $|S_{s_A(H)}| = \exp(G/H)$, $0 \in \sigma_A(\phi(S_{s_A(H)}))$, cuja soma é feita em G/H, a qual é disjunta das anteriormente obtidas.

Sejam $a_{j1}g_{j1}+\cdots+a_{jk}g_{jk} \in \sigma_A(S_j)$ e $W = \prod_{j=1}^{s_A(H)}(a_{j1}g_{j1}+\cdots+a_{jk}g_{jk})$, com $\phi(a_{j1}g_{j1}+\cdots+a_{jk}g_{jk}) = 0 \in \phi(\sigma_A(S_j)) = \sigma_A(\phi(S_j))$, cuja soma é feita em G/H. Assim, temos pelo Lema 1.5, que $W \in \mathcal{F}(ker(\phi))$. Mas, $ker(\phi) = H$ e assim W tem uma subsequência $W' = \prod_{j\in I}(a_{j1}g_{j1} + \cdots + a_{jk}g_{jk})$, $I \subseteq [1, s_A(H)]$ tal que $0 \in \sigma_A(W')$, cuja soma é feita em H e $|I| = \exp(H)$. Assim,

$$W' = \prod_{j\in I}(a_{j1}g_{j1} + \cdots + a_{jk}g_{jk}),$$

onde $k = \exp(G/H)$ e

$$\sum_{j\in I} b_j(a_{j1}g_{j1} + \cdots + a_{jk}g_{jk}) = b_1a_{11}g_{11} + \cdots + b_1a_{1k}g_{1k} + \cdots + b_sa_{s1}g_{s1} + \cdots + b_sa_{sk}g_{sk} = 0$$

em H, onde $s = \exp(H)$. Logo, a sequência $S'|S$, $S' = \prod_{j\in I} S_j$ tem tamanho $|S'| = \exp(G/H)\exp(H)$ e $0 \in \sigma_A(S')$, cuja soma é feita em G, com os b_ja_{ji}'s pertencentes a A, já que A é fechado para multiplicação. Em particular, se $\exp(G) = \exp(H)\exp(G/H)$, então

$$s_A(G) \leq (s_A(H) - 1)\exp(G/H) + s_A(G/H),$$

pela definição de $s_A(G)$. ∎

Na próxima proposição particularizaremos o grupo G, mas generalizaremos o peso A. Aqui cabe a observação que agora a ação sobre o grupo não é mais de um subconjunto fechado para a multiplicação A de $\mathbb{Z}$ e sim de um subgrupo do grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}_k)^*$.

Proposição 1.7. *Sejam $G = C_k^r$, $A \leq (\mathbb{Z}_k)^*$ (A é subgrupo de $(\mathbb{Z}_k)^*$), onde k é um número natural composto, $r \in \mathbb{N}$, $H \leq G$ e $S \in \mathcal{F}(G)$, com $|S| \geq (s_A(H) - 1)\exp(G/H) + s_A(G/H)$. Então S tem uma subsequência T tal que $0 \in \sigma_A(T)$, cuja soma é feita em G e $|T| = \exp(H)\exp(G/H)$. Em particular, se $\exp(G) = \exp(H)\exp(G/H)$, então*

$$s_A(G) \leq (s_A(H) - 1)\exp(G/H) + s_A(G/H).$$

Demonstração: A prova é idêntica a da Proposição 1.6 observando que $A \leq (\mathbb{Z}_k)^*$ é fechado para multiplicação. ∎

Como consequência imediata da proposição anterior, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.8. *Sejam $A \leq (\mathbb{Z}_{nm})^*$ e o grupo C_{nm}^r, com $m, n, r \in \mathbb{N}$, então*

$$s_A(C_{mn}^r) \leq \min\{(s_A(C_m^r) - 1)n + s_A(C_n^r), (s_A(C_n^r) - 1)m + s_A(C_m^r)\}.$$

Demonstração: Sejam $G \cong C_{nm}^r$, $C_n^r \cong H \leq G$ e $C_m^r \cong K \leq G$. Como $G/H \cong K$, $G/K \cong H$, $\exp(H) = n$ e $\exp(K) = m$, então $\exp(G) = \exp(H)\exp(K)$. Pela Proposição 1.7, segue que

$$s_A(C_{mn}^r) \leq (s_A(C_m^r) - 1)n + s_A(C_n^r) \quad \text{e} \quad s_A(C_{mn}^r) \leq (s_A(C_n^r) - 1)m + s_A(C_m^r).$$

∎

E ainda conseguimos o seguinte corolário.

Corolário 1.9. *Sejam $G = C_n^r$ e $A \leq (\mathbb{Z}_n)^*$. Se $s_A(C_p^r) \leq c(p-1) + 1$ para todo $p|n$ primo, então $s_A(G) \leq c(n-1) + 1$.*

Demonstração: Procederemos por indução sobre o $exp(G)$. Se $\exp(G) = p$ primo, então $G = C_p^r$ e a afirmação se verifica por hipótese.

Seja p um divisor de n, e seja $m = \frac{n}{p}$. Considere os grupos

$$pG \cong C_m^r \text{ e } \frac{G}{pG} \cong C_p^r.$$

Observe que podemos ter $m = 1$, mas em qualquer caso pela hipótese de indução temos que

$$s_A(pG) \leq c(m-1) + 1.$$

Pela Proposição 1.7 (com $H = pG$), vemos que

$$\begin{aligned} s_A(G) &\leq (s_A(H) - 1)\exp(G/H) + s_A(G/H) \\ &\leq (c(m-1) + 1 - 1)p + c(p-1) + 1 \\ &\leq c(n-1) + 1 \end{aligned}$$

E assim concluímos a demonstração deste corolário. ∎

O resultado seguinte foi provado por Edel *et al* para $A = \{1\}$ no Teorema 1.4 em [10]. Aqui faremos para $A = \{1\}$ ou $A = \{-1, 1\}$.

Teorema 1.10. *Sejam* $G = C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$*, como no início da seção e* $A = \{1\}$ *ou* $A = \{-1, 1\}$*. Sejam* $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{N}$ *tais que para todos os primos* p *divisores de* n_r *e todos* $i \in [1, r]$*, temos* $s_A(C_p^i) \leq c_i(p-1) + 1$*. Então*

$$s_A(G) \leq \sum_{i=1}^{r} (c_{r+1-i} - c_{r-i})n_i - c_r + 1, \text{ onde } c_0 = 0.$$

Demonstração: Procederemos por indução sobre o $\exp(G)$. Se $\exp(G) = p$ primo, então $G = C_p^r$ e a afirmação se verifica por hipótese.

Seja p um divisor de n_1, $p < n_r$, e seja $m_i = \frac{n_i}{p}$ para $i \in [1, r]$. Considere os grupos

$$pG \cong C_{m_1} \oplus \cdots \oplus C_{m_r} \text{ e } \frac{G}{pG} \cong C_p^r.$$

Observe que podemos ter $m_1 = 1$, mas em qualquer caso pela hipótese de indução temos que

$$s_A(pG) \leq \sum_{i=1}^{r} (c_{r+1-i} - c_{r-i})m_i - c_r + 1.$$

Pela Proposição 1.6 (com $H = pG$), vemos que

$$\begin{aligned} s_A(G) &\leq (s_A(H) - 1)\exp(G/H) + s_A(G/H) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{r} (c_{r+1-i} - c_{r-i})m_i - c_r + 1 \right) p + c_r(p-1) + 1 \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} (c_{r+1-i} - c_{r-i})n_i - c_r + 1 \end{aligned}$$

∎

De posse do Corolário 1.9, observamos que para provar o teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv basta provarmos que $s(C_p) \leq 2p-1$, com $p|n$ e encontrarmos uma sequência de tamanho $2n-2$ que não satisfaz a condição (s_A) para $A = \{1\}$ e esta é $S = 0^{n-1}1^{n-1}$. Para provarmos que $s(C_p) \leq 2p-1$ usaremos o famoso teorema de Chevalley-Warning, que está enunciado abaixo, sem demonstração.

Teorema 1.11. *(*Chevalley-Warning*). Sejam $f_i(x_1, \ldots, x_m)$, com $i \in [1,t]$ polinômios em m variáveis sobre um corpo finito $\mathbb{F}_q$ de q elementos, onde $q = p^s$ para p primo e $s \in \mathbb{N}$. Se $m > \sum_{i=1}^{t} \partial f_i$, onde ∂f_i é o grau de f_i, então o número de soluções N do sistema formado pelos f_i satisfaz $N \equiv 0 (mod\ p)$.*

Para uma sequência $S = \prod_{i=1}^{m} a_i \in \mathcal{F}(C_p)$, onde $m = 2p-1$ considere o seguinte sistema de equações em m variáveis sobre $\mathbb{F}_p$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^{p-1} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i^{p-1} = 0 \end{cases}$$

Como $2(p-1) < 2p-1 = m$ segue pelo teorema de Chevalley-Warning que $N \equiv 0(\text{mod } p)$, ou seja, temos solução diferente da trivial. Agora, se considerarmos $J \subset [1,m]$ o conjunto de todos os índices das entradas não nulas desta solução, temos pela segunda equação que $|J| = p$. Assim, na primeira equação temos

$$\sum_{i \in J} a_i = 0, \text{ em } C_p.$$

Isto mostra que $s(C_p) \leq 2p-1$ e consequentemente temos o teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv.

Para grupos de posto 2 temos o resultado que foi obtido em 2003 por C. Reiher, publicado somente em 2007 e pode ser encontrado em [29]; ele mostrou que $s(C_n^2) = 4n-3$. Resolvendo uma conjectura feita por Kemnitz em 1983.

A demosnstração feita por C. Reiher é extensa e não repetiremos aqui, mas basicamente ele obteve cinco corolários do teorema de Chevalley-Warning e como consequência destes corolários ele obteve o resultado.

Para grupos de posto 3 temos o resultado que foi provado em 2007 por Gao *et al* e pode ser encontrado em [17]; eles provaram que $\eta(C_n^3) + n - 1 = s(C_n^3) = 9n - 8$, se $n = 3^a \cdot 5^b$, $a, b \in \mathbb{N}_0$ e $\eta(C_n^3) + n - 1 = s(C_n^3) = 8n - 7$, se $n = 2^a \cdot 3$, $a \in \mathbb{N}$. E do artigo que contém estes resultados surgiu a seguinte conjectura:

$$s(C_n^3) = \begin{cases} 9n - 8 & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ 8n - 7 & \text{se} \quad n \text{ é par} \end{cases}$$

Aqui cabe a observação de que para o caso $s(C_n^3)$ houve separação entre n par e n ímpar diferente dos casos anteriores que valem para todo $n > 1$. Neste artigo mudou-se a forma de se obter os resultados. Foram usados métodos geométricos, mas precisamente os resultados foram obtidos através da relação de $s(C_3^r)$ com o problema de caps maximais em geometria finita (um cap maximal é o maior subconjunto de $AG(r, q)$ que não possui três pontos colineares, $AG(r, q)$ é a parte afim do espaço projetivo $PG(r, q)$ sobre $\mathbb{F}_q$), isto foi possível devido ao resultado obtido por Harborth em [20] no Lema 3, onde ele prova que $s(C_3^r) = 2g(C_3^r) - 1$. No trabalho de Gao *et al* eles usaram o seguinte resultado: uma sequência S que não satisfaz a condição (g_A), onde $A = \{1\}$, tal que $|S| = g(C_3^r) - 1$ é um cap maximal em $AG(r, 3)$, onde $AG(r, 3)$ representa a parte afim do espaço projetivo $PG(r, 3)$. Também foram obtidos resultados relacionados com caps para $s(C_5^r)$. A grande dificuldade deste método é estudar caps quando r é muito grande, pois para $r > 5$ ainda não se tem o valor exato de caps maximais em $AG(r, 3)$.

Para grupos de posto quatro temos o resultado que foi obtido em 2007 por Edel *et al* e pode ser encontrado em [10]; eles provaram que $s(C_n^4) \geq 20n - 19$, para n ímpar e a igualdade vale se $n = 3^a$, $a \in \mathbb{N}$. Em [11] Edel provou que $s(C_n^5) \geq 42n - 41$, $s(C_n^6) \geq 96n - 95$ e $s(C_n^7) \geq 196n - 195$, para n ímpar. Este artigo foi publicado em 2008. Ambos os artigos seguem as idéias de se usar caps.

Quando $A = \{-1, 1\}$ e $G = C_n^r$ temos alguns resultados recentes.

Em [1] Adhikari *et al* provaram no Teorema 1.1 que $E_A(C_n) = s_A(C_n) = n + \lfloor \log_2 n \rfloor$ (este é o teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv com peso $A = \{-1, 1\}$) e $D_A(C_n) = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$, onde para um número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x. O que mostra que $E_A(C_n) = D_A(C_n) + n - 1$. Isto foi feito em 2006. Devido a ser um trabalho extenso, também não repetiremos a demonstração deste resultado aqui.

Em [3] Adhikari *et al* provaram no Teorema 3 que $s_A(C_n^2) = 2n - 1$, para n ímpar. Isto foi feito em 2008. Por não ser extenso repetiremos aqui a demonstração deste resultado, ressaltando que usaremos o Corolário 1.9.

Primeiramente observamos que a sequência $S = (1,0)^{n-1}(0,1)^{n-1}$ não satisfaz a condição (s_A), pois n é ímpar. Assim, $s_A(C_n^2) \geq 2n-1$. Resta provar a desigualdade contrária. Pelo Corolário 1.9 basta provarmos que $s_A(C_p^2) \leq 2p-1$, com $p|n$. Assim, seja $S = \prod_{i=1}^{m}(b_i, c_i) \in \mathcal{F}(C_p^2)$, onde $m = 2p-1$, e considere o seguinte sistema de equações em m variáveis sobre $\mathbb{F}_p$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} b_i x_i^{\frac{p-1}{2}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{\frac{p-1}{2}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^{p-1} = 0 \end{cases}$$

Como $2(p-1) < 2p-1 = m$ segue pelo teorema de Chevalley-Warning que $N \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, ou seja, temos solução diferente da trivial. Agora, se considerarmos $J \subset [1, m]$ o conjunto de todos os índices das entradas não nulas desta solução, temos pela terceira equação que $|J| = p$. Assim, nas duas primeiras equações temos

$$\sum_{i \in J} a_i(b_i, c_i) = (0,0), \text{ em } C_p^2,$$

onde $a_i \in A = \{-1, 1\}$. E, portanto temos que $s_A(C_p^2) \leq 2p-1$. Este é o Teorema 3 de [3].

Do estudo da relação entre os invariantes E_A e D_A temos alguns resultados interessantes sendo que o de grande destaque é o seguinte: para $A \subseteq \mathbb{Z}$ e G um grupo abeliano finito aditivo Ordaz *et al* em [19] provaram que $E_A(G) = D_A(G) + |G| - 1$. Resultado que foi provado um pouco antes por Yuan e Zeng para $G = C_n$ em [33].

Faremos, agora, algumas observações acerca destes invariantes quando $A = \{-1, 1\}$. É fácil ver que $s_A(G) \geq \eta_A(G) + n - 1$ e $s_A(G) \geq D_A(G) + n - 1$, onde $n = \exp(G)$, isto pode ser visto na demonstração do Corolário 2.8. Com isto temos que $s_A(C_n) \geq \eta_A(C_n) + n - 1$ e uma análise da sequência $12 \cdots 2^s$, com s definido como $2^{s+1} \leq n < 2^{s+2}$ fornece-nos uma sequência que não satisfaz a condição (η_A), portanto $\eta_A(C_n) \geq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ e pelo resultado de Adhikari *et al* em [1] temos que $s_A(C_n) = n + \lfloor \log_2 n \rfloor$, concluímos que $\eta_A(C_n) = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = D_A(C_n)$, para $A = \{-1, 1\}$. Sabemos que nem sempre teremos $D_A(G) = \eta_A(G)$, mas é interessante procurarmos grupos G para os quais isto acontece.

Ao longo deste trabalho veremos que $s_A(G) = \eta_A(G)+n-1$, para $G = C_2^r$ e para $G = C_4^2$. Daí, surge a pergunta: será que $s_A(C_n^r) = \eta_A(C_n^r) + n - 1$, sempre que $n \geq 2$ for par?

Agora, do Teorema 3 de [3] temos que $s_A(C_n^2) = 2n - 1$, para n ímpar, e que $s_A(G) \geq \eta_A(G) + n - 1$, onde $n = \exp(G)$, obtemos que $\eta_A(C_n^2) \leq n$. Daí, para $n = 3, 5$ consideramos, respectivamente, as sequências $S_1 = (1, 0)(0, 1)$ e $S_2 = (1, 0)(0, 1)(2, 0)(0, 2)$ que não satisfazem as condições (η_A) respectivas. Logo, $\eta_A(C_n^2) = n$, para $n = 3, 5$ e portanto vale $s_A(G) = \eta_A(G) + n - 1$ nestes casos. Fato curioso é que para $A = \{-1, 1\}$, tem-se $D_A(C_2^2) = 3$ e $\eta_A(C_2^2) = 4$. Como $s_A(C_2^2) = 5$, vale $s_A(G) = \eta_A(G) + n - 1$ neste caso. Já para o invariante E_A temos $E_A(C_2^2) = D_A(C_2^2)+2^2-1 = 6$, quando $A = \{-1, 1\}$.

Capítulo 2

Limitantes para $s_A(G)$, quando $A = \{-1, 1\}$ e resultados relacionados

A partir daqui, concentramos nossos estudos no caso em que $A = \{-1, 1\}$ e procuramos limites para os invariantes $\eta_A(G), g_A(G)$ e $s_A(G)$. Começaremos nosso estudo para o caso em que $G = C_n^r$, onde n é impar. Depois encontraremos um limite superior para $s_A(G)$ em função de $g_A(G)$, quando $\exp(G) = n$ é par. Deste resultado obteremos o valor exato de $s_A(C_4^2)$ e consequências.

2.1 Limite inferior para $s_A(C_n^r)$, com $A = \{-1, 1\}$

Começamos com algumas notações e definições, para tanto seja $G = C_n^r$, com n ímpar e $r \in \mathbb{N}$. Vamos considerar a base canônica de C_n^r, ou seja, $\{e_1, \ldots, e_r\}$, onde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_r = (0, \ldots, 0, 1)$. Definimos $e_I = \sum_{i \in I} e_i$, onde $1 \leq |I| \leq r$ e $|I|$ ímpar. Denotamos por $\mathcal{I}_m$ o conjunto de todos subconjuntos de $[1, r]$ de cardinalidade ímpar e no máximo igual a m.

Exemplo 2.1. Se $I = \{i\}$, então $e_I = e_i$, para $1 \leq i \leq r$.
Se $I = \{1, 2, 3\}$, então $e_I = (1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$.
Se $I = \{1, 5, 6\}$, então $e_I = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$.

Apresentaremos, agora, um Lema que estima o tamanho da sequência $U = \prod_{I \in \mathcal{I}_r} e_I^{n-1}$.

Lema 2.2. *Para* $U = \prod\limits_{I \in \mathcal{I}_r} e_I^{n-1}$, *temos a seguinte igualdade:*

$$|U| = 2^{r-1}(n-1).$$

Demonstração: Segue das seguintes expansões binomiais:

$$2^r = (1+1)^r = \sum_{i=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} \text{ e } 0^r = (1-1)^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix},$$

pois teremos $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \in 2\mathbb{Z}+1}} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \in 2\mathbb{Z}}} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix}$. Daí,

$$2^r = 2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \in 2\mathbb{Z}+1}} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 2.3. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $G = C_n^r$, n ímpar, temos $2^{r-1}(n-1) + 1 \leq s_A(G) \leq (n^r - 1)\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$. Sendo que o limite superior vale com a seguinte restrição se $n = 3$, então $r \neq 1$.*

Demonstração: Provaremos primeiramente o limite superior. Sabemos que para n ímpar sempre temos $g \neq -g$ para todo $g \in C_n^r$, com $g \neq 0$. Assim, se em S não aparece o zero de C_n^r, então pelo Princípio da Casa dos Pombos temos que $v_g(S) + v_{-g}(S) \geq n$, onde $|S| = (n^r - 1)\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$, e portanto S satisfaz a condição (s_A), visto que teremos $g + \cdots + g + (-1) \cdot ((-g) + \cdots + (-g)) = n \cdot g = 0$. Se em S aparece o zero, temos o seguinte: $v_0(S) = x$, onde $x \in [1, n-1]$. Separamos em dois casos.

Caso 1: Se x é par, então $n - (x-1)$ é par, pois n é ímpar. Suponhamos que para todos $g, -g \in S$ temos que $v_g(S) + v_{-g}(S) \leq n - (x-1) - 1 = n - x$. Assim, $|S| \leq (n^r - 1)\left(\frac{n-x}{2}\right) + x$. Mas, por hipótese temos que $|S| = (n^r - 1)\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$. Daí, resulta que $n^r - 1 \geq \frac{2(x-1)}{x-1}$, e isto implica $n^r - 1 \geq 2$. Mas, a igualdade só se verifica quando $n = 3$ e $r = 1$. Logo, existem $g, -g \in S$ tais que $v_g(S) + v_{-g}(S) \geq n - (x-1)$ e portanto $T = 0^{x-1}T_1$, onde T_1 é a subsequência de S formada por g e $-g$ que satisfazem $v_g(S) + v_{-g}(S) = n - (x-1)$, é uma subsequência A-soma zero de S com comprimento n.

Caso 2: Se x é ímpar, então $n - x$ é par, pois n é ímpar. Suponhamos que para todos $g, -g \in S$ temos que $v_g(S) + v_{-g}(S) \leq n - x - 1$. Assim, $|S| \leq (n^r - 1)\left(\frac{n-x-1}{2}\right) + x$. Mas, por hipótese temos que $|S| = (n^r - 1)\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$. Daí, resulta que $n^r - 1 \geq \frac{2(x-1)}{x}$, e isto dá-nos $n^r - 1 > 1$ e isto se verifica para todo $n \geq 3$ e $r \geq 1$, já que a igualdade nunca acontece pois $\frac{2(x-1)}{x}$ não é inteiro. Logo, existem $g, -g \in S$ tais que $v_g(S) + v_{-g}(S) \geq n - x$ e portanto $T = 0^x T_1$, onde T_1 é a subsequência de S formada pelos g e $-g$ que satisfazem $v_g(S) + v_{-g}(S) = n - x$, é uma subsequência A-soma zero de S com comprimento n.

Agora, provaremos o limite inferior. Pelo Lema 2.2, temos que a sequência $U = \prod_{I \subseteq [1,r]} e_I^{n-1}$, com $1 \leq |I| \leq r$ e $|I|$ ímpar, tem tamanho $2^{r-1}(n-1)$. Assim, basta mostrar que esta sequência não satisfaz a condição (s_A). Então vamos supor o contrário, ou seja, existe $U'|U$, $U' = \prod_{i=1}^{n} e_{I_i}$ tal que $\sigma_A(U') = 0$ em C_n^r e I_i é algum dos I's que aparecem em U. Vamos escrever $e_{I_j} = g_j$ para facilitar na notação. Agora, podemos escrever $\sigma_A(U') = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, onde $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = n$, para $i \in [1, r]$, pois nas coordenadas dos elementos de U' só aparecem 0 ou 1. Vamos separar a análise em dois casos.

Caso 1 : Suponha que $\alpha_i = n$, para algum $i \in [1, r]$. Assim, para cada $g_j = (a_{1j}, \ldots, a_{rj})$ temos a seguinte soma

$$\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j g_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, n, \alpha_{i+1} \ldots, \alpha_r),$$

onde $\epsilon_j \in A$ e podemos observar que todos $a_{ij} = \epsilon_j = 1$, para todo $j \in [1, n]$. Como $\epsilon_j = 1$, para todo $j \in [1, n]$, segue que só vamos ter $\alpha_s = 0$ ou $\alpha_s = n$, $s \neq i$ se todos g_j de U' forem iguais, pois de outra forma vamos ter algum α_s assumindo algum valor entre 0 e n. Daí, temos uma contradição, pois cada g_j aparece em U' no máximo $n - 1$ vezes.

Caso 2 : Para todo $i \in [1, r]$ temos $\alpha_i = 0$. Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \epsilon_1 a_{11} + \epsilon_2 a_{12} + \cdots + \epsilon_n a_{1n} & = & 0 \\ \epsilon_1 a_{21} + \epsilon_2 a_{22} + \cdots + \epsilon_n a_{2n} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon_1 a_{r1} + \epsilon_2 a_{r2} + \cdots + \epsilon_n a_{rn} & = & 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\epsilon_j \in A$. Em cada coluna aparece um número ímpar de 1's. Mas, em cada linha eles devem aparecer uma quantidade par de vezes para se cancelarem, ou seja, para o sistema 2.1 ter solução devemos ter um número par de 1's aparecendo nele. Portanto, se provarmos que esta quantidade é ímpar então o sistema não terá solução e obteremos o resultado. Vamos considerar a seguinte tabela.

Quantidades de 1's na coluna	Em quantas colunas esta quantidade de 1's aparece
1	$l_1, \quad l_1 \in [0, n]$
3	$l_3, \quad l_3 \in [0, n]$
5	$l_5, \quad l_5 \in [0, n]$
$\vdots$	$\vdots$
$t = \begin{cases} r & , r \text{ ímpar} \\ r-1 & , r \text{ par} \end{cases}$	$l_t, \quad l_t \in [0, n]$

O total de 1's que aparecem no sistema é

$$l_1 + 3l_3 + 5l_5 + \cdots + tl_t \in [n, tn].$$

Sabemos que $n = l_1 + l_3 + l_5 + \cdots + l_t$, donde concluímos que

$$l_1 + 3l_3 + 5l_5 + \cdots + tl_t = n + 2(n - l_1) + 2(n - l_1 - l_3) + \cdots + 2(n - l_1 - l_3 - \cdots - l_{t-2}).$$

A expressão acima mostra que a quantidade de 1's no sistema é sempre ímpar. Donde, concluímos que este jamais terá solução. Sendo assim, segue que

$$2^{r-1}(n-1) + 1 \leq s_A(G) \leq (n^r - 1)\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$$

■

2.2 Limites superiores para $s_A(G)$

2.2.1 Relação entre $s_A(G)$ e $g_A(G)$ quando $\exp(G) = n$ é par

Para esta seção separamos um resultado que dá uma boa relação entre $s_A(G)$ e $g_A(G)$ quando $\exp(G) = n$ é par.

Lema 2.4. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $\exp(G) = n > 2$ par, temos que*

$$s_A(G) \leq g_A(G) + n - 2.$$

Demonstração: Sejam $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i \prod_{i=1}^{\ell} g_i^{k_i-1} \in \mathcal{F}(G)$, $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}$ e $g_1, \ldots, g_\ell \in G$ distintos. Vamos supor que S não satisfaça a condição (s_A) e $|S| = s_A(G)-1$. Claramente $T = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$ não satisfaz a condição (g_A), resultando em $\ell \leq g_A(G) - 1$ e $k_i < n$, pois em S não podemos ter n elementos iguais. Agora, afirmamos que $\sum_{i=1}^{\ell}(k_i - 1) \leq n - 2$. Suponhamos o contrário, e sem perda de generalidade suponhamos que $\sum_{i=1}^{\ell}(k_i-1) = n-1$. Como $k_i < n$, podemos supor que existem pelo menos dois g_i's de S tais que $v_{g_i}(S) \geq 2$. Retirando estes dois g_i's restam ainda $n-3$ valores para serem distribuídos entre os $k_j - 1$ valores restantes, com $j \neq i$. Se para algum $j \in [1, \ell]$, com $j \neq i$, tivermos $k_j - 1 = n - 3$, usamos $n - 4$ destes g_j's com os quatro g_i's do passo anterior para obter uma soma zero com peso A de tamanho n, ou seja, $\underbrace{g_j + (-1)g_j + g_j + (-1)g_j + \cdots + g_j + (-1)g_j}_{n-4} + g_{i_1} + (-1)g_{i_1} + g_{i_2} + (-1)g_{i_2} = 0$. Daí, podemos supor $k_j - 1 < n - 3$, ou seja, temos pelo menos mais (podem ser iguais aos anteriores) dois g_i's de S tais que $v_{g_i}(S) \geq 2$. Podemos continuar com este processo, observando que o pior caso é quando os g_i's são sempre iguais ao do passo anterior, pois se forem diferentes obteremos uma soma zero com peso A de tamanho n mais rapidamente. Assim, depois de realizarmos o processo $\frac{n-2}{2}$ vezes, obtemos $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i S_1^{\frac{n-2}{2}} h$, onde h é o elemento que resta no último passo do processo e $|S_1| = 2$. Se $\frac{n-2}{2}$ for par, obtemos uma soma zero com peso A de tamanho n, com $S_1^{\frac{n-2}{2}} h g_i$, pois $h = g_i$, para algum $i \in [1, \ell]$. Se $\frac{n-2}{2}$ for ímpar, usamos os dois elementos de $T = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$ que claramente aparecem em S_1 para obtermos uma soma zero com peso A de tamanho n. Assim,

$$s_A(G) - 1 \leq \sum_{i=1}^{\ell} k_i \leq \ell + n - 2 \leq g_A(G) - 1 + n - 2.$$

∎

Na próxima seção obteremos alguns resultados para C_n^r quando n é par.

2.3 Igualdades e limitantes para $s_A(C_n^r)$, quando n é par

Começaremos com um Lema simples que dá um resultado para o grupo C_2^r.

Lema 2.5. *Para $A = \{1\}$ ou $A = \{-1, 1\}$, temos que $s_A(C_2^r) = 2^r + 1$.*

Demonstração: Considere $e_0 = (0, 0, \ldots, 0), e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_r = (0, \ldots, 0, 1)$, $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ e $U = \prod_{I \subseteq [0,r]} e_I$, onde I pode assumir todos os conjuntos. Neste sequência aparecem todos os elementos de C_2^r e como essa sequência não satisfaz a condição (s_A) segue que

$$s_A(C_2^r) = \sum_{i=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} + 1 = 2^r + 1$$

■

Deste lema segue claramente que $\eta_A(C_2^r) = 2^r$ e vemos que vale a relação $s_A(C_2^r) = \eta_A(C_2^r)+2-1$. Na próxima subseção obteremos o valor exato de $s_A(C_4^2)$ e as consequências relacionadas a isso.

2.3.1 Valor exato de $s_A(C_4^2)$

Poderíamos, também, aplicar o Corolário 1.8 para obtermos o seguinte resultado $s_A(C_{2^a}^r) \leq 2^r(2^a - 1) + 1$, para $A = \{-1, 1\}$ e $a \in \mathbb{N}$. O que dá o melhor limite quando $a = 1$, mas veremos mais adiante que este limite pode ser melhorado para valores de a maiores que 1. Por exemplo, veremos que $s_A(C_{2^2}^2) = 8$.

Antes de provarmos a igualdade acima, vamos provar um lema que dará o limite inferior para $s_A(C_n^r)$, quando $n > 2$ é par.

Lema 2.6. *Para $A = \{-1, 1\}$, $n > 2$ par e $r \in \mathbb{N}$, temos que*

$$s_A(C_n^r) \geq n + r \lfloor \log_2 n \rfloor .$$

Demonstração: A demonstração é basicamente o que esta feito na introdução de [1]. Basta considerar $S = (0, \ldots, 0)^{n-1}(1, 0, \ldots, 0) \cdots (0, \ldots, 0, 1)(2, 0, \ldots, 0) \cdots (0, \ldots, 0, 2)$ $\cdots (2^s, 0, \ldots, 0) \cdots (0, \ldots, 0, 2^s)$, onde s é definido por $2^{s+1} \leq n < 2^{s+2}$. É facil ver que somando não conseguimos obter n visto que $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^s = \frac{2^{s+1}-1}{2-1} = 2^{s+1} - 1$. Também, sabemos que para $x \in \mathbb{Z}$, existem únicos $a_i \in \{0, 1\}$, com $i \in [0, s]$, tais que $x = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_s 2^s$. Donde, concluímos que é impossível termos $0 = x - x$, visto que é possível obter x apenas uma vez. Portanto, S não satisfaz a condição (s_A) e $|S| = n - 1 + r(1 + s) = n - 1 + r(1 + \lfloor \log_2 n \rfloor - 1) = n - 1 + r \lfloor \log_2 n \rfloor$. Assim,

$$s_A(C_n^r) \geq n + r \lfloor \log_2 n \rfloor .$$

■

Podemos perceber que este limite inferior pode ser melhorado quando $r > t$ para um t apropriado (dependendo de n), mas pela dificuldade de se construir estes exemplos não os faremos aqui, mas deixamos a seguinte sequência $S = (0, \ldots, 0)^{18-1}(1, 0, \ldots, 0) \cdots (0, \ldots, 0, 1)(2, 0, \ldots, 0) \cdots (0, \ldots, 0, 2) \cdots (8, 0, \ldots, 0) \cdots (0, \ldots, 0, 8)(3, \ldots, 3)(9, \ldots, 9)$ como uma sequência que não satisfaz a condição (s_A) quando o grupo considerado é C_{18}^9 e $A = \{-1, 1\}$. Note que se $r \leq 8$ esta sequência S satisfaria a condição (s_A).

Teorema 2.7. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos que*

$$s_A(C_4^2) = 8.$$

Demonstração: Segue do Lema 2.6 que $s_A(C_4^2) \geq 8$. Resta provar que $s_A(C_4^2) \leq 8$. Uma analise computacional fornece-nos $g_A(C_4^2) = 6$. Assim, pelo Lema 2.4 temos que $s_A(C_4^2) \leq 8$. ∎

Descrição do programa para determinar $g_A(C_4^2) = 6$: Nosso primeiro passo foi gerar todas as 8008 sequências de comprimento 6 possíveis de $\mathcal{F}(C_4^2)$, depois aplicamos um teste a todas as subsequências de comprimento 4 possíveis destas 8008 sequências e este teste consistia em fazer todas as somas possíveis com coeficientes em $A = \{-1, 1\}$ para estas subsequências de comprimento 4 e responder se havia uma representação do zero de C_4^2. Para todas as subsequências a resposta foi sim. E como $S = (0, 0)(1, 0)(0, 1)(2, 0)(0, 2)$ não satisfaz a condição (g_A) segue que $g_A(C_4^2) = 6$.

Corolário 2.8. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos que*

$$\eta_A(C_4^2) = 5.$$

Demonstração: Suponha que $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i \in \mathcal{F}(G)$ é uma sequência que não satisfaz a condição (η_A) tal que $\ell = \eta_A(G) - 1$ e $\exp(G) = n$, ou seja, em S não conseguimos subsequência de tamanho $t \in [1, n]$ dando soma zero com peso A. Daí, se acrescentarmos o zero $n - 1$ vezes a esta sequência, teremos uma sequência $U = 0^{n-1}S$ que não satisfaz a condição (s_A), donde concluímos que

$$s_A(G) \geq \eta_A(G) + n - 1.$$

Assim, para o caso em que $G = C_4^2$, temos que $s_A(C_4^2) \geq \eta_A(C_4^2) + 4 - 1$ e pelo Teorema 2.7 obtemos $8 \geq \eta_A(C_4^2) + 4 - 1$, o que implica em $\eta_A(C_4^2) \leq 5$. Mas, a sequência

$T = (0,1)(1,0)(2,0)(0,2)$ não satisfaz a condição (η_A), donde concluímos que $\eta_A(C_4^2) \geq 5$ e assim, obtemos a igualdade. ■

Com uma análise semelhante podemos obter que $D_A(C_4^2) = \eta_A(C_4^2) = 5$.

Para o caso $G = C_4^2$ vale a seguinte relação $s_A(G) = \eta_A(G) + \exp(G) - 1$. É interessante procurarmos grupos G para os quais esta igualdade se verifica.

Também, como consequência do Lema 2.4 temos que $\eta_A(G) \leq g_A(G) - 1$, para $\exp(G) = n$ par.

Proposição 2.9. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos que*

(i) $2k + 2\lfloor \log_2 2k \rfloor \leq s_A(C_{2k}^2) \leq 4k + 1$, $(2, k) = 1$;

(ii) $4k + 2\lfloor \log_2 4k \rfloor \leq s_A(C_{4k}^2) \leq 8k$, $(4, k) = 1$;

(iii) $14 \leq s_A(C_8^2) \leq 19$;

(iv) $24 \leq s_A(C_{16}^2) \leq 36$.

Demonstração: O limite inferior para todos segue do Lema 2.6. (i) Faça $H \cong C_2^2$ e $K \cong C_k^2$, ou seja, $C_{2k}^2/K \cong H$. Agora usando a Proposição 1.6 obtemos $s_A(C_{2k}^2) \leq (s_A(C_k^2) - 1)2 + s_A(C_2^2)$. E pelo Teorema 3 de [3] temos que $s_A(C_k^2) = 2k - 1$. Assim, segue que

$$s_A(C_{2k}^2) \leq 4k + 1.$$

(ii) Na Proposição 1.6, fazemos $G = C_{4k}^2$ e $H = C_k^2$. Donde obtemos $G/H = C_4^2$ e

$$s_A(G) \leq (s_A(H) - 1)\exp(G/H) + s_A(G/H) = (2k - 1 - 1)4 + 8,$$

onde usamos o Teorema 3 de [3] e o Teorema 2.7.
(iii) Aplicamos novamente a Proposição 1.6 para $G = C_8^2$ e $H = C_4^2$ e usamos o Lema 2.5 e o Teorema 2.7.
(iv) Aplicamos, também, a Proposição 1.6 para $G = C_{16}^2$ e $H = C_4^2$ e usamos o Teorema 2.7. ■

Capítulo 3

Igualdades e limitantes para $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$

Neste capítulo obteremos valores exatos para os invariantes $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$ com alguns valores fixos de r e um limite inferior para $\eta_A(C_3^r)$, com r qualquer. Também obteremos algumas relações interessantes entre estes invariantes no mesmo sentido do Lema 3 de [20]. Por fim obteremos um limite superior para $\eta_A(C_3^r)$ e consequentemente teremos um limite inferior e um limite superior para $s_A(C_3^r)$ e para $g_A(C_3^r)$.

3.1 Limite inferior para $\eta_A(C_3^r)$ e relação entre os invariantes $\eta_A(C_3^r)$, $s_A(C_3^r)$ e $g_A(C_3^r)$

Nesta seção obteremos o seguinte resultado interessante $s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r) - 1$, para $r > 1$. Mas, antes de tudo, começaremos obtendo um limite inferior para $\eta_A(C_3^r)$ e consequentemente teremos um limite inferior para $s_A(C_3^r)$ e para $g_A(C_3^r)$.

3.1.1 Limites inferiores para $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$

Vamos considerar a base canônica de C_3^r, ou seja, $(e_1, \ldots, e_r)$, onde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $e_r = (0, \ldots, 0, 1)$. Consideraremos, também, e_I e $\mathcal{I}_m$ definidos como antes do Lema 2.2.

Lema 3.1. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $G = C_3^r$, temos $\eta_A(G) \geq 2^{r-1} + 1$.*

Demonstração: Considere a sequência $U = \prod_{I\in\mathcal{I}_r} e_I$ e observe que $|U| = 2^{r-1}$. Vamos supor que esta sequência U satisfaça a condição (η_A), ou seja, existe $U'|U$, tal que $\sigma_A(U') = 0$ em C_3^r e $|U'| \in [1,3]$. Se $|U'| = 1$, deveríamos ter $(0,\ldots,0) \in U$, uma contradição. Se $|U'| = 2$, então deveríamos ter repetições ou inversos aditivos presente em U, o que também não acontece. Por fim, se $|U'| = 3$, então devemos ter uma soma com peso de tamanho 3 dando zero em C_3^r, ou seja, ou $U' = e_I^3$, uma contradição ou conseguimos os cancelamentos necessários para obter o zero de C_3^r, mas isto só seria possível se obtivéssemos uma quantidade par de 1's em todas as coordenadas do elemento resultante da soma, o que não acontece, pois estamos somando com peso, três quantidades ímpares, ou seja, o total de 1's é ímpar, então novamente temos uma contradição. ■

A melhora para o caso em que $r > 4$ é ímpar está na proposição abaixo.

Proposição 3.2. *Se r é ímpar e $r \geq 5$ então $\eta_A(C_3^r) \geq 2^{r-1} + \binom{r-1}{\delta}$, onde*

$$\delta = \delta(r) = \begin{cases} \frac{(r-3)}{2} & se\ r \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{(r-5)}{2} & se\ r \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{3.1}$$

Demonstração: Provaremos esta proposição pela apresentação de um exemplo de sequência de comprimento $2^{r-1} + \binom{r-1}{\delta} - 1$ sem uma A-soma zero subsequência de comprimento menor ou igual a 3. Seja $\ell = \binom{r-1}{\delta}$, e considere a sequência

$$\mathcal{S} = \mathcal{E}.\mathcal{G} = \left(\prod_{I\in\mathcal{I}_{r-2}} e_I\right)\cdot g_1\cdots g_\ell,$$

com

$$\begin{aligned} g_1 &= (-1, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{\delta}, 1, 1, \ldots, 1) \\ &\vdots \\ g_\ell &= (-1, 1, \ldots, 1, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{\delta}). \end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{S}$ não tem subsequência A-soma zero de comprimento 1 ou 2, e também soma ou diferença de dois elementos de $\mathcal{G}$ nunca dará outro elemento de $\mathcal{G}$, pois neste aparecerá o zero como coordenada. Agora, se para algum s, t tivermos

$$e_{I_s} + e_{I_t} = g_i$$

então e_{I_s}, e_{I_t} necessariamente terão $\delta + 1$ coordenadas não nulas na mesma posição (para obter $\delta + 1$ coordenadas -1's). Consequentemente devemos ter

$$r + (\delta + 1) = |I_s| + |I_t|$$

Mas isto é impossível já que $|I_s|, |I_t|, r$ são todos números ímpares e por definição $\delta+1$ é par. Portanto a única A-soma zero subsequência de comprimento 3 possível necessariamente inclui um elemento de $\mathcal{E}$ e dois elementos de $\mathcal{G}$.

Sejam v, w elementos de $\mathcal{G}$. Agora, é simples verificar que (os cálculos são módulo 3) ou $v + w$ ou $v - w$ tem duas de suas entradas com sinais opostos (para $\delta(r) < (r-1)/2$) e consequentemente nenhum deles pode ser somado a um $\pm e_I$ para obter uma subsequência A-soma zero de tamanho 3, já que todas as entradas de $\pm e_I$ não nulas tem o mesmo sinal. E isto conclui a demonstração desta proposição. ■

Uma melhora no limite inferior para o caso em que $r > 4$ é par é possível, mas há uma grande dificuldade de conseguir isto para todo $r > 4$ par em um único resultado, por isso faremos uma separação no conjunto dos números pares e no fim do capítulo faremos uma abordagem de cada um destes casos e obteremos uma melhora no limite inferior (em cada um dos casos) de $\eta_A(C_3^r)$ para todo $r > 4$ par.

Lema 3.3. *Para $A = \{-1, 1\}$ e C_3^r, temos*

$$s_A(C_3^r) \geq 2(\eta_A(C_3^r) - 1) + 1 \text{ e } g_A(C_3^r) \geq 2(\eta_A(C_3^r) - 1) + 1.$$

Demonstração: Seja $U = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$, onde $\ell = \eta_A(C_3^r) - 1$, uma sequência que não satisfaz a condição (η_A), ou seja, não existe subsequência com tamanho pertencente à $[1, 3]$ de U dando soma zero em C_3^r. Assim, vemos que $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i(-g_i)$ ou $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i^2$ não satisfaz a condição (s_A), da mesma forma que $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i(-g_i)$ não satisfaz a condição (g_A), lembrando que estamos fazendo tudo módulo 3, ou seja, se S satisfaz a condição (g_A) ou (s_A) então U satisfaz a condição (η_A), pois deveríamos ter $g_i = \pm 2g_j = \pm g_j$, com $i \neq j \in [1, \ell]$, implicando que U satisfaz a condição (η_A), uma contradição. Donde obtemos

$$s_A(C_3^r) \geq 2(\eta_A(C_3^r) - 1) + 1 \text{ e } g_A(C_3^r) \geq 2(\eta_A(C_3^r) - 1) + 1.$$

■

3.1.2 Relação entre $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$

Agora, obteremos dois importantes resultados envolvendo $s_A(C_3^r)$, $g_A(C_3^r)$ e $\eta_A(C_3^r)$.

Teorema 3.4. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos*

(i) $s_A(C_3) = g_A(C_3) + 1 = 4$;

(ii) $s_A(C_3^2) = g_A(C_3^2) = 5$;

(iii) $s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r)$, *com* $r \geq 3$.

Demonstração: (i) Pelo Teorema 1.1 de [1], temos $s_A(C_3) = 3 + \lfloor \log_2 3 \rfloor = 4$ e vemos que $g_A(C_3) = 3$ claramente de uma simples análise em $C_3 = \{0, 1, 2\}$.
(ii) Pelo Teorema 3 de [3], temos que $s_A(C_3^2) = 5$ e por definição temos que $s_A(C_3^2) = 5 \geq g_A(C_3^2)$. Agora, como $S = (1,0)(0,1)(2,0)(0,2)$ não satisfaz a condição (g_A), temos que $g_A(C_3^2) \geq 5$.
(iii) Por definição, temos que $s_A(C_3^r) \geq g_A(C_3^r)$. Assim, devemos provar que vale a desigualdade contrária para $r \geq 3$.

Seja $S = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$ uma sequência que não satisfaz a condição (s_A), tal que $\ell = s_A(C_3^r) - 1$. Vamos fazer a demonstração em alguns casos.

Caso 1 : Se 0 é um elemento que aparece uma vez em S, então a sequência $0S$ satisfaz $|0S| = s_A(C_3^r)$ e não satisfaz a condição (s_A), o que é uma contradição. Assim, este caso não acontece.

Daí, ou zero não aparece ou ele aparece duas vezes.

Caso 2 : Suponha que em S não apareça zeros e escrevemos $S = \prod_{i=1}^{\ell_1} g_i \prod_{i=1}^{\ell_1} g_i \prod_{i=2\ell_1+1}^{\ell} g_i$, ou seja, $T = \prod_{i=1}^{\ell_1} g_i$ e uma subsequência de S tal que $T^2 | S$. Daí, $S' = \prod_{i=1}^{\ell_1} g_i \prod_{i=1}^{\ell_1} (-g_i) \prod_{i=2\ell_1+1}^{\ell} g_i$ não satisfaz a condição (g_A) e como $|S| = |S'|$ segue que

$$|S| = s_A(C_3^r) - 1 = \ell = |S'| \leq g_A(C_3^r) - 1 \Rightarrow s_A(C_3^r) \leq g_A(C_3^r).$$

Caso 3 : Suponha que $S = 0^2\prod_{i=3}^{\ell} g_i$, onde $S' = \prod_{i=3}^{\ell} g_i$ não satisfaz a condição (η_A). Assim, $|S'| \leq \eta_A(C_3^r) - 1$.
Agora, faremos uma observação: Suponha que $T = \prod_{i=1}^{k} g_i \in \mathcal{F}(G)$ seja uma sequência que não satisfaça a condição (η_A) tal que $k = \eta_A(G) - 1$ e $\exp(G) = n$, ou seja, em T não conseguimos subsequência de tamanho $t \in [1, n]$ dando soma zero com peso A. Daí, se acrescentarmos o zero $n-1$ vezes a esta sequência, teremos uma sequência $U = 0^{n-1}T$ que não satisfaz a condição (s_A), donde concluímos que

$$s_A(G) \geq \eta_A(G) + n - 1.$$

O que para o nosso caso dá $s_A(C_3^r) \geq \eta_A(C_3^r) + 2$. Mas, $|S| = 2 + |S'| \leq 2 + \eta_A(C_3^r) - 1 = \eta_A(C_3^r) + 1$. Donde, obtemos que $s_A(C_3^r) \leq \eta_A(C_3^r) + 2$ o que implica em $s_A(C_3^r) = \eta_A(C_3^r) + 2$. Agora, pelo Lema 3.3 temos $s_A(C_3^r) \geq 2\eta_A(C_3^r) - 1$ e isto dá $\eta_A(C_3^r) \leq 3$, o que contradiz o Lema 3.1 que dá-nos $\eta_A(C_3^r) \geq 2^{r-1} + 1 > 3$, para todo $r \geq 3$. Assim, o Caso 3 não acontece. ∎

Teorema 3.5. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos*

$$g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r) - 1, \text{ para } r \geq 1.$$

Demonstração: Pelo Lema 3.3 temos que $g_A(C_3^r) \geq 2\eta_A(C_3^r) - 1$. Assim, basta provar que vale a desigualdade contrária. O caso $r = 1$ é trivial. Para $r = 2$, temos pelo Teorema 3.4 que $g_A(C_3^2) = 5$ e $\eta_A(C_3^2) = 3$ segue facilmente da observação que quaisquer três elementos de C_3^2 são linearmente dependentes, quando C_3^2 é visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_3$ (o corpo finito com três elementos) e a sequência $S = (1,0)(0,1)$ mostra a desigualdade contrária, logo $g_A(C_3^2) = 2\eta_A(C_3^2) - 1$. Agora, sejam $r \geq 3$ e $U = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$, onde $\ell = 2\eta_A(C_3^r) - 1$ e os g_i's são distintos. Consideraremos dois casos.

Caso 1 : Se 0 aparece em U segue que $\ell - 1 = 2\eta_A(C_3^r) - 2$. Mas, pelo Lema 3.1 temos $\eta_A(C_3^r) \geq 2^{r-1} + 1 > 3$, para todo $r \geq 3$, e assim $\ell - 1 \geq \eta_A(C_3^r)$ o que implica que U satisfaz a condição (g_A).

Caso 2 : Se 0 não aparece em U, então escrevemos

$$U = \prod_{i=1}^{\ell_1} g_i \prod_{i=1}^{\ell_1} (-g_i) \prod_{i=2\ell_1+1}^{\ell} g_i.$$

Escrevemos, também, $U_1 = \prod_{i=1}^{\ell_1} g_i$ e $U_2 = \prod_{i=1}^{\ell_1}(-g_i)\prod_{i=2\ell_1+1}^{\ell} g_i$ e assim para que U não satisfaça a condição (g_A) devemos ter

$$\ell = 2\eta_A(C_3^r) - 1 = |U| = |U_1| + |U_2| \leq 2(\eta_A(C_3^r) - 1) \Rightarrow -1 \leq -2,$$

uma absurdo. Daí, em U_1 ou U_2 deve aparecer uma subsequência de tamanho 3 dando soma zero com peso A. ∎

3.2 Limite superior e valores exatos de $\eta_A(C_3^r)$

Nosso objetivo nesta seção e obter um limite superior para $\eta_A(C_3^r)$. E no final da seção obter os valores exatos para $\eta_A(C_3^r)$ quando $r \in \{1,2,3,4\}$ e por fim usar estes resultados para obter valores exatos e limites inferiores e superiores para $s_A(C_3^r)$. Resumido o resultado principal desta seção é o teorema abaixo.

Teorema 3.6. *Se $A = \{-1,1\}$ e $r \geq 5$, então*

$$2^r + 1 \leq s_A(C_3^r) \leq 7 + 2\binom{r}{3} + \sum_{j=4}^{r} 2^{j-1}\binom{r}{j},$$

e para r ímpar temos

$$s_A(C_3^r) \geq \begin{cases} 2^r + 2\binom{r-1}{\frac{r-3}{2}} - 1 & se\ r \equiv 1 (mod 4) \\ 2^r + 2\binom{r-1}{\frac{r-5}{2}} - 1 & se\ r \equiv 3 (mod 4) \end{cases}.$$

Em particular, $s_A(C_3) = 4$, $s_A(C_3^2) = 5$, $s_A(C_3^3) = 9$ e $s_A(C_3^4) = 21$.

O limite inferior para o Teorema 3.6 segue dos Lemas 3.1, 3.4 e 3.5 e a melhora para o caso em que $r > 4$ é ímpar segue da Proposição 3.2.

Para encontrarmos o limite superior para $\eta_A(C_3^r)$ precisamos de vários lemas.

3.2.1 Um limite superior para $\eta_A(C_3^r)$, com $A = \{-1,1\}$

Para qualquer $k \in \{1,\dots,r\}$, definimos a k-ésima projeção $\pi_k : C_3^r \to C_3^r$ como

$$\pi_k(a_1,...,a_r) = (a_1,...,a_{k-1},0,a_{k+1},...,a_r).$$

Claramente π_k é uma aplicação linear e $\ker(\pi_k) = \{\lambda e_k \mid \lambda \in \mathbb{F}_3\}$.

Lema 3.7. *Seja $g, h \in C_3^r$, com $g \neq \pm h$. Se $\pi_k(g) = \pm\pi_k(h)$ para algum k, então existe $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 \in A$ tais que*

$$\epsilon_0 e_k + \epsilon_1 g + \epsilon_2 h = 0.$$

Em outras palavras, e_k, g, h é uma sequência A-soma zero.

Demonstração: Temos $\pi_k(g) = \epsilon_2\pi_k(h)$, para algum $\epsilon_2 \in \{-1, 1\}$. A linearidade de π_k dá-nos $\pi_k(g - \epsilon_2 h) = 0$ e então $g - \epsilon_2 h = \epsilon_0 e_k$, para $\epsilon_0 \in A$, pois $g - \epsilon_2 h \neq 0$, concluindo esta prova. ∎

Seja $\mathcal{S}$ uma sequência em C_3^r de comprimento $\mathfrak{m}$. Seja $\mathcal{U}_j$ a subsequência de todos elementos $g = (a_1, ..., a_r)$ de $\mathcal{S}$ tais que o número de coordenadas não nulas de g é igual a j, isto é, $\sum_{i=1}^{r} |a_i| = j$. Denotamos, também, por $\mathfrak{u}_j$ o comprimento da subsequência $\mathcal{U}_j$. Consequentemente temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{U}_0\mathcal{U}_1 \cdots \mathcal{U}_r, \\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_1 + \cdots + \mathfrak{u}_r. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lema 3.8. *Com as notações anteriores, seja g um elemento de $\mathcal{U}_{j+1}$ e h um elemento de $\mathcal{U}_j$. Se, para algum k, $\pi_k(g) = \pm h$, então*

$$\epsilon_0 e_k + \epsilon_1 g + \epsilon_2 h = 0$$

para algum $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Demonstração: A identidade $\pi_k(g) = \pm h$ diz-nos que a única coordenada diferente de g e $\pm h$ é a que está na k-ésima posição. Assim, $g - \epsilon h$, $\epsilon \in A$, tem apenas uma coordenada não nula, consequentemente $g - \epsilon h = \pm e_k$, para algum k. ∎

Agora, definimos $\mathfrak{M}(r)$, e apresentamos um lema que desempenha um papel importante na busca de um limite superior para $\eta_A(C_3^r)$. Assim, seja

$$\mathfrak{M}(r) = \binom{r}{3} + \sum_{j=4}^{r} 2^{j-2}\binom{r}{j} + 3. \tag{3.3}$$

Mas, antes de provarmos este importante lema, apresentaremos um lema que nos auxilia na sua demonstração.

Lema 3.9. *Para $r, k \in \mathbb{N}$, temos* *(i) Se* $r \geq k \geq 2$*, então* $\binom{r}{k} < (\frac{3r}{k})^k$*;*

(ii) Se $r \geq 10$*, então* $3^{r-1} > 15r^3$*;*

(iii) Se $r \geq 6$*, então* $\binom{r}{3} > \binom{r}{2} > \binom{r}{1}$*.*

Demonstração: (i) Pela fórmula de Stirling, temos que $k! \geq \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$. Daí, segue que $k! > \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{3}\right)^k$, ou seja, $3^k{\cdot}k! > \sqrt{2\pi k}{\cdot}k^k > k^k$. Assim, como $r(r-1)\cdots(r-(k-1)) < r^k$, temos que $\binom{r}{k} < (\frac{3r}{k})^k$.
(ii) Para $r = 10$ temos que $3^9 = 19683 > 15{\cdot}10^3 = 15000$. Procederemos por indução sobre r. Suponha que $3^{t-1} > 15t^3$, $r = t$. Assim, $3^t = 3 \cdot 3^{t-1} > 3 \cdot 15t^3 = 15t^3 + 15t^3 + 15t^3 > 15t^3 + 45t^2 + 45t + 15 = 15(t+1)^3$, ou seja, $3^{r-1} > 15r^3$ para todo $r \geq 10$.
(iii) Para $r \geq 6$ temos $\binom{r}{3} = \frac{r(r-1)(r-2)}{6} = \frac{r(r-1)}{2} \cdot \frac{r-2}{3} > \binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2} = r \cdot \frac{r-1}{2} > \binom{r}{1} = r$.
E assim concluímos a prova deste lema. ■

Podemos dizer que o próximo lema é importantíssimo para se obter um limite superior para $s_A(C_3^r)$, na verdade obtemos o limite superior para $\eta_A(C_3^r)$ e aplicamos este resultado ao combinado dos teoremas 3.5 e 3.4 para obter o limite superior para $s_A(C_3^r)$. Fica claro na demonstração do próximo lema que pode-se reduzir muito o comprimento da sequência S que ainda assim conseguiremos garantir a existência de uma base para o espaço vetorial C_3^r sobre $\mathbb{F}_3$, em S, pois mais a frente consideraremos uma sequência S de comprimento $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{M}(r)+1$ e provaremos que ela satisfaz a condição (η_A) e no caminho da demonstração garantimos que em S há uma base, devido ao lema abaixo. Mas, pelo lema podemos descartar $3^{r-2}/4 + 21/4 - 1$ elementos de S que ainda assim garantimos que há uma base, o que dá-nos uma boa margem para melhorar o limite superior de $s_A(C_3^r)$.

Lema 3.10. *Temos que* $\mathfrak{M}(r) > (3^{r-1} - 1)/2 - 2$ *para todo* $r \geq 4$*. Além do mais, verifica-se que*

$$\mathfrak{M}(r) - \frac{3^{r-1} - 1}{2} + 2 > \frac{3^{r-2}}{4} + \frac{21}{4},$$

para todo $r \geq 10$*.*

Demonstração: Um cálculo simples revela que $\mathfrak{M}(r) > (3^{r-1} - 1)/2 - 2$, para $4 \leq r \leq 9$.

Assim, vamos supor que $r \geq 10$. Então

$$\begin{aligned}
2\,\mathfrak{M}(r) + 5 - 3^{r-1} &= 2\,\mathfrak{M}(r) + 5 - (2+1)^r/3 \\
&= \sum_{j=4}^{r} \binom{r}{j}(2^{j-1} - \frac{2^j}{3}) + 11 + 2\binom{r}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\binom{r}{1} \\
&\quad -\frac{4}{3}\binom{r}{2} - \frac{8}{3}\binom{r}{3} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{j=4}^{r} 2^j \binom{r}{j} + 11 + 2\binom{r}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\binom{r}{1} - \frac{4}{3}\binom{r}{2} \\
&\quad -\frac{8}{3}\binom{r}{3} \\
&= \frac{3^r}{6} + \frac{21}{2} - \binom{r}{1} - 2\binom{r}{2} - 2\binom{r}{3} \\
&\overset{(iii)}{>} \frac{3^r}{6} + \frac{21}{2} - 5\binom{r}{3} \overset{(i)}{>} \frac{3^r}{6} + \frac{21}{2} - 5(\frac{3r}{3})^3 \\
&> \frac{3^r - 30r^3}{6} + \frac{21}{2} \overset{(ii)}{>} \frac{3^{r-2}}{2} + \frac{21}{2}.
\end{aligned}$$

Onde os (i), (ii) e (iii) são dados pelo Lema 3.9. Consequentemente, $2\,\mathfrak{M}(r) + 5 - 3^{r-1} > 3^{r-2}/2 + \frac{21}{2}$, para todo $r \geq 10$. ■

Observe que C_3^r é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_3$ (o corpo com três elementos), e denotaremos por $\{e_1, \ldots, e_r\}$ a *base canônica*.

Observação 3.11. Se entre os elementos de uma sequência $\mathcal{S}$ pudermos encontrar uma base $\mathcal{B}$ de C_3^r sobre $\mathbb{F}_3$, então é bem conhecido que existe uma aplicação linear bijetiva $T : C_3^r \to C_3^r$ tal que $T(\mathcal{B}) = \{e_1, ..., e_r\}$ é a base canônica. E nesse caso, o problema de encontrar uma subsequência A-soma zero em $\mathcal{S}$ é equivalente a encontrar uma na sequência $T(\mathcal{S})$.

Observação 3.12. Seja $\mathcal{S}$ uma sequência em C_3^r de comprimento $\mathfrak{m}$, e seja ℓ o comprimento da maior subsequência de $\mathcal{S}$ contendo apenas elementos linearmente independentes sobre $\mathbb{F}_3$. Podemos assumir que $e_1, \ldots, e_\ell$ são estes ℓ elementos linearmente independentes (veja a Obsevação 3.11), e uma vez que todos os outros elementos de $\mathcal{S}$ são combinações lineares de $e_1, \ldots, e_\ell$, podemos considerar, na verdade, $\mathcal{S}$ como uma sequência em C_3^ℓ. Consequentemente, se $\mathfrak{m} \geq \eta_A(C_3^\ell)$, então $\mathcal{S}$ tem uma subsequência A-soma zero de comprimento no máximo igual a três.

Deste ponto em diante, vamos assumir que $\mathcal{S}$ é uma sequência que tem uma base de

C_3^r sobre $\mathbb{F}_3$, mas não satisfaz a condição (η_A). Consequentemente $\mathcal{S}$ pode ser escrita como (veja (3.2))

$$\mathcal{S} = \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2\cdots\mathcal{U}_r$$

e podemos supor que $\mathfrak{u}_1 = r$, isto é, a base canônica é uma subsequência de $\mathcal{S}$ (veja a Observação 3.11). Uma consequência imediata desse fato é $\mathfrak{u}_2 = 0$, caso contrário, poderíamos escrever qualquer elemento de $\mathcal{U}_2$ como uma combinação linear de dois elementos da base canônica, dado uma A-soma zero de comprimento 3.

Como não podemos ter qualquer par g, h em $\mathcal{U}_j$ tal que $g = \pm h$, podemos fazer o pressuposto de que qualquer elemento g de $\mathcal{S}$ tem sua última coordenada não nula igual a 1.

Lema 3.13. *Temos* $\mathfrak{u}_3 \leq \binom{r}{3}$.

Demonstração: Suponha que $\mathfrak{u}_3 > \binom{r}{3}$, então podemos encontrar dois vetores $g_1 = (a_1, \ldots, a_r)$ e $g_2 = (b_1, \ldots, b_r)$ tendo coordenadas não nulas na mesma posição, isto é, $a_i = 0$ se e somente se $b_i = 0$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $g_1 = (a_1, a_2, 1, 0, \ldots, 0)$ e $g_2 = (b_1, b_2, 1, 0, \ldots, 0)$. Agora, note que teremos ou $\pi_1(g_1) = \pm\pi_1(g_2)$ ou $\pi_2(g_1) = \pm\pi_2(g_2)$ ou $\pi_3(g_1) = \pm\pi_3(g_2)$, pois $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \{-1, 1\}$, e o resultado segue do Lema 3.7. ■

Lema 3.14. *Para qualquer* $j \geq 4$*, temos* $\mathfrak{u}_j \leq 2^{j-2}\binom{r}{j}$.

Demonstração: Como antes, vamos supor que $\mathfrak{u}_j > 2^{j-2}\binom{r}{j}$. Assim, podemos encontrar $g_1, ..., g_\ell$, onde $\ell = 2^{j-2} + 1$, com coordenadas não nulas na mesma posição. Novamente pode-se supor

$$\begin{aligned} g_1 &= (a_{11}, ..., a_{1(j-1)}, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ g_\ell &= (a_{\ell 1}, ..., a_{\ell(j-1)}, 1, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Através da aplicação de π_1, obtemos

$$\begin{aligned} \pi_1(g_1) &= (0, a_{12}, ..., a_{1(j-1)}, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ \pi_1(g_\ell) &= (0, a_{\ell 2}, ..., a_{\ell(j-1)}, 1, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

No entanto, existem exatamente 2^{j-2} possibilidades de vetores da forma $(0, b_1, ..., b_{j-2}, 1, 0 \ldots, 0)$, porque $b_i \in \{-1, 1\}$ e então para algum $1 \leq i < j \leq \ell$ devemos ter $\pi_1(g_i) = \pi_1(g_j)$, uma vez que $\ell = 2^{j-2} + 1$. O resultado então segue do Lema 3.7. ∎

Lema 3.15. *Seja* $5 \leq j \leq r$. *Se* $\mathfrak{u}_{j-1} = 2^{j-3}\binom{r}{j-1}$, *então* $\mathfrak{u}_j \leq (2^{j-3} + 1)\binom{r}{j}$.

Demonstração: Da hipótese e Lema 3.14 segue que dado qualquer $(j-1)$-upla $1 \leq i_1 < \cdots < i_{j-1} \leq r$, existem 2^{j-3} elementos $(a_1, \ldots, a_r)$ em $\mathcal{U}_{j-1}$, tais que $a_{i_1}.a_{i_2} \ldots a_{i_{j-1}} \neq 0$. Denote por $\mathcal{E}$ a subsequência de $\mathcal{U}_{j-1}$ onde todos seus elementos tem entradas não nulas nas $(j-1)$ primeiras posições.

Agora, suponha $\mathfrak{u}_j > (2^{j-3} + 1)\binom{r}{j}$, então deve existir em $\mathcal{U}_j$, $2^{j-3} + 1$ elementos com entradas não nulas exatamente nas mesmas posições. Seja $\mathcal{F}$ uma sequência de $\mathcal{U}_j$ contendo estes elementos, e sem perder generalidade, vamos assumir que as entradas não nulas são posicionadas nas j primeiras coordenadas. De acordo com o Lema 3.8, não podemos ter $\pi_j(g) = \pm h$, para qualquer par de elementos g em $\mathcal{U}_j$, e h em $\mathcal{U}_{j-1}$. Consequentemente a sequência $\mathcal{EF}$ tem comprimento $2^{j-2} + 1$, e portanto deve existir g em $\mathcal{U}_j$, e h em $\mathcal{U}_{j-1}$ tais que $\pi_j(g) = \pm h$, concluindo esta prova. ∎

Lema 3.16. *Para qualquer* $r \geq 4$, *se* $\mathfrak{u}_r = 2^{r-2}$ *então* $\mathcal{U}_{r-1} = \emptyset$.

Demonstração: Como antes, podemos supor que a última entrada não nula de qualquer elemento de $\mathcal{U}_r$ é igual a 1. Além disso, também estamos supondo que, para qualquer k, e qualquer par g, h em $\mathcal{U}_r$, $\pi_k(g) \neq \pm\pi_k(h)$ (veja Lema 3.7). Outra observação simples é que, uma vez que qualquer elemento de $\mathcal{U}_r$ tem apenas coordenadas não nulas, não é possível encontrar um par $1 \leq j < \ell \leq r$, e um par g, h em $\mathcal{U}_r$, tal que $\pi_j(g) = \pm\pi_\ell(h)$. Com isso em mente, vemos que, dado qualquer par g, h, as projeções $\pi_j(g)$,$\pi_\ell(h)$ satisfazem $\pi_j(g) \neq \pm\pi_\ell(h)$ para quaisquer $j, \ell \in \{1, \ldots, r\}$. Consequentemente a sequência $\pi(\mathcal{U}_r)$, de todas as projeções de todos os elementos de $\mathcal{U}_r$ tem comprimento $2^{r-2}r$. Isto significa que se houver um g em $\mathcal{U}_{r-1}$, então deve haver um $\pi_j(h)$ tal que $\pi_j(h) = \pm g$, e o resultado segue do Lema 3.8. ∎

Lema 3.17. *Seja* $\mathcal{S}$ *uma sequência em* C_3^r *de comprimento* $\mathfrak{m}$ *a qual não satisfaz a condição* (η_A). *Se* $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{M}(r)$ *(veja (3.3)), então entre os elementos de* $\mathcal{S}$ *podemos encontrar uma base de* C_3^r *sobre* $\mathbb{F}_3$.

Demonstração: Seja ℓ o comprimento da maior subsequência de $\mathcal{S}$ contendo apenas elementos linearmente independentes sobre $\mathbb{F}_3$. Consequentemente qualquer elemento de $\mathcal{S}$ pode ser escrito como combinação linear destes ℓ elementos sobre $\mathbb{F}_3$, isto é, o comprimento $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{S}$ é no máximo igual a 3^ℓ. Por outro lado, pela hipótese, para qualquer tripla g_i, g_j, g_k em $\mathcal{S}$ temos

$$(i)\ g_i \neq 0, \quad (ii)\ g_i \neq \pm g_j \ \text{ e } \ (iii)\ \epsilon g_i + \mu g_j \neq g_k, \quad \text{para todos } \ \epsilon, \mu \in \mathbb{F}_3.$$

Consequentemente, o comprimento $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{S}$ não pode exceder $\frac{3^\ell - 1}{2} - \binom{\ell}{2}$. Mas já que estamos assumindo $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{M}(r)$, podemos aplicar o Lema 3.10 para concluir que $\ell = r$. ∎

Com estes lemas, podemos obter um limite superior para $\eta_A(C_3^r)$

Proposição 3.18. *Se $A = \{-1, 1\}$ e $r \geq 4$, então*

$$\eta_A(C_3^r) \leq 1 + \mathfrak{M}(r).$$

Demonstração: Seja $\mathcal{S}$ uma sequência de comprimento $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{M}(r) + 1$, e suponha que esta sequência não satisfaça a condição (η_A). De acordo com o Lema 3.17, entre os elementos de $\mathcal{S}$ podemos encontrar uma base para C_3^r sobre $\mathbb{F}_3$. Como antes vamos escrever $\mathcal{S} = \mathcal{U}_0 \mathcal{U}_1 \cdots \mathcal{U}_r$, assumindo $\mathfrak{u}_0 = 0$, $\mathfrak{u}_1 = r$ e $\mathfrak{u}_2 = 0$. Então pelos Lemas 3.13 e 3.14 temos

$$\mathfrak{m} = \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{u}_j \leq r + \binom{r}{3} + \sum_{j=4}^{r} 2^{j-2} \binom{r}{j}.$$

Agora, pelo Lema 3.15 e para $4 \leq j \leq r-1$, se $\mathfrak{u}_j = 2^{j-2}\binom{r}{j}$, então $\mathfrak{u}_{j+1}$ é muito pequeno comparado a $2^{j-1}\binom{r}{j+1}$. Por isso deve-se considerar pelo menos $\mathfrak{u}_j < 2^{j-2}\binom{r}{j}$, e pelo Lema 3.16, podemos considerar pelo menos $\mathfrak{u}_r < 2^{r-2}$, então podemos descartar $r-3$ do somatório acima, concluindo que

$$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{M}(r)$$

o que é uma contradição. ∎

Aqui observamos que, para obter o limite superior do Teorema 3.6, usamos o lema acima aplicado aos Lemas 3.5 e 3.4.

3.2.2 Aplicação: valor exato de $\eta_A(C_3^r)$, com $r = 1, 2, 3, 4$

Agora, determinaremos $\eta_A(C_3^r)$, quando $A = \{-1, 1\}$ e $r \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Proposição 3.19. *Para $A = \{-1, 1\}$, temos* *(i)* $\eta_A(C_3) = 2$;

(ii) $\eta_A(C_3^2) = 3$;

(iii) $\eta_A(C_3^3) = 5$;

(iv) $\eta_A(C_3^4) = 11$.

Demonstração: Para os casos (i) e (ii) observamos que dois elementos de C_3 e três elementos C_3^2 são sempre linearmente dependentes sobre $\mathbb{F}_3$, respectivamente. O limite inferior vem do Lema 3.1.

Caso $r = 3$: Seja S uma sequência de comprimento $\mathfrak{m} = 5$, e escrevemos

$$\mathcal{S} = \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2\mathcal{U}_3.$$

Já que $\mathfrak{m} > \eta_A(C_3^2)$, podemos assumir $\mathfrak{u}_1 = 3$ e $\mathfrak{u}_2 = 0$ (veja Observação 3.12). Mas isto significa que $\mathfrak{u}_3 = 2 > \binom{3}{3}$, consequentemente $\mathcal{S}$ deve conter uma subsequência A-soma zero de acordo com o Lema 3.13. O limite inferior, novamente, segue do Lema 3.1.

Caso $r = 4$: Observe, primeiramente, que a sequência $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{4} e_i \prod_{i=5}^{10} g_i$, onde e_i representa os elementos da base canônica e os g_i's são dados por

$$\begin{aligned} g_5 &= (0,1,1,1), & g_6 &= (1,0,1,1), & g_7 &= (1,1,0,-1), \\ g_8 &= (1,1,-1,0), & g_9 &= (1,-1,1,-1), & g_{10} &= (-1,1,1,-1), \end{aligned}$$

não satisfaz a condição (η_A), resultando em $\eta_A(C_3^4) \geq 11$. Agora, seja $\mathcal{S}$ uma sequência de comprimento $\mathfrak{m} = 11$, e escrevemos

$$\mathcal{S} = \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2\mathcal{U}_3\mathcal{U}_4.$$

Já que $\mathfrak{m} > \eta_A(C_3^3)$, podemos assumir $\mathfrak{u}_1 = 4$ e $\mathfrak{u}_2 = 0$ (veja Observação 3.12). Pelos Lemas 3.13 e 3.14, podemos também assumir $3 \leq \mathfrak{u}_3 \leq 4$ e $3 \leq \mathfrak{u}_4 \leq 4$. Aplicando agora o Lema 3.16, podemos assumir $\mathfrak{u}_3 = 4$ e $\mathfrak{u}_4 = 3$.

Podemos excluir da sequência $\mathcal{U}_4$, os casos

$$g = \pm h \quad \text{e} \quad \pi_k(g) = \pm\pi_k(h) \tag{3.4}$$

Caso contrário, encontraremos uma subsequência A-soma zero de comprimento no máximo 3. Consequentemente ficamos com os dois conjuntos separados abaixo, para escolher 3 elementos distintos pertencentes ao mesmo conjunto para formar a sequência $\mathcal{U}_4$ (veja (3.4)), uma vez que um elemento de $\mathcal{A}$ não pode ocorrer com um elemento de $\mathcal{B}$, pois soma ou diferença dará um dos e_i's de $\mathcal{U}_1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{(1,1,1,1),\ (-1,-1,1,1),\ (-1,1,-1,1),\ (1,-1,-1,1)\}\\
\mathcal{B} &= \{(-1,1,1,1),\ (1,-1,1,1),\ (1,1,-1,1),\ (-1,-1,-1,1)\}.
\end{aligned}$$

Agora, observamos que a escolha dos três elementos de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$ determinarão os quatro elementos de $\mathcal{U}_3$ de forma única, isto devido as projeções dos três elementos de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$, ou seja, fixando uma coordenada dos três elementos escolhidos de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$ o elemento que aparece em $\mathcal{U}_3$ deve ser a projeção daquele que não foi escolhido de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$ em relação a mesma coordenada fixada; isto pode ser feito nas quatro posições dos elementos escolhidos de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$ e assim teremos os quatro elementos de $\mathcal{U}_3$ determinados de maneira única. Observamos, assim que teremos quatro possíveis escolhas em cada um dos conjuntos acima dando um total de oito sequências a serem verificadas. Agora, definiremos duas transformações lineares, $T_1 : C_3^4 \longrightarrow C_3^4$ e $T_2 : C_3^4 \longrightarrow C_3^4$, dadas pelas seguintes matrizes:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Considerando as seguintes sequências:

$$\mathcal{S}_1 = \prod_{i=1}^{4} e_i(0,1,1,-1)(1,0,1,-1)(1,1,0,-1)(1,1,1,0)(-1,1,1,1)(1,-1,1,1)(1,1,-1,1),$$

$$\mathcal{S}_2 = \prod_{i=1}^{4} e_i(0,-1,1,1)(1,0,1,1)(1,-1,0,1)(1,-1,1,0)(-1,1,1,1)(1,1,-1,1)(-1,-1,-1,1),$$

observamos, desconsiderando as possíveis trocas de sinais de alguns elementos (isto não importa, pois $A = \{-1,1\}$) que $\mathcal{S}_3 = T_2(\mathcal{S}_1)$, $S_4 = T_2(\mathcal{S}_2)$, $\mathcal{S}_5 = T_1(\mathcal{S}_1)$, $\mathcal{S}_6 = T_1(\mathcal{S}_2)$, $\mathcal{S}_7 = T_1 \circ T_2(\mathcal{S}_1)$ e $\mathcal{S}_8 = T_1 \circ T_2(\mathcal{S}_2)$, onde T_i, com $i \in [1,2]$, é aplicado em cada elemento da sequência, são as oito sequências a serem verificadas. Note que tanto T_1 e T_2, quanto $T_1 \circ T_2$ são isomorfismos, o que garante que as sequências S_i, com $i \in [1,8]$ são distintas. Assim, se provarmos que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a condição (η_A) as transformações definidas acima garantem o mesmo para $\mathcal{S}_i$, com $i \in [3,8]$, e isto dá-nos o resultado, pois são as oito sequências a serem verificadas (a menos das possíveis trocas de sinal de alguns elementos). Mas,

$$\begin{array}{rcl} (0,1,1,-1)+(1,0,1,-1) & = & (1,1,-1,1) \\ (0,-1,1,1)+(1,0,1,1) & = & -(-1,1,1,1) \end{array}.$$

E isto conclui a prova. ∎

Com a Proposição 3.19 aplicada aos Lemas 3.5 e 3.4 obtemos as igualdades que aparecem no enunciado do Teorema 3.6. E isto completa sua demonstração.

3.3 O caso $C_{3^a}^3$

E como consequência do Teorema 3.6, da Proposição 1.6 e do Teorema 2.3, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.20. *Seja $A = \{-1,1\}$. Então*

$$s_A(C_{3^a}^3) = 4 \cdot 3^a - 3,$$

onde $a \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Sabemos, pelo Teorema 3.6 que $s_A(C_3^3) = 4 \cdot 3 - 3$. Assim, vamos supor por hipótese de indução que $s_A(C_{3^{a-1}}^3) = 4 \cdot 3^{a-1} - 3$. Portanto, na Proposição 1.6, fazemos $G = C_{3^a}^3$ e $H = C_{3^{a-1}}^3$. Donde obtemos $G/H = C_3^3$. E a Proposição 1.6 dá-nos que

$$s_A(G) \le (s_A(H)-1)\exp(G/H) + s_A(G/H),$$

ou seja, $s_A(C_{3^a}^3) \le (4\cdot 3^{a-1}-3-1)\cdot 3 + 4\cdot 3 - 3$, o que dá $s_A(C_{3^a}^3) \le 4\cdot 3^a - 3$. Mas, pelo Teorema 2.3 temos a desigualdade contrária. Assim, concluímos o resultado. ∎

Agora vemos pela que foi feito na demonstração do Corolário 2.8, que $\eta_A(C_{3^a}^3) \le 3\cdot 3^a - 2$. A grande dificuldade de provar a igualdade (se for verdadeira) é encontrar uma sequência de comprimento $3\cdot 3^a - 3$ que não satisfaz a condição (η_A).

Pelo Teorema 3.6 obtemos $s_A(C_3^4) = 21$ e usando indução na Proposição 1.6 temos que $s_A(C_{3^a}^4) \le 10\cdot 3^a - 9$, para $a \in \mathbb{N}$. Mas, o Teorema 2.3 dá-nos que $s_A(C_{3^a}^4) \ge 8\cdot 3^a - 7$, para $a \in \mathbb{N}$.

Obtemos, assim, vários resultados para os invariantes $s_A(G)$, $g_A(G)$ e $\eta_A(G)$ para grupos G específicos, mas ainda há muitas coisas a serem feitas, pois pelo que foi colocado acima será que é possível melhorar o Teorema 2.3 para $r = 4$ e assim obter a igualdade para $s_A(C_{3^a}^4) = 10\cdot 3^a - 9$. Também, pode-se pensar em determinar limite superior para $s_A(C_p^3)$, com p primo, e assim talvez obter a igualdade para $s_A(C_n^3)$ (ver Teorema 1.10), quando n for ímpar, pois o Teorema 2.3 dá o limite inferior.

3.4 Limite inferior para $\eta_A(C_3^r)$, quando $A = \{-1, 1\}$ e $r > 4$ é par

Consideraremos algumas divisões no conjunto dos números pares maiores que 4. Seja $A_1 = \{6, 14, 22, 30, 38\dots\}$, ou seja, uma progressão aritmética de razão 8. Agora, considere a seguinte sequência em $\mathcal{F}(C_3^r)$, com $r > 4$ par.

$$\mathcal{S} = \mathcal{E}.\mathcal{G} = \left(\prod_{I\in\mathcal{I}_k} e_I\right)\cdot g_1\cdots g_\ell,$$

com

$$\begin{aligned} g_1 &= (\underbrace{-1,\dots,-1}_{\delta}, 1, 1, \dots, 1) \\ &\vdots \\ g_\ell &= (1, 1, \dots, 1, \underbrace{-1,\dots,-1}_{\delta}) \end{aligned}$$

e $k = 3t$ com t definido como $t = \frac{r-2}{4}$, $\ell = \binom{r}{\delta}$, onde $\delta = \frac{r-2}{2}$ e $r \in A_1$. Aqui fazemos a observação que t é inteiro positivo ímpar, pois claramente os elementos de A_1 tem a forma $4t+2$ com $t \in \mathbb{N}$ ímpar.

Assim, somos capazes de provar o seguinte lema.

Lema 3.21. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $r \in A_1$ temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3t \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-2}{2}} + 1.$

Demonstração: É suficiente mostrar que existe uma sequência de comprimento $\sum_{\substack{1 \leq j \leq 3t \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-2}{2}}$ que não satisfaz a condição (η_A). Note que a sequência $\mathcal{S}$ definida acima tem este comprimento, assim basta provar que esta não satisfaz a condição (η_A).

Claramente $\mathcal{S}$ não tem subsequência A-soma zero de comprimento 1 ou 2, e também soma ou diferença de dois elementos de $\mathcal{G}$ nunca dará outro elemento de $\mathcal{G}$, pois neste aparecerá o zero como coordenada. Agora, se para algum s, m tivermos

$$e_{I_s} + e_{I_m} = g_i$$

com $i \in [1, \ell]$, então e_{I_s}, e_{I_m} necessariamente terão $\frac{r-2}{2}$ coordenadas não nulas na mesma posição (para obter $\frac{r-2}{2}$ coordenadas -1's). Mas observe que no máximo

$$|I_s| + |I_m| = 6t.$$

E temos que $6t = \frac{3r-6}{2} < \frac{3r-2}{2}$, onde $\frac{3r-2}{2}$ é a quantidade de 1's necessária para se obter um g_i de $\mathcal{G}$,ou seja, é impossível obter g_i a partir da soma $e_{I_s} + e_{I_m}$. Diferença de dois e_I's nunca dará um g_i de $\mathcal{G}$, pois todos eles tem um número ímpar de 1's e nos g_i's tanto 1's como -1's aparecem um número par de vezes, é claro que se os dois e_I's tiverem 1 na mesma posição, então na diferença aparecerá um zero e novamente não temos g_i de $\mathcal{G}$. Portanto a única A-soma zero subsequência de comprimento 3 possível necessariamente inclui um elemento de $\mathcal{E}$ e dois elementos de $\mathcal{G}$.

Sejam v, w elementos de $\mathcal{G}$. Primeiramente, observamos que se eles não tem -1's em comum, então o resultante de $v+w$ tem uma quantidade par de zeros e uma quantidade par -1's, ou seja, não é possível obter $-e_I$. Se fizermos $v-w$ também teremos uma quantidade par de coordenadas não nulas, ou seja, também não temos $\pm e_I$. Agora, supondo que v, w tenham um -1 na mesma posição, é simples verificar que (os cálculos são módulo 3) ou

$v+w$ ou $v-w$ tem duas de suas entradas com sinais opostos e consequentemente nenhum deles pode ser somado a um $\pm e_I$ para obter uma subsequência A-soma zero de tamanho 3, já que todas as entradas de $\pm e_I$ não nulas tem o mesmo sinal. ∎

Seja $A_2 = \{10, 18, 26, 34, 42, 50, 58, 66\dots\}$, também uma progressão aritmética de razão 8. Considere a sequência $\mathcal{S}$ definida antes do Lema 3.21, só que agora $k = 3t-1$ com t definido como $t = \frac{r-2}{4}$ e $\ell = \binom{r}{\delta}$, onde $\delta = \frac{r-2}{2}$ e $r \in A_2$. Aqui fazemos a observação que t é inteiro positivo par, pois claramente os elementos de A_2 tem a forma $4t+2$ com $t \in \mathbb{N}$ par. Com estas definições, podemos provar o seguinte lema.

Lema 3.22. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $r \in A_2$ temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \displaystyle\sum_{\substack{1\leq j\leq 3t-1 \\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-2}{2}} + 1.$

Demonstração: É suficiente mostrar que existe uma sequência de comprimento $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq j\leq 3t-1 \\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-2}{2}}$ que não satisfaz a condição (η_A). Note que a sequência $\mathcal{S}$ definida antes do Lema 3.21 com a nova definição de k tem este comprimento, assim basta provar que esta não satisfaz a condição (η_A).

Claramente $\mathcal{S}$ não tem subsequência A-soma zero de comprimento 1 ou 2, e também soma ou diferença de dois elementos de $\mathcal{G}$ nunca dará outro elemento de $\mathcal{G}$, pois neste aparecerá o zero como coordenada. Agora, se para algum s, m tivermos

$$e_{I_s} + e_{I_m} = g_i$$

com $i \in [1, \ell]$, então e_{I_s}, e_{I_m} necessariamente terão $\frac{r-2}{2}$ coordenadas não nulas na mesma posição (para obter $\frac{r-2}{2}$ coordenadas -1's). Mas observe que no máximo

$$|I_s| + |I_m| = 6t - 2.$$

E temos que $6t - 2 = \frac{3r-10}{2} < \frac{3r-2}{2}$, onde $\frac{3r-2}{2}$ é a quantidade de 1's necessária para se obter um g_i de $\mathcal{G}$,ou seja, é impossível obter g_i a partir da soma $e_{I_s} + e_{I_m}$. Diferença de dois e_I's nunca dará um g_i de $\mathcal{G}$, pois todos eles tem um número ímpar de 1's e nos g_i's tanto 1's como -1's aparecem um número par de vezes, é claro que se os dois e_I's tiverem 1 na mesma posição, então na diferença aparecerá um zero e novamente não temos g_i de $\mathcal{G}$. Portanto a única A-soma zero subsequência de comprimento 3 possível necessariamente inclui um elemento de $\mathcal{E}$ e dois elementos de $\mathcal{G}$.

Sejam v, w elementos de $\mathcal{G}$. Primeiramente, observamos que se eles não tem -1's em comum, então o resultante de $v+w$ tem uma quantidade par de zeros e uma quantidade par -1's, ou seja, não é possível obter $-e_I$. Se fizermos $v-w$ também teremos uma quantidade par de coordenadas não nulas, ou seja, também não temos $\pm e_I$. Agora, supondo que v, w tenham um -1 na mesma posição, é simples verificar que (os cálculos são módulo 3) ou $v+w$ ou $v-w$ tem duas de suas entradas com sinais opostos e consequentemente nenhum deles pode ser somado a um $\pm e_I$ para obter uma subsequência A-soma zero de tamanho 3, já que todas as entradas de $\pm e_I$ não nulas tem o mesmo sinal. ■

Seja $A_3 = \{12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68\dots\}$, também uma progressão aritmética de razão 8. Considere a sequência $\mathcal{S}$ definida antes do Lema 3.21, só que agora $k = 3t-2$ com t definido como $t = \frac{r}{4}$ e $\ell = \binom{r}{\delta}$, onde $\delta = \frac{r-4}{2}$ e $r \in A_3$. Aqui fazemos a observação que t é inteiro positivo ímpar, pois claramente os elementos de A_3 tem a forma $4t$ com $t \in \mathbb{N}$ ímpar. Com estas definições, podemos provar o seguinte lema.

Lema 3.23. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $r \in A_3$ temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \sum\limits_{\substack{1\leq j\leq 3t-2\\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-4}{2}} + 1.$

Demonstração: É suficiente mostrar que existe uma sequência de comprimento $\sum\limits_{\substack{1\leq j\leq 3t-2\\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-4}{2}}$ que não satisfaz a condição (η_A). Note que a sequência $\mathcal{S}$ definida antes do Lema 3.21 com a nova definição de k, t e ℓ tem este comprimento, assim basta provar que esta não satisfaz a condição (η_A).

Claramente $\mathcal{S}$ não tem subsequência A-soma zero de comprimento 1 ou 2, e também soma ou diferença de dois elementos de $\mathcal{G}$ nunca dará outro elemento de $\mathcal{G}$, pois neste aparecerá o zero como coordenada. Agora, se para algum s, m tivermos

$$e_{I_s} + e_{I_m} = g_i$$

com $i \in [1, \ell]$, então e_{I_s}, e_{I_m} necessariamente terão $\frac{r-4}{2}$ coordenadas não nulas na mesma posição (para obter $\frac{r-4}{2}$ coordenadas -1's). Mas observe que no máximo

$$|I_s| + |I_m| = 6t - 4.$$

E temos que $6t-4 = \frac{3r-8}{2} < \frac{3r-4}{2}$, onde $\frac{3r-4}{2}$ é a quantidade de 1's necessária para se obter um g_i de $\mathcal{G}$,ou seja, é impossível obter g_i a partir da soma $e_{I_s} + e_{I_m}$. Diferença de dois

e_I's nunca dará um g_i de $\mathcal{G}$, pois todos eles tem um número ímpar de 1's e nos g_i's tanto 1's como -1's aparecem um número par de vezes, é claro que se os dois e_I's tiverem 1 na mesma posição, então na diferença aparecerá um zero e novamente não temos g_i de $\mathcal{G}$. Portanto a única A-soma zero subsequência de comprimento 3 possível necessariamente inclui um elemento de $\mathcal{E}$ e dois elementos de $\mathcal{G}$.

Sejam v, w elementos de $\mathcal{G}$. Primeiramente, observamos que se eles não tem -1's em comum, então o resultante de $v+w$ tem uma quantidade par de zeros e uma quantidade par -1's, ou seja, não é possível obter $-e_I$. Se fizermos $v-w$ também teremos uma quantidade par de coordenadas não nulas, ou seja, também não temos $\pm e_I$. Agora, supondo que v, w tenham um -1 na mesma posição, é simples verificar que (os cálculos são módulo 3) ou $v+w$ ou $v-w$ tem duas de suas entradas com sinais opostos e consequentemente nenhum deles pode ser somado a um $\pm e_I$ para obter uma subsequência A-soma zero de tamanho 3, já que todas as entradas de $\pm e_I$ não nulas tem o mesmo sinal. ∎

Sejam $A_4 = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64 \ldots\}$ e $A_5 = \{8, 16, 32, 64, 128 \ldots\}$ um subconjunto de A_4, também em A_4 temos uma progressão aritmética de razão 8, enquanto em A_5 temos uma progressão geométrica de razão 2. Considere a sequência(referente a $A_4 \backslash A_5$) $\mathcal{S}$ definida antes do Lema 3.21, só que agora $k = 3t - 3$ com t definido como $t = \frac{r}{4}$ e $\ell = \binom{r}{\delta}$, onde $\delta = \frac{r-4}{2}$ e $r \in A_4 \backslash A_5$. Aqui fazemos a observação que t é inteiro positivo par tal que $t \neq 2^a$ para $a \in \mathbb{N}$, pois claramente os elementos de $A_4 \backslash A_5$ tem a forma $4t$ com $t \in \mathbb{N}$ par e $t \neq 2^a$ para $a \in \mathbb{N}$. Com estas definições, podemos provar o seguinte lema.

Lema 3.24. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $r \in A_4 \backslash A_5$ temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \sum\limits_{\substack{1 \leq j \leq 3t-3 \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-4}{2}} +$ *1.*

Demonstração: É suficiente mostrar que existe uma sequência de comprimento $\sum\limits_{\substack{1 \leq j \leq 3t-3 \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \binom{r}{\frac{r-4}{2}}$ que não satisfaz a condição (η_A). Note que a sequência $\mathcal{S}$ definida antes do Lema 3.21 com a nova definição de k, t e ℓ tem este comprimento, assim basta provar que esta não satisfaz a condição (η_A).

Claramente $\mathcal{S}$ não tem subsequência A-soma zero de comprimento 1 ou 2, e também soma ou diferença de dois elementos de $\mathcal{G}$ nunca dará outro elemento de $\mathcal{G}$, pois neste aparecerá o zero como coordenada. Agora, se para algum s, m tivermos

$$e_{I_s} + e_{I_m} = g_i$$

com $i \in [1, \ell]$, então e_{I_s}, e_{I_m} necessariamente terão $\frac{r-4}{2}$ coordenadas não nulas na mesma posição (para obter $\frac{r-4}{2}$ coordenadas -1's). Mas observe que no máximo

$$|I_s| + |I_m| = 6t - 6.$$

E temos que $6t - 6 = \frac{3r-12}{2} < \frac{3r-4}{2}$, onde $\frac{3r-4}{2}$ é a quantidade de 1's necessária para se obter um g_i de $\mathcal{G}$,ou seja, é impossível obter g_i a partir da soma $e_{I_s} + e_{I_m}$. Diferença de dois e_I's nunca dará um g_i de $\mathcal{G}$, pois todos eles tem um número ímpar de 1's e nos g_i's tanto 1's como -1's aparecem um número par de vezes, é claro que se os dois e_I's tiverem 1 na mesma posição, então na diferença aparecerá um zero e novamente não temos g_i de $\mathcal{G}$. Portanto a única A-soma zero subsequência de comprimento 3 possível necessariamente inclui um elemento de $\mathcal{E}$ e dois elementos de $\mathcal{G}$.

Sejam v, w elementos de $\mathcal{G}$. Primeiramente, observamos que se eles não tem -1's em comum, então o resultante de $v+w$ tem uma quantidade par de zeros e uma quantidade par -1's, ou seja, não é possível obter $-e_I$. Se fizermos $v-w$ também teremos uma quantidade par de coordenadas não nulas, ou seja, também não temos $\pm e_I$. Agora, supondo que v, w tenham um -1 na mesma posição, é simples verificar que (os cálculos são módulo 3) ou $v+w$ ou $v-w$ tem duas de suas entradas com sinais opostos e consequentemente nenhum deles pode ser somado a um $\pm e_I$ para obter uma subsequência A-soma zero de tamanho 3, já que todas as entradas de $\pm e_I$ não nulas tem o mesmo sinal. ∎

Seja $A_5 = \{8, 16, 32, 64, 128 \dots\}$, claramente temos que A_5 é uma progressão geométrica de razão 2. Considere a sequência $\mathcal{S}$ definida antes do Lema 3.21 de modo que $\ell = \frac{\binom{r}{\delta}}{2}$, com $\delta = \frac{r}{2}$, onde retiramos o inverso aditivo de cada g_i, com $i \in [1, \ell]$. Aqui consideramos $k = 3t - 1$ com t definido como $t = \frac{r}{4}$, onde $r \in A_5$. Aqui fazemos a observação que t é inteiro positivo par tal que $t = 2^a$ para $a \in \mathbb{N}$, pois claramente os elementos de A_5 tem a forma $4t$ com $t \in \mathbb{N}$ par e $t = 2^a$ para $a \in \mathbb{N}$. Com estas definições, podemos provar o seguinte lema.

Lema 3.25. *Para $A = \{-1, 1\}$ e $r \in A_5$ temos que* $\eta_A(C_3^r) \geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3t-1 \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \frac{\binom{r}{\frac{r}{2}}}{2} + 1.$

Demonstração: É suficiente mostrar que existe uma sequência de comprimento

$\sum_{\substack{1\leq j\leq 3t-1\\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} \binom{r}{j} + \frac{\binom{r}{\frac{r}{2}}}{2}$ que não satisfaz a condição (η_A). Note que a sequência $\mathcal{S}$ definida antes do Lema 3.21 com a nova definição de k, t e ℓ tem este comprimento, assim basta provar que esta não satisfaz a condição (η_A).

Claramente $\mathcal{S}$ não tem subsequência A-soma zero de comprimento 1 ou 2, e também soma ou diferença de dois elementos de $\mathcal{G}$ nunca dará outro elemento de $\mathcal{G}$, pois neste aparecerá o zero como coordenada. Agora, se para algum s, m tivermos

$$e_{I_s} + e_{I_m} = g_i$$

com $i \in [1, \ell]$, então e_{I_s}, e_{I_m} necessariamente terão $\frac{r}{2}$ coordenadas não nulas na mesma posição (para obter $\frac{r}{2}$ coordenadas -1's). Mas observe que no máximo

$$|I_s| + |I_m| = 6t - 2.$$

E temos que $6t - 2 = \frac{3r-4}{2} < \frac{3r}{2}$, onde $\frac{3r}{2}$ é a quantidade de 1's necessária para se obter um g_i de $\mathcal{G}$,ou seja, é impossível obter g_i a partir da soma $e_{I_s} + e_{I_m}$. Diferença de dois e_I's nunca dará um g_i de $\mathcal{G}$, pois todos eles tem um número ímpar de 1's e nos g_i's tanto 1's como -1's aparecem um número par de vezes, é claro que se os dois e_I's tiverem 1 na mesma posição, então na diferença aparecerá um zero e novamente não temos g_i de $\mathcal{G}$. Portanto a única A-soma zero subsequência de comprimento 3 possível necessariamente inclui um elemento de $\mathcal{E}$ e dois elementos de $\mathcal{G}$.

Sejam v, w elementos de $\mathcal{G}$. Primeiramente, observamos que se eles não tem -1's em comum, então o resultante de $v+w$ tem uma quantidade par de zeros e uma quantidade par -1's, ou seja, não é possível obter $-e_I$. Se fizermos $v-w$ também teremos uma quantidade par de coordenadas não nulas, ou seja, também não temos $\pm e_I$. Agora, supondo que v, w tenham um -1 na mesma posição, é simples verificar que (os cálculos são módulo 3) ou $v+w$ ou $v-w$ tem duas de suas entradas com sinais opostos e consequentemente nenhum deles pode ser somado a um $\pm e_I$ para obter uma subsequência A-soma zero de tamanho 3, já que todas as entradas de $\pm e_I$ não nulas tem o mesmo sinal. ∎

Primeiramente, observamos que com estes cinco lemas, obtemos um limite inferior para $\eta_A(C_3^r)$, para todo r par, com $r > 4$. Agora, para observarmos a melhora em relação ao limite inferior obtido no Lema 3.1 faremos algumas comparações. O Lema 3.1 dá $\eta_A(C_3^6) \geq 2^5 + 1 = 33$, $\eta_A(C_3^8) \geq 2^7 + 1 = 129$, $\eta_A(C_3^{10}) \geq 2^9 + 1 = 513$,

$\eta_A(C_3^{12}) \geq 2^{11} + 1 = 2049$ e $\eta_A(C_3^{14}) \geq 2^{13} + 1 = 8193$. E dos cinco lemas provados nesta seção obtemos $\eta_A(C_3^6) \geq 42$, $\eta_A(C_3^8) \geq 156$, $\eta_A(C_3^{10}) \geq 593$, $\eta_A(C_3^{12}) \geq 2312$ e $\eta_A(C_3^{14}) \geq 10818$. Percebe-se, claramente, que quanto maior for o valor de r, melhor será a diferença do limite inferior fornecido para $\eta_A(C_3^r)$ dos cinco lemas desta seção para o limite fornecido pelo Lema 3.1.

Referências Bibliográficas

[1] S. D. Adhikari, Y. G. Chen, J. B. Friedlander, S. V. Konyagin, F. Pappalardi. Contributions to zero-sum problems. *Discrete Math.*, **306**:1-10, 2006.

[2] S. D. Adhikari, R. Balasubramanian, P. Rath, Some combinatorial group invariants and their generalizations with weights. *Additive combinatorics, (Eds. Granville, Nathanson, Solymosi)*, 327-335, CRM, *Proc. Lecture Notes*, 43, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2007.

[3] S. D. Adhikari, R. Balasubramanian, F. Pappalardi, P. Rath. Some zero-sum constants with weights. *Proc. Indian Acad. Sci.* (Math. Sci.), **118**(2):183-188, 2008.

[4] S. D. Adhikari, Y. G. Chen. Davenport constant with weights and some related questions II. *J. Combin. Theory*, Ser. A**115(1)**: 178-184, 2008.

[5] S. D. Adhikari, C. David, J. J. Urroz. Generalizations of some zero-sum theorems. *Integers Electron Comb. Number Theory* **8**: A52, 2008.

[6] S. D. Adhikari, P. Rath. Remarks on some zero-sum theorems. *Proc. Indian Acad. Sci.* (Math. Sci.), **119**(3): 275-281, 2009.

[7] J. Bierbrauer, Y. Edel. Bounds on affine caps. *J. Comb. Des.*, **10**: 111-115, 2002.

[8] R. Chi, S. Ding, W. D. Gao, A. Geroldinger, W. A. Schmid. On zero-sum subsequence of restricted size. IV. *Acta Math. Hungar.*, **107**(4):337-344, 2005.

[9] Y. Edel, S. Ferret, I. Landjev, L. Storme. The classification of the largest caps in $AG(5,3)$. *J. Comb. Theory*, **99**:95-110, 2002.

[10] Y. Edel, C. Elsholtz, A. Geroldinger, S. Kubertin, L.Rackham. Zero-sum problems in finite abelian groups and affine caps. *Quart. J. Math.*, **58**:159-186, 2007.

[11] Y. Edel. Sequences in abelian groups G of odd order without zero-sum subsequences of length $exp(G)$. *Des. Codes Cryptogr.*, **47**:125-134, 2008.

[12] C. Elsholtz. Lower bounds for multidimensional zero sums. *Combinatorica*, **24**:351-358, 2004.

[13] P. Erdös , A. Ginzburg, A. Ziv. Theorem in the additive number theory. *Bulletim Research Council Israel* **10F**, 41-43, 1961.

[14] W. D. Gao. On zero-sum subsequence of restricted size. II. *Discrete Math.*, **271(1-3)**:51-59, 2003.

[15] W. D. Gao, R. Thangadurai. A variant of Kemnitz conjecture. *J. Comb. Theory*, Ser. A**107**:69-86, 2004.

[16] W. D. Gao, A. Geroldinger. Zero-sum problem in finite abelian groups: A survey. *Expositiones Mathematicae*, **24**(6):337-369, 2006.

[17] W. D. Gao, Q. H. Hou, W. A. Schmid, R. Thangadurai. On short zero-sum subsequences II. *Integers Electron Comb. Number Theory*, **7**: A21, 2007.

[18] D. J. Grynkiewicz. A weighted Erdös-Ginzburg-Ziv theorem. *Combinatorica* **26**, no. 4, 445–453, 2006.

[19] D. J. Grynkiewicz, L. E. Marchan, O. Ordaz. A weighted generalization of two theorems of Gao. Preprint available at: http://www.diambri.org/Mathpdfs/Z-gao-weighted-Davenport-FV.pdf, 2009.

[20] H. Harborth. Ein Extremalproblem für Gitterpunkte. *J. Reine Angew. Math.*, **262**: 356-360, 1973.

[21] R. Hill. On the largest size of a cap in $S_{5,3}$. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.*, **54**: 378-384, 1973.

[22] R. Hill. Caps and Codes. *Discrete Math.*, **22**: 111-137, 1978.

[23] A. Kemnitz. On a lattice point problem. *Ars Combinatoria*, **16**: 151-160, 1983.

[24] D. E. Knuth, *Computerprogramme*, http://www-cs-faculty.stanford.edu/ knuth /programs/setset-all.w.

[25] R. Meshulam. On subsets of finite abelian groups with no 3-term arithmetic progressions. *J. Comb. Theory*, A**71**: 168-172, 1995.

[26] A. C. Mukhopadhyay. Lower bounds on $m_t(r, s)$. *J. Comb. Theory*, Ser. A**25**: 1-13, 1978.

[27] J. E. Olson. A combinatorial problem on finite abelian groups I. *Jornal of Number Theory*, **1**: 8-10, 1969.

[28] J. E. Olson. A combinatorial problem on finite abelian groups II. *Jornal of Number Theory*, **1**: 195-199, 1969.

[29] C. Reiher. On Kemnitz'conjecture concerning lattice points in the plane. *Ramanujan J.*, **13**: 333-337, 2007.

[30] R. Thangadurai. A variant of Davenport's constant. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, **117**: 147-158, 2007.

[31] X. Xia. Two generalized constants related to zero-sum problems for two special sets. *Integers Electron Comb. Number Theory*, **7**: A52, 2007.

[32] X. Xia, Z. Li. Some Davenport constants with weights and Adhikari and Rath's conjecture. *Ars Combin.* **88**, 83-95, 2008.

[33] P. Yuan, X. Zeng. Davenport constant with weights. *European J. Combin.* **31**: 677-680, 2010.