UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE DOUTORADO EM ECONOMIA

CRESCIMENTO E DISTRIBUIÇÃO DE RENDA: ENSAIOS SOBRE MACRODINÂMICA

Geraldo Sandoval Góes

Brasília-DF
2006

TESE DE DOUTORADO EM ECONOMIA

CRESCIMENTO E DISTRIBUIÇÃO DE RENDA: ENSAIOS SOBRE MACRODINÂMICA

Tese de doutorado em economia-versão final, orientada pelo Professor Joanílio Rodolpho Teixeira e co-orientada pelo professor Steve Anthony De Castro e aprovada com unanimidade pela Banca Examinadora instituída de acordo com o Regulamento do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Economia da Universidade de Brasília-UnB.

Brasília-DF
2006

TESE DE DOUTORADO EM ECONOMIA-VERSÃO FINAL

CRESCIMENTO E DISTRIBUIÇÃO DE RENDA: ENSAIOS SOBRE MACRODINÂMICA

Autor: Geraldo Sandoval Góes

Banca Examinadora
Joanílio RodolphoTeixeira (orientador)
Steve Anthony De Castro (co-orientador)
Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza (membro da Banca)
Cláudio Hamilton M. dos Santos (membro externo da Banca)
Bruno de Oliveira Cruz (membro externo da Banca)
Jorge Abrahão de Castro (membro da Banca-suplente externo)
Roberto de Góes Ellery Júnior (membro da Banca-suplente interno)

À minha mãe Silvia e ao meu pai José Góes (in memoriam)
À Aríuce,Tatiana e Larissa

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais cujo exemplo tento seguir.
À minha esposa e filhas pelo apoio que me dedicaram.
Ao meu orientador Joanílio Rodolpho Teixeira pela sua orientação inestimável.
Ao meu co-orientador Steve De Castro pelas suas excelentes contribuições e observações.
Ao Dr. Bruno O. Cruz, Dr. Cláudio H. dos Santos e Professor Rodrigo Peñaloza, membros da Banca Examinadora pelas valiosas sugestões, especialmente no estágio final da pesquisa.
Ao programa de pós-graduação em economia da UnB que muito contribuíram para completar minha formação acadêmica, em particular aos professores André Rossi, Mirta Bugarin, Maurício Bugarin, Paulo Coutinho e Maria Eduarda Tanuri.
Aos colegas do Departamento de Economia, Constantino Mendes, André Nunes, César Frade, Gil Riela e Milene Takasago.
Aos colegas do Ipea, Sérgio Piola, Maria da Piedade e Luciana Mendes.
Aos amigos, Hugo Boff, Paulo Estevão, Eduardo Velho, Renato Friedman, Hipólito Gadelha, Cláudio Lobo e Maurício Abi-Chain.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver alguns ensaios de macrodinâmica do crescimento, tendo como focos a questão da distribuição da renda e de como as expectativas, vis a vis a história são condicionantes dos equilíbrios. No Capítulo 1 é apresentada uma introdução do trabalho. O capítulo 2 mostra como a assimetria comportamental entre trabalhadores e capitalistas em relação à possibilidade de deixar herança impacta às decisões dos agentes em termos de consumo, poupança e estoque de capital. É apresentada uma abordagem alternativa ao modelo de Baranzini para o caso contínuo, permitindo o progresso técnico e também introduzindo diferenças comportamentais entre trabalhadores e capitalistas tanto em termos de dotações iniciais quanto em relação às preferências. Dentro da abordagem pós-Keynesiana, o presente trabalho obteve importantes resultados: (i) A utilização de métodos matemáticos mais modernos e a confirmação dos resultados obtidos por Baranzini (1991); (ii) como a possibilidade de deixar herança por parte dos trabalhadores altera o seu consumo e o seu estoque de capital; (iii) a determinação endógena da propensão marginal a poupar dos capitalistas e (iv) a distribuição funcional da renda agregada do modelo de Baranzini. O capitulo 3 avalia a trajetória do "capital share" em um modelo de variedades. O arcabouço teórico é o modelo de Ciccone e Matsuyama "Start-up cost and pecuniary externalities as barriers to economic development". A análise da dinâmica da participação da renda do capital na renda total dos agentes da economia mostrou que mesmo que o número n de variedade (que é também o número de produtos intermediários) aumente, então a participação do capital na renda da economia não cresce indefinidamente; ou seja, existe um número limite de variedades (insumos intermediários) que corresponde ao limite de crescimento do "capital share". Se o número de insumos intermediários for maior do que o número limite de variedade a divisão da participação na renda dessa economia se manterá constante. O capítulo 4 mostra a relação entre história e expectativas na geração de múltiplos equilíbrios em modelos de migração setorial. A pesquisa aqui realizada questiona a crítica de Benabou e Fukao ao artigo de Krugman "History versus expectation" e analisa qual o impacto da utilização de outras formas funcionais da produtividade do trabalho sobre a dinâmica do modelo.

Palavras Chaves: Classes, Herança, Crescimento, Distribuição de renda e Expectativa.

Classificação JEL: E12 e O11

ABSTRACT

This study attempts to develop macro-dynamic growth essays, focusing on income distribution and the question of how expectations vis a vis history is equilibrium determinants. Chapter 1 reveals how behavior asymmetry between workers and capitalists relative to the possibility to leave bequest impacts on their decisions in terms of consumption, savings and capital stock. Within the post Keynesian approach, the underlying research has obtained important results, such as the way the possibility to leave bequest on the workers´ end alters their consumption pattern and their capital stock. Chapter 2 assesses the "capital share" path in a variety model. The theoretical framework used is the Ciccone and Matsuyama model "Start-up cost and pecuniary externalities as barriers to economic development". When assessing the dynamics of the capital income share within total income of agents in the economy, it can be seen that even when the number *n* of varieties increases, the capital share in total income in the economy does not always increase, that is, there is a specific number of varieties (intermediate inputs) that corresponds to capital share's upper boundo. If the number of intermediate inputs is larger than this specific number of varieties, the division of income participation will be kept steady. In other words, the economic growth process, which raises income participation on the workers´ end in a sector of finished goods. Chapter 4 estudies the relation between history and expectations in the generation of multiple equilibria with migration between 2 sectors. The research questions Benabou´s and Fukao´s criticism of Krugman´s paper "History versus Expectations" and analyses the impact on the model's dynamics of the case where other functional forms for labor productivity are used.

GOES, Geraldo Sandoval

Crescimento e Distribuição de Renda: Ensaios sobre Macrodinâmica, 110p.
(UnB, Departamento de Economia, tese doutorado, 2006)

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Departamento de Economia.

1. Crescimento　　2. Distribuição de Renda
3. História e Expectativa　　4. Classes e Herança

I. UnB – Departamento de Economia

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO GERAL

O presente trabalho é uma extensão, em separado, de três artigos:

(i) O artigo de Baranzini (1991) que mostra que a dinâmica econômica do processo de acumulação de capital das classes depende da riqueza herdada. Existe uma classe rica, na qual todas as gerações investem em capital, o trabalho é especializado e deixam uma grande herança. Existe uma classe pobre, na qual as pessoas nada herdam, o trabalho não é especializado e deixam menos para seus filhos. Por essa razão, a distribuição inicial da riqueza determina o tamanho desses dois tipos de classes e, portanto a dinâmica da economia.

(ii) O artigo de Ciccone e Matsuyama (1995) que mostra como é possível uma economia de concorrência monopolística cair na armadilha do subdesenvolvimento caso o número de variedades (insumos especializados) seja suficientemente pequeno.

(iii) O modelo de Fukao e Benabou (1993) que critica o modelo de Krugman (1991) em relação ao tempo em que a economia atinge o seu bordo (o limite de mão-de-obra) e também quanto aos estados terminais da dinâmica do modelo.

O capítulo 2, através de uma abordagem Pós-Keynesiana (de duas classes), obteve importantes resultados: (i) a confirmação dos resultados obtidos por Baranzini; (ii) como a possibilidade de deixar herança, no sentido imperativo, por parte dos trabalhadores altera o seu consumo e o seu estoque de capital; (iii) a determinação endógena (a partir de parâmetros do modelo) da propensão a consumir dos capitalista e (iv) a distribuição funcional da renda agregada do modelo de Baranzini. Diferente do que supõe Baranzini, atualmente, não somente os capitalistas, mas também os trabalhadores, em um esforço altruísta, podem também deixar herança, caso isso ocorra, o modelo mostrou então que o consumo inicial dos mesmos diminui, porém os respectivos estoques de capital, aumentam. Como o estoque de capital agregado é dado pela soma dos estoques de capital de trabalhadores e capitalistas, notamos que na hipótese de trabalhadores e capitalistas deixarem herança, mesmo que estes deixem um estoque maior de herança do que aqueles, o estoque total de capital da economia aumentará, expandindo, portanto, o crescimento da economia.

O capítulo também mostrou, a partir da obtenção da expressão da renda dos trabalhadores, que apesar da hipótese dos trabalhadores poderem deixar herança, a distribuição de renda não é melhorada, o que sinaliza para a necessidade de políticas por parte do Governo a fim de melhorar a distribuição de renda, tais como políticas de transferência de renda ou subsídios financiados por impostos sobre o capital.

O capítulo 3 faz uma análise da participação do capital do modelo de Ciccone e Matsuyama (1995), o que permite estudar como se dá o processo de acumulação em uma economia cujo motor de crescimento é a adoção de novas tecnologias. A análise dinâmica dessa participação da renda do capital na renda total dos agentes econômicos mostrou que é possível, ao mesmo tempo, que a economia cresça e haja um aumento da participação da renda do capital. Porém a partir de um número crítico de variedades, mesmo que o número de produtos intermediários aumente, a participação do capital na renda da economia não cresce indefinidamente; ou seja, existe um número limite de variedades (insumos intermediários) que corresponde ao limite de crescimento do *capital share.* Se o número de insumos intermediários for maior do que o número limite de variedades a divisão da participação na renda dessa economia se manterá constante.Em outras palavras, não necessariamente um processo de crescimento aumenta a participação da renda por parte dos detentores de capital do setor final da economia.

A análise do modelo mostra que caso se deseje estudar a implicação da distribuição para o crescimento, o modelo deve ser estendido através da introdução do setor governamental e a introdução de alguma política de transferência de renda financiada por impostos. O capítulo também mostra uma tipologia das trajetórias de equilíbrio das variáveis do modelo cuja análise indica que as possibilidades de armadilha do desenvolvimento não necessariamente seguem a linha indicada por Ciccone e Matsuyama.

O capítulo 4 apresenta um importante trabalho de Krugman (1991) sobre o papel das expectativas e das condições iniciais como determinantes das trajetórias de equilíbrio. A distinção entre história e expectativas como determinantes do equilíbrio é importante. Como mostra a Literatura tanto o aspecto das questões históricas quanto o das expectativas auto-realizáveis são diferentes não apenas do ponto de vista padrão de competitividade, mas também são significantemente diferentes uns dos outros. Para

Krugman (1991), devem existir casos nos quais ambos sejam relevantes. Também é apresentada a crítica de Fukao e Benabou (1993) quanto: (i) ao horizonte de tempo; (ii) em relação aos pontos terminais da economia. Mostramos que a apesar da primeira crítica ser pertinente, o argumento utilizado em relação aos pontos terminais não especificou de modo correto o preço-sombra e conseqüentemente, essa crítica não é tão robusta como afirmam os autores.

As linhas de pesquisa futura, a partir dos resultados obtidos neste trabalho, terão como objetivo:

(i) Em relação ao modelo de Baranzini, mostra como a introdução do governo e uma aplicação de políticas redistributivas de transferências de renda ou subsídios, financiadas por tributação sobre o capital, pode melhorar a distribuição de renda.

(ii) Em relação ao modelo de Ciccone e Matsuyama e o modelo de Krugman, elaborar um modelo que permita realizar uma síntese dos modelos acima citados.

(iii) Ainda em relação ao modelo de Ciccone e Matsuyama, pesquisar como a introdução de políticas (fiscal ou monetária) ou a introdução de expectativas podem tirar a economia da armadilha do subdesenvolvimento.

Bibliografia

Baranzini,M. (1991). A Theory of Wealth Distribution and Accumulation. Oxford: Clarendon Press.

Ciccone,A. and Matsuyama,K. (1995). "Start-up costs and pecuniary externalities as barriers to economic development". Journal of Development Economics. Vol. 49, 33-59.

Fukao,K. and Benabou,R. (1993). "History versus Expectations: A comment". Quarterly Journal of Economics, 535-542.

Krugman,P. (1991). "History versus Expectations", Quarterly Journal of Economics. 651-667.

Krugman,P (1987). "The Narrow Moving Band, the Dutch Disease and the Competitive Consequences of Mrs. Thatcher: Notes on Trade in the Presence of Dynamic Economies of Scale". Journal of Development Economics, XXVII, 41-55

CAPÍTULO 2
CRESCIMENTO E DISTRIBUIÇÃO DE RENDA: O EFEITO HERANÇA SOBRE O PROCESSO DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL EM UMA ABORDAGEM PÓS-KEYNESIANA

1. Introdução

O texto de Baranzini (1991) tem como objetivo estender o modelo Pasinettiano em diversas direções. Sua abordagem é pós-Keynesiana no sentido de tratar da distribuição e acumulação de riqueza, no contexto de um modelo do tipo Kaldor (1955)-Pasinetti (1962), envolvendo duas classes sociais—trabalhadores e capitalistas. Por hipótese o modelo de Baranzini no tempo contínuo permite tratar o progresso técnico, onde capitalistas deixam herança, mas o mesmo não ocorre com os trabalhadores. Essa assimetria de comportamento afeta as decisões de consumo, poupança e acumulação de capital.

O presente capítulo é uma alternativa à metodologia utilizada pelo modelo acima citado e segue a mesma linha de pesquisa executada por Teixeira, Sugahara e Baranzini, (2002), além de Baranzini, Benjuíno, e Teixeira (2003). O texto analisa como a possibilidade dos capitalistas deixarem herança, em contraste com a impossibilidade dos trabalhadores fazerem o mesmo, afeta decisões de consumo, poupança e acumulação de capital dessas classes.

Existem diferenças metodológicas entre a teoria neoclássica da produtividade marginal e a abordagem pós-Keynesiana de crescimento e distribuição. O modelo de Baranzini utiliza elementos de ambas as abordagens e, portanto pode ser considerado um modelo heterodoxo. Entretanto essa disputa metodológica está fora do escopo do presente trabalho. O trabalho de Branzini (1991) faz parte do contexto de pesquisa de diversos autores como Samuelson e Modigliani (1966), Baranzini (1975), Ramanathan (1976), Darity (1981), O`Connell (1995) e Faria e Teixeira (1999).

Uma limitação do modelo de Baranzini é que capitalistas e trabalhadores possuem as mesmas preferências. Isto representa uma limitação no sentido de que, em

Baranzini trabalhadores e capitalistas, além de possuírem a mesma função utilidade, possuem também a mesma taxa de desconto intertemporal[1], e esta é exatamente a critica que Masson (1992) faz ao modelo de Baranzini. Para esse autor a taxa de desconto intertemporal que aparece na função utilidade dos capitalistas é a mesma que é utilizada na função de utilidade dos trabalhadores. Neste sentido o presente trabalho é mais geral no sentido de que o presente modelo permite realizar análises, como por exemplo, a comparação relativa entre os consumos ótimos de trabalhadores e capitalistas, análise esta que o modelo de Baranzini não permite, pois no seu modelo esses consumos são exatamente iguais.

Além disso, ele opera apenas em situação de *steady-state*, e utiliza um instrumental matemático que negligencia os avanços recentes de economia matemática. No presente trabalho não se pretende simplesmente utilizar técnicas mais modernas, pois não se trata aqui de se superestimar a aplicação do principio do máximo em problemas econômicos, pois como ressalta Shell (1966), raros são os problemas tratados com o princípio do máximo que não podem ser resolvidos com uma extensão do cálculo de variações, mas sim de apresentar uma análise de acordo com as técnicas mais utilizadas de controle ótimo, contornando assim, como fez Baranzini, a necessidade de se dar uma ênfase na modelagem das restrições dos agentes.

Uma diferença fundamental entre o presente trabalho e o de Baranzini é que a taxa de desconto intertemporal dos trabalhadores é maior que a taxa de desconto dos capitalistas, ou seja, os trabalhadores possuem uma preferência pelo consumo presente maior do que os capitalistas.Apesar de não haver evidencia empírica de que as taxas de desconto sejam diferentes para trabalhadores e capitalistas, como mostra Dynan et. Alli (2004), do ponto de vista teórico, e sob certos aspectos, o presente trabalho vai ao encontro do artigo de Le Van e Vailakis (2003).

Além dessa introdução, na seção 2 apresentamos:

(i) O modelo utilizando técnicas de otimização dinâmica, em particular o Princípio do Máximo de Pontryagin, que possibilita a otimização dos comportamentos dos agentes, já incorporando a remuneração sobre os estoques de capital ao invés de uma forma indireta como é utilizada por Baranzini;

(ii) Uma análise comparativa com os resultados de Baranzini;

[1] Veja Masson (1992), onde essa preocupação é salientada em relação ao modelo.

(iii) A análise do consumo inicial (determinada a partir dos parâmetros do modelo) que mostra que o mesmo é maior para o capitalista, mesmo este deixando herança.

A seção 3 apresenta os macro-modelos. Na seção 4 analisamos o caso em que tanto capitalistas quanto trabalhadores deixam herança. A quinta seção contém a expressão da participação da renda do trabalhador na renda agregada. A última seção contém, as conclusões.

2. O modelo: os impactos do efeito herança sobre as decisões dos agentes econômicos

O Objetivo do presente trabalho é mostrar como a assimetria entre capitalistas e trabalhadores em relação à possibilidade de herança afeta o processo de acumulação de capital da economia.

A seguir mostraremos as principais hipóteses e características do modelo.

(i) A divisão da economia em duas classes: Seguindo a tradição dos macro-modelos pós-keynesianos a economia é composta de duas classes: trabalhadores e capitalistas. Os trabalhadores possuem duas fontes de renda: a primeira é fruto do seu trabalho, isto é, eles recebem um salário w(t) que cresce à uma taxa m (suposta a mesma para todos os trabalhadores); a outra renda dos trabalhadores é derivada de seus ativos acumulados (k_w). Os capitalistas obtém toda sua renda de seu capital financeiro (k_c), ou seja, os capitalistas são *rentiers* puros.

(ii) O horizonte intertemporal: Os indivíduos (trabalhadores e capitalistas) exercem suas atividades (trabalhando ou administrando seus ativos) durante um horizonte finito de tempo T.

(iii) As hipóteses biológicas e demográficas: No instante t=0 todos os indivíduos iniciam suas atividades, ou seja, ou iniciam sua vida laboral (caso sejam trabalhadores) ou recebem seus ativos de herança (caso sejam *rentiers* puros). O modelo possui progresso técnico do tipo Harrod-neutro no qual a taxa de crescimento populacional é exógena, constante, e igual à g. O número de indivíduos (sejam capitalistas ou trabalhadores) em um instante t é dado por $N(t)=N_0.e^{gt}$, onde N_0 é o número de indivíduos no instante t=0 (N_0^c para os capitalistas e N_0^w para os trabalhadores), ou seja a taxa decrescimento populacional é suposta a mesma para capitalistas e trabalhadores.

Seguindo a tradição de Harrod (1948) chamaremos a taxa natural de crescimento da economia de n=g+m, onde m é a taxa de progresso técnico-aumentativo.

Os trabalhadores não deixam herança. Cada capitalista nascido em t=0 herda um estoque de capital k_0 e deixa de herança, no instante T um montante igual à $k_0.e^{nT}$, pois se supõe que, diferente dos trabalhadores, os capitalistas possuem a capacidade(em termos de rendimentos dos seus estoque de capital) de deixar herança. O modelo supõe preferências dinásticas, ou seja, o capitalista deixa uma heranças no instante T, apesar do horizonte de tempo do modelo ser exatamente T.

Os capitalistas são *rentiers* puros, isto é, derivam sua renda do capital que possuem. Os trabalhadores possuem dois tipos de renda: (a) a taxa de salário w(t) que cresce à uma taxa m, isto é, $w(t) = w_0 e^{mt}$ e (b) a renda derivada de seus ativos acumulados (rk_w), ou seja, o estoque de capital dos trabalhadores k_w são remunerados também a uma taxa de juros r.

A taxa de juros r, que tanto trabalhadores quanto capitalistas auferem sobre suas poupanças acumuladas, é igual à taxa média de lucro e também é suposto um mercado perfeito de capital no qual cada agente possa emprestar ou pegar emprestado à uma mesma taxa de juros r.

Os agentes possuem função utilidade do tipo utilidade marginal iso–elástica[2] $U(c(t)) = \frac{1}{\beta}\, c(t)^{\beta}$, onde β<1. Note que portanto $\gamma = \dfrac{1}{1-\beta}$ é a elasticidade de substituição intertemporal.

A função de produção é do tipo Kaldor- Pasineti, semelhante a de Leontief: $Y=\min\{K/v;\ N_0.e^{n.t}\}$, onde K é o estoque de capital e v é a relação capital/produto. Isto é, a economia atinge o pleno emprego com $Y= K/v= N_0.e^{nt}$, e a força de trabalho crescendo à uma taxa g, ou seja, o crescimento do produto é limitado tanto pelo crescimento do estoque de capital quanto pelo crescimento da força de trabalho e em equilíbrio a taxa de poupança s= S/Y é igual a v(g+m),isto é, a taxa de garantia s/v é igual à taxa natural g+m.

[2] Devemos notar que essa função utilidade é contínua. Basta definir em $\beta = 0$, $U(c(t)) = \ln c(t)$, resultado este obtido após aplicar o Teorema de L´Hospital para uma transformada monótona da função utilidade.

Uma hipótese crucial é a taxa de desconto intertemporal dos trabalhadores δ_w é maior que a taxa de desconto dos capitalistas δ_c, em outras palavras os trabalhadores possuem uma preferência pelo consumo presente maior do que os capitalistas.

2.1Os micro-modelos

Seguindo a tradição de Harrod (1948), a taxa garantida (s/v) deve ser igual à taxa natural de crescimento da economia (g+m), que por sua vez é igual à taxa de crescimento esperada (g^e). Caso a taxa de crescimento esperada seja maior que a taxa de garantia então o produto realizado será maior que o produto esperado, de modo análogo, o produto realizado será menor que o produto esperado caso a taxa de crescimento esperado seja menor que a taxa de garantia, de maneira que, em um contexto de crescimento em estado estacionário, a taxa de crescimento esperado deve se igualar tanto à taxa de garantia, quanto à taxa de crescimento natural da economia.

Como a taxa de garantia é igual à taxa de crescimento e conseqüentemente é uma constante, então, a flexibilização da relação s/v, é feita através da distribuição funcional da renda, ou seja, a taxa de poupança é decomposta na poupança do trabalhador e na poupança do capitalista. Portanto a análise dos micro-modelos deve contemplar tanto o comportamento do trabalhador quanto o comportamento do rentier.

2.1.1 O comportamento do trabalhador

O problema de um trabalhador é de escolher a trajetória ótima de consumo que maximizar o valor presente da utilidade do consumo, ou seja, ele deve resolver o programa de otimização dinâmica:

$$\max \int_0^T \frac{1}{\beta} c_w^{\beta} e^{-\delta_w t} dt$$

sujeito a: $\dot{k}_w = w + rk_w - c_w$ (2.1)

$k_w(o) = k_w(T) = 0$ (2.2)

No problema acima a variável de estado (k_w) é o estoque de capital de um trabalhador e o consumo do mesmo trabalhador (c_w) é a variável de controle. A restrição (2.1) diz que a renda por trabalhador, auferida com salários e remuneração do estoque de capital, deve financiar seu consumo e a variação do estoque de capital[3]. A equação (2.2) indica que o trabalhador não recebe e nem deixa herança.

[3] Como o leitor notará estamos em um contexto de uma economia descentralizada à la Sidrauski. Veja Blanchard e Fischer (1989) e Foley &Sidrauski (1971).

O Hamiltoniano de valor corrente será: $H = \frac{1}{\beta} c_w^{\beta} + \lambda(w + rk_w - c_w)$

Aplicando o Princípio do Máximo de Pontryagin segue-se:

(a) da condição de primeira ordem $\frac{\partial H}{\partial c_w} = 0$ para o Hamiltoniano:

$$\lambda(t) = c_w^{\beta - 1} \tag{2.3}$$

(b) da equação de movimento $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial k_w} + \delta_w \lambda$ para a variável de coestado λ:

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-(r - \delta_w)t} \tag{2.4}$$

Onde se supõe que $r > \delta_W > \delta_C$. As equações (2.3) e (2.4) fornecem a equação da trajetória do consumo de um trabalhador $c_w(t) = c_w(0)e^{g^* t}$, onde $g^* = \frac{(r - \delta_w)}{(1 - \beta)}$ é a taxa de crescimento do consumo do trabalhador.

(c) a equação de movimento $\dot{k}_w = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = w(t) + rk_w(t) - c_w(t)$ para o estoque de capital do trabalhador k_w fornece a equação diferencial:

$$\dot{k}_w - rk_w = w_0 e^{mt} - c_w(0)e^{g^* t} \tag{2.5}$$

A solução homogênea dessa equação é $k_w^H(t) = De^{rt}$ e a solução particular é $k_w^p(t) = Ee^{mt} + Fe^{g^* t}$, onde $E = \frac{w_0}{m - r}$ e $F = \frac{c_w(0)}{r - g^*}$. Então a equação da trajetória do estoque de capital do trabalhador é:

$$k_w(t) = De^{rt} + \frac{w_0}{m - r} e^{mt} + \frac{c_w(0)}{r - g^*} e^{g^* t} \tag{2.6}$$

(d) As condições de contorno k_w(o)= k_w(T)=0, quando substituídas na equação (2.6) permitem obter os valores das constantes D e $c_W(0)$:

$$D = \frac{w_0}{r - m} \frac{[1 - e^{(m - g^*)T}]}{[1 - e^{(r - g^*)T}]} \qquad \text{e} \qquad c_w(0) = w_0 \frac{(r - g^*)}{(r - m)} \frac{[1 - e^{(m - r)T}]}{[1 - e^{(g^* - r)T}]}$$

É interessante notar que a condição de segunda ordem[4] para o Hamiltoniano é satisfeita, isto é, $\frac{\partial^2 H}{\partial c_w^2} = (\beta - 1)c_w^{\beta - 2} < 0$ e portanto $c_w(t) = \lambda^{\frac{1}{\beta - 1}}$ maximiza $H(c_w, t)$.

Como resultado da análise até aqui desenvolvida segue-se:

(i) A trajetória ótima de consumo para um trabalhador representativo, isto é, o plano ótimo de consumo é:

$$c_w^*(t) = c_w(0)e^{g^* t} \tag{2.7}$$

onde : $g^* = \frac{(r - \delta_w)}{(1 - \beta)}$, $c_w(0) = w_0 A \frac{r - g^*}{r - m}$ e $A = \frac{1 - e^{(m - r)T}}{1 - e^{(g^* - r)T}}$.

Devemos notar pelas equações acima e pelo fato de que $\beta<1$, que a taxa de juros r deve ser maior do que a taxa de desconto intertemporal do trabalhador, δ_w , para que o consumo do trabalhador seja uma função crescente do tempo.

Diferenciando c_w (0) parcialmente em relação aos parâmetros δ_w e T obtém-se uma análise das propriedades de c_w (0):

$\partial c_w(0)/\partial \delta_w > 0$: O consumo inicial do trabalhador é uma função crescente da sua taxa de desconto intertemporal, ou seja , quanto maior a taxa de desconto intertemporal maior será o consumo inicial requerido pelo trabalhador.

$\partial c_w(0)/\partial T > 0$: quanto maior o horizonte de tempo maior será o consumo inicial requerido pelo trabalhador.

(ii) A trajetória ótima do estoque de capital de um trabalhador representativo:

$$k_w^*(t) = \frac{w_0}{r - m} \frac{[1 - e^{(m - g^*)T}]}{[1 - e^{(r - g^*)T}]} e^{rt} + \frac{w_0}{m - r} e^{mt} + \frac{w_0}{(r - m)} \frac{[1 - e^{(m - r)T}]}{[1 - e^{(g^* - r)T}]} e^{g^* t} \tag{2.8}$$

Podemos notar que o estoque per-capita do trabalhador é uma função crescente da taxa de juros r e da taxa de crescimento do consumo $g^* = \frac{(r - \delta_w)}{(1 - \beta)}$.

2.1.2. O comportamento do *rentier*

O problema do capitalista também é o de maximizar o valor presente do consumo, ou seja:

---

[4] Note que $\dot{k}_w$ é uma função linear de k_w e c_w e portanto côncava e que a função objetivo $\frac{1}{\beta} c_w^{\beta}$ também é concava e consequentemente as condições de suficiência de Mangasarian são satisfeitas.

$$\max \int_0^T \frac{1}{\beta}\; c_c^{\beta} e^{-\delta_c t} dt$$

$$\text{sujeito a : } k_c(0) = k_0$$

$$\dot{k}_c = rk_c - c_c$$

$$k_c(T) = k_0 e^{nT}$$

A equação $\dot{k}_C = rk_C - c_c$ diz que a remuneração dos estoque de capital do capitalista é alocada no seu consumo e no seu investimento (variação do estoque do seu capital). A equação $k_C(T) = k_0 e^{nT}$ é imposta pela hipótese de que o capitalista, no instante T, deixa de heranças um estoque de capital igual a $k_0 e^{nT}$. Também aqui o estoque de capital é a variável de estado e o consumo é a variável de controle. O capitalista recebe ao nascer um estoque k_0 de herança e por sua vez deixa de herança , no tempo T, um estoque de capital igual a $k_0.e^{nT}$.

O Hamiltoniano de valor corrente é $H = \frac{1}{\beta} c_c^{\beta} + \lambda(rk_c - c_c)$. A condição de primeira ordem é $\frac{\partial H}{\partial c_c} = c_c^{\beta-1} - \lambda = 0$, logo: $\lambda(t) = c_c^{\beta-1}$ (2.9)

Pela equação de movimento para a variável de co-estado λ tem-se:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial k_c} + \delta_c \lambda$$

$$\dot{\lambda} = -\lambda r + \delta_c$$

$$\dot{\lambda} + (r - \delta_c)\lambda = 0$$

A solução dessa equação diferencial homogênea é:

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-(r-\delta_c)t} \tag{2.10}$$

Igualando as equações (2.9) e (2.10) obtemos:

$$c_c^{\beta-1} = \lambda_0 e^{-(r-\delta_c)t}$$

$$c_c(t) = \lambda_0^{\frac{1}{\beta-1}} e^{-\frac{(r-\delta_c)}{\beta-1}t}$$

$$c_c(t) = c_c(0)e^{\bar{g}t} \text{ onde } \bar{g} = \frac{(r-\delta_c)}{(1-\beta)} \tag{2.11}$$

Da equação de movimento para o estoque de capital do capitalista obtemos:

$$\dot{k}_c = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = rk_c - c_c \tag{2.12}$$

Substituindo (2.11) em (2.12) segue-se:

$$\dot{k}_c - rk_c = -c_c(0)e^{\bar{g}t} \tag{2.13}$$

A solução dessa equação diferencial é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular. A solução homogênea é $k_c^H(t) = D^* e^{rt}$ e a solução particular é $k_c^p(t) = E^* e^{\bar{g}t}$, onde $E^* = \dfrac{c_c(0)}{r - \bar{g}}$.

Então a trajetória ótima do estoque de capital do capitalista representativo é:

$$k_c^*(t) = D^* e^{rt} + \frac{c_c(0)}{(r - \bar{g})} e^{\bar{g}t} \tag{2.14}$$

Substituindo as condições de contorno, $k_c(0) = k_0$ e $k_c(T) = k_0 e^{nT}$ na equação (2.14) obtemos os valores de D^* e $c_c(0)$:

$$D^* = k_0 \frac{[1 - e^{(n-\bar{g})T}]}{[1 - e^{(r-\bar{g})T}]} \text{ e } c_c(0) = k_0 (r - \bar{g}) \frac{[1 - e^{(n-r)T}]}{[1 - e^{(\bar{g}-r)T}]} \tag{2.14a}$$

Conseqüentemente a trajetória ótima do estoque de capital do capitalista representativo será:

$$k_c^*(t) = k_0 \frac{[1 - e^{(n-\bar{g})T}]}{[1 - e^{(r-\bar{g})T}]} e^{rt} + k_0 \frac{[1 - e^{(n-r)T}]}{[1 - e^{(\bar{g}-r)T}]} e^{\bar{g}t} \tag{2.15}$$

Podemos notar que o estoque de capital do capitalista é uma função crescente tanto da taxa de juros r quanto da taxa de crescimento do seu consumo $\bar{g}$.

O plano ótimo de consumo do capitalista representativo é:

$$c_c^*(t) = c_c(o)e^{\bar{g}t} = k_0 (r - \bar{g}) B e^{\bar{g}t}, \text{ onde } \bar{g} = \frac{(r - \delta_c)}{(1 - \beta)} \text{ e } B = \frac{1 - e^{(n-r)T}}{1 - e^{(\bar{g}-r)T}} \tag{2.16}$$

Devemos notar, que se a taxa de juros for maior do que a taxa de desconto intertemporal ($r > \delta_c$), então o consumo do capitalista também é uma função crescente do tempo.

Diferenciando, parcialmente, a expresão (2.15) em relação aos parâmetros δ_c e T obtemos as propriedades de c_c (0):

$\partial c_c(0)/\partial \delta_c > 0$: O consumo inicial do capitalista é uma função crescente da sua taxa de desconto intertemporal, ou seja , quanto maior a taxa de desconto intertemporal maior será o consumo inicial requerido pelo *rentier*.

$\partial c_c(0)/\partial T > 0$: quanto maior o horizonte de tempo maior será o consumo inicial requerido pelo capitalista.

Comparando os consumos do trabalhador com o do capitalista, dados respectivamente, pelas equações (2.8) e (2.15), notamos que como $\delta_w > \delta_c$ então $g^* < \bar{g}$ e conseqüentemente o consumo do capitalista cresce mais rapidamente do que o dos trabalhadores e que o consumo inicial de um trabalhador depende do seu salário inicial enquanto que o consumo inicial de um capitalista depende da sua dotação inicial de herança. È interessante notar que da equação (2.8), se T tende para infinito, temos que $k_W^* = 0$ e então voltamos ao modelo de Harrod-Domar.

2.2 Análise comparativa com o modelo de Baranzini

O arcabouço teórico deste trabalho é o modelo de Baranzini (1991) no qual é realizada uma análise com gerações superpostas, que utiliza uma análise de *steady state*[5] para o problema de otimização intertemporal dos agentes. É claro que a análise de *steady state* e a utilização do Princípio do Maximo de Pontryagin são equivalentes, porém naquela é necessário uma correta modelagem das restrições dos agentes a fim de que os resultados das duas abordagens sejam semelhantes. Como mostraremos a seguir os resultados contidos na seção anterior podem ser interpretados como um caso particular das equações obtidas pelo mesmo, cujos resultados mostraremos a seguir:

(a) Plano ótimo de consumo dos agentes.

O consumo do trabalhador e do capitalista é dado por:

$c(t) = c(0)e^{g^* t} = w_0 A_B \dfrac{r - g^*}{r - m} e^{g^* t}$, onde :

$$g^* = \frac{r-\delta}{1-\beta} \text{ e } A_B = \frac{1 - e^{R(m-r)} + p(e^{R(m-r)} - e^{T(m-r)})}{1 - e^{T(g^*-r)}} \tag{2.17}$$

Na expressão acima, T é o horizonte de tempo, isto é, os agentes morrem no período T e R é o período correspondente à sua vida laboral. O parâmetro p (0≤ p ≤1) representa a parcela dos salários utilizada para financiar o consumo durante o período de aposentadoria, ou seja, durante sua aposentadoria o trabalhador recebe uma pensão igual à $pw(t)$.

Neste modelo T=R e p=0, logo a expressão A_B dada em (2.17) torna-se:

$$A_B = \frac{1-e^{T(m-r)}}{1-e^{T(g^*-r)}} \tag{2.18}$$

(b) Estoque de capital do trabalhador representativo.

O estoque de capital de um trabalhador na idade ativa é;

$$k_w^a(t) = \frac{w_0}{r-m}[e^{rt} - e^{mt} + A_B(e^{g^*t} - e^{rt})] \tag{2.19}$$

onde A_B é dado por de acordo com (2.17). Fazendo T=R e p=0 em (2.17) obtemos uma expressão para A_B dada por (2.18).

(c) estoque de capital do capitalista representativo.

A expressão para o estoque de capital de um capitalista na idade ativa é:

$$k_c^a(t) = k_0 e^{rt}(1 - B_B e^{(g-r)t}) \text{ onde } B_B = \frac{1-e^{R(n-r)}}{1-e^{T(g^*-r)}} \tag{2.20}$$

Mostraremos agora os resultados encontrados neste artigo.

(a) Plano ótimo de consumo dos agentes.

Devemos perceber que o consumo do trabalhador dado por (2.7) é o mesmo resultado obtido em (2.17). O consumo ótimo do capitalista dado pela equação (2.17) é obviamente diferente da expressão obtida por (2.16), pois naquela tanto trabalhadores como capitalistas possuem o mesmo plano ótimo de consumo, possuem também a mesma função utilidade, bem como a mesma taxa de desconto.

É interessante notar que apesar da diferença entre a trajetória ótima do trabalhador e do capitalista, a expressão do consumo agregado, obtida na seção seguinte, é a mesma obtida por Baranzini, o que mostra a perspicácia do mesmo na modelagem das restrições intertemporais dos agentes.

Uma diferença importante neste trabalho é a diferenciação na taxa de desconto intertemporal dos agentes. A taxa de desconto dos trabalhadores é maior do que a taxa de desconto dos capitalistas ($\delta_w > \delta_c$), pois os trabalhadores possuem uma maior

---

[5] O modelo parte da equação de Euler do cálculo de variações $\dfrac{U''(c(0))}{U`(C(0))} = e^{(r-\delta)t}$

preferência pelo presente do que os capitalistas, isto é, em termos de consumo, os trabalhadores são mais impacientes do que os capitalistas[6].

(b) Estoque de capital do trabalhador representativo.

A equação (2.8) deste artigo fornece a trajetória do estoque de capital do trabalhador, mostraremos agora como essa expressão é equivalente à equação (2.19):

Da equação (2.8) deduzida neste texto temos que:

$$k_w^*(t) = \frac{w_0}{r-m}\frac{[1-e^{(m-g^*)T}]}{[1-e^{(r-g^*)T}]}e^{rt} + \frac{w_0}{m-r}e^{mt} + \frac{w_0}{(r-m)}\frac{[1-e^{(m-r)T}]}{[1-e^{(g^*-r)T}]}e^{g^*t}$$

Se definirmos $A = \dfrac{1-e^{(m-r)T}}{1-e^{(g^*-r)T}}$ logo $1-A = \dfrac{1-e^{(m-g^*)T}}{1-e^{(r-g^*)T}}$ então:

$$k_w^*(t) = \frac{w_0}{r-m}(1-A)e^{rt} - \frac{w_0}{r-m}e^{mt} + \frac{w_0}{(r-m)}Ae^{g^*t}$$

$$\therefore k_w^*(t) = \frac{w_0}{r-m}\{e^{rt} - e^{mt} + A(e^{g^*t} - e^{rt})\}$$

que, por intermédio da equação (2.18), é a expressão obtida em (2.19).

(c)Estoque de capital do *rentier*

A equação (2.14) fornece o estoque de capital do rentier:

$$k_c^*(t) = D^*e^{rt} + \frac{c_c(0)}{(r-\bar{g})}e^{\bar{g}t}$$

como $k_c(0) = k_0$ então $D^* + \dfrac{c_c(0)}{r-\bar{g}} = k_0 \therefore \dfrac{c_c(0)}{r-\bar{g}} = k_0 - D^*$ (2.21)

Substituindo (2.21) em (2.14):

$$k_c^*(t) = D^*e^{rt} + (k_0 - D^*)e^{\bar{g}t} \tag{2.22}$$

De (2.14 a) temos que $D^* = k_0\dfrac{[1-e^{(n-\bar{g})T}]}{[1-e^{(r-\bar{g})T}]}$. Fazendo $B^* = \dfrac{[1-e^{(n-\bar{g})T}]}{[1-e^{(r-\bar{g})T}]}$ obtemos:

$$1-B^* = \frac{1-e^{(n-r)T}}{1-e^{(\bar{g}-r)T}} = B\text{, então } D^* = k_0B^* = k_0(1-B) \tag{2.23}$$

Substituindo (2.23) em (2.22) temos:

$$k_c^*(t) = k_0B^*e^{rt} + (k_0 - k_0B^*)e^{\bar{g}t}$$

[6] Como afirma Blanchard, e Fischer (1989), essa diferenciação é importante, pois os agentes possuem diferentes graus de impaciência. Em stead state a taxa de juros deve ser igual à menor das taxas de desconto, pois caso contrário $\dfrac{\dot{c}_w}{c_w} = g^* = \dfrac{r-\delta_w}{1-\beta}$ e $\dfrac{\dot{c}_c}{c_c} = \bar{g} = \dfrac{r-\delta_c}{1-\beta}$ não seriam constantes.

$\therefore k_c^*(t) = k_0 B^* e^{rt} + k_0(1-B^*)e^{\bar{g}t}$

$\therefore k_c^*(t) = k_0(1-B)e^{rt} + k_0 B e^{\bar{g}t}$. Multiplicando o último termo do lado direito da equação acima por $e^{rt}e^{-rt}$ segue-se:

$k_c^*(t) = k_0(1-B)e^{rt} + k_0 B e^{\bar{g}t} e^{rt} e^{-rt}$, colocando $k_0 e^{rt}$ em evidência segue-se:

$\therefore k_c^*(t) = k_0 e^{rt}[1 - B + Be^{(\bar{g}-r)t}]$

$\therefore k_c^*(t) = k_0 e^{rt}[1 - B(1 - e^{(\bar{g}-r)t})]$

Perceba que a expressão acima é o mesmo resultado, apenas fazendo T=R, encontrado na equação (2.20).

2.3 Análise do consumo inicial

Como a economia é descentralizada preferimos comparar os benefícios dos agentes em relação ao consumo inicial ao invés de uma análise de bem-estar. Podemos reescrever os estoques de capital do trabalhador e do capitalista em função dos respectivos consumos iniciais:

$$k_w(t) = [\frac{w_0}{r-m} - \frac{c_w(0)}{r-g^*}]e^{rt} + \frac{c_w(0)}{r-g^*}e^{g^*t} - \frac{w_0}{r-m}e^{mt} \qquad (2.24)$$

$$k_c(t) = [k_0 - \frac{c_c(0)}{r-\bar{g}}]e^{rt} + \frac{c_c(0)}{r-\bar{g}}e^{\bar{g}t} \qquad (2.25)$$

Como a taxa de juros r é maior do que a taxa de progresso técnico trabalho aumentativo (m) e também maior do que as taxas de crescimento do consumo do trabalhador (g^*) e do capitalista ($\bar{g}$), então as equações (2.24) e (2.25) mostram que a fim de que a parcela do estoque de capital relacionada com o crescimento exponencial da taxa de juros seja positiva, é necessário $\frac{w_0}{r-m} > \frac{c_w(0)}{r-g^*}$. Por outro lado a condição necessária para que o estoque de capital do capitalista esteja positivamente correlacionada com o crescimento exponencial da taxa de juros é $k_0 > \frac{c_c(0)}{r-\bar{g}}$, o que implica um nível de consumo inicial absoluto maior para o capitalista do que para o trabalhador.

3. Os macro-modelos

Para analisar o comportamento agregado é necessário estabelecer as hipóteses demográficas do modelo. Denotaremos pôr N_0^c o número de capitalistas nascidos em t=0 e por N_0^w o número de trabalhadores nascidos nesse instante t=0. Se a população cresce à uma taxa g então o número de trabalhadores ativos no intervalo de tempo definido por (t-T,T) é $N_w(t) = N_0^w \dfrac{e^{g^* t}(1-e^{-g^* T})}{g^*}$ e o número de capitalistas na mesma coorte é $N_c(t) = N_0^c e^{\bar{g}t} \dfrac{(1-e^{-\bar{g}T})}{\bar{g}}$. Os salários crescem à uma taxa m, isto é, $w(t) = w_0 e^{mt}$.

O consumo da classe trabalhadora é obtida pela agregação do consumo do trabalhador, ou seja, $C_w(t) = \int_0^t N_0^w e^{g(t-v)} c_w(v) dv$, o que resulta em:

$$C_w(t) = N_0^w w_0 e^{nt} \frac{A}{n-g^*} \frac{r-g^*}{r-m} [1-e^{(g^*-n)T}] \tag{3.1}$$

O consumo da classe capitalista é $C_c(t) = \int_0^t N_0^c e^{g(t-v)} c_c(v) dv$, ou seja: $C_c(t) = N_0^c k_0 e^{nt} B \dfrac{r-\bar{g}}{n-\bar{g}} [1-e^{(\bar{g}-n)T}]$ (3.2)

A equação do consumo agregado da classe capitalista, segundo Baranzini, é:

$$C_c(t) = N_0^c k_0 e^{nt} B_B \frac{r-g^*}{n-g^*} [1+(\phi_B - 1)e^{R(g^*-n)} - \phi_B e^{T(g^*-n)}]$$

onde $\phi_B = \dfrac{T-R}{[R+e^{gR(T-R)}]}$

caso T=R (visto que no presente modelo não existe tempo de aposentadoria) e fazendo $g = g^*$ então $\phi_B = 0$. Fazendo $\phi_B = 0$ na equação acima encontraremos o mesmo resultado de (3.2), esse resultado é interessante pois as equações do consumo ótimo do capitalista obtidas pelo mesmo e as expostas neste texto são diferentes.

O estoque de capital agregado dos capitalistas é dado pôr: $K_c(t) = \int_0^t N_0^c e^{nv} k_c(t-v) dv$, que resulta em:

$$K_c(t) = N_0^c k_0 e^{nt}[\frac{B-1}{r}(1-e^{rt}) + \frac{B}{\bar{g}}(e^{\bar{g}t}-1)] \tag{3.3}$$

Sabemos que $c_c(t) = rk_c(t) - \dot{k}_c(t)$. Esta equação mostra que em termos agregados a renda dos capitalistas (rK_c) é alocada no consumo agregado (C_c) e na parcela necessária para financiar o crescimento natural (nK_c). É interessante notar que na modelagem a restrição do capitalista é dada por $\dot{k}_c = rk_c - c_c$ e não por $\dot{k}_c = (r-n)k_c - c_c$, pois como salienta Atkinson e Stiglitz (1980), em um crescimento do tipo Harrod-neutro o aumento do estoque de capital deve financiar não apenas o consumo, mas também a parcela nK_c, onde $n = m + g$.

Iintegrando essa equação de 0 à T, e lembrando que $k_c(0) = k_0$ e $k_c(T) = k_0 e^{nT}$ então:

$C_c = (r-n)K_c$

Portanto $K_c = \dfrac{C_c}{r-n}$. Substituindo (3.2) nessa equação teremos:

$K_c(t) = N_0^c k_0 \dfrac{e^{nt}}{r-n} B \dfrac{r-\bar{g}}{n-\bar{g}}[1-e^{(\bar{g}-n)T}]$, que é a equação encontrada por Baranzini, fazendo $\phi_B = 0$ em $K_c(t) = N_0^c k_0 \dfrac{e^{nt}}{r-n} B_B \dfrac{r-g^*}{n-g^*}[1+(\phi_B - 1)e^{R(g^*-n)} - \phi_B e^{T(g^*-n)}]$.

A integral $\int_{t-T}^{t} N_0^w e^{nv} k_w(t-v)dv$ fornece o estoque de capital agregado dos trabalhadores, ou seja:

$$K_w(t) = N_0^w w_0 \frac{e^{nt}}{r-m}[\frac{(1-A)(e^{rT}-1)}{r} + \frac{(e^{mT}-1)}{m} + \frac{A(e^{g^*T}-1)}{g^*}] \tag{3.4}$$

A poupança da classe capitalista é:

$$S_c(t) = rK_c(t) - \int_0^T N_c e^{n(t-v)} c_c(v)dv = rK_c(t) - N_0^c k_0 e^{nt} B \frac{r-\bar{g}}{n-\bar{g}}[1-e^{(\bar{g}-n)T}] \tag{3.5}$$

A poupança da classe trabalhadora será:

$$S_w(t) = rK_w(t) - \int_0^T N_w e^{n(t-v)} c_w(v)dv = rK_w(t) - N_0^w w_0 e^{nt} \frac{A}{n-g^*}\frac{r-g^*}{r-m}[1-e^{(g^*-n)T}] \tag{3.6}$$

O consumo agregado é $C(t) = C_w(t) + C_c(t)$, o estoque de capital agregado é dado por $K(t) = K_w(t) + K_c(t)$ e a poupança agregada é $S(t) = S_w(t) + S\ (t)$. Em equilíbrio, portanto, teremos que $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = n$.

Em um contexto pós- Keynesiano a taxa de juros de equilíbrio é determinada pela interação entre a oferta e a demanda de poupança. A demanda de poupança ($\frac{I}{Y}$) é dada pelo produto entre a relação capital/produto (K/Y) e a razão entre Investimento e capital (I/K), suposta constante. A oferta de poupança é dada pela razão poupança/produto (S/Y) que é igual à propensão a poupar dos capitalistas.

Conseqüentemente a taxa de juros de equilíbrio não é única. Das equações (3.1) à (3.4) é fácil obter que $C_c = (r-n)K_c$ e $C_w = (r-n)K_w + w(1-e^{-nT})/n$. A partir da equação de Kaldor –Pasinetti, a taxa de lucro (ou de juros) é dada pôr $r = \frac{P}{K} = \frac{n}{s_c}$, onde a propensão à poupar dos capitalistas é: $s_c = \frac{(rK_c - C_c)}{rK_c}$, taxa essa determinada em função dos parâmetros do modelo.

4. Como a possibilidade de deixar herança altera o comportamento dos trabalhadores

Vamos supor agora que os trabalhadores apesar de não receberem herança de seus pais, em um esforço altruístico, deixam herança para seus filhos. O total deixado de herança será e^{mT}, isto é, os trabalhadores deixam de herança o crescimento exponencial da taxa de crescimento técnico trabalho aumentativo acumulado na sua vida laboral. Tanto trabalhadores como capitalistas deixam herança, porém, em termos per-capita, para cada unidade de capital deixada de herança pelo trabalhador , o capitalista deixará k_0e^{gT}.

O problema do trabalhador continuará o de maximizar o valor presente de sua utilidade intertemporal e apenas haverá uma mudança nas condições de contorno do Hamiltoniano que serão : $k_w(0) = 0$ e $k_w(T) = e^{mT} = \frac{k_0e^{nT}}{k_0e^{gT}}$.

O problema do trabalhador será :

$$\max \int_0^T \frac{1}{\beta} c_w^{\beta} e^{-\delta_w t} dt$$

$$\text{sujeito a : } \mathrm{k_w(0) = 0}$$

$$\mathrm{k_w(T) = e^{mT}}$$

$$\dot{k}_w = w + rk_w - c_w$$

O estoque de capital é a variável de estado e o consumo é a variável de controle. O trabalhador não recebe herança ao nascer, mas deixa, no tempo T, um estoque de capital igual a $\mathrm{e^{mT}}$.

O Hamiltoniano de valor corrente é $H = \frac{1}{\beta} c_w^{\beta} + \lambda(w + rk_w - c_w)$. A condição de primeira ordem é $\frac{\partial H}{\partial c_w} = c_c^{\beta - 1} - \lambda = 0$, logo: $\lambda(t) = c_w^{\beta - 1}$ (4.1)

Pela equação de movimento para a variável de co-estado λ tem-se:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial k_w} + \delta_w \lambda$$

$$\dot{\lambda} = -\lambda r + \delta_w$$

$$\dot{\lambda} + (r - \delta_w)\lambda = 0$$

A solução dessa equação diferencial homogênea é:

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-(r - \delta_w)t} \tag{4.2}$$

Igualando as equações (4.1) e (4.2) obtemos:

$$c_w^{\beta - 1} = \lambda_0 e^{-(r - \delta_w)t}$$

$$c_w(t) = \lambda_0^{\frac{1}{\beta - 1}} e^{-\frac{(r - \delta_w)}{\beta - 1}t} .$$

A partir deste momento denotaremos o consumo, caso o trabalhador deixe herança, de c_w^h, então:

$$c_w^h(t) = c_w^h(0) e^{g^* t} \text{ ,onde } g^* = \frac{(r - \delta_w)}{(1 - \beta)} \tag{4.3}$$

Da equação de movimento para o estoque de capital do trabalhador obtemos:

$$\dot{k}_w = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = w + rk_w - c_w^h \tag{4.4}$$

Substituindo (2.11) em (2.12) segue-se:

$$\dot{k}_w - rk_w = w_0 e^{mt} - c_w^h(0)e^{g^* t} \tag{4.5}$$

A solução dessa equação diferencial é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular. A solução homogênea é $k_w^H(t) = D_h e^{rt}$ e a solução particular é $k_w^p(t) = E_h e^{mt} + F_h e^{g^* t}$, onde $E = \dfrac{w_0}{m-r}$ e $F = \dfrac{c_w^h(0)}{r-g^*}$.

A trajetória ótima do estoque de capital do trabalhador representativo é:

$$k_w^h(t) = D_h e^{rt} + \frac{w_0}{m-r}e^{mt} + \frac{c_w^h(0)}{(r-g^*)}e^{g^* t} \tag{4.6}$$

Substituindo as condições de contorno, $k_w^h(0) = 0$ e $k_w^h(T) = e^{mT}$ na equação (4.6) obtemos os valores de D_h e $c_w^h(0)$:

$$D_h = \frac{\phi}{r-g^*} + \frac{w_0}{r-m}(1-A) \text{ e } c_w^h(0) = w_0 A\frac{r-g^*}{r-m} - \phi,$$

onde $\phi = (r-g^*)\dfrac{e^{mT}}{e^{rT} - e^{g^* T}}$ (4.7)

O plano ótimo do estoque de capital do trabalhador representativo é:

$$k_w^h(t) = \frac{w_0}{r-m}[e^{rt} - e^{mt} + A(e^{g^* t} - e^{rt})] + \frac{\phi}{r-g^*}(e^{rT} - e^{g^* T}) \tag{4.8}$$

Podemos notar que o estoque de capital do trabalhador, caso deixe herança, também é uma função crescente tanto da taxa de juros r quanto da taxa de crescimento do seu consumo g^*.

O plano ótimo de consumo do trabalhador representativo será:

$$c_w^h(t) = c_w^h(0)e^{g^* t} \quad \text{, onde } c_w^h(0) = w_0 A\frac{r-g^*}{r-m} - \phi \tag{4.9}$$

A equação (4.9) mostra, como era de se esperar, que a possibilidade de deixar herança por parte do trabalhador não altera a taxa de crescimento do seu consumo. Pela equação (4.8) notamos que o estoque de capital per-capita do trabalhador aumenta, caso o mesmo deixe herança.

Comparando (2.7) com (4.9) observamos que $c_w^h(t) = c_w(0) - \phi$, onde $c_w(0)$ é o consumo inicial de um trabalhador caso não deixe herança, ou seja o consumo inicial do trabalhador diminui caso ele também deixe herança.

Denotaremos por $k_w^h(t)$ o estoque de capital de um trabalhador que deixe herança e $k_w(t)$ o caso onde a herança não é contemplada. Comparando (2.8) com (4.8) notamos que $k_w^h(t) = k_w(t) + \frac{\phi}{r-g^*}(e^{rt} - e^{g^*t})$, ou seja seu estoque de capital aumenta.

5. Participação da renda do trabalhador na renda agregada.

A renda total Y da economia é dada por $Y = Y_c + Y_w$ (5.1)

onde Y_c é a renda agregada da classe capitalista e Y_w é a renda agregada da classe trabalhadora. A renda da classe dos trabalhadores Y_w é dada pela soma do consumo e da poupança dessa classe, ou seja, $Y_w(t) = C_w(t) + S_w(t)$. O consumo e poupança da classe trabalhadora são dados respectivamente pelas equações (3.1) e (3.6). Somando as equações (3.1) e (3.6) obtemos a expressão da renda total da classe trabalhadora:

$$Y_w(t) = r\{\frac{N_0^w.w_0e^{nt}}{r-m}.[\frac{(1-A)(e^{rT}-1)}{r} + \frac{e^{mT}-1}{m} + \frac{A.(e^{g^*T}-1)}{g^*}]\} \tag{5.2}$$

Portanto a renda total da economia $Y(t) = Y_w(t) + Y_c(t)$ é dada pela equação a seguir:

$$Y(t) = rN_0^ck_0e^{nt}B\frac{r-\overline{g}}{n-\overline{g}}[1-e^{(\overline{g}-n)T}] + r\{\frac{N_0^w.w_0e^{nt}}{r-m}.[\frac{(1-A)(e^{rT}-1)}{r} + \frac{e^{mT}-1}{m} + \frac{A.(e^{g^*T}-1)}{g^*}]\}$$

Dividindo a expressão (5.2) pela equação acima da renda total tem-se a participação da renda da classe trabalhadora na renda total da economia:

$$\frac{Y_w(t)}{Y(t)} = \frac{1}{1+H}, \text{ onde } H = \frac{\frac{N_0^ck_0B(r-\overline{g})}{(r-n).(n-\overline{g})}.[1-e^{(\overline{g}-n)T}]}{\frac{N_0^ww_0}{r-m}[\frac{(1-A)(e^{rT}-1)}{r} + \frac{e^{mT}-1)}{m} + \frac{A(e^{g^*T}-1)}{g^*}]} \tag{5.3}$$

Utilizando o MathCad foram realizadas várias simulações e verificou-se, a partir da equação (5.3) que a participação da renda da classe trabalhadora na renda total da economia permanecia praticamente constante para várias parametrizações realizadas. Isso evidenciou que o modelo de Baranzini na forma contínua, diferente do modelo discreto, não é um bom arcabouço para se estudar a questão da distribuição de renda.

6. Conclusões.

Dentro da abordagem Pós-Keynesiana, o presente trabalho obteve importantes resultados: (i) a confirmação dos resultados obtidos por Baranzini (1991); (ii) como a possibilidade (imposição) de deixar herança por parte dos trabalhadores altera o seu consumo e o seu estoque de capital; (iii) a determinação endógena da propensão marginal a poupar dos capitalistas e (iv) a distribuição funcional da renda agregada do modelo de Baranzini.

É importante ressaltar que as expressões, obtidas neste trabalho, para o consumo e o estoque de capital do trabalhador, bem como, para o consumo e o estoque de capital do *rentier*, são casos particulares dos resultados encontrados por aquele, já que o presente trabalho não contempla o problema de gerações superpostas (no sentido de Kotlikof). O uso das técnicas de otimização dinâmica permite uma abordagem mais moderna e mais clara da análise e também contornando o comentário levantado por Masson (1992) em relação à diferença de preferência intertemporal dos agentes.

O trabalho também mostrou a partir da obtenção da expressão da renda dos trabalhadores que apesar da hipótese dos trabalhadores poderem deixar herança, a distribuição de renda não é melhorada, o que sinaliza a necessidade de políticas por parte do Governo (tais como transferências de renda financiadas por impostos sobre o capital) a fim de melhorar a distribuição de renda.

7.Bibliografia.

Atkinson, A. & Stiglitz, J. (1980). Lectures on Public Economics. Maidenhead: McGraw-Hill.

Barnazini, M (1975). “A Two-class Monetary Growth Model”. Schweizerische Zeitschrift fur Volksswirtschaf und Statistik. Vol. 111, 177-189.

Baranzini, M. (1991). A Theory of Wealth Distribution and Accumulation. Oxford: Clarendon Press.

Baranzini, M., Benjuíno, S. e Teixeira, J (2003) . “Taxation on Intergenerational Bequest and Redistribution of Wealth in a Class-Setting”. Discussion paper 279,February. University of Brasília.

Blanchard, O.J. and Fischer, S. (1989). Lectures on Macroeconomics. Cambridge, Massachusetts :The MIT Press.

Darity, W (1981). “A simple Analytics of Neo-Ricardian Growth and Distribution”. American Economic Review. Vol. 71, 978-993.
Dynan, K.; Skinner, J. and Zeldes, _S (2004). “ Do the Rich Save More?”. Journal of Polical Economy. Vol. 112, 397-444.
Faria, J. and Teixeira, J. (1999). “Growth and Stability in a Model with Pasinetian Saving Behaviour and Neoclassical Technology”. The Manchester School. Vol. 67, 111-121.
Foley,D. & Sidrauski, M. (1971). Monetary and Fiscal Policy in a Growing Economy. London: Macmillan Company.
Harrod, R. (1948). “Towards a dynamic economics”. New York: Macmillan.
Kaldor, N.(1955-6).“Alternative Theories of Distribution”, Review of Economic Studies.
Le Van, C. And Vailakis, Y. (2003). “Existence of a competitive equilibrium in a one sector growth model with heterogeneous agents and irreversible investment”. Economic Theory. Vol 22, 743-771.
Masson, A. (1992). “Book Review of Baranzini`s Theory of Wealth Distribution and Accumulation”. Economic Journal.
O`Connell, J. (1995). “The Two/One Class Model of Economic Growth”. Oxford Economic Papers. Vol. 47, 363-368.
Pasinetti, L.(1962).“Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate Economic Growth”. Review of Economics Studies.
Ramanathan, R(1976). “The Pasinetti Paradox in a Two-Class Monetary Growth Model”. Journal of Monetary Economics. Vol. 2, 389-397.
Shell, K. (1966). “Essays on the Theory of Optimal Economic Growth”. Cambridge, Massachusetts.
Teixeira, J., Sugahara, R. & Baranzini, M. (2002). “On Micro-Foundations for the Kaldor-Pasinetti Growth Model with Taxation on Bequest”. Brazilian Journal of Business Economics, March.
Kalecki, M. (1968). “The Marxian Equations of Reproduction and Modern Economics”. Social Science Information, Volume 7 (6).

8. Apêndice

Inicialmente lembramos que com herança nós temos que

$$Y = Y^{w} + Y^{c}$$

$$Y^{C}_{carhm} = Y^{C}_{ser\,hm}$$

$$Y^{w}_{h} = C^{w}_{h} + S^{w}_{h}$$

9.1 Os macro-modelos com herança

$$C^{h}_{w}(t) = \int_{0}^{T} N^{w}_{0}\ e^{n(t-v)} . C^{h}_{w}(v)\, dv$$

$$C^{h}_{w}(t) = \int_{0}^{T} N^{w}_{0}\ e^{n(t-v)} . \left[w_0 A \frac{r-g^{*}}{r-m} - \theta \right] e^{g^{*}v} dv$$

$$C^{h}_{w}(t) = N^{w}_{0}\ . e^{nt} \left[w_0 A \frac{(r-g^{*})}{r-m} - \theta \right] \int_{0}^{T} e^{-nv} . e^{g^{*}v} dv$$

$$C^{h}_{w}(t) = N^{w}_{0}\ . e^{nt} \left[\frac{w_0 A(r-g^{*})}{r-m} - \theta \right] \int_{0}^{T} e^{(g^{*}-n)v} dv$$

$$C^{h}_{w}(t) = N^{w}_{0}\ . e^{nt} \left[\frac{w_0 A(r-g^{*})}{r-m} - \theta \right] \left[\frac{e^{(g^{*}-n)v}}{g^{*}-n} \right]_{0}^{T}$$

$$C^{h}_{w}(t) = \frac{N^{w}_{0}\ . e^{nt}}{(g^{*}-n)} \left[\frac{w_0 A(r-g^{*})}{r-m} - \theta \right] \left[e^{(g^{*}-n)T} - 1 \right]$$

$$C_w^h(t) = \frac{N_0^w \,.\, e^{nt}}{n-g^*}\left[\frac{w_0 A(r-g^*)}{r-m} - \theta\right]\left[1-e^{(g^*-n)T}\right]$$

$$C_w^h(t) = \underbrace{\frac{N_0^w w_0\, e^{nt}}{n-g^*}\left[1-e^{(g^*-n)T}\right]}_{C_W(t)} - \frac{N_0^w\, e^{nt}}{n-g^*}\,\theta\,\left[1-e^{(g^*-n)T}\right]$$

$$K_w^h(t) = \int_{t-T}^{t} N_0^w\, e^{n\nu}\, K_w^h(t-\nu)d\nu$$

$$K_w^h(t) = \frac{w_0}{r-m}\left[e^{rt} - e^{mt} + A(e^{g^*t} - e^{rt}\right] + \frac{\varnothing}{r-g^*}(e^{rt} - e^{g^*t})$$

$$K_w^h(t-v) = \frac{w_0}{r-m}\left[e^{r(t-\nu)} - e^{m(t-\nu)} + A(e^{g^*(t-\nu)} - e^{r(t-\nu)}\right] + \frac{\varnothing}{r-g^*}(e^{rt} - e^{g^*t})$$

$$K_w^h(t) = \int_{t-T}^{t} N_0^w\, e^{n\nu}\left\{\frac{w_0}{r-m}\left[e^{r(t-\nu)} - e^{m(t-\nu)} + A(e^{g^*(t-\nu)} - e^{r(t-\nu)}\right] + \frac{\varnothing}{r-g^*}(e^{rt} - e^{g^*t})\right\}d\nu$$

$$K_w^h(t) = \int_{t-T}^{t} N_0^w\, e^{n\nu}\left\{\frac{w_0}{r-m}\left[e^{rt}\,.\,e^{r\nu} - e^{mt}\,.\,e^{m\nu} + Ae^{g^*t}\,.\,e^{-g^*\nu} - Ae^{rt}\,.\,e^{-r\nu}\right] + \frac{\varnothing}{r-g^*}(e^{rt} - e^{g^*t})\right\}d\nu$$

$$I_2 = \int_{t-T}^{t} N_0^w\, e^{n\nu}\,\frac{\varnothing}{r-g^*}\,(e^{rT} - e^{g^*T})\,d\nu$$

$$I_2 = N_0^w\,\frac{\varnothing}{r-g^*}\,(e^{rT} - e^{g^*T})\int_{t-T}^{t} e^{n\nu}\,d\nu$$

$$I_2 = N_0^w\,\frac{\varnothing}{r-g^*}\,(e^{rT} - e^{g^*T})\left[\frac{e^{n\nu}}{n}\right]_{t-T}^{t}$$

$$I_2 = N_0^w\,\frac{\varnothing}{r-g^*}\,\frac{(e^{rT} - e^{g^*T})}{n}\left[e^{n\nu} - e^{n(t-T)}\right]e^{nt\,-\,nT}$$

$$I_2 = N_0^w \frac{\varnothing}{r-g^*} \frac{(e^{rT} - e^{g^*T})}{n} \left[e^{n\nu} - e^{nt} \cdot e^{nT}\right]$$

$$I_2 = \frac{N_0^w \varnothing}{r-g^*} \frac{(e^{rT} - e^{g^*T})}{n} \cdot e^{nt} \left[1 - e^{nT}\right]$$

$$I_1 = \int_{t-T}^{t} N_0^w e^{n\nu} \cdot \frac{w_0}{r-m} \left[e^{rt} \cdot e^{-r\nu} - e^{mt} \cdot e^{-m\nu} + Ae^{g^*t} \cdot e^{-g^*\nu} - Ae^{rt} \cdot e^{-r\nu}\right] d\nu$$

Seja I:

$$= \int_{t-T}^{t} N_0^w e^{n\nu} \cdot \frac{w_0}{r-m} e^{rt} \cdot e^{-r\nu} \, d\nu$$

Seja II:

$$= \int_{t-T}^{t} N_0^w e^{n\nu} \cdot \frac{w_0}{r-m} e^{mt} \cdot e^{-m\nu} \, d\nu$$

Seja III:

$$= \int_{t-T}^{t} N_0^w e^{n\nu} \cdot \frac{w_0}{r-m} Ae^{g^*t} \cdot e^{-g^*\nu} \, d\nu$$

Seja IV:

$$= \int_{t-T}^{T} N_0^w e^{n\nu} \cdot \frac{w_0}{r-m} Ae^{rt} \cdot e^{-r\nu} \, d\nu$$

$$I = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} e^{rt} \int_{t-T}^{t} e^{(n-r)\nu}$$

$$I = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} e^{rt} \left[\frac{e^{(n-r)\nu}}{(n-r)}\right]_{t-T}^{t}$$

$$I = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} \frac{e^{rt}}{(n-r)} \left[e^{(n-r)t} - e^{(n-r)t} \cdot e^{-(n-r)T}\right]$$

$$I = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} \frac{e^{rt}}{(n-r)} e^{(n-r)t} \left[1 - e^{-(n-r)T}\right]$$

$$I = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} \frac{e^{rt}}{(n-r)} \left[1 - e^{-(n-r)T}\right]$$

$$II = \int_{t-T}^{t} N_0^w \, e^{n\nu} \cdot \frac{w_0}{r-m} e^{mt} \cdot e^{-m\nu} \, d\nu$$

$$II = \int_{t-T}^{t} N_0^w \, \frac{w_0}{r-m} e^{mt} \cdot e^{(n-m)\nu} \, d\nu$$

$$II = N_0^w \, \frac{w_0}{r-m} e^{mt} \int_{t-T}^{t} e^{(n-m)\nu} \, d\nu$$

$$II = N_0^w \, \frac{w_0}{r-m} e^{mt} \left[\frac{e^{(n-m)\nu}}{(n-m)}\right]_{t-T}^{t}$$

$$II = N_0^w \, \frac{w_0}{r-m} \cdot \frac{e^{mt}}{(n-m)} \left[e^{(n-m)t} - e^{(n-m)(t-T)}\right]$$

$$II = N_0^w \, \frac{w_0}{r-m} \cdot \frac{e^{mt}}{(n-m)} \cdot \left[e^{(n-m)t} - e^{(n-m)t} \cdot e^{-(n-m)T}\right]$$

$$II = N_0^w \, \frac{w_0}{r-m} \cdot \frac{e^{mt}}{(n-m)} \cdot e^{(n-m)t} \left[1 - e^{-(n-m)T}\right]$$

$$II = N_0^w \, \frac{w_0}{r-m} \cdot \frac{e^{mt}}{(n-m)} \cdot \left[1 - e^{-(n-m)T}\right]$$

$$III = \int_{t-T}^{t} N_0^w\ e^{n\nu} \cdot \frac{w_0}{r-m}\ Ae^{g^* t} \cdot e^{-g^*\nu}\ d\nu$$

$$III = \int_{t-T}^{t} N_0^w\ e^{g^* t} \cdot \frac{w_0}{r-m}\ Ae^{(n-g^*)\nu} d\nu\ = N_0^w\ e^{g^* t} \cdot \frac{w_0}{r-m} A \int_{t-T}^{t} e^{(n-g^*)\nu}\ d\nu$$

$$III = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m}\ Ae^{g^* t} \left[\frac{e^{(n-g^*)\nu}}{(n-g^*)} \right]_{t-T}^{t}$$

$$III = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} \frac{Ae^{g^* t}}{(n-g^*)} \left[e^{(n-g^*)t} - e^{(n-g^*)\ (t-T)} \right]$$

$$III = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} \frac{Ae^{g^* t}}{(n-g^*)} \left[e^{(n-g^*)t} - e^{(n-g^*)t} \cdot e^{-(n-g^*)T} \right]$$

$$III = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} \frac{Ae^{g^* t}}{(n-g^*)}\ e^{(n-g^*)T} \left[1 - e^{-(n-g^*)T} \right]$$

$$III = N_0^w \cdot \frac{w_0}{r-m} \frac{A}{(n-g^*)}\ e^{nt} \left[1 - e^{-(n-g^*)T} \right]$$

$$IV = \int_{t-T}^{T} N_0^w\ e^{n\nu} \cdot \frac{w_0}{r-m}\ Ae^{rt} \cdot e^{-r\nu}\ d\nu$$

$$IV = \int_{t-T}^{T} N_0^w\ \frac{w_0}{r-m}\ Ae^{rt} \cdot e^{(n-r)\nu}\ d\nu = N_0^w\ \frac{w_0}{(r-m)}\ Ae^{rt} \int_{t-T}^{t} e^{(n-r)\nu}\ d\nu$$

$$IV = N_0^w\ \frac{w_0}{r-m}\ Ae^{rt} \left[\frac{e^{(n-r)\nu}}{(n-r)} \right]_{t-T}^{t}$$

$$IV = N_0^w\ \frac{w_0}{r-m} \frac{Ae^{rt}}{(n-r)} \left[e^{(n-r)t} - e^{(n-r)(t-T)} \right]$$

$$IV = N_0^w \; \frac{w_0}{r-m} \; \frac{Ae^{rt}}{(n-r)} \left[e^{(n-r)t} - e^{(n-r)t} \; . \; e^{-(n-r)T}\right]$$

$$IV = N_0^w \; \frac{w_0}{r-m} \; \frac{Ae^{rt}}{(n-r)} \; e^{(n-r)t} \; \left[1 - \; e^{-(n-r)T}\right]$$

$$IV = N_0^w \; \frac{w_0}{(r-m)} \; \frac{A}{(n-r)} \; e^{nt} \left[1 - \; e^{-(n-r)T}\right]$$

$$K_w^h(t) = \cancel{N}_0^w \; \frac{\cancel{w}_0}{r-m} \; \frac{e^{nt}}{(r-n)} \left[e^{(r-n)T} - 1\right] +$$

$$- \cancel{N}_0^w \; \frac{\cancel{w}_0}{r-m} \; \frac{e^{nt}}{(n-m)} \left[1 - e^{-(n-m)T}\right]$$

$$+ \cancel{N}_0^w \; \frac{\cancel{w}_0}{r-m} \; \frac{A \; e^{nt}}{n-g^*} \left[1 - e^{-(n-g)T}\right]$$

$$- \cancel{N}_0^w \; \frac{\cancel{w}_0}{r-m} \; \frac{A \; e^{nt}}{(r-n)} \left[e^{(r-n)T} - 1\right]$$

$$+ \frac{\cancel{N}_0^w \; \varnothing}{r-g^*} \; \frac{(e^{rT} - e^{g^*T}}{n} \; . \; e^{nt} \left[1 - e^{-nT}\right]$$

$$(e^{rt} - e^{g^*T}) \; (1 - e^{-nT})$$

$$= e^{rT} - e^{rT} \; . \; e^{-nT} - e^{g^*T} + e^{(g^* - n)T}$$

$$K_w^h(t) = N_0^w \; \frac{w_0}{r-m} \; e^{nt} . \left[\frac{e^{(r-n)T} - 1}{r-n} - \frac{(1 - e^{-(n-m)T})}{n-m} \right]$$

$${}^{h}_{w}(t) = N_0^w \; \frac{w_0}{r-m} \; e^{nt} . \left[\frac{e^{(r-n)T} - 1}{r-n} - \frac{(1 - e^{-(n-m)T})}{n-m} \right]$$

$$+\frac{N_0^w \varnothing}{r-g^*}\ e^{nt}\cdot \underbrace{\frac{(e^{rT}-e^{g^*T})\,(1-e^{-nT})}{n}}_{\vartheta}$$

$$K_w^h(t)=N_0^w\ \frac{w_0}{r-m}\,e^{nt}\,\Psi+\frac{N_0^w \varnothing}{r-g}\ e^{nt}\vartheta$$

$$K_w^h(t)=N_0^w\ e^{nt}\left[\frac{w_0\Psi}{r-m}+\frac{\varnothing\ \vartheta}{r-g}\right]$$

CAPÍTULO 3

CRESCIMENTO E DISTRIBUIÇÃO FUNCIONAL DE RENDA EM UM MODELO DE VARIEDADES

1. Introdução

A teoria de desenvolvimento econômico utiliza um fato estilizado de que um aumento da produtividade está correlacionado a um aumento da terceirização do processo de produção e um conseqüente aumento da especialização. De modo geral, nas economias subdesenvolvidas, a terceirização ou não ocorre ou então é um processo muito lento. Como os métodos de produção são relativamente simples e existe uma disponibilidade limitada de mão de obra especializada, as tentativas de replicar tecnologias avançadas para essas economias freqüentemente acabam em desastre em termos de possibilidade de crescimento (Stigler (1951); Jacobs (1969)).

O texto de Ciccone e Matsuyama (1996) tem como objetivo extender o modelo Grossman e Helpman (1991) em diversas direções e enfatiza que há uma relação cíclica entre a escolha de tecnologias feita por produtores de bens de consumo e a variedade de insumos intermediários disponíveis. De fato, esses autores mostram que essa relação cíclica é tão forte que uma economia que herda uma gama restrita de insumos intermediários cai na armadilha do desenvolvimento econômico. O modelo de Ciccone e Matsuyama consiste de uma economia de dois setores: um setor produzindo um bem final (de consumo) e o outro setor, de bens intermediários. Na economia existe um único fator de produção (trabalho).

O setor de produtos finais é por hipótese um mercado perfeitamente competitivo e produz um bem de consumo, cuja função de produção é homogênea de grau 1, usando o trabalho e um bem composto de uma variedade de insumos intermediários diferenciados, enquanto o outro setor, que fornece insumo intermediário aos produtores de bens finais, é de concorrência monopolística. A produção de cada bem intermediário necessita do fator trabalho.

A fim de recupera os custos iniciais a firma vende o produto por preço maior que custo marginal.

Segundo Ciccone e Matsuyama a presença de fatores monetários externos leva a um induzimento insuficiente para iniciar uma empresa e à introdução de novos produtos e esses dois fatores, custos iniciais e fatores monetários externos, juntos implicam numa relação cíclica entre o grau de especialização e a parte do mercado de insumo intermediário, além de apresentar barreiras ao desenvolvimento econômico.

O presente capítulo faz uma análise do capital share do modelo de Ciccone e Matsuyama , o que permite estudar como se dá o processo de acumulação em uma economia cujo motor de crescimento é a adoção de novas tecnologias. A seção 2 apresenta o modelo básico de Ciccone e Matsuyama. A seção 3 faz a análise do capital share. A seção 4 mostra uma tipologia das possibilidades de armadilha do subdesenvolvimento. Na última seção apresentamos as conclusões.

2. O modelo de variedades de Ciccone e Matsuyama (1996).

2.1 O modelo básico (sem efeito de transbordamento de conhecimento)

O objetivo desta seção é de apresentar o modelo de Ciccone e Matsuyama, na seqüência apresentada pelos mesmos, mostrando no apêndice a abertura das equações desses autores.

Apresentaremos a seguir o modelo de Ciccone e Matsuyama, que consiste de uma economia de dois setores: de bens finais:

i. O setor no qual se produz o bem C para consumo e,
ii. O setor de bens intermediários X

Existe um único fator de produção (trabalho).

As famílias ofertam L unidades de trabalho inelástica e consomem um bem final homogêneo (tomado como numerário). O problema dos consumidores é:

$$\text{Max } U_t = \int_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)}.\log(C_\tau)d\tau$$

$$\text{s.a. } \int_t^{\infty} e^{-(R_\tau-R_t)}.C_\tau d_\tau \leq L\int_t^{\infty} e^{-(R_\tau-R_t)}.w_\tau d_\tau + W_t$$

onde ρ é a taxa de desconto. R_t é a taxa de juros cumulativa ao longo do tempo, w_t é a taxa de salário e W_t é o valor dos ativos que consiste de ownership shares da realização de lucro das firmas.

A solução desse problema de maximização é dada pela condição de Euler:

$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \dot{R}_t - \rho$ (1} , ou seja o consumo cresce à uma taxa igual à diferença entre as taxas de juros e de desconto intertemporal.

A restrição das famílias é:

$$\int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)}.(C_\tau - w_t.L)d_\tau = W_t \qquad (2)$$

O bem de consumo final é produzido por firmas competitivas e utilizam uma função de produção homogênea de grau 1 $C_t = F(X_t, H_t)$ onde H_t é o insumo trabalho e X_t é um bem composto de perecíveis,de insumos intermediários diferenciáveis que tem a forma de uma ESC:

$$X_t = \left[\int_0^{n_t} [x_t(i)]^{1-\frac{1}{\sigma}} di \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \ \sigma > 1 \qquad (3)$$

onde:

$x_t(i)$ é o montante de variedade usado.

σ é a elasticidade de substituição parcial direta entre cada par de produtos diferenciados.

Ciccone e Matsuyama mostram que por simetria segue-se que $x(i) = x$ e sendo M a quantidade total de insumos intermediários utilizados temos que $nx = M$ e de (3) segue-se que $\frac{X}{M} = n^{\frac{1}{(\sigma-1)}}$.

O custo marginal é constante e igual a $w_t a_X$ e $a_X = 1 - \frac{1}{\sigma}$, e o preço de bem intermediário é :

$$p_t(i) = (1 - \frac{1}{\sigma})^{-1} a_X w_t = w_t \qquad (4)$$

De (4) o índice de preço do bem intermediário composto é:

$$P_t = \left[\int_0^{n_t} [p_t(i)]^{1-\sigma} di \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = n_t^{\frac{1}{(1-\sigma)}} w_t \qquad (5)$$

De (5) segue-se então que $\frac{P_t}{w_t} = n_t^{\frac{1}{1-\sigma}} = \sqrt[1-\sigma]{n_t} = \frac{1}{\sqrt[\sigma-1]{n_t}}$.

Seja α_t o share do insumo intermediário, ou seja, $\alpha = \frac{F_X(X,H).X}{F(X,H)}$ e $\alpha = \alpha(\frac{P}{w})$ é dado por:

$$\alpha_t = \alpha(n_t^{\frac{1}{(1-\sigma)}}) \equiv A(n_t) \tag{6}$$

De (6) e do fato de que o lucro é dado por $\pi_t = (p_t - a_X w_t)x_t = \frac{p_t x_t}{\sigma} = \frac{\alpha_t C_t}{\sigma.n_t}$

Tem-se que: $$\pi_t = \frac{A(n_t)}{\sigma.n_t}.C_t \tag{7}$$

Seguindo a lógica de Ciccone e Matsuyama, em equilíbrio tem-se;

$$w_t a_n \geq v_t \ , \ \dot{n}_t \geq 0 \ , \ (w_t a_n - v_t).\dot{n}_t = 0 \tag{8}$$

O valor de mercado de um produtor de bem intermediário é,

$v_t = \int_0^\infty e^{-(R_\tau - R_t)}.\pi_\tau d\tau$, o que resulta em:

$$\frac{\pi_t + \dot{v}_t}{v_t} = \dot{R}_t \tag{9}$$

Como $n_t p_t x_t = n_t w_t x_t = \alpha_t C_t$ e $w_t H_t = (1-\alpha_t).C_t$, o que resulta em :

$$L = a_n \dot{n}_t + H_t + n_t a_X x_t$$

$$L = a_n \dot{n}_t + (1-\alpha_t)\left(\frac{C_t}{w_t}\right) + (1-\frac{1}{\sigma})\alpha_t(\frac{C_t}{w_t})$$

$$L = a_n \dot{n}_t + (1-\frac{A(n_t)}{\sigma})\left(\frac{C_t}{w_t}\right) \tag{10}$$

Resolvendo (10) para $\frac{C_t}{w_t}$ e usando $n_t w_t x_t = \alpha_t C_t$, $w_t H_t = (1-\alpha_t).C_t$ tem-se que:

$$a_n \dot{n}_t = L - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right)\frac{C_t}{F(n_t^{\frac{1}{(\sigma-1)}}.A(n_t), 1 - A(n_t))} \tag{11}$$

A renda nacional é obtida utilizando as equações (7), (8) e (10): $w_t L + n_t \pi_t = C_t + v_t \dot{n}_t$

Utilizando (9), fazendo $n_t v_t = W_t$ e integrando a restrição intertemporal obtém-se:

$$\lim_{T\to\infty} n_T v_T e^{-R_T} = \int_0^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)}.(w_\tau L - C_\tau)d\tau + n_t v_t = 0 \qquad (12)$$

Definindo-se a variável $V \equiv \dfrac{v}{C}$ como o valor médio de uma firma produzindo um insumo intermediário, a partir das equações (1), (7) e (9) tem-se:

$$\dot{V}_t = \rho.V_t - \frac{A(n_t)}{\sigma.n_t} \qquad (13\ a)$$

De (8) e (10) segue-se :

$$\dot{n}_t = \max\left\{\frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right).\frac{1}{V_t}, 0\right\} \qquad (13\ b)$$

De (1) e (12) :

$$\lim_{t\to\infty} V_t n_t e^{-\rho t} = 0 \qquad (13\ c)$$

A derivação dessas equações (13 a,b,c) estão disponíveis no apêndice deste capítulo.

As formas dos dois "lócus" são:

$V = \dfrac{A(n)}{\rho\sigma n}$, quando $\dot{V} = 0$ VV

$V = \dfrac{a_n}{L}\left(1 - \dfrac{A(n)}{\sigma}\right)$, quando $\dot{n}_t = 0$ NN

Esses dois locus se interceptam em $n = n^*$ caso:

$$\Phi(n^*) = n^*\left(\frac{\sigma}{A(n^*)} - 1\right) = \frac{L}{\rho a_n} \qquad (14)$$

PROPOSIÇÃO 1 DE CICCONE E MATSUYAMA: Seja $\varepsilon\left(\dfrac{P}{w}\right)$ a elasticidade de substituição entre X e H na produção de bens finais quando o preço relativo do fator é $\dfrac{P}{w}$. Se $\varepsilon\left(\dfrac{P}{w}\right) \leq \sigma$ para todo $\dfrac{P}{w}$ então VV é decrescente e intercepta o lócus NN no máximo uma vez e a partir de cima (VV > NN). Se $\varepsilon(+\infty) < \sigma$ então (14) tem uma única solução positiva $n^* > 0$. Além disso n^* é uma função crescente de $\frac{L}{\rho a_n}$.

A partir de $\frac{1}{A(n)} = 1 + \frac{wH}{PX}$, como mostrado no apêndice, tem-se que:

$$\frac{n}{A(n)} = n + \beta \exp\left[\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds\right]$$

Como também mostrado no apêndice, temos que

$$\Phi(n) = (\sigma - 1)n + \sigma\,\beta\, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds}$$

Logo $\Phi(n)$ é estritamente crescente em n quando $\varepsilon(\,.\,) \le \sigma$ e que: $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = \infty$

Segue-se então que:

i. *VV* intercepta *NN* uma única vez e a partir de cima (*VV* acima de *NN*).

ii. a equação (14) tem uma única solução positiva caso $\varepsilon(\infty) < \sigma$ e também porquer $\lim_{T\to\infty} \Phi(n) = 0$.

iii. n^* cresce com $\frac{L}{\rho a_n}$ pois $\Phi(n)$ é uma função crescente de n, como mostrado na figura 1 (de Ciccone e Matsuyama) abaixo.

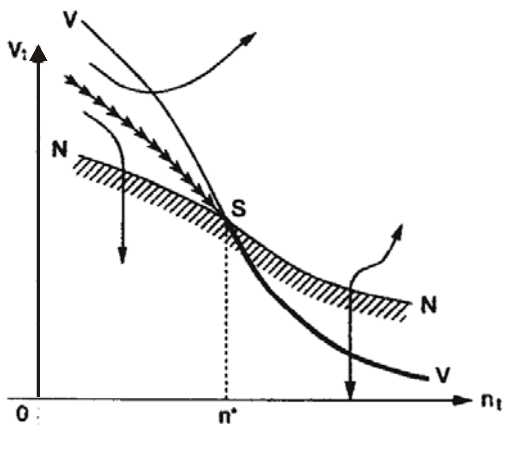

Figura 1

A seguir Ciccone e Matsuyama, fazem uma discussão sobre bens complementares e substitutos segundo Hicks-Allen. Para traduzir essa definição no desses autores, considere o seguinte problema:

Para *n* fixo, escolher *x(i)*; $i \in [0, n]$ e escolher *H* de forma a minimizar

$$\int_0^n p(i)x(i)\, di + wL$$

sujeito à $F(X,H) = F\left(\left(\int_0^n [x(i)]^{1-\frac{1}{\sigma}} di\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, H \right) \geq C$

A demanda Hickisiana por x(i) dada por

$$x(i) = \left[\frac{p(i)}{P}\right]^{-\sigma} . X = \left[\frac{p(i)}{P}\right]^{-\sigma} \frac{\alpha\left(\frac{P}{w}\right)}{P} . C$$

Então, como mostrado no apêndice, os insumos especializados são substitutos Hicks-Allen se a elasticidade de substituição parcial de Allen entre *x(i)* e *X* for:

$$\frac{P}{x(i)} . \frac{dx(i)}{dP} = (\sigma - 1) - \left\{1 - \alpha\left(\frac{P}{w}\right)\right\} \left\{\varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) - 1\right\}$$

Caso essa expressão seja positiva então *x(i)* e *X* são substitutos, se a expressão for negativa eles são complementares de Hicks-Allen. A seguir Ciccone e Matsuyama fazem a derivada da equação $\frac{n}{A(n)} = n + \beta exp\left[\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds\right]$; a condição sob o qual o lucro por empresa, medido em utilidade, $\frac{A(n)}{n}$, decresça como número de empresas é:

$$\{1 - A(n)\} \left\{\varepsilon(n^{\frac{1}{1-\sigma}}) - 1\right\} < \sigma - 1$$

Vamos agora, seguindo a explanação de Ciccone e Matsuyama, estudar o caso com armadilha do desenvolvimento, com a introdução de um efeito transbordamento.

O argumento desses autores sugere que, com uma grande substituição entre *X* e *H*, os insumos diferenciados poderiam tornar-se complementos Hicks-Allen, e por essa razão, um aumento no número de empresas incubentes dá um maior incentivo à abertura de novas empresas, pelo menos numa certa área. Conseqüentemente a evolução dinâmica da economia seria muito diferente do caso analisado anteriormente.

2.2 Modelo com efeito transbordamento de conhecimento

O efeito transbordamento de conhecimento é introduzido fazendo com que o trabalho necessário para introduzir um novo produto a partir do instante *t* seja inversamente relacionado com o número total de produtos que foram introduzidos até aquele tempo, ou seja:

$$a_n = \frac{a_1}{n_t} \qquad (14\ a\ )[7]$$

onde a_1 é uma constante positiva

Seguindo a lógica de Ciccone e Matsuyama , definiremos agora uma nova variável fazendo $Q_t = \frac{n_t . v_t}{C_t} = \frac{W_t}{C_t} = n_t . V_t$ que nada mais é do que o valor total das ações de propriedade das empresas produtoras intermediárias medidas em unidades de bens de consumo.

Então as equações (13 a), (13b) e (13 c), como mostrado no apêndice, podem ser escritas como:

$$\dot{Q}_t = \max\left\{\left(\rho + \frac{L}{a_1}\right)Q_t - 1, \rho . Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right\} \qquad (15)[8]$$

$$\frac{\dot{n}_t}{n_t} = \max\left\{\frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \frac{1}{Q_t}, 0\right\} \qquad (16)[9]$$

$$\lim_{t \to \infty} Q_t e^{-\rho . t} = 0 \qquad (16a)[10]$$

O lócus QQ (correspondente a $\dot{Q}_t = 0$) intercepta o locus NN (correspondente a $\dot{n}_t = 0$) em um valor específico n_{min} . O valor de $A(n_t)$ correspondente a esse n_{min} é :

[7] Equação (17) do texto de Ciccone e Matsuyama
[8] equação (18 a) do texto de Ciccone e Matsuyama
[9] equação (18 b) do texto de Ciccone e Matsuyama
[10] equação (18 c) do texto de Ciccone e Matsuyama

$$A(n_{min}) = \sigma.\left(1+\frac{L}{\rho.a_1}\right)^{-1} < 1 \qquad (17)$$

3. Análise do "capital share" do modelo

A função de produção do bem final $C = F(X,H)$ é homogênea de grau 1. $\alpha_T = \frac{F_X.X}{F} = A(n_t)$ é o share de X e $(1-\alpha_t)$ é o share de H.

A renda do capital é então $\alpha_t.C_t - w_t(n_t a_X.x_t + a_n\dot{n}_t)$ e portanto o capital share é:

$$d_t = \frac{A(n_t).C_t - w_t(n_t a_X x_t + a_n\dot{n}_t)}{C_t} \qquad (18)$$

onde $w_t(n_t a_X x_t + a_n\dot{n}_t)$ é a renda do trabalho na produção do bem composto X.

$$d_t = A(n_t) - \frac{w_t}{C_t}n_t a_x x_t - \frac{w_t}{C_t}a_n\dot{n}_t \qquad (19)$$

como $a_X \equiv 1-\frac{1}{\sigma}$ então $n_t a_x x_t = n_t x_t(1-\frac{1}{\sigma})$ (20)

como $n_t p_t x_t = n_t w_t x_t = \alpha_t C_t$ então $n_t x_t = \frac{\alpha_t C_t}{w_t} = \frac{A(n_t)C_t}{w_t}$ (21)

substituindo (21) em (20) temos : $n_t a_x x_t = \frac{A(n_t)C_t}{w_t}(1-\frac{1}{\sigma}) = \frac{A(n_t)C_t}{w_t}(1-\frac{1}{\sigma})$ (22)

Substituindo (22) em (19) segue-se:

$$d_t = \frac{A(n_t)}{\sigma} - \frac{w_t}{C_t}a_n\dot{n}_t = \frac{A(n_t)}{\sigma} - \frac{w_t}{C_t}a_n\dot{n}_t \qquad (23)$$

De (8) sabemos que: $\dot{n}_t \geq 0$, $w_t a_n \geq v_t$, $(w_t a_n - v_t)\dot{n}_t = 0$

1º caso: $w_t a_n = v_t$, $\dot{n}_t > 0$, $d_t = \frac{A(n_t)}{\sigma} - \frac{w_t.a_n}{C_t}\dot{n}_t$

substituindo $w_t a_n = v_t$ na expressão acima temos: $d_t = \frac{A(n_t)}{\sigma} - \left(\frac{v_t}{C_t}\right)\dot{n}_t$ (24)

mas $V_t \equiv \frac{v_t}{C_t}$ então: $d_t = \frac{A}{\sigma} - V_t.\dot{n}_t$ (25)

ou seja :

$$\frac{A(n_t)}{\sigma} = d_t + V_t\dot{n}_t \qquad (26)$$

2º caso: $\dot{n}_t = 0, w_t a_n > v_t$, $d_t = \frac{A}{\sigma} - V_t.\dot{n}_t$, como $\dot{n}_t = 0$, então $d_t = \frac{A(n_t)}{\sigma}$ (27)

Da equação (13 a) temos que: $\dot{V}_t = \rho.V_t - \frac{A}{\sigma n_t}$, que multiplicada por n_t resulta em

$$n_t.\dot{V}_t = n_t.\rho.V_t - \frac{A}{\sigma} \quad (28)$$

teremos novamente dois casos a considerar:

1º caso: $\dot{n}_t > 0, w_t a_n = v_t$, substituindo (26) em (28) segue-se que:

$$n_t.\dot{V}_t = n_t.\rho.V_t - d_t - V_t.\dot{n}_t$$

$$n_t.\dot{V}_t + V_t.\dot{n}_t = n_t.\rho.V_t - d_t$$

mas $n_t.\dot{V}_t + V_t.\dot{n}_t$ é o diferencial de $Q_t = n_t.V_t$, logo temos que:

$$\dot{Q}_t = n_t.\rho.V_t - d_t \quad (29)$$

ou seja $\dot{Q}_t = \rho.Q_t - d_t$ (29 a)

ou ainda que $\dot{Q}_t = \rho.Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma} + V_t.\dot{n}_t$, como $Q_t = n_t.V_t$ então $V_t = \frac{Q_t}{n_t}$, substituindo na expressão anterior segue-se que $\dot{Q}_t = \rho.Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma} + Q_t.\left(\frac{\dot{n}_t}{n_t}\right)$ (29 b)

Substituindo (16) na equação (29 b) encontramos : $\dot{Q}_t = \left(\rho. + \frac{L}{a_1}\right)Q_t - 1$ (29 c)

2º caso: $\dot{n}_t = 0, w_t a_n > v_t$,substituindo(27) em (28) temos que: $n_t.\dot{V}_t = n_t.\rho.V_t - d_t$ (30)

Mas como $\dot{n}_t = 0$, o diferencial de $Q_t = n_t.V_t$, dado por $\dot{Q}_t = n_t.\dot{V}_t + V_t.\dot{n}_t$, resulta em

$$\dot{Q}_t = n_t.\dot{V}_t \quad (31)$$

substituindo (31) em (30) temos de novo que : $\dot{Q}_t = n_t.\rho.V_t - d_t$, ou seja $\dot{Q}_t = n_t.\rho.V_t - \frac{A}{\sigma}$ (31), mas $Q_t = n_t.V_t$, então essa equação se transforma em

$$\dot{Q}_t = Q_t.\rho. - \frac{A}{\sigma} \quad (32)$$

Notamos então que as equações (29 c) e (32) são equivalentes a equação (15) de Ciccone e Matsuyama.

Da equação (13 b) temos que:

$$\dot{n}_t = \max\left\{\frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right).\frac{1}{V_t}, 0\right\}$$

1º caso: $w_t a_n = v_t$, $\dot{n}_t > 0$ e $\frac{A(n_t)}{\sigma} = d_t + V_t.\dot{n}_t$

$$\dot{n}_t = \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right).\frac{1}{V_t} \tag{33}$$

Multiplicando por V_t temos:

$$V_t.\dot{n}_t = \frac{V_t.L}{a_n} - 1 + \frac{A(n_t)}{\sigma} \tag{34}$$

Substituindo a equação (26) em (34) segue-se:

$V_t.\dot{n}_t = \frac{V_t.L}{a_n} - 1 + d_t + V_t.\dot{n}_t$ logo

$$d_t = 1 - \left(\frac{V_t.}{a_n}\right).L \tag{35}$$

mas $\frac{V_t}{a_n} = \frac{V_t.n_t}{a_n.n_t} = \frac{Q_t}{a_1}$ pois $Q_t = n_t.V_t$ e $a_n = \frac{a_1}{n_t}$, substituindo $\frac{V_t}{a_n} = \frac{Q_t}{a_1}$ na equação (35) temos: $d_t = 1 - \frac{Q_t.L}{a_1}$ (36) , ou seja $Q_t = \frac{a_1.(1-d_t)}{L}$ (37)

Da equação (29 c) $\dot{Q}_t = \left(\rho + \frac{L}{a_1}\right)Q_t - 1$, temos que o lócus correspondente a $\dot{Q}_t = 0$ é

$$\left(\rho. + \frac{L}{a_1}\right)Q_t - 1 = 0, \text{ isto é, } Q_t = \frac{1}{\rho + \frac{L}{a_1}} \tag{38}$$

Substituindo (38) em (36) temos que o valor correspondente de d_t quando Q_t é constante é: $d_t = \rho.Q_t$ (39)

2º caso: $\dot{n}_t = 0$, $w_t a_n > v_t$ e $d_t = \frac{A(n_t)}{\sigma}$. Da equação (32) $\dot{Q}_t = Q_t.\rho. - \frac{A(n_t)}{\sigma}$ temos que o lócus correspondente à $\dot{Q}_t = 0$ é dado por $Q_t.\rho. = \frac{A(n_t)}{\sigma}$ (40)

Da equação (17) sabemos que $A(n_{min}) = \sigma.\left(1+\dfrac{L}{\rho.a_1}\right)^{-1} < 1$, ou seja

$$\frac{A(n_{min})}{\sigma} = \left(1+\frac{L}{\rho.a_1}\right)^{-1} \tag{41}$$

De (27) e (40) temos que $d_t = \dfrac{A(n_{\min})}{\sigma}$ (42)

Igualando as expressões (41) e (42) temos que $d_t = \left(1+\dfrac{L}{\rho.a_1}\right)^{-1}$ (43). Podemos então utilizando as equações (40) e (43) construir o diagrama de fases como mostrado na figura 2 (Ciccone e Matsuyama) e a relação entre d_t e Q_t na figura 3 .

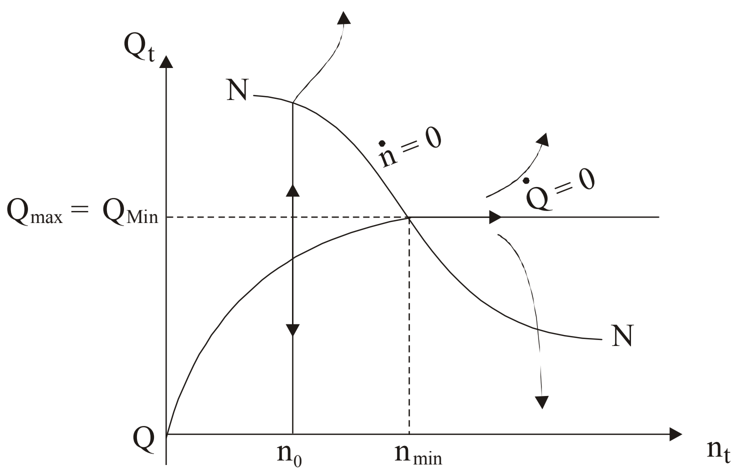

Figura 2

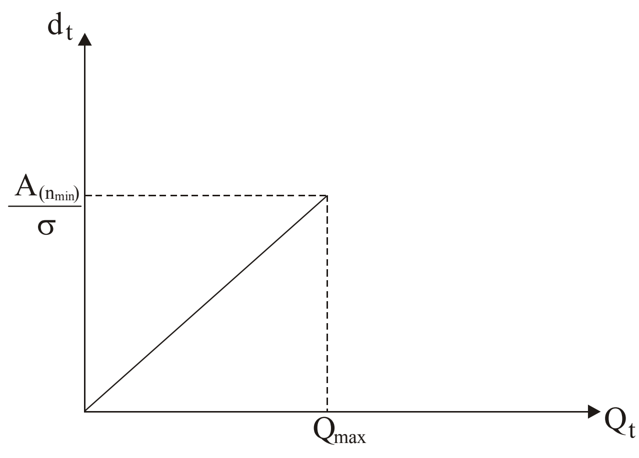

Figura 3

Notamos então que se $Q_t > Q_{max} = \frac{A(n_{min})}{\rho\sigma} = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{\rho + \frac{L}{a_1}}\right]$ o capital–share permanece constante apesar do número de produtos intermediários aumentar. Em outras palavras, mesmo a economia crescendo, haverá limite na distribuição de renda.

4. Tipologia das possibilidades de armadilha do subdesenvolvimento.

No artigo original de Ciccone e Matsuyama a análise sem a presença do efeito transbordamento de conhecimento (a_n fixo) é feita nas variáveis V_t e n_t , enquanto que a análise com efeito transbordamento de conhecimento ($a_n = \frac{a_1}{n_t}$) é feita nas variáveis Q_t e n_t. A partir dessas análises os autores fazem uma discussão sobre a possibilidade ou não da armadilha do subdesenvolvimento nas duas diferentes situações. Na presente seção será feita a análise sem a presença do efeito transbordamento de conhecimento (a_n fixo) nas variáveis Q_t e n_t e também é feita análise com efeito transbordamento de conhecimento ($a_n = \frac{a_1}{n_t}$) nas variáveis V_t e n_t.

Caso a elasticidade $\varepsilon(\frac{P}{w})$ seja constante, o que ocorre no caso da elasticidade de substituição constante (ESC) é possível fazer uma tipologia da possibilidade de armadilha (trap) ou não armadilha, em presença ou não de efeito transbordamento de conhecimento, ou seja com $a_n = \frac{a_1}{n_t}$ ou a_n fixo. As demonstrações desta seção são apresentadas no item 7.6 do apêndice.

Sem Efeito Transbordamento (a_n fixo) nas variáveis V_t e n_t e $\varepsilon(\frac{P}{w})$ constante		
$\varepsilon > 1$ e $\sigma > 1$	A(n) é crescente em n	O lócus NN é decrescente
$\varepsilon < 1$ e $\sigma > 1$	A(n) é decrescente em n	O lócus NN é crescente
$\sigma > 1$ e $\sigma \geq \varepsilon$	$\frac{A(n)}{n}$ é decrescente em n	O lócus VV é decrescente
$\sigma > 1$ e $\sigma < \varepsilon$ $n > (\frac{\sigma - 1}{\varepsilon - \sigma})^{\frac{\sigma-1}{1-\varepsilon}}$	$\frac{A(n)}{n}$ é decrescente em n	O lócus VV é decrescente
$\sigma > 1$ e $\sigma < \varepsilon$ $n < (\frac{\sigma - 1}{\varepsilon - \sigma})^{\frac{\sigma-1}{1-\varepsilon}}$	$\frac{A(n)}{n}$ é crescente em n	O lócus VV é crescente

Com Efeito Transbordamento ($a_n = \frac{a_1}{n_t}$) nas variáveis V_t e n_t e $\varepsilon(\frac{P}{w})$ constante	
$\sigma > 1$ e $\sigma \geq \varepsilon$	O lócus VV é decrescente
$\sigma > 1$ e $\sigma < \varepsilon$; $n > (\frac{\sigma - 1}{\varepsilon - \sigma})^{\frac{\sigma-1}{1-\varepsilon}}$	O lócus VV é decrescente
$\sigma > 1$ e $\sigma < \varepsilon$; $n < (\frac{\sigma - 1}{\varepsilon - \sigma})^{\frac{\sigma-1}{1-\varepsilon}}$	O lócus VV é crescente
$\sigma > 1$ $\varepsilon > 1$ $\sigma \geq \varepsilon$ $\varepsilon + \sigma > 2$	O lócus NN é decrescente
$\varepsilon + \sigma < 2$ e $\sigma > 1$ $\sigma \geq \varepsilon$ $n > \left[\frac{1-\sigma}{(\varepsilon+\sigma)-2}\right]^{\frac{\sigma-1}{1-\varepsilon}}$	O lócus VV é crescente

Sem Efeito Transbordamento (a_n fixo) usando as variáveis Q_t e n_t e $\varepsilon(\frac{P}{w})$ constante	
$\varepsilon < 1$	O lócus QQ é decrescente
$\varepsilon > 1$	O lócus QQ é crescente

Com Efeito Transbordamento ($a_n = \frac{a_1}{n_t}$) usando as variáveis Q_t e n_t e $\varepsilon(\frac{P}{w})$ constante	
$\varepsilon > 1$ e $\sigma > 1$	O lócus QQ é crescente
$\varepsilon < 1$ e $\sigma > 1$	O lócus QQ é decrescente

Como mostra o estudo acima apresentado da tipologia dos caminhos de equilíbrio, o fato de haver armadilha do subdesenvolvimento independe da utilização do efeito transbordamento e também independe das variáveis utilizadas (Q_t ou V_t) como o artigo original de Ciccone e Matsuyama induzem.

5. Conclusões.

A análise da dinâmica da participação da renda do capital na renda total dos agentes da economia mostrou é possível a economia cresça e ao mesmo tempo haja um aumento da participação da renda do trabalhador, porém a partir de um número crítico n de variedade,mesmo que o número de produtos intermediários, aumente então a participação do capital na renda da economia não cresce indefinidamente, ou seja, existe um número limite de variedades (insumos intermediários) que corresponde ao limite de crescimento do capital share. Se o número de insumos intermediários for maior do que o número limite de variedades, a divisão da participação na renda dessa economia se manterá constante.Em outras palavras não necessariamente um processo de crescimento aumenta a renda do trabalho (pelo lado da participação no consumo) no setor de bens finais da economia.

O trabalho também mostra uma tipologia das trajetórias de equilíbrio das variáveis do modelo que sinaliza que a análise das possibilidades de armadilha do subdesenvolvimento não necessariamente é a mesma indicada por Ciccone e Matsuyama.

6.Bibliografia.

Ciccone, A. and Matsuyama, K. (1996). "Start-up costs and pecuniary externalities as barriers to economic development". Journal of Development Economics. Vol.49, 33-59

Grossman, G., and Helpman, E. (1991). “Innovation and growth in the global economy”. Cambridge, MA, MIT Press.
Ethier, W. (1982). “National and international returns to scale in the modern theory of international trade”. American Economic Review. Vol. 72, 389-405.
Jacobs, J. (1969). The economy of cities. Vintage Books, New York.
Romer, P. (1986). “Increasing returns and long run growth”. Journal of Political Economy. Vol. 94,1002-1037.
Romer, P. (1990). “Endogenous technological change”. Journal of Political Economy. Vol. 98, 71-102.
Stigler, G. (1951). “The division of labor is limited by the extent of the market”. Journal of Political Economy. Vol 59.

7. Apêndice

7.1. O modelo básico

- tempo contínuo
- L = unidades de trabalho
- 2 setores $\begin{cases} \text{bem final de consumo (tomado como numerário)} \\ \text{bens intermediários} \end{cases}$

O problema do consumidor representativo é:

$$Max\ U_t = \int_t^\infty e^{-\rho(\tau-t)} \cdot log(C_\tau)d\tau$$

$$s.a. \int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} \cdot C_\tau d\tau \leq L \int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} \cdot w_\tau d\tau + W_t$$

onde $\rho > 0$ é a taxa de desconto
R_t é a taxa de juros ao longo do tempo
w_t é a taxa de salário
W_t é o valor total dos ativos

A solução desse problema é dado pela equação de Euler:

$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \dot{R}_t - \rho \qquad (1)$$

ou seja, o consumo cresce à uma taxa igual à diferença entre a taxa de juros e a taxa de desconto intertemporal.

A restrição das famílias pode ser escrita como:

$$\int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)} \,.\, (C_\tau - w_\tau L) d\tau = W_t$$

$C_t = F(X_t, H_t)$ onde H_t é o insumo trabalho e X_t é um bem composto de perecíveis, isto é, de insumos intermediários que tem a forma de uma ESC:

$$X_t = \left[\int_0^{n_t} [x_t(i)]^{1-\delta} di \right]^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}}, \ \sigma > 1$$

onde $x_t(i)$ é o montante de "variedade" i utilizado. A elasticidade de substituição parcial direta entre cada par de produtos diferenciados é σ.

Seja M a quantidade total de insumos intermediários utilizada. Devido à simetria $x(i) = x$, então $M = nx$.

De (3) temos: $\frac{X}{M} = n^{\frac{1}{\sigma - 1}}$, pois

$$X = \left[\int_o^{n_1} x^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}} = \left[x^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \int_o^{n} di \right]^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}}$$

$$X = x \,.\, n^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}}$$

Como $M = x \,.\, n$ então:

$$\frac{X}{M} = \frac{\cancel{x} \cdot n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\cancel{x} \cdot n} = n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} = n^{\frac{1}{\sigma-1}} \text{,,}$$

$$\frac{X}{M} = n^{\frac{1}{\sigma-1}} = \sqrt[\sigma-1]{n}, \sigma > 1$$

seguindo a lógica dos autores, por conveniência de notação é escolhida uma unidade de medida de modo que se tenha $a_x \equiv 1 - \frac{1}{\sigma}$ isto é, a despesa marginal (DM_g) iguale o custo marginal (CM_g).

$$DMg = w\left(1 - \frac{1}{n}\right) = CMg = w_t a_x$$

$$\cancel{w_t} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \cancel{w_t}\ a_x = a_x \equiv 1 - \frac{1}{\sigma}$$

Cada produtor de bem intermediário conseqüentemente estabelece o preço igual a:

$$p_t(i) = \frac{1}{a_x} \cdot a_x w_t = w_t \qquad (4)$$

onde a última igualdade é devida à escolha de normalização, isto é, as unidades de mão-de-obra são definidas para que $a_x \equiv 1 - \frac{1}{\sigma}$.

Devido á simetria no setor intermediário, todos os produtores estabelecem o mesmo preço. Usando (4) o índice de preço do bem intermediário composto torna-se:

$$P_t = \left[\int_o^{n_t} [p_t(i)]^{1-\sigma} di\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = n_t^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot w_t \qquad (5)$$

Pois:

$$P_t = \left[\int_o^{n_t} [p_t(i)]^{1-\sigma} di \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} =$$

$$= \left[\int_o^{n_t} w_t^{1-\sigma} di \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left[(w_t)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \left[\int_o^{n_t} di \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} =$$

$$= w_t \, . \, n_t^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Note então que $\dfrac{P_t}{w_t} = n_t^{\frac{1}{1-\sigma}} = \sqrt[1-\sigma]{n_t} = \dfrac{1}{\sqrt[\sigma-1]{n_t}}$

O share *(α_t)* como uma função do número de variedades do produto:

$$\alpha_t = \alpha\left(\frac{P}{w_t} \right) = \alpha\left(n_t^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) = A(n_t) \qquad (6)$$

$$\alpha_t = \frac{F_x \, . \, X}{F(X, H)} = \frac{F_x \, . \, X}{C} \Rightarrow \alpha C_t = F_x . \, X$$

mas

$$\frac{P}{w} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial X}}{\dfrac{\partial F}{\partial H}} = \frac{F_x(X, H)}{F_H(X, H)}$$

Mas:

$nx \equiv M$ e

$\frac{X}{M} = n^{\frac{1}{\sigma-1}}$ logo $M = \frac{X}{n^{\frac{1}{\sigma-1}}}$

$\therefore nx = \frac{X}{n^{\frac{1}{\sigma-1}}} \therefore X = n \,.\, n^{\frac{1}{\sigma-1}} \,.\, x = n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \,.\, x$

$\frac{P}{w} = \frac{F_x}{F_H}$; $F_H = \frac{\partial F}{\partial H} = w_t = p_t$

mas

$\frac{P}{w} = n_t^{\frac{1}{\sigma-1}} \quad \therefore \quad \frac{F_x}{p_t} = \frac{P}{w_t} = n_t^{\frac{1}{1-\sigma}} \therefore F_x = n_t^{\frac{1}{1-\sigma}} \,.\, P_t$

então

$\alpha_t C = X \,.\, F_x = n_t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \,.\, x \,.\, p_t \,.\, n_t^{\frac{1}{1-\sigma}}$

$\therefore \alpha_t C_t = n_t \,.\, x_t \,.\, p_t$

o lucro π_t é dado por:

$\pi_t = (P_t - a_x w_t) x_t = \frac{P_t x_t}{\sigma} = \frac{\alpha_t \,.\, C_t}{\sigma n_t}$. De fato :

$\pi_t = RT - CT$

$\pi_t = p_t\, x_t - a_x \,.\, w_t \,.\, x_t$

$\pi_t = (P_t - a_x w_t)\, x_t$ mas $w_t = p_t$

$\pi_t = (p_t - a_x \,.\, P_t)\, x_t = P_t\,(1 - a_x) \,.\, x_t$

mas $a_x \equiv 1 - \frac{1}{\sigma}$ logo $\frac{1}{\sigma} = 1 - a_x$

$\pi_t = p_t \,.\, \frac{1}{\sigma} \,.\, x_t = \frac{p_t \,.\, x_t}{\sigma} = \frac{w_t \,.\, x_t}{\sigma}$

mas

$$\alpha_t\ C_t = n_t\ p_t\ x_t \text{ então } p_t x_t = \frac{\alpha_t C_t}{n_t}$$

$$\therefore \pi_t = \frac{p_t\ .\ x_t}{\sigma} = \frac{\frac{\alpha_t C_t}{n_t}}{\sigma} = \frac{\alpha_t\ C_t}{\sigma\ n_t}$$

Mas de (6) α_t = A(n_t). Então

$$\pi_t = \frac{\alpha_t}{\sigma n_t}\ .\ C_t = \frac{A(n_t)}{\sigma n_t}\ .\ C_t \quad \text{ou seja,}$$

$$\pi_t = \frac{A(n_t)}{\sigma n_t}\ .\ C_t \tag{7}$$

Em equilíbrio nós temos:

$$w_t a_n \geq v_t \quad ; \quad \dot{n}_t \geq 0 \quad ; \quad (w_t a_n - v_t)\ .\ \dot{n}_t = 0 \tag{8}$$

O valor de mercado de um produtor de bens intermediários é igual ao valor presente do lucro:

$$v_t = \int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)}\ \pi_\tau d\tau$$

De onde se obtém:

$$\frac{\pi_t + \dot{v}_t}{v_t} = \dot{R}_t \tag{9}$$

Demonstração da equação (9)

Por Leibntiz temos:

$$\dot{v}_t = \int_t^{\infty} \frac{d}{dt}\left[e^{-(R_\tau - R_t)}\ \pi_\tau d\tau\right] - \underbrace{\left[e^{-(R_\tau - R_t)}\right]}_{1}\ .\ \pi_t$$

$$\dot{v}_t + \pi_t = \int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)} . \dot{R}_t . \pi_\tau d\tau = \dot{R}_t \int_0^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)} \pi_\tau d\tau = \dot{R}_t . v_t$$

ou seja,

$$\dot{v}_t + \pi_t = \dot{R}_t . v_t$$

$$\therefore \dot{R}_t = \frac{\dot{v}_t + \pi_t}{v_t}$$

CQD

A equação (9) mostra que a taxa de retorno das ações de propriedade é igual à taxa de juros.

Sabemos que $n_t p_t x_t = n_t w_t x_t = \alpha_t C_t$

e que $w_t H_t = (1 - \alpha_t) C_t$ pois

$XF_x(X, H) + HF_H(X, H) = 1 . F(X, H) = C_t$

$$\frac{XF_x}{C_t} + \frac{HF_H(X, t)}{C_t} = 1$$

$$\alpha_t + \frac{H . w_t}{C_t} = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha_t C_t + w_t H_t = C_t$$

$$\therefore \frac{w_t H_t}{C_t} = 1 - \alpha_t \Rightarrow w_t H_t = (1 - \alpha_t) C_t$$

No mercado de trabalho, a oferta (L) de trabalho é inelástica por suposição.Então:

$$L = a_n . \dot{n}_t + H_t + n_t a_x x_t$$

$$w_t H_t = (1 - \alpha_t) C_t \therefore H_t = (1 - \alpha_t) . \frac{C_t}{w_t}$$

e

$$n_t a_x x_t = n_t \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) . x_t \quad \text{e} \quad n_t x_t w_t = \alpha_t C_t$$

$$\therefore n_t x_t = \frac{\alpha_t . C_t}{w_t}$$

logo

$$n_t a_x x_t = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) . n_t x_t = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) . \frac{\alpha_t C_t}{w_t}$$

então

$$L = a_n \,.\, \dot{n}_t + (1-\alpha_t)\frac{C_t}{w_t} + \left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\alpha_t \,.\, \frac{C_t}{w_t}$$

$$L = a_n \,.\, \dot{n}_t + \frac{C_t}{w_t}\left[1-\frac{\alpha_t}{\sigma}\right]$$

mas $\alpha_t = A(n_t)$ então

$$L = a_n \dot{n}_t + \left(1-\frac{A(n_t)}{\sigma}\right)\left(\frac{C_t}{w_t}\right) \tag{10}$$

Resolvendo (10) para $\left(\frac{C_t}{w_t}\right)$ e usando $n_t w_t x_t = \alpha_t C_t$; $w_t H_t = (1-\alpha_t)C_t$ e

$C_t = F(X, H)$ obtemos a expressão de w_t, inserindo de volta em (10) temos:

$$a_n \dot{n}_t = L - \left(1-\frac{A(n_t)}{\sigma}\right)\frac{C}{F\left(n_t^{\frac{1}{\sigma-1}}A(n_t);\, 1-A(n_t)\right)} \tag{11}$$

Demonstração da equação (11)

A função de produção do setor do bem de consumo é $C_t = F(X_t, H_t)$, com retorno constante de escala e elasticidade de substituição variável.

mas $X_t = x_t \,.\, n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$

e $n_t w_t x_t = \alpha_t C_t \;\therefore\; n_t x_t = \frac{\alpha_t C_t}{w_t}$

$$X_t = x_t \,.\, \frac{x^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{n} \,.\, n_t = x_t n_t \,.\, n_t^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$X_t = n_t^{\frac{1}{\sigma-1}} \,.\, \frac{\alpha_t C_t}{w_t}$$

mas

$$\alpha_t = \alpha\left(n_t^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) = A(n_t)$$

$$X_t = \frac{\alpha_t \,.\, C_t}{w_t} \,.\, n_t^{\frac{1}{\sigma-1}} = A(n_t) \,.\, n_t^{\frac{1}{\sigma-1}} \,.\, \frac{C_t}{w_t}$$

$$w_t H_t = (1-\alpha_t) C_t \;\therefore$$
$$H_t = (1-\alpha_t)\,\frac{C_t}{w_t} = (1 - A(n_t))\,\frac{C_t}{w_t}$$

então:

$$C_t = F\left(A(n_t)\,.\,n^{\frac{1}{\sigma-1}}\,.\,\frac{C_t}{w_t};\; (1 - A(n_t))\,.\,\frac{C_t}{w_t} \right)$$

pela homogeneidade de grau um da função $F(X_t, H_t)$:

$$C_t = F\left(A(n_t)\,.\,n^{\frac{1}{\sigma-1}}\,.\,\frac{C_t}{w_t};\; (1 - A(n_t) \right) \frac{C_t}{w_t}$$
$$= \frac{C_t}{w_t}\, F\left[A(n_t)\,.\,n^{\frac{1}{\sigma-1}}, 1 - A(n_t) \right]$$
$$\therefore\; w_t = \frac{C_t}{F\left(n^{\frac{1}{\sigma-1}}\,.\,A(n_t)\,;\; 1 - A(n_t) \right)}$$

De (10) temos que:

$$a_n \dot{n}_t = L - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) \frac{C_t}{w_t}$$
$$a_n \dot{n}_t = L - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) \frac{C}{F\left(n^{\frac{1}{\sigma-1}} A(n_t), 1 - A(n_t) \right)}$$

CQD

Usando as equações (7) e (8) obtemos a conta de renda nacional:

$$w_t L + n_t\, \pi_t = C_t + v_t\, \dot{n}_t$$

De fato, multiplicando a equação (10) por w_t temos:

$$w_t L = a_n\, \dot{n}_t\, w_t + \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) .\, C_t$$

Usando (7): $\pi_t = \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} C_t$ temos:

$$w_t\ L = a_n \dot{n}_t w_t + C_t - \frac{C_t A(n_t)}{\sigma}$$

Usando a equação (9), equação (2) e o fato de $n_t v_t = W_t$ e integrando a conta de renda nacional $w_t L + n_t\ \pi_t = C_t + v_t\ \dot{n}_t$,obtemos a restrição intertemporal

$$\lim_{T\to\infty} n_T v_T\ e^{-R_T} = \int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)}(w_\tau L - C_\tau)d\tau + n_t v_t = 0 \qquad (12)$$

Demonstração da equação (12)

De fato:

$$w_t L + n_t \pi_t = C_t + v_t\ .\ \dot{n}_t \qquad (i)$$

De (9): $\pi_t + \dot{v}_t = v_t\ .\ \dot{R}_t$

$$\pi_t = v_t \dot{R}_t - \dot{v}_t$$

$$w_t L - C_t = v_t\ .\ \dot{n}_t - n_t \pi_t$$

substituindo π_t na equação (i):

$$w_t L - C_t = v_t\ \dot{n}_t - n_t[v_t \dot{R}_t - \dot{v}_t]$$

$$w_t L - C_t = \underbrace{v_t\ \dot{n}_t - n_t\ .\ \dot{v}_t}_{[v_t \dot{n}_t]} - n_t\ v_t\ \dot{R}_t$$

$$w_t L - C_t = [v_t \dot{n}_t] - n_t v_t \dot{R}_t$$

Integrando de t a $+\infty$ temos:

$$\int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)}(w_t L - C_t)d\tau = \int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)}[v_\tau \dot{n}_t].d\tau - \int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)} n_\tau v_\tau \dot{R}_\tau\, d\tau \quad (i)$$

Vamos primeiro calcular a integral abaixo

$$\int_t^{\infty} e^{-(R_\tau - R_t)}[v_\tau \dot{n}_\tau]d\tau$$

$$u = e^{-(R_\tau - R_t)} \quad \therefore \quad du = \frac{e^{-(R_\tau - R_t)}\ .\ \dot{R}_t}{-1}$$

$$dv = [v_\tau \dot{n}_\tau]d\tau \Rightarrow v = \int [v_\tau \dot{n}_\tau]d\tau = v_\tau n_\tau$$

$$\int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} . [v_\tau \dot{n}_\tau] \, d\tau = \left[v_\tau n_\tau \; e^{-(R_\tau - R_t)} \right]_t^\infty + \int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} v_\tau n_\tau \dot{R}_\tau d\tau$$

Substituindo a integral acima em (i) temos:

$$\int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} (w_t L - C_t) d\tau = \left[v_\tau n_t \; e^{-(R_\tau - R_t)} \right]_t^\infty + \int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} v_\tau n_\tau \dot{R}_\tau d\tau - \int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} v_\tau n_\tau \dot{R}_\tau d\tau$$

$$\int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} (w_t L - C_t) d\tau = \left[v_\tau n_t \; e^{-(R_\tau - R_t)} \right]_t^\infty =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left[v_\tau n_\tau \; e^{-(R_\tau - R_t)} \right]_t^\infty =$$

$$= \lim_{T \to \infty} v_T n_T \; C^{-R_T + R_t} - \lim_{T \to \infty} v_T n_T \; e^{-(R_T + R_t)}$$

$$\int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} (w_t L - C_t) \, d\tau = \lim_{T \to \infty} v_T n_T \, e^{-R_T} - v_t n_t$$

$$\int_t^\infty e^{-(R_\tau - R_t)} (w_t L - C_t) \, d\tau + v_t n_t = \lim_{T \to \infty} v_T n_T \; e^{-R_T}$$

mas $\quad v_t n_t = w_t = \int_t^\infty (C_t - w_t L) \, d\tau$

logo $\quad \lim_{t \to \infty} v_t n_t \; e^{-R_t} = 0$

7.2. O equilíbrio de mercado: O caso sem armadilha do subdesenvolvimento

Para analisar o equilíbrio de mercado a dinâmica econômica é feita em duas variáveis:

Definição
- n = extensão (largura) da faixa de variedades disponíveis e também o número (a medida) de firmas especializadas em insumos intermediários.
- $V \equiv \dfrac{v}{C}$ = valor de cada empresa produtora de insumo intermediário, medido em bens de consumo.

Vamos mostrar que de (1), (7) e (9) temos que

$$\dot{V}_t = \rho V_t - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} \qquad (13a)$$

Demonstração da equação (13a)

De fato:

De (1) temos: $\dfrac{\dot{C}_t}{C_t} = \dot{R}_t - \rho$

De (7): $\pi_t = \dfrac{A(n_t)}{\sigma n_t} C_t \qquad (7)$

De (9): $\dfrac{\pi_t + \dot{v}_t}{v_t} = \dot{R}_t \qquad (9)$

então:

$$V = \frac{v}{C} \Rightarrow \ln V = \ln v - \ln C$$

$$\text{diferenciando em relação ao tempo:}$$

$$\frac{\dot{V}_t}{V_t} = \frac{\dot{v}_t}{v_t} - \frac{\dot{C}_t}{C_t}$$

$$\dot{V}_t = \frac{\dot{v}}{v} V_t - \frac{\dot{C}}{C} V_t$$

$$\dot{V}_t = \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\dot{C}}{C} \right) V_t$$

mas de (9)

$$\frac{\pi_t}{v_t} + \frac{\dot{v}_t}{v_t} = \dot{R}_t \Rightarrow \frac{\dot{v}}{v} = \dot{R}_t - \frac{\pi_t}{v_t}$$

De (1): $\dot{R}_t = \dfrac{\dot{C}_t}{C_t} + \rho$ então

$$\frac{\dot{v}_t}{v_t} = \frac{\dot{C}_t}{C_t} + \rho - \frac{\pi_t}{v_t}$$;de (7) temos:

$$\frac{\dot{v}_t}{v_t} = \frac{\dot{C}_t}{C_t} + \rho - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} . \frac{C_t}{v_t}$$

$$\frac{\dot{v}_t}{v_t} - \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \rho - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} . \frac{C_t}{v_t}$$

mas $\dot{V}_t = \left(\frac{\dot{v}_t}{v_t} - \frac{\dot{C}_t}{C_t} \right) V_t$ e $\frac{C_t}{v_t} = \frac{1}{V_t}$

$$\frac{\dot{V}_t}{V_t} = \rho - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} . \left(\frac{1}{V_t} \right)$$

$$\dot{V}_t = \rho V_t - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} \qquad (13a)$$

CQD

De (8) e (10) temos:

$$\dot{n}_t = \max \left\{ \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) \frac{1}{V_t}, 0 \right\} \qquad (13b)$$

Demonstração da equação (13b)

De fato:

De (8) temos: $(w_t\ a_n - v_t) . \dot{n}_t = 0$

De (10) $L = a_n\ \dot{n}_t + \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) . \frac{C_t}{w_t}$

$$a_n\ \dot{n}_t = L - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) . \frac{C_t}{w_t}$$

$$\dot{n}_t = \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) . \frac{C_t}{w_t} . \frac{1}{a_n}$$

mas de (8): caso $\dot{n}_t \neq 0 \Rightarrow w_t\ a_n = v_t$

$$\dot{n}_t = \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) . \frac{C_t}{v_t}$$

$$V = \frac{v}{C} \Rightarrow \frac{C_t}{v_t} = \frac{1}{V_t} \qquad \text{então}$$

$$\dot{n}_t = \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \frac{1}{V_t}$$

Também de 8: caso $\dot{n}_t \neq 0 \Rightarrow w_t\ a_n > v_t$

$$\dot{n}_t = \max\left\{\frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right)\frac{1}{V_t}, 0\right\} \qquad (13b)$$

CQD

De (1) e (12) temos que

$$\lim_{t\to\infty} V_t n_t\ e^{-\rho . t} = 0 \qquad (13c)$$

Demonstração da equação (13c)

De fato:

De (1) $\quad \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \dot{R}_t - \rho$

De (12) $\quad \lim_{T\to\infty} n_T v_T\ e^{-R_T} = 0$

$$V_t = \frac{v_t}{C_t} \Rightarrow v_t = V_t . C_t$$

$$\lim_{T\to\infty} n_T V_T\ \underbrace{C_T . e^{-R_T}}_{N} = 0$$

Seja $\quad N_t = C_t . e^{-R_t}$

$$\dot{N}_t = \dot{C}_t\ e^{-R_t} + C_t . e^{-R_t} . (-\dot{R}_t)$$

$$\dot{N}_t = \dot{C}_t\ e^{-R_t} - C_t . e^{-R_t} . \dot{R}_t$$

$$\dot{N}_t = (\dot{C}_t - C_t \dot{R}_t)\ e^{-R_t} \quad \text{mas} \quad \dot{R}_t = \frac{\dot{C}_t}{C_t} + \rho$$

$$\dot{N}_t = \left[\dot{C}_t - C_t\left(\frac{\dot{C}_t}{C_t} + \rho\right)\right]e^{-R_t}$$

$$\dot{N}_t = \left[\cancel{\dot{C}}_t - \cancel{\dot{C}}_t - C_t\rho\right]e^{-R_t}$$

$$\dot{N}_t = C_t\rho\, e^{-R_t} \Rightarrow \dot{N}_t = -\rho\,\underbrace{C_t\,.\,e^{-R_t}}_{N}$$

$$\dot{N}_t = -\rho N_t \Rightarrow \frac{\dot{N}_t}{N_t} = -\rho \Rightarrow N_t = e^{-\rho.t}$$

logo $\lim\limits_{t\to\infty} V_t n_t\,.\,e^{-\rho.t} = 0$ (13c)

CQD

A dinâmica de equilíbrio depende das formas dos dois "lócus" VV e NN:

$V_t = \frac{A(n)}{\rho\sigma n}$ (VV) pois $\dot{V} = 0$ então

$$\dot{V}_t = \rho V_t - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} = 0 \Rightarrow \rho V_t = \frac{A(n_t)}{\sigma n_t}$$

$V_t = \frac{A(n)}{\rho\sigma n}$, locus VV, locus $V_t = 0$

e $V = \frac{a_n}{L}\left(1 - \frac{A(n)}{\sigma}\right)$ (NN)

pois

quando $w_t\, a_n > v_t$ temos $\dot{n}_t = 0$

$$\dot{n}_t = \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n)}{\sigma}\right).\frac{1}{V} = 0$$

Então a expressão para *V* é

$V = \frac{a_n}{L}\left(1 - \frac{A(n)}{\sigma}\right)$ (NN) locus $\dot{n}_t = 0$

Esses dois locus se interceptam em n = n* se somente se:

$$\Phi(n^*) = n^*\left(\frac{\sigma}{A(n^*)} - 1\right) = \frac{L}{\rho a_n} \qquad (14)$$

Demonstração da equação (14)

De fato:

$$V = \frac{A(n)}{\rho\sigma n} \qquad (NN)$$

$$V = \frac{a_n}{L}\left(1 - \frac{A(n)}{\sigma}\right) \qquad (VV)$$

$$\frac{A(n)}{\rho\sigma n} = \frac{a_n}{L}\left(1 - \frac{A(n)}{\sigma}\right)$$

$$\frac{L}{\rho\sigma n} = \frac{\sigma n}{A(n)}\left(1 - \frac{A(n)}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(n^*) = \frac{L}{\rho\sigma n} = n^*\left(\frac{\sigma}{A(n^*)} - 1\right) \qquad (14)$$

7.3. Prova da proposição 1 de Ciccone e Matsuyama

Seja $\varepsilon\left(\frac{P}{w}\right)$ a elasticidade de substituição entre X e H na produção de bens finais quando o preço relativo do fator é $\frac{P}{w}$. Se $\varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) \leq \sigma$ para todo $\frac{P}{w}$ então VV é decrescente e intercepta o lócus NN no máximo uma vez e a partir de cima (VV > NN). Se $\varepsilon(+\infty) < \sigma$ então (14) tem uma única solução positiva $n^* > 0$. Além disso n^* é uma função crescente de $\frac{L}{\rho a_n}$.

Prova:

Primeiro, integrando

$$\varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) = \frac{d\log\left(\frac{X}{H}\right)}{d\log\left(\frac{P}{w}\right)}$$

a demanda do fator relativo, usando a equação (5), pode ser escrita como:

$$\frac{H}{X} = \beta\exp\left[\int_1^{\frac{P}{w}} \frac{\varepsilon(z)}{z}\, dz\right] = \beta\exp\left[\int_1^{n} \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})}{(1-\sigma)s}\, dz\right]$$

onde β é uma constante positiva.

Vamos dividir a demonstração em duas partes:

Parte (a): $\dfrac{H}{X} = \beta \exp\left[\int_1^{\frac{P}{w}} \dfrac{\varepsilon(z)}{z}\, dz\right]$ e

Parte (b) $\dfrac{H}{X} = \beta \exp\left[\int_1^{n} \dfrac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})}{(1-\sigma)s}\, dz\right]$

Demonstração da parte (a):

$$\varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) = \frac{d\log\left(\frac{X}{H}\right)}{d\log\left(\frac{P}{w}\right)}$$

$$-d\left(\log\frac{X}{H}\right) = \varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) . d\left(\log\frac{P}{w}\right)$$

$$-\int d\left(\log\frac{X}{H}\right) = \int \varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) . d\left(\log\frac{P}{w}\right)$$

$$\int d\left(\log\frac{H}{X}\right) = \int \varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) . d\left(\log\frac{P}{w}\right)$$

$$\log\frac{H}{X} = \int \varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) . d\left(\log\frac{P}{w}\right)$$

$$\frac{H}{X} = \beta . e^{\int_1^{\frac{P}{w}} \varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) d\left(\log\frac{P}{w}\right)}, \beta > 0$$

$$z = \frac{P}{w}$$

$$\int_1^{\frac{P}{w}} \varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) d\left(\log\frac{P}{w}\right) = \int_1^{z} \varepsilon(z) . d(\log z) = \int_1^{z} \varepsilon(z) . \frac{dz}{z}$$

logo

$$\frac{H}{\beta} = \beta . e^{\int_1^{\frac{P}{w}} \frac{\varepsilon(z)}{z} dz} = \beta \exp\left[\int_1^{\frac{P}{w}} \frac{\varepsilon(z)}{z}\, dz\right]$$

CQD

Demonstração da parte (b)

De (5) nós temos que

$$P_t = n_t^{\frac{1}{1-\sigma}}\ w_t$$

$$\frac{P_t}{w_t} = n_t^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$z \equiv \frac{P_t}{w_t} \quad \therefore \quad z = n^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

logo, diferenciando:

$$dz = \frac{1}{1-\sigma} \,.\, n^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} dn$$

$$dz = \frac{1}{1-\sigma} \,.\, \frac{n^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}{n} dn$$

$$dz = \frac{1}{1-\sigma} \,.\, \frac{z}{n}\, dn$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{1-\sigma}\frac{dn}{n} \qquad \text{logo}$$

$$\frac{H}{X} = \beta \exp\left\{\int_1^{\frac{P}{w}} \varepsilon(z)\frac{dz}{z}\right\}$$

$$= \beta \,.\, \exp\left\{\int_1^{z} \varepsilon\left(n^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) \,.\, \frac{dn}{(1-\sigma)n}\right\}$$

$$\frac{H}{X} = \beta \,.\, \exp\left[\int \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})}{(1-\sigma)s} \,.\, ds\right]$$

CQD

A partir de $\frac{1}{A(n)} = 1 + \frac{wH}{PX}$

nós temos que:

$$\frac{n}{A(n)} = n + \beta \exp\left[\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds\right] \qquad (15)$$

Demonstração da equação (15)

De fato: $\alpha_t \equiv A(n_t)$

Deixando de usar o subscrito t para simplificar a notação:

$$\alpha = \frac{PX}{PX + wH} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{PX + wH}{PX}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{wH}{PX}$$

$$\frac{1}{A(n)} = 1 + \frac{wH}{PX}$$

$$\alpha = \frac{PX}{PX + wH} = \frac{PX}{C}$$

PX + wH = C, desde que C=F(X,H) é homogênea de grau 1.

$$\alpha = \frac{PX}{C} \therefore \frac{PX}{C} + \frac{wH}{C} = 1$$

$$\therefore \alpha + \frac{wH}{C} = 1 \therefore \frac{wH}{C} = 1 - \alpha$$

$$\therefore wH = (1 - \alpha)C$$

$$\frac{1}{A(n)} = 1 + \frac{wH}{PX}$$

$$\frac{1}{A(n)} = 1 + \frac{w}{P}\left(\frac{H}{X}\right) \quad \text{mas} \quad P = n^{\frac{1}{1-\sigma}} w$$

logo: $\frac{P}{w} = n^{\frac{1}{1-\sigma}}$

logo $\frac{1}{A(n)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{P}{w}\right)} . \left(\frac{H}{X}\right)$

$$\frac{1}{A(n)} = 1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{1-\sigma}}} . \left(\frac{H}{X}\right)$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{1-\sigma}}}\left(\frac{H}{X}\right) = \frac{1}{A(n)} - 1$$

$$\frac{H}{X} = \frac{n^{\frac{1}{1-\sigma}}}{A(n)} - n^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

mas $\frac{H}{X} = \beta\, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})ds}{(1-\sigma)s}}$

logo $\frac{n^{\frac{1}{1-\sigma}}}{A} = \frac{H}{X} + n^{\frac{1}{1-\sigma}}$

então $\dfrac{n^{\frac{1}{1-\sigma}}}{A} = n^{\frac{1}{1-\sigma}} + \beta \, . \, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})ds}{(1-\sigma)s}}$

$$\frac{n \, . \, n^{\frac{1}{1-\sigma}}}{n \, . \, A} = n^{\frac{1}{1-\sigma}} + \beta \, . \, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})ds}{(1-\sigma)s}}$$

$$\frac{n}{A} \, . \, n^{\frac{1}{1-\sigma}} = n^{\frac{1}{1-\sigma}} + \beta \, . \, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})ds}{(1-\sigma)s}}$$

$$\frac{n}{A} \, . \, \frac{n^{\frac{1}{1-\sigma}}}{n^{\frac{1}{1-\sigma}}} + \frac{\beta \, . \, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})ds}{(1-\sigma)s}}}{n^{\frac{1}{1-\sigma}}}$$

$$\frac{n}{A} = n + \beta \, . \, n^{-\frac{1}{1-\sigma}} \, . \, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})ds}{(1-\sigma)s}}$$

$$\frac{n}{A} = n + \beta \, . \, e^{\ln n^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}} \, . \, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})ds}{(1-\sigma)s}}$$

mas $\displaystyle\int \frac{-\sigma}{1-\sigma} \frac{ds}{s} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}\left[\ln s\right]_1^n = -\frac{\sigma}{1-\sigma} \, . \ln n$

$= \ln n^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}$

$$\frac{n}{A} = n + \beta \, . \, e^{\int_1^n -\frac{\sigma}{(1-\sigma)}\frac{ds}{s}} \, . \, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})ds}{(1-\sigma)s}}$$

$$\frac{n}{A} = n + \beta \, . \, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}})-\sigma}{(1-\sigma)s}ds} \tag{15}$$

CQD

A equação (15) mostra que se $\varepsilon\left(\dfrac{P}{w}\right) \leq \sigma$, $\dfrac{A(n)}{n}$ é estritamente decrescente em *n*. Então VV dada por $V = \dfrac{A(n)}{\rho\sigma n}$ é decrescente, pois como $\varepsilon(\;.\;) \leq \sigma$

$$\downarrow \frac{A(n)}{n} = \frac{1}{\uparrow n + \beta \, e^{\int_1^n \frac{(\varepsilon(.)-\sigma)ds}{(1-\sigma)ds}}} \quad \text{e} \quad \int_1^n \frac{(\varepsilon(.)-\sigma)ds}{(1-\sigma)ds} \geq 0$$

logo como o lócus de VV é

$$\downarrow V = \downarrow\left(\frac{A(n)}{n}\right).\ \frac{1}{\rho\sigma}$$

Isso também implica que o lado esquerdo da equação (14) seja:

$$\Phi(n^*) \equiv n^*\left[\frac{\sigma}{A(n^*)} - 1\right] = (\sigma - 1)n^* + \sigma\beta e^{\int \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}ds}$$

Demonstração da equação acima:

De fato:

Como

$$\frac{n}{A(n)} = n + \beta\ e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}ds} \quad \text{então,}$$

$$\frac{n}{A(n)} - n = \beta\ .\ e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}ds}$$

multiplicando por σ temos:

$$\frac{\sigma n}{A(n)} - \sigma n = \sigma\ \beta\ e^{\int \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}ds}$$

$$\frac{\sigma n}{A(n)} - \sigma n + \sigma\ \beta\ e^{\int \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}ds}$$

$$\frac{\sigma n}{A(n)} - n = \sigma n - n + \sigma\beta\ e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}ds}$$

$$\frac{\sigma n}{A(n)} - n = (\sigma - 1)n + \sigma\beta\ e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}ds}$$

mas de (14) temos que:

$$\Phi(n^*) = n^*\left[\frac{\sigma}{A(n^*)} - 1\right] = \frac{\sigma n^*}{A(n^*)} - n^*$$

então

$$\Phi(n^*) = (\sigma - 1)n^* + \sigma\ \beta\ e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}ds}$$

CQD

7.4. Disgressão sobre bens substitutos e complementares segundo Hicks-Allen

Considere o seguinte problema: para *n* fixo, escolher *x(i)*; $i \in [0, n]$ e escolher *H* de forma a minimizar

$$\int_0^n p(i)x(i)\,di + wL$$

$$\text{sujeito à } F(X,H) = F\left([\int_0^n [x(i)]^{1-\frac{1}{\sigma}}\,di]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, H \right) \geq C$$

Então a demanda Hickisiana por *x(i)* dada por

$$x(i) = \left[\frac{p(i)}{P}\right]^{-\sigma} . X = \left[\frac{p(i)}{P}\right]^{-\sigma} \frac{\alpha\left(\frac{P}{w}\right)}{P} . C$$

Demonstração da equação acima:

De fato:

$$\frac{P}{w} = \frac{F_x}{F_H} = n^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$\text{e} \quad X = x \,.\, n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\therefore \frac{X}{x} = n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = n$$

então

$$\frac{P}{w} = \frac{P}{p(i)} = \left[\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left(\frac{X}{x}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

então

$$\left(\frac{P}{p(i)}\right)^{\sigma} = \left[\left(\frac{X}{x}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^{\sigma} = \left(\frac{X}{x}\right)^{-1}$$

$$\therefore \left(\frac{P}{p(i)}\right)^{\sigma} = \frac{X}{x}$$

$$\therefore x = \left(\frac{P}{p(i)}\right)^{\sigma} . X \quad \text{então}$$

$$x(i) = \left(\frac{p(i)}{P}\right)^{-\sigma} . X$$

$$\alpha = \frac{PX}{PX + wH} = \frac{PX}{C}$$

logo $X = \frac{\alpha C}{P}$

então a demanda Hickisiana para *x(i)* é dada por:

$$x(i) = \left[\frac{p(i)}{P}\right]^{-\sigma} . X = \left[\frac{p(i)}{P}\right]^{-\sigma} . \frac{\alpha\left(\frac{P}{w}\right)}{P} . C$$

CQD

Então os insumos especializados são substitutos Hicks-Allen se a elasticidade de substituição parcial de Allen entre *x(i)* e *X* for

$\frac{P}{x(i)} . \frac{dx(i)}{dP} = (\sigma - 1) - (1-\alpha)(\varepsilon - 1)$, onde α e ε, dependem de $\frac{P}{w}$.

Demonstração da equação acima:

Vamos dividir a demonstração em 4 passos

Passo 1:

De fato:

$$x = P^{\sigma-1} . \alpha . \frac{C}{w^{\sigma}} \quad \text{desde que } p(i) = p = w, \ \forall i$$

$$\ln x = (\sigma - 1) \ln P + \ln \alpha + \ln \alpha + \ln\left(\frac{C}{w^{\sigma}}\right)$$

$$\frac{P}{x(i)} . \frac{dx(i)}{dp} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{d(\ln x)}{d(\ln p)} = (\sigma - 1) + \frac{d \ln \alpha}{d \ln P} + 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\varepsilon\left(\frac{P}{w}\right) = -\frac{d \ln\left(\frac{X}{H}\right)}{d \ln\left(\frac{P}{w}\right)}$$

$$d \ln\left(\frac{X}{H}\right) = -\varepsilon d \ln\left(\frac{P}{w}\right)$$

$$\int d\left(\ln \frac{X}{H}\right) = -\int \varepsilon \, d\left(\ln \frac{P}{w}\right)$$

$$\ln \frac{X}{H} = -\varepsilon \ln \frac{P}{w}$$

$$\ln\frac{X}{H}=\ln\left(\frac{P}{w}\right)^{-\varepsilon}$$

$$\frac{X}{H}=\left(\frac{P}{w}\right)^{-\varepsilon}$$

Passo 2:

$$\frac{1}{\alpha}=1+\frac{wH}{PX}$$

$$\frac{1}{\alpha}=1+\frac{1}{\frac{P}{w}\cdot\frac{X}{H}}=1+\frac{1}{\frac{P}{w}\cdot\left(\frac{P}{w}\right)^{-\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{\alpha}=1+\frac{1}{\left(\frac{P}{w}\right)^{1-\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{\alpha}-1=\frac{1}{\left(\frac{P}{w}\right)^{1-\varepsilon}}$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}=\left(\frac{P}{w}\right)^{\varepsilon-1}$$

$$1-\alpha=\alpha\ P^{\varepsilon-1}\ .\ w^{1-\varepsilon}$$

$$\alpha\left[1+P^{\varepsilon-1}\ .\ w^{1-\varepsilon}\right]=1$$

$$\alpha=\frac{1}{1+P^{\varepsilon-1}\ .\ w^{1-\varepsilon}}=(1+P^{\varepsilon-1}\ .\ w^{1-\varepsilon})^{-1}$$

Passo 3:

$$\frac{d\ln\alpha}{d\ln P}=\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{P}{\alpha}=-\frac{1}{(1+P^{\varepsilon-1}\ .\ w^{1-\varepsilon})^{2}}\ .\ (\varepsilon-1)\ .\ P^{\varepsilon-2}.\ w^{1-\varepsilon}\ .\ \frac{P}{\alpha}$$

$$\frac{d\ln\alpha}{d\ln P}=-\left[\frac{1}{1+P^{\varepsilon-1}\ .\ w^{1-\varepsilon}}\right]^{2}\ .\ \frac{(\varepsilon-1)\ .\ P^{\varepsilon-2}.\ w^{1-\varepsilon}}{\alpha}$$

$$\frac{d\ln\alpha}{d\ln P}=-\alpha^{2}\ .\ \frac{(\varepsilon-1)}{\alpha}\ .\ \frac{(1-\alpha)}{\alpha}=-(\varepsilon-1)\ (1-\alpha)$$

Passo 4:

Então substituindo em (i) acima:

$$\frac{P}{x(i)}\ \frac{dx(i)}{dP}=(\sigma-1)-(1-\alpha)\ (\varepsilon-1)$$

CDQ

Diferenciando a equação (15) com respeito a *n*, a condição sob o qual o lucro por empresa, medido em utilidade, $\frac{A(n)}{n}$, decresça como número de empresas é:

$$\{1 - A(n)\}\left\{\varepsilon(n^{\frac{1}{1-\sigma}}) - 1\right\} < \sigma - 1$$

Demonstração da desigualdade acima:

De fato:

$$\frac{d\left(\frac{A}{n}\right)}{dn} = \left(\dot{\frac{A}{n}}\right) = \frac{\dot{A}\,n - 1\,.\,A}{n^2} < 0$$

$$\frac{\dot{A}\,n}{n^2} - \frac{A}{n^2} < 0$$

$$\frac{\dot{A}}{\cancel{n}} - \frac{A}{\cancel{n}}\,.\,\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow \dot{A} - \frac{A}{n} < 0$$

$$\therefore \dot{A} < \frac{A}{n}$$

$$\frac{n}{A} = n + \beta\, e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds}$$

$$\frac{1}{A} = 1 + \frac{\beta\,.\,e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds}}{n}$$

$$\frac{1}{A} - 1 = \frac{\beta}{n}\,.\,e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds}$$

$$\frac{1-A}{A} = \frac{\beta}{n}\,.\,e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds}$$

$$A^{-1} = 1 + \frac{\beta}{n}\,.\,e^{\int_1^n \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s} ds}$$

Chamando $I(s) = \frac{\varepsilon(s^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma}{(1-\sigma)s}$ então

$$A^{-1} = 1 + \frac{\beta}{n}\,.\,e^{\int_1^n I(s)\, ds}$$

derivando ambos os lados da equação:

$$-\frac{\dot{A}}{A^2} = 0 + \frac{\beta \,.\, e^{\int_1^n I(s)\,ds} \,.\, \frac{\left[\varepsilon(n^{\frac{1}{1-\sigma}}) - \sigma\right]}{(1-\sigma)\cancel{n}} \,.\, \cancel{n} - 1 \,.\, \beta \,.\, e^{\int_1^n I(s)\,ds}}{n^2}$$

$$-\frac{\dot{A}}{A^2} = 0 + \frac{\frac{\beta \,.\, e^{\int_1^n I(s)\,ds}\left[\varepsilon - \sigma\right]}{1-\sigma} - \beta e^{\int_1^n I(s)\,dx}}{n^2}$$

$$-\frac{\dot{A}}{A^2} = \frac{\beta \,.\, e^{\int_1^n I(s)\,ds}\left[\frac{(\varepsilon - \sigma)}{1-\sigma} - 1\right]}{n^2}$$

$$-\frac{\dot{A}}{A^2} = \frac{\beta \,.\, e^{\int_1^n I(s)\,ds}\left[\frac{\varepsilon - \cancel{\sigma} - 1 + \cancel{\sigma}}{(1-\sigma)}\right]}{n^2}$$

$$-\frac{\dot{A}}{A^2} = \frac{\beta \,.\, e^{\int_1^n I(s)\,ds}(\varepsilon - 1)}{(1-\sigma)\,n^2}$$

$$-\frac{\dot{A}}{A^2} = \frac{\beta \,.\, e^{\int_1^n I(s)\,ds}}{n} \,.\, \frac{(\varepsilon - 1)}{(1-\sigma)n}$$

$$-\frac{\dot{A}}{A^2} = \frac{(1-A)}{A} \,.\, \frac{(\varepsilon - 1)}{(1-\sigma)n}$$

$$-\frac{\dot{A}}{A} = (1-A) \,.\, \frac{(\varepsilon - 1)}{(1-\sigma)n}$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{(1-A)\,(\varepsilon - 1)}{(1-\sigma)n}$$

$$\dot{A} = \frac{A}{n}\,\frac{(1-A)\,(\varepsilon - 1)}{(1-\sigma)}$$

$$\dot{A} < \frac{A}{n} \Rightarrow \frac{\cancel{A}}{\cancel{n}}\,\frac{(1-A)\,(\varepsilon - 1)}{(1-\sigma)} < \frac{\cancel{A}}{\cancel{n}}$$

$$(1-A)\,(\varepsilon - 1) < \sigma - 1$$

$$\left[1 - A(n)\right] \,.\, \left\{\varepsilon(n^{\frac{1}{1-\sigma}}) - 1\right\} < \sigma - 1$$

CQD

7.5. O caso com armadilha do subdesenvolvimento causado pelo efeito do transbordamento do conhecimento ($a_n = \frac{a_1}{n_t}$).

Sabemos que:

$$(w_t a_n - v_t) \,.\, \dot{n}_t = 0 \quad ; \quad \dot{n}_t \geq 0$$

$$Q_t \equiv \frac{n_t v_t}{C_t} = \frac{W_t}{C_t} = n_t V_t \quad \therefore \quad V_t = \frac{Q_t}{n_t}$$

De 13a, 13b e 13c

$$\dot{V}_t = \rho V_t - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t}$$

$$\dot{n}_t = \max \left\{ \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right) . \frac{1}{V_t} \, , 0 \right\}$$

$$\lim_{t \to \infty} V_t n_t \;\; e^{-\rho t} = 0$$

$$\dot{V}_t = \rho V_t - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t}$$

$$V_t = \frac{Q_t}{n_t}$$

$$\dot{V}_t = \rho \,.\, \frac{Q_t}{n_t} - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} = \frac{1}{n_t} \left[\rho Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma} \right]$$

$$Q_t = n_t V_t$$

$$\dot{Q}_t = \dot{n}_t \, V_t + n_t \,.\, \dot{V}_t$$

$$\dot{Q}_t = \dot{n}_t \,.\, \frac{Q_t}{n_t} + n_t \,.\, \left[\rho \frac{Q_t}{n_t} - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} \right]$$

De $\dot{Q}_t = 0$, teremos a curva QQ dada por:

$$Q_t = \frac{\dot{n}_t}{n_t} Q_t + \rho Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma}$$

$$(w_t a_n - v_t) \cdot \dot{n}_t = 0$$

1º caso (com armadilha) $\quad a_n = \dfrac{a_1}{n_t}$

$$\dot{n}_t = 0 \quad \text{e} \quad w_t \frac{a_1}{n_t} > v_t$$

$$Q_t = \rho Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma}$$

2º caso (sem armadilha)

$$\dot{n}_t \neq 0 \quad \text{e} \quad w_t an = v_t$$

$$w_t . \frac{a_1}{n_t} = v_t \quad \Rightarrow \quad w_t a_1 = n_t v_t = Q_t C_t$$

$\dot{n}_t \neq 0$ tais que em (13 b):

$$\dot{n}_t = \max\left\{\frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n)}{\sigma}\right) . \frac{1}{V_t}, 0\right\}$$

$$V_t = \frac{Q_t}{n_t} \Rightarrow \frac{1}{V_t} = \frac{n_t}{Q_t} \qquad a_n = \frac{a_1}{n_t}$$

$$\dot{n}_t = \max\left\{L . \frac{n_t}{a_1} - \left(1 - \frac{A`(n)}{\sigma}\right) . \frac{n_t}{Q_t}, 0\right\}$$

$$\frac{\dot{n}_t}{n_t} = \max\left\{\frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \frac{1}{Q_t},\ 0\right\}$$

2º caso : sem armadilha

$$\dot{n}_t \neq 0$$

$$\dot{Q}_t = \left[\rho + \frac{\dot{n}_t}{n_t}\right] . Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma}$$

$$\dot{Q}_t = \left[\rho + \left[\frac{L}{a_1} - \frac{1}{Q_t} + \frac{A(n_t)}{\sigma} . \frac{1}{Q_t}\right]\right] . Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma}$$

$$\dot{Q}_t = \rho Q_t + \frac{L}{a_1} Q_t - 1 + \cancel{\frac{A(n_t)}{\sigma}} - \cancel{\frac{A(n_t)}{\sigma}}$$

$$\dot{Q}_t = \left(\rho + \frac{L}{a_1}\right) Q_t - 1$$

$$\dot{Q}_t = \max\left\{\left(\rho + \frac{1}{a_1}\right) Q_t - 1,\ \rho Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right\}$$

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{V_t n_t}_{Q_t}\ e^{-\rho t} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} Q_t\ e^{-\rho t} = 0$$

$$\dot{n}_t \neq 0,\quad \dot{Q}_t = 0$$

$$\dot{Q}_t = \left(\rho + \frac{L}{a_1}\right) . Q_t - 1 = 0$$

$$\left(\rho + \frac{L}{a_1}\right) . Q_t = 1$$

$$Q_t = \frac{1}{\rho + \frac{L}{a_1}} \qquad \text{para } \dot{n}_t \neq 0,\quad \dot{Q}_t = 0$$

$$\dot{n}_t = 0 \;\Rightarrow\; \dot{Q}_t = \rho Q_t - \frac{A(n_t)}{\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow\quad Q_t = \frac{A(n_t)}{\sigma\rho}$$

$$\frac{\dot{n}_t}{n_t} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{\dot{n}_t}{n_t} = \frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \frac{1}{Q_t} = 0$$

$$\dot{n}_t = \frac{n_t L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \frac{n_t}{Q_t} = 0$$

$$n_t \left[\frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \frac{1}{Q_t}\right] = 0$$

$$\frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \frac{1}{Q_t} = 0 \quad \text{caso} \quad n_t > 0$$

Ou seja:

$$Q_t = \frac{a_1}{L}\left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right)$$

Para achar o ponto onde NN e QQ se interceptam, e a partir do qual $n_t \geq 0$, temos:

$$\frac{a_1}{L}\left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) = \frac{1}{\rho + \frac{L}{a_1}}$$

$$\frac{a_1}{L} - \frac{a_1}{L}\frac{A(n_t)}{\sigma} = \frac{1}{\rho + \frac{L}{a_1}}$$

$$\frac{A(n_t)}{\sigma} . \frac{a_1}{L} = \frac{a_1}{L} - \frac{1}{\rho + \frac{L}{a_1}}$$

$$\frac{A(n_t)}{\sigma} = \frac{a_1}{L} . \frac{L}{a_1} - \frac{1}{\rho + \frac{L}{a_1}} . \frac{L}{a_1}$$

$$\frac{A(n_t)}{\sigma} = 1 - \frac{L}{\rho a_1 + L} = \frac{\rho a_1 + \cancel{L} - \cancel{L}}{\rho a_1 + L}$$

$$\frac{A(n_t)}{\sigma} = \frac{\rho a_1}{\rho a_1 + L} = \frac{1}{1 + \frac{L}{\rho a_1}} = \left(1 + \frac{L}{\rho a_1}\right)^{-1}$$

Vamos chamar este valor de n_t, de n_{min}, assim:

$$A_{(n_{min})} = \sigma\left(1 + \frac{L}{\rho a_1}\right)^{-1} < 1$$

$$\frac{\dot{n}_t}{n_t} = \frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \frac{1}{Q_t}$$

mas de QQ, dada por $Q_t = \dfrac{1}{\rho + \dfrac{L}{a_1}}$ temos:

$$\frac{1}{Q_t} = \rho + \frac{L}{a_1}$$

substituindo na equação para $\dfrac{\dot{n}_t}{n_t}$:

$$\frac{\dot{n}_t}{n_t} = \frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) . \left(\rho + \frac{L}{a_1}\right)$$

$$\frac{\dot{n}_t}{n_t} = \cancel{\frac{L}{a_1}} - \rho - \cancel{\frac{L}{a_1}} + \rho\frac{A(n_t)}{\sigma} + \frac{A(n_t)}{\sigma} . \frac{L}{a_1}$$

$$\frac{\dot{n}_t}{n_t} = \frac{A(n_t)}{\sigma} + \frac{L}{a_1} - \rho\left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{n}_t}{n_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{A(n_t)}{\sigma} + \frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right)\rho$$

mas $A(n_t) \to 1$ quando $n \to \infty$ e quando $t \to \infty$, $n \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{n}_t}{n_t} = \frac{1}{\sigma} . \frac{L}{a_1} - \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\rho$$

Ou seja, a taxa de crescimento de variedades tende para um valor limite constante.

7.6.Tipologia das possibilidades de armadilha do subdesenvolvimento.

Temos que $\dfrac{P}{w} = n_t^{\frac{1}{1-\sigma}}$ e $\dfrac{1}{\mathrm{A(n)}} = 1 + \dfrac{\mathrm{wH}}{\mathrm{PX}} = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{w}}\right) \cdot \dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{H}}}$

mas $\dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{H}} = \left(\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{w}}\right)^{-\varepsilon}$

$$\frac{1}{A(n_t)} = 1 + \frac{1}{\left(\dfrac{P}{w}\right) \cdot \left(\dfrac{P}{w}\right)^{-\varepsilon}} = 1 + \frac{1}{\left(\dfrac{P}{w}\right)^{1-\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{A(n_t)} = 1 + \frac{1}{\left(n_t^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\varepsilon}} = 1 + \frac{1}{n_t^{\frac{1-\varepsilon}{1-\sigma}}}$$

$$\frac{1}{A(n_t)} = 1 + \frac{1}{n_t^{\frac{(1-\varepsilon)}{-(\sigma-1)}}} = 1 + n_t^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}$$

Como $\sigma > 1$ e se $\varepsilon > 1$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{A(n_t)} = 1 + n_t^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}$$

$$\uparrow A(n_t) = \frac{1}{1 + n_t^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{\uparrow n_t^{\frac{\varepsilon-1+}{\sigma-1+}}}\right)\downarrow}$$

Se $\varepsilon > 1$ $A(n_t)$ é função crescente de n

Se $\varepsilon < 1$ $A(n_t)$ é função decrescente de n

a) Caso: sem o efeito de transbordamento do conhecimento (a_n fixo)

Proposição

$$NN(\dot{n} = 0) \;\Rightarrow\; \downarrow V = \frac{a_n}{L}\left(1 - \uparrow \frac{A(n)}{\sigma}\right)$$

Com $\varepsilon > 1 \quad \sigma > 1$ $A(n_t)$ é crescente em n , então, VV é decrescente.

Demonstração:

$$V_t = \frac{A(n_t)}{n_t} \cdot \frac{1}{\rho\sigma} \qquad \text{(VV)}$$

mas

$$A(n_t) = \frac{1}{1 + n_t^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}}$$

$$V_t = \frac{1}{\rho\sigma} \cdot \frac{\frac{1}{1 + n_t^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}}}{\frac{n_t}{1}}$$

$$V_t = \frac{1}{\rho\sigma} \cdot \frac{1}{1 + n_t^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}} \cdot \frac{1}{n_t}$$

$$V_t = \frac{1}{\rho\sigma} \cdot \frac{1}{n_t + n_t^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma-1}}}$$

$$Se\ \varepsilon \leq \sigma \quad \Rightarrow \quad \downarrow V_t = \frac{1}{\rho\sigma} \cdot \frac{1}{\uparrow n_t + \uparrow n_t^{\frac{\sigma-\varepsilon+}{\sigma-1+}}}$$

Logo VV é decrescente

CQD

b) Caso : com efeito transbordamento do conhecimento ($a_n = \frac{a_1}{n_t}$)

$$\frac{1}{a_n} = \frac{n_t}{a_1}$$

$$\dot{V}_t = \rho V_t - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t} \Rightarrow VV(\dot{V}_t) \Rightarrow V = \frac{A(n_t)}{\rho\sigma n_t}$$

$$\dot{n}_t = \max\left\{\frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{V_t},\ 0\right\}$$

$$\dot{n}_t = \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{V_t} = 0$$

$$\frac{L}{a_n} = \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{V_t}$$

$$V_t = \frac{L}{a_n} - \left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right)$$

Introduzindo o efeito transbordamento de conhecimento $a_n = \dfrac{a_1}{n_t}$, temos:

$$V_t = L \cdot \frac{n_t}{a_1}\left(1 - \frac{A(n_t)}{\sigma}\right)$$

$$V_t = L\,\frac{\uparrow n_t}{a_1} - \left(\frac{L}{a_1\sigma} \cdot \downarrow n_t \cdot A(n_t)\right)$$

$$A(n_t) = \frac{1}{1 + n_t^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}}$$

$$n_t A(n) = \frac{n_t}{1 + n_t^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{n_t} + n_t^{\frac{2-(\varepsilon-\sigma)}{\sigma-1}}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma > 1\\ \varepsilon > 1\end{array}\right\}\ \varepsilon + \sigma > 2$$

$$\sigma \geq \varepsilon$$

$$\downarrow n_t A(n_t) = \frac{1}{\downarrow\left(\uparrow\dfrac{1}{n_t}\right) + \left(\dfrac{1}{\uparrow n_t^{\frac{(\varepsilon+\sigma)-2+}{\sigma-1\quad +}}}\right)\downarrow}$$

$$\uparrow V_t = \uparrow L\frac{n_t}{a_1} - \frac{L}{a_1\sigma}\downarrow n_t \cdot A(n_t)$$

(a) Sem efeito transbordamento de conhecimento

Tirando o subscrito t para simplificar a notação temos:

Caso: $\sigma > 1, \sigma < \varepsilon$

$$\frac{A(n)}{n} = \frac{1}{n + n^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma-1}}} = \frac{1}{\uparrow n + \left(\dfrac{1}{\uparrow n + \left(\dfrac{1}{\uparrow n^{\frac{\varepsilon-\sigma+}{\sigma-1+}}}\right)\downarrow}\right)}$$

$$y = n \therefore \frac{dy}{dn} = 1$$

$$y = n^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma-1}} \Rightarrow \frac{dy}{dn} = \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma-1} \,.\, n^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}}$$

$$\text{Se} \left| \frac{(\sigma-\varepsilon)}{\sigma-1} \; n^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}} \right| < 1$$

$$-1 < 0 < \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma-1} \, n^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}} < 1$$

$$\frac{\varepsilon-\sigma}{\sigma-1} \, n^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}} > 1$$

$$\sigma < \varepsilon$$

$$\sigma > 1$$

$$n^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}} > \frac{\sigma-1}{\varepsilon-\sigma}$$

$$\text{Se } n > \left(\frac{\sigma-1}{\varepsilon-\sigma} \right)^{\frac{\sigma-1}{1-\varepsilon}}$$

então $\frac{An}{n} \downarrow$ e VV é decrescente

Se $n < \left(\frac{\sigma-1}{\varepsilon-\sigma} \right)^{\frac{\sigma-1}{1-\varepsilon}}$ então $\left(\frac{An}{n} \right) \uparrow$ e VV é crescente

(b) Com efeito transbordamento de conhecimento

$$VV(\dot{V}_t = 0) \quad V = \frac{A(n)}{n} \cdot \frac{1}{\rho\sigma}$$

$$NN(\dot{n}_t = 0) \quad \Rightarrow \quad V_t = L\frac{n_t}{a_1} - \frac{L}{a_1\sigma} nA(n_t)$$

$$\uparrow V_t = \frac{L}{a_1}\left(n_t - \downarrow \frac{nA(n_t)}{\sigma}\right)$$

$$nA(n) = \frac{1}{\downarrow \frac{1}{\uparrow n} + \frac{1}{\uparrow n^{\frac{(\varepsilon+\sigma)-2+}{(\sigma-1)\;\;+}}} \downarrow}$$

Caso $\sigma > 1$ e $\varepsilon > 1$ então VV é crescente

$$\sigma > 1$$
$$\varepsilon + \sigma < 2$$

$$nA(n) = \frac{1}{\downarrow \frac{1}{\uparrow n} + \frac{1}{n^{\frac{(\varepsilon+\sigma)-2}{\sigma-1}\;\;+}} \uparrow}$$

$$\varepsilon + \sigma - 2 < 0$$
$$\varepsilon + \sigma < 2$$

$$y = \frac{1}{n} = n^{-1} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dn} = -1 \,.\, n^{-2} = \frac{-1}{n^2}$$

$$y = \frac{1}{n^{\frac{(\varepsilon+\sigma)-2}{\sigma-1}}} = n^{\frac{\varepsilon+\sigma-2}{1-\sigma}}$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{\varepsilon + \sigma - 2}{1-\sigma} \,.\, n^{\frac{\varepsilon+2\sigma-3}{1-\sigma}}$$

$$\varepsilon + \sigma < 2 \quad \sigma > 1$$

$$\left|-\frac{1}{n^2}\right| > \left|\frac{1}{n^{\frac{\varepsilon+2\sigma-3}{\sigma-1}}} \cdot \frac{(\varepsilon+\sigma-2)}{(1-\sigma)}\right|$$

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^{\frac{\varepsilon+2\sigma-3}{\sigma-1}}} \cdot \frac{2-(\varepsilon+\sigma)}{\sigma-1)}$$

$$n^2 > n^{\frac{\varepsilon+2\sigma-3}{\sigma-1}} \cdot \frac{\sigma-1}{2-(\varepsilon+\sigma)}$$

$$\frac{n^2}{n^{\frac{\varepsilon+2\sigma-3}{\sigma-1}}} > \frac{\sigma-1}{2-(\varepsilon+\sigma)}$$

$$n^{2-\left(\frac{\varepsilon-2\sigma-3}{\sigma-1}\right)} > \frac{\sigma-1}{2-(\varepsilon+\sigma)}$$

$$n^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}} > \frac{\sigma-1}{2-(\varepsilon+\sigma)}$$

$$n^{\frac{1-\varepsilon}{\sigma-1}} > \frac{1-\sigma}{(\varepsilon+\sigma)-2}$$

Se $n > \left[\frac{1-\sigma}{(\varepsilon+\sigma)-2}\right]^{\frac{\sigma-1}{1-\varepsilon}}$

então VV é crescente

(a) Sem efeito transbordamento de conhecimento

$$\dot{V}_t = \rho V_t - \frac{A(n_t)}{\sigma n_t}$$

$$VV(\dot{V}_t = 0) \quad \Rightarrow \quad V_t = \frac{A(n_t)}{\rho\sigma n_t}$$

usando agora a variável Q_t teremos:

$$Q_t = n_t V_t \quad \Rightarrow \quad V_t = \frac{Q_t}{n_t}$$

$$\frac{Q_t}{\cancel{n_t}} = \frac{A(n_t)}{\rho\sigma\cancel{n_t}}$$

$$\downarrow Q_t = \frac{A(n_t)}{\rho\sigma} \downarrow$$

Se $\varepsilon < 1 \;\Rightarrow\;$ é decrescente em n

$\varepsilon > 1 \;\Rightarrow\;$ é crescente em n

INTERCESSÃO DOS LOCUS NN e VV

$$\frac{A(n^*)}{\rho\sigma n^*} = \frac{a_n}{L}\left(1 - \frac{A(n^*)}{\sigma}\right)$$

$$\frac{L}{\rho\sigma n^*} = \frac{n^*\sigma}{A(n^*)}\left(1 - \frac{A(n^*)}{\sigma}\right) = n^*\left(\frac{\sigma}{A(n^*)} - 1\right)$$

$$NN \Rightarrow V = \frac{a_n}{L}\left[1 - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{1 + n^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma-1}}}\right]$$

$$\downarrow A(n) = \alpha = \frac{1}{1 + \left(n^{\left(\frac{1-\varepsilon}{\uparrow\sigma-1}\right)\downarrow}\right)\downarrow}$$

Fixado n, $\begin{matrix}\sigma > 1, \\ \varepsilon > 1\end{matrix}$

$\varepsilon\downarrow,\ \sigma\uparrow,\ A(n)\downarrow$

$$\pi_t = \frac{A(n_t)}{n_t} \cdot \frac{C}{\sigma}$$

$$\downarrow \pi_t = \frac{C_t}{\sigma} \cdot \frac{1}{\uparrow n_t + \uparrow\left(n_t^{\frac{(\sigma-\varepsilon\uparrow)\downarrow}{\sigma-1}}\right)\downarrow}$$

Fixando n

$$\left.\begin{matrix}\sigma\downarrow \\ \varepsilon\uparrow\end{matrix}\right\} \pi_t \uparrow$$

Se $\sigma > 1$ e $\sigma \geq \varepsilon \Rightarrow \pi_t$ é função decrescente de n

Se $\varepsilon = \sigma \quad A(n) = \dfrac{1}{1+n^{-1}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$

$$A(n) = \frac{1}{\dfrac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

e $\quad \dfrac{A(n)}{n} = \dfrac{1}{n+1}$

Locus:

$$NN \Rightarrow V = \frac{a_n}{L}\left[1 - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{n}{n+1}\right]$$

$$VV \Rightarrow V = \frac{1}{\rho\sigma} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\rho\sigma(n+1)}$$

Intercessão

$$\frac{a_n}{L} - \frac{a_n}{L\sigma} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\rho\sigma(n+1)}$$

$$\frac{1}{\rho\sigma(n+1)} + \frac{a_n \, . \, n}{L\sigma \; (n+1)} = \frac{a_n}{\dfrac{L}{\rho\sigma(n+1)}}$$

$$L + a_n \, . \, n\rho = a_n\rho\sigma(n+1)$$

$$a_n\rho\sigma \, . \, n_t + L = a_n\rho\sigma \, . \, n_t + a_n\rho\sigma$$

$$n_t(a_n\rho - an\rho\sigma) = a_n\rho\sigma - L$$

$$a_n\rho \, . \, n_t(1-\sigma) = a_n\rho\sigma - L$$

$$n^* = \frac{a_n\rho\sigma - L}{a_n\rho(1-\sigma)}$$

$$\uparrow n^* = \frac{a_n\rho\sigma - L}{a_n\rho - a_n\rho\sigma} = \frac{1 - \left(\dfrac{L}{\uparrow a_n \uparrow \rho\sigma\uparrow}\right)\downarrow}{\downarrow\left(\dfrac{1}{\uparrow\sigma}\right) - 1}$$

Quanto $L\downarrow$, an$\uparrow$, $\rho\uparrow$, $\sigma\uparrow \;\Rightarrow\; n^* \Rightarrow$

$$\pi_t = \frac{C_t}{\sigma} \cdot \frac{1}{(n+1)} = \frac{C_t}{(n+1) \, . \, \sigma}$$

então $\quad (n+1)\sigma = \dfrac{C_t}{\pi_t}$

$$\frac{1}{\rho\pi_t} + \frac{a_n \ . \ n^*}{L\pi_t} = \frac{a_n}{L}$$

$$\frac{a_n}{L\pi_t}\, n^* = \frac{a_n}{L} - \frac{1}{\rho\pi_t}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\left(n^{\frac{\varepsilon - 1}{\uparrow \sigma - 1}\downarrow} \right)}}\begin{matrix}\downarrow \\ \uparrow\end{matrix}$$

$$n^* = \frac{\cancel{L}\pi_t \ . \ \cancel{a}_n}{\cancel{L}\cancel{a}_n} - \frac{L\pi_t}{\rho\pi_t a_n}$$

$$\frac{1}{n^{*2}} \quad \uparrow n^* = \uparrow \pi_t - \left(\frac{L}{\uparrow \rho a_n \uparrow} \right)\downarrow$$

CAPITULO 4

REVISITANDO O DEBATE ENTRE KRUGMAN E FUKAO-BENABOU SOBRE HISTÓRIA E EXPECTATIVA

1. Introdução

Na literatura recente modelos de crescimento econômico com "externalidades pecuniárias" tem alcançado um papel relevante. De acordo com Krugman (1991), elencaremos a seguir algumas delas.

Murphy, Shleifer e Vishny (1989) mostram de que maneira o tamanho do mercado podem criar economias externas entre empresas do setor industrial e usaram esta abordagem na reformulação da teoria do "grande empurrão" do desenvolvimento econômico de Rosenstein-Rodan [1943]. Krugman (1981, 1987) utilizando as economias externas apresenta um modelo de desenvolvimento no qual a divisão do mundo entre nações ricas e pobres acontece endogenamente. Ethier (1982) e Panagariya (1986) fazem uma análise de estabilidade utilizando as dinâmicas Marshallianas e que resultam no fato de que a escolha eventual do equilíbrio depende das condições iniciais da economia. Em Krugman (981) a dinâmica de acumulação de capital mostra que uma região que comece com um estoque de capital menor termina praticamente por ser abandonado.

Ainda segundo Krugman, pela doutrina do "Big Push" de Rosenstein-Rodan (1943) o investimento das empresas depende das suas expectativas de que outras empresas também invistam. Para Farrell e Saloner (1986), dependendo dos valores de alguns parâmetros podem existir equilíbrios múltiplos auto-realizáveis. Diamond e Fudenberg (1987) e Howitt e McAfee (1988) também abordam a existência de equilíbrios múltiplos.

O texto de Fukao e Benabou tem sido citado com alguma freqüência na literatura. Para Ottaviano (1997) uma redução nos custos de comércio ou de migração fortalece o papel das expectativas e enfraquece o efeito da história. Hirose (2005) cria uma tipologia para tipos de aglomeração. Baldwin (1999) mostra que a questão da história versus expectativas surgem quando os custos de migração são baixos.

A seção 2 mostra o modelo de Krugman (1991). A seção 3 apresenta a crítica de Fukao e Benabou (1993). A seção 4 traz a proposição de Fukao e Benabou. A seção 5 analisa a forma funcional da produtividade do trabalho. A seção 6 faz uma discussão sobre os pontos terminais. A seção 7 critica o argumento de Fukao e Benabou e a última seção traz as conclusões.

2. O modelo de Krugman

O objetivo desta seção é apresentar o modelo de Krugman.

O modelo de Krugman é caracterizado pelas seguintes hipóteses:

i. Só existe único fator de produção: o trabalho.

ii. A economia produz somente dois tipos de bens: o bem *C* cuja função de produção é homogênea de grau 1 e o bem *X*.

iii. A produção do bem X está sujeita a uma externalidade: A produtividade do trabalho é diretamente proporcional à força de trabalho empregada no setor, ou seja:

$$\pi = \pi(L_X) \text{ , com } \pi(0) < 1 \text{ e } \pi(\bar{L}) > 1 \tag{2.1}$$

Krugman assume que $\pi(L_X)$ é de classe C^1, crescente em L_X e que $0 < \pi(0) < \bar{L}$, $1 < \pi(\bar{L}) < +\infty$, onde $\bar{L}$ é a oferta inelástica de trabalho total da economia.

O Salário no setor *C* é normalizado em 1, pois Krugman faz com que uma unidade de trabalho nesse setor produza exatamente uma unidade de *C* (cujo valor é igual à unidade). No setor X, o salário é igual ao produto médio pois cada firma desse setor toma a produtividade do fator trabalho como constante, ou seja:

$$\omega = \pi(L_X) \tag{2.2}$$

onde ω é a taxa de salário real em *X relativa* ao setor *C*. A seguir Krugman faz com que L_X^* seja o valor crítico que satisfaz $\pi(L_X^*) = 1$ e a Renda Nacional da economia é dada por :

$$Y = \pi(L_X).L_X + (\bar{L} - L_X) - (\frac{1}{2\gamma}).(\dot{L}_X)^2 \tag{2.3}$$

onde Y é a Renda Nacional da economia, $\pi(L_X).L_X$ é a renda do setor X, $(\bar{L} - L_X)$ é a renda do setor C , $(\frac{1}{2\gamma}).(\dot{L}_X)^2$ é o custo de deslocamento suposto quadrático (que é o modo mais simples de modelar esse custo) e γ é um índice inverso do custo de ajustamento.

Sendo r, a taxa de juros, o objetivo dos agentes é:

$$H = \int_0^\infty Y.e^{-rt}dt \tag{2.4}$$

Ainda segundo Krugman a taxa de movimento do trabalho é igual ao produto dos custos de mudança marginais por um preço-sombra que representa a diferença (em valores nominais) entre ter uma unidade de trabalho no setor X e no setor C, ou seja:

$$\dot{L}_X = \gamma.q \tag{2.5}$$

onde q é o preço-sombra definido como:

$$q(t) = \int_t^\infty (\pi - 1)e^{-r(\tau - t)}d\tau \qquad (2..6)$$

Krugman também adota a regra de arbitragem:

$$rq = (\pi - 1) + \dot{q} \tag{2.7}$$

onde $\pi - 1$ é a diferença em ganhos atuais entre o trabalho nos setores X e C e q é a taxa dos ganhos de capital . Para fornecer a dinâmica de q, a equação (2.7) é reescrita como:

$$\dot{q} = rq - \pi(L_X) + 1 \tag{2.8}$$

onde $\dot{q}$ é o valor presente dos ganhos futuros extras para uma mudança de C para X no tempo t.

A dinâmica do sistema, no plano $(q; L_X)$, é dada elas equações (2.5) e (2.8). mostradas na Figura I (de Fukao e Bebabou)

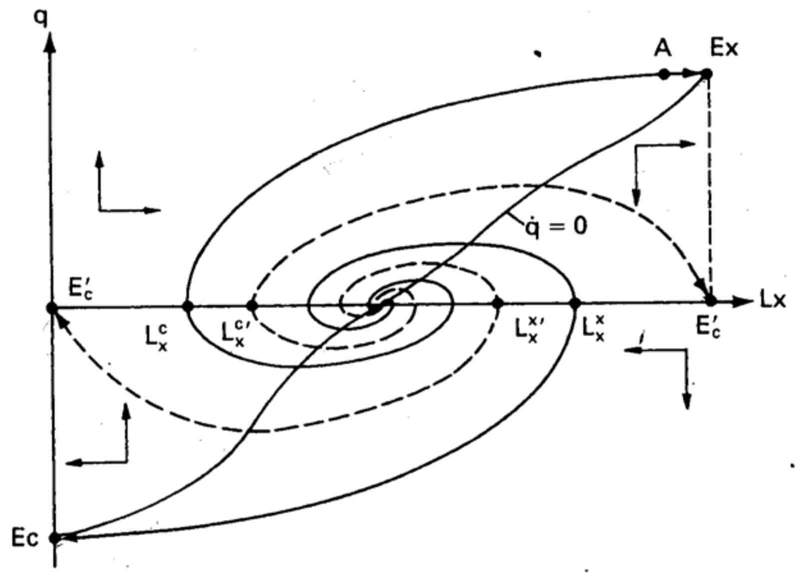

FIGURE I

3. A crítica de Fukao e Benabou

Nesse modelo existem múltiplos caminhos de equilíbrios auto-realizáveis caso:

i. Os autovalores do sistema dinâmico sejam números complexos;

ii. O trabalho alocado no setor com externalidade Marshalliana estiver dentro do "overlap",

Fukao e Benabou mostram que a condição terminal apresentada por Krugman está errada. Convergindo este erro para uma modificação da amplitude do "overlap" desse autor.

A solução do sistema, dado pelas equações (2.5) e (2.8), mostra que existe um único ponto estacionário dado por $(L_X = L_X^*, q = 0)$ e que os autovalores do sistema são:

$$\rho = \frac{[r \pm \sqrt{r^2 - 4\gamma\pi'(L_X^*)}]}{2}$$

A análise do termo dentro do radical acima mostrado evidencia que existem dois caminhos de equilíbrio:

i. O sistema linearizado (visto que $\pi(L_X)$ tem uma forma funcional linear) diverge do ponto estacionário caso $r^2 > 4\gamma\pi'(L_X^*)$ pois nesta casso as raízes são reais e positivas.

ii. O sistema linearizado diverge através de oscilações caso $r^2 < 4\gamma\pi'(L_X^*)$, pois neste casoas raízes são números complexos conjugados com a parte real positiva.

Mas como essas duas situações acima citadas são ambas de divergência, Fukao e Benabou, lembram que se torna necessário realizar uma análise global ao invés da análise local feita por Krugman.

4. A Proposição de Fukao e Benabou

Fukao e Benabou apresentam a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO DE FUKAO E BENABOU: Para todos os valores iniciais $(L_X(0), q(0))$ que satisfaz $0 < L_X(0) < \overline{L}$, exceto para o ponto estacionário , a solução do sistema dinâmico (3.1)-(3.2) irá atingir os limites $L_X = 0$ ou $L_X = 1$ em um tempo finito.

A fim de demonstrar sua proposição os autores acima citados utilizam algumas técnicas de sistemas dinâmicos que mostramos no apêndice. A prova deles segue o roteiro abaixo.

(i) O primeiro passo é quando os autores mostram que não existe órbita fechada.

(ii) Em seguida os autores a lembram que caso $q > \frac{[\pi(\overline{L}) - 1]}{r}$ ou $q < \frac{[\pi(0) - 1]}{r}$, então a economia irá atingir, respectivamente, os parâmetros limites $L_X = 0$ ou $L_X = 1$ em um tempo finito.

Em resumo segundo Fukao e Benabou, os dois equilíbrios terminais possíveis mostrados por Krugman, gerados a partir do ponto de equilíbrio não estacionário, estão errados, porque não podem admitir ponto estacionário com preço sombra *q* do trabalho usado nos setores com externalidades positivas diferente de zero (como Krugman supôs). Isto ocorre porque, em virtude da existência de externalidades na produção do setor *X*, expectativas autorealizáveis conduzirão os trabalhadores a se empregarem todos no setor *X* ou no setor *C*. Nestes dois pontos estacionários, para Fukao e Benabou, não deverá haver incentivos para que os trabalhadores mudem de setor, de modo que q deverá ser zero.

Notamos também que Krugman está certo ao afirmar que existe um região de alocações do trabalho (que ele chama *overlap*) no interior do qual a escolha do equilíbrio dependerá, ao mesmo tempo, da alocação inicial (história) e das expectativas. Todavia, Fukao e Benabou provam que esta região é menor do que aquela suposta por Krugman.

5. Estudo da forma funcional da produtividade do trabalho.

Krugman utiliza uma forma linear para a produtividade do trabalho $\pi(L_X)$, a pesquisa aqui realizada pretende analisar qual seria a dinâmica do modelo caso sejam utilizadas outras formas funcionais da produtividade do trabalho. A seguir apresentamos os resultados encontrados.

Até que ponto a existência de equilíbrios estacionários múltiplos e o modo de convergência para eles à partir de uma situação inicial dependerá da função $\pi(L_X)$?

1 Qualquer função π com derivada positiva na solução $\pi(L_X^*)$, representando crescimento da produtividade com o aumento do trabalho no setor X (externalidade à la Marshall) leva aos mesmos resultados do ponto de vista qualitativo.

2 Eventualmente, uma função crescente periódica por exemplo, poderia gerar várias soluções $\pi(L_X^*)$, mas os equilíbrios estacionários no longo prazo seriam os mesmos (ao redor de cada $\pi(L_X^*)$ haverá um *overlap*) levando a trajetórias em espiral para o $L_X = \overline{L}$ ou $L_X = 0$.

Não achamos conveniente explorar casos deste tipo mais complexos, pois o modelo de Krugman foi escrito de maneira simples apenas para ilustrar situações em que o equilibrio escolhido no longo prazo dependerá de ambos, da história (situação inicial: no overlap ou fora dele) e das expectativas (a trajetória de convergência adotada). O estudo de situações em que π seria periódica só complicaria as contas sem acrescentar nenhuma informação adicional sobre a questão história versus expectativas.

Além disso notamos que as correções feitas por Fukao e Benabou em modo nenhum dependem de uma forma funcional específica para π. A parte real das raízes do sistema não dependem da sua derivada, no caso de *overlap*.

6. Discussão sobre os pontos terminais

Para Krugman a economia atinge um dos dois pontos terminais:

(i) $(L_X = \bar{L}, q = [\pi(\bar{L}) - 1]/r)$ ou

(ii) $(L_X = 0, q = [\pi(0) - 1]/r)$.

Esses pontos são denotados na figura I (de Fukao e Benabou) por E_X e E_C, e são atingidos através dos caminhos de equilíbrio mostrados em linhas cheias nessa figura.

Para Krugman *q(t)* é dado pela equação:

$$q(t) = \int_t^{\infty} (\pi(L_X(\tau)) - 1)e^{-r(\tau - t)} d\tau$$

Segundo Fukao e Benabou esse argumento de Krugman sobre as condições terminais não é correto, de acordo com esses autores, os verdadeiros pontos terminais atingidos pelos caminhos de equilíbrio (que são mostrados por linhas pontilhadas na figura I) são:

(i) *Ex'* $(L_X = \bar{L}, q = 0)$ ou

(ii) *Ec'* $(L_X = 0, q = 0)$ são.

Segundo Fukao e Benabou a equação *q(t)* deve ser:

$$q(t) = \int_t^{T} [\pi(L_X(\tau)) - 1]e^{-r(\tau - t)} d\tau$$

Sendo *T* o tempo (finito) no qual a economia atinge o seu bordo.

Segundo Fukao e Benabou , na figura I, caso a economia estivesse localizada em um ponto A sobre o caminho de equilíbrio de Krugman e próximo do ponto terminal E_X, um trabalhador no setor *C* teria um ganho positivo e um custo de deslocamento nulo se postergasse seu deslocamento até que todos os outros trabalhadores tenham se deslocado e portanto o ponto A não poderia está numa trajetória de equilíbrio. Segundo esses autores os únicos caminhos que não permitem essa arbitragem são aqueles para os quais q é praticamente nulo. No seu artigo original eles mostram que os verdadeiros caminhos de equilíbrio são aqueles que levam ao ponto terminais, para os que a condição (2.8) de arbitragem não seja mais válida.

7. Uma crítica ao argumento de Fukao e Benabou

Notamos então que o tempo T em que a economia atinge seu limite (sua borda) depende do tipo de "landing" (pouso):

(i) O equlíbrio do tipo de Fukao e Benabou, com "soft landing" (pouso suave) temos $\dot{L}_X = 0$, $\dot{q} < 0$ e $q = 0$

(ii) O Equilíbrio do tipo de Krugman, com "hard landing" (pouso brusco) temos $\dot{L}_X > 0$, $\dot{q} = 0$ e $q > 0$

Como mencionado acima, Fukao e Benabou argumentam que em um ponto A sobre a trajetória $\dot{q} = 0$ de Krugman não poderia terminar em equilíbrio. Discordamos dessa argumentação como veremos a seguir. É verdade, como mostrou Fukao e Benabou, que a economia atinge seu limite em um tempo finito T e não em $T = \infty$. Porém, o mesmo não podemos dizer sobre o tempo utilizado para se determinar q. Fukao e Benabou definem o preço-sombra como:

$$q(t) = \int_t^T [\pi(L_X(\tau)) - 1] e^{-r(\tau - t)} d\tau$$

Ao nosso ver uma melhor definição seria:

$$q(t) = \int_t^T [\pi(L_X(\tau)) - 1] e^{-r(\tau - t)} d\tau + \int_T^\infty [\pi(L_X(\tau)) - 1] e^{-r(\tau - T)} d\tau$$

Mesmo que a economia venha a atingir seu limite nos pontos terminais $L_X = 0$ ou $L_X = 1$ em um tempo finito T, o mundo não acaba em T. Portanto devemos também incluir nos incentivos dos trabalhadores, os ganhos para além de T.

Então temos que:

$$q(t)=\int_t^T[\pi(L_X(\tau))-1]e^{-r(\tau-t)}d\tau+\int_T^\infty[\pi(L_X(\tau))-1]e^{-r(\tau-T)}d\tau$$

seja $I=\int_T^\infty[\pi(L_X(\tau))-1]e^{-r(\tau-T)}d\tau$

então: $I=\lim_{h\to\infty}\int_T^h[\pi(L_X(\tau))-1]e^{-r(\tau-T)}d\tau$

Supondo como Fukao e Benabou que a economia irá atingir seu limite $L_X=\overline{L}$ (normalizado para 1, isto é, $L_X=1$) em um tempo finito T e ali permaneça então:

logo: $\pi(L_X(\tau))-1=\pi(L_X(T))-1=\pi(\overline{L})-1$, $\forall \quad \tau\geq T$

logo: $I=[\pi(\overline{L})-1]\lim_{h\to\infty}\int_T^h e^{-r(\tau-T)}d\tau$

$$I=[\pi(\overline{L})-1]\lim_{h\to\infty}\left[\frac{e^{-r(\tau-T)}}{-r}\right]_{\tau=T}^{\tau=h}$$

$$I=[\frac{1-\pi(\overline{L})}{r}]\lim_{h\to\infty}\left[e^{-r(h-T)}-e^{-r(T-T)}\right]=[\frac{1-\pi(\overline{L})}{r}]\lim_{h\to\infty}\left[\frac{1}{e^{-r(h-T)}}-1\right]=[\frac{1-\pi(\overline{L})}{r}]$$

ou seja: $q(t)=\int_t^T[\pi(L_X(\tau))-1]e^{-r(\tau-t)}d\tau+[\frac{\pi(\overline{L})-1}{r}]$ (7.1)

Temos que $\dot{L}_X=\gamma.q$, logo $q=\frac{|\dot{L}_X|}{\gamma}$ e $\dot{q}=rq-\pi(L_X)+1$.

No lócus $\dot{q}=0$ temos que $q(t)=\frac{\pi(\overline{L})-1}{r}$, ou seja $q=\frac{|\dot{L}_X|}{\gamma}=\frac{\pi(\overline{L})-1}{r}$ (7.2)

para todo ponto pertencente ao locus $\dot{q}=0$. Substituindo (7.2) em (7.1) temos que:

$$\int_t^T[\pi[L_X(\tau))-1]e^{-r(\tau-t)}d\tau=0 \qquad (7.3)$$

Mas se vale a equação (7.3) então após a economia atingir os pontos limites em *T* finito, a condição de arbitragem, dada pela equação (2.8), não é mais válida.

Se a condição de arbitragem $\dot{q} = rq - \pi(L_X) + 1$ é válida mesmo para $t > T$ então o resultado de Krugman é válido com $\dot{q}(T) = 0$. Se essa condição não é mais válida a partir de *T,* então o resultado de Fukao e Benabou é válido com $q(T) = 0$ e $\dot{q}(T) < 0$.

Portanto a crítica que Fukao e Benabou fazem a Krugman não está correta. Diferente do que esses autores argumentam, não é verdade que o ponto terminal apontado por Krugman esteja errado e conseqüentemente a condição de arbitragem não é mais válida após a economia atingir, para esses autores, os verdadeiros pontos terminais. O que ocorre é o oposto. Caso a condição de arbitragem não seja mais válida, então os pontos finais da economia serão aqueles por eles apresentados.

8. Conclusões.

O presente capítulo apresentou um importante trabalho de Krugman sobre o papel das expectativas e das condições iniciais como determinantes das trajetórias de equilíbrio. Logo a seguir foi apresentada a crítica de Fukao e Benabou quanto ao tempo em que a economia atinge o seu bordo e também em relação aos pontos terminais da economia. No capítulo é feito um estudo de como a forma funcional da produtividade do trabalho poderia afetar a dinâmica do modelo, e é mostrado que não existe perda de generalidade ao se supor uma forma linear para a produtividade do trabalho. O capítulo também mostra a fragilidade da crítica de Fukao e Benabou que a princípio parecia muito robusta, não só pela sofisticação das ferramentas utilizadas, mas também pelos argumentos econômicos. O fato é que, apesar da economia alcançar o seu bordo em um tempo finito, a economia não termina nesse instante e, portanto e expressão que Fukao e Benabou apresentam para os incentivos para trocar de setor deveria levar esse fato em consideração.

Apesar da economia atingir seu limite em um tempo finito *T*, existem duas situações distintas possíveis:

(i) Caso a condição de arbitragem seja válida para todo tempo *t* até infinito então a economia atinge um ponto terminal do tipo apontado por Krugman só que com pouso brusco.

(ii) Caso a condição arbitragem não seja válida a partir do tempo *T* (no qual a economia atinge seu limite) então a trajetória de equilíbrio possui um ponto terminal do tipo apontado por Fukao e Benabou só que com pouso suave.

Em outras palavras os pontos terminais da economia dependem de qual hipótese é adotada em relação à como são tratados os incentivos dos trabalhadores após a economia atingir o seu bordo em um tempo finito.

9. Bibliografia

Baldwin, R. (1991).”The Core-Periphery Model With Forward- Looking Expectations”. CEPR Discussion Papers. No 2085.

Beavis, B. and Dobbs, I. (1990). “Optimization and Stability Theory for Economic Analysis”. Cambridge University Press.

Ethier, W. (1982).“Decreasing Costs in International Trade and Frank Graham’s Argument for Protection”. Econometrica, L, 1243-1268.

Farrell, J. and Saloner, G. (1986). “Installed Base and Compatibility: Innovation, Product Preannouncements and Predation”. American Economic Review, LXXVI, 940-955.

Fukao, K. and Benabou, R. (1993). “History versus Expectations: A comment”. Quarterly Journal of Economics, Vol. 108, nº 2, 535-542.

Hirose, K. (2005). “Migration and Agglomeration with Knowledge”. Discussion Papers in Economics and Business from Osaka University. No 05-16.

Hirsch, M. and Smale, S. (1974). Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Boston: Academic Press.

Howitt, P. and McAfee, R., (1988). “Stability of Equilibria with Externalities”. Quarterly Journal of Economics, CIII, 261-278

Krugman, P. (1991). “History versus Expectations”. Quarterly Journal of Economics, CVI, 651-667.

Krugman, P. (1987). “The Narrow Moving Band, the Dutch Disease and the Competitive Consequences of Mrs. Thatcher: Notes on Trade in the Presence of Dynamic Economies of Scale”. Journal of Development Economics, XXVII, 41-55

Murphy,K, Shleifer, A. and Vishny, R. (1989). “ Industralization and the Big Push”. Journal of Political Economy, XCVII, 1003-1026.

Myrdal, G. (1957).“Economic Theory and Underdeveloped Regions”. London: Duck-worth.

Ottaviano, G. (1997). "Integration, Geography and the Burden of History". Working Papers from Universita degli Studi di Bologna, Economia.
Panagariya, A. (1986). "Increasing Returns, Dynamic Stability, and International Trade". Journal of Internacional Economics, XX, 43-63.
Rosenstein-Rodan, P. (1943). "Problems of Industrialization of Eastern and South-eastern Europe". Economic Journal, LIII, 202-211

10. Apêndice

Sistema dinâmico autônomo.

O sistema $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ é dito ser autônomo pois f e g não dependem explicitamente da variável t (tempo).

Órbita de um sistema dinâmico.

O conjunto $\gamma = \gamma(P) = \{(x(t), y(t) : t \in R\}$ é chamado órbita de um sistema dinâmico autônomo através do ponto $P \in R^2$.

Semi-órbita positiva.

Definimos a semi-órbita positiva como $\gamma^+ = \gamma^+(P) = \{(x(t), y(t) : t \geq 0\}$

Conjunto ω-limite.

o conjunto ω-limite de uma órbita que passa por um ponto P é definido como:

$$\omega(P) = \omega(\gamma) = \{(x,y) \in \Re^2 : \exists \;\; t_n \to +\infty \;\; tal \;\; que \;\; (x,y) = \lim_{t\to\infty}(x(t_n), y(t_n))\}$$

Teorema de Poincaré –Bendixon.

Suponha que a semi-órbita $\gamma^+(P)$ é limitada e que o conjunto ω-limite $\omega(P)$ não contém uma singularidade (ponto de equilíbrio). Então o conjunto ω-limite $\omega(P)$ é uma órbita fechada.

Critério negativo de Bendixon.

Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano. Suponha que $div\ \ (f,g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ é sempre positivo o sempre negativo em Ω. Então um sistema dinâmico autônomo não tem solução periódica contida em Ω.

Teorema de Green

Seja *D* um domínio do plano *xy* e seja *C* uma curva simples, fechada, lisa por partes, contida em *D* e cujo interior também está em *D*. Sejam *P(x,y)* e *Q(x,y)* definidas e contínuas em *D*, possuindo derivadas parciais primeiras contínuas. Então:

$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ onde *R* é a região fechada limitada por *C*.

Caso a integral $\oint Pdx + Qdy$ for independente do caminho em *D* então $\oint_C Pdx + Qdy = 0$

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO GERAL

Os trabalhos apresentados nesta tese possuem como foco o estudo de modelos de crescimento e/ou a evolução da distribuição de renda.

No Capítulo 2, utilizamos um ferramental mais atual do que aquele utilizado por Baranzini. Foram confirmados alguns resultados desse autor e mostrado como a possibilidade de deixar herança altera o comportamento dos trabalhadores. Uma linha de pesquisa futura seria a utilização dos resultados obtidos para estudar a propensão média a consumir de longo prazo e também como a introdução do governo no modelo pode melhorar a distribuição de renda.

No capítulo 3 foi mostrada a possibilidade e limitações do crescimento com distribuição de renda em um modelo de crescimento econômico de variedade. Neste capítulo duas linhas de pesquisa se mostram promissoras: (i) a introdução de algum mecanismo (moeda ou expectativas) que possibilitem a retirada da armadilha do subdesenvolvimento; (ii) como a introdução do setor governamental e políticas fiscais podem melhorar a distribuição de renda.

No capitulo 4 mostrou-se a fragilidade da crítica de Benabou e Fukao em relação aos pontos terminais das trajetórias da economia, apontados por Krugman. Aqui muito pode ainda ser investigado. Por exemplo, a introdução de um planejador central no modelo e a busca de políticas maximizadoras de bem-estar é uma linha de pesquisa muito interessante.