UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O Grupo Finitário de Isometrias da Árvore n-ária

Por

Márcio Roberto Rocha Ribeiro

Brasília
2008

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O Grupo Finitário de Isometrias da Árvore n-ária

Por

Márcio Roberto Rocha Ribeiro[1]

Orientador : Prof. Said Najati Sidki - MAT/UnB

[1]**O autor contou com o apoio da CAPES.**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O Grupo Finitário de Isometrias da Árvore n-ária

Por

Márcio Roberto Rocha Ribeiro

Tese de Doutorado submetida ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requerimentos necessários para a obtenção do grau de **Doutor em Matemática.**

Banca Examinadora:

Prof. Said Najati Sidki - MAT/UnB
(Orientador)

Prof. Pavel Zalesski - MAT/UnB
(Membro)

Prof. Alexei Krassilnikov - MAT/UnB
(Membro)

Prof.ª Ana Cristina Vieira - DMAT/UFMG
(Membro)

Prof.ª Dessislava H. Kochloukova - IMECC/Unicamp
(Membro)

22 de agosto de 2008

Resumo

Consideramos $\mathcal{T}_n$ uma árvore regular uni-raiz de valência $n \geq 2$, $\mathcal{A}$ seu grupo de isometrias e $G(n)$ o subgrupo de $\mathcal{A}$ das isometrias finitárias, onde uma isometria é dita finitária se ela é uma extensão rígida de uma permutação de um determinado nível. Estudamos em alguns detalhes a estrutura de $G(n)$. Descrevemos, de maneira indutiva, como produzir representantes de classes de conjugação de isometrias de $G(n)$ e determinamos explicitamente um sistema completo de representantes de suas classes de conjugação.

Tomamos $N_{\mathcal{A}}(G(n))$ o normalizador de $G(n)$ em $\mathcal{A}$, $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ o semigrupo de endomorfismos de $G(n)$ induzidos por conjugação por elementos de $\mathcal{A}$. Mostramos que $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ se e somente se existe uma sequência $\{g_i\}_{i\geq 0}$ de elementos de $G(n)$ tais que $\alpha = \cdots g_i^{(i)} \cdots g_1^{(1)} g_0$ e que $\beta \in End_{\mathcal{F}_n}(G(n))$ se e somente se $\beta = \beta^{(m)} g$ para algum $m \geq 0,\ g \in G(n)$, onde $\mathcal{F}_n$ é o subgrupo das isometrias com um número finito de estados, e a notação $a^{(r)}$ indica a isometria $(a, a, \cdots, a)$ com n^r repetições. Investigamos condições em g_i e em g tais que $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ e $\beta \in N_{\mathcal{F}_n}(G(n))$.

Palavras-chave: automorfismo de árvore; grupo de isometrias; endomorfismo; normalizador; grupo finitário; classes de conjugação;

Abstract

We consider $\mathcal{T}_n$ the regular one-rooted n-ary tree, $n \geq 2$, $\mathcal{A}$ its group of isometries and $G(n)$ the finitary subgroup, where an isometry is said to be finitary if it's one rigid extension of a permutation of a determined level. We study in some details the structure of $G(n)$. We contruct inductively representatives of the conjugacy classes of G(n) and we determine explicitly a complete system of representatives of his conjugacy classes.

We let $N_{\mathcal{A}}(G(n))$ be the normalizer of $G(n)$ in $\mathcal{A}$, $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ the semigroup of endomorphisms of $G(n)$ induced by conjugation by elements of $\mathcal{A}$. We show that $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ if and only if there exists a sequence $\{g_i\}_{i\geq 0}$ of elements of $G(n)$ such that $\alpha = \cdots g_i^{(i)} \cdots g_1^{(1)} g_0$ and that $\beta \in End_{\mathcal{F}_n}(G(n))$ if and only if $\beta = \beta^{(m)} g$ for some $m \geq 0,\ g \in G(n)$, where $\mathcal{F}_n$ is the subgroup of finite-state isometries and the notation $a^{(r)}$ indicates the isometry $(a, a, \cdots, a)$ with n^r repetitions. We investigate conditions which g_i, g should satisfy for $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ and $\beta \in N_{\mathcal{F}_n}(G(n))$.

Keywords: tree automorphism; group of isometries; endomorphism; normalizer; finitary group; Conjugacy class;

Índice

Introdução

Grupo de automorfismos de árvores regulares uni-raízes também denominado grupo de isometrias, despertou e tem despertado interesse, motivados pela construção de certos grupos que possuem propriedades importantes e que podem ser realizados como grupos de isometrias de árvores regulares uni-raízes [1–4], ou ainda por aplicações [5]. Estes grupos têm sido usados em teoria combinatória de grupos e sistemas dinâmicos [5]. Fatos sobre a estrutura desses grupos vem sendo esclarecidos [6–8].

Denotamos por $\mathcal{T}_n$ uma árvore regular uni-raiz de valência $n \geq 2$ e por $\mathcal{A} = Aut(\mathcal{T}_n)$ o seu grupo de isometrias. Em [7], A. Brunner e S. Sidki definiram o grupo *finitário* G, para árvores binárias, como um subgrupo de $Aut(\mathcal{T}_2)$, constituído daquelas isometrias que admitem uma "descrição finita" em sua ação em $\mathcal{T}_2$. Os referidos autores estudaram em detalhes a estrutura de G, $Aut(G)$ o grupo de automorfismos de G e $End_{\mathcal{A}}(G)$ o semigrupo de endomorfismos de G induzidos por conjugação por elementos de $\mathcal{A}$. Dando continuidade a estes estudos, A. Brunner e S. Sidki publicaram recentemente, um artigo intitulado "Endomorphisms of the Finitary Group of Isometries of the Binary Tree", veja [8]. O presente trabalho é baseado nestes estudos, abordando aqui os casos de árvores n-árias, $n \geq 2$.

No capítulo 1, apresentamos conceitos e resultados preliminares, relacionados a árvores regulares e seus grupos de isometrias e também iniciamos o estudo do grupo finitário. Neste texto, reservamos os símbolos σ e γ para denotarem as permutações $(n\; n{-}1\; \cdots\; 2\; 1)$ e $(1\; 2)$, respectivamente, de S_n. O grupo finitário $G(n)$ de uma árvore n-ária pode ser dado por

$$G(n) = \langle \sigma_i, \gamma_i \mid i \geq 0 \rangle,$$

onde $\sigma_0 = \sigma$ e para $i \geq 1$, $\sigma_i = (e, \cdots, e, \sigma_{i-1})$ (n coordenadas), analogamente para γ_i. O grupo $G(n)$ satisfaz duas condições particulares: ele age transitivamente em cada nível da árvore $\mathcal{T}_n$ e denotando por $i * \alpha$ a isometria α induzida na subárvore $i.\mathcal{T}_n$, $i \in Y = \{1, 2, \cdots, n\}$, temos $i * G(n) < G(n)$. Um subgrupo de $Aut(\mathcal{T}_n)$ que satisfaz estas duas condições é denominado *estratificado*. Também provamos a seguinte versão do teorema de Krull-Schmidt para os grupos estratificados:

Teorema A. *Suponha que um grupo N admita decomposições em soma direta $L_1 + L_2 + \cdots + L_m$ e $M_1 + M_2 + \cdots + M_r$, onde cada fator L_i é isomorfo a um grupo estratificado $\mathcal{L}_i \leq \mathcal{A}$ e cada fator M_j é isomorfo a um grupo estratificado $\mathcal{M}_j \leq \mathcal{A}$. Então $m = r$, e $\{L_i \mid 1 \leq i \leq m\} = \{M_j \mid 1 \leq j \leq r\}$.*

Este resultado estende à árvores n-árias a versão dada em [7] para árvores binárias. A versão original do teorema de Krull-Schmidt (1928) para um grupo N requer que N satisfaça ambas as condições de cadeia ACC e DCC em subgrupos normais. Na versão aqui apresentada o grupo N não satisfaz estas condições, basta lembrar por exemplo que $L \rhd St_L(1) \rhd St_L(2) \lhd \cdots$ não é finita, qualquer que seja o grupo estratificado L. Ressaltamos ainda que os grupos estratificados são indecomponíveis e possuem centro trivial.

Ainda neste mesmo capítulo, estudamos as classes de conjugação de $G(n)$. Descrevemos, indutivamente, como produzir representantes de classes de conjugação de isometrias do grupo finitário e determinamos explicitamente um conjunto de representantes de suas classes de conjugação. Mais especificamente, consideramos os subgrupos finitos $G_{0,k}(n) = \langle \sigma_i, \gamma_i \mid 0 \leq i \leq k \rangle$ de $G(n)$, $k \geq 0$, construímos $\widetilde{C}_k$ um conjunto de representantes das classes de conjugação de $G_{0,k}(n)$, para cada $k \geq 0$, e provamos que o resultado obtido em [7] se estende à árvores n-árias:

Teorema B. *O conjunto $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k$ é um sistema de representantes das classes de conjugação de $G(n)$.*

O Capítulo 2 é destinado ao estudo do subgrupo $\mathcal{H}(n) = \langle \sigma_i \mid i \geq 0 \rangle$ de $G(n)$. Com um processo semelhante ao utilizado na demonstração do teorema B, descrevemos como produzir representantes de classes de conjugação de isometrias de $\mathcal{H}(n)$ e determinamos explicitamente um conjunto de representantes de suas classes de conjugação. Mais especificamente, consideramos os subgrupos finitos $\mathcal{H}_{0,k}(n) = \langle \sigma_i \mid 0 \leq i \leq k \rangle$ de $\mathcal{H}(n)$, $k \geq 0$, construímos $\widetilde{D}_k$ um conjunto de representantes das classes de conjugação de $\mathcal{H}_{0,k}(n)$, para cada $k \geq 0$ e provamos o seguinte:

Teorema C. *O conjunto* $D = \bigcup_{k=0}^{\infty} \widetilde{D}_k$ *é um sistema de representantes das classes de conjugação de* $\mathcal{H}(n)$.

Consideramos ainda o subgrupo $\mathcal{H}(p)$, onde p é um número primo, estudamos a estrutura dos centralizadores de um gerador σ_i nesse subgrupo. Neste estudo é essencial que, para $i \neq 0$, tenhamos σ^i um p-ciclo, e portanto necessitamos que p seja primo. Provamos que o resultado mostrado por A. Brunner e S. Sidki em [7] para árvores binárias, continua válido para árvores p-árias:

Teorema D. *(i) Seja* s *um representante de uma classe de conjugação de um elemento de ordem* p *tal que* $C(s) \cong C(\sigma_i)$ *para algum* i. *Então* $s = \sigma_i$.
(ii) Um automorfismo de $\mathcal{H}(p)$ *é rígido, no seguinte sentido, ele aplica cada* σ_i *a um conjugado* $\sigma_i^{g_i}$ *para algum* $g_i \in \mathcal{H}(p)$.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo dos endomorfismos induzidos por $\mathcal{A}$-conjugação, mais precisamente ao estudo do semigrupo $End_{\mathcal{A}}(G(n)) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha^{-1}G(n)\alpha \leq G(n)\}$. Consideramos $N_{\mathcal{A}}(G(n)) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha^{-1}G(n)\alpha = G(n)\}$ o subgrupo de endomorfismos que normalizam $G(n)$. O problema de determinar se um endomorfismo de $G(n)$ induzido por uma $\mathcal{A}$-conjugação é um elemento de $N_{\mathcal{A}}(G(n))$ tem sido uma motivação desse estudo.

Inicialmente, observamos que a forma normal dada aos elementos de $End_{\mathcal{A}}(G(2))$ em [7], também ocorre para árvores n-árias e provamos o seguinte:

Teorema E. *(i) Dado* $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$, *existe uma sequência* $\{g_i\}_{i \geq 0}$ *de elementos de* $G(n)$ *tais que* $\alpha = \cdots {g_2}^{(2)} {g_1}^{(1)} g_0$. *Reciprocamente, dado uma sequência* $\{g_i\}_{i \geq 0}$ *de elementos de* $G(n)$, $\alpha = \cdots {g_2}^{(2)} {g_1}^{(1)} g_0$ *é um endomorfismo rígido de* $G(n)$ *em relação ao conjunto gerador* $\{\sigma_i, \gamma_i \mid i \geq 0\}$, *onde* $\sigma = (n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)$ *e* $\gamma = (1\ 2)$.

(ii)Seja $\mu \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Então $\mu \in \mathcal{F}_n$ o grupo das isometrias com um número finito de estados de $\mathcal{T}_n$ se, e somente se, existe um número natural m e $g \in G(n)$ tais que $\mu = \mu^{(m)}g$.
(iii) Seja $L \leq Aut(\mathcal{T}_n)$ um grupo estratificado. Então $Aut(L) \cong N_{\mathcal{A}}(L)$.

Definimos o grupo $L(n) = \langle \sigma^{(i)}, \gamma^{(i)} \mid i \geq 0 \rangle$, onde $\sigma = (n\; n-1\; \cdots\; 2\; 1)$ e $\gamma = (1\; 2)$ são permutações de S_n. Consideramos o fecho $\overline{L}_n$ em relação ao produto infinito de elementos de L_n e vimos que $\overline{L}_n \leq N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Então, determinamos uma condição necessária para que elementos de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ estejam em $N_{\mathcal{A}}(G(n))$, mostrando que o resultado dado em [8] admite uma extensão a árvores n-árias:

Teorema F. *Seja $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Então existem $\kappa \in \overline{L}_n$ e uma sequência $\{h(j)\}_{j \geq 0}$ de elementos de $G(n)$, $h(j) = (e, h(j)_2, \cdots, h(j)_n)$, tais que $\alpha' = \alpha\kappa = \cdots h(j)^{(j)} \cdots h(1)^{(1)} h(0)$. Se α' normaliza $G(n)$ então para cada $k \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ e para todo $l \geq 0$, existem $m(l) \geq 1$ e um conjunto de palavras $\{e(i) \mid |e(i)| = m(l) - i + 1,\ 0 \leq i \leq m(l) - 1\}$ tais que $h(l+m)_k$ é um elemento do subgrupo finito gerado pelos estados $h(l)_{e(0)}, h(l+1)_{e(1)}, \cdots, h(l+i)_{e(i)}, \cdots, h(l+m-1)_{e(m-1)}$.*

Decorre desse resultado que podemos estender à árvores n-árias o teorema 8.1 de [7]. Mais precisamente, provamos o seguinte.

Teorema G. *Seja $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ tal que $\alpha' = \alpha\kappa = \cdots h(j)^{(j)} \cdots h(1)^{(1)} h(0)$ para algum $\kappa \in \overline{L}_n$, e*

$$h(j) = (e, h(j)_2, \cdots, h(j)_n),\ h(j)_i \in G(n),\ \forall j \geq 0,\ 2 \leq i \leq n.$$

Se existe um inteiro $j_0 \geq 0$ tal que a sequência $\{\partial(h(j)) \mid j \geq j_0\}$ é não decrescente, então $\alpha \notin N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Em particular, o subsemigrupo

$$T = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(1)}(g_1, \cdots, g_{n-1}, e),\ g_i \in G(n)\}$$

de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ têm a seguinte propriedade: $End_{\mathcal{A}}(G(n)) \bigcap T^{-1} = \{e\}$.

Para $m \geq 1$ definimos

$$\mathcal{E}_m(n) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(m)}g,\ g \in G(n)\},$$

$\Delta_m(n) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(m)}g,\ g \in G_{0,m-1}(n)\}$ um subconjunto de $\mathcal{E}_m(n)$ e mostramos o seguinte.

Teorema H. $N_{\mathcal{E}_1(n)}(G(n)) = \Delta_1(n)G(n)$.

Também produzimos para $m \geq 2$ um subgrupo $\mathbb{H}'_m(n)$ de $N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n))$ tal que

$$\mathbb{H}'_m(n) \cong (\times_{n^m} \mathbb{H}'_m(n))G_{0,m-2}(n),\ \mathbb{H}'_m(n) \cap \mathcal{E}_r(n) = \{e\},$$

para todo $r < m$.

Caracterizamos as involuções de grau 2, $\alpha = \alpha^{(2)}g \in \mathcal{E}_2(n)$, para $g = u * \theta$, $\theta \in S_n$ é uma involução que não fixa vértice algum do primeiro nível de $\mathcal{T}_n$, n par. Formalmente, provamos o seguinte teorema.

Teorema I. *Seja $\theta \in S_n$ uma involução que não fixa vértices do primeiro nível da árvore $\mathcal{T}_n$, n par. O elemento $\alpha = \alpha^{(2)}(u*\theta)$ é uma involução se, e somente se, $u = \phi$, ou $|u| = k$ é ímpar e nenhum prefixo de u de comprimento ímpar é um sufixo de u, se e somente se, $\left\{(u * \theta)^{(2i)} \mid i \geq 0\right\}$ é comutativo.*

Capítulo 1

Automorfismos de Árvores Regulares e o Grupo Finitário $G(n)$

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e definições preliminares, definimos $G(n)$ o grupo finitário de automorfismos de uma árvore regular $\mathcal{T}_n$, provamos uma versão do teorema de Krull-Schmidt para grupos estratificados e determinamos explicitamente um conjunto de representantes para as classes de conjugação do grupo finitário.

1.1 Árvores Regulares

Seja Y um conjunto que chamaremos ***alfabeto***. Por $M = M(Y)$ denotamos o conjunto

$$\{y_1 y_2 \cdots y_n \ \mid y_i \in Y\}$$

de todas as palavras finitas sobre o alfabeto Y, incluindo a palavra vazia ϕ. Em outros termos, M é o monóide livre gerado por Y. Seja $\mathcal{T}_Y$ o grafo cujo conjunto de vértices é M e tal que dois vértices são conectados se, e somente se eles são da forma v e vy, onde $v \in M$ e $y \in Y$. O grafo $\mathcal{T}_Y$ é uma árvore que chamaremos ***árvore regular uniraiz*** ou simplesmente ***árvore regular***, onde a palavra vazia é a raiz. Quando $|Y| = n$, escreveremos $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_n$. Para $Y = \{1, 2\}$ temos a árvore binária $\mathcal{T}_2$, veja figura 1.1.

Definindo sobre M uma relação de ordem $\leq$ dada por:

$$v \leq u \Longleftrightarrow u \text{ é prefixo de } v,$$

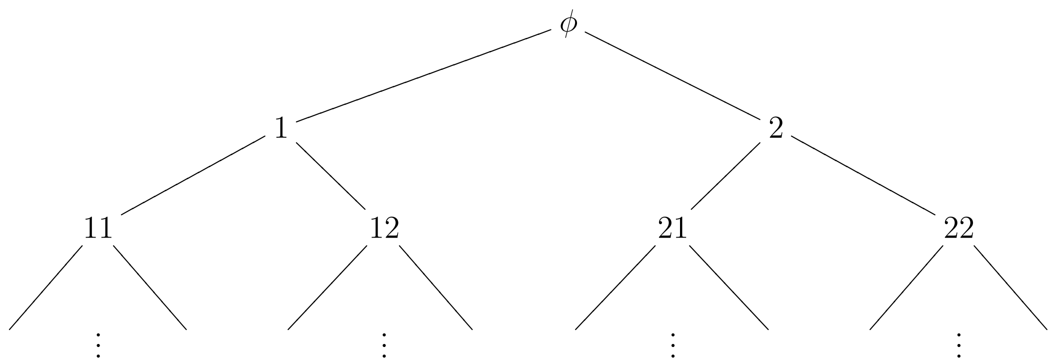

Figura 1.1: árvore binária $\mathcal{T}_2$

temos que a árvore $\mathcal{T}_Y$ é o grafo de $(M, \leq)$.

O comprimento de uma palavra $v \in M$ (o número de letras dela) é denotado por $|v|$, onde $|\phi| = 0$. A *função comprimento* $|\ \ | : v \mapsto |v|$ induz uma distância entre os elementos de M dada por:

$$d(u, v) = |u| + |v| - 2|w|,$$

onde w é o maior prefixo comum entre u e v. Assim, (M, d) é um espaço métrico.

Para $k \geq 0$, conjunto $Y^k = \{v \in M \mid |v| = k\}$, é denominado *$k$-ésimo nível* de $\mathcal{T}_Y$.

1.1.1 O Grupo de Automorfismos de Árvores Regulares

Dados duas árvores $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$, uma aplicação $\alpha : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R}$ é um ***isomorfismo*** se ela é bijetora e preserva a adjacência dos vértices; isto é, se para quaisquer dois vértices adjacentes $v,\ vy \in M$ os vértices $(v)\alpha$ e $(vy)\alpha$ são também adjacentes.

Para cada $u \in M$, considere a subárvore $u\mathcal{T}_Y = \{u.v \mid v \in M\}$ de $\mathcal{T}_Y$ que possui u como raiz. Agora note que $u.v \mapsto v$ é um isomorfismo de $u\mathcal{T}_Y$ em $\mathcal{T}_Y$.

Uma aplicação $\alpha : \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_Y$ é um ***endomorfismo da árvore*** $\mathcal{T}_Y$ se ela preserva a adjacência dos vértices.

Definição 1.1.1. *Um **automorfismo** de uma árvore regular $\mathcal{T}_Y$ é um endomorfismo bijetor de $\mathcal{T}_Y$.*

Equivalentemente, podemos dizer que um automorfismo de uma árvore regular $\mathcal{T}_Y$ é uma bijeção sobre M que preserva a função distância d. Um automorfismo de uma árvore regular $\mathcal{T}_Y$ é também denominado uma ***isometria*** de $\mathcal{T}_Y$.

O conjunto dos automorfismos de $\mathcal{T}_Y$ forma um grupo que denotaremos por $\mathcal{A} = Aut(\mathcal{T}_Y)$ e chamaremos ***grupo dos automorfismos de*** $\mathcal{T}_Y$ ou ***grupo de isometrias de*** $\mathcal{T}_Y$.

Dado uma permutação $\sigma \in \mathcal{P}(Y)$, podemos estendê-la a um automorfismo de $\mathcal{T}_Y$ da seguinte forma:

$$(y.u)\sigma = (y)\sigma.u, \ \forall y \in Y, \ \forall \ u \in M.$$

Por outro lado, um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$ induz uma permutação $\sigma_\phi(\alpha)$ sobre o conjunto Y. Assim, podemos escrever $\alpha = \alpha'.\sigma_\phi(\alpha)$, onde α' estabiliza Y ponto a ponto. Para cada $y \in Y$, α' induz sobre a subárvore $y.\mathcal{T}_Y$ um automorfismo α'_y. Considerando o isomorfismo $y.\mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_Y$ podemos identificar $y.\mathcal{T}_Y$ com $\mathcal{T}_Y$ e assim identificar α'_y como um elemento de $\mathcal{A}$. Desta forma, podemos considerar α' como uma função de Y em $\mathcal{A}$ e assim temos que

$$\mathcal{A} = F(Y, \mathcal{A}) \rtimes P(Y).$$

Denotamos α'_y por α_y e escrevemos $\alpha = (\alpha_y)_{y \in Y}.\sigma_\phi(\alpha)$. A ação de α em $\mathcal{T}_Y$ é dada por:

$$(yu)\alpha = (y)\sigma_\phi(\alpha).(u)\alpha_y, \ \forall \ y \in Y, \ \forall \ u \in M.$$

Podemos repetir para α_y o mesmo processo de descrição visto para α, assim $\alpha_y = (\alpha_{yx})_{x \in Y}.\sigma_\phi(\alpha_y)$ e podemos repetir novamente o processo para cada α_{yx}. Sucessivos desenvolvimentos de α produzem, para cada $u \in M$, um automorfismo $\alpha_u = (\alpha_{ui})_{i \in Y}.\sigma_\phi(\alpha_u)$. Vamos denotar $\sigma_\phi(\alpha_u)$ por $\sigma_u(\alpha)$ e α por α_ϕ. Podemos então considerar os conjuntos $\Sigma(\alpha) = \{\sigma_u(\alpha) \mid u \in M\}$ e $Q(\alpha) = \{\alpha_u \mid u \in M\}$. O conjunto $Q(\alpha)$ é denominado ***conjunto de estados*** de α. Um estado α_u de α é dito ser ***ativo*** se $\sigma_u(\alpha) \neq e$, caso contrário, ele é denominado ***inativo***.

Seja $\alpha \in \mathcal{A}$. Escrevemos $\alpha = \alpha^{(0)}$ e denotamos por $\alpha^{(1)}$ o automorfismo de $\mathcal{T}_Y$ onde $(\alpha^{(1)})_y = \alpha$, $\forall \ y \in Y$, e $\sigma_\phi(\alpha^{(1)}) = e$. Indutivamente, para $k > 1$, denotamos por $\alpha^{(k)}$ o automorfismo de $\mathcal{T}_Y$ onde $(\alpha^{(k)})_y = \alpha^{(k-1)}$, $\forall \ y \in Y$, e $\sigma_\phi(\alpha^{(k)}) = e$. Por exemplo, se $Y = \{1, 2, \cdots, n\}$, temos $\alpha^{(1)} = (\alpha, \cdots, \alpha)$ e $\alpha^{(k)} = (\alpha^{(k-1)}, \cdots, \alpha^{(k-1)})$, $\forall \ k \geq 1$, onde os vetores possuem n coordenadas.

Definição 1.1.2. *Seja $G \leq Aut(\mathcal{T}_Y)$.*

*(i) O **estabilizador em G de um vértice** $v \in \mathcal{T}_Y$, é o subgrupo $G_v = \{\alpha \in G \mid (v)\alpha = v\}$.*

*(ii) O **estabilizador do k-ésimo nível** é o subgrupo $St_G(k) = \bigcap_{\{v \in Y^k\}} G_v$, onde Y^k é o k-ésimo nível de $\mathcal{T}_Y$.*

*(iii) G é **nível-transitivo** se ele age transitivamente em todos os níveis da árvore $\mathcal{T}_n$.*

Observações 1.1.3.

(i) Seja $G \leq Aut(\mathcal{T}_Y)$, então $\forall\ k \geq 1,\ St_G(k)$ é um subgrupo normal de índice finito em G; $\bigcap_{k \geq 1} St_G(k) = \{e\}$ e $St_G(k+1) \leq St_G(k)$.

(ii) O grupo de automorfismo $Aut(\mathcal{T}_n)$ é um grupo profinito. Se $\mathcal{T}_{n,j}$ denota a árvore n-ária truncada no nível j, então

$$Aut(\mathcal{T}_n) = \varprojlim Aut(\mathcal{T}_{n,j}).$$

Notamos que $\mathcal{T}_{n,j}$ é finita, $\forall\ j \geq 0$ e portanto $Aut(\mathcal{T}_{n,j})$ é também finito, $\forall\ j \geq 0$. Quando $|Y| = 2$, temos que $Aut(\mathcal{T}_{2,j}) = W_{j-1} wr C_2$, onde W_{j-1} é o produto entrelaçado iterado $j-1$ vezes de C_2, o grupo cíclico de ordem 2. Portanto, $Aut(\mathcal{T}_{2,j})$ é um 2-grupo finito e assim, $Aut(\mathcal{T}_2)$ é um grupo pro-2. Mais detalhes podem ser encontrados em [5].

1.1.2 Automorfismos com um Número Finito de Estados

Um automorfismo de $\mathcal{T}_Y$ pode ser interpretado como um *autômato de Mealy* que é uma *máquina de Turing* definida por uma sêxtupla $(Q, L, \Gamma, f, l, q_0)$, onde:

- Q é o conjunto de estados;
- L é o alfabeto de entrada:
- Γ é o alfabeto de saída;
- $f : Q \times L \longrightarrow Q$ é a função de transição de estados;

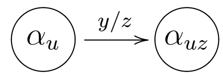

Figura 1.2: Diagrama de Moore

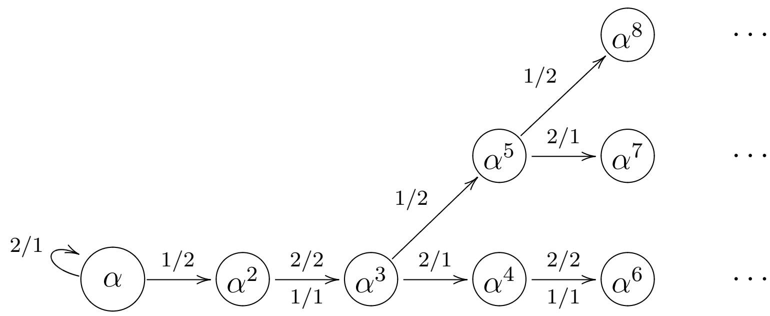

Figura 1.3: Diagrama de Moore de $A(\alpha)$ onde $\alpha = (\alpha, \alpha^2)\sigma$

- $l : Q \times L \longrightarrow \Gamma$ é a função de saída;
- q_0 é o estado inicial,

Um autômato é *finito* se o conjunto de estados Q é finito, veja [9] e [10].

Para um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$, associamos o autômato $A(\alpha)$ dado pela sêxtupla $A(\alpha) = (Q = Q(\alpha), L = Y, \Gamma = Y, f, l, q_0 = \alpha)$, onde as funções $f : Q(\alpha) \times Y \longrightarrow Q(\alpha)$ e $l : Q(\alpha) \times Y \longrightarrow Y$ são dadas por $f(\alpha_u, y) = \alpha_{uz}$ e $l(\alpha_u, y) = z$, onde $z = (y)\alpha_u$. $A(\alpha)$ é denominado o *autômato de* α.

É conveniente definir autômatos usando o *diagrama de Moore*. Para o autômato $A(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$ o diagrama de Moore é um grafo orientado, com os vértices identificados com os estados $Q(\alpha)$. Se $z = (y)\alpha_u$, então temos uma aresta iniciando em α_u, finalizando em α_{uz} e rotulada por y/z, onde $u \in M$ e $y,\ z \in Y$. Veja figura 1.2.

Exemplo 1.1.4. Seja $\alpha = (\alpha, \alpha^2)\sigma \in Aut(\mathcal{T}_2)$ onde $\sigma = (1\ 2)$. Então, $\alpha^2 = (\alpha^3, \alpha^3)$ e

$$\alpha^{2k} = (\alpha^{3k}, \alpha^{3k}), \quad \alpha^{2k+1} = (\alpha^{3k+1}, \alpha^{3k+2})\sigma.$$

Então $Q(\alpha) = \{\alpha^k \mid k \geq 1\}$ é um conjunto infinito e seu autômato é portanto infinito. O diagrama de Moore de $A(\alpha)$ é dado na figura 1.3.

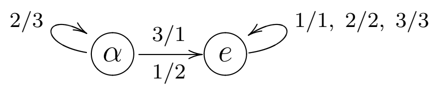

Figura 1.4: Diagrama de Moore de $A(\alpha)$ onde $\alpha = (e, e, \alpha)\sigma$

Exemplo 1.1.5. Seja $\alpha = (e, e, \alpha)\sigma \in Aut(\mathcal{T}_3)$ onde $\sigma = (1\ 2\ 3)$. Então $Q(\alpha) = \{e, \alpha\}$ e seu autômato é portanto finito. O diagrama de Moore de $A(\alpha)$ é dado na figura 1.4.

Para mais exemplos veja [11], [12] e [6].

Definição 1.1.6. *O automorfismo $\alpha \in Aut(\mathcal{T}_Y)$ é denominado um **automorfismo com um número finito de estados** se Y e $Q(\alpha)$são conjuntos finitos.*

Assim, $\alpha \in Aut(\mathcal{T}_Y)$ é um automorfismo com um número finito de estados se, e somente se o autômato $A(\alpha)$ é finito. Para quaisquer automorfismos α e β em $Aut(\mathcal{T}_Y)$ temos que $Q(\alpha) = Q(\alpha)^{-1}$ e $Q(\alpha\beta) \subseteq Q(\alpha)Q(\beta)$. Ainda, os autômatos com um número finito de estados formam um conjunto enumerável. Seja $\mathcal{F}_Y$ o conjunto dos automorfismos com um número finito de estados. Então temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.7. *O conjunto $\mathcal{F}_Y$ é um subgrupo enumerável de $Aut(\mathcal{T}_Y)$.*

Para mais detalhes sobre automorfismos com um número finito de estados veja [13].

1.2 Grupo Estratificado

1.2.1 O Grupo Finitário $G(n)$

Uma das consequências da estrutura iterada do grupo de automorfismos $\mathcal{A}$ é a riqueza de subgrupos que são produto direto. De fato $\mathcal{A}$ contém o produto direto de uma quantidade enumerável de cópias de si mesmo como um subgrupo. Podemos ilustrar isto na árvore binária: considere as cópias isomorfas $Aut(u_i\mathcal{T}_2)$ de $\mathcal{A}$ nas subárvores tendo como raiz os vértices $u_1 = 2,\ u_2 = 12,\ u_3 = 112,\ \cdots$. Estas cópias comutam, e como apenas uma quantidade finita delas tem ação não trivial em qualquer nível dado, seu produto direto é bem definido.

Definição 1.2.1. *Um grupo G é* ***indecomponível*** *se $G \neq \{e\}$ e, se $G \cong H \times K$ então $H = \{e\}$ ou $K = \{e\}$.*

Vamos construir subgrupos indecomponíveis com estrutura iterada, para isto introduzimos algumas notações.

Dado um conjunto Y e um grupo $K \leq Aut(\mathcal{T}_Y)$, defina os grupos $F_0(Y, K) = K$, $F_1(Y, K) = F(Y, K)$ o grupo das funções de Y em K, e para $i \geq 1$, $F_i(Y, K) = F(Y, F_{i-1}(Y, K))$. Quando $|Y| < \infty$, o i-ésimo grupo nesta definição é isomorfo ao produto direto de $|Y|^i$ cópias de K.

Agora suponha que K é um subgrupo de $\mathcal{P}(Y)$, o grupo das permutações de Y. Construímos de K dois subgrupos de automorfismos da árvore $\mathcal{T}_Y$. O primeiro, $\mathcal{K}(Y)$ é o grupo gerado por $F_i(Y, K)$ para $i \geq 0$. O segundo $\overline{\mathcal{K}}(Y)$ é o fecho de $\mathcal{K}(Y)$ sobre produtos infinito; seus elementos são representados como produtos infinito: $\alpha = \cdots f_k \cdots f_1 f_0$, onde $f_i \in F_i(Y, K)$, para $i \geq 0$ (veja obs. 1.2.5 adiante). Notamos que a seguinte decomposição ocorre: $\mathcal{K}(Y) = \mathcal{K}(Y) Wr_Y K$, ou ainda $\mathcal{K}(Y) = F(Y, \mathcal{K}(Y)) \rtimes K$.

Defina $\mathcal{K}_{i,j}(Y) = \langle F_i(Y, K),\ F_{i+1}(Y, K),\ \cdots,\ F_j(Y, K) \rangle$ para $i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ e $i \leq j$. Em particular, $\mathcal{K}_{0,j}(Y) = \langle K,\ F_1(Y, K),\ \cdots,\ F_j(Y, K) \rangle$. Colocamos $\mathcal{K}_{i,\infty}(Y) = \langle F_i(Y, K),\ F_{i+1}(Y, K),\ \cdots \rangle$. Assim $\mathcal{K}_{0,j}(Y) \cong ((\cdots (K Wr_Y K) \cdots) Wr_Y K) Wr_Y K$, onde K aparece $j+1$ vezes. Além disso, se $\mathcal{T}_{Y,j}$ denota a árvore truncada no nível $(j+1)$, então $\mathcal{K}_{0,j}(Y)$ é isomorfo a um subgrupo de $Aut(\mathcal{T}_{Y,j})$. Claramente temos $\mathcal{K}(Y) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{K}_{0,j}(Y)$.

Definição 1.2.2. *Um grupo $L \leq Aut(\mathcal{T}_Y)$ é* ***estratificado*** *se é nível-transitivo e $F(Y, L) < L$.*

Devido a decomposição $\mathcal{K}(Y) = F(Y, \mathcal{K}(Y)) \rtimes K$, o grupo $\mathcal{K}(Y)$ é estratificado quando ele é nível-transitivo. Então, quando K é um subgrupo transitivo de $\mathcal{P}(Y)$ o grupo de permutações de Y, obtemos que $\mathcal{K}(Y)$ é estratificado.

Quando Y é finito, $\mathcal{K}(Y)$ é um subgrupo do grupo de automorfismos com um número finito de estados $\mathcal{F}(Y)$. Neste trabalho tratamos apenas de árvores n-árias, então consideraremos $Y = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ e denotaremos $\mathcal{K}(Y)$, $\mathcal{K}_{i,j}(Y)$, etc, por respectivamente $\mathcal{K}(n)$, $\mathcal{K}_{i,j}(n)$, etc, e $\mathcal{P}(Y)$ por S_n.

Seja ζ uma isometria arbitrária em S_n. Definimos indutivamente

$$\zeta_0 = \zeta,\ \zeta_i = \underbrace{(e,\ e,\ \cdots,\ e,\ \zeta_{i-1})}_{n} \text{ para } i \geq 1,$$

e para um subgrupo K de S_n definimos

$$K_0 = K \text{ e } K_i = \{\zeta_i = (e, \cdots, e, \zeta_{i-1}) \mid \zeta_{i-1} \in K_{i-1}\},\ \forall\ i \geq 0.$$

Então, se K é um subgrupo transitivo de S_n temos que

$$\mathcal{K}(n) = \langle K_i \mid i \geq 0\rangle,\ \mathcal{K}_{i,j}(n) = \langle K_i, K_{i+1}, \cdots, K_j\rangle \text{ e } \mathcal{K}_{j,\infty}(n) = \langle K_i \mid i \geq j\rangle.$$

Definição 1.2.3. *Se na construção acima tomarmos $K = S_n$, então $\mathcal{K}(n)$ é chamado* ***grupo finitário*** *ou grupo base e será denotado por $G(n)$. Neste caso $\overline{G}(n)$ é todo o grupo $\mathcal{A}$.*

Lema 1.2.4. *O grupo finitário $G(n)$ é um grupo estratificado, localmente finito e é gerado pelas isometrias $\sigma_0, \gamma_0, \sigma_1, \gamma_1, \cdots$, onde $\sigma = (n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)$ e $\gamma = (1\ 2)$ são permutações de S_n.*

Demonstração. Que $G(n)$ é nível-transitivo segue imediatamente da definição 1.2.3. Como $S_n = \langle \sigma, \gamma\rangle$, $G_{0,k}(n)$ é gerado pelas isometrias $\sigma_0, \gamma_0, \sigma_1, \gamma_1, \cdots, \sigma_k, \gamma_k$ e é finito. As demais afirmações seguem do fato que $G(n) = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{0,k}(n)$. ■

Observações 1.2.5.

• O grupo $\mathcal{A}$ é o limite inverso dos grupos $G_{0,k}(n)$. Isto significa que um elemento $\alpha \in \mathcal{A}$ pode ser escrito como um produto infinito $\alpha = \cdots f_k \cdots f_1 f_0$, onde $f_i \in F_i(Y, S_n)$, para $i \geq 0$.

• Em geral, dado uma sequência de automorfismos $\{\alpha_i \mid i \geq 0\}$, seus produtos $\beta = \cdots \alpha_i \cdots \alpha_2 \alpha_1$ e $\gamma = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_i \cdots$ são automorfismos *bem definidos* se para qualquer nível k, existe um número natural m_k tal que apenas uma quantidade finita de fatores α_i, $i \leq m_k$, têm ação não trivial. Se $u \in M$ tem comprimento k, então $(u)\beta = (u)\alpha_{m_k} \cdots \alpha_2 \alpha_1$

e $(u)\gamma = (u)\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m_k}$.

• Sejam p um número primo e $\sigma \in S_n$ um p-ciclo. Se escolhermos o subgrupo de S_n como sendo $K = \langle\sigma\rangle$, então $\mathcal{K}(n)$ é um p-grupo localmente finito gerado pelos elementos σ_i, $i \geq 0$, e é um produto entrelaçado infinitamente iterado $((\cdots C_p)wrC_p)wrC_p$. Como é bem conhecido, todo p-grupo finito é isomorfo a um subgrupo de um produto entrelaçado de C_p iterado um número finito de vezes, portanto segue que $\mathcal{K}(n)$ contém uma cópia de qualquer p-grupo finito.

• No capítulo 2 apresentamos alguns resultados para $\mathcal{K}(n)$ onde $K = \langle\sigma\rangle$, σ é um n-ciclo em S_n.

Dado $\alpha \in \mathcal{A}$ e um vértice $u \in \mathcal{T}_n$, escrevemos $u * \alpha \in \mathcal{A}$, para denotar α induzido na subárvore $u\mathcal{T}_n$ e fixando os vértices fora desta subárvore. Por exemplo, para $\zeta \in S_n$, temos $n*\zeta = \zeta_1$, $nn*\zeta = \zeta_2$ e, em geral, $n^i*\zeta = \zeta_i$ para $i \geq 1$ e $K_i = u*K$, onde $u = n^i$.

Definição 1.2.6. *Seja $G \leq \mathcal{A}$ um grupo que age transitivamente no primeiro nível. O **fecho estratificado** de G é o subgrupo*

$$G_* = \langle v * G \mid v \in \mathcal{T}_n\rangle.$$

O grupo $G(n)$ é o fecho estratificado de S_n e, de modo geral, $\mathcal{K}(n)$ é o fecho estratificado de $K \leq S_n$.

Os dois próximos resultados podem ser encontrados em [14].

Lema 1.2.7. *Se $L \leq Aut(\mathcal{T}_n)$ é um grupo estratificado, então existe um subgrupo transitivo K de S_n tal que $L \cong Lwr_Y K$.*

Proposição 1.2.8. *Se $L \leq Aut(\mathcal{T}_n)$ é um grupo estratificado, e $N \neq$ e um subgrupo normal de L, então N contém o subgrupo derivado $St_L(j)'$ para algum inteiro $j \geq 1$.*

Segue do lema 1.2.7 que um grupo estratificado $L = Lwr_Y K$, onde K é um subgrupo transitivo de S_n, contém os subgrupos $F_i(Y, K)$, $\forall\ i \geq 0$. Então $\mathcal{K}(n) \leq L$.

Lema 1.2.9. *Seja L um subgrupo estratificado de $G(n)$, então S_n admite um subgrupo transitivo K tal que $L = \mathcal{K}(n) = \langle K_i \mid i \geq 0\rangle$.*

Demonstração. Segue do lema 1.2.7 que existe K, um subgrupo transitivo de S_n, tal que $L = Lwr_Y K$. Agora $h \in L$ se e somente se $h \in \mathcal{K}_{0,r}(n)$, para algum r, se e somente se $h \in \mathcal{K}(n)$. ■

1.3 Um Teorema de Krull-Schmidt para Grupos Estratificados

Apresentamos nesta seção uma extensão à árvores n-árias da versão do Teorema de Krull-Schmidt para árvores binárias, dada por A. Brunner e S. Sidki em [7] .

Teorema 1.3.1 (Krull-Schmidt)**.** *Suponha que um grupo N admita decomposições em soma direta $L_1 + L_2 + \cdots + L_m$ e $M_1 + M_2 + \cdots + M_r$, onde cada fator L_i é isomorfo a um grupo estratificado $\mathcal{L}_i \leq \mathcal{A}$ e cada fator M_j é isomorfo a um grupo estratificado $\mathcal{M}_j \leq \mathcal{A}$. Então $m = r$, e $\{L_i \mid 1 \leq i \leq m\} = \{M_j \mid 1 \leq j \leq r\}$.*

Para a demonstração utilizamos o seguinte lema.

Lema 1.3.2. *Seja $L \leq \mathcal{A}$ um grupo estratificado.*
(i) A interseção de subgrupos normais não-triviais de L é também não-trivial.
(ii) Sejam B e D grupos com centro trivial e N um subgrupo normal de $B \times D$. Se L é isomorfo a N, então N é um subgrupo de $B \times \{e\}$ ou $\{e\} \times D$.
(iii) L é indecomponível.

Demonstração. (i) Sejam N_1 e N_2, subgrupos normais não triviais de L. Segue da proposição 1.2.8 que para $i = 1, 2$, $St_L(j_i)' \leq N_i$ para algum j_i. Sem perda de generalidade podemos supor que $j_2 \geq j_1$, logo $St_L(j_2)' \leq St_L(j_1)'$. Assim, $e \neq St_L(j_2)' \leq N_1 \cap N_2$.

(ii) Cada elemento $g \in N$ é um par (g_B, g_D) com $g_B \in B$, $g_D \in D$. Defina $N_B = \{g_B \mid g \in N\}$ e $N_D = \{g_D \mid g \in N\}$. Então $N_B \triangleleft B$ e $N_D \triangleleft D$. Sejam $N_1 = [N, B \times \{e\}] = [N_B \times N_D, B \times \{e\}] = [N_B, B] \times \{e\}$ e $N_2 = [N, \{e\} \times D] = [N_B \times N_D, \{e\} \times D] = \{e\} \times [N_D, D]$. Agora N_1 e N_2 são subgrupos normais de N e $N_1 \cap N_2 = \{e\} \times \{e\}$. Como $N \cong L$, segue de (i) que N_1 ou N_2 é trivial. Suponha que $N_1 = \{e\}$, então $[N_B, B] = \{e\}$

e N_B é central em B. Mas B tem centro trivial, logo $N_B = \{e\}$, e isto mostra que $N \leq \{e\} \times D$.

(iii) Suponha que $L = B \times D$. Observamos que L tem centro trivial. De fato, vimos do lema 1.2.7 que $L = Lwr_Y K$ para um subgrupo transitivo K de S_n e portanto $\mathcal{K}(n) \leq L$. Seja $e \neq g \in \mathcal{K}(n)$, então g move algum vértice $v \in \mathcal{T}_n$. Agora tomando $e \neq h \in v * \mathcal{K}(n)$, obtemos que $[h, g] \neq e$ pois ele age como h^{-1} em $v.\mathcal{T}_n$. Então B e D têm centros triviais e segue de (ii) que $B = \{e\}$ ou $D = \{e\}$. ∎

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema de Krull-Schmidt.

Demonstração do Teorema 1.3.1 (Krull-Schmidt).
Como $L_1 + L_2 + \cdots + L_m = M_1 + M_2 + \cdots + M_r$, para $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ temos que $M_i \leq L_1 + L_2 + \cdots + L_{m-1} + L_m$. Faça $L_1 + L_2 + \cdots + L_{m-1} = B$ e $L_m = D$. Os grupos B e D têm centros triviais, pois centro de $\mathcal{L}_i,\ 1 \leq i \leq m$, é trivial. Segue do item (ii) do lema 1.3.2 que $M_i \leq B$ ou $M_i \leq D$. Se $M_i \leq B$, então repetimos o argumento para $B = L_1 + L_2 + \cdots + L_{m-2} + L_{m-1}$, fazendo $B_1 = L_1 + L_2 + \cdots + L_{m-2}$ e $D_1 = L_{m-1}$. Assim, obtemos $M_i \leq L_k$, para algum $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Da mesma forma podemos mostrar que para $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ temos $L_j \leq M_i$ para algum i. Agora suponha que $L_j \leq M_i$ e $M_i \leq L_k$, então $L_j \leq L_k$. Segue que $L_j = L_k$, senão $L_j \cap L_k = \{e\}$ pois trata-se de soma direta. Então $j = k$. Como $L_j \leq M_i$ implica $M_i \leq L_j$, temos que $L_j = M_i$. Assim, se $r < m$ existem duas parcelas distintas L_{j_1} e L_{j_2} iguais a uma parcela M_i, ou seja, $L_{j_1} = L_{j_2}$ com $j_1 \neq j_2$, o que contradiz o fato da soma ser direta. ∎

1.4 Classes de Conjugação de $G(n)$

Nesta seção descrevemos como produzir indutivamente representantes de classes de conjugação de automorfismos do grupo finitário e determinamos explicitamente um conjunto de representantes das classes de conjugação de $G(n)$.

Como $G(n) = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{0,k}(n)$, cada elemento $g \in G(n)$ pertence a algum $G_{0,k}(n)$ e portanto $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)\delta$, onde $g_j \in G_{0,k-1}(n)$ e $\delta \in S_n$.

Iniciamos com duas situações básicas que serão exploradas.
Na primeira, seja $g = (g_1, \cdots, g_n)\sigma \in G_{0,k}(n)$, onde $\sigma = (n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)$. Conjugando g por $b = (g_1, g_2g_1, g_3g_2g_1, \cdots, g_{n-1}\cdots g_2g_1, e)$, obtemos $g^b = (e, \cdots, e, g_n \cdots g_2g_1)\sigma$.
Na segunda situação, dado um automorfismo $g = (e, \cdots, e, h)\sigma \in G_{0,k}(n)$, para efetivar a conjugação de h por algum $b \in G_{0,k-1}(n)$, nós simplesmente conjugamos g por $b^{(1)} = (b, \cdots, b)$, produzindo $g^b = (e, \cdots, e, h^b)\sigma$ onde $h^b \in G_{0,k-1}(n)$.

A proposição a seguir nos mostra como fica a primeira situação acima quando $\langle\delta\rangle$ não é necessariamente transitivo no primeiro nível da árvore. Segue como corolário desta proposição que, se quisermos determinar quando dois elementos de $G_{0,k}(n)$ são conjugados, então nós precisamos apenas considerar quando dois determinados elementos em $F(Y, G_{0,k-1}(n))$ são conjugados.

Proposição 1.4.1. *Sejam $g = (g_1, \cdots, g_n) \in G_{0,k}(n)$, para algum inteiro $k \geq 0$, $e \neq \delta \in S_n$, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o conjunto de $\langle\delta\rangle$-órbitas em $Y = \{1, \cdots, n\}$, e escolha um conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de representantes das órbitas. Dados um inteiro $t \geq 0$ e $c = (c_1, \cdots, c_n) \in G_{0,t}(n)$, existe um elemento $b = (b_1, \cdots, b_n) \in G_{0,t}(n)$ tal que:*
(i) $b_{y_\lambda} = c_{y_\lambda},\ \forall\ \lambda \in \Lambda$;
(ii) $b^{-1}g\delta b = g'\delta$, onde $g' = (g'_1, \cdots, g'_n)$, $g'_y = e,\ \forall\ y \in Y\backslash\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,
e $g'_{y_\lambda} = c_{y_\lambda}^{-1} g_{y_\lambda} g_{\delta(y_\lambda)} g_{\delta^2(y_\lambda)} \cdots g_{\delta^{|Y_\lambda|-1}(y_\lambda)} c_{y_\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$. Em particular tomando $c_{y_\lambda} = e,\ \forall\ \lambda \in \Lambda$, temos que $g'\delta \in G_{0,k}(n)$.

Demonstração. Definimos b de maneira construtiva. Primeiro definimos

$$b_{y_\lambda} = c_{y_\lambda},\ \forall\ \lambda \in \Lambda.$$

Agora, seja $|Y_\lambda| = m$, então definimos

$$b_{\delta^i(y_\lambda)} = g_{\delta^i(y_\lambda)} b_{\delta^{i+1}(y_\lambda)},\ i = m-1, \cdots, 2, 1. \tag{1.4.1}$$

Isto define b de maneira única. Segue que para todo $y \in Y \setminus \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, a seguinte equação ocorre

$$b_y = g_y b_{\delta(y)}. \tag{1.4.2}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} b^{-1}g\delta b =&(b_1^{-1}, \cdots, b_n^{-1})(g_1, \cdots, g_n)(b_{\delta(1)}, \cdots, b_{\delta(n)})\delta \\ =&(b_1^{-1}g_1b_{\delta(1)}, \cdots, b_n^{-1}g_nb_{\delta(n)})\delta \\ =&g'\delta \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

onde $b_y^{-1}g_yb_{\delta(y)} = e, \forall\ y \in Y \setminus \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ devido a equação 1.4.2. Podemos escrever g' explicitamente, para isto notamos que das equações 1.4.3 e 1.4.1 temos respectivamente, ${g_{y_\lambda}}' = b_{y_\lambda}^{-1}g_{y_\lambda}b_{\delta(y_\lambda)}$ e $b_{\delta(y_\lambda)} = g_{\delta(y_\lambda)}b_{\delta^2(y_\lambda)}$. Logo, $g'_{y_\lambda} = b_{y_\lambda}^{-1}g_{y_\lambda}g_{\delta(y_\lambda)}b_{\delta^2(y_\lambda)}$. Repetindo o mesmo argumento obtemos,

$$\begin{aligned} g'_{y_\lambda} =&b_{y_\lambda}^{-1}g_{y_\lambda}g_{\delta(y_\lambda)}\cdots g_{\delta^{m-1}(y_\lambda)}b_{\delta^m(y_\lambda)} \\ =&b_{y_\lambda}^{-1}g_{y_\lambda}g_{\delta(y_\lambda)}\cdots g_{\delta^{m-1}(y_\lambda)}b_{y_\lambda} \\ =&c_{y_\lambda}^{-1}g_{y_\lambda}g_{\delta(y_\lambda)}\cdots g_{\delta^{m-1}(y_\lambda)}c_{y_\lambda} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário 1.4.2. *Sejam $\delta \in S_n$, $\delta \neq e$, $g = (g_1, \cdots, g_n)$ e $h = (h_1, \cdots, h_n)$ elementos em $G_{0,k}(n)$. Então $g\delta$ e $h\delta$ são conjugados em $G_{0,t}(n)$ para um inteiro t se, e somente se, para um conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de representantes para $\langle\delta\rangle$-órbitas $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de Y, g'_{y_λ} e h'_{y_λ} são conjugados em $G_{0,t-1}(n)$, onde g'_y e h'_y são como no item (ii) da proposição anterior.*

Notamos que conjugando $g = (g_1, \cdots, g_n)$ por $a = (a_1, \cdots, a_n) \in G_{0,k}(n)$ obtemos $({g_1}^{a_1}, \cdots, {g_n}^{a_n})$. Assim, podemos trocar g_y pelo respectivo representante de sua classe de conjugação.

Caso $\delta \neq e$, segue da proposição 1.4.1 que existe $b \in G_{0,k}(n)$ tal que $(g\delta)^b = (g'_1, \cdots, g'_n)\delta$, onde $g'_y = e, \forall\, y \in Y\setminus\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Conjugando novamente por $d = (d_1, \cdots, d_n) \in G_{0,k}(n)$, onde d é constante em cada $\langle\delta\rangle$-órbita, i.e., $d_{\delta^i(y_\lambda)} = d_\lambda,\ 1 \leq i \leq |Y_\lambda|,\ \lambda \in \Lambda$, obtemos $(g\delta)^{bd} = ({g'_1}^{d_1}, \cdots, {g'_n}^{d_n})\delta$ onde ${g'_y}^{d_y} = e,\ \forall\ y \in Y\setminus\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Então podemos trocar g'_{y_λ} pelo representante de sua classe de conjugação.

1.4.1 Representantes das Classes de Conjugação de $G(n)$

Agora, definiremos de maneira indutiva os representantes das classes de conjugação dos elementos de $G(n)$ e os listaremos em camadas, correspondendo aos subgrupos $G_{0,k}(n)$.

Como cada elemento g de $G(n)$ pertence a $G_{0,k}(n)$ para algum inteiro k, podemos escrever $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)\delta$, onde $g_j \in G_{0,k-1}(n)$ e $\delta \in S_n$.

Iniciamos definindo, $C_{-1} = \{e\}$ e C_0 como um conjunto de representantes das classes de conjugação de S_n onde retiramos o elemento neutro e. Então $\widetilde{C}_0 = C_{-1} \cup C_0$ é um conjunto de representantes para $G_{0,0}(n)$. Antes de ordenarmos $\widetilde{C}_0$ lembramos a seguinte definição.

Definição 1.4.3. *Seja $n \geq 2$. Se $e \neq \rho \in S_n$ e se $\rho = (a_{11} \cdots a_{1r_1}) \cdots (a_{t1} \cdots a_{tr_t})$ é a sua decomposição em ciclos disjuntos com $1 < r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_t$, então dizemos que ρ tem decomposição do tipo $\{r_1, \cdots, r_t\}$.*

Dados g e h em C_0, onde g é do tipo $\{r_1, \cdots, r_t\}$ e h é do tipo $\{s_1, \cdots, s_m\}$, dizemos que $g < h$ se uma das situações ocorrem: (i) $t < m$; (ii) $t = m$ e $r_1 < s_1$ ou existe um inteiro $i > 0$, tal que $r_1 = s_1, \cdots, r_{i-1} = s_{i-1}$ e $r_i < s_i$, $1 \leq i \leq t$. Fazemos ainda e menor que qualquer elemento de C_0. Por exemplo: $(1\ 2\ 3) < (1\ 2)(3\ 4) < (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$.

Em seguida vamos definir o conjunto $\widetilde{C}_1$ de representantes para $G_{0,1}(n)$. Sejam $g = (g_1, \cdots, g_n) \in G_{0,1}(n)$ e $e \neq \delta \in S_n$, então $g_y \in G_{0,0}(n)$. Tratamos separadamente os casos g e $g\delta$.

- Conjugando $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ por $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)\rho$ onde $b_y \in G_{0,0}(n)$ e $\rho \in S_n$, obtemos $g^b = ({g_{\rho^{-1}(1)}}^{b_{\rho^{-1}(1)}}, \cdots, {g_{\rho^{-1}(n)}}^{b_{\rho^{-1}(n)}})$. Note que a classe de conjugação de g coincide com a classe de conjugação de qualquer elemento $(g_{y_1}, \cdots, g_{y_n})$ obtido a partir de uma permutação das coordenadas de g. Denotando por g'_y o representante da classe de conjugação de g_y em $G_{0,0}(n)$, $1 \leq y \leq n$, escolhemos o representante da classe de conjugação de g como sendo $g' = (g'_{y_1}, \cdots, g'_{y_n})$ uma permutação de $(g'_1, \cdots, g'_n)$ tal que $g'_{y_1} \leq g'_{y_2} \leq \cdots \leq g'_{y_n}$, segundo a ordenação de $\widetilde{C}_0$. Dessa forma podemos listar todos os representantes das classes de conjugação dos elementos de $G_{0,1}(n) \setminus G_{0,0}(n)$ da forma $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ em um conjunto que chamaremos B_1. Então,
$B_1 = \{(f_1, \cdots, f_n) \mid f_y \in \widetilde{C}_0,\ 1 \leq y \leq n-1,\ f_n \in C_0 \ e\ f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n\}$.

- Para $g\delta$, $\delta \neq e$, utilizando a conjugação em S_n, temos que existe $\phi \in S_n$ tal que

$\delta^\phi = \delta_0$ onde $\delta_0 \in C_0$, portanto, $(g\delta)^\phi = h\delta_0$, onde $h = g^\phi$. Devido a proposição 1.4.1, a classe de conjugação de $h\delta_0$ coincide com a classe de conjugação de $h'\delta_0$ onde $h'_y = e$, $\forall\, y \in Y\backslash\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $h'_{y_\lambda} \in G_{0,0}(n)$.

Então escolhemos o representante da classe de conjugação de $g\delta$ como sendo $f\delta_0$, onde para cada $\lambda \in \Lambda$, f_{y_λ} é um representante da classe de conjugação de h'_{y_λ} em $G_{0,0}(n)$ e $f_y = e$, $\forall\, y \in Y\backslash\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Assim, para cada representante $\rho \in C_0$, seja $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o conjunto de $\langle\rho\rangle$-órbitas em $Y = \{1, \cdots, n\}$ e escolha um conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de representantes das órbitas, então o conjunto

$$F_{1,\rho} = \{f\rho \in G_{0,1}(n)\backslash G_{0,0}(n) \mid f = (f_1, \cdots, f_n), f_y = e, \forall\, y \in Y\backslash\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\; e\; f_{y_\lambda} \in \widetilde{C}_0, \forall\, \lambda \in \Lambda\}$$

consiste dos representantes das classes de conjugação dos elementos de $G_{0,1}(n)\backslash G_{0,0}(n)$ da forma $g\delta$, onde δ é conjugado a ρ, e que ainda não foram listados em C_0. Observe que devido ao corolário 1.4.2, dois elementos $f\rho$ e $g\rho$ em $F_{1,\rho}$ são conjugados se, e somente se são iguais.

Fazendo ρ variar sobre C_0 obtemos uma família de representantes de classes de conjugação de elementos de $G_{0,1}(n)\backslash G_{0,0}(n)$, então para $g\delta \in G_{0,1}(n)$ onde $\delta \neq e$, o representante de sua classe de conjugação pertence ao conjunto $\bigcup\limits_{\rho\in C_0} F_{1,\rho} \cup C_0$.

Definimos

$$C_1 = B_1 \cup \bigcup_{\rho\in C_0} F_{1,\rho}.$$

Ordenamos B_1, o primeiro subconjunto de C_1, conforme a ordem lexicográfica inversa, ou seja, $(s_1, \cdots, s_n) < (s'_1, \cdots, s'_n)$ se, e somente se $s_n < s'_n$ ou existe um inteiro $i > 0$ tal que $s_n = s'_n$, $s_{n-1} = s'_{n-1}$, $\cdots$, $s_{n-i} = s'_{n-i}$ e $s_{n-(i+1)} < s'_{n-(i+1)}$.

O segundo subconjunto de C_1 é ordenado de forma que $f\rho_1 < g\rho_2$ se, e somente se uma das situações ocorre:

(1) $\rho_1 < \rho_2$;

(2) $\rho_1 = \rho_2$ e neste caso ordenamos o conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{y_1, \cdots, y_r\}$ de forma que $y_1 < y_2 < \cdots < y_r$ e dizemos que $f\rho_1 < g\rho_1$ se uma das situações ocorre:

(2.1) $f_{y_r} < g_{y_r}$;

(2.2) existe um inteiro $i > 0$ tal que $f_{y_r} = g_{y_r}, \cdots, f_{y_{r-(i-1)}} = g_{y_{r-(i-1)}}$ e $f_{y_{r-i}} < g_{y_{r-i}}$.

Ainda, qualquer elemento de B_1 é feito menor que qualquer elemento de $\bigcup_{\rho\in C_0} F_{1,\rho}$. Então definimos

$$\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_0 \cup C_1$$

que é um conjunto completo de representantes das classes de conjugação de $G_{0,1}(n)$, ordenado de forma que qualquer elemento de $\widetilde{C}_0$ é feito menor que um de C_1.

Indutivamente, tendo listado $\widetilde{C}_k = \widetilde{C}_{k-1} \cup C_k$, um conjunto completo de representantes para $G_{0,k}(n)$, onde $\widetilde{C}_{k-1}$ é um conjunto de representantes para elementos de $G_{0,k-1}(n) \subset G_{0,k}(n)$ e C_k é um conjunto de representantes para elementos de $G_{0,k}(n) \backslash G_{0,k-1}(n)$ que não foram listados em C_{k-1}, vamos determinar $\widetilde{C}_{k+1}$.

Seja $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n) \in G_{0,k+1}(n)$, $\delta \in S_n$, então $g_y \in G_{0,k}(n)$. Tratamos separadamente os casos g e $g\delta$:

• Conjugando $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ por $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)\rho$ onde $b_y \in G_{0,k}(n)$ e $\rho \in S_n$, obtemos $g^b = ({g_{\rho^{-1}(1)}}^{b_{\rho^{-1}(1)}}, \cdots, {g_{\rho^{-1}(n)}}^{b_{\rho^{-1}(n)}})$. Assim, a classe de conjugação de g coincide com a classe de conjugação de qualquer uma de suas permutações. Denotando por g'_y o representante da classe de conjugação de g_y em $G_{0,k}(n)$, $1 \leq y \leq n$, escolhemos o representante da classe de conjugação de g como sendo $g' = (g'_{y_1}, \cdots, g'_{y_n})$ uma permutação de $(g'_1, \cdots, g'_n)$ tal que $g'_{y_1} \leq g'_{y_2} \leq \cdots \leq g'_{y_n}$, segundo a ordenação de $\widetilde{C}_k$. Dessa forma, podemos listar todos os representantes das classes de conjugação dos elementos de $G_{0,k+1}(n) \setminus G_{0,k}(n)$ da forma $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$, em um conjunto que chamaremos B_{k+1}. Então,
$B_{k+1} = \{(f_1, \cdots, f_n) \mid f_y \in \widetilde{C}_k,\ 1 \leq y \leq n-1,\ f_n \in C_k \ e \ f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n\}$.

• Para $g\delta$, $\delta \neq e$, utilizando a conjugação em S_n, temos que existe $\phi \in S_n$ tal que $\delta^\phi = \delta_0$ onde $\delta_0 \in C_0$, portanto, $(g\delta)^\phi = h\delta_0$, onde $h = g^\phi$. Devido a proposição 1.4.1, a classe de conjugação de $h\delta_0$ coincide com a classe de conjugação de $h'\delta_0$ onde $h'_y = e$, $\forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $h'_{y_\lambda} \in G_{0,k}(n)$. Seja $b = (b_1, \cdots, b_n) \in G_{0,k+1}(n)$ tal que $b'\delta_0$ é obtido de $b\delta_0$ pela aplicação da proposição 1.4.1. Então segue do corolário 1.4.2 que $h'\delta_0$ e $b'\delta_0$ são conjugados se, e somente se, g'_{y_λ} e b'_{y_λ} são conjugados em $G_{0,k}(n)$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$.

Então escolhemos o representante da classe de conjugação de $g\delta$ como sendo $f\delta'$, onde para cada $\lambda \in \Lambda$, f_{y_λ} é um representante da classe de conjugação de h'_{y_λ} em $G_{0,k}(n)$ e $f_y = e$, $\forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Assim, para cada representante $\rho \in C_0$, seja $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o conjunto de ρ-órbitas em $Y = \{1, \cdots, n\}$ e escolha um conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de representantes das órbitas, então o conjunto

$$F_{k+1,\rho} = \{f\rho \in G_{0,k+1}(n) \backslash G_{0,k}(n) \mid f = (f_1, \cdots, f_n), f_y = e, \forall\, y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\; e\; f_{y_\lambda} \in \widetilde{C}_k, \forall\, \lambda \in \Lambda\}$$

consiste dos representantes das classes de conjugação dos elementos de $G_{0,k+1}(n)$ da forma $g\delta$, onde δ é conjugado a ρ. Fazendo ρ variar sobre C_0 obtemos uma família de representantes de classes de conjugação de $G_{0,k+1}(n)$. Segue que para $g\delta \in G_{0,k+1}(n)$ onde $\delta \neq e$, o representante de sua classe de conjugação pertence ao conjunto $\bigcup\limits_{\rho\in C_0} F_{k+1,\rho} \ \cup \ \bigcup\limits_{j=0}^{k} C_j$.

Definimos

$$C_{k+1} = B_{k+1} \cup \bigcup_{\rho\in C_0} F_{k+1,\rho}.$$

Ordenamos B_{k+1}, o primeiro subconjunto de C_{k+1}, utilizando a ordem lexicográfica inversa.

O segundo subconjunto de C_{k+1} é ordenado de forma que $f\rho_1 < g\rho_2$ se, e somente se uma das situações ocorre:

(1) $\rho_1 < \rho_2$;

(2) $\rho_1 = \rho_2$ e neste caso ordenamos o conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{y_1, \cdots, y_r\}$ de forma que $y_1 < y_2 < \cdots < y_r$ e dizemos que $f\rho_1 < g\rho_1$ se uma das situações ocorre:

(2.1) $f_{y_r} < g_{y_r}$;

(2.2) existe um inteiro $i > 0$ tal que $f_{y_r} = g_{y_r}, \cdots, f_{y_{r-(i-1)}} = g_{y_{r-(i-1)}}$ e $f_{y_{r-i}} < g_{y_{r-i}}$.

Ainda, qualquer elemento de B_{k+1} é feito menor que qualquer elemento de $\bigcup\limits_{\rho\in C_0} F_{k+1,\rho}$.

Então definimos

$$\widetilde{C}_{k+1} = \widetilde{C}_k \cup C_{k+1}$$

que é um conjunto completo de representantes das classes de conjugação de $G_{0,k+1}(n)$, ordenado de forma que qualquer elemento de $\widetilde{C}_k$ é feito menor que um de C_{k+1}.

Agora definimos

$$C = \bigcup_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k.$$

Seja g um elemento de $G(n)$, então g pertence a $G_{0,k}(n)$ para algum inteiro k, e pelo visto acima, g é conjugado a algum elemento de C.

Teorema 1.4.4. *O conjunto* $C = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k$ *é um sistema de representantes das classes de conjugação de* $G(n)$.

Demonstração. Que cada elemento de $G(n)$ é conjugado a algum elemento de C, segue do parágrafo anterior.

Agora suponha que s e s' são conjugados em $G(n)$, onde $s \in C_k$ e $s' \in C_{k'}$ com $k \leq k'$. Usaremos indução em k para mostrar que $s = s'$. Se $k = -1$, então $s = e$ o elemento identidade de $G(n)$ e, portanto, $s' = e$.

Suponha primeiro que $s \in \bigcup\limits_{\rho \in C_0} F_{k,\rho}$, então para algum $\rho \in C_0$ temos $s = (f_1, \cdots, f_n)\rho \in F_{k,\rho}$ onde $f_y = e,\ \forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $f_{y_\lambda} \in \widetilde{C}_{k-1}$ e y_λ é o representante de uma $\langle \rho \rangle$-órbita. Como s e s' são conjugados em $G(n)$, segue que eles são conjugados em $G_{0,t}(n)$, para algum inteiro t. Assim, $s' \in F_{k',\rho}$ e portanto $s' = (g_1, \cdots, g_n)\rho$, onde $g_y = e,\ \forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e $g_{y_\lambda} \in \widetilde{C}_{k'-1},\ \lambda \in \Lambda$. Segue do corolário 1.4.2 que f_{y_λ} e g_{y_λ} são conjugados em $G_{0,t-1}(n),\ \forall\ \lambda \in \Lambda$ e, portanto, conjugados em $G(n)$. Por indução em k temos $f_{y_\lambda} = g_{y_\lambda},\ \lambda \in \Lambda$.

Agora suponha que $s \in B_k$, então $s = (f_1, \cdots, f_n)$ onde $f_y \in \widetilde{C}_{k-1}$, $1 \leq y \leq n-1$, $f_n \in C_{k-1}$ e $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n$. Como s e s' são conjugados em $G(n)$ segue que eles são conjugados em $G_{0,t}(n)$, para algum inteiro t e, portanto, $s' = (g_1, \cdots, g_n)$ onde $g_y \in \widetilde{C}_{k'-1}$, $1 \leq y \leq n-1$, $g_n \in C_{k'-1}$ e $g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq g_n$. Logo, existe $b = (b_1, \cdots, b_n)\zeta$ em $G_{0,t}(n)$ tal que $s^b = ((f_{\zeta^{-1}(1)})^{b_{\zeta^{-1}(1)}}, \cdots, (f_{\zeta^{-1}(n)})^{b_{\zeta^{-1}(n)}}) = (g_1, \cdots, g_n)$. Então, g_y e $f_{\zeta^{-1}(y)}$ são conjugados em $G(n)$ e, por indução em k, temos que $g_y = f_{\zeta^{-1}(y)}$. Como $g_1 \leq \cdots \leq g_n$, segue que $f_{\zeta^{-1}(1)} \leq \cdots \leq f_{\zeta^{-1}(n)}$. Então, $f_1 \leq \cdots \leq f_n$ implica $f_{\zeta^{-1}(y)} = f_y$, $1 \leq y \leq n$. Logo, $g_y = f_y,\ 1 \leq y \leq n$ e portanto $s = s'$. ∎

Exemplificamos o teorema anterior para os casos $n = 2$ e $n = 3$.

Exemplo 1.4.5. Caso $n = 2$. Este exemplo corresponde ao teorema 5.1 de [7].

- $C_{-1} = \{e\}$, $C_0 = \{\sigma = (1\ 2)\}$ e
$$\widetilde{C}_0 = C_{-1} \cup C_0 = \{e, \sigma\}$$
é o conjunto de representantes das classes de conjugação de $G_{0,0}(2)$.

- $B_1 = \{(e,\sigma),(\sigma,\sigma)\}$ e $\bigcup\limits_{\rho\in C_0} F_{1,\rho} = F_{1,\sigma} = \{(e,\sigma)\sigma\}$. Então $C_1 = B_1 \cup F_{1,\sigma} = \{(e,\sigma),(\sigma,\sigma),(e,\sigma)\sigma\}$ e
$$\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_0 \cup C_1 = \{e, \sigma, (e,\sigma), (\sigma,\sigma), (e,\sigma)\sigma\}$$
é o conjunto de representantes das classes de conjugação de $G_{0,1}(2)$.

- $B_2 = \{(e,(e,\sigma)),(e,(\sigma,\sigma)),(e,(e,\sigma)\sigma),(\sigma,(e,\sigma)),(\sigma,(\sigma,\sigma)),(\sigma,(e,\sigma)\sigma),((e,\sigma),(e,\sigma)),((e,\sigma),(\sigma,\sigma)),((e,\sigma),(e,\sigma)\sigma),((\sigma,\sigma),(\sigma,\sigma)),((\sigma,\sigma),(e,\sigma)\sigma),((e,\sigma)\sigma,(e,\sigma)\sigma)\}$ e $\bigcup\limits_{\rho\in C_0} F_{2,\rho} = F_{2,\sigma} = \{(e,(e,\sigma))\sigma,(e,(\sigma,\sigma))\sigma,(e,(e,\sigma))\sigma\}$. Então $C_2 = B_2 \cup F_{2,\sigma}$ e
$$\begin{aligned}\widetilde{C}_2 =& \widetilde{C}_1 \cup C_2\\ =&\{e,\sigma,(e,\sigma),(\sigma,\sigma),(e,\sigma)\sigma,(e,(e,\sigma)),(e,(\sigma,\sigma)),(e,(e,\sigma)\sigma),(\sigma,(e,\sigma)),(\sigma,(\sigma,\sigma)),\\ &(\sigma,(e,\sigma)\sigma),((e,\sigma),(e,\sigma)),((e,\sigma),(\sigma,\sigma)),((e,\sigma),(e,\sigma)\sigma),((\sigma,\sigma),(\sigma,\sigma)),\\ &((\sigma,\sigma),(e,\sigma)\sigma),((e,\sigma)\sigma,(e,\sigma)\sigma),(e,(e,\sigma))\sigma,(e,(\sigma,\sigma))\sigma,(e,(e,\sigma))\sigma\}\end{aligned}$$
é um conjunto de representantes das classes de conjugação de $G_{0,2}(2)$.

Indutivamente, tendo listado $\widetilde{C}_k$ temos:

- $B_{k+1} = \{(f_1,f_2) \mid f_1 \in \widetilde{C}_k,\ f_2 \in C_k,\ f_1 \leq f_2\}$ e $\bigcup\limits_{\rho\in C_0} F_{k+1,\rho} = F_{k+1,\sigma} = \{(e,f_2)\sigma \mid f_2 \in C_k\}$. Logo, $C_{k+1} = B_{k+1} \cup F_{k+1,\sigma}$ e
$$\widetilde{C}_{k+1} = \widetilde{C}_k \cup C_{k+1}$$

é um conjunto de representantes das classes de conjugação de $G_{0,k+1}(2)$.

O teorema 1.4.4 nos diz que o conjunto $C = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k$ é um sistema de representantes das classes de conjugação de $G(2)$.

Exemplo 1.4.6. Caso n=3.

- $C_{-1} = \{e\}$, $C_0 = \{\delta = (1\ 2), \tau = (1\ 2\ 3)\}$ e

$$\widetilde{C}_0 = C_{-1} \cup C_0 = \{e, \delta, \tau\}$$

é o conjunto de representantes das classes de conjugação de $G_{0,0}(3)$.

- $B_1 = \{(e,e,\delta), (e,\delta,\delta), (\delta,\delta,\delta), (e,e,\tau), (e,\delta,\tau), (\delta,\delta,\tau), (e,\tau,\tau), (\delta,\tau,\tau), (\tau,\tau,\tau)\}$ e $\bigcup_{\rho \in C_0} F_{1,\rho} = F_{1,\delta} \cup F_{1,\tau}$
onde:

$F_{1,\delta} = \{(e,\delta,e)\delta, (e,\tau,e)\delta, (e,e,\delta)\delta, (e,\delta,\delta)\delta, (e,\tau,\delta)\delta, (e,e,\tau)\delta, (e,\delta,\tau)\delta, (e,\tau,\tau)\delta\}$, pois temos duas $\langle\delta\rangle$-órbitas: $\{1,2\}$ e $\{3\}$ onde escolhemos os representantes $y_1 = 2$ e $y_2 = 3$; assim, a primeira coordenada é sempre e;

$F_{1,\tau} = \{(e,e,\delta)\tau, (e,e,\tau)\tau\}$, pois temos uma $\langle\tau\rangle$-órbita:$\{1,2,3\}$ onde escolhemos o representante $y_1 = 3$ e portanto, a primeira e segunda coordenadas são iguais a e.

Então $C_1 = B_1 \cup F_{1,\delta} \cup F_{1,\tau}$ e

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_1 = &\widetilde{C}_0 \cup C_1 = \{e, \delta, \tau, (e,e,\delta), (e,\delta,\delta), (\delta,\delta,\delta), (e,e,\tau), (e,\delta,\tau),\\ &(\delta,\delta,\tau), (e,\tau,\tau), (\delta,\tau,\tau), (\tau,\tau,\tau), (e,e,\delta)\delta, (e,\delta,\delta)\delta, (e,e,\tau)\delta,\\ &(e,\delta,\tau)\delta, (e,\tau,\tau)\delta, (e,e,\sigma)\tau, (e,e,\tau)\tau\}\end{aligned}$$

é um conjunto de representantes das classes de conjugação de $G_{0,1}(3)$.

Indutivamente, tendo listado $\widetilde{C}_k$ temos:

- $B_{k+1} = \{(f_1, f_2, f_3) \mid f_1, f_2 \in \widetilde{C}_k,\ f_3 \in C_k,\ f_1 \leq f_2 \leq f_3\}$ e $\bigcup_{\rho \in C_0} F_{k+1,\rho} = F_{k+1,\delta} \cup F_{k+1,\tau}$
onde:

$F_{k+1,\delta} = \{(e, f_2, f_3)\delta \in G_{0,k+1} \setminus G_{0,k} \mid f_2, f_3 \in \widetilde{C}_k\}$, pois temos duas $\langle\delta\rangle$-órbitas: $\{1,2\}$ e $\{3\}$ onde escolhemos os representantes $y_1 = 2$ e $y_2 = 3$; assim, a primeira coordenada é sempre e;

$F_{k+1,\tau} = \{(e,e,f_3)\tau \mid f_3 \in C_k\}$, pois temos exatamente uma $\langle\tau\rangle$-órbita: $\{1,2,3\}$ onde escolhemos o representante $y_1 = 3$; assim, a primeira e segunda coordenadas são sempre e;

Logo, $C_{k+1} = B_{k+1} \cup F_{k+1,\delta} \cup F_{k+1,\tau}$ e

$$\widetilde{C}_{k+1} = \widetilde{C}_k \cup C_{k+1}$$

é um conjunto de representantes das classes de conjugação de $G_{0,k+1}(3)$.

O teorema 1.4.4 nos diz que o conjunto $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k$ é um sistema de representantes das classes de conjugação de $G(3)$.

$$\begin{aligned} B_1 = \{&(e,e,\delta),(e,\delta,\delta),(\delta,\delta,\delta),(e,e,\tau),(e,\delta,\tau),(\delta,\delta,\tau),(e,\tau,\tau),\\ &(\delta,\tau,\tau),(\tau,\tau,\tau)\} \end{aligned}$$

Capítulo 2

O Subgrupo $\mathcal{H}(n)$ e suas Classes de Conjugação

Neste capítulo definimos $\mathcal{H}(n)$, um subgrupo do grupo finitário de isometrias da árvore $\mathcal{T}_n$, e apresentamos um conjunto completo de representantes para suas classes de conjugação. Além disso consideramos $n = p$, um número primo, e estudamos os centralizadores de elementos de ordem p em $\mathcal{H}(p)$.

2.1 O Subgrupo $\mathcal{H}(n)$

Considere o conjunto $Y = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ e $\sigma \in S_n$ um n-ciclo. Definimos $\mathcal{H}(n)$ como o subgrupo do grupo finitário $G(n)$ gerado pelas isometrias $\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots$, de $\mathcal{T}_n$ onde $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_i = \underbrace{(e,\ e,\ \cdots,\ e,\ \sigma_{i-1})}_{n}$ para $i \geq 1$. Assim, $\mathcal{H}(n)$ é o produto entrelaçado iterado infinito $((\cdots wrC_n)\, wrC_n)$ do grupo cíclico C_n. Para facilitar os cálculos escolhemos σ como o n-ciclo $(n\ \ n-1\ \ \cdots\ \ 3\ \ 2\ \ 1)$. Observamos que $\mathcal{H}(n)$ é o fecho estratificado do grupo cíclico $C_n = \langle \sigma \rangle$ e, portanto, é um grupo estratificado.

Defina $\mathcal{H}_{i,j}(n) = \langle \sigma_i,\ \sigma_{i+1},\ \cdots,\ \sigma_j \rangle$ para $i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ e $i \leq j$. Em particular, $\mathcal{H}_{0,j}(n) = \langle \sigma_0,\ \sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_j \rangle$. Colocamos $\mathcal{H}_{i,\infty}(n) = \langle \sigma_i,\ \sigma_{i+1},\ \cdots \rangle$. Assim, $\mathcal{H}_{0,j}(n)$ é isomorfo ao produto entrelaçado iterado de C_n tomado j-vezes. Além disso, se $\mathcal{T}_{n,j}$ denota a árvore truncada no nível $(j+1)$, então $\mathcal{H}_{0,j}(n)$ é um subgrupo de $Aut(\mathcal{T}_{n,j})$. Claramente temos $\mathcal{H}(n) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_{0,j}(n)$.

2.2 Classes de Conjugação de $\mathcal{H}(n)$

Nesta seção descrevemos como produzir indutivamente representantes de classes de conjugação de $\mathcal{H}(n)$ e determinamos explicitamente um conjunto completo de representantes das classes de conjugação de $\mathcal{H}(n)$. Adotaremos aqui um procedimento análogo ao utilizado na seção 1.4. Neste sentido temos que, tanto a proposição 1.4.1 quanto o corolário 1.4.2 possuem uma versão para $\mathcal{H}_{0,k}(n)$ dadas a seguir.

Proposição 2.2.1. *Sejam g=$(g_1, \cdots, g_n) \in \mathcal{H}_{0,k}(n)$, para algum inteiro k, $e \neq \delta \in \langle\sigma\rangle$, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o conjunto de $\langle\delta\rangle$-órbitas em $Y = \{1, \cdots, n\}$, e escolha um conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de representantes das órbitas. Dados um inteiro t e $c = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathcal{H}_{0,t}(n)$, existe um elemento $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathcal{H}_{0,t}(n)$ tal que:*
(i) $b_{y_\lambda} = c_{y_\lambda}$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$;
(ii) $b^{-1}g\delta b = g'\delta$, onde $g' = (g'_1, \cdots, g'_n)$, e $g'_y = e$, $\forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,
$g'_{y_\lambda} = c^{-1}_{y_\lambda} g_{y_\lambda} g_{\delta(y_\lambda)} g_{\delta^2(y_\lambda)} \cdots g_{\delta^{|Y_\lambda|-1}(y_\lambda)} c_{y_\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$. Em particular tomando $c_{y_\lambda} = e$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$, temos que $g'\delta \in \mathcal{H}_{0,k}(n)$.

Corolário 2.2.2. *Sejam $e \neq \delta \in \langle\sigma\rangle$, $g = (g_1, \cdots, g_n)$ e $h = (h_1, \cdots, h_n)$ elementos em $\mathcal{H}_{0,k}(n)$. Então $g\delta$ e $h\delta$ são conjugados em $\mathcal{H}_{0,t}(n)$ para um inteiro t se, e somente se, para um conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de representantes para $\langle\delta\rangle$-órbitas $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de Y, g'_{y_λ} e h'_{y_λ} são conjugados em $\mathcal{H}_{0,t}(n)$, onde g'_y e h'_y são como no item (ii) da proposição anterior.*

2.2.1 Representantes das Classes de Conjugação de $\mathcal{H}(n)$

Agora, definiremos de maneira indutiva os representantes das classes de conjugação dos elementos de $\mathcal{H}(n)$ e os listaremos em camadas, correspondendo aos subgrupos $\mathcal{H}_{0,k}(n)$. Como cada elemento $g \in \mathcal{H}(n)$ pode ser escrito na forma $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)\sigma^r$, onde $g_y \in \mathcal{H}_{0,k-1}(n)$ para algum inteiro k e $r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, observamos que:

- Caso $r = 0$. Temos que g pode ser conjugado por $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ com $a_y \in \mathcal{H}_{0,k-1}(n)$, obtendo $g^a = ({g_1}^{a_1}, {g_2}^{a_2}, \cdots, {g_n}^{a_n})$. Portanto, g_y pode ser trocado pelo respectivo representante de sua classe de conjugação em $\mathcal{H}_{0,k-1}(n)$, assim que esse representante tenha sido escolhido.

- Caso $r \neq 0$. Segue da proposição 2.2.1 que existe $b \in \mathcal{H}_{0,k}(n)$ tal que $g^b = (g'_1, \cdots, g'_n)\sigma^r$, onde $g'_y = e$, $\forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Conjugando novamente por $d = (d_1, \cdots, d_n) \in \mathcal{H}_{0,k}(n)$, onde d é constante em cada $\langle \sigma^r \rangle$-órbita, i.e., $d_{\sigma^{ri}(y_\lambda)} = d_\lambda$, $1 \leq i \leq |Y_\lambda|$, $\lambda \in \Lambda$, obtemos $(g\sigma^r)^{bd} = ({g'_1}^{d_1}, \cdots, {g'_n}^{d_n})\sigma^r$ onde ${g'_y}^{d_y} = e$, $\forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Então podemos trocar g'_{y_λ} pelo representante de sua classe de conjugação.

Iniciamos definindo, $C_{-1} = \{e\}$ e $C_0 = \{\sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}\}$. Então $\widetilde{C}_0 = C_{-1} \cup C_0$ é o conjunto de representantes para $\mathcal{H}_{0,0}(n)$, e é ordenado tal que $e < \sigma < \sigma^2 < \cdots < \sigma^{n-1}$.

Em seguida definimos o conjunto $\widetilde{C}_1$ de representantes para $\mathcal{H}_{0,1}(n)$. Notamos que ao conjugar um elemento g de $\mathcal{H}_{0,1}(n)$ da forma $g = (\sigma^{i_1}, \sigma^{i_2}, \cdots, \sigma^{i_n})$, $0 \leq i_k \leq n-1$, por outro elemento $b = (\sigma^{j_1}, \sigma^{j_2}, \cdots, \sigma^{j_n})\sigma^t$, obtemos $g^b = (\sigma^{i_{t+1}}, \cdots, \sigma^{i_n}, \sigma^{i_1}, \sigma^{i_2}, \cdots, \sigma^{i_t}) = g^{\sigma^t}$. Assim, dois elementos inativos de $\mathcal{H}_{0,1}(n)$, estão na mesma classe de conjugação, se e somente se, um pode ser obtido do outro através de uma permutação cíclica de suas coordenadas. Assim, podemos escolher o representante de g onde requeremos que $i_y \neq 0$, para algum y, da seguinte forma:

• se em g temos exatamente uma coordenada maior que as demais, segundo a ordenação de $\widetilde{C}_0$, então escolhemos o representante da classe de conjugação de g, como sendo a permutação cíclica cuja n-ésima coordenada é a maior.

• se em g temos exatamente duas coordenadas iguais, maiores que as demais, então temos exatamente duas permutações cíclicas de g cuja n-ésima coordenada é a maior. Dessas duas, escolhemos como representante da classe de conjugação de g aquela cuja $(n-1)$-ésima coordenada é maior. Caso estas coordenadas também sejam iguais, passamos a comparar a $(n-2)$-ésima coordenada, escolhendo como representante aquela permutação cíclica de g cuja $(n-2)$-ésima coordenada é maior. E assim por diante.

• Procedimento análogo é adotado para g tendo três, quatro, etc, coordenadas iguais, maiores que as demais. Dessa forma, podemos listar todos os representantes das classes de conjugação dos elementos de $\mathcal{H}_{0,1}(n) \setminus \mathcal{H}_{0,0}(n)$ da forma $g = (\sigma^{i_1}, \sigma^{i_2}, \cdots, \sigma^{i_n})$, em um conjunto que denominaremos B_1. Note que um elemento $(s_1, \cdots, s_n)$ de B_1 é tal que $\{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}\} \subset \widetilde{C}_0$ e $s_n \in C_0$.

Para os elementos de $\mathcal{H}_{0,1}(n) \setminus \mathcal{H}_{0,0}(n)$ da forma $g = (\sigma^{i_1}, \sigma^{i_2}, \cdots, \sigma^{i_n})\sigma^r$, $r \neq 0$, temos da proposição 2.2.1, que eles estão na mesma classe de conjugação em $\mathcal{H}_{0,1}(n)$ que $g' = (g'_1, \cdots, g'_n)\sigma^r$, onde $g'_y = e, \forall\, y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, onde y_λ é o representante de uma $\langle\sigma^r\rangle$-órbita Y_λ, $\lambda \in \Lambda$. Agora, seja $h = (h_1, \cdots, h_n)\sigma^r \in \mathcal{H}_{0,1}(n)$ tal que $h' = (h'_1, \cdots, h'_n)\sigma^r$ é obtido pela aplicação da proposição 2.2.1. Então segue do corolário 2.2.2 que g' e h' são conjugados em $\mathcal{H}_{0,1}(n)$ se, e somente se, g'_{y_λ} e h'_{y_λ}, são conjugados em $\mathcal{H}_{0,0}(n)$. Assim, escolhemos o representante da classe de conjugação de g como sendo $(f_1, \cdots, f_n)\sigma^r$, onde para cada $\lambda \in \Lambda$, f_{y_λ} é um representante da classe de conjugação de g'_{y_λ} em $\mathcal{H}_{0,0}(n)$ e $f_y = e, \forall\, y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Logo, para cada representante $\sigma^r \in C_0$, seja $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o conjunto de $\langle\sigma^r\rangle$-órbitas em $Y = \{1, \cdots, n\}$ e escolha um conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de representantes das órbitas. Então o conjunto

$$F_{1,\sigma^r} = \{f\sigma^r \in \mathcal{H}_{0,1}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,0}(n) \mid f = (f_1, \cdots, f_n), f_y = e, \forall\, y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\ e\ f_{y_\lambda} \in \widetilde{C}_0, \forall\, \lambda \in \Lambda\}$$

consiste dos representantes das classes de conjugação dos elementos de $\mathcal{H}_{0,1}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,0}(n)$ da forma $(g_1, \cdots, g_n)\sigma^r$. Fazendo σ^r variar sobre C_0 obtemos uma família de representantes de classes de conjugação de $\mathcal{H}_{0,1}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,0}(n)$. Então para $(g_1, \cdots, g_n)\sigma^r \in \mathcal{H}_{0,1}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,0}(n)$ onde $r \neq e$, o representante de sua classe de conjugação pertence ao conjunto $\bigcup\limits_{r=1}^{n-1} F_{1,\sigma^r}$.

Definimos

$$C_1 = B_1 \quad \cup \quad \bigcup_{r=1}^{n-1} F_{1,\sigma^r}.$$

Ordenamos B_1, o primeiro subconjunto de C_1, conforme a ordem lexicográfica inversa.
O segundo subconjunto de C_1 é ordenado de forma que dados $f = (f_1, \cdots, f_n)\sigma^{r_1}$ e $g = (g_1, \cdots, g_n)\sigma^{r_2}$ em $\bigcup\limits_{r=1}^{n-1} F_{1,\sigma^r}$, dizemos que $f < g$ se, e somente se, uma das situações ocorre:

(1) $r_1 < r_2$;

(2) $r_1 = r_2$ e neste caso ordenamos o conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{y_1, \cdots, y_k\}$ de forma que $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$ e dizemos que $f < g$ se uma das situações ocorre:

(2.1) $f_{y_k} < g_{y_k}$;

(2.2) $f_{y_k} = g_{y_k}$ e $f_{y_{k-1}} < g_{y_{k-1}}$

(2.3) $f_{y_k} = g_{y_k}$, $f_{y_{k-1}} = g_{y_{k-1}}$ e $f_{y_{k-2}} < g_{y_{k-2}}$;

$\ldots$

(2.k) $f_{y_k} = g_{y_k}$, $f_{y_{k-1}} = g_{y_{k-1}}$, $\cdots$, $f_{y_2} = g_{y_2}$ e $f_{y_1} < g_{y_1}$.

Ainda, qualquer elemento de B_1 é feito menor que qualquer elemento do segundo subconjunto em C_1. Então

$$\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_0 \cup C_1$$

é o conjunto de representantes para $\mathcal{H}_{0,1}(n)$ e é ordenado de forma que qualquer elemento de $\widetilde{C}_0$ é menor que um de C_1.

Indutivamente, tendo listado $\widetilde{C}_k = \widetilde{C}_{k-1} \cup C_k$, o conjunto de representantes para $\mathcal{H}_{0,k}(n)$, onde $\widetilde{C}_{k-1}$ é um conjunto de representantes para os elementos de $\mathcal{H}_{0,k-1}(n) \subset \mathcal{H}_{0,k}(n)$ e C_k é um conjunto de representantes para os elementos de $\mathcal{H}_{0,k}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,k-1}(n)$, vamos determinar $\widetilde{C}_{k+1}$, o conjunto de representantes para $\mathcal{H}_{0,k+1}(n)$.

Seja $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)\sigma^r \in \mathcal{H}_{0,k+1}(n)$. Então $g_y \in \mathcal{H}_{0,k}(n)$ e $r \geq 0$, temos o seguinte:

$*$ se $r = 0$, então $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$, e conjugando por $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)\sigma^t$ onde $b_y \in \mathcal{H}_{0,k}(n)$, obtemos $g^b = ({g_{t+1}}^{b_{t+1}}, {g_{t+2}}^{b_{t+2}}, \cdots, {g_n}^{b_n}, {g_1}^{b_1}, \cdots, {g_t}^{b_t})$. Então a classe de conjugação de g coincide com a classe de conjugação de qualquer uma de suas permutações cíclicas. Assim, escolhemos o representante da classe de conjugação de g como sendo uma certa permutação cíclica do elemento $g' = ({g_1}', {g_2}', \cdots, {g_n}')$, onde ${g_y}'$ é o representante da classe de conjugação de g_y em $\mathcal{H}_{0,k}(n)$, já escolhido anteriormente:

- Se g' possui exatamente uma coordenada maior que as demais, segundo a ordenação de $\widetilde{C}_k$, então escolhemos o representante da classe de conjugação de g, como sendo a permutação cíclica de g' cuja n-ésima coordenada é a maior.

- se g' possui exatamente duas coordenadas iguais, maiores que as demais, então temos exatamente duas permutações cíclicas de g' cuja n-ésima coordenada é maior.

Dessas duas, escolhemos como representante da classe de conjugação de g aquela cuja $(n-1)$-ésima coordenada é maior. Caso estas coordenadas também sejam iguais, passamos a comparar a $(n-2)$-ésima coordenada, escolhendo como representante aquela permutação cíclica de g' cuja $(n-2)$-ésima coordenada é maior . E assim por diante.

- Procedimento análogo pode ser adotado para escolher o representante da classe de conjugação de g quando g' possui três, quatro, etc, coordenadas iguais e maiores que as demais. Assim, podemos listar todos os representantes das classes de conjugação dos elementos de $\mathcal{H}_{0,k+1}(n) \setminus \mathcal{H}_{0,k}(n)$ da forma $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ em um conjunto que chamaremos B_{k+1}. Note que um elemento $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ de B_{k+1} é tal que $\{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}\} \subset \widetilde{C}_k$ e $s_n \in C_k$.

$*$ se $r > 0$, temos da proposição 2.2.1, que g está na mesma classe de conjugação em $\mathcal{H}_{0,k+1}(n)$ que $g' = (g'_1, \cdots, g'_n)\sigma^r$, onde $g'_y = e$, $\forall\, y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e y_λ é um representante de uma $\langle \sigma^r \rangle$-órbita Y_λ, $\lambda \in \Lambda$. Agora, seja $h = (h_1, \cdots, h_n)\sigma^r \in \mathcal{H}_{0,k+1}(n)$ tal que $h' = (h'_1, \cdots, h'_n)\sigma^r$ é obtido pela aplicação da proposição 2.2.1, então segue do corolário 2.2.2 que g' e h' são conjugados em $\mathcal{H}_{0,k+1}(n)$ se, e somente se, g'_{y_λ} e h'_{y_λ}, são conjugados em $\mathcal{H}_{0,k}(n)$. Assim, escolhemos o representante da classe de conjugação de g como sendo $(f_1, \cdots, f_n)\sigma^r$, onde para cada $\lambda \in \Lambda$, f_{y_λ} é um representante da classe de conjugação de g'_{y_λ} em $\mathcal{H}_{0,k}(n)$ e $f_y = e$, $\forall\, y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Logo, para cada representante $\sigma^r \in C_0$, seja $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ o conjunto de $\langle \sigma^r \rangle$-órbitas em $Y = \{1, \cdots, n\}$ e escolha um conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de representantes das órbitas. Então o conjunto

$$F_{k+1,\sigma^r} = \{f\sigma^r \in \mathcal{H}_{0,k+1}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,k}(n) \mid f = (f_1, \cdots, f_n), f_y = e, \forall\, y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\; e\; f_{y_\lambda} \in \widetilde{C}_k, \forall\, \lambda \in \Lambda\}$$

consiste dos representantes das classes de conjugação dos elementos de $\mathcal{H}_{0,k+1}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,k}(n)$ da forma $(g_1, \cdots, g_n)\sigma^r$. Fazendo σ^r variar sobre C_0 obtemos uma família de representantes de classes de conjugação de $\mathcal{H}_{0,k+1}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,k}(n)$, então para $(g_1, \cdots, g_n)\sigma^r \in \mathcal{H}_{0,2}(n) \backslash \mathcal{H}_{0,k}(n)$ onde $r \neq e$, o representante de sua classe de conjugação pertence ao conjunto $\bigcup_{r=1}^{n-1} F_{k+1,\sigma^r}$. Definimos

$$C_{k+1} = B_{k+1} \quad \cup \quad \bigcup_{r=1}^{n-1} F_{k,\sigma^r}.$$

Ordenamos B_{k+1}, o primeiro subconjunto de C_{k+1}, utilizando a ordem lexicográfica inversa.

O segundo subconjunto de C_2 é ordenado de forma que dados $f = (f_1, \cdots, f_n)\sigma^{r_1}$ e $g = (g_1, \cdots, g_n)\sigma^{r_2}$ em $\bigcup_{r=1}^{n-1} F_{2,\sigma^r}$, dizemos que $f < g$ se, e somente se, uma das situações ocorre:

(1) $r_1 < r_2$;

(2) $r_1 = r_2$ e neste caso ordenamos o conjunto $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{y_1, \cdots, y_t\}$ de forma que $y_1 < y_2 < \cdots < y_t$ e dizemos que $f < g$ se uma das situações ocorre:

(2.1) $f_{y_t} < g_{y_t}$;

(2.2) $f_{y_t} = g_{y_t}$ e $f_{y_{t-1}} < g_{y_{t-1}}$

(2.3) $f_{y_t} = g_{y_t}$, $f_{y_{t-1}} = g_{y_{t-1}}$ e $f_{y_{t-2}} < g_{y_{t-2}}$;

$\ldots$

(2.t) $f_{y_t} = g_{y_t}$, $f_{y_{t-1}} = g_{y_{t-1}}$, $\cdots$, $f_{y_2} = g_{y_2}$ e $f_{y_1} < g_{y_1}$.

Ainda, qualquer elemento de B_{k+1} é feito menor que qualquer elemento do segundo subconjunto em C_{k+1}. Então

$$\widetilde{C}_{k+1} = \widetilde{C}_k \cup C_{k+1}$$

é o conjunto de representantes para $\mathcal{H}_{0,k+1}(n)$ e é ordenado de forma que qualquer elemento de $\widetilde{C}_k$ é menor que um de C_{k+1}.

Agora definimos

$$C = \bigcup_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k.$$

Seja g um elemento de $\mathcal{H}(n)$, então g pertence a $\mathcal{H}_{0,k}(n)$ para algum inteiro k, e pelo visto acima, g é conjugado a algum elemento de C.

Teorema 2.2.3. *O conjunto* $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k$ *é um sistema de representantes das classes de conjugação de* $\mathcal{H}(n)$.

Demonstração. Que cada elemento de $\mathcal{H}(n)$ é conjugado a algum elemento de C, segue do parágrafo anterior.

Agora suponha que s e s' são conjugados em $\mathcal{H}(n)$, onde $s \in C_k$ e $s' \in C_{k'}$ com $k \leq k'$. Usaremos indução em k para mostrar que $s = s'$. Se $k = -1$, então $s = e$ o elemento identidade de $\mathcal{H}(n)$ e, portanto, $s' = e$.

Suponha primeiro que $s \in \bigcup_{r=1}^{n-1} F_{k,\sigma^r}$, então para algum $\sigma^r \in C_0$ temos que $s = (f_1, \cdots, f_n)\sigma^r$ pertence a F_{k,σ^r} onde $f_y = e$, $\forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $f_{y_\lambda} \in \widetilde{C}_{k-1}$ e y_λ é o representante de uma $\langle \sigma^r \rangle$-órbita. Como s e s' são conjugados em $\mathcal{H}(n)$, segue que eles são conjugados em $\mathcal{H}_{0,t}(n)$, para algum inteiro t. Assim, $s' \in F_{k',\sigma^r}$ e portanto $s' = (g_1, \cdots, g_n)\sigma^r$, onde $g_y = e$, $\forall\ y \in Y \backslash \{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e $g_{y_\lambda} \in \widetilde{C}_{k'-1}$, $\lambda \in \Lambda$. Segue do corolário 1.4.2 que f_{y_λ} e g_{y_λ} são conjugados em $\mathcal{H}_{0,t-1}(n)$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$ e, portanto, conjugados em $\mathcal{H}(n)$. Por indução em k temos $f_{y_\lambda} = g_{y_\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$.

Agora suponha que $s = (s_1, s_2, \cdots, s_p) \in B_k$. Como s e s' são conjugados, então $s' = ({s_1}', {s_2}', \cdots, {s_p}') \in B_k$ e existe $b = (b_1, b_2, \cdots, b_p)\sigma^t \in \mathcal{H}(n)$, tal que

$$\begin{aligned}
s^b &= \sigma^{-t}({b_1}^{-1}, {b_2}^{-1}, \cdots, {b_n}^{-1})(s_1, s_2, \cdots, s_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n)\sigma^t \\
&= \sigma^{-t}({s_1}^{b_1}, {s_2}^{b_2}, \cdots, {s_n}^{b_n})\sigma^t \\
&= ({s_{t+1}}^{b_{t+1}}, {s_{t+2}}^{b_{t+2}}, \cdots, {s_n}^{b_n}, {s_1}^{b_1}, {s_2}^{b_2}, \cdots, {s_t}^{b_t}) \\
&= ({s_1}', {s_2}', \cdots, {s_n}')
\end{aligned}$$

Segue que ${s_1}' = {s_{t+1}}^{b_{t+1}}$, ${s_2}' = {s_{t+2}}^{b_{t+2}}$, $\cdots$, ${s_{n-t}}' = {s_n}^{b_n}$, ${s_{n-(t-1)}}' = {s_1}^{b_1}$, ${s_{n-(t-2)}}' = {s_2}^{b_2}$, $\cdots$, ${s_n}' = {s_t}^{b_t}$. Por indução em k, temos que ${s_1}' = s_{t+1}$, ${s_2}' = s_{t+2}$, $\cdots$, ${s_n}' = s_t$. Assim, $s' = (s_{t+1}, s_{t+2}, \cdots, s_n, s_1, s_2, \cdots, s_t) \in B_k$ é uma permutação cíclica de s, e pela ordenação de B_k temos $s' \leq s$. Por outro lado, $s \in B_{k'}$ é também uma permutação cíclica de s', logo $s \leq s'$. Portanto $s = s'$. $\blacksquare$

Exemplo 2.2.4. Vamos exemplificar o teorema 2.2.3 para o caso $n = 3$. Observe que quando $n = 2$ temos $\mathcal{H}(2) = G(2)$ já visto no exemplo 1.4.5.

- $\mathcal{H}_{0,0}(3)$:

  $C_{-1} = e$, $C_0 = \{\sigma, \sigma^2\}$ e $\widetilde{C}_0 = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ é um conjunto completo de representantes para $\mathcal{H}_{0,0}(3)$.

- $\mathcal{H}_{0,1}(3)$:

  $B_1 = \{(e,e,\sigma),(e,\sigma,\sigma),(\sigma,\sigma,\sigma),(e,e,\sigma^2),(e,\sigma,\sigma^2),(\sigma,e,\sigma^2),(\sigma,\sigma,\sigma^2),$
  $(e,\sigma^2,\sigma^2),(\sigma,\sigma^2,\sigma^2),(\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2)\}.$
  e $\bigcup_{r=1}^{2} F_{1,\sigma^r} = F_{1,\sigma} \cup F_{1,\sigma^2}$
  onde:

  $F_{1,\sigma} = \{(e,e,\sigma)\sigma,(e,e,\sigma^2)\sigma\}$ pois temos uma $\langle\sigma\rangle$-órbita $\{1,2,3\}$, onde escolhemos o representante $y_1 = 3$; assim, a primeira e segunda coordenadas são sempre e;
  $F_{1,\sigma^2} = \{(e,e,\sigma)\sigma^2,(e,e,\sigma^2)\sigma^2\}$ pois temos uma $\langle\sigma^2\rangle$-órbita $\{1,2,3\}$, onde escolhemos o representante $y_1 = 3$; assim, a primeira e segunda coordenadas são sempre e;
  Então,

$$\begin{aligned}
C_1 =& B_1 \cup F_{1,\sigma} \cup F_{1,\sigma^2} \\
=&\{(e,e,\sigma),(e,\sigma,\sigma),(\sigma,\sigma,\sigma),(e,e,\sigma^2),(e,\sigma,\sigma^2), \\
&(\sigma,e,\sigma^2),(\sigma,\sigma,\sigma^2),(e,\sigma^2,\sigma^2),(\sigma,\sigma^2,\sigma^2),(\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2), \\
&(e,e,\sigma)\sigma,(e,e,\sigma^2)\sigma,(e,e,\sigma)\sigma^2,(e,e,\sigma^2)\sigma^2\}
\end{aligned}$$

  e $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_0 \cup C_1$ é um conjunto completo de representantes para $\mathcal{H}_{0,1}(3)$.

- $\mathcal{H}_{0,2}(3)$:

$$\begin{aligned}
B_2 =&\{(s_1,s_2,s) \mid s_1,s_2 \in \widetilde{C}_1,\ s \in C_1,\ s_1 < s,\ s_2 < s\} \\
&\cup\{(s_1,s,s) \mid s_1 \in \widetilde{C}_1,\ s \in C_1,\ s_1 \le s\}
\end{aligned}$$

  e $\bigcup_{r=1}^{2} F_{2,\sigma^r} = F_{2,\sigma} \cup F_{2,\sigma^2}$
  onde:

  $F_{2,\sigma} = \{(e,e,s)\sigma \mid s \in C_1\}$ pois temos uma $\langle\sigma\rangle$-órbita $\{1,2,3\}$, onde escolhemos o representante $y_1 = 3$; assim, a primeira e segunda coordenadas são sempre e;
  $F_{2,\sigma^2} = \{(e,e,s)\sigma^2 \mid s \in C_1\}$ pois temos uma $\langle\sigma^2\rangle$-órbita $\{1,2,3\}$, onde escolhemos o

representante $y_1 = 3$; assim, a primeira e segunda coordenadas são sempre e; Então,

$$\begin{aligned}
C_2 =& B_2 \cup F_{2,\sigma} \cup F_{2,\sigma^2} \\
=& \{(s_1, s_2, s) \mid s_1, s_2 \in \widetilde{C}_1,\ s \in C_1,\ s_1 < s,\ s_2 < s\} \\
\cup& \{(s_1, s, s) \mid s_1 \in \widetilde{C}_1,\ s \in C_1,\ s_1 \leq s\} \\
\cup& \{(e, e, s)\sigma \mid s \in C_1\} \cup \{(e, e, s)\sigma^2 \mid s \in C_1\}.
\end{aligned}$$

e $\widetilde{C}_2 = \widetilde{C}_1 \cup C_2$ é um conjunto completo de representantes para $\mathcal{H}_{0,2}(3)$.

Indutivamente, tendo listado $\widetilde{C}_k$ o conjunto de representantes para $\mathcal{H}_{0,k}(3)$ temos:

- $\mathcal{H}_{0,k+1}(3)$:

$$\begin{aligned}
B_{k+1} =& \{(s_1, s_2, s) \mid s_1, s_2 \in \widetilde{C}_k,\ s \in C_k,\ s_1 < s,\ s_2 < s\} \\
\cup& \{(s_1, s, s) \mid s_1 \in \widetilde{C}_k,\ s \in C_k,\ s_1 \leq s\}
\end{aligned}$$

e $\bigcup_{r=1}^{2} F_{k+1,\sigma^r} = F_{k+1,\sigma} \cup F_{k+1,\sigma^2}$
onde:

$F_{k+1,\sigma} = \{(e, e, s)\sigma \mid s \in C_k\}$ pois temos uma $\langle\sigma\rangle$-órbita $\{1, 2, 3\}$, onde escolhemos o representante $y_1 = 3$; assim, a primeira e segunda coordenadas são sempre e;

$F_{k+1,\sigma^2} = \{(e, e, s)\sigma^2 \mid s \in C_k\}$ pois temos uma $\langle\sigma^2\rangle$-órbita $\{1, 2, 3\}$, onde escolhemos o representante $y_1 = 3$; assim, a primeira e segunda coordenadas são sempre e; Então,

$$\begin{aligned}
C_{k+1} =& B_{k+1} \cup F_{k+1,\sigma} \cup F_{k+1,\sigma^2} \\
=& \{(s_1, s_2, s) \mid s_1, s_2 \in \widetilde{C}_k,\ s \in C_k,\ s_1 < s,\ s_2 < s\} \\
\cup& \{(s_1, s, s) \mid s_1 \in \widetilde{C}_k,\ s \in C_k,\ s_1 \leq s\} \\
\cup& \{(e, e, s)\sigma \mid s \in C_k\} \cup \{(e, e, s)\sigma^2 \mid s \in C_k\}.
\end{aligned}$$

e $\widetilde{C}_{k+1} = \widetilde{C}_k \cup C_{k+1}$ é um conjunto completo de representantes para $\mathcal{H}_{0,k+1}(3)$.

- O teorema 2.2.3 nos diz que o conjunto $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k$ é um sistema de representantes das classes de conjugação de $\mathcal{H}(3)$.

2.3 Centralizadores de elementos de ordem p em $\mathcal{H}(p)$

Nesta seção estudamos a estrutura dos centralizadores de um gerador σ_i em $\mathcal{H}(p)$ onde p é primo. Antes porém, consideramos os centralizadores de elementos individuais em um subgrupo de $\mathcal{A} = Aut(\mathcal{T}_n)$.

2.3.1 Centralizadores

Lema 2.3.1. *Sejam $G \leq Aut(\mathcal{T}_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\delta$ e $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)\lambda$ elementos arbitrários de G. Então $\beta \in C_G(\alpha)$ se, e somente se λ comuta com δ e $\beta_{\delta(j)} = \alpha_j^{-1}\beta_j\alpha_{\lambda(j)}$, $1 \leq j \leq n$.*

Demonstração. Como

$$\beta^{-1}\alpha\beta = ((\beta_{\lambda^{-1}(1)})^{-1}\alpha_{\lambda^{-1}(1)}\beta_{\lambda^{-1}(\delta(1))}, \cdots, (\beta_{\lambda^{-1}(n)})^{-1}\alpha_{\lambda^{-1}(n)}\beta_{\lambda^{-1}(\delta(n))})\delta^{\lambda},$$

segue que $\beta \in C_G(\alpha)$ se, e somente se
(i) λ comuta com δ;
(ii) $(\beta_{\lambda^{-1}(i)})^{-1}\alpha_{\lambda^{-1}(i)}\beta_{\lambda^{-1}(\delta(i))} = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$.
Fazendo $\lambda^{-1}(i) = j$, obtemos $\beta_j = \alpha_j\beta_{\delta(j)}\alpha_{\lambda(j)}^{-1}$, $1 \leq j \leq n$. ■

O próximo resultado fornece os centralizadores de alguns elementos particulares.

Corolário 2.3.2. *Sejam $G \leq Aut(\mathcal{T}_n)$, $\delta \in S_n \cap G$ e $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in G$. Então:*
(i) $C_G(\delta) = \{(\beta_1, \cdots, \beta_n)\lambda \mid \lambda$ comuta com $\delta, (\beta_1, \cdots, \beta_n)$é constante em todas as $\langle\delta\rangle -$ órbitas$\}$. Em particular, quando δ é um n-ciclo temos

$$C_G(\delta) = \{(\beta_1, \cdots, \beta_1)\lambda \mid \lambda \text{ comuta com } \delta\}.$$

(ii) $C_G(\alpha) = \{(\beta_1, \cdots, \beta_n)\lambda \mid \alpha_{\lambda(j)} = {\beta_j}^{-1}\alpha_j\beta_j,\ 1 \leq j \leq n\}$. Em particular, se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$ então $C_G(\alpha) = (C_G(\alpha_1) \times \cdots \times C_G(\alpha_1))S_n$.

Demonstração. Para o item (i), notamos do lema anterior que $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)\lambda \in C_G(\delta)$ se, e somente se, λ comuta com δ e $\beta_{\delta(j)} = \beta_j$, $1 \leq j \leq n$. A última igualdade equivale a dizer que $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ é constante em todas as $\langle\delta\rangle$-órbitas. Se δ é um n-ciclo, então temos apenas uma órbita. O item (ii) segue imediatamente do lema anterior. ■

É claro que para $G(n)$ e $\mathcal{H}(n)$ os resultados acima são válidos e possuem enunciados análogos. Para $\mathcal{H}(n)$ podemos enunciar o corolário anterior como segue.

Corolário 2.3.3. *Sejam* $\delta \in \langle\sigma\rangle$ *e* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *elementos de* $\mathcal{H}(n)$. *Então,*
(i) $C_{\mathcal{H}(n)}(\delta) = \{(\beta_1, \cdots, \beta_n)\lambda \in \mathcal{H}(n) \mid (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ *é constante em todas as* $\langle\delta\rangle-$*órbitas*$\}$. *Em particular, quando* δ *é um* n*-ciclo temos* $C_{\mathcal{H}(n)}(\delta) = \{(\beta_1, \cdots, \beta_n)\lambda \in \mathcal{H}(n) \mid \beta_1 = \cdots = \beta_n\}$.
(ii) $C_{\mathcal{H}(n)}(\alpha) = \{(\beta_1, \cdots, \beta_n)\lambda \in \mathcal{H}(n) \mid \alpha_{\lambda(j)} = {\beta_j}^{-1}\alpha_j\beta_j,\ 1 \leq j \leq n\}$. *Em particular, se* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$ *temos* $C_{\mathcal{H}(n)}(\alpha) = (C_{\mathcal{H}(n)}(\alpha_1) \times \cdots \times C_{\mathcal{H}(n)}(\alpha_1))\langle\sigma\rangle$.

2.3.2 Centralizadores de elementos de ordem p

No intuito de simplificar a notação, dado $g \in \mathcal{H}(p)$, o centralizador de g em $\mathcal{H}(p)$ será denotado simplesmente por $C(g)$.

Por razões técnicas é conveniente incluir a identidade nas classes de conjugação dos elementos de ordem p de $\mathcal{H}(p)$. As classes de conjugação dos elementos de ordem p são representadas por $e, \sigma^i, (e, \cdots, e, \sigma^i), (e, \cdots, e, \sigma^i, \sigma^j), (e, \cdots, e, \sigma^i, e, \sigma^j)$, etc. Seja $\widetilde{I}_k$ denotando o conjunto de elementos de ordem p em $\widetilde{C}_k$ e seja I_k denotando o conjunto de elementos de ordem p em C_k. Então I_{k+1} é constituído dos elementos de B_{k+1} que podem ser representados como p^t-uplas para algum inteiro $t \leq k$ e cujas entradas são e ou σ^i, $i \neq 0$. Então colocamos $\widetilde{I}_{k+1} = \widetilde{I}_k \cup I_{k+1}$.

Temos do item (i) do corolário 2.3.3 que, para $i \neq 0$, $C(\sigma^i) = \Lambda.\langle\sigma\rangle$, onde $\Lambda = \{(g, \cdots, g) \mid g \in \mathcal{H}(p)\}$ é um subgrupo isomorfo a $\mathcal{H}(p)$.

Lema 2.3.4. *Seja* $s = (s_1, s_2, \cdots, s_p)$ *um representante de uma classe de conjugação de* $\mathcal{H}(p)$. (i) *Se* $s_1 = s_2 = \cdots = s_p$, *então* $C(s) = (C(s_1) \times C(s_1) \times \cdots \times C(s_1))\langle\sigma\rangle$. (ii) *existem inteiros* k *e* j, $1 \leq k, j \leq p$, *tais que* $s_k \neq s_j$ *se, e somente se* $C(s) = C(s_1) \times C(s_2) \times \cdots \times C(s_p)$.

Demonstração. A primeira parte segue do corolário (2.3.3) (ii). Para a segunda parte, suponha que existem inteiros k e j, $1 \leq k, j \leq p$, tais que $s_k \neq s_j$. Segue do corolário 2.3.3(ii) que $C(s) = \{(\beta_1, \cdots, \beta_n)\lambda \in \mathcal{H}(p) \mid s_{\lambda(j)} = \beta_j^{-1} s_j \beta_j,\ 1 \leq j \leq n\}$. Agora observamos que $\lambda = e$ pois do contrário, $s_{\lambda(j)} = \beta_j^{-1} s_j \beta_j$ implica $s_{\lambda(j)} = s_j$ pois estes são representantes de uma classe de conjugação, e sendo λ um p-ciclo obtemos $s_1 = \cdots = s_p$ e temos uma contradição. Logo, $C(s) = C(s_1) \times C(s_2) \times \cdots \times C(s_p)$. Para a recíproca, suponha por contradição que $s_1 = s_2 = \cdots = s_p$. Segue de (i) que $(C(s_1) \times C(s_2) \times \cdots \times C(s_p))\langle\sigma\rangle = C(s) = C(s_1) \times C(s_2) \times \cdots \times C(s_p)$ o que é uma contradição. ∎

Observação 2.3.5.

- Note que o lema 2.3.4 (ii) não ocorre necessariamente para um representante s das classes de conjugação de $\mathcal{H}(n)$ quando n não é primo. Veja por exemplo, que para o representante $s = (\sigma, \sigma_1, \sigma, \sigma_1, \sigma, \sigma_1)$ de uma classe de conjugação de $\mathcal{H}(6)$, o conjunto $(C_{\mathcal{H}(6)}(\sigma) \times C_{\mathcal{H}(6)}(\sigma_1) \times C_{\mathcal{H}(6)}(\sigma) \times C_{\mathcal{H}(6)}(\sigma_1) \times C_{\mathcal{H}(6)}(\sigma) \times C_{\mathcal{H}(6)}(\sigma_1))\sigma^2 = \{(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)\sigma^2 \mid \beta_i \in C_{\mathcal{H}(6)}(\sigma), i = 1,3,5; \beta_j \in C_{\mathcal{H}(6)}(\sigma_1), j = 2,4,6\} \subset C_{\mathcal{H}(6)}(s)$.

- Dois representantes distintos de classes de conjugação de elementos de ordem p, podem ter centralizadores isomorfos.

Para um exemplo deste fato, considere os representantes $s = (e, \cdots, e, \sigma^{(1)}, \sigma_2)$ e $s' = \big(e, \cdots, e, \sigma_1, \big(e, \cdots, e, \sigma^{(1)}\big)\big)$. Segue do lema 2.3.4 que $C(s) = \underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-2} \times C(\sigma^{(1)}) \times C(\sigma_2)$ e $C(s') = \underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-2} \times C(\sigma_{(1)}) \times (\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \times C(\sigma^{(1)}))$. Novamente do lema 2.3.4 temos:

$C(\sigma^{(1)}) = (C(\sigma) \times \cdots \times C(\sigma))\langle\sigma\rangle$;

$C(\sigma_1) = \mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p) \times C(\sigma)$;

$C(\sigma_2) = \mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p) \times C(\sigma_1) = \underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \times (\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \times C(\sigma))$.

Logo,

$$\begin{aligned} C(s) = &\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-2} \times ((\underbrace{C(\sigma) \times \cdots \times C(\sigma)}_{p})\langle\sigma\rangle) \times (\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \times \\ &(\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \times C(\sigma))), \\ C(s') = &\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-2} \times (\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \times C(\sigma)) \times (\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \times \\ &(\underbrace{C(\sigma) \times \cdots \times C(\sigma)}_{p})\langle\sigma\rangle). \end{aligned}$$

Então, $C(s)$ é isomorfo a $C(s')$. Observamos ainda que o subgrupo L_s de $C(s)$, dado por

$$\begin{aligned} L_s = &\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-2} \times (\underbrace{C(\sigma) \times \cdots \times C(\sigma)}_{p}) \times (\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \\ &\times (\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{p-1} \times C(\sigma))), \end{aligned}$$

é um subgrupo normal em $C(s)$, isomorfo ao grupo $\mathcal{K} = \underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{3p-4} \times \underbrace{C(\sigma) \cdots \times C(\sigma)}_{p+1}$, onde $3p-4$ é a quantidade de vezes que o elemento e aparece em s ao desenvolvermos seus parênteses, e $p+1$ é a quantidade de vezes que o elemento σ aparece em s neste desenvolvimento. Fazendo $C(\sigma) = \Lambda.\langle\sigma\rangle$, obtemos $\mathcal{K} = \underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{3p-4} \times \underbrace{\Lambda.\langle\sigma\rangle \times \cdots \times \Lambda.\langle\sigma\rangle}_{p+1}$. Observando que $\theta : (g, \cdots, g)\sigma^i \mapsto ((g, \cdots, g), \sigma^i)$ é um isomorfismo de $\Lambda.\langle\sigma\rangle$ em $\Lambda \times \langle\sigma\rangle$, e lembrando que $\Lambda \cong \mathcal{H}(p)$, temos $\mathcal{K} \cong \underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{4p-3} \times \underbrace{\langle\sigma\rangle \times \cdots \times \langle\sigma\rangle}_{p+1}$. Segue que $C(s)$ contém o subgrupo normal L_s isomorfo a $\underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{4p-3} \times \underbrace{\langle\sigma\rangle \times \cdots \times \langle\sigma\rangle}_{p+1}$, onde $4p-3$ é a soma do número de e com o número de σ que aparecem em s ao desenvolvermos seus parênteses, e $p+1$ é o número de vezes que o elemento σ aparece em s neste desenvolvimento.

Definição 2.3.6. *Dado $s \in I_k$, definimos $n_e(s)$ como o número de vezes que o elemento neutro e aparece em s ao desenvolvermos seus parênteses, e similarmente, definimos $n_\sigma(s)$ como o número de vezes que elementos da forma σ^i, $i \neq 0$, aparece neste desenvolvimento.*

Lema 2.3.7. *Seja $s \in I_k$.*

(i) C(s) contém um subgrupo normal L_s que é isomorfo a um produto direto de $n_e(s)$

cópias de $\mathcal{H}(p)$, e $n_\sigma(s)$ cópias de $C(\sigma)$. Além disso, L_s é isomorfo a um produto direto $M_s \times N_s$, onde M_s é um produto direto de $n_\sigma(s)$ cópias de $\langle\sigma\rangle$, e N_s é um produto direto de $n_e(s) + n_\sigma(s)$ cópias de $\mathcal{H}(p)$.
(ii)Indicando os subgrupos de $C(s)$ correspondentes a N_s e M_s pelos mesmos símbolos, temos que M_s é o subgrupo normal abeliano maximal de $C(s)$.

Demonstração. (i) O subgrupo L_s é construído da seguinte forma: $L(s) = C(s)$ se $C(s)$ não possui componente da forma $(C(s') \times \cdots \times C(s'))\langle\sigma\rangle$. Caso contrário, $L(s)$ é obtido de $C(s)$ trocando $\langle\sigma\rangle$ por e em cada componente da forma $(C(s') \times \cdots \times C(s'))\langle\sigma\rangle$ que aparece em $C(s)$, e conservando as demais. Assim, L_s possui o mesmo número de componentes que $C(s)$. O subgrupo $L(s)$ é normal em $C(s)$, pois podemos olhar $C(s)$ como um produto direto de suas componentes. Assim, dado $g \in C(s)\backslash L(s)$, temos da definição de $L(s)$, que existe uma coordenada g_i de g onde, para algum $\alpha \in C(\beta)$, $g_i = (\alpha, \cdots, \alpha)\sigma^j,\ j \neq 0$ e a componente correspondente em $L(s)$ é $(C(\beta) \times \cdots \times C(\beta))$, β um representante de ordem p. Como $g^{-1}L(s)g$ é desenvolvido coordenada a coordenada e ${g_i}^{-1}(C(\beta) \times \cdots \times C(\beta))g_i = (C(\beta) \times \cdots \times C(\beta))$, temos que $g^{-1}L(s)g = L_s$.

Desenvolvendo os parênteses de s, podemos escrevê-lo como uma p^t-upla $(a_1, \cdots, a_{p^t})$, para algum inteiro t, onde $a_i \in \{e, \sigma^j\}$. Segue da definição de $L(s)$ que $L(s) = C(a_1) \times \cdots \times C(a_{p^t})$, onde $C(a_i) = \mathcal{H}(p)$ para $a_i = e$, e $C(a_i) = \Lambda.\langle\sigma\rangle$ para $a_i = \sigma^j,\ j \neq 0$. Logo, em $L(s)$ temos $n_e(s)$ cópias de $\mathcal{H}(p)$ e $n_\sigma(s)$ cópias de $\Lambda.\langle\sigma\rangle$. Portanto,

$$L(s) \cong \underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{n_e(s)} \times \underbrace{\Lambda.\langle\sigma\rangle \times \cdots \times \Lambda.\langle\sigma\rangle}_{n_\sigma(s)}.$$

Usando que $\Lambda.\langle\sigma\rangle \cong \Lambda \times \langle\sigma\rangle$ e $\Lambda \cong \mathcal{H}(p)$, temos que L_s é isomorfo ao produto direto $M_s \times N_s$ onde $M_s = \underbrace{\langle\sigma\rangle \times \cdots \times \langle\sigma\rangle}_{n_\sigma(s)}$ e $N_s = \underbrace{\mathcal{H}(p) \times \cdots \times \mathcal{H}(p)}_{n_e(s)+n_\sigma(s)}$.

(ii) Notamos que M_s é o centralizador de N_s em $C(s)$, e portanto é o subgrupo normal abeliano maximal de $C(s)$. ∎

Segue do lema 2.3.7 (ii) que M_s é invariante por automorfismos de $C(s)$ e portanto, é um subgrupo característico de $C(s)$.

Lema 2.3.8. *Sejam s e s' representantes de classes de conjugação de elementos de ordem p em $\mathcal{H}(p)$, tendo centralizadores isomorfos. Então $n_e(s) = n_e(s')$ e $n_\sigma(s) = n_\sigma(s')$*

Demonstração. Como M_s e $M_{s'}$ são subgrupos característicos de $C(s)$ e $C(s')$ respectivamente, e $C(s) \cong C(s')$ temos que $M(s) \cong M(s')$. Consequentemente $n_\sigma(s) = n_\sigma(s')$. Agora, como $\frac{L(s)}{M_s} \cong \frac{L_{s'}}{M_{s'}}$ temos $N_s \cong N_{s'}$. Segue do teorema 1.3.1 (Krull-Schmidt) que o número de cópias de $\mathcal{H}(p)$ em N_s é igual ao número de cópias de $\mathcal{H}(p)$ em $N_{s'}$. Pelo lema 2.3.7 (i) temos $n_e(s)+n_\sigma(s) = n_e(s')+n_\sigma(s')$ e como $n_\sigma(s) = n_\sigma(s')$ temos $n_e(s) = n_e(s')$. ■

Teorema 2.3.9. *(i) Seja s um representante de uma classe de conjugação de um elemento de ordem p tal que $C(s) \cong C(\sigma_i)$ para algum i. Então $s = \sigma_i$.*
(ii) Um automorfismo de $\mathcal{H}(p)$ aplica cada σ_i a um conjugado $\sigma_i^{g_i}$ para algum $g_i \in \mathcal{H}(p)$.

Demonstração. Como $C(s) \cong C(\sigma_i)$ e σ_i é um representante de um elemento de ordem p em $\mathcal{H}(p)$, segue do lema 2.3.8 que $n_e(s) = n_e(\sigma_i) = i(p-1)$ e $n_\sigma(s) = n_\sigma(\sigma_i) = 1$. Então, pela escolha dos representantes, s possui a maior coordenada mais à direita, e a primeira afirmação que $s = \sigma_i$ segue. Para a segunda afirmação, um automorfismo ψ de $\mathcal{H}(p)$ aplica $C(\sigma_i)$ em um subgrupo isomorfo $C(\sigma_i)^\psi = C(k)$, onde $k = {\sigma_i}^\psi$. Seja s o representante de uma classe de conjugação de k, então $s = k^g$, para algum $g \in \mathcal{H}(p)$. Seja $\beta_g : \mathcal{H}(p) \longrightarrow \mathcal{H}(p)$, $\alpha \mapsto \alpha^g$. Temos que $C(k)^{\beta_g} = C(r)$ onde $r = k^{\beta_g} = k^g = s$. Assim, $C(\sigma_i) \cong C(k) \cong C(r) = C(s)$. Logo, $C(\sigma_i) \cong C(s)$ e pela parte (i), temos $\sigma_i = s = k^g$, ou ainda $k = {\sigma_i}^{g^{-1}}$ e portanto, ${\sigma_i}^\psi = {\sigma_i}^{g^{-1}}$. ■

Capítulo 3

Endomorfismos Induzidos por $\mathcal{A}$-conjugação

3.1 Endomorfismos de $G(n)$ induzidos por $\mathcal{A}$-conjugação

No intuito de obtermos maior clareza na linguagem, neste capítulo o grupo $\mathcal{A}$ dos automorfismos de $\mathcal{T}_n$ será denominado grupo de isometrias.

Sejam $G(n)$ o grupo finitário das isometrias da árvore n-ária $\mathcal{T}_n$, $End_{\mathcal{A}}(G(n)) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha^{-1}G(n)\alpha \leq G(n)\}$ o conjunto dos endomorfismos de $G(n)$ induzidos por $\mathcal{A}$-conjugação e $N_{\mathcal{A}}(G(n)) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha^{-1}G(n)\alpha = G(n)\}$ o grupo de endomorfismos que normalizam $G(n)$.

Dado um grupo K gerado por um conjunto ordenado $\{z_0, z_1, \cdots\}$, para cada inteiro positivo n, seja K_n denotando $\langle z_n, z_{n+1}, \cdots\rangle$. Definimos um *endomorfismo rígido* ζ de K como um endomorfismo tal que $\zeta(z_i) = {z_i}^{k_i}$ para algum $k_i \in K$. Notamos que o conjunto de endomorfismos rígidos de K é um semigrupo. Se acrescentarmos que $k_i \in K_i$ para cada $i = 0, 1, \cdots$, então dizemos que ζ é um *endomorfismo positivo*. Note também que o conjunto de endomorfismos positivos de K forma um subsemigrupo dos endomorfismos rígidos. Daremos agora uma forma específica aos elementos de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Proposição 3.1.1. *Dado $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$, existe uma sequência $\{g_i\}_{i\geq 0}$ de elementos de $G(n)$ tais que $\alpha = \cdots {g_2}^{(2)}{g_1}^{(1)}g_0$. Reciprocamente, dado uma sequência $\{g_i\}_{i\geq 0}$ de* *elementos de* $G(n)$*,* $\alpha = \cdots g_2{}^{(2)} g_1{}^{(1)} g_0$ *é um endomorfismo rígido de* $G(n)$ *com relação ao conjunto gerador* $\{\sigma_i, \gamma_i \mid i \geq 0\}$*, onde* $\sigma = (n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)$ *e* $\gamma = (1\ 2)$ *.*

Demonstração. Seja $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ tendo o desenvolvimento $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\delta$. Então $\alpha^{-1}\sigma\alpha = \delta^{-1}(\alpha_1{}^{-1}\alpha_n, \alpha_2{}^{-1}\alpha_1, \alpha_3{}^{-1}\alpha_2, \cdots, \alpha_n{}^{-1}\alpha_{n-1})\sigma\delta$ é um elemento de $G(n)$, somente se os elementos $h_1 = \alpha_1{}^{-1}\alpha_n,\ h_2 = \alpha_2{}^{-1}\alpha_1,\ h_3 = \alpha_3{}^{-1}\alpha_2,\ \cdots\ h_n = \alpha_n{}^{-1}\alpha_{n-1}$ estão em $G(n)$. Então $\alpha_n = \alpha_1 h_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 h_2$, $\cdots$, $\alpha_{n-1} = \alpha_n h_n$. Logo,

$$\alpha_2 = \alpha_3 h_3 = \alpha_4 h_4 h_3 = \alpha_5 h_5 h_4 h_3 = \cdots = \alpha_n h_n \cdots h_5 h_4 h_3 = \alpha_1 h_1 h_n \cdots h_5 h_4 h_3$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 h_4 = \alpha_5 h_5 h_4 = \alpha_6 h_6 h_5 h_4 = \cdots = \alpha_n h_n \cdots h_6 h_5 h_4 = \alpha_1 h_1 h_n \cdots h_6 h_5 h_4$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n-2} = \alpha_{n-1} h_{n-1} = \alpha_n h_n h_{n-1} = \alpha_1 h_1 h_n h_{n-1}$$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n h_n = \alpha_1 h_1 h_n$$

$$\alpha_n = \alpha_1 h_1$$

Então, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_1)(e, h_1 h_n \cdots h_4 h_3, h_1 h_n \cdots h_5 h_4, \cdots, h_1 h_n, h_1)\delta$. Fazendo $g_0 = (e, h_1 h_n \cdots h_4 h_3, h_1 h_n \cdots h_5 h_4, \cdots, h_1 h_n, h_1)\delta$ e $\beta_1{}^{(1)} = \alpha_1{}^{(1)}$ obtemos $\alpha = \beta_1^{(1)} g_0$. Como $\alpha^{-1}\sigma_1\alpha = g_0{}^{-1}(\beta_1{}^{-1}, \cdots, \beta_1{}^{-1})(e, \cdots, e, \sigma)(\beta_1, \cdots, \beta_1)g_0 \in G(n)$ temos que $\beta_1{}^{-1}\sigma\beta_1 \in G(n)$. Isto implica similarmente (trocando α por β_1) que $\alpha_1 = \beta_2{}^{(1)} g_1$, para algum $g_1 \in G(n)$. E portanto, $\alpha = \beta_1{}^{(1)} g_0 = (\beta_2{}^{(1)} g_1)^{(1)} g_0 = \beta_2{}^{(2)} g_1{}^{(1)} g_0$. Calculando $\alpha^{-1}\sigma_2\alpha$, $\cdots$, $\alpha^{-1}\sigma_r\alpha$, $r \geq 0$, obtemos $\alpha = \beta_{r+1}{}^{(r+1)} g_r{}^{(r)} \cdots g_2{}^{(2)} g_1{}^{(1)} g_0$. Contudo, um automorfismo $\beta_{r+1}{}^{(r+1)}$ age como o automorfismo identidade na árvore $\mathcal{T}_n$ até o $(r+1)$-ésimo nível. Como $\mathcal{A}$ é o limite inverso dos quocientes $\frac{G(n)}{St_{G(n)}(r)}$ (veja obs.1.2.5), temos que $\alpha = \cdots g_2{}^{(2)} g_1{}^{(1)} g_0$.

Reciprocamente, dado $\{g_i\}_{i \geq 0}$ em $G(n)$, $\alpha = \cdots g_2{}^{(2)} g_1{}^{(1)} g_0$ é um elemento bem definido de $\mathcal{A}$ e $\alpha = (\cdots g_2{}^{(1)} g_1)^{(1)} g_0 = (\cdots g_3{}^{(1)} g_2)^{(2)} g_1{}^{(1)} g_0 = \cdots$ (veja obs.1.2.5), então para um gerador λ_i de $G(n)$ temos

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\lambda_i\alpha &= \left[(\cdots g_{i+2}{}^{(1)} g_{i+1})^{(i+1)} g_i{}^{(i)} \cdots g_1{}^{(1)} g_0\right]^{-1} \lambda_i (\cdots g_{i+2}{}^{(1)} g_{i+1})^{(i+1)} g_i{}^{(i)} \cdots g_1{}^{(1)} g_0 \\
&= (g_i{}^{(i)} \cdots g_1{}^{(1)} g_0)^{-1} \lambda_i (g_i{}^{(i)} \cdots g_1{}^{(1)} g_0) \\
&= k_i^{-1} \lambda_i k_i
\end{aligned}$$

onde $k_i = g_i{}^{(i)} \cdots g_1{}^{(1)} g_0 \in G(n)$. ∎

Proposição 3.1.2. *Seja $\mu \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Então $\mu \in \mathcal{F}_n$ o grupo das isometrias de $\mathcal{T}_n$ com um número finito de estados se, e somente se, existe um número natural m e $g \in G(n)$ tais que $\mu = \mu^{(m)}g$.*

Demonstração. Suponha que $\mu \in \mathcal{F}_n$. Denote μ por μ_0. Da demonstração da proposição 3.1.1 existem $\mu_j \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$, $g_j = (e, g_{j2}, \cdots, g_{jn})\delta_j \in G(n)$ tais que para $j \geq 0$, $\mu_j = \mu_{j+1}^{(1)}g_j$. Temos que μ_j é um estado de μ, $\forall j \geq 0$. Substituindo a expressão para μ_1 em μ_0, obtemos $\mu_0 = \mu_2^{(2)}h_2$, para algum $h_2 \in G(n)$. Sucessivas substituições produzem $\mu_0 = \mu_j^{(j)}h_j$, para algum $h_j \in G(n)$. Mais geral, para $m = j + k$, $k > 0$, temos $\mu_j = \mu_{j+1}^{(1)}g_j = \mu_{j+2}^{(2)}g_{j+1}^{(1)}g_j = \cdots = \mu_{j+k}^{(k)}g_{j+(k-1)}^{(k-1)}\cdots g_{j+1}^{(1)}g_j = \mu_{j+k}^{(k)}.h = \mu_m^{(m-j)}.h$, onde $h = g_{j+(k-1)}^{(k-1)}\cdots g_{j+1}^{(1)}g_j \in G(n)$.

Como $Q(\mu)$ é finito, então o conjunto $\{\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots\}$ é finito e portanto existem inteiros m, j tais que $m > j$ e $\mu_m = \mu_j$. Considerando que $\mu_j = \mu_m^{(m-j)}h$, obtemos $\mu_m = \mu_m^{(m-j)}h$, do qual segue que $\mu_m^{(j)} = \mu_m^{(m)}h^{(j)}$. Como $\mu_m^{(m)} = \mu_0 h_m^{-1}$ concluímos que $\mu_m^{(j)} = \mu_0 h_m^{-1}h^{(j)}$, e $\mu_0 = \mu_m^{(j)}(h^{-1})^{(j)}h_m$. Portanto,

$$\mu_0^{(m-j)} = \mu_m^{(m)}(h^{-1})^{(m)}h_m^{(m-j)} = \mu_0 h_m^{-1}(h^{-1})^{(m)}h_m^{(m-j)},$$

implica

$$\mu_0 = \mu_0^{(m-j)}(h_m^{-1})^{(m-j)}h^{(m)}h_m = \mu_0^{(m-j)}k,\ k = (h_m^{-1})^{(m-j)}h^{(m)}h_m \in G(n).$$

Reciprocamente, sejam $\mu = \mu^{(m)}g$, para algum $m \geq 1$, e $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)\delta$. Então $\mu = (\mu^{(m-1)}, \cdots, \mu^{(m-1)})(g_1, g_2, \cdots, g_n)\delta \in G(n)$, do qual deduzimos que

$$Q(\mu) = \{\mu\} \cup Q(\mu^{(m-1)}g_1) \cup \cdots \cup Q(\mu^{(m-1)}g_n).$$

Portanto, podemos assumir $m = 1$; então

$$Q(\mu) = \{\mu\} \cup Q(\mu g_1) \cup \cdots \cup Q(\mu g_n).$$

Agora seja $gg_1 = (h_1, \cdots, h_n)\lambda$. Então, $h_1, \cdots, h_n$ são elementos do grupo finito gerado por $Q(g)$ e $\mu g_1 = \mu^{(1)}gg_1 = (\mu h_1, \cdots, \mu h_n)\lambda$. Portanto, $Q(\mu g_1) = \{\mu g_1\} \cup Q(\mu h_1) \cup$

$\cdots \cup Q(\mu h_n)$. Repetimos o argumento acima para h_1 no lugar de g_1 e obtemos $gh_1 = (h'_1, h'_2, \cdots h'_n)\lambda'$ onde $h'_i \in \langle Q(g) \rangle$ e também

$$Q(\mu h_1) = \{\mu h_1\} \cup Q(\mu h'_1) \cup \cdots \cup Q(\mu h'_n).$$

Logo, $Q(\mu) \subseteqq \{\mu\}.\langle Q(g) \rangle$, que é um conjunto finito.

Notamos que, se ao invés de tomarmos $m = 1$, escolhermos m arbitrário, teremos: $Q(\mu) \subseteqq \{\mu, \mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(m-1)}\}\langle Q(g) \rangle$. ∎

A seguir apresentamos as versões das proposições 3.1.1 e 3.1.2 para o grupo $\mathcal{H}(n)$.

Proposição 3.1.3. *Dado $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$, existe uma sequência $\{g_i\}_{i \geq 0}$ de elementos de $\mathcal{H}(n)$ tais que $\alpha = \cdots {g_2}^{(2)} {g_1}^{(1)} g_0$. Reciprocamente, dado uma sequência $\{g_i\}_{i \geq 0}$ de elementos de $\mathcal{H}(n)$, $\alpha = \cdots {g_2}^{(2)} {g_1}^{(1)} g_0$ é um endomorfismo rígido de $\mathcal{H}(n)$ com relação ao conjunto gerador $\{\sigma_i, \mid i \geq 0\}$, onde $\sigma = (n \ n-1 \ \cdots \ 2 \ 1)$.*

Demonstração. Análoga a demonstração da proposição 3.1.1. ∎

Corolário 3.1.4. *Seja $\overline{\mathcal{H}(n)}$ o fecho de $\mathcal{H}(n)$ sobre produtos infinitos bem definidos. Então,*

$$End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n)) = End_{\overline{\mathcal{H}(n)}}(\mathcal{H}(n)) \ \text{ e } \ N_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n)) = N_{\overline{\mathcal{H}(n)}}(\mathcal{H}(n)).$$

Demonstração. Dado $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$ temos da proposição 3.1.3 que $\alpha = \cdots {g_2}^{(2)} {g_1}^{(1)} g_0$, $g_i \in \mathcal{H}(n)$. Portanto, $\alpha \in \overline{\mathcal{H}(n)}$. A outra inclusão é imediata. ∎

Proposição 3.1.5. *Seja $\mu \in End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$. Então $\mu \in \mathcal{F}_n$ o grupo das isometrias de $\mathcal{T}_n$ com um número finito de estados se, e somente se, existe um número natural m e $g \in \mathcal{H}(n)$ tais que $\mu = \mu^{(m)} g$.*

Demonstração. Veja proposição 3.1.2. ∎

Defina $D(n)$ como o subgrupo de $\mathcal{H}(n)$ gerado por $\{\sigma^{(j)} | j \geq 0\}$ e seja $\overline{D}(n)$ o grupo consistindo de produtos infinito bem definidos de elementos de $D(n)$.

Lema 3.1.6. *Se $r \geq s$ então $\sigma_s^{\sigma^{(r)}} = \sigma_s$. Se $r < s$ então $\sigma_s^{\sigma^{(r)}} = \sigma_s^{\sigma_r}$.*

Demonstração. Notamos que

$$\begin{aligned}\sigma_s^{\sigma^{(r)}} &= (e, \cdots, e, \sigma_{s-1})^{\sigma^{(r)}} = ((\sigma^{-1})^{(r-1)}, \cdots, (\sigma^{-1})^{(r-1)})(e, \cdots, e, \sigma_{s-1})(\sigma^{(r-1)}, \cdots, \sigma^{(r-1)}) \\ &= (e, \cdots, e, \sigma_{s-1}^{\sigma^{(r-1)}}) = (e, \cdots, e, (e, \cdots, e, \sigma_{s-2}^{\sigma^{(r-2)}})). \qquad (3.1.1)\end{aligned}$$

Assim, se $r \geq s$ então

$$\sigma_s^{\sigma^{(r)}} = (e, \cdots, e, (\cdots (e, \cdots, e, \sigma^{\sigma^{(r-s)}}) \cdots)) = \sigma_s.$$

Se $r < s$ então pelo visto na equação 3.1.1 temos

$$\sigma_s^{\sigma^{(r)}} = (e, \cdots, e, (\cdots (e, \cdots, e, \sigma_{s-r}^{\sigma}) \cdots)) = (e, \cdots, e, (\cdots (e, \cdots, e, \sigma_{s-r}) \cdots))^{\sigma_r} = \sigma_s^{\sigma_r}. \quad \blacksquare$$

Lema 3.1.7. *$\overline{D}(n)$ é um subgrupo abeliano de $N_{\mathcal{A}}(G(n))$ isomorfo ao produto direto irrestrito $C_n \times C_n \times \cdots$ de grupos cíclicos C_n. Em particular para $n = p$ um número primo, temos que $\overline{D}(p)$ é um p-subgrupo abeliano elementar de $N_{\mathcal{A}}(G(p))$ livremente gerado por $\{\sigma^{(j)} | j \geq 0\}$.*

Demonstração. Do lema 3.1.6 segue que $D(n)$ é abeliano, pois se $r > s$ então $\sigma^{(r)}\sigma^{(s)} = (\sigma^{(r-s)}\sigma)^{(s)} = (\sigma\sigma^{(r-s)})^{(s)} = \sigma^{(s)}\sigma^{(r)}$. Além disso $\overline{D}$(n) consiste dos elemento $\delta = \cdots (\sigma^{i_2})^{(2)}(\sigma^{i_1})^{(1)}\sigma^{i_0}$ onde cada $i_j \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. Portanto, $\overline{D}(n)$ é isomorfo a $C_n \times C_n \times \cdots$. Agora a proposição 3.1.1 garante que $\delta \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Como $\delta^{-1} = \cdots (\sigma^{-i_2})^{(2)}(\sigma^{-i_1})^{(1)}\sigma^{-i_0}$ pois os fatores comutam, temos novamente da proposição 3.1.1 que $\delta^{-1} \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Portanto temos $\delta^{-1}G(n)\delta = G(n)$. $\blacksquare$

3.1.1 Grupos Fracamente Ramificados e Saturados

Definição 3.1.8. *Seja $G \leq Aut(\mathcal{T}_n)$ um grupo de isometrias de $\mathcal{T}_n$.*

(i) Seja v um vértice de $\mathcal{T}_n$. O conjunto de isometrias $g \in G_v$ que fixa todos os vértices

fora da subárvore $v\mathcal{T}_n$ é chamado ***grupo vértice*** *(ou* ***estabilizador rígido de um vértice****) e é denotado por $G[v]$.*

(ii) O grupo gerado pelo conjunto $\bigcup_{v \in Y^m} G[v]$ é chamado ***estabilizador rígido do** m**-ésimo nível*** *e é denotado por $RiSt_G(m)$.*

Os termos *estabilizador rígido* e *grupo vértice* pertencem a [15]. Claramente temos $RiSt_G(m) \leq St_G(m)$.

Proposição 3.1.9. *Seja G um grupo de isometrias de $\mathcal{T}_n$.*

(i) Para todo $v \in M$ e g pertencente ao normalizador de G em $Aut(\mathcal{T}_n)$, temos $G[v]^g = G[(v)g]$. Portanto, o estabilizador $RiSt_G(m)$ é um subgrupo normal de G.

(ii) Se G é nível-transitivo então todos os grupos vértices de um nível fixado são conjugados.

(iii) Se uma palavra v é o prefixo de uma palavra $u \in M$, $u = vx$ para algum $x \in M$, então $G[u] \leq G[v]$.

(iv) Se as palavras v, $u \in M$ são tais que nenhuma delas é o prefixo da outra, então $G[v] \cap G[u] = e$, $[G[v], G[u]] = 1$ e o estabilizador $RiSt_G(m)$ é o produto direto $\times_{v \in Y^m} G[v]$.

Demonstração. (i) Dado $\alpha \in G[v]$, seja u um vértice de $\mathcal{T}_n$ tal que $u \notin (v)g\mathcal{T}_n$. Então temos $(u)g^{-1} \notin v\mathcal{T}_n$ que implica $(u)g^{-1}\alpha g = ((u)g^{-1})\alpha g = u$. Portanto, $G[v]^g$ fixa os vértices fora de $(v)g\mathcal{T}_n$, isto é, $G[v]^g \leq G[(v)g]$. Reciprocamente, dado $\beta \in G[(v)g]$, seja u um vértice de $\mathcal{T}_n$ tal que $u \notin v\mathcal{T}_n$. Então temos $(u)g \notin (v)g\mathcal{T}_n$ que implica $(u)g\beta g^{-1} = ((u)g)\beta g^{-1} = u$. Portanto, $g\beta g^{-1} = \alpha \in G[v]$, o que implica $\beta = g^{-1}\alpha g \in G[v]^g$. Segue que $G[(v)g] \leq G[v]^g$.

(ii) Dados u e v em um nível Y^m, existe $g \in G$ tal que $(v)g = u$. Segue de (i) que $g^{-1}G[v]g = G[(v)g] = G[u]$.

(iii) Decorre imediatamente da definição de $G[v]$.

(iv) Como u e v não são prefixos um do outro as subárvores $u\mathcal{T}_n$ e $v\mathcal{T}_n$ são disjuntas e portanto os grupos vértices $G[u]$ e $G[v]$ têm interseção trivial e comutam. Segue que os grupos vértices de um nível m fixado são disjuntos e comutam, então o estabilizador rígido $RiSt_G(m)$ é um produto direto $\times_{v \in Y^m} G[v]$. ∎

Corolário 3.1.10. *Seja G um grupo de isometrias nível-transitivo de $\mathcal{T}_n$. Então apenas um dos seguintes dois casos ocorre:*
(a) A menos de um número finito, todos os estabilizadores rígidos $RiSt_G(m)$ são triviais.
(b) Todos os estabilizadores rígidos $G[v]$ e $RiSt_G(m)$ são infinitos.

Demonstração. De fato temos apenas duas possibilidades para G:
(a) Existe apenas uma quantidade finita de grupos vértices $G[v]$ não triviais. Então, a partir de um certo nível Y^m, todos os $RiSt_G(m+k),\ k \geq 0$ são triviais.
(b) Existe uma quantidade infinita de grupos vértices $G[v]$ não triviais. Se um grupo vértice $G[v]$ é não trivial, então todos os grupos vértices $G[u]$, onde u é prefixo de v, são não triviais. Como G tem uma quantidade infinita de grupos vértices não triviais então ele tem um grupo vértice não trivial em todo nível. Da proposição 3.1.9(ii) todos os grupos vértices de um nível são conjugados. Assim, todos os grupos vértices são não triviais e infinitos. Segue que todos os rígidos estabilizadores $RiSt_G(m)$ são infinitos. ■

Definição 3.1.11. *Seja G um grupo de isometrias nível-transitivo de $\mathcal{T}_n$. Se todos os estabilizadores rígidos $RiSt_G(k)$ são infinitos (equivalentemente, não triviais), então dizemos que G é* ***fracamente ramificado*** *(weakly branch).*

Um grupo de isometrias nível-transitivo G é dito ser ***ramificado*** (*branch*) se $RiSt_G(m)$ tem índice finito em G para todo m (veja [10, 14, 15]). Os grupos ramificados são fracamente ramificados.

Lema 3.1.12. *Seja $G \leq Aut(\mathcal{T}_n)$. (i) Se G contém um subgrupo T fracamente ramificado, então G é fracamente ramificado. (ii) Se G é estratificado então G é fracamente ramificado.*

Demonstração. (i) O grupo G é nível transitivo pois T o é. Como $RiSt_T(j) \neq \{e\}$ então também $RiSt_G(j) \neq \{e\}$, $\forall\, j \geq 0$. (ii) Sendo G estratificado, ele é é nível-transitivo e para cada vértice v, seu grupo vértice é não trivial. Segue da proposição 3.1.9(iv) que $RiSt_G(j) \neq \{e\}$, $\forall j \geq 0$. ■

Segue do lema anterior que dado K um subgrupo transitivo de S_n então $\mathcal{K}(n) = \langle K_i \mid i \geq 0\rangle$ é fracamente ramificado. Em particular $Aut(\mathcal{T}_n)$, $G(n)$, $\mathcal{H}(n)$ e $\overline{\mathcal{H}(n)}$ o fecho de $\mathcal{H}(n)$ sobre seus produtos infinito bem definidos, são grupos fracamente ramificados. Para mais exemplos veja [16].

Definição 3.1.13. *Um grupo $G \leq Aut(\mathcal{T}_n)$ é denominado **saturado** se para todo inteiro positivo j existe um subgrupo $K_j \leq St_G(j)$ característico em G e nível-transitivo em toda subárvore do j-ésimo nível.*

Em [14], L. Bartholdi e S. Sidki mostraram que os grupos $G(n)$ e $Aut(\mathcal{T}_n)$ são saturados. Vamos mostrar que um grupo estratificado é necessariamente saturado. Para isto, utilizaremos um conhecido resultado sobre produto entrelaçado que exibe uma forma de rigidez deste produto, veja [20, 21, 23].

Teorema 3.1.14. *Se A e B são grupos não triviais com B agindo em um conjunto Y, então o grupo base A^Y é característico no produto entrelaçado Awr_YB, a menos que A seja um grupo cíclico de ordem 2 e B tenha um subgrupo abeliano B_0 de índice 2 contendo raiz quadrada única de todos os seus elementos.*

Proposição 3.1.15. *Seja $L \leq Aut(\mathcal{T}_n)$ um grupo estratificado, então L é saturado.*

Demonstração. Escrevemos $L = Lwr_YK$, K subgrupo transitivo de S_n (lema 1.2.7). Escolha $y \in Y$ e escreva $L = RiSt_L(y)wr_YK$; então escolhemos $H_1 = L^Y$, o grupo base de L. Como L é estratificado segue que H_1 é nível-transitivo em cada subárvore do primeiro nível. O teorema 3.1.14 nos diz que H_1 é característico em L. Indutivamente, seja A uma cópia de H_{n-1} dentro de $RiSt_L(y) = y * L$; então H_n pode ser escolhido como A^Y característico em L^Y que é característico em L. ■

A recíproca da proposição anterior é falsa. O 3-grupo de Gupta-Sidki $\mathcal{G} = \langle \gamma, \sigma\rangle$ onde $\gamma = (\sigma, \sigma^{-1}, \gamma)$ e $\sigma = (1, 2, 3)$ é um exemplo de um grupo saturado (veja [16]), que apesar de ser nível-transitivo, não é estratificado, já que $\alpha = (\sigma, \sigma, \sigma) \notin \mathcal{G}$. Na verdade, um grupo estratificado não pode ser finitamente gerado (ao aumentar o nível, o grupo finito precisa de mais geradores que o anterior).

Em [16], Y. Lavreniuk e V. Nekrashevych mostraram o seguinte resultado.

Teorema 3.1.16. *Seja G um grupo saturado e fracamente ramificado. Então $Aut(G) \cong N_{\mathcal{A}}(G)$.*

Temos portanto o seguinte corolário.

Corolário 3.1.17. *Seja $L \leq Aut(\mathcal{T}_n)$ um grupo estratificado. Então $Aut(L) \cong N_{\mathcal{A}}(L)$. Em particular, dado K um subgrupo transitivo de S_n e $\mathcal{K}(n) = \langle K_i \mid i \geq 0 \rangle$ temos que $Aut(\mathcal{K}(n)) = N_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}(n))$.*

Demonstração. A proposição 3.1.15 e o lema 3.1.12 (ii) implicam que L é saturado e fracamente ramificado. Agora o teorema anterior conclui. ■

3.2 Um subsemigrupo de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$

A construção do produto entrelaçado para $\mathcal{H}(n) = \langle \sigma_0, \sigma_1, \cdots \rangle$ equivale a afirmação de que para cada $i = 1, 2, \cdots$ os subgrupos $\mathcal{H}_{i,\infty}(n)$, $\mathcal{H}_{i,\infty}(n)^{\sigma_{i-1}}$, $\mathcal{H}_{i,\infty}(n)^{\sigma_{i-1}^2}$, $\mathcal{H}_{i,\infty}(n)^{\sigma_{i-1}^3}$, $\cdots$, $\mathcal{H}_{i,\infty}(n)^{\sigma_{i-1}^{n-1}}$ geram o produto direto deles em $\mathcal{H}(n)$ (veja capítulo 2, seção 2.1). Baseado nesta observação podemos derivar a seguinte apresentação de $\mathcal{H}(n)$

$$\mathcal{H}(n) = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots | \sigma^n = e, [\sigma_{k+i}^{\sigma_i}, \sigma_{j+i}] = 1, [\sigma_{k+i}^{\sigma_i{}^2}, \sigma_{j+i}] = 1, \cdots, [\sigma_{k+i}^{\sigma_i{}^{n-1}}, \sigma_{j+i}] = 1,$$
$$k \geq j \geq 1, \; i = 0, 1, 2, \cdots \rangle$$

Seja $\omega \in \mathcal{H}(n)$ e suponha que na expressão reduzida para ω, σ_l é o gerador envolvido cujo l é mínimo. Então podemos escrever

$$\omega = u_0 \sigma_l^{\varepsilon_1} u_1 \sigma_l^{\varepsilon_2} u_2 \cdots u_{r-1} \sigma_l^{\varepsilon_r} u_r$$

onde $u_0, \cdots, u_r \in \mathcal{H}_{l+1,\infty}(n)$ e $1 \leq \varepsilon_i \leq n-1$, $1 \leq i \leq r$. Noentanto, se $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} = n + \varepsilon$, para algum $j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ e $0 \leq \varepsilon \leq n-1$ podemos reescrever

$$\sigma_l^{\varepsilon_j} u_j \sigma_l^{\varepsilon_{j+1}} u_{j+1} \sigma_l^{\varepsilon_{j+2}} = \sigma_l{}^{\varepsilon} \left(\sigma_l^{\varepsilon_j - \varepsilon} u_j \sigma_l^{\varepsilon_{j+1}} \right) u_{j+1} \sigma_l^{\varepsilon_{j+2}} = \sigma_l{}^{\varepsilon} u_{j+1} \left(\sigma_l^{\varepsilon_j - \varepsilon} u_j \sigma_l^{\varepsilon_{j+1}} \right) \sigma_l^{\varepsilon_{j+2}}$$
$$= \sigma_l{}^{\varepsilon} u_{j+1} \sigma_l^{\varepsilon_j - \varepsilon} u_j \sigma_l^{\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_{j+2}}.$$

Desta maneira, o elemento ω pode ser reescrito na forma

$$(I)\ v_0 \sigma_l^{\delta_1} v_1 \sigma_l^{\delta_2} v_2 \cdots \sigma_l^{\delta_{s-1}} v_{s-1} \sigma_l^{\delta_s} v_s$$

onde $v_0, \cdots, v_s \in \mathcal{H}_{l+1,\infty}(n)$; $1 \leq \delta_i \leq n-1$, $1 \leq i \leq s$; $\delta_i + \delta_{i+1} < n$, $1 \leq i \leq s-1$; ou na forma

$$(II)\ v_0 \sigma_l^{\delta_1} v_1 \sigma_l^{\delta_2} v_2 \cdots \sigma_l^{\delta_{s-1}} v_{s-1} \sigma_l^{\delta_s}$$

onde $v_0, \cdots, v_{s-1} \in \mathcal{H}_{l+1,\infty}(n)$; $1 \leq \delta_i \leq n-1$, $1 \leq i \leq s$; $\delta_i + \delta_{i+1} < n$, $1 \leq i \leq s-2$.

Cada v_j tem comprimento menor que ω como palavra nos geradores $\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots\}$, então podemos continuar o processo indutivamente em v_j. Ao final do processo (ω tem comprimento finito) obtemos uma palavra que chamaremos de **reescrita** de ω.

Vejamos algumas destas situações. Suponha que $n = 4$, e que
(a) $\omega_1 = u_0 \sigma_l^3 u_1 \sigma_l u_2 \sigma_l u_3 \sigma_l^2$. Podemos reescrever ω_1 na forma (I) como segue:

$$\omega_1 = u_0 \left(\sigma_l^3 u_1 \sigma_l \right) u_2 \sigma_l u_3 \sigma_l^2 = \underbrace{u_0 u_2}_{u_{0,2}} \left(\sigma_l^3 u_1 \sigma_l^2 \right) u_3 \sigma_l^2 = u_{0,2} \sigma_l \left(\sigma_l^2 u_1 \sigma_l^2 \right) u_3 \sigma_l^2 = u_{0,2} \sigma_l u_3 \sigma_l^2 u_1$$

onde $u_i \in \mathcal{H}_{l+1,\infty}(n)$.

(b) $\omega_2 = u_0 \sigma_l u_1 \sigma_l^2 u_2 \sigma_l^3 u_3$. Podemos reescrever ω_2 na forma (II) como segue:

$$\omega_2 = u_0 \sigma_l u_1 \left(\sigma_l^2 u_2 \sigma_l^3 \right) u_3 = u_0 \sigma_l u_1 \sigma_l \left(\sigma_l u_2 \sigma_l^3 \right) u_3 = u_0 \sigma_l u_1 \sigma_l u_3 \left(\sigma_l u_2 \sigma_l^3 \right)$$

onde $u_i \in \mathcal{H}_{l+1,\infty}(n)$.

Agora tomamos $h \in \mathcal{H}(n)$ e consideramos o elemento de $\mathcal{A}$ definido recursivamente por $\alpha = (\alpha h, \cdots, \alpha h, \alpha) = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e)$. Então

$$\alpha = \cdots (h, \cdots, h, e)^{(2)} (h, \cdots, h, e)^{(1)} (h, \cdots, h, e)$$

Seja $S = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e),\ h \in \mathcal{H}(n)\}$.

Lema 3.2.1. *Se* $\alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e) \in S$ *então* $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha \leq \mathcal{H}(n)$. *Ainda,* $S \subseteq End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n)) \cap \mathcal{F}_n$, *onde* $\mathcal{F}_n$ *é o grupo de isometrias de* $\mathcal{T}_n$ *com um número finito de estados. O resultado continua válido se trocarmos* $\mathcal{H}(n)$ *por* $G(n)$.

Demonstração. Para $\mathcal{H}(n)$ segue das proposições 3.1.3 e 3.1.5. E a parte de $G(n)$ segue das proposições 3.1.1 e 3.1.2. ∎

Estamos interessados em descrever os elementos $h \in \mathcal{H}(n)$ tais que $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$.

Lema 3.2.2. *O conjunto* S *definido acima é um semigrupo sobre a multiplicação.*

Demonstração. Dados α e β em S, tais que $\alpha = (\alpha g, \cdots, \alpha g, \alpha)$ e $\beta = (\beta h, \cdots, \beta h, \beta)$ temos:

$\alpha\beta = (\alpha g\beta h, \cdots, \alpha g\beta h, \alpha\beta) = (\alpha\beta g^{\beta} h, \cdots, \alpha\beta g^{\beta} h, \alpha\beta) = (\alpha\beta)^{(1)}(g^{\beta} h, \cdots, g^{\beta} h, e)$. Como $g^{\beta} h \in \mathcal{H}(n)$ devido ao lema 3.2.1, então $\alpha\beta \in S$. ∎

Agora estudamos S e $S^{-1} = \{\alpha^{-1} \mid \alpha \in S\}$ em alguns detalhes.

Observação 3.2.3. Dado $\alpha = (\alpha h, \cdots, \alpha h, \alpha) \in S$ temos:

(i) $\alpha^{-1} = \alpha^{-(1)}(\alpha h^{-1}\alpha^{-1}, \cdots, \alpha h^{-1}\alpha^{-1}, e)$. De fato, $\alpha = (\alpha h\alpha^{-1}\alpha, \cdots, \alpha h\alpha^{-1}\alpha, \alpha) = (\alpha h\alpha^{-1}, \cdots, \alpha h\alpha^{-1}, e)\alpha^{(1)}$.

(ii) Segue de (i) que para um arbitrário $v \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(e, \cdots, e, v)\alpha &= \alpha^{-(1)}(\alpha h^{-1}\alpha^{-1}, \cdots, \alpha h^{-1}\alpha^{-1}, e)(e, \cdots, e, v)\alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e) \\ &= (e, \cdots, e, v^{\alpha})\end{aligned}$$

Lema 3.2.4. *Seja* $\alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e) \in S$. *Então* $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$ *se, e somente se,* $\alpha h\alpha^{-1} \in \mathcal{H}(n)$.

Demonstração. Se $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha = \mathcal{H}(n)$ então $\alpha\mathcal{H}(n)\alpha^{-1} = \mathcal{H}(n)$ e temos

$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e)\sigma(h^{-1}, \cdots, h^{-1}, e)\alpha^{-(1)} = \alpha^{(1)}(h, e, \cdots, e, h^{-1})\alpha^{-(1)}\sigma$

$= (\alpha h\alpha^{-1}, e, \cdots, e, \alpha h^{-1}\alpha^{-1})\sigma \in \mathcal{H}(n)$. Segue que $\alpha h\alpha^{-1} \in \mathcal{H}(n)$.

Reciprocamente, se $\alpha h\alpha^{-1} \in \mathcal{H}(n)$ então $y_0 = \alpha\sigma\alpha^{-1} = (\alpha h\alpha^{-1}, e, \cdots, e, \alpha h^{-1}\alpha^{-1})\sigma \in \mathcal{H}(n)$. Logo, $\sigma = \alpha^{-1}y_0\alpha \in \alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$. Assuma que $\sigma_n = \alpha^{-1}y_n\alpha \in \alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$, então segue da observação 3.2.3(ii) que $\sigma_{n+1} = (e, \cdots, e, \sigma_n) = (e, \cdots, e, \alpha^{-1}y_n\alpha) = \alpha^{-1}(e, \cdots, e, y_n)\alpha \in \alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$. Assim a indução mostra que $\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots\} \subseteq \alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$ e portanto, $\mathcal{H}(n) \subseteq \alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha \subseteq \mathcal{H}(n)$. ■

Consequentemente se $\alpha h\alpha^{-1} \notin \mathcal{H}(n)$, para algum $h \in \mathcal{H}(n)$, então $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$ é subgrupo próprio de $\mathcal{H}(n)$ e portanto, $\mathcal{H}(n) < \alpha\mathcal{H}(n)\alpha^{-1}$. Então $\alpha^{-1} \notin End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$.

Algumas vezes é usual trabalhar com HNN-extensões definida a seguir.

Definição 3.2.5. *Seja G um grupo com subgrupos isomorfos A e B, e seja $\phi : A \longrightarrow B$ um isomorfismo. Então o grupo com apresentação dada por*

$$K = \langle G, t \mid \phi(a) = a^t, \ \forall \ a \in A\rangle$$

*é chamado uma **HNN-extensão** de G. O grupo G é chamado a base e o gerador t é chamado a letra estável.*

Consideramos a HNN-extensão K de $\mathcal{H}(n)$ usando o isomorfismo

$$\phi : \mathcal{H}(n) \longrightarrow \mathcal{H}_{1,\infty}(n), \ \sigma_i \mapsto \sigma_{i+1} \ (i \geq 0),$$

então

$$K = \langle \sigma, t \mid \sigma^n = e, \sigma_{i+1} = {\sigma_i}^t, \ [\sigma^{-1}\sigma^{t^k}\sigma, \sigma^{t^j}] = 1,$$
$$[\sigma^{-2}\sigma^{t^k}\sigma^2, \sigma^{t^j}] = 1, \cdots, [\sigma^{-n+1}\sigma^{t^k}\sigma^{n-1}, \sigma^{t^j}] = 1 \ k \geq j \geq 1, \ i = 0, 1, \cdots\rangle.$$

Assim, $\mathcal{H}(n)$ é o subgrupo de K gerado por $\{\sigma^{t^i} \mid \ i = 0, 1, 2\cdots\}$.

Em nossa notação se $h = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_r}$ é um elemento de $\mathcal{H}(n)$ então $\phi(h) = h^t = (e, \cdots, e, h) = (e, \cdots, e, \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_r}) = (e, \cdots, e, \sigma_{i_1})(e, \cdots, e, \sigma_{i_2})\cdots(e, \cdots, e, \sigma_{i_r}) = \sigma_{i_1+1}\sigma_{i_2+1}\cdots\sigma_{i_r+1}$.

Como vimos no início desta seção, tomando $e \neq h \in \mathcal{H}(n)$, podemos reescrevê-lo em uma das formas (I) ou (II) em termos dos geradores $\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots\}$ de $\mathcal{H}(n)$. Denotemos por

$\zeta(\sigma_l, \cdots, \sigma_s)$ a reescrita de h em uma das formas (I) ou (II), com σ_l o gerador envolvido com menor subscrito, e σ_s o gerador envolvido com maior subscrito. Seja

$$\zeta_r = \phi^r(\zeta) = \zeta^{t^r} = (e, \cdots, e, (e, \cdots, e, (\cdots (e, \cdots, e, \zeta) \cdots))) = \zeta(\sigma_{l+r}, \cdots, \sigma_{s+r}),$$

onde os parênteses são tomados r vezes. Claramente $\zeta_r \in \mathcal{H}_{r,\infty}(n)$.

Lema 3.2.6. *Sejam $\alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e) \in S$, ζ a reescrita de h em uma das formas (I) ou (II). Então*

$$\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha = \langle \zeta_1\sigma_0{\zeta_1}^{-1}, \zeta_2\sigma_1{\zeta_2}^{-1}, \cdots \rangle.$$

Demonstração. Primeiramente,

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\sigma_0\alpha &= \alpha^{-(1)}(\alpha h^{-1}\alpha^{-1}, \cdots, \alpha h^{-1}\alpha^{-1}, e)\sigma_0(\alpha h\alpha^{-1}, \cdots, \alpha h\alpha^{-1}, e)\alpha^{(1)} \\
&= \alpha^{-(1)}(\alpha h^{-1}\alpha^{-1}, \cdots, \alpha h^{-1}\alpha^{-1}, e)(e, \alpha h\alpha^{-1}, \cdots, \alpha h\alpha^{-1})\alpha^{(1)}\sigma_0 \\
&= (h^{-1}, e, \cdots, e, h)\sigma_0 \\
&= (e, \cdots, e, h)\sigma_0(e, \cdots, e, h^{-1}) \\
&= \zeta_1\sigma_0{\zeta_1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Para o passo de indução,

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\sigma_{n+1}\alpha = (e, \cdots, e, \alpha^{-1}\sigma_n\alpha) &= (e, \cdots, e, \zeta_{n+1}\sigma_n{\zeta_{n+1}}^{-1}) \\
&= (e, \cdots, e, \zeta_{n+1})(e, \cdots, e, \sigma_n)(e, \cdots, e, \ {\zeta_{n+1}}^{-1}) \\
&= \zeta_{n+2}\sigma_{n+1}{\zeta_{n+2}}^{-1}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Sejam $a_i = \zeta_{i+1}\sigma_i\zeta_{i+1}^{-1}$, $i \geq 0$; portanto, $a_i = \phi^i(a_0)$. Sejam $A_{r,s} = \langle a_r, a_{r+1}, \cdots, a_s \rangle$, $0 \leq r \leq s$. Então $A_{j,\infty} \leq \mathcal{H}_{j,\infty}(n)$ e

$$a_{j-1}^{-k}A_{j,\infty}a_{j-1}^k = \zeta_j\left[\sigma_{j-1}^{-k}(\zeta_j^{-1}A_{j,\infty}\zeta_j)\sigma_{j-1}^k\zeta_j^{-1}\right] = \sigma_{j-1}^{-k}(\zeta_j^{-1}A_{j,\infty}\zeta_j)\sigma_{j-1}^k \leq \sigma_{j-1}^{-k}\mathcal{H}_{j,\infty}(n)\sigma_{j-1}^k,$$

$1 \leq k \leq n-1$. Temos que o conjunto

$$\{A_{j,\infty},\ a_{j-1}^{-1}A_{j,\infty}a_{j-1},\ a_{j-1}^{-2}A_{j,\infty}a_{j-1}^2,\ \cdots,\ a_{j-1}^{-(n-1)}A_{j,\infty}a_{j-1}^{n-1}\}$$

gera seu produto direto em $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$. Agora a aplicação $\sigma_i \mapsto a_i$, $(i \geq 0)$ induz um endomorfismo de $\mathcal{H}(n)$ sobrejetivo em $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$. Então a reescrita para os elementos de $\mathcal{H}(n)$ em termos dos geradores $\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots\}$ induz uma reescrita similar para os elementos de $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$ em termos dos geradores $\{a_0, a_1, \cdots\}$.

Lema 3.2.7. *Sejam* $\alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e) \in S$ *e* ζ *a reescrita de* h. *Então* $\sigma_0^\delta \in A_{o,m}$, *para algum inteiro* δ *tal que* $0 < \delta < n$ *se, e somente se,* $\zeta_1 \in A_{1,m}$.

Demonstração. Se $\zeta_1 \in A_{1,m} \leq A_{0,m}$ então $\zeta_1 \in A_{0,m}$ e $\sigma_0 = \zeta_1^{-1} a_0 \zeta_1 \in A_{0,m}$. Reciprocamente, se $\sigma_0^\delta \in A_{0,m}$ então quando ele é escrito em termos dos geradores de $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$, o elemento a_0 tem que ser envolvido, pois ele é o único gerador de $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$ que envolve σ_0. O procedimento de reescrita mostra que temos dois casos a considerar.

• No primeiro caso σ_0^δ tem a forma dada por (I): $\sigma_0^\delta = v_0 a_0^{\delta_1} v_1 a_0^{\delta_2} v_2 \cdots v_{s-1} a_0^{\delta_s} v_s$, onde $v_0, \cdots, v_s \in A_{1,m}$; $1 \leq \delta_i \leq n-1$; $\delta_i + \delta_{i+1} \leq n-1$. Então

$$\sigma_0^\delta = v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_1} \zeta_1^{-1} v_1 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_2} \zeta_1^{-1} v_2 \cdots v_{s-1} \zeta_1 \sigma_0^{\delta_s} \zeta_1^{-1} v_s$$

ou equivalentemente,

$$v_s^{-1} \zeta_1 = \sigma_0^{-\delta} v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_1} \zeta_1^{-1} v_1 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_2} \zeta_1^{-1} v_2 \cdots v_{s-1} \zeta_1 \sigma_0^{\delta_s}. \tag{3.2.1}$$

Observe que o primeiro membro da equação acima é tal que $v_s^{-1}\zeta_1 \in \mathcal{H}_{1,m}(n)$ e não envolve o gerador σ_0. Então temos duas possibilidades, ou o segundo membro é passível de redução, ou ambos os membros são iguais a identidade e. A segunda possibilidade já nos fornece diretamente que $\zeta_1 = v_s \in A_{1,m}$. Vamos examinar a primeira. Para termos redução é necessário que $\delta_1 = \delta$ e a equação se torna:

$$v_s^{-1} \zeta_1 = \zeta_1^{-1} v_1 \zeta_1 \sigma_0^{-\delta} v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta+\delta_2} \zeta_1^{-1} v_2 \cdots v_{s-1} \zeta_1 \sigma_0^{\delta_s}. \tag{3.2.2}$$

Analogamente temos duas possibilidades para 3.2.2, uma delas é que ambos os membros são iguais a e. Esta implica que $\zeta_1 = v_s \in A_{1,m}$. A outra, que consiste em continuar a redução do segundo membro e eliminar os fatores σ_0, implica $\delta + \delta_2 = \delta$, ou seja $\delta_2 = 0$. O que contradiz a escolha de δ_2. Então não podemos ter $s \geq 2$. E a equação 3.2.1 só pode ser escrita da seguinte forma:

$$v_1^{-1} \zeta_1 = \sigma_0^{-\delta} v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_1}.$$

Segue que $v_1^{-1}\zeta_1 = e$ ou equivalentemente, $\zeta_1 = v_1 \in A_{1,m}$.

• No segundo caso σ_0^δ tem a forma dada por (II): $\sigma_0^\delta = v_0 a_0^{\delta_1} v_1 a_0^{\delta_2} v_2 \cdots v_{s-1} a_0^{\delta_s}$, onde $v_0, \cdots, v_{s-1} \in A_{1,m}$; $1 \leq \delta_i \leq n-1$; $\delta_i + \delta_{i+1} \leq n-1$ $(1 \leq i \leq s-2)$. Então

$$\sigma_0^\delta = v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_1} \zeta_1^{-1} v_1 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_2} \zeta_1^{-1} v_2 \cdots v_{s-1} \zeta_1 \sigma_0^{\delta_s} \zeta_1^{-1}$$

ou equivalentemente

$$\zeta_1 = \sigma_0^{-\delta} v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_1} \zeta_1^{-1} v_1 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_2} \zeta_1^{-1} v_2 \cdots v_{s-1} \zeta_1 \sigma_0^{\delta_s}. \tag{3.2.3}$$

Observe que o primeiro membro da equação acima é tal que $\zeta_1 \in \mathcal{H}_{1,m}(n)$ e não envolve o gerador σ_0. Então o mesmo deve acontecer para o segundo membro (pois $\zeta_1 \neq e$), logo o segundo membro é passível de redução. Segue que $\delta_1 = \delta$ e a equação se torna:

$$\zeta_1 = \zeta_1^{-1} v_1 \zeta_1 \sigma_0^{-\delta} v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta+\delta_2} \zeta_1^{-1} v_2 \cdots v_{s-1} \zeta_1 \sigma_0^{\delta_s}.$$

Para continuar a redução do segundo membro e eliminar os fatores σ_0, devemos ter $\delta+\delta_2 = \delta$. Quando $s \geq 3$ temos necessariamente que $\delta_2 = 0$, o que contradiz a escolha de δ_2. Então devemos ter $s \leq 2$, e a equação 3.2.3 só pode ser escrita da seguinte forma:

$$\zeta_1 = \sigma_0^{-\delta} v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_1} \zeta_1^{-1} v_1 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_2}.$$

Novamente devemos ter $\delta_1 = \delta$ e consequentemente

$$\zeta_1 = \zeta_1^{-1} v_1 \zeta_1 \sigma_0^{-\delta} v_0 \zeta_1 \sigma_0^{\delta_1+\delta_2}.$$

Assim, devemos ter $\delta_1 + \delta_2 = \delta (mod\ n)$ e $v_0 \zeta_1 = e$. Portanto, $\zeta_1 = v_0^{-1} \in A_{1,m}$. ∎

Proposição 3.2.8. *$End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n)) \neq N_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$. Mais especificamente, vamos mostrar que dados $\alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e) \in S$ e $h = \zeta = \sigma_0^\delta$, $0 < \delta < n$, a reescrita de h. Então $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha \neq \mathcal{H}(n)$.*

Demonstração. O lema 3.2.1 garante que $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$. Suponha que $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha = \mathcal{H}(n)$, logo $\sigma_0^\delta \in \alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$ já que $\sigma_0^\delta \in \mathcal{H}(n)$. Assim, $\sigma_0^\delta \in A_{0,m}$, para algum m que escolhemos como sendo mínimo. O lema 3.2.7 garante que $\zeta_1 \in A_{1,m}$. Segue do isomorfismo $\phi : \mathcal{H}(n) \to \mathcal{H}_{1,\infty}(n)$, $\sigma_k \mapsto \sigma_{k+1}$ que $\sigma_0^\delta = \zeta = \phi^{-1}(\zeta_1) \in A_{0,m-1}$, o que contradiz a minimalidade de m. ∎

Corolário 3.2.9. *$End_{\mathcal{A}}(G(n)) \neq N_{\mathcal{A}}(G(n))$.*

Demonstração. Seja $\alpha = \alpha^{(1)}(\sigma, \cdots, \sigma, e)$. Devido ao lema 3.2.1 $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Segue da proposição 3.2.8 que existe $h \in \mathcal{H}(n)$ tal que $\alpha h \alpha^{-1} \notin \mathcal{H}(n)$. Suponha que $\alpha h \alpha^{-1} \in G(n)$. Então $\alpha h \alpha^{-1} = x_1 x_2 \cdots x_r$ onde cada x_i é um gerador de $G(n)$. Mas $\alpha h \alpha^{-1}$ só envolve geradores de $\mathcal{H}(n)$, então $x_1 x_2 \cdots x_r \in \mathcal{H}(n)$ o que contradiz a escolha de h. Logo, $\alpha h \alpha^{-1} \notin G(n)$. ∎

Teorema 3.2.10. *Seja $S = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e),\ h \in \mathcal{H}(n)\}$. Então S é um subsemigrupo de $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$ com a propriedade que $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n)) \bigcap S^{-1} = \{e\}$.*

Antes de iniciarmos a prova do teorema faremos algumas observações.

• Que S é um subsemigrupo de $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$ segue dos lemas 3.2.1 e 3.2.2. O lema 3.2.9 estabelece o teorema para o caso $h = \sigma_0^{\delta}$. O caso geral $h = \zeta(\sigma_l, \cdots, \sigma_s)$ será tratado de maneira similar.

• Como $h = \zeta(\sigma_l, \cdots, \sigma_s)$ então na reescrita de ζ como um elemento de $A_{0,m}$, o gerador de $\alpha^{-1} G \alpha$ com menor subscrito que aparece é a_l. Para ver isto, suponha que a_k é o gerador de $\alpha^{-1} G \alpha$ com menor subscrito que ocorre na reescrita de ζ, com $k < l$. Aqui $a_k = \zeta_{k+1} \sigma_k \zeta_{k+1}^{-1}$, com $\zeta_{k+1} \in \mathcal{H}_{k+1,\infty}(n)$. O procedimento de reescrita mostra que uma das seguintes situações ocorre:

(A) $\zeta = v_0 a_k^{\delta_1} v_1 a_k^{\delta_2} v_2 \cdots v_{s-1} a_k^{\delta_s} v_s$ ou (B) $\zeta = v_0 a_k^{\delta_1} v_1 a_k^{\delta_2} v_2 \cdots v_{s-1} a_k^{\delta_s}$;

A situação (A) não pode ocorrer, pois

$$
\begin{aligned}
\zeta &= v_0 a_k^{\delta_1} v_1 a_k^{\delta_2} v_2 \cdots v_{s-1} a_k^{\delta_s} v_s \\
&= v_0 \zeta_{k+1} \sigma_k^{\delta_1} \zeta_{k+1}^{-1} v_1 \zeta_{k+1} \sigma_k^{\delta_2} \zeta_{k+1}^{-1} v_2 \cdots v_{s-1} \zeta_{k+1} \sigma_k^{\delta_s} \zeta_{k+1}^{-1} v_s
\end{aligned}
$$

onde $0 < \delta_i + \delta_{i+1} < n$; $v_i \zeta_{k+1},\ \zeta_{k+1}^{-1} v_i \in \mathcal{H}_{k+1,\infty}(n)$. Assim, σ_k (devido a a_k), tem que ser envolvido na reescrita de ζ em $\mathcal{H}(n)$, o que contradiz a escolha de l. A situação (B) pode ser tratada de maneira análoga.

• Sendo $\phi : \mathcal{H}(n) \longrightarrow \mathcal{H}_{1,\infty}(n)$, $\sigma_k \mapsto \sigma_{k+1}$, um isomorfismo, definimos $\zeta_{-1} = \phi^{-1}(\zeta)$. Analogamente definimos $\zeta_{-l} = \phi^{-l}(\zeta)$. Assim, se $\zeta \in A_{0,m-1}$ então $\zeta_{-l} \in A_{0,m-l-1}$. Esta noção de subscrito negativo será usada no que segue sem maiores comentários.

O lema seguinte é um passo importante na nossa argumentação para a prova do teorema.

Lema 3.2.11. *Seja* $\xi \in \mathcal{H}(n)$ *tal que* σ_k *é o gerador com menor subscrito envolvido na reescrita de* ξ. *Se* $\xi_{-k} \in A_{0,m-1}$ *e* $\zeta_1 \in A_{1,m}$ *então*
(A) $\xi_{-k} = v_0\sigma_0^{\delta_1}v_1\sigma_0^{\delta_2}v_2\cdots v_{s-1}\sigma_0^{\delta_s}v_s$ *onde* $v_i \in A_{1,m}$, $1 \leq \delta_i \leq n-1$ $(1 \leq i \leq s)$, $\delta_i + \delta_{i+1} < n$ $(1 \leq i \leq s-1)$; *ou*
(B) $\xi_{-k} = v_0\sigma_0^{\delta_1}v_1\sigma_0^{\delta_2}v_2\cdots v_{s-1}\sigma_0^{\delta_s}$ *onde* $v_i \in A_{1,m}$, $1 \leq \delta_i \leq n-1$ $(1 \leq i \leq s)$, $\delta_i + \delta_{i+1} < n$ $(1 \leq i \leq s-2)$.

Demonstração. O processo de reescrita de ξ_{-k} garante que (A) e (B) ocorrem para $v_i \in \mathcal{H}(n)$. Vamos mostrar que $v_i \in A_{1,m}$.

<u>*Caso (A)*</u>. Cada ocorrência de σ_0 em ξ_{-k}, produz uma ocorrência de a_0 na reescrita de ξ em $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$, de forma que: $\xi_{-k} = u_0a_0^{\delta_1}u_1a_0^{\delta_2}u_2\cdots u_{s-1}a_0^{\delta_s}u_s$, onde $u_i \in A_{1,m-1}$. De fato, suponha que $u_0a_0^{\epsilon_1}u_1a_0^{\epsilon_2}u_2\cdots u_{r-1}a_0^{\epsilon_r}u_r$ seja a reescrita de ξ_{-k} em termos dos geradores de $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$. Como por hipótese $\zeta_{-k} \in A_{0,m-1}$, temos que $u_i \in A_{1,m-1}$. Então

$$\begin{aligned}\xi_{-k} &= v_0\sigma_0^{\delta_1}v_1\sigma_0^{\delta_2}v_2\cdots v_{s-1}\sigma_0^{\delta_s}v_s = u_0a_0^{\epsilon_1}u_1a_0^{\epsilon_2}u_2\cdots u_{r-1}a_0^{\epsilon_r}u_r\\ &= u_0\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_1}\zeta_1^{-1}u_1\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_2}\zeta_1^{-1}u_2\cdots u_{r-1}\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_r}\zeta_1^{-1}u_r\end{aligned}$$

é equivalente a

$$v_su_r{}^{-1}\zeta_1 = \left(v_0\sigma_0^{\delta_1}v_1\sigma_0^{\delta_2}v_2\cdots v_{s-1}\sigma_0^{\delta_s}\right)^{-1}u_0\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_1}\zeta_1^{-1}u_1\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_2}\zeta_1^{-1}u_2\cdots u_{r-1}\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_r}$$

ou ainda,

$$v_su_r{}^{-1}\zeta_1 = \sigma_0^{-\delta_s}v_{s-1}^{-1}\cdots v_2^{-1}\sigma_0^{-\delta_2}v_1^{-1}\left(\sigma_0^{-\delta_1}v_0^{-1}u_0\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_1}\right)\zeta_1^{-1}u_1\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_2}\zeta_1^{-1}u_2\cdots u_{r-1}\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_r}. \tag{3.2.4}$$

Como o primeiro membro não envolve σ_0 temos duas possibilidades:
(i) $\sigma_0^{-\delta_1}v_0^{-1}u_0\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_1} = e$, ou
(ii) $\sigma_0^{-\delta_s}v_{s-1}^{-1}\cdots v_2^{-1}\sigma_0^{-\delta_2}v_1^{-1}\sigma_0^{-\delta_1}v_0^{-1}u_0\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_1}\zeta_1^{-1}u_1\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_2}\zeta_1^{-1}u_2\cdots u_{r-1}\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_r} = e$
e $v_su_r{}^{-1}\zeta_1 = e$.
Primeiramente vamo examinar a possibilidade (i). Ela implica que $v_0 = u_0\zeta_1 \in A_{1,m}$, $\epsilon_1 = \delta_1$ e a equação 3.2.4 se torna

$$v_su_r{}^{-1}\zeta_1 = \sigma_0^{-\delta_s}v_{s-1}^{-1}\cdots v_2^{-1}(\sigma_0^{-\delta_2}v_1^{-1}\zeta_1^{-1}u_1\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_2})\zeta_1^{-1}u_2\cdots u_{r-1}\zeta_1\sigma_0^{\epsilon_r}. \tag{3.2.5}$$

Novamente temos duas possibilidades: (i_1) $\sigma_0^{-\delta_2} v_1^{-1} \zeta_1^{-1} u_1 \zeta_1 \sigma_0^{\epsilon_2} = e$, ou (i_2) análoga a (ii). (i_1) implica que $v_1 = \zeta_1^{-1} u_1 \zeta_1 \in A_{1,m}$, $\delta_2 = \epsilon_2$ e a equação 3.2.5 se torna

$$v_s {u_r}^{-1} \zeta_1 = \sigma_0^{-\delta_s} v_{s-1}^{-1} \cdots v_2^{-1} \zeta_1^{-1} u_2 \cdots u_{r-1} \zeta_1 \sigma_0^{\epsilon_r}. \tag{3.2.6}$$

Novamente temos duas possibilidades. Se prosseguirmos examinando as primeiras possibilidades obteremos que $r = s$, $\epsilon_i = \delta_i$, $v_i = \zeta_1^{-1} u_i \zeta_1 \in A_{1,m}$ $(1 \leq i \leq s)$.

Agora vamos examinar a possibilidade (ii). Ela implica que $v_s = \zeta_1^{-1} u_r \in A_{1,m}$ e

$$\sigma_0^{-\delta_{s-1}} v_{s-2}^{-1} \sigma_0^{-\delta_{s-2}} \cdots v_2^{-1} \sigma_0^{-\delta_2} v_1^{-1} \sigma_0^{-\delta_1} v_0^{-1} u_0 \zeta_1 \sigma_0^{\epsilon_1} \zeta_1^{-1} u_1 \zeta_1 \sigma_0^{\epsilon_2} \zeta_1^{-1} u_2 \cdots u_{r-1} \zeta_1 \sigma_0^{\epsilon_r} \sigma_0^{-\delta_s} = v_{s-1}$$

Como $v_{s-1} \neq e$ não envolve σ_0, a análise segue como no caso (i). Obtemos assim que $v_0 = u_0 \zeta_1 \in A_{1,m}$, $\epsilon_i = \delta_i$, $v_i = \zeta_1^{-1} u_i \zeta_1 \in A_{1,m}$ $(1 \leq i \leq s)$ e $r = s$. E portanto,

$$\xi_{-k} = v_0 \sigma_0^{\delta_1} v_1 \sigma_0^{\delta_2} v_2 \cdots v_{s-1} \sigma_0^{\delta_s} v_s$$

onde $v_i \in A_{1,m}$.

Caso (B). Pode ser examinado de maneira análoga ao caso (A). ∎

Prova do Teorema 3.2.10. Antes de proceder a prova formal, um exemplo específico pode servir para ilustrar o argumento restante. Tome $\zeta = \sigma_2^{\epsilon_1} \sigma_0^{\epsilon_2} \sigma_1^{\epsilon_3} \sigma_2^{\epsilon_4} \sigma_0^{\epsilon_5}$, $0 < \epsilon_i < n$. Assuma que m é escolhido como sendo mínimo com $\sigma_0^{\delta} \in A_{0,m}$ para algum δ, $0 < \delta < n$. O lema 3.2.7 mostra que $\zeta_1 \in A_{1,m}$, ou seja $\zeta_1 = \sigma_3^{\epsilon_1} \sigma_1^{-\delta} \sigma_2^{\epsilon_3} \sigma_3^{\epsilon_4} \sigma_1^{\delta} \in A_{1,m}$; então $\zeta_1^{\phi^{-1}} = \zeta \in A_{0,m-1}$. O lema 3.2.11 implica que ambos $\sigma_2^{\epsilon_1}$ e $\sigma_1^{\epsilon_3} \sigma_2^{\epsilon_4}$ estão em $A_{1,m}$. Agora $\sigma_2^{\epsilon_1} \in A_{1,m}$ fornece $\sigma_1^{\epsilon_1} \in A_{0,m-1}$. Mas $\sigma_1^{\epsilon_1} \in \mathcal{H}_{1,\infty}(n)$ e portanto, $\sigma_1^{\epsilon_1} \in A_{0,m-1} \cap \mathcal{H}_{1,\infty}(n) = A_{1,m-1}$. Logo $(\sigma_1^{\epsilon_1})^{\phi^{-1}} = \sigma_0^{\epsilon_1} \in A_{0,m-2}$, o que contradiz a minimalidade de m quando tomamos $\delta = \epsilon_1$.

Agora, para o argumento geral seja $\alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e) \in S$ tal que $h = \zeta(\sigma_l, \cdots, \sigma_s)$. Vamos supor que $\alpha \mathcal{H}(n) \alpha^{-1} = \mathcal{H}(n)$, logo $\sigma_0^{\delta} \in \alpha \mathcal{H}(n) \alpha^{-1}$ para algum δ, $0 < \delta < n$. Seja m o menor inteiro positivo com $\sigma_0^{\delta} \in A_{0,m}$. Pelo lema 3.2.7 temos $\zeta_1 \in A_{1,m}$. Então, $\zeta = \phi^{-1}(\zeta_1) \in A_{0,m-1}$. Aplicamos o lema 3.2.11 a ζ e obtemos

$$(A)\ \zeta_{-l} = v_0 \sigma_0^{\delta_1} v_1 \sigma_0^{\delta_2} v_2 \cdots v_{s-1} \sigma_0^{\delta_s} v_s \text{ ou } (B)\ \zeta_{-l} = v_0 \sigma_0^{\delta_1} v_1 \sigma_0^{\delta_2} v_2 \cdots v_{s-1} \sigma_0^{\delta_s},$$

onde $v_i \in A_{1,m}$. Note que o caso $v_i = e, \forall\, i \in \{0, 1, \cdots, s\}$, foi tratado na proposição 3.2.8, e que $\delta^i \neq 0$ para algum i, pois ζ envolve σ_l. Contudo v_i tem comprimento estritamente menor que o de ζ em termos de sua reescrita. Considere η como sendo um dos $v_i{}'$s; podemos supor sem perda de generalidade que $\eta \neq e$. Então $\eta \in A_{1,m}$, ou seja $\eta_{-1} \in A_{0,m-1}$. Seja σ_ν o gerador com menor subscrito envolvido na reescrita de η ($\nu \geq 1$) então $\eta_{-\nu} \in A_{0,m-1}$. Se $\eta_{-\nu} = \sigma_0^\epsilon \in A_{0,m-1}$ para algum ϵ, $0 < \epsilon < n$, então obtemos uma contradição para a minimalidade de m tomando $\delta = \epsilon$. Senão, aplicamos novamente o lema 3.2.11 e obtemos que $\eta_{-\nu}$ assume uma das formas

$$(A)\ \eta_{-\nu} = v_0'\sigma_0^{\delta_1'}v_1'\sigma_0^{\delta_2'}v_2'\cdots v_{s'-1}'\sigma_0^{\delta_{s'}'}v_{s'}' \text{ ou } (B)\ \zeta_{-\nu} = v_0'\sigma_0^{\delta_1'}v_1'\sigma_0^{\delta_2'}v_2'\cdots v_{s'-1}'\sigma_0^{\delta_{s'}'},$$

onde $v_i' \in A_{1,m}$. Mas v_i' tem comprimento estritamente menor que o de η em termos de sua reescrita. Além do mais, $v_i' \neq e$ para algum i. Considere $e \neq \eta'$ como sendo um v_i'; então $\eta'_{-1} \in A_{0,m-1}$.

Como ζ tem comprimento finito, continuando desta maneira deduzimos que $\sigma_0^\epsilon \in A_{0,m-1}$, para algum ϵ, $0 < \epsilon < n$. Então escolhemos $\delta = \epsilon$ e obtemos uma contradição para a minimalidade na escolha de m. Segue que não podemos supor $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha = \mathcal{H}(n)$. Como $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha \leq \mathcal{H}(n)$, temos que $\alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$ é subgrupo próprio de $\mathcal{H}(n)$ e portanto existe $h \in \mathcal{H}(n)$ tal que $h \notin \alpha^{-1}\mathcal{H}(n)\alpha$, isto é, $\alpha h\alpha^{-1} \notin \mathcal{H}(n)$. Segue que $\alpha^{-1} \notin End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$, o que conclui a prova do teorema para o caso (A). O caso (B) é inteiramente análogo. ■

Corolário 3.2.12. *S é um subsemigrupo de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ com a propriedade que*

$$End_{\mathcal{A}}(G(n)) \cap S^{-1} = \{e\}.$$

Demonstração. Que S é um subsemigrupo de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ segue dos lemas 3.2.1 e 3.2.2. Seja $\alpha = \alpha^{(1)}(h, \cdots, h, e)$. Devido ao lema 3.2.1 $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Segue do teorema 3.2.10 que $\alpha \notin N_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}(n))$. Agora o lema 3.2.4 nos diz que $\alpha h\alpha^{-1} \notin \mathcal{H}(n)$. Suponha que $\alpha h\alpha^{-1} \in G(n)$. Então $\alpha h\alpha^{-1} = x_1x_2\cdots x_r$ onde cada x_i é um gerador de $G(n)$. Mas $\alpha h\alpha^{-1}$ só envolve geradores de $\mathcal{H}(n)$, então $x_1x_2\cdots x_r \in \mathcal{H}(n)$ o que contradiz a escolha de h. Logo, $\alpha h\alpha^{-1} \notin G(n)$. ■

3.3 Formas para Endomorfismos de $G(n)$

Nesta seção determinamos uma condição necessária para que elementos de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ estejam em $N_{\mathcal{A}}(G(n))$, mostrando, assim, que o resultado dado por A. Brunner e S. Sidki em [8] admite uma extensão à árvores n-árias.

Como vimos na proposição 3.1.1, $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ se e somente se existe uma sequência de elementos $\{g_i\}_{i\geq 0}$ de $G(n)$ tais que $\alpha = \cdots {g_2}^{(2)}{g_1}^{(1)}g_0$.

Escrevemos $\alpha = \alpha(0) = \alpha(1)^{(1)}g_0,\ \alpha(i) = \alpha(i+1)^{(1)}g_i$. O inverso de α é dado por $\alpha(i)^{-1} = g_i^{-1}\alpha(i+1)^{-(1)} = \alpha(i+1)^{-(1)}(g_i^{-1})^{\alpha(i+1)^{-(1)}}$, onde um elemento $\omega^{-(1)}$ é entendido como $(\omega^{-1})^{(1)}$. Então α^{-1} induz um endomorfismo de $G(n)$, ou seja, $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ se e somente se $g_i^{\alpha(i+1)^{-1}} \in G(n)$, $\forall i \geq 0$.

Observação 3.3.1.

(i) Se $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ então $\alpha(j) = \alpha(j+1)^{(1)}g_j \in N_{\mathcal{A}}(G(n)),\ \forall\ j \geq 0$. De fato, $\alpha = \alpha(0) = \alpha(1)^{(1)}g_0 \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ implica $\alpha(1)^{(1)} = \alpha g_0^{-1} \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Suponha que $\alpha(1) \notin N_{\mathcal{A}}(G(n))$, então existe $g \in G(n)$ tal que $g^{\alpha(1)} \notin G(n)$ ou $g^{\alpha(1)^{-1}} \notin G(n)$. A primeira condição implica que $(g, \cdots, g)^{\alpha(1)^{(1)}} = (g^{\alpha(1)}, \cdots, g^{\alpha(1)}) \notin G(n)$, o que contradiz o fato de $\alpha(1)^{(1)} \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Análogo para a segunda condição. Então $\alpha(1) \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$, e $\alpha(1) = \alpha(2)^{(1)}g_1$ implica $\alpha(2)^{(1)} \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$, ou seja $\alpha(2) \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$, e assim por diante.

(ii) Uma situação particular onde podemos verificar que para $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ temos $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$, é quando $\{g_i^{(i)} \mid i \geq 0\}$ é um conjunto comutativo, pois neste caso $\alpha^{-1} = g_0^{-1}g_1^{-(1)}\cdots g_i^{-(i)}\cdots = \cdots g_i^{-(i)}\cdots g_1^{-(1)}g_0^{-1}$ e agora segue da proposição 3.1.1. Estudaremos esta condição em mais detalhes na subseção 3.4.1. O grupo $\overline{D}(n)$, o fecho sobre produtos infinitos de elementos de $D(n) = \langle \sigma^{(i)} \mid i \geq 0\rangle$, exemplifica esta situação. Vejamos outro exemplo. Seja $L(n) = \langle \sigma^{(i)}, \gamma^{(i)} \mid i \geq 0\rangle$, onde $\sigma = (n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)$ e $\gamma = (1\ 2)$ são permutações de S_n. Então, todo elemento α de $L(n)$ pode ser escrito na forma

$$\alpha = \theta_r^{(r)}\cdots\theta_2^{(2)}\theta_1^{(1)}\theta_0$$

onde $\theta_i \in S_n$, $0 \leq i \leq r$. Note que $\theta_i^{(i)}$ comuta com $\theta_j^{(j)}$. Seja $\overline{L}(n)$ o fecho de $L(n)$ em relação ao produto infinito de seus elementos. Dado $\alpha \in \overline{L}(n)$, temos que

$$\alpha = \cdots \theta_r^{(r)} \cdots \theta_2^{(2)} \theta_1^{(1)} \theta_0$$

onde o conjunto $\{\theta_i^{(i)} \mid i \geq 0\}$ é comutativo e, pelo observado anteriormente, $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$, logo $\overline{L}(n) \leq N_{\mathcal{A}}(G(n))$.

A forma de $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ pode ser modificada: seja $\alpha = \beta^{(1)} g$, onde $g = (k_1, \cdots, k_n)\theta$, $k_i \in G(n)$, $\theta \in S_n$. Então,

$$\alpha = \beta^{(1)} g = (\beta k_1)^{(1)} (e, k_1^{-1} k_2, k_1^{-1} k_3, \cdots, k_1^{-1} k_n)\theta.$$

Assim, $\alpha = \delta(0)^{(1)}(e, h(0)_2, h(0)_3, \cdots, h(0)_n)\theta(h(0))$, onde $\delta(0) = \beta k_1$ proporciona a mesma sorte de desenvolvimento: $\delta(0) = \delta(1)^{(1)}(e, h(1)_2, h(1)_3, \cdots, h(1)_n)\theta(h(1))$. Assim, α é determinado pela sequência $h(i) = (e, h(i)_2, h(i)_3, \cdots, h(i)_n)\theta(h(i))$, $i \geq 0$, de elementos de $G(n)$. Isto produz uma forma normal para α. De fato, se $\alpha = \delta^{(1)}(e, h_2, h_3, \cdots, h_n)\theta = \mu^{(1)}(e, h_2', h_3', \cdots, h_n')\theta'$ então $\theta = \theta'$, $(\mu^{-1}\delta)^{(1)} = (e, h_2' h_2^{-1}, \cdots, h_n' h_n^{-1})$ e, portanto, $\mu^{-1}\delta = e$, $h_i' h_i^{-1} = e,\ 2 \leq i \leq n$.

Observação 3.3.2. A forma de $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$, pode ser modificada também para cada $i \in \{2, \cdots, n\}$, basta escrever

$$\begin{aligned}
\alpha &= \beta^{(1)} g \\
&= \beta^{(1)}(k_1, k_2, \cdots, k_n)\theta = \beta^{(1)} k_i^{(1)} (k_i^{-1} k_0, \cdots, k_i^{-1} k_{i-1}, e, k_i^{-1} k_{i+1} \cdots, k_i^{-1} k_n)\theta \\
&= (\beta k_i)^{(1)} (k_i^{-1} k_0, \cdots, k_i^{-1} k_{i-1}, e, k_i^{-1} k_{i+1} \cdots, k_i^{-1} k_n)\theta
\end{aligned}$$

Assim, $\alpha = \delta(0)^{(1)}(h(0)_1, h(0)_2, \cdots, h(0)_{i-1}, e, h(0)_{i+1}, \cdots, h(0)_n)\theta(h(0))$, onde $\delta(0) = \beta k_i$ proporciona a mesma sorte de desenvolvimento. Segue que α é determinado pela sequência

$$h(j) = (h(j)_1, h(j)_2, \cdots, h(j)_{i-1}, e, h(j)_{i+1} \cdots, h(j)_n)\theta(h(j)),\ j \geq 0,$$

de elementos de $G(n)$.

Então temos,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta(0)^{(1)}(e, h(0)_2, \cdots, h(0)_n)\theta(h(0)) \\
&= \left(\delta(1)^{(1)}(e, h(1)_2, h(1)_3, \cdots, h(1)_n)\theta(h(1))\right)^{(1)}(e, h(0)_2, h(0)_3, \cdots, h(0)_n)\theta(h(0)) \\
&= \delta(1)^{(2)}\underbrace{(e, h(1)_2, h(1)_3, \cdots, h(1)_n)}_{h(1)}{}^{(1)}\theta(h(1))^{(1)}\underbrace{(e, h(0)_2, h(0)_3, \cdots, h(0)_n)}_{h(0)}\theta(h(0)) \\
&= \cdots \\
&= \cdots h(3)^{(3)}\theta(h(3))^{(3)}.\ h(2)^{(2)}\theta(h(2))^{(2)}.\ h(1)^{(1)}\theta(h(1))^{(1)}.\ h(0)\theta(h(0))
\end{aligned}$$

Multiplicando α por $\kappa = \theta(h(0))^{-1}\theta(h(1))^{-(1)}\theta(h(2))^{-(2)}\cdots \in \overline{L}_n$, transformamos o conjunto dos $h(i) = (e, h(i)_2, h(i)_3, \cdots, h(i)_n)\theta(h(i))$, $i \geq 0$, em elementos inativos $h'(i) = (e, h'(i)_2, h'(i)_3, \cdots, h'(i)_n)$. Obtendo,

$$\alpha\kappa = \cdots h'(3)^{(3)}h'(2)^{(2)}h'(1)^{(1)}h'(0).$$

Assim, dado $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ temos que $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ se, e somente se, $\alpha\kappa \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Podemos continuar e fazer $h(i)_2, h(i)_3, \cdots, h(i)_n$ inativos multiplicando $\alpha\kappa$ por

$\mu = k(0)^{-1}k(1)^{-(1)}\cdots k(j)^{-(j)}\cdots$, onde

$$k(j) = (e, \theta(h'(j)_2), \cdots, \theta(h'(j)_n)),\ \theta(h'(j)_i) \in S_n,\ \forall j \geq 0,\ 2 \leq i \leq n.$$

Mas, como veremos no corolário 3.3.6, μ não está necessariamente em $N_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Definição 3.3.3. *Definimos a* ***profundidade*** *de $e \neq h \in G(n)$ como o menor inteiro não-negativo $d = \partial(h)$ tal que $h \in G_{0,d}(n)$.*

Observação 3.3.4.

(i) Dado $e \neq h \in G(n)$ tal que $\partial(h) = d$, o grupo $\langle h_u \mid |u| \geq 1\rangle$ gerado pelos estados próprios de h está contido em $G_{0,d-1}(n)$ e portanto, não contém h.

(ii) Sejam h tal que $\partial(h) = d$ e $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$, a imagem h^α de h sobre a ação de α é h^x onde $x = g_d^{(d)}\cdots g_1^{(1)}g_0$. De fato, como $\partial(h) = d$, então h comuta com $g_{d+i}^{(d+i)},\ i \geq 1$. Assim, $\partial(h) \leq \partial(h^\alpha) \leq max\{\partial(h),\ i + \partial(g_i) \mid 0 \leq i \leq d\}$.

(iii) Se $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ então, dado um inteiro positivo m, sempre existe um elemento $h \in G(n)$ tal que $\partial(h^{\alpha^{-1}}) = m$. De fato, seja $g \in G(n)$ tal que $\partial(g) = m$. Como α^{-1} é um automorfismo de $G(n)$, existe $h \in G(n)$ tal que $h^{\alpha^{-1}} = g$.

Considere α dado pela sequência $\{h(i)\}_{i\geq 0}$, $h(i) = (h(i)_1, h(i)_2, \cdots, h(i)_n)$, onde $h(i)_1 = e$ e $i \geq 0$. Analisamos agora a ação de $\alpha(l)^{-1} = h(l)^{-1}\alpha(l+1)^{-(1)}$, $l \geq 0$, em $G(n)$.

Seja $g = (g_1, \cdots, g_n)\theta \in G(n)$, $\theta \in S_n$, então

$$\begin{aligned} g^{\alpha(l)^{-1}} &= \left[(h(l)_1, h(l)_2, \cdots, h(l)_n)(g_1, \cdots, g_n)\theta\ ((h(l)^{-1})_1, (h(l)^{-1})_2, \cdots, (h(l)^{-1})_n)\right]^{\alpha(l+1)^{-(1)}} \\ &= \left(h(l)_1 g_1 (h(l)^{-1})_{1^\theta}, h(l)_2 g_2 (h(l)^{-1})_{2^\theta}, \cdots, h(l)_n g_n (h(l)^{-1})_{n^\theta}\right)^{\alpha(l+1)^{-(1)}} \theta \\ &= \left((h(l)_1 g_1 (h(l)^{-1})_{1^\theta})^{\alpha(l+1)^{-1}}, (h(l)_2 g_2 (h(l)^{-1})_{2^\theta})^{\alpha(l+1)^{-1}}, \cdots, (h(l)_n g_n (h(l)^{-1})_{n^\theta})^{\alpha(l+1)^{-1}}\right)\theta. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} g^{\alpha^{-1}} &= g^{\alpha(0)^{-1}} \\ &= \left((h(0)_1 g_1 (h(0)^{-1})_{1^\theta})^{\alpha(1)^{-1}}, (h(0)_2 g_2 (h(0)^{-1})_{2^\theta})^{\alpha(1)^{-1}}, \cdots, (h(0)_n g_n (h(0)^{-1})_{n^\theta})^{\alpha(1)^{-1}}\right)\theta \end{aligned}$$

onde $h(0)_1 = e$. Segue que o estado $(g^{\alpha^{-1}})_i$, $1 \leq i \leq n$, é dado por

$$(g^{\alpha^{-1}})_i = (h(0)_i g_i (h(0)^{-1})_{i^\theta})^{\alpha(1)^{-1}}.$$

Agora, fazendo $h(0)_i = (h(0)_{i1}, \cdots, h(0)_{in})\theta(h_i)$, $g_i = (g_{i1}, \cdots, g_{in})\theta(g_i)$, onde, $\theta(h_i)$ e $\theta(g_i)$ estão em S_n, temos que

$$\begin{aligned} & h(0)_i g_i (h(0)^{-1})_{i^\theta} = \\ &= (h(0)_{i1}, \cdots, h(0)_{in})(g_{i1^{\theta(h_i)}}, \cdots, g_{in^{\theta(h_i)}})\theta(h_i g_i)((h(0)^{-1})_{i^\theta 1}, \cdots, (h(0)^{-1})_{i^\theta n})\theta(h_{i^\theta}^{-1}) \\ &= (h(0)_{i1} g_{i1^{\theta(h_i)}} (h(0)^{-1})_{i^\theta 1^{\theta(h_i g_i)}}, \cdots, h(0)_{in} g_{in^{\theta(h_i)}} (h(0)^{-1})_{i^\theta n^{\theta(h_i g_i)}})\theta(h_i g_i h_{i^\theta}^{-1}). \end{aligned}$$

Assim, escrevendo

$$(g^{\alpha^{-1}})_i = (h(0)_i g_i (h(0)^{-1})_{i^\theta})^{\alpha(1)^{-1}} = ((g^{\alpha^{-1}})_{i1}, (g^{\alpha^{-1}})_{i2}, \cdots, (g^{\alpha^{-1}})_{in})\theta((g^{\alpha^{-1}})_i)$$

e utilizando a equação 3.3.1 obtemos

$$(g^{\alpha^{-1}})_{ij} = \left(h(1)_j\ h(0)_{ij}\ g_{ij^{\theta(h_i)}}\ (h(0)^{-1})_{i^\theta j^{\theta(h_i g_i)}}\ (h(1)^{-1})_{j^{\theta(h_i g_i h_{i^\theta}^{-1})}}\right)^{\alpha(2)^{-1}}$$

um estado de $g^{\alpha^{-1}}$ e $\theta((g^{\alpha^{-1}})_i) = \theta(h_i g_i h_{i^\theta}^{-1}) \in S_n$.

Prosseguindo com este argumento, para cada palavra u de comprimento $m \geq 1$, podemos escrever

$$(g^{\alpha^{-1}})_u = \lambda(g, u)^{\alpha(m)^{-1}},$$

onde

$$\begin{aligned}\lambda(g,u) = &\left(h(m-1)^{s(u,m-1)}\right)_{v(u,m-1)} \cdots \left(h(1)^{s(u,1)}\right)_{v(u,1)} \left(h(0)^{s(u,0)}\right)_{v(u,0)} \cdot \\ &g_{u'} \cdot \\ &\left(h(0)^{-t(u,0)}\right)_{w(u,0)} \left(h(1)^{-t(u,1)}\right)_{w(u,1)} \cdots \left(h(m-1)^{-t(u,m-1)}\right)_{w(u,m-1)}\end{aligned}$$

e u', $v(u,j)$, $w(u,j)$ para $0 \leq j \leq m-1$ são palavras tais que $|u| = |u'|$, $|v(u,j)| = |w(u,j)| = m - j$, e onde $s(u,i)$, $t(u,i) \in \{0,\ 1\}$. Em particular,

$$\lambda(g,u) \in \langle h(0)_{e(0)}, h(1)_{e(1)}, \cdots, h(j)_{e(j)}, \cdots, h(m-1)_{e(m-1)}, g_{u'} \rangle,$$

para algumas palavras $e(j)$ de comprimento $m - j$ e alguma palavra u' de comprimento m.

Daremos agora uma condição necessária para que os elementos de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ estejam em $N_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Teorema 3.3.5. *Seja $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Então existem $\kappa \in \overline{L}_n$ e uma sequência $\{h(j)\}_{j\geq 0}$ de elementos de $G(n)$, $h(j) = (e, h(j)_2, \cdots, h(j)_n)$, tais que $\alpha' = \alpha\kappa = \cdots h(j)^{(j)} \cdots h(1)^{(1)} h(0)$. Se α' normaliza $G(n)$, então para cada $k \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ e para todo $l \geq 0$, existem $m(l) \geq 1$ e um conjunto de palavras $\{e(i) \mid |e(i)| = m(l) - i + 1,\ 0 \leq i \leq m(l) - 1\}$ tais que*

$$h(l + m(l))_k \in \langle h(l)_{e(0)}, h(l+1)_{e(1)}, \cdots, h(l+i)_{e(i)}, \cdots, h(l + m(l) - 1)_{e(m(l)-1)} \rangle.$$

Demonstração. A primeira parte já foi mostrada acima. Para a segunda parte, suponha que $\alpha' \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Então, temos da observação 3.3.1(i) que

$$\alpha'(j) = \alpha'(j+1)^{(1)} h(j) \in N_{\mathcal{A}}(G(n)),\ \forall j \geq 0.$$

Dado um inteiro positivo m, segue da observação 3.3.4(iii) que podemos escolher $g \in G(n)$, de forma que:

(i) $\partial(g^{\alpha'(0)^{-1}}) = m$ e portanto, existe uma palavra u, de comprimento $m \geq 1$, tal que $(g^{\alpha'(0)^{-1}})_u \neq e$, $(g^{\alpha'(0)^{-1}})_{uy} = e$, qualquer que seja $y \in \{1, 2, \cdots, n\}$;

(ii) $(g^{\alpha'(0)^{-1}})_u = \theta \in S_n$, onde $1^\theta = k$, $k \in \{2, 3, \cdots, n\}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\theta &= (g^{\alpha'(0)^{-1}})_u \\
&= \lambda(g,u)^{\alpha'(m)^{-1}} \\
&= [(\lambda(g,u)_1, \lambda(g,u)_2, \cdots, \lambda(g,u)_n)\theta]^{\alpha'(m)^{-1}} \\
&\overset{\text{eq.3.3.1}}{=} ((\lambda(g,u)_1(h(m)^{-1})_{1^\theta})^{\alpha'(m+1)^{-1}}, \\
&\qquad (h(m)_2\lambda(g,u)_2(h(m)^{-1})_{2^\theta})^{\alpha'(m+1)^{-1}}, \\
&\qquad \cdots, \\
&\qquad (h(m)_n\lambda(g,u)_n(h(m)^{-1})_{n^\theta})^{\alpha'(m+1)^{-1}})\theta.
\end{aligned}$$

Então, $\lambda(g,u)_1 = h(m)_k$. Como

$$\begin{aligned}
\lambda(g,u) = {} & \left(h(m-1)^{s(u,m-1)}\right)_{v(u,m-1)} \cdots \left(h(1)^{s(u,1)}\right)_{v(u,1)} \left(h(0)^{s(u,0)}\right)_{v(u,0)} \cdot \\
& g_{u'} \cdot \\
& \left(h(0)^{-t(u,0)}\right)_{w(u,0)} \left(h(1)^{-t(u,1)}\right)_{w(u,1)} \cdots \left(h(m-1)^{-t(u,m-1)}\right)_{w(u,m-1)}
\end{aligned}$$

Obtemos,

$$\begin{aligned}
h(m)_k = \lambda(g,u)_1 = {} & \left(h(m-1)^{s(u,m-1)}\right)_{v(u,m-1)y_{m-1}} \cdots \left(h(1)^{s(u,1)}\right)_{v(u,1)y_1} \left(h(0)^{s(u,0)}\right)_{v(u,0)y_0} \cdot \\
& g_{u'x} \cdot \\
& \left(h(0)^{-t(u,0)}\right)_{w(u,0)z_0} \left(h(1)^{-t(u,1)}\right)_{w(u,1)z_1} \cdots \left(h(m-1)^{-t(u,m-1)}\right)_{w(u,m-1)z_{m-1}}
\end{aligned}$$

para algum y_i, x, $z_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$; na verdade $y_{m-1} = 1$.

Como observamos anteriormente em 3.3.4(ii), $m = \partial(g^{\alpha'(0)^{-1}}) \geq \partial(g)$, então $g_{u'x} = e$, pois $|u'x| = m + 1$. Obtemos assim que

$$h(m)_k \in \langle h(0)_{e(0)}, h(1)_{e(1)}, \cdots, h(m-1)_{e(m-1)} \rangle$$

onde $e(i)$ é uma palavra de comprimento $m-i+1$, $0 \leq i \leq m-1$.

De maneira geral, para $l \geq 1$, escrevemos $\alpha' = \alpha'(l)^{(l)} f(l-1)$ onde $f(l-1) = h(l-1)^{(l-1)} \cdots h(1)^{(1)} h(0)$. Assim, dado $f_0 \in G(n)$ temos

$$f_0{}^{\alpha'^{-1}} = \alpha'(l)^{(l)} f \alpha'(l)^{-(l)},$$

onde $f = f(l-1).f_0.f(l-1)^{-1}$.

Devido a observação 3.3.4(iii), podemos escolher f_0 tal que:

(i) $\partial(f) \geq l$. Portanto, f possui um estado $f_v = g \neq e$, para alguma palavra v de comprimento l, tal que $g^{\alpha'(l)^{(-1)}} \neq e$. Seja $m(l) \geq 1$ a profundidade de $g^{\alpha'(l)^{(-1)}}$. Existe uma palavra u de comprimento $m(l)$ tal que $(g^{\alpha'(l)^{-1}})_u = \theta \in S_n$ e $(g^{\alpha'(l)^{-1}})_{uy} = e$, $\forall\ y \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

(ii) $\theta \in S_n$ onde $1^\theta = k \neq 1$.

Por outro lado, utilizando a equação 3.3.1 obtemos

$$g^{\alpha'(l)^{-1}} = \\ = \left((h(l)_1 g_1 (h(l)^{-1})_{1^\theta})^{\alpha'(l+1)^{-1}}, (h(l)_2 g_2 (h(l)^{-1})_{2^\theta})^{\alpha'(l+1)^{-1}}, \cdots, (h(l)_n g_n (h(l)^{-1})_{n^\theta})^{\alpha'(l+1)^{-1}} \right) \theta. \tag{3.3.2}$$

Assim, $(g^{\alpha'(l)^{-1}})_i = (h(l)_i g_i (h(l)^{-1})_{i^\theta})^{\alpha'(l+1)^{-1}}$.

Agora, fazendo $h(l)_i = (h(l)_{i1}, \cdots, h(l)_{in})\theta(h_i)$, $g_i = (g_{i1}, \cdots, g_{in})\theta(g_i)$, onde, $\theta(h_i)$ e $\theta(g_i)$ estão em S_n, e utilizando novamente a equação 3.3.1 obtemos

$$(g^{\alpha'(l)^{-1}})_i = (h(l)_i g_i (h(l)^{-1})_{i^\theta})^{\alpha'(l+1)^{-1}} = ((h^{\alpha'(l)^{-1}})_{i1}, (g^{\alpha'(l)^{-1}})_{i2}, \cdots, (g^{\alpha'(l)^{-1}})_{in})\theta((g^{\alpha'(l)^{-1}})_i)$$

onde $(g^{\alpha'(l)^{-1}})_{ij} = \left(h(l+1)_j \ h(l)_{ij} \ g_{ij^{\theta(h(l)_i)}} \ (h(l)^{-1})_{i^\theta j^{\theta(h(l)_i g_i)}} \ (h(l+1)^{-1})_{j^{\theta(h(l)_i g_i h(l)^{-1}_{i^\theta})}} \right)^{\alpha'(l+2)^{-1}}$
é um estado de $g^{\alpha'(l)^{-1}}$ e $\theta((g^{\alpha'(l)^{-1}})_i) = \theta(h(l)_i g_i h(l)^{-1}_{i^\theta}) \in S_n$.

Prosseguindo com este argumento, para cada palavra u de comprimento $m(l)$, podemos escrever

$$(g^{\alpha'(l)^{-1}})_u = \lambda(g, u)^{\alpha'(l+m(l))^{-1}}$$

onde

$$\lambda(g,u) = \left(h(l+m(l)-1)^{s(u,m(l)-1)}\right)_{v(u,m(l)-1)} \cdots \left(h(l+1)^{s(u,1)}\right)_{v(u,1)} \left(h(l)^{s(u,0)}\right)_{v(u,0)} \cdot$$
$$g_{u'} \cdot$$
$$\left(h(l)^{-t(u,0)}\right)_{w(u,0)} \left(h(l+1)^{-t(u,1)}\right)_{w(u,1)} \cdots \left(h(l+m(l)-1)^{-t(u,m(l)-1)}\right)_{w(u,m(l)-1)} . \tag{3.3.3}$$

e $|u| = |u'|,\ |v(u,j)| = |w(u,j)| = m(l) - j,\ 0 \leq j \leq m(l)-1$, e onde $s(u,i),\ t(u,i) \in \{0,1\}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\theta &= (g^{\alpha'(l)^{-1}})_u \\
&= \lambda(g,u)^{\alpha'(l+m(l))^{-1}} \\
&= [(\lambda(g,u)_1, \lambda(g,u)_2, \lambda(g,u)_n)\theta]^{\alpha'(l+m(l))^{-1}} \\
&\overset{\text{eq.3.3.1}}{=} ((\lambda(g,u)_1(h(l+m(l))^{-1})_{1^\theta})^{\alpha'(l+m(l)+1)^{-1}}, \\
&\qquad (h(l+m(l))_2 \lambda(g,u)_2 (h(l+m(l))^{-1})_{2^\theta})^{\alpha'(l+m(l)+1)^{-1}}, \\
&\qquad \cdots, \\
&\qquad (h(l+m(l))_n \lambda(g,u)_n (h(l+m(l))^{-1})_{n^\theta})^{\alpha'(l+m(l)+1)^{-1}})\theta.
\end{aligned}$$

Então, $\lambda(g,u)_1 = h(l+m(l))_k$, e da equação 3.3.3 obtemos,

$$\begin{aligned}
&h(l+m(l))_k \\
&=\lambda(g,u)_1 \\
&= \left(h(l+m(l)-1)^{s(u,m(l)-1)}\right)_{v(u,m(l)-1)y_{m(l)-1}} \cdots \left(h(l+1)^{s(u,1)}\right)_{v(u,1)y_1} \left(h(l)^{s(u,0)}\right)_{v(u,0)y_0} \cdot \\
&\quad g_{u'x} \cdot \\
&\quad \left(h(l)^{-t(u,0)}\right)_{w(u,0)z_0} \left(h(l+1)^{-t(u,1)}\right)_{w(u,1)z_1} \cdots \left(h(l+m(l)-1)^{-t(u,m(l)-1)}\right)_{w(u,m-1)z_{m(l)-1}}
\end{aligned}$$

para algum $y_i,\ x,\ z_i \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Como observamos em 3.3.4(ii), $m = \partial(g^{\alpha'(l)^{-1}}) \geq \partial(g)$, então $g_{u'x} = e$, pois $|u'x| = m(l)+1$. Obtemos assim que

$$h(l+m(l))_k \in \langle h(l)_{e(0)}, h(l+1)_{e(1)}, \cdots, h(l+m(l)-1)_{e(m(l)-1)} \rangle$$

onde $e(i)$ é uma palavra de comprimento $m(l) - i + 1$, $0 \leq i \leq m(l) - 1$. ■

Devido a observação 3.3.2, no teorema anterior podemos tomar α' tal que

$$h(j) = (h(j)_1, h(j)_2, \cdots, h(j)_{i-1}, e, h(j)_{i+1}, \cdots, h(j)_n) \in G(n), \ \forall j \geq 0.$$

Corolário 3.3.6. *Seja $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ tal que $\alpha' = \alpha\kappa = \cdots h(j)^{(j)} \cdots h(1)^{(1)} h(0)$ para algum $\kappa \in \overline{L}_n$, e*

$$h(j) = (e, h(j)_2, \cdots, h(j)_n), \ h(j)_i \in G(n), \ \forall j \geq 0, \ 2 \leq i \leq n.$$

Se existe um inteiro $j_0 \geq 0$ tal que a sequência $\{\partial(h(j)) \mid j \geq j_0\}$ é não decrescente, então $\alpha \notin N_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Demonstração. Suponha que $\alpha' \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Segue do teorema 3.3.5 que para $l \geq j_0$, existe $m(l) \geq 1$ tal que

$$h(l + m(l))_k \in \langle h(l)_{e(0)}, h(l+1)_{e(1)} \cdots, h(l + m(l) - 1)_{e(m(l)-1)} \rangle, \tag{3.3.4}$$

para cada $k \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, onde $|e(i)| \geq 2$. Seja $d = \partial(h(l + m(l)))$, então existe $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $\partial(h(l + m(l))_k) = d - 1$. Por hipótese, $\partial(h(l + m(l))) \geq \partial(h(l + i))$, $0 \leq i \leq m(l) - 1$. Então $d - 1 = \partial(h(l + m(l))_k) > \partial(h(l + i)_{e(i)})$, $0 \leq i \leq m(l) - 1$, pois $|e(i)| \geq 2$, e isto contradiz a inclusão em (3.3.4) (veja observação 3.3.4(i)). ■

Como consequência do corolário 3.3.6, obtemos que o teorema 3.2.10 continua válido se trocarmos S pelo semigrupo $T = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(1)}(g_1, \cdots, g_{n-1}, e), \ g_i \in G(n)\}$.

Corolário 3.3.7. *Seja $T = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(1)}(g_1, \cdots, g_{n-1}, e), \ g_i \in G(n)\}$. Então T é um subsemigrupo de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ com a propriedade que $End_{\mathcal{A}}(G(n)) \bigcap T^{-1} = \{e\}$.*

Demonstração. Dado $\alpha \in T$ temos, na notação do corolário, $h(j) = (g_1, \cdots, g_{n-1}, e)$, $\forall \ j \geq 0$. Assim, a sequência $\{\partial(h(j)) \mid j \geq 0\}$ é constante e portanto, $\alpha^{-1} \notin End_{\mathcal{A}}(G(n))$. A demonstração de que T é um semigrupo é análoga a do lema 3.2.2. ■

Lema 3.3.8. *Seja $\alpha = \cdots g_2^{(2)} g_1^{(1)} g_0 \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$ e para $j \geq 0$ escreva*

$$\alpha = \alpha(j)^{(j)} g_{j-1}^{(j-1)} \cdots g_1^{(1)} g_0.$$

Então $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ se, e somente se, $\alpha(j) \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ para algum (equivalentemente todo) $j \geq 0$.

Demonstração. Observamos que se $\beta \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$, então $\beta^{(1)} \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. De fato, $\forall g \in G(n)$, temos $g = (g_1, \cdots, g_n)\theta$, onde $g_i \in G(n)$ e $\theta \in S_n$. Portanto, $g^{\beta^{(1)}} = (g_1^{\beta}, \cdots, g_n^{\beta})\theta \in G(n)$, já que $g_i^{\beta} \in G(n)$. Análogo para $g^{\beta^{-(1)}}$. Assim, se $\alpha(j) \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ então $\alpha(j)^{(1)} \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$, $(\alpha(j)^{(1)})^{(1)} = \alpha(j)^{(2)} \in N_{\mathcal{A}}(G(n)), \cdots, \alpha(j)^{(j)} \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Como $\alpha = \alpha(j)^{(j)} g_{j-1}^{(j-1)} \cdots g_1^{(1)} g_0$, temos que $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. A recíproca é imediata. ■

Lema 3.3.9. *Seja $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Então $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ se, e somente se, algum (equivalentemente todo) estado de α está em $N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Em particular, $N_{\mathcal{A}}(G(n))$ é fechado por estados.*

Demonstração. Da demonstração da proposição 3.1.1, obtemos que para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\theta(0)$, temos $\alpha = \alpha_1^{(1)} g_0$; para $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n})\theta(1)$, temos $\alpha_1 = \alpha_{11}^{(1)} g_1$; para $\alpha_{11} = (\alpha_{111}, \alpha_{112}, \cdots, \alpha_{11n})\theta(2)$, temos $\alpha_{11} = \alpha_{111}^{(1)} g_2$. Continuando assim, temos que

$$\alpha = \alpha_v^{(j)} g_{j-1}^{(j-1)} \cdots g_1^{(1)} g_0, \ \forall\ j \geq 1,$$

onde a palavra $v = 11 \cdots 1$ tem comprimento j. De maneira análoga, podemos reescrever α tal que

$$\alpha = \alpha_u^{(j)} {g'}_{j-1}^{(j-1)} \cdots {g'}_1^{(1)} {g'}_0,$$

onde u é uma palavra arbitrária de comprimento $j \geq 1$. Segue do lema 3.3.8 que $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ se, e somente se $\alpha_u \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ para alguma palavra u de comprimento $j \geq 1$. ■

Corolário 3.3.10. *Seja $\alpha \in \mathcal{A}$ admitindo estados $\alpha_u \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ e $\alpha_v \notin N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Então $\alpha \notin End_{\mathcal{A}}(G(n))$.*

Demonstração. Suponha que $\alpha \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Como $\alpha_u \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ segue do lema 3.3.9 que $\alpha_v \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$ o que contradiz a hipótese. ■

Corolário 3.3.11. *Se uma isometria α está em $End_{\mathcal{A}}(G(n))$, então $Q'(\alpha)$, o conjunto dos estados próprios de α, é um subconjunto de $End_{\mathcal{A}}(G(n))$. A recíproca não é verdadeira, isto é, uma isometria que possui todos os estados em $End_{\mathcal{A}}(G(n))$ não está necessariamente em $End_{\mathcal{A}}(G(n))$.*

Demonstração. A demonstração do lema 3.3.9 nos mostra que cada estado α_u pode ser escrito na forma $\alpha_u = \cdots g_2^{(2)} g_1^{(1)} g_0$ para certos $g_i \in G(n)$. Segue da proposição 3.1.1 que $\alpha_u \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Para ver que a recíproca não vale, considere a isometria $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\theta$ dada por: $\alpha_1 = \cdots g_j^{(j)} \cdots g_1^{(1)} g_0$ onde $g_j = (e, \theta(j)_2, \cdots, \theta(j)_n)$, $e \neq \theta(j)_i \in S_n$, $\forall j \geq 0$, $2 \leq i \leq n$; $\alpha_k = g \in G(n)$, $2 \leq k \leq n$. Temos que $\alpha_k \in End_{\mathcal{A}}(G(n))$, $1 \leq k \leq n$, logo seus estados também estão em $End_{\mathcal{A}}(G(n))$. Agora observamos que $\alpha_1 \notin N_{\mathcal{A}}(G(n))$ devido ao corolário 3.3.6 e $\alpha_k = g \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. Segue do corolário 3.3.10 que $\alpha \notin End_{\mathcal{A}}(G(n))$. ∎

3.4 Endomorfismos de Finitos Estados

Definição 3.4.1. *Para $m \geq 1$ definimos*

$$\mathcal{E}_m(n) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(m)} g,\ g \in G(n)\}$$

e $\Delta_m(n) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \alpha = \alpha^{(m)} g,\ g \in G_{0,m-1}(n)\}$ *um subconjunto de* $\mathcal{E}_m(n)$.

De maneira análoga ao que foi feito no lema 3.2.2, podemos mostrar que $\mathcal{E}_m(n)$ é um semigrupo. Ainda, da proposição 3.1.2, temos que $\mathcal{E} = End_{\mathcal{F}_n}(G(n)) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{E}_m(n)$, onde $\mathcal{E}_0(n) = G(n)$.

Lema 3.4.2. *Para $m \geq 1$, o conjunto $\Delta_m(n)$ é um subgrupo de $N_{\mathcal{A}}(G(n))$ isomorfo a $G_{0,m-1}(n)$.*

Demonstração. Dados $\alpha = \alpha^{(m)} g$ e $\beta = \beta^{(m)} h$ em $\Delta_m(n)$ temos:
(i) $\alpha.\beta \in \Delta_m(n)$ pois g comuta com $\beta^{(m)}$;
(ii) $\alpha^{-1} = \alpha^{-(m)} g^{-1}$;

(iii) O elemento neutro é $\alpha = \alpha^{(m)}e$;

Logo $\Delta_m(n)$ é um grupo. Agora defina o isomorfismo

$$\phi : \Delta_m(n) \longrightarrow G_{0,m-1}(n),\ \alpha^{(m)}g \mapsto g.$$

■

Observe que para $g \in G(n)$, podemos escrever $g = g^{(m)}(g^{-(m)}g)$ e portanto, $G(n) = \mathcal{E}_0(n) \subseteq \mathcal{E}_m(n)$, $\forall\ m \geq 1$. Além disso, para $m \geq 1$, a forma $\alpha = \alpha^{(m)}g$ é única; se $\alpha = \alpha^{(m)}g$, $\beta = \beta^{(m)}h$ e $\alpha = \beta$, então $\alpha^{(m)} = \beta^{(m)}$ e $g = h$.

Proposição 3.4.3. *Sejam p, q inteiros. Se $p \neq q$, então $\mathcal{E}_p(n) \neq \mathcal{E}_q(n)$, e se $q \geq p \geq 1$ então $\mathcal{E}_p(n) \cap \mathcal{E}_q(n) = \mathcal{E}_{mdc(p,q)}(n)$.*

Demonstração. Sejam $\alpha = \alpha^{(q)}\sigma \in \mathcal{E}_q(n)$ e $q > p$. Suponha por contradição que $\mathcal{E}_q(n) = \mathcal{E}_p(n)$, então existe $\beta = \beta^{(p)}h \in \mathcal{E}_p(n)$ tal que $\alpha = \beta$. Temos

$$\alpha = \alpha^{(q)}\sigma = \alpha^{(2q)}\sigma^{(q)}\sigma = \cdots = \alpha^{(pq)}\sigma^{((p-1)q)}\cdots\sigma^{(q)}\sigma,$$

e como $\alpha = \beta$ também temos,

$$\alpha = \alpha^{(p)}h = \alpha^{(2p)}h^{(p)}h = \cdots = \alpha^{(qp)}h^{((q-1)p)}\cdots h^{(p)}h.$$

Segue que $\sigma^{((p-1)q)}\cdots\sigma^{(q)}\sigma = h^{((q-1)p)}\cdots h^{(p)}h$. Aplicando a função profundidade a ambos os membros obtemos

$$(p-1)q = (q-1)p + \partial(h),\ q = p - \partial(h) \leq p$$

o que contradiz a escolha $q > p$.

Para a segunda afirmação, dado $\alpha = \alpha^{(d)}g \in \mathcal{E}_d(n)$, $d = mdc(p,q)$, podemos escrever $p = dp_1$ e $q = dq_1$, para alguns inteiros $p_1,\ q_1$. Assim,

$$\alpha = \alpha^{(d)}g = \alpha^{(2d)}g^{(d)}g = \cdots = \alpha^{(p_1 d)}g^{((p_1-1)d)}\cdots\ g^{(d)}g \in \mathcal{E}_p(n)$$

e da mesma forma

$$\alpha = \alpha^{(d)}g = \alpha^{(q_1 d)}g^{((q_1-1)d)}\cdots\ g^{(d)}g \in \mathcal{E}_q(n),$$

e portanto, $\alpha \in \mathcal{E}_p(n) \cap \mathcal{E}_q(n)$. Por outro lado, dado $\alpha = \alpha^{(p)}h = \alpha^{(q)}g$, $q = sp + r$ (ou $r = q - sp$) temos

$$\alpha = \alpha^{(p)}h = \alpha^{(2p)}h^{(p)}h = \cdots = \alpha^{(sp)}h^{((s-1)p)} \cdots h^{(p)}h = \alpha^{(sp)}h',$$

onde $h' = h^{((s-1)p)} \cdots h^{(p)}h$. Segue que $\alpha^{(r)} = \alpha^{(sp+r)}h'^{(r)}$, que implica $\alpha^{(q)} = \alpha^{(r)} \left(h'\right)^{-(r)}$. Assim,

$$\alpha = \alpha^{(q)}g = \alpha^{(r)} \left(h'\right)^{-(r)} g = \alpha^{(r)}h_1 \in \mathcal{E}_r(n)$$

onde $h_1 = \left(h'\right)^{-(r)} g \in G(n)$. Pelo algoritmo de Euclides, $p = s_1 r + r_1,\ s_1 \geq 0,\ 0 \leq r_1 < r$, e repetimos o argumento acima utilizando $\alpha = \alpha^{(r)}h_1 = \alpha^{(p)}h$. Prosseguindo, atingiremos $\alpha = \alpha^{(d)}f \in \mathcal{E}_d(n)$. ■

Observação 3.4.4. Dados $e \neq g = (e, g_2, \cdots, g_n) \in G(n)$ e $q > 0$, temos que $\alpha = \alpha^{(q)}g \in \mathcal{E}_q(n) \backslash \mathcal{E}_p(n)$ para todo $p < q$. De fato, se $\alpha \in \mathcal{E}_p(n)$ então da proposição anterior temos $\alpha \in \mathcal{E}_d(n)$ onde $d = mdc(p, q)$. E utilizando o argumento da demonstração anterior, obtemos $\alpha = \alpha^{(0)}h^{(d)}g$, para algum $h \in G(n)$. O que implica em $e = h^{(d)}g$ ou ainda, $g = h^{-(d)}$ e isto contradiz a escolha de g.

Dado $m > 0$, existe um primo $p > m$, logo $\mathcal{E}_1(n) \subseteq \mathcal{E}_m(n)$. Agora, do corolário 3.3.7, temos que $\mathcal{E}_m(n) \nsubseteq N_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Proposição 3.4.5. *Seja $U_m(n) = \{\alpha = \alpha^{(m)}g \mid g \in G(n),\ g_{1^m} = e\}$. Então $U_m(n)$ é um transversal a esquerda de $G(n)$ em $\mathcal{E}_m(n)$. Além disso, seja $V_m(n) = \{\alpha = \alpha^{(m)}g \mid g = (e, g_{1^{m-1}1}, \cdots, g_{n^m})\}$. Então, $\mathcal{E}_m(n) = V_m(n)\Delta_m(n)G(n)$ e a correspondente fatorização dos elementos de $\mathcal{E}_m(n)$ é única.*

Demonstração. Demonstração análoga a dada em [8]. ■

Observe que dado $\alpha = \alpha^{(1)}g$, onde $g = (g_1, \cdots, g_n)\theta_1'$, então existe $r \in G(n)$ tal que, $\alpha r = (\alpha r)^{(1)}(e, h_2, \cdots, h_n)\theta$. De fato, escrevendo

$$\alpha = (\alpha g_1)^{(1)}(e, g_1^{-1}g_2, g_1^{-1}g_3, \cdots, g_1^{-1}g_n)\theta_1',$$

e multiplicando ambos os membros por $g_1 = (g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1n})\theta_2$, obtemos

$$\alpha g_1 = (\alpha g_1)^{(1)}(g_{(11)^{\theta_1'}}, g_1^{-1}g_2 g_{(12)^{\theta_1'}}, \cdots, g_1^{-1}g_n g_{(1n)^{\theta_1'}})\theta_1'\theta_2$$

Se $g_{(11)^{\theta'_1}} = e$, fazemos $r = g_1$. Senão, repetimos o procedimento e numa quantidade finita de passos, já que $\partial(g) < \infty$, obteremos o r desejado.

Teorema 3.4.6. *$N_{\mathcal{E}_1(n)}(G(n)) = \Delta_1(n)G(n)$.*

Demonstração. Suponha que $\alpha = \alpha^{(1)}g \in N_{\mathcal{E}_1(n)}(G(n))$. Pelo observado acima, existe $r = (r_1, \cdots, r_n)\theta \in G(n)$ tal que $\alpha r = \beta = \beta^{(1)}(e, h_2, \cdots, h_n)\theta_1$, onde $h_i \in G(n)$, $2 \leq i \leq n$ e $\theta_1 \in S_n$. Se $\theta_1 = e$, então $\beta = \beta^{(1)}(e, h_2, \cdots, h_n)$ e pelo corolário 3.3.7, $h_i = e$. Logo, $\alpha r = \beta = e$ ou seja, $\alpha = r \in G(n)$. Se $\theta_1 \neq e$, então usando $\delta = \delta^{(1)}{\theta_1}^{-1} \in \Delta_1(n)$, temos que $\beta\delta = \beta^{(1)}(e, h_2, \cdots, h_n)\theta_1\delta^{(1)}{\theta_1}^{-1} = (\beta\delta)^{(1)}(e, h_2^{\delta}, \cdots, h_n^{\delta})$, onde ${h_i}^{\delta} \in G(n)$. Segue novamente do corolário 3.3.7 que $h_i^{\delta} = e$. Portanto, $\beta\delta = e$ ou equivalentemente, $\alpha = \delta^{-1}r^{-1} \in \Delta_1(n)G(n)$. A outra inclusão segue imediatamente da proposição 3.4.5. ∎

3.4.1 Fatores comutativos

Sabemos da observação 3.3.1 que para $\alpha = \cdots {g_2}^{(2)}{g_1}^{(1)}g_0$, onde o conjunto $\{g_i^{(i)}\}_{i\geq 0} \subset G(n)$ é comutativo, temos que $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$. De maneira geral, se o conjunto $\{g_i^{(im)}\}_{i\geq 0} \subset G(n)$ é comutativo então $\alpha = \cdots {g_2}^{(2m)}{g_1}^{(m)}g_0 \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Exemplo 3.4.7. Dado $m \geq 1$, definimos $L_m(n) = \langle \sigma^{(im)}, \gamma^{(im)} \mid i \geq 0 \rangle$, onde $\sigma = (n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)$ e $\gamma = (1\ 2)$ são permutações de S_n. Então, todo elemento α de $L_m(n)$ pode ser escrito na forma

$$\alpha = \theta_r^{(rm)} \cdots \theta_2^{(2m)}\theta_1^{(m)}\theta_0$$

onde $\theta_i \in S_n$, $0 \leq i \leq r$. Note que $\theta_i^{(im)}$ comuta com $\theta_j^{(jm)}$. Seja $\overline{L}_m(n)$ o fecho de $L_m(n)$ em relação ao produto infinito de seus elementos. Dado $\alpha \in \overline{L}_m(n)$, temos que

$$\alpha = \cdots \theta_r^{(rm)} \cdots \theta_2^{(2m)}\theta_1^{(m)}\theta_0$$

onde o conjunto $\{\theta_i^{(im)} \mid i \geq 0\}$ é comutativo e, pelo observado anteriormente, $\alpha \in N_{\mathcal{A}}(G(n))$, logo $\overline{L}_m(n) \leq N_{\mathcal{A}}(G(n))$.

Agora, para $m \geq 1$, dado $h \in G(n)$ tal que o conjunto

$$P_{(m,h)}(n) = \{h, h^{(m)}, h^{(2m)}, \cdots, h^{(sm)}, \cdots\}$$

é comutativo, então $\alpha = \alpha^{(m)}h \in N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n))$. Descrevemos os elementos $h = (e, g_2, \cdots, g_n)$ $\in G(n)$ para os quais $P_{(m,h)}(n)$ é comutativo. Devido ao corolário 3.3.7, para $m = 1$, $P_{(1,h)}(n)$ é comutativo somente quando $h = e$.

Proposição 3.4.8. *Sejam $m \geq 2$, $h = (g_1, g_2, \cdots, g_n) \in G(n)$ onde $g_1 = e$ e $h \neq e$. Então, $P_{(m,h)}(n)$ é um conjunto comutativo se e somente se, para toda palavra u de comprimento $sm-1$, $s \geq 1$, $g_{iu} = (g_{iu1}, g_{iu2}, \cdots, g_{iun})\theta_{iu}$, satisfaz o sistema*

$$A_i = \begin{cases} g^{-1}_{iu(1)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g^{-1}_{(1)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_{iu(1)^{\theta^{-1}_{iu}}} = e \\ g^{-1}_{iu(2)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g^{-1}_{(2)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_{iu(2)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_2 = e \\ \vdots \\ g^{-1}_{iu(n)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g^{-1}_{(n)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_{iu(n)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_n = e \end{cases}$$

onde $2 \leq i \leq n$.

Demonstração. O conjunto $P_{(m,h)}(n)$ é comutativo se e somente se, $[g_i, h^{(sm-1)}] = e$, para todo $s \geq 1$ e $2 \leq i \leq n$; se e somente se, para toda palavra u de comprimento $sm-1$, temos $[g_{iu}, (e, g_2, \cdots, g_n)] = e$; se e somente se, para toda palavra u de comprimento $sm-1$, $g_{iu} = (g_{iu1}, g_{iu2}, \cdots, g_{iun})\theta_{iu}$, $2 \leq i \leq n$, satisfaz o sistema

$$A_i = \begin{cases} g^{-1}_{iu(1)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g^{-1}_{(1)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_{iu(1)^{\theta^{-1}_{iu}}} = e \\ g^{-1}_{iu(2)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g^{-1}_{(2)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_{iu(2)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_2 = e \\ \vdots \\ g^{-1}_{iu(n)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g^{-1}_{(n)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_{iu(n)^{\theta^{-1}_{iu}}} \; g_n = e \end{cases}$$

■

Corolário 3.4.9. *(i) Sejam $m \geq 2$, $h = (e, g_2, \cdots, g_n) \in G(n)$, $h \neq e$. Se para toda palavra u de comprimento $sm-1$, $s \geq 1$, temos g_{iu} inativo e $[g_{iuk}, g_k] = e$, $2 \leq i, k \leq n$, então $P_{(m,h)}(n)$ é um conjunto comutativo. Em particular, se $\partial(h) \leq m-1$ então $P_{(m,h)}(n)$ é comutativo.*

(ii) Sejam $m \geq 2$, $h = (e, g_2, \cdots, g_p) \neq e \in \mathcal{H}(p)$, p primo. Então, $P_{(m,h)}(p)$ é um conjunto comutativo se e somente se, para toda palavra u de comprimento $sm-1$, $s \geq 1$, temos g_{iu} inativo e $[g_{iuk}, g_k] = e$, $2 \leq i, k \leq p$.

Demonstração. Na primeira afirmação, as hipóteses implicam claramente que o sistema A_i é satisfeito, logo $P_{(m,h)}(n)$ é um conjunto comutativo.

Para a segunda afirmação, suponha inicialmente que $P_{(m,h)}(p)$ é um conjunto comutativo. Segue da proposição 3.4.8 que, para toda palavra u de comprimento $sm-1$, $g_{iu} = (g_{iu1}, \cdots, g_{iup})\sigma^r$, $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, satisfaz o sistema A_i. Suponha que $r \neq 0$, então σ^r é um p-ciclo e $1^{\sigma^{-r}} = a$, $a \in \{2, 3, \cdots, p-1\}$. Do sistema A_i temos

$$g^{-1}_{iu(1)^{\sigma^{-r}}} \; g^{-1}_a \; g_{iu(1)^{\sigma^{-r}}} = e \quad \Rightarrow \quad g_a = e.$$

Novamente de A_i temos

$$g^{-1}_{iu(a)^{\sigma^{-r}}} \; g^{-1}_{(a)^{\sigma^{-r}}} \; g_{iu(a)^{\sigma^{-r}}} g_a = e \quad \Rightarrow \quad g_{(a)^{\sigma^{-r}}} = e.$$

Continuando este procedimento, obtemos $g_k = e$, $\forall\ k$, ou seja, $h = e$, o que contradiz a escolha de h. Logo, $r = 0$ e segue de A_i que $[g_{iuk}, g_k] = e$, $2 \leq i, k \leq p$. A recíproca segue da parte (i). ■

Vamos considerar o subgrupo $D_m(n) = \langle \sigma^{(jm)} \mid j \geq 1 \rangle$ de $D(n) = \langle \sigma^{(j)} \mid j \geq 0 \rangle$. Vimos na proposição 3.1.7 que $D(n)$ é um grupo abeliano isomorfo ao produto direto restrito do grupo cíclico C_n. Agora vamos determinar um subgrupo de $N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n))$ isomorfo ao produto direto de $n-1$ cópias de $D_m(n)$.

Proposição 3.4.10. *Seja $m \geq 2$, então*

$$\mathbb{D}_m(n) = \{\alpha \mid \alpha = \alpha^{(m)}(e, g_2, \cdots, g_n),\ g_i \in D_m(n),\ 2 \leq i \leq n\}$$

é um subgrupo de $N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n))$ isomorfo ao produto direto de $n-1$ cópias de $D_m(n)$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $\mathbb{D}_m(n)$ é fechado para o produto. Sejam $\alpha = \alpha^{(m)}(e, \sigma^{(j_2 m)}, \cdots, \sigma^{(j_n m)})$ e $\beta = \beta^{(m)}(e, \sigma^{(t_2 m)}, \cdots, \sigma^{(t_n m)})$ elementos de $\mathbb{D}_m(n)$.

Então

$$\alpha\beta = (\alpha\beta)^{(m)}(e, \left(\sigma^{(j_2 m)}\right)^{\beta^{(m-1)}}, \cdots, \left(\sigma^{(j_n m)}\right)^{\beta^{(m-1)}})(e, \sigma^{(t_2 m)}, \cdots, \sigma^{(t_n m)}). \qquad (3.4.1)$$

Agora, notamos que $\left(\sigma^{(jm-i+1)}\right)^{\beta^{(m-i)}} = \sigma^{(jm-i+1)}$ $\forall$, $j \geq 1$, $0 \leq i \leq m-1$. Vamos mostrar isto por indução em j. Para $j = 1$ temos

$$\begin{aligned}\left(\sigma^{(m-i+1)}\right)^{\beta^{(m-i)}} &= \left((\sigma^{(1)})^{(m-i)}\right)^{\beta^{(m-i)}} = \left((\sigma^{(1)})^{\beta}\right)^{(m-i)} = \left((\sigma^{(1)})^{\beta^{(m)}(e,\sigma^{(mt)},\cdots,\sigma^{(mt)})}\right)^{(m-i)} \\ &= \left((\sigma^{(1)})^{(e,\sigma^{(mt)},\cdots,\sigma^{(mt)})}\right)^{(m-i)} = \left(\sigma^{(1)}\right)^{(m-i)} = \sigma^{(m-i+1)}.\end{aligned}$$

Para $j \geq 2$ temos,

$$\begin{aligned}\left(\sigma^{(jm-i+1)}\right)^{\beta^{(m-i)}} &= \left((\sigma^{((j-1)m+1)})^{(m-i)}\right)^{\beta^{(m-i)}} = \left((\sigma^{((j-1)m+1)})^{\beta}\right)^{(m-i)} \\ &= \left((\sigma^{((j-1)m+1)})^{\beta^{(m)}(e,\sigma^{(mt)},\cdots,\sigma^{(mt)})}\right)^{(m-i)} \\ &= \left((\sigma^{((j-1)m+1)})^{(e,\sigma^{(mt)},\cdots,\sigma^{(mt)})}\right)^{(m-i)} \quad \text{(indução)} \\ &= \left(((\sigma^{((j-1)m)})^{(1)})^{(e,\sigma^{(mt)},\cdots,\sigma^{(mt)})}\right)^{(m-i)} \\ &= \left((\sigma^{((j-1)m)})^{(1)}\right)^{(m-i)} = \sigma^{(jm-i+1)}.\end{aligned}$$

Voltando a equação 3.4.1 obtemos

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (\alpha\beta)^{(m)}(e, \sigma^{(j_2 m)}, \cdots, \sigma^{(j_n m)})(e, \sigma^{(t_2 m)}, \cdots, \sigma^{(t_n m)}) \\ &= (\alpha\beta)^{(m)}(e, \sigma^{(j_2 m)}\sigma^{(t_2 m)}, \cdots, \sigma^{(j_n m)}\sigma^{(t_n m)})\end{aligned}$$

Então, de maneira geral, dados $\alpha = \alpha^{(m)}(e, g_2, \cdots, g_n)$ e $\beta = \beta^{(m)}(e, h_2, \cdots, h_n)$ com g_i e h_i em $D_m(n)$ temos

$$\alpha\beta = (\alpha\beta)^{(m)}(e, g_2 h_2, \cdots, g_n h_n).$$

Agora observamos que para os elementos $g_i = \sigma^{(j_i m)}$, $2 \leq i \leq n$, do grupo $D_m(n)$ temos que $h = (e, g_2, \cdots, g_n)$ satisfaz as duas condições de comutatividade dadas no corolário 3.4.9(i). De fato, para toda palavra u de comprimento $sm-1$, $s \geq 1$, temos que: (i) se $1 \leq s \leq j_i$, então $\left(\sigma^{(j_i m)}\right)_u = \sigma^{(j_i m - |u|)} = \sigma^{((j_i - s)m+1)}$, onde $1 \leq (j_i - s)m + 1$. Assim, $\left(\sigma^{(j_i m)}\right)_u$ é inativo e $[\left(\sigma^{(j_i m)}\right)_{uk}, \sigma^{(j_i m)}] = [\sigma^{((j_i-s)m)}, \sigma^{(j_i m)}] = e, 2 \leq k \leq n$; (ii) se $s > j_i$, então $\left(\sigma^{(j_i m)}\right)_u = e$, segue que $\left(\sigma^{(j_i m)}\right)_u$ é inativo e $[\left(\sigma^{(j_i m)}\right)_{uk}, \sigma^{(jm)}] = e, 2 \leq k \leq n$. Então segue do corolário 3.4.9 que $\alpha = \alpha^{(m)} h \in N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n))$.

Concluímos que $I\!D_m(n)$ é um subgrupo de $N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n))$. O isomorfismo é dado naturalmente:

$$(g_2, g_3, \cdots, g_n) \;\mapsto\; \alpha = \alpha^{(m)}(e, g_2, \cdots, g_n),$$

$\forall\ (g_2, \cdots, g_n) \in \times_{n-1} D_m(n)$. ∎

Corolário 3.4.11. *Dado $m \geq 2$, então*

$$I\!D'_m(n) = \{\alpha \mid \alpha = \alpha^{(m)}(e, d^{n-1}, d^{n-2}, \cdots, d^2, d),\ d \in D_m(n)\}$$

é um subgrupo de $N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n))$ isomorfo a $D_m(n)$.

Demonstração. Segue imediatamente da proposição anterior. ∎

Lema 3.4.12. *Seja $m \geq 2$, então*

$$H_m(n) = \{g \in G(n) \mid \forall\ |u| = sm - 1,\ s \geq 1,\ g_u \text{ é inativo e } g_{uk} = e,\ 2 \leq k \leq n\}$$

é um subgrupo de $G(n)$. Além disso, $H_m(n) = (\times_{n^m} H_m(n))G_{0,m-2}$.

Demonstração. Sejam $g,\ h \in H_m(n)$, então para qualquer índice u tal que $|u| = sm-1$ existe um índice u' de mesmo comprimento tal que $(gh)_u = g_u h_{u'}$. Portanto, $(gh)_u$ é inativo e $(gh)_{uk} = g_{uk} h_{u'k} = e,\ 2 \leq k \leq n$. Se h é o inverso de $g \in H_m(n)$, então $\forall\ |u| = sm - 1$, temos $(hg)_u = h_u g_{u'} = e$, logo h_u é inativo e $(hg)_{uk} = h_{uk} g_{u'k} = e$ e como $g_{u'k} = e$ obtemos $h_{uk} = e,\ 2 \leq k \leq n$.

Para a segunda afirmação, observamos que $G_{0,m-2} \leq H_m(n)$ pois os elementos de $G_{0,m-2}$ têm profundidade $m - 2 < m - 1$, veja corolário 3.4.9(i). Seja $x \in \times_{n^m} H_m(n)$, u um índice de comprimento $sm - 1$, $u = ru'$, $|r| = m$, $|u'| = (s-1)m - 1$. Então, $x_r \in H_m(n)$ pois ele é uma das coordenadas de x, $x_u = (x_r)_{u'}$ e então $x \in H_m(n)$. Agora, se $g \in H_m(n)$ então para $|u| = m - 1$ temos g_u inativo e portanto, podemos escrever $g = (g_{w_1}, \cdots, g_{w_{n^m}})h$ onde $h \in G_{0,m-2}$ e $|w_i| = m$. ∎

Utilizando $H_m(n)$ vamos definir um subgrupo de $\mathcal{E}_m(n)$. Antes provamos o seguinte lema.

Lema 3.4.13. *Seja $\beta = \beta^{(m)}(e, h_2, \cdots, h_n)$ tal que $h_i \in H_m(n)$, $2 \leq i \leq n$. Então $\beta^{(m-1)}$ centraliza $H_m(n)$.*

Demonstração. Dado um arbitrário $g \in H_m(n)$ vamos verificar, por indução na profundidade de g, que $g^{\beta^{(m-1)}} = g$. Se $\partial(g) < m-1$ é imediato que $g^{\beta^{(m-1)}} = g$. Escrevemos $g = g'\pi$ onde $g' = (g'_{w_1}, \cdots, g'_{w_{n^{m-1}}}) \in Stab_{G(n)}(m-1)$, $|w_i| = m-1$ e $\pi \in G_{0,m-2}$. Então $g' = g\pi^{-1} \in H_m(n)$ devido ao lema anterior, $\partial(g) = \partial(g')$, e portanto, suas entradas g'_{w_i}, $1 \leq i \leq n^{m-1}$ são inativos. Assim, $g^{\beta^{(m-1)}} = (g')^{\beta^{(m-1)}}\pi$ e

$$
\begin{aligned}
&(g')^{\beta^{(m-1)}} \\
&\quad = (\left(g'_{w_1}\right)^{\beta}, \cdots, \left(g'_{w_{n^{m-1}}}\right)^{\beta}) \\
&\quad = (\left(g'_{w_1}\right)^{\beta^{(m)}h}, \cdots, \left(g'_{w_{n^{m-1}}}\right)^{\beta^{(m)}h}) \\
&\quad = (\left(\left(g'_{w_1 1}\right)^{\beta^{(m-1)}}, \cdots, \left(g'_{w_1 n}\right)^{\beta^{(m-1)}}\right)^{h}, \cdots, \left(\left(g'_{w_{n^{m-1}}1}\right)^{\beta^{(m-1)}}, \cdots, \left(g'_{w_{n^{m-1}}n}\right)^{\beta^{(m-1)}}\right)^{h})
\end{aligned}
$$

onde $h = (e, h_2, \cdots, h_n)$. Como $g' \in H_m(n)$ temos que $g'_{w_i k} = e$, $2 \leq k \leq n$, $g'_{w_i 1} \in H_m(n)$, $1 \leq i \leq n^{m-1}$, e têm profundidade menor que g'. Segue por indução que

$$
\begin{aligned}
(g')^{\beta^{(m-1)}} &= (\left(g'_{w_1 1}, e, \cdots, e\right)^{h}, \left(g'_{w_2 1}, e, \cdots, e\right)^{h}, \cdots, \left(g'_{w_{n^{m-1}}1}, e, \cdots, e\right)^{h}) \\
&= (\left(g'_{w_1 1}, e, \cdots, e\right), \left(g'_{w_2 1}, e, \cdots, e\right), \cdots, \left(g'_{w_{n^{m-1}}1}, e, \cdots, e\right))
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $g' \in H_m(n)$ e $|w_i| = m-1$ temos que

$$
g' = (\left(g'_{w_1 1}, e, \cdots, e\right), \left(g'_{w_2 1}, e, \cdots, e\right), \cdots, \left(g'_{w_{n^{m-1}}1}, e, \cdots, e\right)).
$$

Então, $(g')^{\beta^{(m-1)}} = g'$ que implica $(g)^{\beta^{(m-1)}} = g$. ■

Proposição 3.4.14. *Seja $m \geq 2$. Então*

$$
\mathbb{H}_m(n) = \{\alpha \mid \alpha = \alpha^{(m)}(e, g_2, \cdots, g_n),\ g_i \in H_m(n), 2 \leq i \leq n\}
$$

é um subgrupo de $N_{\mathcal{E}_{m(n)}}(G(n))$ isomorfo ao produto direto de $n-1$ cópias de $H_m(n)$. Além disso, $\mathbb{H}_m(n) \cap \mathcal{E}_r(n) = \{e\}$, qualquer que seja $r < m$.

Demonstração. Sejam $\alpha = \alpha^{(m)}(e, g_2, \cdots, g_n)$ e $\beta = \beta^{(m)}(e, h_2, \cdots, h_n)$ elementos de $I\!\!H_m(n)$. Então

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (\alpha\beta)^{(m)}(e, g_2^{\beta^{(m-1)}} h_2, \cdots, g_n^{\beta^{(m-1)}} h_n) \\ &= (\alpha\beta)^{(m)}(e, g_2h_2, \cdots, g_nh_n) \qquad (\text{ aplicando o lema 3.4.13})\end{aligned}$$

é um elemento de $I\!\!H_m(n)$. Então, $\alpha^{-1} = (\alpha^{-1})^{(m)}(e, g_2^{-1}, \cdots, g_n^{-1})$. Assim, temos um isomorfismo natural

$$(g_2, \cdots, g_n) \mapsto \alpha = \alpha^{(m)}(e, g_2, \cdots, g_n).$$

Agora segue da observação 3.4.4 que $I\!\!H_m(n) \cap \mathcal{E}_r(n) = \{e\}$, para todo $r < m$. ∎

Decorre da proposição anterior que, fixando uma coordenada j, $I\!\!H_m(n, j) = \{\alpha \mid \alpha = \alpha^{(m)}(e, \cdots, e, g_j, e, \cdots, e),\ g_j \in H_m(n)\}$ é um subgrupo de $I\!\!H_m(n)$ isomorfo a $H_m(n) = (\times_{n^m} H_m(n))G_{0,m-2}$, ou seja, $I\!\!H_m(n, j) \cong (\times_{n^m} I\!\!H_m(n, j))G_{0,m-2}$. Além disso, $I\!\!H_m(n, j) \cap \mathcal{E}_r(n) = \{e\}$, qualquer que seja $r < m$. Segue que

$$I\!\!H_m(n) \cong I\!\!H_m(n, 2) \times I\!\!H_m(n, 3) \times \cdots \times I\!\!H_m(n, n).$$

A aplicação $\rho : \alpha \to \alpha^{(1)}$ é claramente um endomorfismo de $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}_n$ e $G(n)$. Notamos ainda que ρ é também um endomorfismo de $\mathcal{E}_m(n)$. De fato, dado $\alpha = \alpha^{(m)}g \in \mathcal{E}_m(n)$ temos: $\alpha^\rho = \alpha^{(1)} = \left(\alpha^{(m)}g\right)^{(1)} = \left(\alpha^{(1)}\right)^{(m)} g^{(1)} \in \mathcal{E}_m(n)$, e portanto,

$$\rho : \alpha = \alpha^{(m)}g \mapsto \alpha^{(1)} = \left(\alpha^{(1)}\right)^{(m)} g^{(1)}$$

é um endomorfismo de $\mathcal{E}_m(n)$. Segue que $\rho \in End(N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n)))$. Assim, $I\!\!D_{m,i}(n) = (I\!\!D_m(n))^{\rho^i}$ e $I\!\!H_{m,i}(n) = (I\!\!H_m(n))^{\rho^i}$ são subgrupos de $N_{\mathcal{E}_m(n)}(G(n))$, para todo $i \geq 0$. Note ainda que $I\!\!D_{m,m}(n) \leq I\!\!D_m(n)G(n)$ e $I\!\!H_{m,m}(n) \leq I\!\!H_m(n)G(n)$.

3.4.2 Involuções de Grau 2

Iniciamos lembrando uma notação utilizada na seção 1.2 que será muito útil nesta seção. Dado $\alpha \in \mathcal{A}$ e uma palavra $u \in M$, escrevemos $u * \alpha \in \mathcal{A}$ para u fixo, como α induzido na subárvore $u\mathcal{T}_n$ e fixando os vértices fora desta subárvore.

Seja $\alpha = \alpha^{(2)}g \in \mathcal{E}_2(n)$. Se α é uma involução então $\alpha^{(2)}g = g^{-1}\alpha^{(2)}$. Reciprocamente, se $\alpha^{(2)}g = g^{-1}\alpha^{(2)}$ então $\alpha^2 = \alpha^{(2)}g\alpha^{(2)}g = \alpha^{(2)}gg^{-1}\alpha^{(2)} = \left(\alpha^{(2)}\right)^2 = (\alpha^2)^{(2)}$ e portanto $\alpha^2 = e$. Assim, $\alpha^{(2)}g = g^{-1}\alpha^{(2)}$ é equivalente a $g^{\alpha^{(2)}} = g^{-1}$. Em [8], S. Sidki e A. Brunner questionaram a respeito da caracterização de g e responderam a esta questão para as involuções básicas $g = u * \sigma$ em árvores binárias. Estendemos este resultado à árvores n-árias, para involuções $u * \theta$, onde $\theta \in S_n$ e θ não fixa vértice algum do primeiro nível da árvore.

Lembramos que θ é uma involução em S_n se, e somente se, θ pode ser escrito como um produto de transposições disjuntas. Agora, o fato de θ não fixar elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$, obriga n a ser par.

Teorema 3.4.15. *Seja $\theta \in S_n$ uma involução que não fixa vértices do primeiro nível da árvore $\mathcal{T}_n$, n par. O elemento $\alpha = \alpha^{(2)}(u * \theta)$ é uma involução se, e somente se, $u = \phi$, ou $|u| = k$ é ímpar e nenhum prefixo de u de comprimento ímpar é um sufixo de u, se e somente se, $\left\{(u * \theta)^{(2i)} \mid i \geq 0\right\}$ é comutativo.*

Demonstração. Escreva $u * \theta = v$. Temos que $\alpha = \alpha^{(2)}v$ é uma involução para $u = \phi, 1, 2, \cdots, n$, pois neste caso $\alpha \in \Delta_2(n) \leq N_{\mathcal{E}_2(n)}(G(n))$, veja lema 3.4.2. Seja $u = j_1 j_2 \cdots j_{k-2} j_{k-1} j_k$, $k \geq 2$. Como vimos no início desta subseção, α é uma involução se e somente se $v^{\alpha^{(2)}} = v$, se e somente se, $\left(v^{\alpha^{(2)}}\right)_u = v_u = \theta$.

Temos:

$$\begin{aligned} v^{\alpha^{(2)}} &= (v_1^{\alpha^{(1)}}, v_2^{\alpha^{(1)}}, \cdots, v_n^{\alpha^{(1)}}) = ((v_{11}^{\alpha}, v_{12}^{\alpha}, \cdots, v_{1n}^{\alpha}), (v_{21}^{\alpha}, v_{22}^{\alpha}, \cdots, v_{2n}^{\alpha}), \cdots, (v_{n1}^{\alpha}, v_{n2}^{\alpha}, \cdots, v_{nn}^{\alpha})) \\ &= ((v_{11}^{\alpha^{(2)}v}, v_{12}^{\alpha^{(2)}v}, \cdots, v_{1n}^{\alpha^{(2)}v}), (v_{21}^{\alpha^{(2)}v}, v_{22}^{\alpha^{(2)}v}, \cdots, v_{2n}^{\alpha^{(2)}v}), \cdots, (v_{n1}^{\alpha^{(2)}v}, v_{n2}^{\alpha^{(2)}v}, \cdots, v_{nn}^{\alpha^{(2)}v})); \end{aligned}$$

$$v_{il}^{\alpha^{(2)}v} = (v_{il1}^{\alpha^{(1)}v_1}, \cdots, v_{iln}^{\alpha^{(1)}v_n}) = ((v_{il11}^{\alpha v_{11}}, \cdots, v_{il1n}^{\alpha v_{1n}}), \cdots, (v_{iln1}^{\alpha v_{n1}}, \cdots, v_{ilnn}^{\alpha v_{nn}}));$$

$$\begin{aligned} v_{ilrs}^{\alpha v_{rs}} = v_{ilrs}^{\alpha^{(2)}vv_{rs}} &= (v_{ilrs1}^{\alpha^{(1)}v_1 v_{rs1}}, \cdots, v_{ilrsn}^{\alpha^{(1)}v_n v_{rsn}}) \\ &= ((v_{ilrs11}^{\alpha v_{11} v_{rs11}}, \cdots, v_{ilrs1n}^{\alpha v_{1n} v_{rs1n}}), \cdots, (v_{ilrsn1}^{\alpha v_{n1} v_{rsn1}}, \cdots, v_{ilrsnn}^{\alpha v_{nn} v_{rsnn}})). \end{aligned}$$

Seja $k \geq 3$. Então, para $s \leq k$, temos

$$\left(v^{\alpha^{(2)}}\right)_{j_1 j_2 \cdots j_{s-1} j_s} = v_{j_1 j_2 \cdots j_{s-1} j_s}^{E},$$

onde

$$E = \begin{cases} \alpha^{(1)} v_{j_s}(v_{j_{s-2}j_{s-1}j_s})(v_{j_{s-5}j_{s-4}j_{s-3}j_{s-2}j_{s-1}j_s})\cdots(v_{j_3j_4\cdots j_{s-2}j_{s-1}j_s}), & \text{se } s \geq 3 \text{ é ímpar },\\ \alpha(v_{j_{s-1}j_s})(v_{j_{s-3}j_{s-2}j_{s-1}j_s})\cdots(v_{j_3j_4\cdots j_{s-2}j_{s-1}j_s}), & \text{se } s \geq 2 \text{ é par }. \end{cases}$$

Agora tomamos $s = k$ e vamos supor que k é par. Então, para

$$w = (v_{j_{k-1}j_k})(v_{j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k})\cdots(v_{j_3j_4\cdots j_{k-2}j_{k-1}j_k})$$

temos $\theta = \left(v^{\alpha^{(2)}}\right)_u = v_u^E = v_u^{\alpha w} = \theta^{\alpha^{(2)} vw} = \theta^{vw}$. Escrevendo $vw = (v_1w_1, \cdots, v_nw_n)$, obtemos de $\theta = \theta^{vw}$ que

$$v_1w_1 = v_{1^\theta}w_{1^\theta},\ v_2w_2 = v_{2^\theta}w_{2^\theta},\ \cdots,\ v_nw_n = v_{n^\theta}w_{n^\theta}.$$

Sabemos que existe $i(= j_1) \in I = \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $v_i \neq e$ e $v_j = e,\ \forall\ j \neq i,\ j \in I$. Assim, $v_iw_i = v_{i^\theta}w_{i^\theta}$ ou ainda, $v_i = v_{i^\theta}w_{i^\theta}w_i^{-1}$. Por hipótese, θ não fixa elementos de I, logo $i^\theta \neq i$ e portanto $v_{i^\theta} = e$. Segue que $v_i = w_{i^\theta}w_i^{-1}$. Mas como $\partial(v_i) > \partial(w_{i^\theta}w_i^{-1})$, temos uma contradição. Portanto k é ímpar. Escreva

$$w = (v_{j_{k-2}j_{k-1}j_k})(v_{j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k})\cdots(v_{j_3j_4\cdots j_{k-2}j_{k-1}j_k}).$$

Então temos $\theta = \left(v^{\alpha^{(2)}}\right)_u = v_u^E = v_u^{\alpha^{(1)} v_{j_k} w} = \theta^{\alpha^{(1)} v_{j_k} w} = \theta^{v_{j_k} w}$. Escrevendo $v_{j_k}w = (v_{j_k1}w_1, \cdots, v_{j_kn}w_n)$, obtemos de $\theta = \theta^{v_{j_k}w}$ que

$$v_{j_k1}w_1 = v_{j_k(1)^\theta}w_{1^\theta},\ v_{j_k2}w_2 = v_{j_k(2)^\theta}w_{2^\theta},\ \cdots,\ v_{j_kn}w_n = v_{j_k(n)^\theta}w_{n^\theta}.$$

ou equivalentemente,

$$\left(v_{j_k(1)^\theta}\right)^{-1} v_{j_k1} = w_{1^\theta}w_1^{-1},\ \left(v_{j_k(2)^\theta}\right)^{-1} v_{j_k2} = w_{2^\theta}w_2^{-1},\ \cdots,\ \left(v_{j_k(n)^\theta}\right)^{-1} v_{j_kn} = w_{n^\theta}(w_n)^{-1}.$$

Em cada uma das equações acima, a profundidade do primeiro membro é diferente da do segundo quando algum deles é não trivial. Isto implica que cada membro é igual a identidade. Portanto,

$$v_{j_k(1)^\theta} = v_{j_k1} \Rightarrow v_{j_k(1)^\theta} = v_{j_k1} = e,\ w_1 = w_{1^\theta}$$

$$\cdots$$

$$v_{j_k(n)^\theta} = v_{j_kn} \Rightarrow v_{j_k(n)^\theta} = v_{j_kn} = e,\ w_n = w_{n^\theta}$$

Então $v_{j_k} = e$ e, portanto, $j_1 \neq j_k$. A equação $w_i = w_{i^\theta}$ fornece

$$v_{j_{k-2}j_{k-1}j_k i} = v_{j_{k-2}j_{k-1}j_k(i)^\theta} = e, \ 1 \leq i \leq n,$$

ou seja, $v_{j_{k-2}j_{k-1}j_k} = e$, portanto $j_1 j_2 j_3 \neq j_{k-2}j_{k-1}j_k$.

Então, $w = (v_{j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k})(v_{j_{k-7}j_{k-6}j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k}) \cdots (v_{j_3 j_4 \cdots j_{k-2}j_{k-1}j_k})$ e

$$\theta = \theta^{v_{j_k} w} = \theta^w = \theta^{v_{j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k} w'},$$

onde $w' = (v_{j_{k-7}j_{k-6}j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k}) \cdots (v_{j_3 j_4 \cdots j_{k-2}j_{k-1}j_k})$. Repetindo a argumentação acima, obtemos $v_{j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k} = v_{j_{k-7}j_{k-6}j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k} = e$, portanto $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 \neq j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k$ e $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6 j_7 \neq j_{k-6}j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k$. De maneira geral obtemos,

$$v_{j_k} = v_{j_{k-2}j_{k-1}j_k} = v_{j_{k-5}j_{k-4}j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k} = \ \cdots \ = v_{j_3 j_4 \cdots j_{k-3}j_{k-2}j_{k-1}j_k} = e,$$
$$i_1 \neq i_k, \quad j_1 j_2 j_3 \neq j_{k-2}j_{k-1}j_k, \quad \cdots, \quad j_1 j_2 \cdots j_{k-2} \neq j_3 j_4 \cdots j_{k-2}j_{k-1}j_k.$$

Se o conjunto $A = \left\{(u * \theta)^{(2i)} \mid i \geq 0\right\}$ é comutativo então α é claramente uma involução. Suponha que $u = \phi$, então $A = \left\{\theta^{(2i)} \mid i \geq 0\right\}$ é comutativo. Agora suponha que $|u| = k$ é ímpar e nenhum prefixo de u de comprimento ímpar é um sufixo de u. Se $k = 1$ então $\alpha \in \Delta_2(n)$, veja lema 3.4.2, portanto A é comutativo. Suponha $k \geq 3$ e $u = iu_1$, para algum $i \in I, \ i \geq 2$. Então $iu_1 * \theta = (e, \cdots, e, g_i, e, \cdots, e)$. Pelo corolário 3.4.9, precisamos mostrar que para todo w de comprimento ímpar g_{iw} é inativo e $[g_{iwi}, g_i] = e$.

Como $g_i = u_1 * \theta$ temos $g_{ir} = e$, exceto quando r é um prefixo de u_1. Se w é um prefixo de u_1 de comprimento ímpar então $u_1 = wu_1'$ e $g_{iw} = u_1' * \theta$ o qual é ativo somente quando $u_1' = \phi$, portanto $u_1 = w$; o que não pode ocorrer pois $|u_1|$ é par. Agora suponha que wi é um prefixo de u_1, isto é, $u_1 = wiu_1'$. Então, $g_{iwi} = u_1' * \theta$. Como u_1' é um sufixo de u_1 de comprimento ímpar, ele não pode ser um prefixo de u_1 e portanto $[g_{iwi}, g_i] = [u_1' * \theta, u_1 * \theta] = e$. ∎

Referências Bibliográficas

[1] GRIGORCHUK, R., *On Burnside´s problem on periodic groups*, Functional Anal. Appl. **14** (1980), 41-43.

[2] GUPTA, N.; SIDKI, S. N., *On the Burnside problem for periodic groups*, Math. Z.,**182** (1983), 385-388.

[3] SIDKI, S. N., *On a 2-generated infinite 3-group: the presentation problem*, J. Algebra, **110** (1987), 13-23.

[4] SIDKI, S. N., *On a 2-generated infinite 3-group: subgroups and automorphisms*, J. Algebra, **110** (1987), 24-55.

[5] BASS, H.; OTERO-ESPINAR, M. V.; ROCKMORE, D.; TRESSER, C., *Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees*, Lecture Notes in Mathematics, v. 1621, Springer-Verlag, Berlim, 1996.

[6] SIDKI, S. N., *Regular trees and their automorphisms*, Monografias em Matemática, **56**, IMPA, Rio de janeiro, 1998.

[7] BRUNNER, A. M.; SIDKI, S. N., *On the automorphism group of the one-rooted binary tree*, Journal of Algebra, **195** (1997), 465-486.

[8] BRUNNER, A. M.; SIDKI, S. N., *Endomorphisms of the finitary group of isometries of the binary tree*, Contemporary Mathematics, **394** (2006), 221-234.

[9] EILENBERG, S., *Automata, languages and machines*, v. A, New york, Academic Press, 1974.

[10] NEKRASHEVYCH, V., *Self-similar groups.* Math. Surveys Monogr., **117**, 2005.

[11] BERLATTO, A. A.; SIDKI, S. N., *Virtual endomorphisms of nilpotent groups*, Groups Geom. Dyn. **1**, European Math. Soc., (2007) 21-46.

[12] ROCHA, J. S., *Máquina de adição n-ádica e grupos solúveis*. 2007. Tese(Doutorado em Matemática) - Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

[13] SIDKI, S. N., *Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure and acyclicity*, Trabalhos de Matemática nº **313**, Universidade de Brasília, Brasília, 1998.

[14] BARTHOLDI, L.; SIDKI, S. N., *The automorphism tower of groups acting on rooted trees*, Trans. of the Amer. Math. Soc., **358** (2005), 329-358.

[15] GRIGORCHUK, R., *Just infinite branch groups*, New Horizons in pro-p Groups, Progress in Mathematics, **184** (2000), 121-179.

[16] LAVRENIUK, Y.; NEKRASHEVYCH, V., *Rigidity of branch groups acting on rooted trees*, Geom. Dedicata, **89**(2002), 159-179.

[17] MELDRUM, J. D. P., *Wreath Products of Groups and Semigroups*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., v. 74, 1995.

[18] ROBINSON, D. J. S., *A course in the teory of groups*. Second edition. Springer-Verlag, New York, 1996.

[19] MOLLER, R. G., *The automorphism groups of regular trees*, J. London Math. Soc.(2), **43** (1991), 236-252.

[20] NEUMANN, P. M., *On the structure of standard wreath products of groups*, Math. Z., **84** (1964), 343-373.

[21] BODNARCHUK, Y. V., *The structure of the automorphism group of a nonstandard wreath product of a group*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **305** (1987), 847-852.

[22] BRUNNER, A. M.; SIDKI, S. N.; VIEIRA, A. C., *A just-nonsolvable torsion-free group defined on the binary tree*, Journal of Algebra, **221** (1999), 99-114.

[23] LENTOUDIS, P.; TITS, J., *Sur le groupe des automorphismes de certains produits em couronne*, Ukrain. Mat. Zh., **36** (1984), 143-148.

[24] KARRAS, A.; MAGNUS, W.; SOLITAR, D., *Combinatorial group theory: presentation of groups in terms of generators and relators*, second revised edition, Dover Publications, New York, 1976.

Apêndice A

Notação

x^y	$y^{-1}xy$
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$
$\mathcal{T}_n$	árvore regular n-ária
$\mathcal{T}_Y$	árvore regular definida sobre o alfabeto Y
$M = M(Y)$	monóide livre gerado por Y
$\mathcal{A}$	grupo dos automorfismos (isometrias) de $\mathcal{T}_n$
$F(Y, A)$	conjunto das funções de Y em A
$Q(\alpha)$	conjunto dos estados do automorfismo α
$H \lhd G$	H é subgrupo normal de G
$A \times B$	produto direto dos grupos A e B
$u * \alpha$	automorfismo α induzido na subárvore $u\mathcal{T}_n$
$u * G$	grupo G induzido na subárvore $u\mathcal{T}_n$
$A \rtimes B$	produto semidireto dos grupos A e B
AWr_YB	produto entrelaçado permutacional (completo) dos grupos A e B
Awr_YB	produto entrelaçado permutacional (restrito) dos grupos A e B
$AwrB$	produto entrelaçado padrão dos grupos A e B
$A \cong B$	A é isomorfo a B
$\langle x_1, x_2, \cdots, x_r \rangle$	grupo gerado por $x_1, \cdots, x_r$
A'	subgrupo derivado
$C_G(x)$	centralizador do elemento x em G
$\mathcal{P}(Y)$	grupo de permutações do conjunto Y
$End_{\mathcal{A}}(G)$	endomorfismos de G induzido por $\mathcal{A}$-conjugação
$N_{\mathcal{A}}(G)$	normalizador de G em $\mathcal{A}$
$\partial(h)$	profundidade do automorfismo h