

**APLICAÇÃO DA DESCRIÇÃO CINEMÁTICA CO-ROTACIONAL  
NA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS  
DISCRETIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS  
DE TRELIÇAS, VIGAS E CASCAS**

**RENATO CÉSAR GAVAZZA MENIN  
TESE DE DOUTORADO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**APLICAÇÃO DA DESCRIÇÃO CINEMÁTICA CO-ROTACIONAL  
NA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS  
DISCRETIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS  
DE TRELIÇAS, VIGAS E CASCAS**

**RENATO CÉSAR GAVAZZA MENIN**

**ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA  
TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.TD – 004A/06  
BRASÍLIA/DF: MAIO – 2006**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**APLICAÇÃO DA DESCRIÇÃO CINEMÁTICA CO-ROTACIONAL  
NA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS  
DISCRETIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS  
DE TRELIÇAS, VIGAS E CASCAS**

**RENATO CÉSAR GAVAZZA MENIN**

**TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof William Taylor Matias Silva, Dr.Ing (ENC-UnB)  
(Orientador)**

---

**Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof. José Luis Vital de Brito, DSc (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof. Paulo Batista Gonçalves, DSc (PUC – Rio de Janeiro)  
(Examinador Externo)**

---

**Prof. Estevam Barbosa de Las Casas, PhD (UFMG)  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 29 DE MAIO DE 2006**

## FICHA CATALOGRÁFICA

MENIN, RENATO CÉSAR GAVAZZA

Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas [Distrito Federal] 2006.

xvii, 172p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2006).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Formulação co-rotacional

2. Não-linearidade geométrica

3. Elementos Finitos

4. Treliças, vigas e cascas

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MENIN, R. C. G. (2006). Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação PECC E.TD – 004A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 172p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Renato César Gavazza Menin.

TÍTULO: Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas.

GRAU: Doutor

ANO: 2006

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Renato César Gavazza Menin  
SHIN QI-10, Conjunto 01, Casa 07 / Lago Norte.  
CEP 71525-010 Brasília / DF – Brasil.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor William Taylor Matias Silva, por ter me aceito como seu orientado e pela sua colaboração, dedicação e orientação neste período de doutorado.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil / PECC da Universidade de Brasília pelos ensinamentos, amizade e incentivo durante estes anos vividos na comunidade da UnB, despertando em mim o interesse pela pesquisa.

Aos meus colegas de mestrado e doutorado, pela amizade, compreensão e apoio nos momentos de dificuldade.

Gostaria de agradecer muito aos meus pais César e Sonia, aos meus irmãos Eduardo e Karine, à minha avó Antonia e à Ilma, que estiveram sempre ao meu lado nos bons e maus momentos, me dando o apoio e a compreensão necessários para que eu pudesse chegar ao fim de mais uma difícil jornada.

Em especial, gostaria de agradecer à minha querida Glauce, uma mulher maravilhosa, verdadeira, sensível, carinhosa e compreensível que esteve sempre ao meu lado neste período final de doutorado, trazendo muita luz, alegria e motivação na minha vida e acima de tudo me fazendo descobrir o real significado da palavra “amor”. Muito obrigado minha querida por poder amar e ao mesmo tempo me sentir amado por alguém tão especial...

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

## RESUMO

### APLICAÇÃO DA DESCRIÇÃO CINEMÁTICA CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS DISCRETIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS DE TRELIÇAS, VIGAS E CASCAS

**Autor:** Renato César Gavazza Menin

**Orientador:** William Taylor Matias Silva

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, maio de 2006**

No presente trabalho, a formulação co-rotacional foi utilizada como descrição cinemática com o objetivo de avaliar o comportamento não-linear geométrico de diversas tipologias estruturais em uma análise estática, permitindo o estudo da capacidade portante destas estruturas após a perda ou bifurcação de equilíbrio. Ao longo deste trabalho, procurou-se enfatizar os conceitos básicos da formulação co-rotacional, baseada na separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional, visando estudar o comportamento de estruturas discretizadas com elementos finitos de treliças, vigas ou cascas.

No estudo de treliças e pórticos planos, as equações de transformação que permitem a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional puderam ser obtidas de forma exata, considerando apenas argumentos puramente geométricos. Para o caso de pórticos espaciais e cascas, os deslocamentos deformacionais foram obtidos utilizando operadores de projeção, usados como pré e pós-processadores nas rotinas computacionais, sem a necessidade de mudanças internas em rotinas lineares de elementos finitos pré-existentes.

Em função dos exemplos numéricos analisados, pode-se concluir que a formulação co-rotacional e a sua implementação computacional apresentaram, de uma forma geral, resultados com grande concordância em relação aos encontrados na literatura. Métodos indiretos como o parâmetro de rigidez *CST* – *Current Stiffness Parameter* e a alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez foram capazes de detectar e classificar com grande precisão a ocorrência de pontos críticos (limites ou de bifurcação) e *turning points*.

Na resolução do sistema de equações não-lineares e obtenção das trajetórias de equilíbrio, foram implementados: o método de comprimento de arco cilíndrico, o método de Riks-Wempner (*Normal Plane*) e o método de Ramm (*Updated Normal Plane*), sendo estes métodos combinados com o método de Newton-Raphson completo.

## ABSTRACT

### THE APPLICATION OF THE CO-ROTATIONAL KINEMATIC DESCRIPTION TO THE GEOMETRICALLY NON-LINEAR ANALYSIS OF STRUCTURES MODELED BY TRUSS, BEAM AND SHELL FINITE ELEMENTS

**Author: Renato César Gavazza Menin**

**Supervisor: William Taylor Matias Silva**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, May of 2006**

The co-rotational formulation was used as the kinematic description to evaluate the geometrically non-linear behavior of different types of structures on a static analysis. Along the current research, it was aimed to demonstrate the basic concepts of the co-rotational approach that is based on the separation of the total motion into rigid body and deformational motion, in order to study the behavior of different types of structures modeled by truss, beam and shell finite elements.

In the study of trusses and plane frames, the transformation equations which allow the splitting of the rigid body and deformational motion could be obtained in a closed form, considering only purely geometric arguments. In the study of space frames and shells, the deformational motion was obtained using projector matrices, which are brought about through the use of software utilities as pre and post-processors to the element routines.

Based on the numerical examples, it could be concluded that the co-rotational approach and its numerical implementation showed excellent agreement with benchmark results found by other researchers. It was also observed that indirect methods such as the *CST - Current Stiffness Parameter* and the change of the number of negative pivots of the tangent stiffness matrix were able to detect and classify with great precision the existence of critical points (limit or bifurcation) and turning points.

The non-linear responses of the structures were obtained by different strategies, such as the cylindrical arc-length method, the normal plane method of Riks-Wempner and the updated normal plane method of Ramm. All these three strategies were combined with the full Newton-Raphson method.

## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 – MOTIVAÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 – GENERALIDADES SOBRE DESCRIÇÕES CINEMÁTICAS .....</b>	<b>2</b>
<b>1.3 – HISTÓRICO DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL .....</b>	<b>4</b>
<b>1.4 – SOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES .....</b>	<b>8</b>
<b>1.5 – OBJETIVOS .....</b>	<b>9</b>
<b>1.6 – DESCRIÇÃO DO TRABALHO .....</b>	<b>11</b>
<b>2 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE TRELIÇAS .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1 – INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2.2 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA .....</b>	<b>14</b>
<b>2.2.1 – Sistemas de coordenadas .....</b>	<b>16</b>
<b>2.3 – DESLOCAMENTOS DEFORMACIONAIS .....</b>	<b>17</b>
<b>2.3.1 – Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais .....</b>	<b>19</b>
<b>2.4 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO .....</b>	<b>24</b>
<b>2.4.1 – Vetor de forças internas .....</b>	<b>25</b>
<b>2.4.2 – Matriz de rigidez tangente .....</b>	<b>27</b>
<b>2.4.3 – Unicidade na resposta estrutural .....</b>	<b>28</b>
<b>3 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE PÓRTICOS PLANOS .....</b>	<b>30</b>
<b>3.1 – MODELOS MATEMÁTICOS DE ELEMENTOS DE VIGA .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA .....</b>	<b>31</b>
<b>3.2.1 – Sistemas de coordenadas .....</b>	<b>33</b>
<b>3.3 – DESLOCAMENTOS DEFORMACIONAIS .....</b>	<b>33</b>
<b>3.3.1 – Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais .....</b>	<b>35</b>
<b>3.3.2 – Derivadas parciais dos deslocamentos deformacionais .....</b>	<b>38</b>
<b>3.4 – ESFORÇOS RESULTANTES .....</b>	<b>39</b>
<b>3.5 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DA VIGA .....</b>	<b>40</b>
<b>3.6 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS .....</b>	<b>41</b>
<b>3.7 – MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE .....</b>	<b>42</b>
<b>3.8 – ÂNGULOS DE ROTAÇÃO NA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL .....</b>	<b>44</b>



<b>4 – MATRIZ DE ROTAÇÃO NO ESPAÇO .....</b>	<b>50</b>
<b>4.1 – ROTAÇÕES FINITAS NO ESPAÇO .....</b>	<b>50</b>
<b>4.2 – MATRIZ DE ROTAÇÃO PARA PEQUENAS ROTAÇÕES .....</b>	<b>56</b>
<b>5 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE PÓRTICOS ESPACIAIS .....</b>	<b>58</b>
<b>5.1 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA .....</b>	<b>58</b>
<b>5.2 – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO .....</b>	<b>63</b>
<b>5.3 – MUDANÇA DA VARIÁVEL ITERATIVA DE ROTAÇÃO .....</b>	<b>67</b>
<b>5.4 – OPERADOR DE PROJEÇÃO .....</b>	<b>71</b>
<b>5.5 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS E MATRIZ DE RIGIDEZ .....</b>	<b>78</b>
<b>5.6 – ESFORÇOS RESULTANTES .....</b>	<b>82</b>
<b>6 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE CASCAS .....</b>	<b>84</b>
<b>6.1 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA .....</b>	<b>84</b>
<b>6.2 – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO .....</b>	<b>89</b>
<b>6.3 – MUDANÇA DA VARIÁVEL ITERATIVA DE ROTAÇÃO .....</b>	<b>91</b>
<b>6.4 – OPERADOR DE PROJEÇÃO .....</b>	<b>96</b>
<b>6.5 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS E MATRIZ DE RIGIDEZ .....</b>	<b>99</b>
<b>7 – ALGORITMOS DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES .....</b>	<b>104</b>
<b>7.1 – EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS ALGORITMOS .....</b>	<b>104</b>
<b>7.2 – MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS .....</b>	<b>105</b>
<b>7.3 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO .....</b>	<b>108</b>
<b>7.4 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEARIZADOS .....</b>	<b>113</b>
<b>7.5 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO CILÍNDRICOS .....</b>	<b>114</b>
<b>7.5.1 – Determinação do sinal da predição <math>\Delta\lambda</math> .....</b>	<b>116</b>
<b>7.5.2 – Tamanho do comprimento de arco .....</b>	<b>116</b>
<b>7.6 – DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS .....</b>	<b>117</b>
<b>7.7 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....</b>	<b>118</b>

<b>8 – EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>119</b>
<b>8.1 – TRELIÇAS PLANAS E ESPACIAIS .....</b>	<b>119</b>
8.1.1 – Barra articulada 2D com 1 grau de liberdade .....	120
8.1.2 – Arco circular abatido 2D .....	121
8.1.3 – Estrutura articulada 2D não simétrica .....	122
8.1.4 – Estrutura articulada 3D em forma de torre esbelta .....	124
8.1.5 – Estrutura articulada 3D em forma de cúpula .....	126
<b>8.2 – PÓRTICOS PLANOS E ESPACIAIS .....</b>	<b>128</b>
8.2.1 – Viga em balanço com momento fletor na extremidade livre .....	128
8.2.2 – Pórtico de Lee .....	131
8.2.3 – Arcos circulares de grande altura .....	133
8.2.4 – Viga engastada espacial com curvatura de 45 graus .....	138
8.2.5 – Estrutura espacial abatida em forma de cúpula .....	139
<b>8.3 – ESTRUTURAS DE CASCAS .....</b>	<b>142</b>
8.3.1 – Viga em balanço com momento fletor na extremidade livre .....	143
8.3.2 – Placa quadrada submetida a carregamento concentrado .....	144
8.3.3 – Cobertura cilíndrica submetida a carregamento concentrado ...	145
8.3.4 – Cilindro em balanço com carregamento na extremidade livre ...	147
8.3.5 – Casca cilíndrica estirada com extremidades livres .....	148
8.3.6 – Cobertura esférica apoiada nas quatro bordas .....	150
8.3.7 – Casca hemisférica puncionada .....	151
8.3.8 – Colapso de uma casca esférica de borracha .....	153
<b>9 – CONCLUSÕES .....</b>	<b>155</b>
9.1 – CONCLUSÕES FINAIS .....	155
9.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	158
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>159</b>
<b>APÊNDICES</b>	
<b>A – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ <math>\Gamma^T</math> .....</b>	<b>166</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1 – Elemento finito de barra articulado nas configurações inicial e atual .....	15
2.2 – Posição de uma partícula $P_R$ na configuração co-rotacionada $C_R$ .....	17
2.3 – Movimento do elemento de barra no plano .....	20
3.1 – Elemento de viga $C^l$ nas configurações inicial e atual .....	32
3.2 – Posição de uma partícula $P_R$ na configuração co-rotacionada $C_R$ .....	34
3.3 – Deslocamentos globais e deslocamentos globais rotacionados .....	36
3.4 – Deslocamentos deformacionais no sistema local .....	37
3.5 – Convenções de sinais positivos para deformações e esforços resultantes .....	40
3.6 – Rotação de corpo rígido $\psi$ em função do quadrante .....	45
3.7 – Rotações totais e deformacionais nos diversos quadrantes .....	47
3.8 – Casos especiais $I^a$ e $I^b$ de rotações deformacionais .....	48
3.9 – Casos especiais 3, 4, 5 e 6 de rotações deformacionais .....	49
4.1 – Movimento de corpo rígido no espaço .....	51
4.2 – Caráter não vetorial das rotações no espaço .....	53
5.1 – Configurações inicial, co-rotacionada e deformada do elemento de viga .....	59
5.2 – Translações e rotações de um elemento genérico de viga .....	61
5.3 – Esforços resultantes e convenção de sinais positivos .....	83
6.1 – Configurações inicial, co-rotacionada e deformada do elemento de casca .....	85
6.2 – Sistema local $T_\theta$ na configuração inicial $C^0$ .....	86
6.3 – Translações e rotações de um elemento genérico de casca triangular .....	87
7.1 – Método de comprimento de arco esférico .....	112
7.2 – Fluxograma do algoritmo de resolução do sistema de equações .....	118

8.1 – Barra articulada 2D com 1 grau de liberdade .....	120
8.2 – Trajetórias de equilíbrio para deformações infinitesimais .....	120
8.3 – Gráfico <i>CST</i> x Fator de Carga para deformações infinitesimais .....	120
8.4 – Trajetórias de equilíbrio para deformações finitas .....	121
8.5 – Gráfico <i>CST</i> x Deslocamento para deformações finitas .....	121
8.6 – Arco circular abatido 2D .....	121
8.7 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical no topo .....	122
8.8 – Gráfico <i>CST</i> x Fator de Carga .....	122
8.9 – Estrutura articulada 2D não simétrica .....	123
8.10 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical do nó 9 .....	123
8.11 – Gráfico <i>CST</i> x Deslocamento .....	123
8.12 – Gráfico <i>CST</i> x Passos de Carga .....	123
8.13 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Deslocamento .....	124
8.14 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Passos de Carga .....	124
8.15 – Estrutura articulada 3D em forma de torre esbelta .....	125
8.16 – Trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do topo .....	125
8.17 – Gráfico <i>CST</i> x Fator de Carga .....	125
8.18 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Fator de Carga .....	126
8.19 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Deslocamento .....	126
8.20 – Estrutura articulada 3D em forma de cúpula .....	126
8.21 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical do nó central .....	127
8.22 – Gráfico <i>CST</i> x Deslocamento .....	127
8.23 – Gráfico <i>CST</i> x Passos de Carga .....	127
8.24 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Deslocamento .....	128
8.25 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Passos de Carga .....	128
8.26 – Viga em balanço com momento fletor aplicado na extremidade livre .....	129
8.27 – Configurações deformadas da estrutura .....	129
8.28 – Trajetórias de equilíbrio da extremidade livre da viga .....	130
8.29 – (a) Pórtico de Lee e (b) configurações deformadas .....	131
8.30 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical e horizontal .....	131
8.31 – Parâmetro de rigidez <i>CST</i> em função do fator e passos de carga .....	132
8.32 – Pivôs negativos em função dos deslocamentos e passos de carga .....	133
8.33 – (a) Arco biengastado e (b) Arco rotulado-engastado .....	133
8.34 – Trajetórias de equilíbrio do arco biengastado(a) e rotulado-engastado(b) ..	134

8.35 – <i>CST</i> x Fator de Carga do arco biengastado(a) e rotulado-engastado(b) .....	134
8.36 – Configurações deformadas do arco biengastado(a) e rotulado-engastado(b) .....	135
8.37 – Arco circular bi-rotulado .....	136
8.38 – Trajetórias de equilíbrio primária e secundária do arco bi-rotulado .....	136
8.39 – Parâmetro de rigidez <i>CST</i> e número de pivôs negativos .....	136
8.40 – Configurações deformadas do arco bi-rotulado .....	137
8.41 – Configurações inicial e deformada e propriedades da estrutura .....	138
8.42 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamentos da extremidade da viga .....	139
8.43 – Estrutura espacial abatida em forma de cúpula .....	139
8.44 – Trajetórias de equilíbrio, carregamento e momentos de inércia (caso 1) .....	140
8.45 – Trajetórias de equilíbrio, carregamento e momentos de inércia (caso 2) .....	140
8.46 – Parâmetro de rigidez <i>CST</i> e número de pivôs negativos (caso 2) .....	141
8.47 – Trajetórias de equilíbrio, carregamento e momentos de inércia (caso 3) .....	141
8.48 – Parâmetro de rigidez <i>CST</i> e número de pivôs negativos (caso 3) .....	142
8.49 – Viga em balanço com momento fletor na extremidade livre .....	143
8.50 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamentos da extremidade da viga .....	143
8.51 – Configurações deformadas da estrutura .....	144
8.52 – Geometria da placa (a) e trajetórias de equilíbrio (b) .....	144
8.53 – Cobertura cilíndrica abatida submetida a carregamento concentrado .....	145
8.54 – Gráfico <i>CST</i> x Fator de Carga .....	145
8.55 – Trajetórias de equilíbrio (a) espessura=6.35mm e (b) espessura=12.70mm... ..	146
8.56 – Configurações deformadas da estrutura (espessura = 6.35mm) .....	146
8.57 – Cilindro em balanço com carregamento na extremidade livre .....	147
8.58 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical .....	147
8.59 – Malha de elementos finitos das configurações deformadas .....	148
8.60 – Casca cilíndrica estirada com extremidades livres .....	149
8.61 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamentos verticais e horizontais .....	149
8.62 – Malha inicial de elementos finitos e configurações deformadas .....	149
8.63 – Cobertura esférica apoiada nas quatro bordas .....	150
8.64 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical .....	150
8.65 – Parâmetro de rigidez <i>CST</i> e número de pivôs negativos .....	150
8.66 – Configurações deformadas ao longo do processo de carregamento .....	151
8.67 – Casca hemisférica puncionada .....	152
8.68 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento horizontal no ponto <i>A</i> .....	152

8.69 – Configurações deformadas da estrutura .....	152
8.70 – Colapso de uma casca esférica de borracha .....	153
8.71 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical no topo .....	153
8.72 – Configurações deformadas da estrutura .....	154
A.1 – Geometria do elemento finito triangular .....	171

## LISTA DE TABELAS

8.1 – Programas computacionais .....	119
8.2 – Cargas críticas dos arcos biengastado e rotulado-engastado .....	135
8.3 – Cargas críticas do arco bi-rotulado .....	137
8.4 – Deslocamentos da extremidade livre da viga .....	138

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

$A$	– Área da seção transversal do elemento de treliça ou viga.
$A_0$	– Área da seção transversal do elemento de treliça na configuração inicial.
$A, B, C$	– Sistemas nodais em elementos de viga ( $3D$ ) ou cascas.
$A_0, B_0, C_0$	– Sistemas nodais em vigas ( $3D$ ) ou cascas na configuração inicial.
$b$	– parâmetro de ponderação do método de comprimento de arco.
$B_d^c$	– Relação deslocamento x deformação em vigas ( $3D$ ) ou cascas.
$C_0$	– Configuração inicial ou indeformada do elemento.
$C_R$	– Configuração co-rotacional do elemento.
$C$	– Configuração atual ou deformada do elemento.
$d$	– Deformação axial do elemento de viga no plano ( $2D$ ).
$d^c$	– Vetor de deslocamentos co-rotacionais (translações + rotações).
$e$	– Direção unitária que define o eixo de rotação para rotações de corpo rígido.
$E$	– Módulo de elasticidade longitudinal.
$f$	– Vetor de forças internas de elementos de vigas ( $2D$ ).
$f^c$	– Vetor de forças internas co-rotacionais em vigas ( $3D$ ) ou cascas.
$\bar{f}^c$	– Vetor de forças internas co-rotacionais após mudança de variáveis.
$\hat{f}^e$	– Vetor de forças internas de treliças descrito em coordenadas materiais.
$f^e$	– Vetor de forças internas de treliças descrito em coordenadas espaciais.
$F_{ext}$	– Vetor de forças externas.
$G$	– Módulo de elasticidade transversal.
$G$	– Matriz de transformação do sistema global para local em vigas e cascas.
$I_d$	– Número de iterações desejadas no método de comprimento de arco.

$Iter_{max}$	– Número máximo de iterações em um mesmo passo de carga.
$I_x, I_y, I_z$	– Momentos de inércia da seção transversal do elemento de viga.
$\mathbf{K}$	– Matriz de rigidez tangente de elementos de vigas (2D).
$K^c$	– Matriz de rigidez clássica (linear) em vigas (3D) ou cascas.
$\hat{\mathbf{K}}^e$	– Matriz de rigidez tangente de treliças descrita em coordenadas materiais.
$K^e$	– Matriz de rigidez tangente de treliças descrita em coordenadas espaciais.
$\bar{\mathbf{K}}_t$	– Matriz de rigidez tangente de vigas (3D) ou cascas no sistema global.
$\bar{\mathbf{K}}_t^e$	– Matriz de rigidez tangente de vigas (3D) ou cascas no sistema local.
$L$	– Comprimento do elemento de treliça ou viga na configuração atual.
$L_0$	– Comprimento do elemento de treliça ou viga na configuração inicial.
$M_1, M_2$	– Momentos fletores nas extremidades inicial e final do elemento de viga.
$N$	– Esforço normal no elemento de treliça ou viga na configuração atual.
$N_0$	– Esforço normal no elemento de treliça na configuração inicial.
$\mathbf{P}$	– Operador de projeção em elementos de vigas (3D) ou cascas.
$\mathbf{Q}$	– Matriz de rotação entre os sistemas global e local para treliças e vigas.
$quad$	– Quadrante no qual se encontra a rotação do elemento de viga (2D).
$\mathbf{r}(\mathbf{x})$	– Vetor de forças residuais ou desequilibrados.
$\mathbf{R}_\theta$	– Matriz de rotação total no espaço.
$\mathbf{R}_{\theta r}$	– Matriz de rotação de corpo rígido no espaço.
$\mathbf{R}_{\theta d}$	– Matriz de rotação deformacional no espaço.
$\mathbf{S}_m$	– Matriz anti-simétrica associada ao vetor $\mathbf{m}$ .
$T$	– Momento torçor em elementos de viga (3D).
$\mathbf{T}$	– Sistema local co-rotacional em elementos de viga (3D) ou cascas.
$\mathbf{T}_0$	– Sistema local co-rotacional de vigas ou cascas na configuração inicial.
$Tol$	– Tolerância para convergência no método de comprimento de arco.
$\mathbf{u}$	– Vetor de deslocamento total no sistema global.
$\mathbf{u}_0$	– Vetor de deslocamento da origem do sistema de eixos no sistema global.
$\mathbf{u}_R$	– Vetor de deslocamento de corpo rígido no sistema global.
$\mathbf{u}_D$	– Vetor de deslocamento deformacional no sistema global.
$\mathbf{u}_D^e$	– Vetor de deslocamento deformacional no sistema local.
$\mathbf{u}_i^c$	– Vetor de deslocamento co-rotacional para vigas (3D) ou cascas.
$U$	– Energia de deformação de treliças ou vigas na configuração atual.
$U_0$	– Energia de deformação do elemento de treliça na configuração inicial.



$U^A$	– Energia de deformação axial do elemento de viga plano (2D).
$U^F$	– Energia de deformação de flexão do elemento de viga plano (2D).
$V$	– Esforço cortante no elemento de viga no plano (2D).
$V_y, V_z$	– Esforços cortantes nas direções y e z no elemento de viga (3D).
$W_e$	– Trabalho realizado pelas forças externas.
$W_i$	– Trabalho realizado pelas forças internas.
$X$	– Vetor posição na configuração inicial no sistema global.
$X^e$	– Vetor posição na configuração inicial no sistema local.
$X^c$	– Vetor posição em relação ao sistema co-rotacional em $C_0$ .
$x$	– Vetor posição na configuração atual ou deformada no sistema global.
$x^e$	– Vetor posição na configuração atual ou deformada no sistema local.
$x_R$	– Vetor posição na configuração co-rotacional no sistema global.
$x^c$	– Vetor posição em relação ao sistema co-rotacional em $C$ .
$\delta d$	– Deslocamentos totais virtuais no sistema global.
$\delta d_d$	– Deslocamentos deformacionais virtuais no sistema global.
$\delta d^c$	– Deslocamentos co-rotacionais virtuais no sistema local.
$\delta x$	– Deslocamento iterativo no método de comprimento de arco.
$\delta x_{Ri}$	– Deslocamento iterativo correspondente ao método com controle de carga.
$\delta x_{Ti}$	– Deslocamento iterativo correspondente a totalidade da carga externa.
$\Delta x$	– Deslocamento incremental no método de comprimento de arco.
$\Delta L$	– Tamanho do comprimento de arco.
$\Delta L_{max}$	– Tamanho do comprimento de arco máximo.
$\Delta L_{min}$	– Tamanho do comprimento de arco mínimo.
$\varepsilon$	– Deformação no elemento de treliça ou viga (2D).
$\lambda$	– Nível de carga ou razão ( $L/L_0$ ) no elemento de treliça.
$\theta$	– Rotação total do elemento de viga no plano (2D).
$\bar{\theta}$	– Rotação deformacional do elemento de viga no plano (2D).
$\theta_i^c$	– Vetor de rotações co-rotacionais para vigas (3D) ou cascas.
$\sigma$	– Tensão axial no elemento de treliça.
$\psi$	– Rotação de corpo rígido do elemento de viga no plano (2D).

<i>ANDES</i>	– Assumed Natural Deviatoric Strains.
<i>CR</i>	– Formulação Co-Rotacional.
<i>CST</i>	– Current Stiffness Parameter (Parâmetro de Rigidez de Bergan)
<i>EICR</i>	– Element Independent Co-Rotational Formulation.
<i>LT</i>	– Formulação Lagrangiana Total.
<i>LA</i>	– Formulação Lagrangiana Atualizada.
<i>MEF</i>	– Método dos Elementos Finitos.
<i>PB</i>	– Ponto de Bifurcação.
<i>PL</i>	– Ponto Limite.
<i>TP</i>	– Turning Point.

# 1 – INTRODUÇÃO

## 1.1 – MOTIVAÇÃO

Hoje em dia, se presencia o aumento da utilização de estruturas cada vez mais esbeltas em várias áreas da engenharia, tais como: edificações, pontes, cascos de navios, fuselagens de aviões, cúpulas de coberturas, plataformas *off-shore* e estruturas aeroespaciais (antenas, telescópios e painéis solares). Porém, devido a esta esbeltez, que é possível graças à utilização de materiais com alta resistência e baixo peso próprio, estas estruturas podem estar sujeitas a fenômenos de instabilidade de equilíbrio, que podem ocorrer localmente ou de maneira global. Portanto, é necessário que o engenheiro tenha ferramentas que sejam capazes de realizar uma análise qualitativa e quantitativa do comportamento destas estruturas, tanto na fase pré-crítica, na qual estes fenômenos ainda não ocorreram, quanto na fase posterior à perda de estabilidade de equilíbrio, denominada fase pós-crítica.

O fato de um sistema estrutural apresentar instabilidade de equilíbrio não implica, necessariamente, que o mesmo tenha perdido a sua capacidade portante. A perda ou não desta capacidade portante está intimamente relacionada com a natureza da instabilidade de equilíbrio que possa ocorrer no sistema. Desta maneira, se torna necessário, conhecer a natureza deste fenômeno, para melhor avaliar o desempenho da capacidade resistente da estrutura, em especial, na fase pós-crítica.

Nos estudos relacionados a estes fenômenos, observa-se que em um grande número de casos, a estrutura ou componente estrutural se comporta elasticamente mesmo na fase pós-crítica, de modo que ocorrem apenas não-linearidades geométricas (grandes deslocamentos e rotações, acompanhados por pequenas deformações), possibilitando que se adote como hipótese simplificada que as deformações sejam pequenas ou mesmo infinitesimais, usualmente dentro do regime elástico. Esta simplificação resulta em uma série de benefícios na construção dos modelos de elementos finitos para a análise de instabilidade, de modo a permitir o uso de modelos lineares para obter a resposta deformacional do sistema, ao passo que as grandes translações e rotações de corpo rígido, que caracterizam a não linearidade geométrica, nas fases pré e pós-crítica, possam ser tratadas separadamente.

A formulação co-rotacional utilizada na análise não linear geométrica de estruturas é, justamente, baseada na separação explícita dos movimentos de corpo rígido (translações e rotações) e dos movimentos deformacionais. Esta separação segrega a não-linearidade aos movimentos de corpo rígido, de modo a permitir a reutilização de modelos lineares de elementos finitos já existentes, respeitando-se certas limitações de modelagem (pequenas deformações).

## 1.2 – GENERALIDADES SOBRE DESCRIÇÕES CINEMÁTICAS

Em análises não-lineares geométricas utilizando o método dos elementos finitos – *MEF*, três diferentes tipos de descrições cinemáticas têm sido amplamente utilizadas. Na chamada descrição lagrangiana total (*LT*), as equações do *MEF* são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, em geral, a própria configuração inicial assumida pela estrutura, porém, em casos especiais como por exemplo em uma ponte pênsil, pode-se escolher uma configuração de base, que não é efetivamente assumida pela estrutura. Na descrição lagrangiana atualizada (*LA*), as equações do *MEF* são formuladas em relação à última configuração de equilíbrio, ou seja, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo, dentro de um mesmo passo de carga e, uma vez atingido o equilíbrio, todas as tensões e deformações da estrutura passam a ser definidas em função da nova configuração de equilíbrio. Já, na chamada descrição cinemática co-rotacional (*CR*), as equações do *MEF* de cada um dos elementos são definidas em relação a dois sistemas distintos: uma configuração de base, que permanece fixa ao longo de toda a análise, sendo utilizada para medir os deslocamentos de corpo rígido e uma configuração co-rotacional que acompanha cada um dos elementos, a partir da qual são obtidos, exclusivamente, os deslocamentos deformacionais, em função dos quais são definidas as tensões e deformações.

De um ponto de vista matemático, a presença explícita de uma configuração co-rotacional não é necessária. A separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional poderia ter sido apresentada em função de uma decomposição do campo de deslocamentos. Entretanto, a presença da configuração co-rotacional tem uma grande importância para facilitar o entendimento do significado físico da decomposição de movimentos, bem como, para visualizar as vantagens e limitações da descrição cinemática co-rotacional.

A descrição cinemática co-rotacional é a mais recente das formulações utilizadas na análise não-linear geométrica de estruturas e, em função disto, ainda não atingiu o mesmo nível de desenvolvimento da formulação lagrangiana e, conseqüentemente, uma grande variedade de assuntos ainda pode ser pesquisada. Segundo Felippa (2001), a formulação lagrangiana total (*LT*) ainda é a formulação mais utilizada hoje em dia, ao passo que o interesse pela formulação lagrangiana atualizada (*LA*) tem diminuído bastante e a mesma vem sendo gradualmente substituída pela formulação co-rotacional (*CR*). Dentre as principais vantagens da formulação co-rotacional sobre a formulação lagrangiana, pode-se destacar:

- Eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e pequenas deformações, lembrando que este assunto está associado a uma grande variedade de problemas práticos de engenharia estrutural, sendo particularmente importante em estruturas aeroespaciais.
- Permite a reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existentes, em uma análise não-linear geométrica de estruturas, em especial, se a formulação *EICR* for empregada, conforme será comentado posteriormente.
- Facilidade no estudo de não-linearidades materiais, caracterizadas por pequenas deformações, juntamente, com não-linearidades geométricas.
- Facilidade de adaptação ao estudo de elementos estruturais com graus de liberdade de rotação (vigas, placas e cascas) submetidos a grandes rotações, lembrando que tais elementos são razoavelmente complicados de serem estudados com descrições cinemáticas lagrangianas.
- Facilidade de interface com programas envolvendo *multibody dynamics (MBD)*.

Dentre as principais desvantagens da formulação co-rotacional, em relação à formulação lagrangiana, pode-se destacar:

- A formulação co-rotacional não é vantajosa no estudo de problemas envolvendo grandes deformações plásticas.
- Pode levar a uma matriz de rigidez tangente não simétrica para elementos com graus de liberdade de rotação no espaço. Entretanto, conforme já foi apresentado por um grande número de pesquisadores, pode-se utilizar processos de simetrização sem prejudicar os resultados finais ou mesmo o grau de convergência da solução.

- Envolve formulações matemáticas mais complexas na avaliação dos graus de liberdade de rotação.
- A formulação é eficiente somente para o caso de elementos finitos com geometria inicial simples: elementos de treliças e vigas contendo dois nós e elementos de placas ou cascas contendo três ou quatro nós. Para elementos com geometrias mais complexas, o nível de dificuldade aumenta bastante. Felizmente, os elementos com geometria mais simples são, geralmente, os elementos utilizados com maior frequência na análise não-linear geométrica de estruturas.

### 1.3 – HISTÓRICO DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL

A formulação co-rotacional tem as suas raízes em uma idéia bastante antiga da mecânica dos meios contínuos: a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional. Esta idéia surgiu inicialmente em teorias envolvendo pequenas deformações, acompanhadas por grandes movimentos de corpos rígidos, sendo estudada pela primeira vez por Cauchy em 1827 (Truesdell, 1966) e posteriormente em problemas geológicos por Biot (1965).

Outros importantes avanços tecnológicos envolvendo esta decomposição de movimentos surgiram nas indústrias aeronáutica e aeroespacial. A idéia da separação de movimentos de corpo rígido e deformacional, para uma estrutura completa, foi utilizada por projetistas de estruturas aeroespaciais nas décadas de 1950 e 1960, tendo como grande objetivo o monitoramento do movimento principal (*mean motion*) das estruturas e, neste sentido, procurou-se definir um sistema de eixos cartesianos e ortogonais único, que acompanhasse o movimento do corpo e, em relação ao qual, os deslocamentos, velocidades e acelerações de um ponto material eram unicamente deformacionais.

A extensão desta idéia utilizada na indústria aeronáutica para a análise não-linear geométrica utilizando o *MEF* está baseada em uma modificação bastante simples: ao invés de utilizar um sistema de eixos único para a estrutura como um todo, deveria ser utilizado um sistema de eixos por elemento. Esta modificação é essencial para o sucesso da formulação co-rotacional, uma vez que ela ajuda a satisfazer uma hipótese inicial básica: que os deslocamentos e rotações deformacionais do elemento sejam pequenos em relação ao sistema de eixos co-rotacionais.

Caso esta hipótese não seja atendida para um elemento em particular, o mesmo deve ser sub-dividido em mais elementos por meio de um refinamento da malha. A hipótese de pequenas deformações é o grande trunfo para a re-utilização de elementos finitos lineares em problemas envolvendo não-linearidade geométrica através da formulação co-rotacional.

O conceito da descrição cinemática co-rotacional foi introduzido em um contexto do *MEF*, inicialmente, por Wempner (1969) que desenvolveu uma formulação para o estudo de cascas submetidas a pequenas deformações e grandes deslocamentos e por Belytschko & Hsieh (1973) que estudaram elementos finitos de viga submetidos a grandes rotações e propuseram um método baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas denominado “*convected coordinates*”.

Posteriormente, Fraeijs de Veubeke (1976) desenvolveu para a indústria aeronáutica uma formulação co-rotacional para a análise dinâmica de estruturas, porém, utilizando um único sistema de eixos co-rotacionais para a estrutura como um todo, estando mais voltada para uma solução analítica do problema do que para uma formulação de elementos finitos, sendo denominada “*shadow element*”.

A determinação deste sistema de eixos único para a estrutura como um todo criava uma série de dificuldades, de modo que, o conceito da configuração fantasma ou *shadow element* foi levado para o nível do elemento por vários pesquisadores, dentre os quais se destacam Bergan & Horrigmoe (1976) e Bergan & Nygard (1989). Nos trabalhos de Bergan & Nygard (1989), o conceito da configuração fantasma transformou-se em uma ferramenta de visualização muito útil, que facilitou o entendimento da formulação co-rotacional. Este conceito foi usado pelos autores para eliminar os movimentos de corpo rígido de cada um dos elementos e obter apenas o movimento deformacional, a partir do qual, pode ser computado o vetor de forças internas do elemento. Entretanto, as derivadas do vetor de forças internas não foram usadas diretamente na formação da matriz de rigidez tangente, fato que conduziu a uma perda de consistência.

Outra importante contribuição é atribuída a Rankin & Brogan (1986), que introduziram a chamada formulação *EICR (Element Independent Corotational Formulation)*, que foi posteriormente refinada por Rankin & Nour-Omid (1988) e por Nour-Omid & Rankin (1991), sendo esta formulação implementada no programa *STAGS* (Almroth et al., 1979).

Esta formulação não utiliza, explicitamente, o conceito do “*shadow element*”, mas o caminho para a obtenção dos deslocamentos deformacionais, que se baseia no uso de operadores de projeção, também chamados *projetores*, é bastante similar ao processo utilizado por Bergan & Nygard (1989). Estes autores usaram a formulação co-rotacional diretamente para formar a matriz de rigidez tangente, proporcionando uma matriz de rigidez consistente.

Entretanto, a formulação de Nour-Omid e Rankin (1991) ainda apresentava restrições no número de graus de liberdade que poderiam participar na rotação do sistema de coordenadas do elemento e ao mesmo tempo manter a consistência da matriz de rigidez tangente. Para resolver este problema, Haugen (1994) desenvolveu um trabalho aplicado para o estudo de cascas planas discretizadas por elementos triangulares e quadrangulares, que continham o grau de liberdade de rotação torsional (*drilling*), combinando as principais características das duas formulações anteriores (*shadow element* e *EICR*), ou seja, combinando a natureza invariável da formulação de Bergan e o equilíbrio e a consistência da formulação de Rankin.

Outras contribuições importantes são atribuídas a Hsiao & Hou (1987) e Hsiao et al. (1987), que apresentaram formulações simples e eficientes para a remoção da restrição de pequenas rotações entre dois passos de carga sucessivos em uma análise não-linear geométrica de pórticos planos e espaciais. Pouco tempo depois, Cardona (1989) utilizou o conceito da formulação co-rotacional para o estudo de mecanismos.

Cole (1990) desenvolveu formulações consistentes para o estudo de vigas planas e espaciais, utilizando a formulação co-rotacional, dando ênfase especial nos diferentes métodos para definição, atualização e parametrização de grandes rotações no espaço, bem como no estudo teórico e implementação computacional de programas capazes de estudar problemas com cargas seguidoras (*follower loads*).

Também podem ser destacadas as contribuições de Crisfield (1990) que apresentou uma formulação consistente para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais; Peng & Crisfield (1992) que apresentaram uma formulação consistente para o estudo de estruturas de cascas, utilizando uma combinação do elemento triangular de membrana com deformações constantes e do elemento triangular de placa com curvatura constante; e



Crisfield & Moita (1996) que apresentaram um procedimento teórico, inicialmente introduzido para o estudo de elementos finitos sólidos, sendo o mesmo, em seguida, modificado de modo a abordar também o estudo de vigas espaciais e cascas.

Pacoste & Eriksson (1996) estudaram problemas de instabilidade para elementos de viga no plano e no espaço, comparando as descrições lagrangiana total e co-rotacional e, posteriormente, Pacoste (1998) fez estudos de instabilidade de cascas utilizando elementos finitos planos e triangulares de casca contendo três nós e seis graus de liberdade por nó, seguindo, basicamente, a formulação descrita por Nour-Omid & Rankin (1991) através da utilização de projetores, porém, implementando uma parametrização das rotações finitas no espaço, que leva a uma mudança adicional de variáveis, de modo que, as variáveis relacionadas às rotações no espaço se tornem aditivas e com isso tornando desnecessário eventuais procedimentos de atualização.

Battini (2002) implementou uma formulação co-rotacional para estudar problemas de instabilidade elástica e plástica de vigas planas e espaciais, partindo das formulações co-rotacionais de Crisfield (1990) e Pacoste & Eriksson (1996), propondo modificações na forma de parametrização das rotações finitas e incluindo um sétimo grau de liberdade para consideração de ligações rígidas.

Cortivo (2004) estudou problemas de não-linearidade física e geométrica de estruturas de cascas finas, no domínio de pequenas deformações, adotando o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério de escoamento plástico de von Mises.

Dentre os trabalhos publicados pelo autor, podem-se destacar: Menin & Taylor (2003<sup>a</sup>) e Menin et al. (2006) que estudaram o comportamento pós-crítico de sistemas de barras articuladas no plano e no espaço, utilizando distintas medidas de deformações; Menin & Taylor (2003<sup>b</sup>) que estudaram problemas de instabilidade de pórticos planos, discretizados com elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli; Menin & Taylor (2004) que estudaram problemas de não-linearidade geométrica de pórticos espaciais, baseando-se no conceito de operadores de projeção da formulação *EICR*; e finalmente, Menin & Taylor (2005<sup>a</sup>) e Menin & Taylor (2005<sup>b</sup>) que estudaram problemas de instabilidade em estruturas de cascas, discretizadas com elementos finitos triangulares, com base em modificações feitas na formulação *EICR*.

## 1.4 –SOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Antes da metade dos anos 70, problemas estruturais envolvendo não-linearidade eram tratados com métodos puramente incrementais sob controle de carga, para os quais o erro associado é dependente do passo de carga e, freqüentemente, é acumulativo durante a análise, tanto que requer um passo de carga muito pequeno para uma análise mais precisa. Esta deficiência motivou o desenvolvimento de métodos incrementais-iterativos, nos quais os incrementos foram seguidos pelas iterações de correção do equilíbrio. Estas correções trazem a solução de volta para a trajetória de equilíbrio e o algoritmo é menos dependente do tamanho do passo de carga. Entretanto, um método baseado em controle de carga pode ser capaz de detectar um ponto limite mas, em geral, não é capaz de ir além deste ponto. A necessidade de atravessar um ponto limite e obter a continuação da resposta estrutural é motivada por diversos fatores:

- O ponto limite pode ser apenas um máximo local e a estrutura ainda possui capacidade resistente que pode ser aproveitada.
- A estrutura sendo analisada pode ser apenas um componente, sendo esta trajetória de equilíbrio, futuramente, incorporada à análise da estrutura completa.
- Obter um melhor entendimento do mecanismo de ruptura da estrutura, ou seja, saber se o mesmo ocorreu de forma dúctil ou frágil.
- Ter maior garantia que foi realmente atingido um ponto limite e iniciado um trecho de instabilidade estrutural.
- Ultrapassando um ponto limite, é possível investigar, preferencialmente, através de gráficos, o real estado de uma estrutura (tensões, deformações, deslocamentos, zonas plásticas,...) e com isso, entender melhor a real causa de uma falha estrutural.

Existem na literatura diversos procedimentos baseados no controle de carga-deslocamento, nos quais tanto a carga quanto o deslocamento podem variar simultaneamente, permitindo que os algoritmos sejam capazes de ultrapassar um ponto limite e obter a continuação da resposta, dentre os quais se destacam o controle de deslocamento e os métodos de comprimento de arco. No caso do presente trabalho, foram implementados os métodos de comprimento de arco cilíndricos (Crisfield, 1991), juntamente com o método de Riks-Wempner (*normal plane*) e o método de Ramm (*updated normal plane*).

## 1.5 – OBJETIVOS

No presente trabalho, a formulação co-rotacional foi utilizada como descrição cinemática, com o objetivo de avaliar o comportamento não-linear geométrico de diversos tipos de estruturas planas e espaciais, discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas ou cascas planas triangulares e, com isso, estudar a capacidade portante destas diferentes tipologias estruturais após a perda ou bifurcação de equilíbrio.

Na análise não-linear geométrica de treliças, partiu-se do trabalho de Taylor (2001) que estudou o comportamento pós-crítico de barras articuladas, utilizando uma formulação lagrangiana total e foi implementada uma formulação co-rotacional para treliças planas e espaciais, sendo as variáveis cinemáticas e os deslocamentos deformacionais determinados em função de parâmetros puramente geométricos.

Na análise não-linear geométrica de pórticos planos, utilizou-se como ponto de partida, a descrição cinemática co-rotacional desenvolvida por Felippa (2001), para a qual, as variáveis cinemáticas são definidas em função dos deslocamentos globais ( $\mathbf{u}$ ) e foi desenvolvida uma nova formulação co-rotacional, para a qual, as novas variáveis cinemáticas, definidas nas Equações (3.17) a (3.19), são calculadas em função dos deslocamentos globais rotacionados ( $\mathbf{u}^{rot}$ ), gerando fórmulas mais simples e de fácil visualização. Ao contrário dos trabalhos de Felippa (2001) e Crisfield (1991), para os quais as rotações totais estavam limitadas a  $2\pi$ , no presente trabalho foram também apresentadas fórmulas de recorrência para a implementação computacional, de modo a admitir rotações totais de qualquer ordem de grandeza.

Para o caso da formulação co-rotacional de treliças e pórticos planos, as equações de transformação que permitem a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional podem ser obtidas de forma exata (*closed form*), considerando apenas argumentos geométricos, sem a necessidade de tratamento especial para a determinação e atualização dos graus de liberdade de rotação. Procurou-se apresentar a formulação de treliças e pórticos planos, utilizando um mesmo formato, com o intuito de facilitar o entendimento das semelhanças e diferenças existentes entre o elemento de viga e o elemento de barra articulado.

Na análise não-linear geométrica de pórticos espaciais, foi simplesmente utilizada a formulação *EICR* (*Element Independent Co-Rotational Formulation*), desenvolvida por Nour-Omid & Rankin (1991), para a qual os deslocamentos deformacionais da estrutura foram obtidos utilizando os chamados operadores de projeção. Vale a pena enfatizar que, com exceção de mudanças na notação, não foi feita nenhuma modificação na formulação original de pórticos espaciais apresentada por Nour-Omid & Rankin (1991), sendo a mesma implementada em um programa computacional e utilizada para obter a resposta não-linear das estruturas.

Finalmente, na análise não-linear geométrica de estruturas de cascas, partiu-se da formulação *EICR* desenvolvida por Nour-Omid & Rankin (1991), porém, foram propostas modificações no alinhamento do sistema co-rotacional de eixos e foi incluído o operador de projeção associado à translação de centróide  $\mathbf{P}_T$ , que não aparece na formulação original de Nour-Omid & Rankin (1991). Na definição da matriz de rigidez linear  $\mathbf{k}^e$  do elemento finito triangular, enquanto Nour-Omid & Rankin (1991) utilizaram o elemento de casca “*shell element 410*” do programa *STAGS* (Almroth et al., 1979), no presente trabalho foi utilizado o elemento finito de casca plano triangular do tipo *ANDES – Assumed Natural Deviatoric Strains*, desenvolvido por Militello (1991), Felippa & Militello (1992) e Haugen (1994).

Da mesma forma que havia sido feito com o caso de treliças e pórticos planos, procurou-se apresentar a formulação co-rotacional de pórticos espaciais e cascas, utilizando um mesmo formato, de modo a facilitar o entendimento e a visualização das semelhanças e diferenças existentes entre os dois modelos.

Outro objetivo deste trabalho foi a detecção e classificação de pontos críticos (limites ou de bifurcação) e *turning points*, por meio de métodos indiretos, como o parâmetro de rigidez *CST – Current Stiffness Parameter* ou pela alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente triangularizada, após a resolução do sistema de equações.

## 1.6 – DESCRIÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é composto de nove capítulos e um apêndice, sendo as formulações co-rotacionais para os diversos tipos de elementos finitos apresentadas em ordem crescente de complexidade. O capítulo 2 é destinado à apresentação da descrição cinemática referente à formulação co-rotacional de treliças planas e espaciais, conforme Menin & Taylor (2003<sup>a</sup>), sendo utilizadas distintas medidas de deformações.

No capítulo 3, é desenvolvida a formulação co-rotacional para elementos de pórticos planos, discretizados utilizando-se o modelo matemático de viga de Euler-Bernoulli ( $C^1$ ), sem o acoplamento dos efeitos dos esforços axial e de flexão, conforme o trabalho apresentado por Menin & Taylor (2003<sup>b</sup>).

O capítulo 4 é destinado à obtenção da matriz de rotação que descreve o movimento de corpo rígido no espaço, cujo comportamento está fundamentado no teorema de *Euler*. Neste capítulo, também é mostrada a obtenção do “*pseudovetor de rotação*” no espaço pelo algoritmo atribuído a Spurrier (1978), sendo, a matriz e o *pseudovetor* de rotação utilizados nos capítulos seguintes para o estudo de grandes rotações envolvendo elementos de pórtico espacial e cascas planas triangulares.

Uma vez conhecida a matriz de rotação no espaço, de acordo com o capítulo anterior, no capítulo 5 é feita a apresentação da descrição cinemática referente à formulação co-rotacional de pórticos espaciais, segundo a formulação *EICR* descrita por Nour-Omid & Rankin (1991).

No capítulo 6, é apresentada a descrição cinemática co-rotacional para um elemento finito de casca plano e triangular, segundo a formulação *EICR* descrita por Nour-Omid & Rankin (1991), com algumas modificações propostas por Menin & Taylor (2005<sup>a</sup>) e Menin & Taylor (2005<sup>b</sup>).

No capítulo 7, são apresentados diferentes métodos para a resolução do sistema de equações não-lineares, bem como apresentados alguns métodos indiretos para a detecção e classificação de pontos críticos (limites ou de bifurcação) e *turning points*.

No capítulo 8, é feita uma pequena descrição dos programas computacionais desenvolvidos para realizar as análises e são apresentados diversos exemplos numéricos de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas planas triangulares, de modo a comprovar a eficiência da formulação co-rotacional na análise não linear geométrica de estruturas, bem como na detecção e classificação de pontos críticos e *turning points*.

No capítulo 9, apresentam-se as conclusões finais do presente trabalho e são feitas inúmeras sugestões para investigações futuras dos temas abordados.

Finalmente, no Apêndice A, são apresentadas algumas deduções matemáticas utilizadas na determinação da matriz  $\mathbf{T}^T$ , que compõe o operador de projeção  $\mathbf{P}_R$ , associado à rotação do centróide de um elemento finito de casca plano e triangular, desenvolvido no capítulo 6, lembrado que esta matriz depende da geometria atual e da orientação do sistema de eixos locais do elemento.

## 2 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE TRELIÇAS

### 2.1 – INTRODUÇÃO

Atualmente, em geral são usados três tipos de descrições cinemáticas na análise não linear geométrica através do método dos elementos finitos, que podem ser distinguidas entre si, basicamente, pela escolha da configuração de referência. A primeira delas é a descrição lagrangiana total, na qual a configuração de referência é raramente ou nunca mudada, sendo, em geral, igual à configuração inicial ao longo de toda a análise, com as tensões e deformações medidas em relação a esta configuração. A segunda descrição é a lagrangiana atualizada, para a qual a última configuração em equilíbrio, uma vez atingida, passa a ser a nova configuração de referência para os passos subsequentes, sendo as tensões e deformações redefinidas assim que a configuração de referência é atualizada. Já, na chamada descrição co-rotacional, a configuração de referência é dividida em duas partes, sendo as tensões e deformações medidas a partir de uma configuração co-rotacionada, ao passo que a configuração inicial é mantida como configuração de referência para medir os deslocamentos de corpo rígido.

Segundo Felippa (2001), a descrição lagrangiana total permanece sendo a formulação mais utilizada hoje em dia, ao passo que o interesse pela descrição lagrangiana atualizada está diminuindo bastante e sendo gradualmente substituída pela descrição co-rotacional. No presente capítulo, será apresentada a descrição cinemática referente à formulação co-rotacional para o caso de elementos de barra bi-articulados (treliças) no plano e no espaço de acordo com Menin & Taylor (2003<sup>a</sup>). O principal conceito desta formulação é a divisão ou decomposição da configuração de referência em duas parcelas:

1. A configuração inicial ( $C_0$ ) que é mantida fixa ao longo de toda a análise. Usualmente, se adota um sistema de coordenadas globais para toda a estrutura.
2. A configuração co-rotacionada ( $C_R$ ) que varia de elemento para elemento. Para cada elemento, a configuração  $C_R$  pode ser obtida através do deslocamento de corpo rígido em relação à configuração  $C_0$ . O sistema de coordenadas se move conjuntamente com o elemento, sendo a deformação do elemento medida em relação ao sistema de coordenadas locais da configuração  $C_R$ .

Seguindo a metodologia apresentada por Crisfield (1991), no presente capítulo, são utilizadas quatro medidas distintas de deformações, sendo duas delas descritas em coordenadas materiais (deformação de engenharia e Green-Lagrange) e duas descritas em coordenadas espaciais (deformação de Biot e Almansi). A descrição cinemática do elemento é feita em relação à configuração inicial ou indeformada, supondo uma relação linear entre o par conjugado de tensão e deformação do tipo  $\sigma = E\varepsilon$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material e adotando-se o mesmo valor de  $E$  para as distintas medidas de deformações. Será demonstrado por meio de simulações numéricas que no caso de deformações infinitesimais, as configurações inicial e atual se confundem e, portanto, se obtém unicidade na resposta de uma estrutura, independentemente da configuração em que se escolhe o modelo constitutivo e do tipo de deformação que se utilize, porém, no regime de deformações finitas, esta hipótese implica na definição de materiais diferentes e em consequência não se obtém unicidade na resposta. Para obter unicidade na resposta em regime de deformações finitas é necessário recorrer a transformações tensoriais, que fazem o mapeamento do tensor constitutivo entre as configurações inicial ou indeformada e a atual, tema que não será abordado neste trabalho.

## 2.2 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

Considerando-se um elemento finito de barra articulado que se move no espaço de acordo com a Figura 2.1, por simplicidade, será admitido como hipótese inicial que os eixos locais  $(x_0^e, y_0^e, z_0^e)$  do elemento na configuração inicial  $C_0$  estão alinhados com os sistemas de coordenadas globais material e espacial, designados por  $(X, Y, Z)$  e  $(x, y, z)$ , respectivamente. Somando-se a esta primeira hipótese, também é admitido que a origem do sistema de eixos locais em  $C_0$  está situada na metade do comprimento inicial do elemento, designado por  $L_0$ . O elemento de barra se move da configuração inicial  $C_0$  até a configuração atual  $C$ , cujos eixos locais podem ser definidos como  $(x^e, y^e, z^e)$ . A chamada configuração co-rotacionada, designada por  $C_R$  é obtida pelo movimento de corpo rígido da configuração  $C_0$  e se move conjuntamente com o elemento até a configuração  $C$ , posicionando-se simetricamente com respeito à configuração atual. Pode ser observado também, pela Figura 2.1, que os eixos locais co-rotacionados  $(x_R^e, y_R^e, z_R^e)$  coincidem com os eixos locais  $(x^e, y^e, z^e)$  em  $C$ .



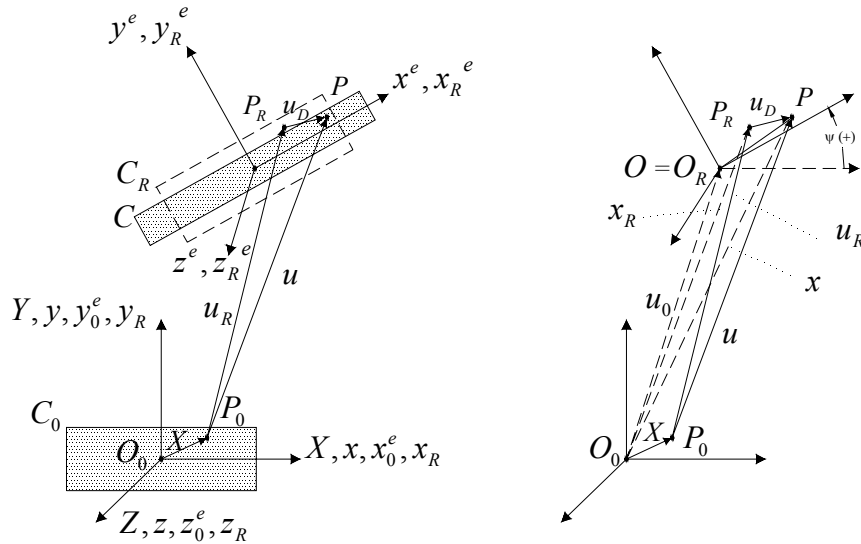


Figura 2.1 – Elemento finito de barra articulado nas configurações inicial e atual.

Tomando-se uma partícula qualquer  $P_0$  de coordenadas  $(X, Y)$  em  $C_0$ , que se move ao ponto  $P_R$  de coordenadas  $(x_R, y_R)$  em  $C_R$ , e em seguida se move para o ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  em  $C$ , então, o deslocamento total  $\mathbf{u}$  da partícula, em coordenadas globais, pode ser descrito por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.1)$$

Este deslocamento pode então ser decomposto em uma parte deformacional  $\mathbf{u}_D$  e outra que corresponde ao deslocamento de corpo rígido  $\mathbf{u}_R$ , de modo que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_D = (\mathbf{x}_R - \mathbf{X}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R) \quad (2.2)$$

Na formulação co-rotacional, as equações do movimento deformacional são escritas em função das coordenadas locais  $(x^e, y^e, z^e)$  em  $C$ , conforme a seguinte equação:

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_D \quad (2.3)$$

sendo  $\mathbf{Q}$  uma matriz de rotação 2x2 (treliça plana) ou 3x3 (treliça espacial) para transformar do sistema global  $(X, Y, Z)$  para o sistema local  $(x^e, y^e, z^e)$ . Os deslocamentos deformacionais  $\mathbf{u}_D^e$  são utilizados para obter o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente, conforme será comentado posteriormente.

### 2.2.1 – Sistemas de coordenadas

Os sistemas de coordenadas local  $(x^e, y^e, z^e)$  na configuração atual  $C$  e global  $(x, y, z)$  se relacionam através da seguinte equação:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}_0) \quad (2.4)$$

Esta relação expressa na equação acima pode ser visualizada através da Figura 2.1, sendo  $\mathbf{u}_0$  o vetor que representa o deslocamento do ponto  $O_0$  em  $C_0$  ao ponto  $O$  em  $C$ . A matriz de rotação  $\mathbf{Q}$  que aparece nas Equações (2.3) e (2.4) pode ser definida, segundo Gere & Weaver (1981), no caso de treliça plana como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Já no caso de treliça espacial, a matriz de rotação  $\mathbf{Q}$  pode ser expressa, também segundo Gere & Weaver (1981) por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & -\frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ -\frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Deve-se ressaltar que a matriz  $\mathbf{Q}$  apresentada na Equação (2.6) é válida para todas as posições do elemento de barra no espaço, exceto quando o elemento está alinhado com o eixo  $Y$ , para o qual  $C_x = 0$  e  $C_z = 0$ , e a matriz de rotação  $\mathbf{Q}$  resulta em:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

sendo  $(C_x, C_y)$  no caso de treliça plana e  $(C_x, C_y, C_z)$  no caso de treliça espacial, os co-senos diretores do elemento de barra na configuração atual  $C$  (direção do eixo local  $x^e$ ), em relação ao sistema global de coordenadas, conforme será comentado posteriormente. Uma vez que a matriz  $\mathbf{Q}$  é uma matriz ortogonal, ou seja  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ , sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade, então a Equação (2.4) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^e + \mathbf{u}_0 \quad (2.8)$$

### 2.3 – DESLOCAMENTOS DEFORMACIONAIS

Nos passos seguintes, será apresentada a obtenção dos deslocamentos deformacionais em coordenadas locais, definidos anteriormente na Equação (2.3). No caso de treliças planas, as coordenadas da partícula  $P_R$  em  $C_R$  podem ser definidas pela seguinte equação:

$$\mathbf{x}_R = \begin{Bmatrix} x_R \\ y_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y \\ C_y & C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}^T \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 \quad (2.9)$$

A interpretação geométrica da Equação (2.9) para o caso de uma treliça plana pode ser visualizada na Figura 2.2, na qual os co-senos diretores  $(C_x, C_y)$  do elemento de barra na configuração atual  $C$  (direção do eixo local  $x^e$ ) são calculados em função do ângulo  $\psi$  entre os eixos locais  $x_0^e$  e  $x^e$ , no sentido anti-horário, sendo designados por  $(\cos \psi, \sin \psi)$ .

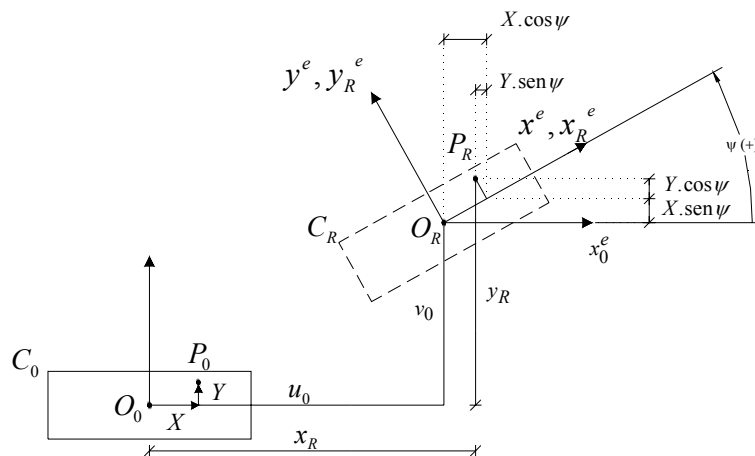


Figura 2.2 – Posição de uma partícula  $P_R$  na configuração co-rotacionada  $C_R$ .

Já as coordenadas da partícula  $P$  na configuração atual  $C$  podem ser expressas por:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X + u \\ Y + v \end{Bmatrix} = \mathbf{X} + \mathbf{u} = \mathbf{IX} + \mathbf{u} \quad (2.10)$$

Lembrando que  $\mathbf{u}_D = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$ , conforme definido na Equação (2.2) e substituindo-se os valores de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_R$  definidos pelas Equações (2.9) e (2.10), obtém-se:

$$\mathbf{u}_D = \begin{Bmatrix} u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x - x_R \\ y - y_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - C_x & C_y \\ -C_y & 1 - C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{Bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T)\mathbf{X} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad (2.11)$$

Por último, pode-se obter o deslocamento deformacional em relação às coordenadas locais através da transformação de coordenadas definida na Equação (2.3):

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_D = (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (2.12)$$

No caso de treliças espaciais, as coordenadas das partículas  $P_R$  em  $C_R$  e  $P$  em  $C$  são definidas de forma análoga ao caso bidimensional, pelas seguintes equações:

$$\mathbf{x}_R = \begin{Bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}^T \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}^T \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X + u \\ Y + v \\ Z + w \end{Bmatrix} = \mathbf{X} + \mathbf{u} = \mathbf{IX} + \mathbf{u} \quad (2.14)$$

Lembrando que  $\mathbf{u}_D = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$ , conforme definido na Equação (2.2) e substituindo-se os valores de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_R$ , definidos pelas Equações (2.13) e (2.14), obtém-se:

$$\mathbf{u}_D = \begin{Bmatrix} u_D \\ v_D \\ w_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x - x_R \\ y - y_R \\ z - z_R \end{Bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T) \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \\ w - w_0 \end{Bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T)\mathbf{X} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad (2.15)$$

sendo a matriz de rotação  $\mathbf{Q}^T$  que aparece nas Equações (2.13) e (2.15), definida pela transposta da matriz de rotação expressa na Equação (2.6) ou (2.7), conforme a posição da barra em relação ao eixo global  $Y$ . Vale lembrar que o deslocamento deformacional em relação às coordenadas locais no caso tridimensional, também, pode ser expresso pela Equação (2.12), definida para o caso bidimensional, bastando usar os vetores e matrizes correspondentes no espaço.

### 2.3.1 – Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais

Neste item, os deslocamentos deformacionais definidos anteriormente para um ponto genérico são particularizados para os nós das extremidades dos elementos de barra. No caso específico de treliças planas, as coordenadas nodais do elemento em  $C_0$  com relação aos eixos locais são  $X_2 = -X_1 = \frac{1}{2} L_0$  e  $Y_2 = Y_1 = 0$ , sendo  $L_0$  o comprimento do elemento nesta configuração. Os deslocamentos dos nós de extremidade podem ser definidos por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(X_1, Y_1) \\ v(X_1, Y_1) \\ u(X_2, Y_2) \\ v(X_2, Y_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(-1/2 L_0, 0) \\ v(-1/2 L_0, 0) \\ u(1/2 L_0, 0) \\ v(1/2 L_0, 0) \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

De maneira similar, o movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1D}^e \\ \mathbf{u}_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_D^e(X_1, Y_1) \\ v_D^e(X_1, Y_1) \\ u_D^e(X_2, Y_2) \\ v_D^e(X_2, Y_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_D^e(-1/2 L_0, 0) \\ v_D^e(-1/2 L_0, 0) \\ u_D^e(1/2 L_0, 0) \\ v_D^e(1/2 L_0, 0) \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Uma vez definida a Equação (2.17), a Equação (2.12) pode então ser re-escrita após algebrismos simples em função dos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & -C_y & C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \\ u_2 - u_0 \\ v_2 - v_0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} L_0 \begin{Bmatrix} 1 - C_x \\ C_y \\ C_x - 1 \\ -C_y \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Uma vez que o campo de deslocamentos do elemento é linear em  $X$  e em  $Y$ , o elemento permanece reto na configuração atual  $C$  e portanto se pode escrever que:

$$u_0 = \frac{1}{2} \cdot (u_1 + u_2), \quad v_0 = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2) \quad (2.19)$$

O próximo passo é definir os valores dos co-senos diretores ( $C_x, C_y$ ) em função dos deslocamentos nodais, e em seguida achar o comprimento do elemento ( $L$ ) na configuração atual, conforme apresentado a seguir na Figura 2.3. Vale ressaltar que nesta dedução, a configuração inicial já não se encontra mais alinhada com os eixos globais.

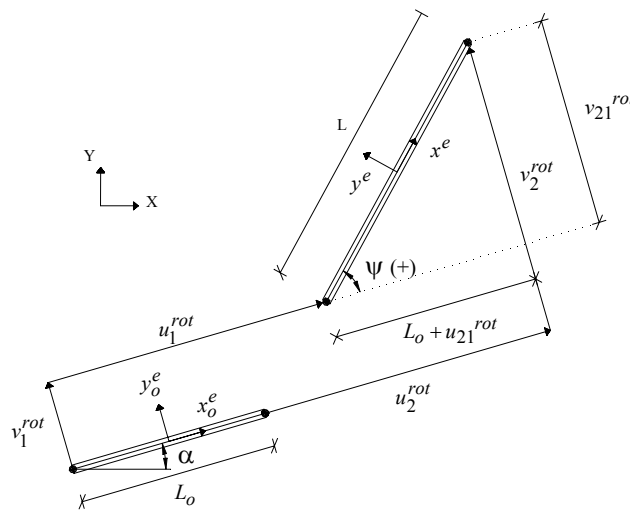


Figura 2.3 – Movimento do elemento de barra no plano.

Inicialmente, é feita a rotação dos deslocamentos nodais em relação ao sistema de eixos locais na configuração inicial ( $x_0^e, y_0^e, z_0^e$ ), definido em função do ângulo  $\alpha$ :

$$\mathbf{u}_{21}^{rot} = \begin{Bmatrix} u_{21}^{rot} \\ v_{21}^{rot} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2^{rot} - u_1^{rot} \\ v_2^{rot} - v_1^{rot} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{21}/L_0 & Y_{21}/L_0 \\ -Y_{21}/L_0 & X_{21}/L_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{21} \\ v_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = X_{21}/L_0 = (X_2 - X_1)/L_0 \\ \text{sen } \alpha = Y_{21}/L_0 = (Y_2 - Y_1)/L_0 \\ u_{21} = u_2 - u_1 \\ v_{21} = v_2 - v_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Uma vez conhecidos os deslocamentos nodais rotacionados, segundo a Equação (2.20), é possível definir as demais variáveis cinemáticas envolvidas na formulação co-rotacional em função das relações geométricas apresentadas na Figura 2.3:

$$C_x = \cos \psi = \frac{L_0 + u_{21}^{rot}}{L}; \quad C_y = \sin \psi = \frac{v_{21}^{rot}}{L} \quad (2.22)$$

$$L = \sqrt{(L_0 + u_{21}^{rot})^2 + (v_{21}^{rot})^2} \quad (2.23)$$

Nas próximas seções, serão obtidos o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente dos elementos através das derivadas primeira e segunda do funcional da energia de deformação, respectivamente. Assim, será calculada a derivada primeira de  $L$  em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ , de modo que:

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -\frac{\partial L}{\partial u_1} = \cos \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial v_2} = -\frac{\partial L}{\partial v_1} = \sin \psi \quad (2.24)$$

cuja forma vetorial se expressa como

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -\cos \psi \\ -\sin \psi \\ \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Utilizando as Equações (2.22), (2.23) e (2.24) e a relação  $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ , pode-se obter a derivada segunda de  $L$  em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \sin^2 \psi & -\sin \psi \cos \psi & -\sin^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ -\sin \psi \cos \psi & \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi & -\cos^2 \psi \\ -\sin^2 \psi & \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi & -\sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & -\cos^2 \psi & -\sin \psi \cos \psi & \cos^2 \psi \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

O procedimento utilizado para o caso bidimensional pode, também, ser estendido de forma análoga para o caso de uma treliça espacial, na qual as coordenadas nodais do elemento em  $C_0$  com relação aos eixos locais são  $X_2 = -X_1 = \frac{1}{2} L_0$ ,  $Y_2 = Y_1 = 0$  e  $Z_1 = Z_2 = 0$  sendo  $L_0$  o comprimento do elemento nesta configuração. Os deslocamentos dos nós de extremidade podem ser então definidos por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(X_1, Y_1, Z_1) \\ v(X_1, Y_1, Z_1) \\ w(X_1, Y_1, Z_1) \\ u(X_2, Y_2, Z_2) \\ v(X_2, Y_2, Z_2) \\ w(X_2, Y_2, Z_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(-1/2 L_0, 0, 0) \\ v(-1/2 L_0, 0, 0) \\ w(-1/2 L_0, 0, 0) \\ u(1/2 L_0, 0, 0) \\ v(1/2 L_0, 0, 0) \\ w(1/2 L_0, 0, 0) \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

De maneira similar, o movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais pode ser expresso da seguinte forma para o caso tridimensional:

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1D}^e \\ \mathbf{u}_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ w_{1D}^e \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \\ w_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_D^e(X_1, Y_1, Z_1) \\ v_D^e(X_1, Y_1, Z_1) \\ w_D^e(X_1, Y_1, Z_1) \\ u_D^e(X_2, Y_2, Z_2) \\ v_D^e(X_2, Y_2, Z_2) \\ w_D^e(X_2, Y_2, Z_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_D^e(-1/2 L_0, 0, 0) \\ v_D^e(-1/2 L_0, 0, 0) \\ w_D^e(-1/2 L_0, 0, 0) \\ u_D^e(1/2 L_0, 0, 0) \\ v_D^e(1/2 L_0, 0, 0) \\ w_D^e(1/2 L_0, 0, 0) \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Uma vez definida a Equação (2.28), a Equação (2.12) pode então ser re-escrita para o caso tridimensional em função dos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ w_{1D}^e \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \\ w_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \\ w_1 - w_0 \\ u_2 - u_0 \\ v_2 - v_0 \\ w_2 - w_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{3 \times 3} - \mathbf{I} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{3 \times 3} - \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

sendo  $\mathbf{Q}_{3 \times 3}$  a matriz de rotação definida na Equação (2.6) ou (2.7) conforme a posição do elemento de barra,  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  uma matriz quadrada nula e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade de ordem 3.



Uma vez que o campo de deslocamentos do elemento é linear em X, Y e Z o elemento permanece reto na configuração atual  $C$  e portanto se pode escrever que:

$$u_0 = \frac{1}{2} \cdot (u_1 + u_2), \quad v_0 = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2), \quad w_0 = \frac{1}{2} \cdot (w_1 + w_2) \quad (2.30)$$

O próximo passo é definir os valores dos co-senos diretores ( $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ) em função dos deslocamentos nodais, e em seguida achar o comprimento do elemento ( $L$ ) na configuração atual, lembrando que nesta dedução, a configuração inicial já não se encontra mais alinhada com os eixos globais. Assim como no caso bidimensional, inicialmente é feita a rotação dos deslocamentos nodais em relação ao sistema de eixos locais definidos na configuração inicial:

$$\mathbf{u}_{21}^{rot} = \begin{Bmatrix} u_{21}^{rot} \\ v_{21}^{rot} \\ w_{21}^{rot} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2^{rot} - u_1^{rot} \\ v_2^{rot} - v_1^{rot} \\ w_2^{rot} - w_1^{rot} \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} u_{21} \\ v_{21} \\ w_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

sendo  $\mathbf{Q}$  a matriz de rotação definida pelas equações (2.6) ou (2.7), empregando-se os seguintes co-senos diretores:

$$\begin{cases} C_x^{rot} = X_{21}/L_0 = (X_2 - X_1)/L_0 \\ C_y^{rot} = Y_{21}/L_0 = (Y_2 - Y_1)/L_0 \\ C_z^{rot} = Z_{21}/L_0 = (Z_2 - Z_1)/L_0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Uma vez conhecidos os deslocamentos nodais rotacionados, segundo a Equação (2.31), é possível definir as demais variáveis cinemáticas envolvidas na formulação co-rotacional de treliças espaciais em função de relações geométricas análogas às apresentadas para o caso bidimensional na Figura 2.3:

$$C_x = \frac{L_0 + u_{21}^{rot}}{L}; \quad C_y = \frac{v_{21}^{rot}}{L}; \quad C_z = \frac{w_{21}^{rot}}{L} \quad (2.33)$$

$$L = \sqrt{(L_0 + u_{21}^{rot})^2 + (v_{21}^{rot})^2 + (w_{21}^{rot})^2} \quad (2.34)$$

Nas próximas seções, serão obtidos o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente dos elementos através das derivadas primeira e segunda do funcional da energia de deformação, respectivamente. Assim, será calculada a derivada primeira de  $L$  em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ , utilizando-se as Equações (2.33) e (2.34) de modo que:

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -\frac{\partial L}{\partial u_1} = C_x, \quad \frac{\partial L}{\partial v_2} = -\frac{\partial L}{\partial v_1} = C_y, \quad \frac{\partial L}{\partial w_2} = -\frac{\partial L}{\partial w_1} = C_z \quad (2.35)$$

cuja forma vetorial se expressa como:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -C_x \\ -C_y \\ -C_z \\ C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Utilizando as Equações (2.33), (2.34) e (2.35) e a relação  $C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = 1$ , pode-se obter a derivada segunda de  $L$  em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} (C_y^2 + C_z^2) & -C_x C_y & -C_x C_z & -(C_y^2 + C_z^2) & C_x C_y & C_x C_z \\ -C_x C_y & (C_x^2 + C_z^2) & -C_y C_z & C_x C_y & -(C_x^2 + C_z^2) & C_y C_z \\ -C_x C_z & -C_y C_z & (C_x^2 + C_y^2) & C_x C_z & C_y C_z & -(C_x^2 + C_y^2) \\ -(C_y^2 + C_z^2) & C_x C_y & C_x C_z & (C_y^2 + C_z^2) & -C_x C_y & -C_x C_z \\ C_x C_y & -(C_x^2 + C_z^2) & C_y C_z & -C_x C_y & (C_x^2 + C_z^2) & -C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & -(C_x^2 + C_y^2) & -C_x C_z & -C_y C_z & (C_x^2 + C_y^2) \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

## 2.4 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Admitindo uma relação linear entre o par conjugado de tensão e deformação, pode-se definir a seguinte relação entre tensões e deformações nas configurações inicial e atual:

$$\sigma_X = E \cdot \varepsilon_X \quad \text{em } C_0 \quad (2.38)$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad \text{em } C \quad (2.39)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal do material. Considerando-se esta hipótese e definindo-se a área da seção transversal dos elementos em  $C_0$  e  $C$  como sendo, respectivamente,  $A_0$  e  $A$ , as energias de deformação de um elemento de treliça nas configurações inicial e atual podem ser definidas, respectivamente, da seguinte forma:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} EA_0 \varepsilon_x^2 dX^e \quad \text{em } C_0 \quad (2.40)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_x^2 dx^e \quad \text{em } C \quad (2.41)$$

Seguindo a metodologia apresentada por Crisfield (1991), no presente capítulo, foram utilizadas quatro medidas distintas de deformações, sendo duas delas descritas em coordenadas materiais (deformação de engenharia e Green-Lagrange) e duas em coordenadas espaciais (deformação de Biot e Almansi), sendo expressas, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{eng} &= \frac{L - L_0}{L_0} = \lambda - 1 \\ \varepsilon_x^{green} &= \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \\ \varepsilon_x^{biot} &= \frac{L - L_0}{L} = 1 - \lambda^{-1} \\ \varepsilon_x^{almansi} &= \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2} = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

#### 2.4.1 – Vetor de forças internas

O vetor de forças internas descrito em coordenadas materiais pode ser obtido através da primeira derivada do funcional da energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais, de modo que, derivando a Equação (2.40) se obtém a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{f}}^e = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} 2EA_0 \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}} dX^e = \int_0^{L_0} EA_0 \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}} dX^e \quad (2.43)$$

Já o vetor de forças internas descrito em coordenadas espaciais pode ser obtido de forma análoga ao anterior, derivando a Equação (2.41) em relação aos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{f}^e = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \int_0^L 2EA \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}} dx^e = \int_0^L EA \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}} dx^e \quad (2.44)$$

Os esforços axiais nos elementos de treliça nas configurações inicial e atual podem ser definidos, respectivamente, da seguinte forma:

$$N_0 = EA_0 \varepsilon_x, \quad N = EA \varepsilon_x \quad (2.45)$$

Levando-se em conta a Equação (2.25) para o caso bidimensional ou Equação (2.36) para o caso tridimensional, além das Equações (2.42) e (2.45) e efetuando a integração das Equações (2.43) e (2.44), se chega às expressões do vetor de forças internas em coordenadas materiais e espaciais dados, respectivamente, por:

$$\hat{\mathbf{f}}^e = N_0 \beta_0 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{f}^e = N \beta \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 1 \Rightarrow \text{Engenharia} \\ \beta_0 = \lambda \Rightarrow \text{Green - Lagrange} \\ \beta = \lambda^{-1} \Rightarrow \text{Biot} \\ \beta = \lambda^{-2} \Rightarrow \text{Almansi} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

sendo os coeficientes  $\beta_0$  e  $\beta$  resultantes da integração das Equações (2.43) e (2.44), em função das diferentes medidas de deformações. É importante ressaltar que na seção 2.2 foi suposto que o sistema de eixos locais do elemento na configuração inicial  $C_0$  está alinhado com os sistemas de eixos globais material e espacial. Em uma formulação mais geral, se supõe que existe uma certa inclinação entre estes sistemas de eixos e portanto se deve escrever o vetor de forças internas em coordenadas materiais e espaciais, em relação ao sistema de eixos globais através da seguinte relação:

$$\hat{\mathbf{f}}_g^e = \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{f}}^e, \quad \mathbf{f}_g^e = \mathbf{R}^T \mathbf{f}^e \quad (2.47)$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

onde  $\mathbf{R}^T$  é a matriz de rotação que transforma do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global,  $\mathbf{0}$  é uma matriz nula e  $\mathbf{Q}^T$ , a transposta da matriz  $\mathbf{Q}$ , expressa na Equação (2.5) para o caso bidimensional ou Equações (2.6) e (2.7) para o caso tridimensional, com os co-senos diretores definidos nas Equações (2.21) ou (2.32), conforme se trate de treliça plana ou de treliça espacial, respectivamente.

#### 2.4.2 – Matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez tangente em relação às coordenadas materiais pode ser obtida pelo cálculo da segunda derivada do funcional da energia de deformação definida em  $C_0$  com relação aos deslocamentos nodais:

$$\hat{\mathbf{K}}^e = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \mathbf{u}^2} = \int_0^{L_0} EA_0 \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + \varepsilon_x \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}^2} \right] dX^e \quad (2.49)$$

Levando-se em conta as Equações (2.25) e (2.26) para o caso bidimensional ou Equações (2.36) e (2.37) para o caso tridimensional, além das Equações (2.42) e (2.45) e efetuando a integração da Equação (2.49), se chega após algebrismos simples à expressão da matriz de rigidez tangente em coordenadas materiais:

$$\hat{\mathbf{K}}^e = \frac{EA_0}{L_0} \alpha_0 \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + N_0 \beta_0 \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 1 \Rightarrow \text{Engenharia} \\ \alpha_0 = (3\lambda^2 - 1)/2 \Rightarrow \text{Green - Lagr.} \end{cases} \quad (2.50)$$

Procedendo de forma análoga, a matriz de rigidez tangente em coordenadas espaciais pode ser obtida pela segunda derivada do funcional da energia de deformação definida em  $C$ :

$$\mathbf{K}^e = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}^2} = \int_0^L EA \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + \varepsilon_x \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \mathbf{u}^2} \right] dx^e \quad (2.51)$$

Levando-se em conta as Equações (2.25) e (2.26) para o caso bidimensional ou Equações (2.36) e (2.37) para o caso tridimensional, além das Equações (2.42) e (2.45) e efetuando a integração da Equação (2.51), se chega à expressão final da matriz de rigidez tangente em coordenadas espaciais:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \alpha \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + N \beta \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2} \begin{cases} \alpha = 3\lambda^{-2} - 2\lambda^{-1} \Rightarrow \text{Biot} \\ \alpha = (5\lambda^{-4} - 3\lambda^{-2})/2 \Rightarrow \text{Almansi} \end{cases} \quad (2.52)$$

Conforme comentado anteriormente para o caso do vetor de forças internas, é necessário transformar do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global através da operação descrita abaixo, sendo  $\mathbf{R}^T$  a matriz de rotação definida na Equação (2.48):

$$\hat{\mathbf{K}}_g^e = \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{K}}^e \mathbf{R}, \quad \mathbf{K}_g^e = \mathbf{R}^T \mathbf{K}^e \mathbf{R} \quad (2.53)$$

### 2.4.3 – Unicidade na resposta estrutural

Para o caso de deformações infinitesimais, o parâmetro  $\lambda = L/L_0$  que aparece na Equação (2.42) tende a 1 e conseqüentemente as diferentes medidas de deformações utilizadas são praticamente iguais. Assumindo-se que o coeficiente de Poisson  $\nu=0$ , o que implica em dizer que  $A=A_0$ , os valores dos esforços axiais em  $C_0$  e  $C$  definidos na Equação (2.45) também são praticamente iguais, ao passo que os coeficientes  $\beta_0$  e  $\beta$  que aparecem na Equação (2.46) também assumem valores idênticos e, portanto, as componentes do vetor de forças internas definido na Equação (2.46) também são idênticas. Tomando-se o valor da rigidez do elemento nas configurações inicial e atual como sendo  $k_0=EA_0/L_0$  e  $k=EA/L$ , nota-se que para o caso de  $\lambda \rightarrow 1$  implica em  $k \approx k_0$  uma vez que  $L \approx L_0$  e  $A=A_0$ , que somado ao fato dos coeficientes  $\alpha$  e  $\alpha_0$  assumirem valores próximos de 1, também leva os coeficientes das matrizes de rigidez definidos nas Equações (2.50) e (2.52) a serem praticamente idênticos e portanto pode-se concluir que:

$$\lambda \rightarrow 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu = 0 \rightarrow A = A_0 \\ L \approx L_0 \\ \varepsilon_{eng} \approx \varepsilon_{green} \approx \varepsilon_{biot} \approx \varepsilon_{almansi} \\ \sigma_{eng} \approx \sigma_{green} \approx \sigma_{biot} \approx \sigma_{almansi} \\ N \approx N_0 \\ \alpha \approx \alpha_0 \\ \beta \approx \beta_0 \\ k \approx k_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{f}}^e \approx \mathbf{f}^e \\ \hat{\mathbf{K}}^e \approx \mathbf{K}^e \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Já para o caso de deformações finitas, as diferentes medidas de deformações utilizadas apresentam valores diferentes e portanto se pode concluir que as componentes do vetor de forças internas diferem entre si. Além disso, os coeficientes da matriz de rigidez tangente também são diferentes e de um modo geral pode-se dizer que:

$$\lambda \neq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu = 0 \rightarrow A = A_0 \\ L \neq L_0 \\ \varepsilon_{eng} \neq \varepsilon_{green} \neq \varepsilon_{biot} \neq \varepsilon_{almansi} \\ \sigma_{eng} \neq \sigma_{green} \neq \sigma_{biot} \neq \sigma_{almansi} \\ N \neq N_0 \\ \alpha \neq \alpha_0 \\ \beta \neq \beta_0 \\ k \neq k_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{f}}^e \neq \mathbf{f}^e \\ \hat{\mathbf{K}}^e \neq \mathbf{K}^e \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Observando-se a Equação (2.55) pode-se concluir que no caso de deformações finitas, ao se adotar uma relação linear entre o par conjugado de tensão e deformação, não se obtém unicidade na resposta. Conforme comentado anteriormente, para se obter unicidade na resposta no regime de deformações finitas é necessário recorrer a transformações tensoriais da mecânica dos meios contínuos que fazem o mapeamento do tensor constitutivo entre as configurações indeformada e atual, tema que não será abordado no presente trabalho.

### 3 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE PÓRTICOS PLANOS

#### 3.1 – MODELOS MATEMÁTICOS DE ELEMENTOS DE VIGA

Na mecânica estrutural, geralmente, são utilizados dois modelos matemáticos distintos para discretizar os elementos de viga que compõem as estruturas. O primeiro deles é referente à teoria clássica de viga, também chamado modelo de Euler-Bernoulli ( $C^1$ ), no qual as forças cortantes transversais são obtidas a partir do equilíbrio do elemento, porém o seu efeito no cálculo das deformações é desprezado. A hipótese fundamental deste modelo é que as seções transversais permanecem planas e normais ao eixo longitudinal deformado, com a rotação ocorrendo em torno do eixo neutro que passa no centróide da seção transversal.

O segundo é o modelo de Timoshenko ( $C^0$ ) que corrige a teoria clássica de viga com o efeito das deformações cisalhantes de primeira ordem. Nesta teoria, as seções transversais permanecem planas e sofrem rotações em torno do eixo neutro, da mesma forma que ocorre no modelo de Euler-Bernoulli, porém elas não permanecem normais ao eixo longitudinal deformado, sendo esta diferença angular em relação ao eixo normal produzida pelo esforço cortante transversal que é assumido constante ao longo da seção transversal.

De acordo com Faria (1998) e Felippa (2001), os dois modelos matemáticos descritos anteriormente estão baseados na hipótese de comportamento elástico e isotrópico do material. Além disso, ambos não consideram os efeitos de mudanças nas dimensões da seção transversal à medida que a viga se deforma. Estes modelos podem considerar a não linearidade geométrica devido ao efeito de grandes deslocamentos e rotações, desde que as outras hipóteses comentadas anteriormente sejam obedecidas.

No presente capítulo, será apresentada a descrição cinemática da formulação co-rotacional de pórticos planos discretizados através de elementos de viga, utilizando-se o modelo de Euler-Bernoulli, sem o acoplamento dos efeitos do esforço axial e da flexão, conforme o trabalho apresentado por Menin & Taylor (2003<sup>b</sup>), procurando-se seguir o mesmo formato do capítulo anterior, no qual a formulação co-rotacional foi desenvolvida para discretizar elementos de treliça, de modo a facilitar o entendimento e a visualização das semelhanças e diferenças existentes entre o elemento de viga e o elemento de barra articulado.



Na descrição cinemática co-rotacional desenvolvida para o elemento de viga de Euler-Bernoulli, a configuração de referência é dividida em duas partes, sendo as tensões e deformações medidas a partir de uma configuração co-rotacionada, ao passo que a configuração inicial é mantida como configuração de referência para a obtenção dos deslocamentos de corpo rígido. Desta forma, o deslocamento total de cada nó da viga analisada pode ser decomposto em duas partes, sendo a primeira referente ao deslocamento de corpo rígido, no qual ocorrem translações e rotações finitas; e a segunda que está associada aos deslocamentos deformacionais, consistindo de deformações na direção axial do elemento (alongamentos ou encurtamentos) e na deformação angular do elemento em torno do eixo  $z$ . Vale lembrar que são consideradas rotações e translações finitas para cada nó do elemento de viga em análise, porém suas deformações são admitidas infinitesimais. A energia de deformação total é obtida pelo somatório das energias de deformação axial e de flexão, isoladamente, sem consideração do acoplamento dos efeitos entre ambas, conforme comentado anteriormente.

No final deste capítulo, são descritas algumas informações importantes para o cálculo das rotações de corpo rígido e deformacional, necessárias na implementação computacional do elemento de viga segundo a formulação co-rotacional descrita em Menin (2004).

### 3.2 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

Considerando-se um elemento finito de viga prismático e reto que se move no plano de acordo com a Figura 3.1, por simplicidade será admitido como hipótese inicial que os eixos locais  $(x_0^e, y_0^e)$  do elemento na sua configuração inicial  $C_0$  estão alinhados com os sistemas de coordenadas globais material e espacial, designados por  $(X, Y)$  e  $(x, y)$ , respectivamente, tendo a sua origem  $O_0$  localizada na metade do comprimento inicial do elemento, definido por  $L_0$ . O elemento de viga se move da configuração inicial  $C_0$  até a configuração atual  $C$  de modo que o eixo longitudinal passe através dos nós de extremidade na configuração atual, definindo assim o eixo local  $x^e$ . A origem do sistema de eixos locais  $(x^e, y^e)$  é então definida na metade da distância entre os nós de extremidade, formando um ângulo  $\psi$  com o eixo local  $x_0^e$ . A chamada configuração co-rotacionada  $C_R$  se move, conjuntamente, com o elemento até a configuração atual  $C$ , posicionando-se simetricamente em relação à configuração atual, de modo que os eixos locais co-rotacionados  $(x_R^e, y_R^e)$  coincidam com os eixos locais  $(x^e, y^e)$  em  $C$ .

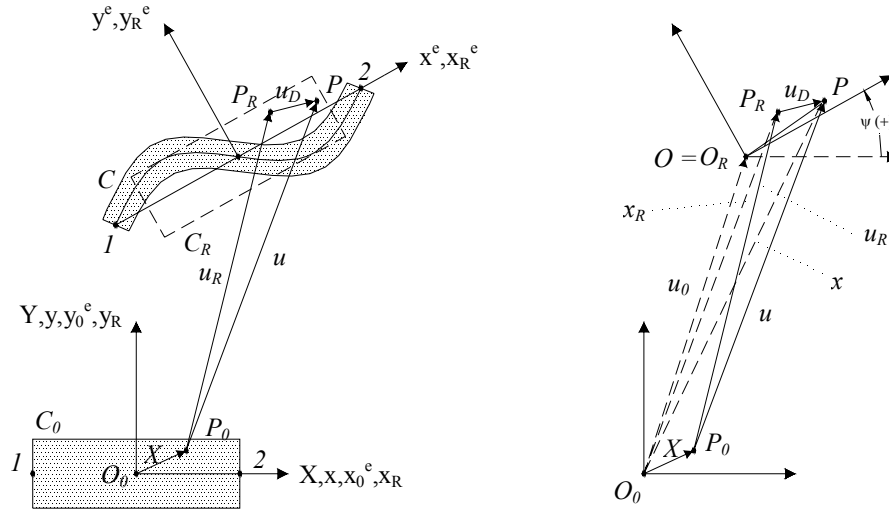


Figura 3.1 – Elemento finito de viga  $C^I$  nas configurações inicial e atual.

Tomando-se uma partícula  $P_0$  de coordenadas  $(X, Y)$  em  $C_0$ , que se move ao ponto  $P_R$  de coordenadas  $(x_R, y_R)$  em  $C_R$ , e em seguida se move ao ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  em  $C$ , então, o deslocamento total  $\mathbf{u}$  da partícula, em coordenadas globais pode ser descrito por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x - X \\ y - Y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

sendo  $\theta$  definido como sendo a rotação total, obtida pelo somatório da rotação de corpo rígido  $\psi$  com a rotação deformacional  $\bar{\theta}$ , ou seja:

$$\theta = \psi + \bar{\theta} \quad (3.2)$$

Este deslocamento  $\mathbf{u}$  pode então ser decomposto em uma parte deformacional  $\mathbf{u}_D$  e outra que corresponde ao deslocamento de corpo rígido  $\mathbf{u}_R$  de modo que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_D = (\mathbf{x}_R - \mathbf{X}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R) \quad (3.3)$$

Na formulação co-rotacional, as equações do movimento deformacional são definidas em função das coordenadas locais  $(x^e, y^e)$  em  $C$ , conforme a seguinte equação:

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_D \quad (3.4)$$

sendo  $\mathbf{Q}$  uma matriz de rotação  $3 \times 3$  utilizada para transformar do sistema global  $(X, Y)$  ao local  $(x^e, y^e)$ . Os deslocamentos deformacionais  $\mathbf{u}_D^e$  são utilizados para obter o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente, conforme será comentado posteriormente.

### 3.2.1 – Sistemas de coordenadas

Os sistemas de coordenadas local  $(x^e, y^e)$  na configuração atual  $C$  e global  $(x, y)$  podem ser relacionados por meio da seguinte equação:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}_0) \quad (3.5)$$

Esta relação expressa na equação acima pode ser visualizada através da Figura 3.1, sendo  $\mathbf{u}_0$  o vetor que representa o deslocamento do ponto  $O_0$  em  $C_0$  ao ponto  $O$  em  $C$ . A matriz de rotação  $\mathbf{Q}$  que aparece nas Equações (3.4) e (3.5) pode ser definida no caso de pórticos planos segundo Gere & Weaver (1981) como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

sendo  $(C_x, C_y)$  os co-senos diretores do elemento de viga na configuração atual  $C$  (direção do eixo local  $x^e$ ), em relação ao sistema global de coordenadas, conforme será comentado posteriormente. Uma vez que a matriz  $\mathbf{Q}$  é uma matriz ortogonal, ou seja  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ , sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade, então a Equação (3.5) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^e + \mathbf{u}_0 \quad (3.7)$$

### 3.3 – DESLOCAMENTOS DEFORMACIONAIS

Nos passos seguintes, será apresentada a obtenção dos deslocamentos deformacionais em coordenadas locais, definidos anteriormente na Equação (3.4) por  $\mathbf{u}_D^e$ . No caso de um elemento de viga no plano, as coordenadas das partículas  $P_R$  em  $C_R$  e  $P$  em  $C$  são definidas pelas equações:

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{Q}^T \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta_{P_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_{P_0} + \psi \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} = \mathbf{I}\mathbf{X} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta_{P_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta_{P_0} + \theta \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

É importante enfatizar que as Equações (3.8) e (3.9), definidas acima, foram deduzidas para um ponto genérico qualquer  $P_0$  e que para um ponto situado sobre o eixo local  $x_0^e$  na configuração inicial  $C_0$ , conforme será o caso dos nós de extremidade do elemento de viga, o termo  $\theta_{P_0}$  será nulo, ou seja,  $\theta_{P_0} = 0$ . A interpretação geométrica da Equação (3.8) pode ser visualizada na Figura 3.2. Nesta figura os co-senos diretores ( $C_x, C_y$ ) do elemento de viga na configuração atual (direção do eixo local  $x^e$ ) são calculados em função do ângulo  $\psi$  entre os eixos locais  $x_0^e$  e  $x^e$  no sentido anti-horário, sendo designados por ( $\cos \psi, \sin \psi$ ).

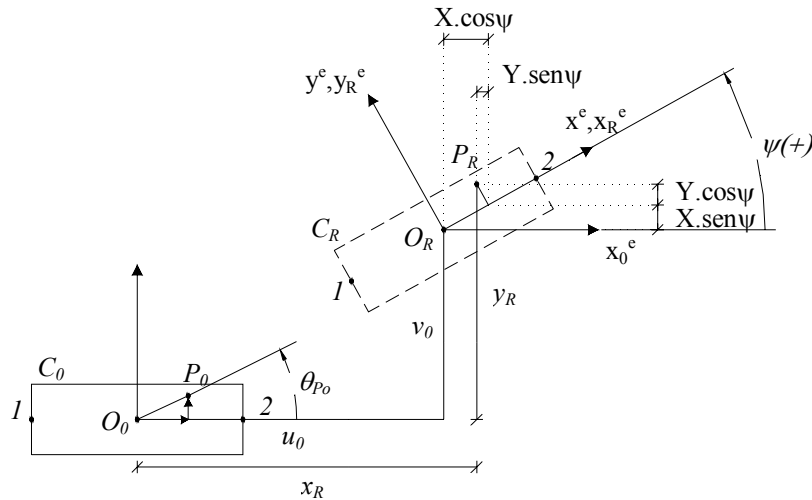


Figura 3.2 – Posição de uma partícula  $P_R$  na configuração co-rotacionada  $C_R$ .

Lembrando que  $\mathbf{u}_D = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$ , conforme definido na Equação (3.3) e substituindo-se os valores de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_R$ , definidos pelas Equações (3.8) e (3.9), obtém-se:

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T)\mathbf{X} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} x - x_R \\ y - y_R \\ \theta - \psi \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Finalmente, pode-se obter o deslocamento deformacional em relação às coordenadas locais através da transformação de coordenadas apresentada na Equação (3.4):

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_D = (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (3.11)$$

### 3.3.1 – Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais

Os deslocamentos deformacionais definidos anteriormente para um ponto genérico são agora particularizados para os nós das extremidades dos elementos. No caso de elementos de vigas prismáticos e retos no plano (2D), as coordenadas nodais do elemento em  $C_0$  com relação ao sistema de eixos locais  $(X,Y)$  são  $X_2 = -X_1 = 1/2 L_0$  e  $Y_2 = Y_1 = 0$ , sendo  $L_0$  o comprimento do elemento nesta configuração. Os deslocamentos totais  $\mathbf{u}$  e deformacionais  $\mathbf{u}_D^e$  dos nós de extremidade podem ser então definidos por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(-1/2L_0,0) \\ v(-1/2L_0,0) \\ \theta(-1/2L_0,0) \\ u(1/2L_0,0) \\ v(1/2L_0,0) \\ \theta(1/2L_0,0) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1D}^e \\ \mathbf{u}_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ \bar{\theta}_1 \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_D^e(-1/2L_0,0) \\ v_D^e(-1/2L_0,0) \\ \theta_D^e(-1/2L_0,0) \\ u_D^e(1/2L_0,0) \\ v_D^e(1/2L_0,0) \\ \theta_D^e(1/2L_0,0) \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Uma vez conhecida a Equação (3.12), a Equação (3.11) definida para um ponto genérico pode então ser re-escrita após algebrismos simples em função dos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ \bar{\theta}_1 \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}L_0 \begin{Bmatrix} 1 - C_\psi \\ S_\psi \\ 0 \\ C_\psi - 1 \\ -S_\psi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\psi & S_\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_\psi & C_\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_\psi & S_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \\ \theta_1 - \psi \\ u_2 - u_0 \\ v_2 - v_0 \\ \theta_2 - \psi \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

sendo  $C_\psi = \cos \psi$  e  $S_\psi = \sin \psi$  os co-senos diretores do elemento de viga definidos em função da rotação de corpo rígido  $\psi$ .

Já os deslocamentos translacionais do ponto  $O_0$  em  $C_0$  ao ponto  $O$  em  $C$  podem ser expressos pelas seguintes equações:

$$u_0 = \frac{1}{2} \cdot (u_1 + u_2), \quad v_0 = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2) \quad (3.14)$$

O próximo passo é definir os valores dos co-senos diretores ( $C_\psi$ ,  $S_\psi$ ) em função dos deslocamentos nodais, e em seguida achar o comprimento do elemento ( $L$ ) na configuração atual, conforme apresentado na Figura 3.3. Vale ressaltar que nesta dedução, com o intuito de se representar um caso bem geral, a configuração inicial já não se encontra mais alinhada com os eixos globais.

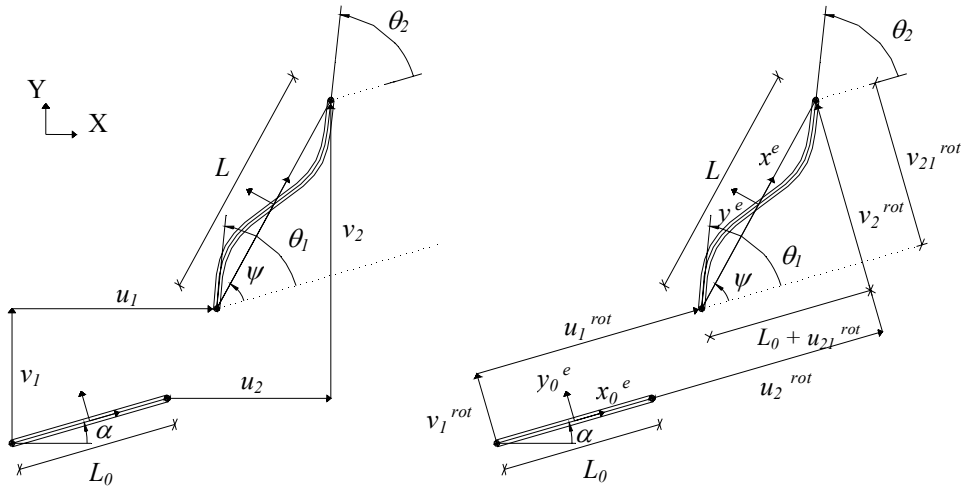


Figura 3.3 – Deslocamentos globais e deslocamentos globais rotacionados.

Na Figura 3.3 é mostrado o movimento do elemento de viga no plano, sendo que do lado esquerdo são indicados os deslocamentos globais, ou seja em relação ao sistema de eixos globais ( $X, Y$ ) e do lado direito os deslocamentos globais rotacionados. Portanto, o primeiro passo é fazer a rotação dos deslocamentos nodais globais em relação ao sistema de eixos locais na configuração inicial ( $x_0^e, y_0^e$ ), definido em função do ângulo  $\alpha$ , lembrando que não é necessário transformar os ângulos de rotação:

$$\mathbf{u}_{21}^{rot} = \begin{Bmatrix} u_{21}^{rot} \\ v_{21}^{rot} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2^{rot} - u_1^{rot} \\ v_2^{rot} - v_1^{rot} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\alpha & S_\alpha \\ -S_\alpha & C_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{21} \\ v_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

sendo:

$$\begin{cases} C_\alpha = \cos \alpha = X_{21} / L_0 = (X_2 - X_1) / L_0 \\ S_\alpha = \text{sen } \alpha = Y_{21} / L_0 = (Y_2 - Y_1) / L_0 \\ u_{21} = u_2 - u_1 \\ v_{21} = v_2 - v_1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Uma vez conhecidos os deslocamentos nodais rotacionados, segundo a Equação (3.15), é possível definir as demais variáveis cinemáticas envolvidas na formulação co-rotacional em função das relações geométricas apresentadas na Figura 3.3:

$$C_\psi = \cos \psi = \frac{L_0 + u_{21}^{rot}}{L} \quad (3.17)$$

$$S_\psi = \text{sen } \psi = \frac{v_{21}^{rot}}{L} \quad (3.18)$$

$$L = \sqrt{(L_0 + u_{21}^{rot})^2 + (v_{21}^{rot})^2} \quad (3.19)$$

Definidas as principais variáveis cinemáticas envolvidas na formulação co-rotacional, serão apresentados na Figura 3.4, a seguir, os deslocamentos deformacionais em relação ao sistema de eixos locais na configuração atual  $C$ , de modo a possibilitar uma melhor visualização e entendimento dos mesmos. É importante salientar que são válidas as seguintes relações:  $u_{2D}^e = -u_{1D}^e = d/2$ ,  $v_{2D}^e = v_{1D}^e = 0$ ,  $\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \psi$  e  $\bar{\theta}_2 = \theta_2 - \psi$ .

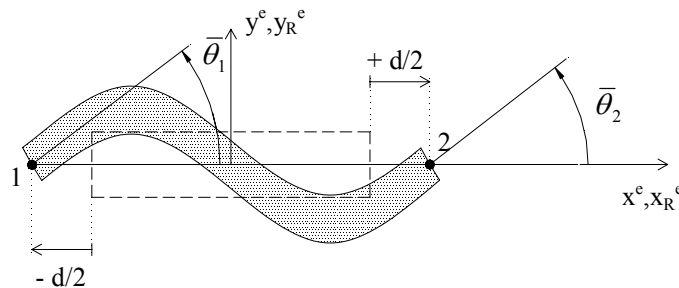


Figura 3.4 – Deslocamentos deformacionais no sistema local.

### 3.3.2 – Derivadas parciais dos deslocamentos deformacionais

Nas próximas seções, serão obtidos o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente através das derivadas primeira e segunda do funcional da energia de deformação. A partir das Equações (3.17), (3.18) e (3.19) pode-se definir as seguintes expressões:

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -\frac{\partial L}{\partial u_1} = C_\psi; \quad \frac{\partial L}{\partial v_2} = -\frac{\partial L}{\partial v_1} = S_\psi; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial C_\psi}{\partial u_2} = -\frac{\partial C_\psi}{\partial u_1} = \frac{S_\psi^2}{L}; \quad \frac{\partial C_\psi}{\partial v_2} = -\frac{\partial C_\psi}{\partial v_1} = -\frac{S_\psi C_\psi}{L}; \quad \frac{\partial C_\psi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial C_\psi}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.20b)$$

$$\frac{\partial S_\psi}{\partial u_2} = -\frac{\partial S_\psi}{\partial u_1} = -\frac{S_\psi C_\psi}{L}; \quad \frac{\partial S_\psi}{\partial v_2} = -\frac{\partial S_\psi}{\partial v_1} = \frac{C_\psi^2}{L}; \quad \frac{\partial S_\psi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial S_\psi}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.20c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = -\frac{S_\psi}{L}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial v_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial v_1} = \frac{C_\psi}{L}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.20d)$$

Derivando-se cada um dos elementos do vetor  $\mathbf{u}_D^e$  de deslocamentos deformacionais, definidos na Equação (3.13) em relação aos deslocamentos globais  $\mathbf{u}$ , obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \partial u_{1D}^e \\ \partial v_{1D}^e \\ \partial \bar{\theta}_1 \\ \partial u_{2D}^e \\ \partial v_{2D}^e \\ \partial \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi/2 & S_\psi/2 & 0 & -C_\psi/2 & -S_\psi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_\psi/L & C_\psi/L & 1 & S_\psi/L & -C_\psi/L & 0 \\ -C_\psi/2 & -S_\psi/2 & 0 & C_\psi/2 & S_\psi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_\psi/L & C_\psi/L & 0 & S_\psi/L & -C_\psi/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_1 \\ \partial v_1 \\ \partial \theta_1 \\ \partial u_2 \\ \partial v_2 \\ \partial \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Lembrando que  $u_{2D}^e = -u_{1D}^e = 1/2.d$ , a Equação (3.21) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \partial d \\ \partial \bar{\theta}_1 \\ \partial \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_\psi & -S_\psi & 0 & C_\psi & S_\psi & 0 \\ -S_\psi/L & C_\psi/L & 1 & S_\psi/L & -C_\psi/L & 0 \\ -S_\psi/L & C_\psi/L & 0 & S_\psi/L & -C_\psi/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_1 \\ \partial v_1 \\ \partial \theta_1 \\ \partial u_2 \\ \partial v_2 \\ \partial \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$



Levando em conta as Equações (3.20) e (3.22), as segundas derivadas dos deslocamentos deformacionais podem ser definidas por:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} S_\psi^2 & -S_\psi C_\psi & 0 & -S_\psi^2 & S_\psi C_\psi & 0 \\ -S_\psi C_\psi & C_\psi^2 & 0 & S_\psi C_\psi & -C_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_\psi^2 & S_\psi C_\psi & 0 & S_\psi^2 & -S_\psi C_\psi & 0 \\ S_\psi C_\psi & -C_\psi^2 & 0 & -S_\psi C_\psi & C_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_1}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_2}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -2S_\psi C_\psi & C_\psi^2 - S_\psi^2 & 0 & 2S_\psi C_\psi & S_\psi^2 - C_\psi^2 & 0 \\ C_\psi^2 - S_\psi^2 & 2S_\psi C_\psi & 0 & S_\psi^2 - C_\psi^2 & -2S_\psi C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2S_\psi C_\psi & S_\psi^2 - C_\psi^2 & 0 & -2S_\psi C_\psi & C_\psi^2 - S_\psi^2 & 0 \\ S_\psi^2 - C_\psi^2 & -2S_\psi C_\psi & 0 & C_\psi^2 - S_\psi^2 & 2S_\psi C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

### 3.4 – ESFORÇOS RESULTANTES

Os esforços resultantes em cada um dos elementos de viga na configuração atual  $C$  são:  $N$ ,  $V$ ,  $M_1$  e  $M_2$ , sendo  $N$  o esforço normal,  $V$  o esforço cortante e  $M_1$  e  $M_2$  os momentos fletores nas extremidades inicial e final do elemento. Os esforços  $N$  e  $V$  são constantes ao longo de todo o elemento, ao passo que o momento fletor  $M = M(x^e)$  varia linearmente ao longo do elemento por se tratar de um modelo hermitiano. Estes esforços resultantes, com as respectivas convenções de sinais, são mostrados na Figura 3.5 apresentada a seguir, sendo obtidos a partir das respectivas deformações, de acordo com as seguintes equações apresentadas por Harrison (1973):

$$N = EA_0 \varepsilon = \frac{EA_0}{L_0} d; \quad V = \frac{M_1 + M_2}{L} = \frac{6EI}{LL_0} (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \quad (3.25)$$

$$M_1 = \frac{2EI}{L_0} (2\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2); \quad M_2 = \frac{2EI}{L_0} (\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal do material;  $A_0$  a área da seção transversal;  $I$  o momento de inércia da seção transversal;  $L_0$  e  $L$  os comprimentos dos elementos de viga nas configurações inicial e atual, respectivamente; e  $\varepsilon$  a conhecida deformação nominal ou de engenharia, ou seja,  $\varepsilon = (L - L_0) / L_0 = d / L_0$ .

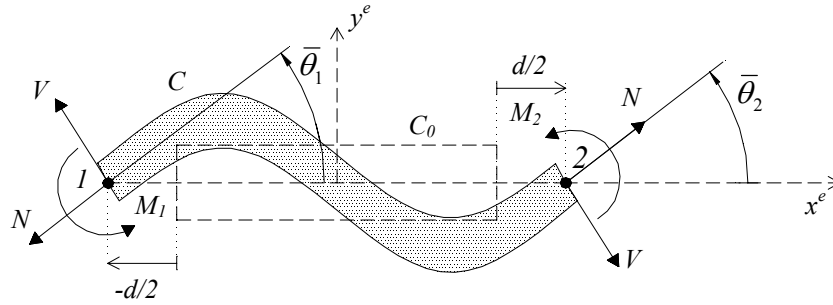


Figura 3.5 – Convenções de sinais positivos para deformações e esforços resultantes.

### 3.5 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DA VIGA

A energia de deformação da viga, considerando-se apenas deformações infinitesimais e, portanto, sem levar em conta o acoplamento dos efeitos dos esforços axiais e de flexão pode ser expressa pela seguinte equação:

$$U = U^A + U^F \quad (3.26)$$

sendo  $U^A$  e  $U^F$  as energias de deformação axial e de flexão, respectivamente. Desta forma, adotam-se as seguintes expressões definidas em Felippa (2001):

$$U^A = \frac{1}{2} EA_0 L_0 \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{EA_0}{L_0} d^2 \quad (3.27)$$

$$U^F = \frac{2EI}{L_0} (\bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_2^2) \quad (3.28)$$

### 3.6 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS

O vetor de forças internas  $\mathbf{f}$  é obtido pela derivada primeira do funcional da energia de deformação  $U$  em relação aos deslocamentos globais  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{f} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.29)$$

Substituindo-se os valores  $U^A$  e  $U^F$ , definidos nas Equações (3.27) e (3.28), na Equação (3.29) e usando-se as derivadas primeiras de  $d$ ,  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$ , chega-se às seguintes expressões:

$$\mathbf{f}^A = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{1}{2} \frac{EA_0}{L_0} d^2 \right) = \frac{EA_0}{L_0} d \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} = N \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} = N \begin{bmatrix} -C_\psi & -S_\psi & 0 & C_\psi & S_\psi & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.30)$$

$$\mathbf{f}^F = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{2EI}{L_0} (\bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_2^2) \right) = \frac{2EI}{L_0} \left( 2\bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \mathbf{u}} \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \mathbf{u}} + 2\bar{\theta}_2 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \mathbf{u}} \right) \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{f}^F = \begin{bmatrix} -VS_\psi & VC_\psi & M_1 & VS_\psi & -VC_\psi & M_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.31b)$$

Uma vez definidos os vetores  $\mathbf{f}^A$  e  $\mathbf{f}^F$ , através das Equações (3.30) e (3.31), pode-se obter o vetor de forças internas somando-se as contribuições dos esforços axial e de flexão:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^A + \mathbf{f}^F \quad (3.32)$$

É importante ressaltar que no capítulo 3.2 foi suposto que o sistema de eixos locais do elemento na configuração inicial  $C_0$  está alinhado com os sistemas de eixos globais material e espacial. Em uma formulação bem geral, se supõe que existe uma certa inclinação entre estes sistemas de eixos definida em função do ângulo  $\alpha$ , conforme apresentado na Figura 3.3 e portanto se deve reescrever o vetor de forças internas, em relação ao sistema de eixos globais através da seguinte relação:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{R}^T \mathbf{f} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{R}^T$  é a matriz de rotação que transforma do sistema de coordenadas local para o sistema global,  $\mathbf{0}$  é uma matriz nula de ordem 3 e  $\mathbf{Q}^T$ , a transposta da matriz  $\mathbf{Q}$ , expressa na Equação (3.6), com os co-senos diretores definidos na Equação (3.16).

### 3.7 – MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

A matriz de rigidez tangente é obtida pela segunda derivada do funcional da energia de deformação  $U$  em relação ao vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{u}$ , ou de forma similar através da primeira derivada do vetor de forças internas  $\mathbf{f}$ , podendo ser decomposta em duas partes: a matriz de rigidez material ( $\mathbf{K}_M$ ) e a matriz de rigidez geométrica ( $\mathbf{K}_G$ ).

$$\mathbf{K} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (3.35)$$

Substituindo-se os valores das forças internas  $\mathbf{f}^A$  e  $\mathbf{f}^F$  apresentados nas Equações (3.30) e (3.31) na Equação (3.35) e usando-se as derivadas primeiras e segundas das deformações  $d, \bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$  definidas nas Equações (3.22), (3.23) e (3.24) chega-se às seguintes expressões:

$$\frac{\partial \mathbf{f}^A}{\partial \mathbf{u}} = \frac{EA_0}{L_0} \left( \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + d \frac{\partial^2 d}{\partial \mathbf{u}^2} \right) = \mathbf{K}_M^{axial} + \mathbf{K}_G^{axial} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}^F}{\partial \mathbf{u}} = \frac{2EI}{L_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( (2\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \mathbf{u}} + (\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \mathbf{u}} \right) = \mathbf{K}_M^{flexão} + \mathbf{K}_G^{flexão} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_M^{axial} + \mathbf{K}_M^{flexão} \quad (3.38a)$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G^{axial} + \mathbf{K}_G^{flexão} \quad (3.38b)$$

$$\mathbf{K}_M^{axial} = \frac{EA_0}{L_0} \begin{bmatrix} C_\psi^2 & S_\psi C_\psi & 0 & -C_\psi^2 & -S_\psi C_\psi & 0 \\ S_\psi C_\psi & S_\psi^2 & 0 & -S_\psi C_\psi & -S_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_\psi^2 & -S_\psi C_\psi & 0 & C_\psi^2 & S_\psi C_\psi & 0 \\ -S_\psi C_\psi & -S_\psi^2 & 0 & S_\psi C_\psi & S_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{K}_M^{flexão} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} \frac{6S_\psi^2}{L^2} & -\frac{6S_\psi C_\psi}{L^2} & -\frac{3S_\psi}{L} & -\frac{6S_\psi^2}{L^2} & \frac{6S_\psi C_\psi}{L^2} & -\frac{3S_\psi}{L} \\ \frac{6S_\psi C_\psi}{L^2} & \frac{6C_\psi^2}{L^2} & \frac{3C_\psi}{L} & \frac{6S_\psi C_\psi}{L^2} & \frac{6C_\psi^2}{L^2} & \frac{3C_\psi}{L} \\ -\frac{3S_\psi}{L} & \frac{3C_\psi}{L} & 2 & \frac{3S_\psi}{L} & -\frac{3C_\psi}{L} & 1 \\ \frac{6S_\psi^2}{L^2} & \frac{6S_\psi C_\psi}{L^2} & \frac{3S_\psi}{L} & \frac{6S_\psi^2}{L^2} & \frac{6S_\psi C_\psi}{L^2} & \frac{3S_\psi}{L} \\ \frac{6S_\psi C_\psi}{L^2} & \frac{6C_\psi^2}{L^2} & \frac{3C_\psi}{L} & \frac{6S_\psi C_\psi}{L^2} & \frac{6C_\psi^2}{L^2} & \frac{3C_\psi}{L} \\ -\frac{3S_\psi}{L} & \frac{3C_\psi}{L} & 1 & \frac{3S_\psi}{L} & -\frac{3C_\psi}{L} & 2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{K}_G^{axial} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} S_\psi^2 & -S_\psi C_\psi & 0 & -S_\psi^2 & S_\psi C_\psi & 0 \\ -S_\psi C_\psi & C_\psi^2 & 0 & S_\psi C_\psi & -C_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_\psi^2 & S_\psi C_\psi & 0 & S_\psi^2 & -S_\psi C_\psi & 0 \\ S_\psi C_\psi & -C_\psi^2 & 0 & -S_\psi C_\psi & C_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{K}_G^{flexão} = \frac{V}{L} \begin{bmatrix} -2S_\psi C_y & C_\psi^2 - S_\psi^2 & 0 & 2S_\psi C_y & S_\psi^2 - C_\psi^2 & 0 \\ C_\psi^2 - S_\psi^2 & 2S_\psi C_y & 0 & S_\psi^2 - C_\psi^2 & -2S_\psi C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2S_\psi C_y & S_\psi^2 - C_\psi^2 & 0 & -2S_\psi C_y & C_\psi^2 - S_\psi^2 & 0 \\ S_\psi^2 - C_\psi^2 & -2S_\psi C_y & 0 & C_\psi^2 - S_\psi^2 & 2S_\psi C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Por fim, conforme comentado para o vetor de forças internas, é necessário transformar do sistema de coordenadas local para o sistema global através da seguinte operação:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \quad (3.43)$$

### 3.8 – ÂNGULOS DE ROTAÇÃO NA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL

Neste item, serão descritas algumas informações importantes para o cálculo das rotações de corpo rígido e deformacional segundo Menin (2004), necessárias na implementação computacional do elemento finito de viga de Euler-Bernoulli utilizando a formulação co-rotacional. Vale lembrar que as rotações totais  $\theta$  podem ser obtidas, diretamente, a partir do vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{u}$ , após a resolução do sistema de equações não lineares.

Inicialmente é feita a determinação da rotação de corpo rígido ( $\psi$ ), em função dos co-senos diretores  $C_\psi$  e  $S_\psi$ , descritos nas Equações (3.17) e (3.18), definidos pela posição da viga na configuração deformada. A escolha de qual co-seno diretor usar na determinação da rotação de corpo rígido é definida em função do quadrante no qual a viga se encontra na sua configuração deformada, lembrando que, na maioria das linguagens computacionais, dentre as quais está o *Fortran*, na qual foi feita a implementação computacional do elemento de viga, os valores do arco-seno de um ângulo ( $\text{sen}^{-1}$ ) são fornecidos em radianos no primeiro e quarto quadrantes, de modo que correspondem a ângulos entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  ao passo que os valores de arco co-seno de um ângulo ( $\text{cos}^{-1}$ ) são fornecidos em radianos no primeiro e segundo quadrantes, compreendendo valores entre 0 e  $\pi$ . Em função destes fatores e observando-se a Figura 3.6 para um melhor entendimento, as rotações de corpo rígido podem ser calculadas conforme a Equação (3.44):

$$\begin{aligned} C_\psi > 0 \text{ e } S_\psi > 0 &\Rightarrow (\text{quad} = 1) \text{ e } \psi = \text{sen}^{-1}(S_\psi) : 0 \leq \psi \leq \pi/2 \\ C_\psi < 0 \text{ e } S_\psi > 0 &\Rightarrow (\text{quad} = 2) \text{ e } \psi = \text{cos}^{-1}(C_\psi) : \pi/2 \leq \psi \leq \pi \\ C_\psi < 0 \text{ e } S_\psi < 0 &\Rightarrow (\text{quad} = 3) \text{ e } \psi = -\text{cos}^{-1}(C_\psi) : -\pi \leq \psi \leq -\pi/2 \\ C_\psi > 0 \text{ e } S_\psi < 0 &\Rightarrow (\text{quad} = 4) \text{ e } \psi = \text{sen}^{-1}(S_\psi) : -\pi/2 \leq \psi \leq 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Uma vez conhecida a rotação total ( $\theta$ ) e a rotação de corpo rígido ( $\psi$ ), o próximo passo é a determinação da rotação deformacional ( $\bar{\theta}$ ). Ao contrário de trabalhos publicados por outros autores sem a utilização de quatérnios (Felippa, 2001 e Crisfield, 1991), nos quais as rotações totais estavam limitadas a  $2\pi$ , é importante ressaltar que no presente trabalho, em função de modificações apresentadas a seguir, pode-se admitir rotações totais de qualquer ordem de grandeza tanto no sentido anti-horário (rotações positivas), quanto no sentido horário (rotações negativas).

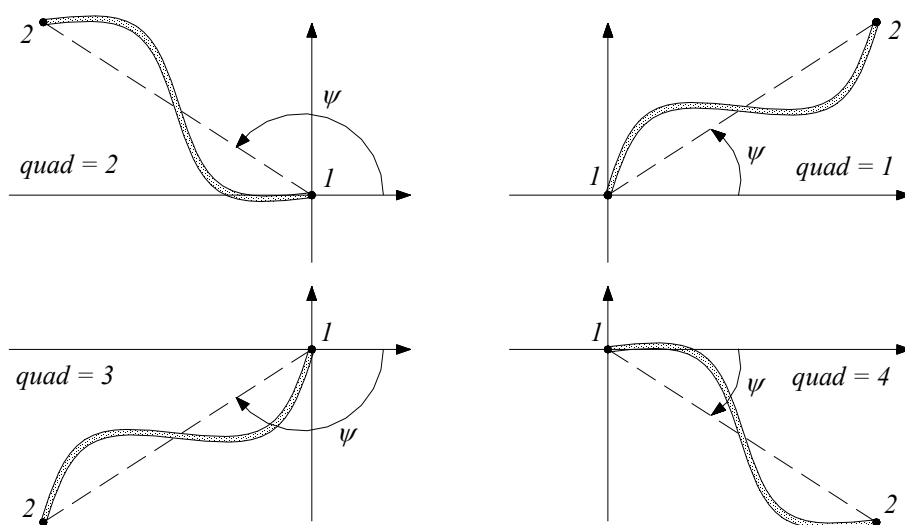


Figura 3.6 – Rotação de corpo rígido  $\psi$  em função do quadrante.

Em virtude da maneira pela qual são calculadas as rotações de corpo rígido pelo *Fortran* através da Equação (3.44) e devido ao fato de as rotações poderem ser tanto positivas quanto negativas, são necessárias algumas transformações de ângulos, de modo que a rotação deformacional definida na Equação (3.2) seja calculada de forma correta. No caso de rotações totais de até  $2\pi$ , ou seja 360 graus, são apresentadas nas Equações (3.45) e (3.46) as fórmulas para o cálculo das rotações deformacionais em função do quadrante em que se encontra a rotação de corpo rígido, respectivamente, para o caso de rotações totais positivas ou negativas:

$$\begin{aligned}
 (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ e } (quad = 1) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - \psi \\
 (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ e } (quad = 2) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - \psi \\
 (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ e } (quad = 3) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 2\pi) \\
 (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ e } (quad = 4) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 2\pi)
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
 (-2\pi \leq \theta \leq 0) \text{ e } (quad = 1) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 2\pi) - \psi \\
 (-2\pi \leq \theta \leq 0) \text{ e } (quad = 2) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 2\pi) - \psi \\
 (-2\pi \leq \theta \leq 0) \text{ e } (quad = 3) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - \psi \\
 (-2\pi \leq \theta \leq 0) \text{ e } (quad = 4) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - \psi
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Já para o caso de rotações totais compreendidas entre  $2\pi$  e  $4\pi$ , ou seja de 360 e 720 graus, são apresentadas nas Equações (3.47) e (3.48) as fórmulas para o cálculo das rotações deformacionais em função do quadrante em que se encontra a rotação de corpo rígido, respectivamente, para o caso de rotações positivas ou negativas:

$$\begin{aligned}
(2\pi \leq \theta \leq 4\pi) \text{ e } (quad = 1) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 2\pi) \\
(2\pi \leq \theta \leq 4\pi) \text{ e } (quad = 2) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 2\pi) \\
(2\pi \leq \theta \leq 4\pi) \text{ e } (quad = 3) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 4\pi) \\
(2\pi \leq \theta \leq 4\pi) \text{ e } (quad = 4) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 4\pi)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
(-4\pi \leq \theta \leq -2\pi) \text{ e } (quad = 1) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 4\pi) - \psi \\
(-4\pi \leq \theta \leq -2\pi) \text{ e } (quad = 2) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 4\pi) - \psi \\
(-4\pi \leq \theta \leq -2\pi) \text{ e } (quad = 3) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 2\pi) - \psi \\
(-4\pi \leq \theta \leq -2\pi) \text{ e } (quad = 4) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 2\pi) - \psi
\end{aligned} \tag{3.48}$$

De forma análoga, o raciocínio pode ser estendido facilmente para o caso de rotações totais de qualquer ordem de grandeza, compreendidas entre  $[n.2\pi]$  e  $[(n+1).2\pi]$ , tanto positivas quanto negativas, sendo apresentadas nas Equações (3.49) e (3.50) as fórmulas de recorrência para determinação das rotações deformacionais para um caso bem geral e lembrando que  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
(n.2\pi \leq \theta \leq (n+1).2\pi) \text{ e } (quad = 1) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + n.2\pi) \\
(n.2\pi \leq \theta \leq (n+1).2\pi) \text{ e } (quad = 2) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + n.2\pi) \\
(n.2\pi \leq \theta \leq (n+1).2\pi) \text{ e } (quad = 3) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + (n+1).2\pi) \\
(n.2\pi \leq \theta \leq (n+1).2\pi) \text{ e } (quad = 4) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + (n+1).2\pi)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
(-(n+1).2\pi \leq \theta \leq -n.2\pi) \text{ e } (quad = 1) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + (n+1).2\pi) - \psi \\
(-(n+1).2\pi \leq \theta \leq -n.2\pi) \text{ e } (quad = 2) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + (n+1).2\pi) - \psi \\
(-(n+1).2\pi \leq \theta \leq -n.2\pi) \text{ e } (quad = 3) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + n.2\pi) - \psi \\
(-(n+1).2\pi \leq \theta \leq -n.2\pi) \text{ e } (quad = 4) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + n.2\pi) - \psi
\end{aligned} \tag{3.50}$$



Na Figura 3.7 são mostradas, de uma forma bem geral, as rotações totais e de corpo rígido para diversas posições da viga, em diferentes quadrantes. Nesta figura, são apresentadas as rotações totais e deformacionais referentes ao nó inicial do elemento, sendo indicados para cada quadrante duas situações distintas que correspondem a rotações totais maiores ou menores que a rotação de corpo rígido, em função das quais as rotações deformacionais podem assumir valores positivos ou negativos. Embora não tenha sido apresentado na Figura 3.7, o raciocínio pode ser estendido, de forma análoga, para o nó final do elemento.

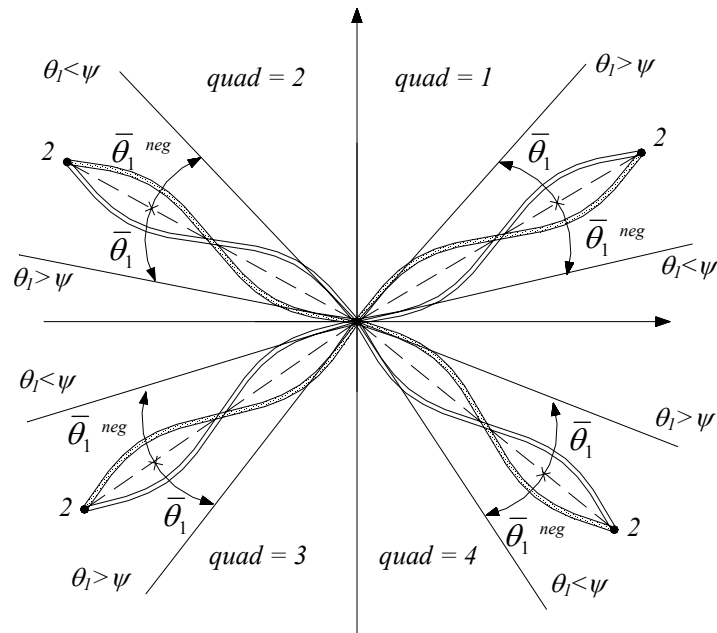


Figura 3.7 – Rotações totais e deformacionais nos diversos quadrantes.

Na determinação da rotação deformacional admitindo-se rotações totais de qualquer ordem de grandeza, conforme comentado acima, ainda existem alguns casos especiais de rotações que devem ser considerados na implementação computacional. Estes casos especiais envolvem, basicamente, a ocorrência simultânea de ângulos referentes a rotações totais e de corpo rígido no primeiro e quarto quadrantes, respectivamente ou vice-versa. Existem, na realidade, seis casos especiais que serão abordados a seguir. Os dois primeiros casos estão associados à ocorrência de ângulos de rotação de corpo rígido ou totais iguais a zero, sendo as rotações deformacionais calculadas segundo as Equações (3.51) e (3.52):

$$\text{Caso 1: } (\psi = 0.0) \Rightarrow \bar{\theta} = \theta \quad (3.51)$$

$$\text{Caso 2: } (\psi = 0.0 \text{ e } \theta = 0.0) \Rightarrow \bar{\theta} = 0.0 \quad (3.52)$$

Para facilitar o entendimento e proporcionar uma melhor visualização, o caso especial 1 é mostrado na Figura 3.8, no qual são apresentadas duas situações distintas, sendo a primeira referente à rotação total maior que a rotação de corpo rígido, para a qual a rotação deformacional é positiva e a segunda que está associada à rotação total menor que a rotação de corpo rígido, de modo que a rotação deformacional assume valor negativo. O caso especial 2 corresponde, simplesmente, ao elemento na sua configuração indeformada.

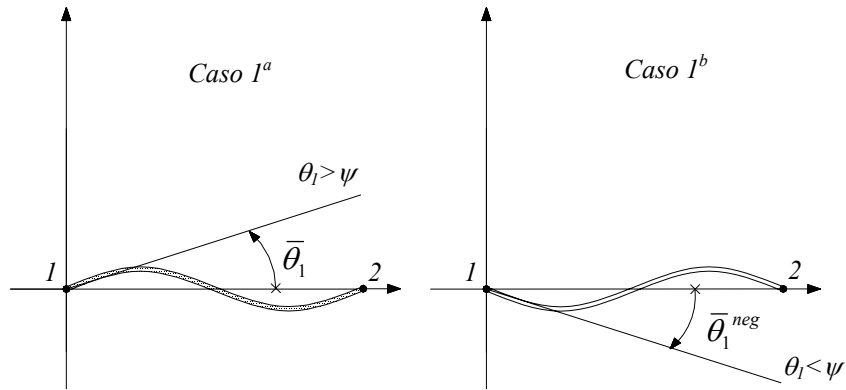


Figura 3.8 – Casos especiais  $1^a$  e  $1^b$  de rotações deformacionais.

Os demais 4 casos especiais envolvem a ocorrência simultânea de ângulos associados a rotações totais e de corpo rígido no primeiro e quarto quadrantes, para os quais as transformações propostas nas Equações (3.45) a (3.50) podem conduzir a erros. De modo a resolver estes problemas, devem-se utilizar as seguintes equações complementares na implementação computacional das rotações deformacionais, sendo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{Caso 3: } \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - \psi \\
 (2\pi \leq \theta \leq 2.5\pi) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 2\pi) \\
 (n.2\pi \leq \theta \leq n.2\pi + \pi/2) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + n.2\pi)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Caso 4: } \quad (1.5\pi \leq \theta \leq 2\pi) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 2\pi) \\
 (3.5\pi \leq \theta \leq 4\pi) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + 4\pi) \\
 ((n+1).2\pi - \pi/2 \leq \theta \leq (n+1).2\pi) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - (\psi + (n+1).2\pi)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\text{Caso 5: } (-2\pi \leq \theta \leq -1.5\pi) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 2\pi) - \psi \\
(-4\pi \leq \theta \leq -3.5\pi) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 4\pi) - \psi \\
(-(n+1).2\pi \leq \theta \leq -(n+1).2\pi + \pi/2) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + (n+1).2\pi) - \psi
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\text{Caso 6: } (-\pi/2 \leq \theta \leq 0) &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta - \psi \\
(-2.5\pi \leq \theta \leq -2\pi) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + 2\pi) - \psi \\
(-n.2\pi - \pi/2 \leq \theta \leq -n.2\pi) &\Rightarrow \bar{\theta} = (\theta + n.2\pi) - \psi
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Os casos especiais 3 e 4 são referentes a rotações totais positivas ao passo que os casos especiais 5 e 6 estão associados a rotações totais negativas. A primeira linha de cada um destes casos se refere a rotações totais em valor absoluto menores que  $2\pi$ , a segunda linha se refere a rotações totais em valor absoluto entre  $2\pi$  e  $4\pi$  ao passo que a terceira linha está associado ao caso geral de rotações entre  $[n.2\pi]$  e  $[(n+1).2\pi]$ . Estes casos especiais podem ser visualizados através da Figura 3.9, lembrando que as diferenças entre as rotações totais e de corpo rígido, encontram-se exageradas apenas para facilitar a visualização.

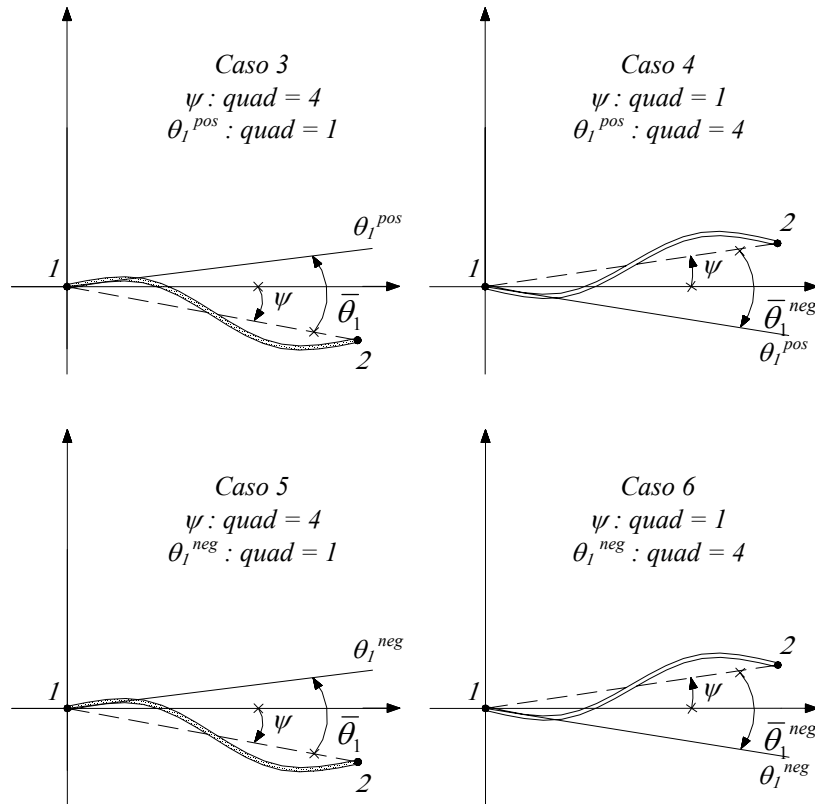


Figura 3.9 – Casos especiais 3, 4, 5, e 6 de rotações deformacionais.

## 4 – MATRIZ DE ROTAÇÃO NO ESPAÇO

### 4.1 – ROTAÇÕES FINITAS NO ESPAÇO

As rotações no plano (2D), por exemplo, no plano  $xy$ , podem ser definidas por um único escalar, ou seja, um ângulo de rotação  $\theta$  em torno do eixo  $z$ , sendo válida a propriedade comutativa:  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ , uma vez que os ângulos de rotação são apenas escalares. Por outro lado, o estudo das rotações no espaço é um pouco mais complicado, sendo o assunto fundamentado no teorema de Euler, apresentado por Felippa (2001): *o movimento genérico de um corpo rígido fixo por um ponto pode ser descrito por uma única rotação do corpo em torno de um eixo passando por tal ponto*. Conseqüentemente, para se descrever uma rotação no espaço são necessários não só o ângulo mas também a direção ou eixo de rotação. Estes são, normalmente, os mesmos atributos que caracterizam um vetor, entretanto, as rotações finitas no espaço não obedecem as leis do cálculo vetorial, em especial não sendo mais válida a propriedade comutativa, uma vez que a alteração da ordem de aplicação de duas rotações sucessivas não resulta na mesma resposta a menos que o eixo de rotação seja mantido fixo.

A seguir será apresentada a obtenção da matriz de rotação no espaço conforme descrito por Monteiro (2004) e Crisfield (1997). O movimento de dois pontos genéricos  $P$  e  $Q$  de um corpo rígido é mostrado na Figura 4.1, sendo o movimento completo separado em duas etapas. Inicialmente, todos os pontos transladam da mesma quantidade  $d_{trans}$ , de modo que  $P$  e  $Q$  se deslocam para  $P'$  e  $Q'$ , respectivamente. Em seguida, o corpo é submetido a uma rotação representada pelo ângulo  $\theta$  em torno do eixo direcionado, segundo a direção unitária  $e$  que passa pelo ponto  $P'$ , fazendo com que o ponto  $Q'$  se movimente para  $Q''$ .

Adotando-se a notação  $r_\theta = P'Q'$ ,  $r_n = P'Q''$  e  $d_{rot} = Q'Q''$ , conforme apresentados na Figura 4.1, a matriz de rotação  $R_\theta$  e o vetor  $d_{rot}$  podem ser definidos, respectivamente, através das seguintes equações:

$$r_n = R_\theta \cdot r_\theta \quad (4.1)$$

$$d_{rot} = r_n - r_\theta \quad (4.2)$$

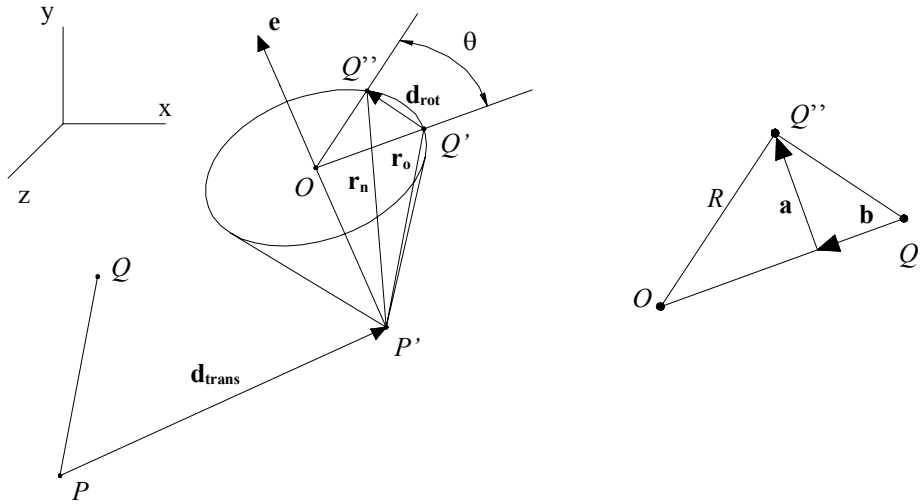


Figura 4.1 – Movimento de corpo rígido no espaço.

Por se tratar de um corpo rígido, a trajetória descrita pelo ponto  $Q$  entre as posições  $Q'$  e  $Q''$  define um arco de circunferência de raio  $R$ , que pertence ao plano perpendicular ao eixo de rotação cujo centro está localizado no ponto  $O$ . Através da Figura 4.1, pode-se observar que:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}_{rot} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (4.3)$$

sendo os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  descritos pelas equações a seguir, onde  $\alpha$  é o ângulo definido entre o eixo de rotação ( $\mathbf{e}$ ) e o vetor  $\mathbf{r}_0$ :

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0\|} = \|\mathbf{a}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\| \sin \alpha} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{b} = \|\mathbf{b}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{a}\|} = \|\mathbf{b}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad (4.5)$$

Observando-se a Figura 4.1 novamente, podem-se definir as seguintes expressões:

$$\|\mathbf{r}_0\| \sin \alpha = R \quad \|\mathbf{a}\| = R \sin \theta \quad \|\mathbf{b}\| = R(1 - \cos \theta) \quad (4.6)$$

Substituindo-se os valores definidos pela Equação (4.6) nas Equações (4.4) e (4.5) os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  podem ser re-escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{a} = \text{sen } \theta \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 \quad \mathbf{b} = (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 \quad (4.7)$$

Inserindo os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  na Equação (4.3) e utilizando-se a seguinte propriedade associada ao produto vetorial entre dois vetores  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  definida em Argyris (1982):

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

sendo  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  os componentes do vetor  $\mathbf{m}$ , obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \text{sen } \theta \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 + (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \text{sen } \theta \cdot \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{r}_0 + (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{r}_0 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{r}_n = (\mathbf{I} + \text{sen } \theta \cdot \mathbf{S}_e + (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{S}_e^2) \cdot \mathbf{r}_0 \quad (4.11)$$

que ao ser comparada com a Equação (4.1), fornece a seguinte equação para definir a matriz de rotação no espaço, conhecida na literatura como *fórmula de Rodrigues*:

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} + \text{sen } \theta \cdot \mathbf{S}_e + (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{S}_e^2 \quad (4.12)$$

Conforme comentado anteriormente, ao contrário do caso plano, as rotações no espaço não podem ser tratadas vetorialmente. De modo a mostrar o caráter não vetorial das rotações, será aplicada uma seqüência de três rotações finitas sucessivas de  $90^\circ$  ao corpo rígido representado pelo retângulo  $A_0$  contido inicialmente no plano  $xy$  da Figura 4.2. Na figura do lado esquerdo é aplicada inicialmente uma rotação em torno do eixo  $x$ , levando o corpo da posição  $A_0$  para a posição  $A_1$ . Em seguida, aplica-se uma rotação em torno do eixo  $y$ , levando o corpo da posição  $A_1$  para  $A_2$  e por último, aplica-se uma rotação em torno do eixo  $z$  que leva o corpo da posição  $A_2$  para a posição final  $A_3$ .

Já na figura apresentada do lado direito, são também aplicadas três rotações sucessivas de  $90^\circ$  ao corpo rígido representado pelo retângulo  $A_0$  contido, inicialmente, no plano  $xy$ , porém as rotações foram aplicadas em ordem inversa, ou seja, inicialmente aplica-se uma rotação em torno do eixo  $z$ , em seguida em torno do eixo  $y$  e por último uma rotação em torno do eixo  $x$ . Pode-se ver claramente através da Figura 4.2 que a alteração da ordem na qual foram aplicadas as rotações levou a resultados completamente diferentes, elucidando o caráter não vetorial das rotações finitas no espaço. No entanto, vale lembrar que quando efetuadas em torno de um único eixo, as rotações podem ser tratadas vetorialmente como ocorre nos casos bidimensionais.

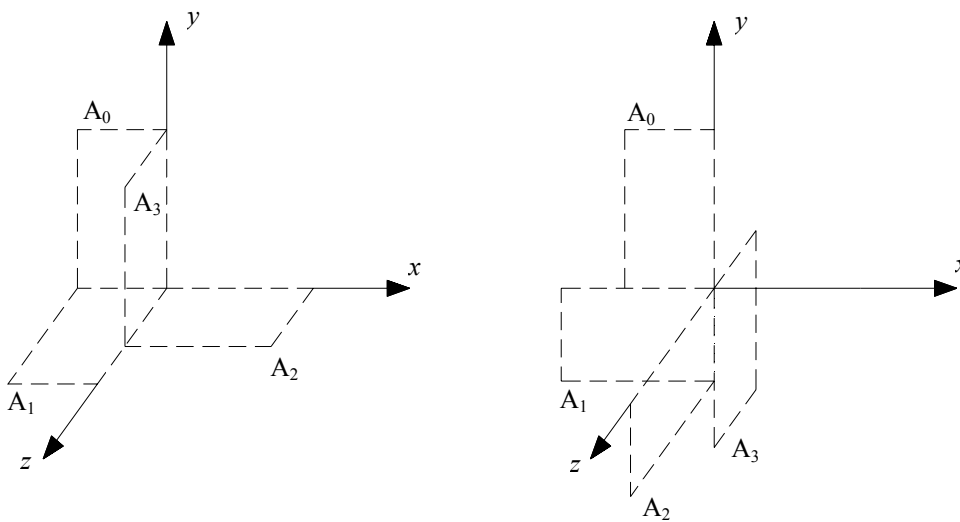


Figura 4.2 – Caráter não vetorial das rotações no espaço.

Vale ressaltar que, por definição, o vetor  $r_0$  não sofre alterações no seu comprimento com uma rotação de corpo rígido e, portanto, pode-se dizer que:

$$r_0^T \cdot r_0 = r_n^T \cdot r_n$$

$$r_0^T \cdot r_0 = (R_\theta r_0)^T (R_\theta r_0)$$

$$r_0^T \cdot r_0 = r_0^T \cdot R_\theta^T \cdot R_\theta r_0$$

$$r_0^T \cdot (I - R_\theta^T \cdot R_\theta) \cdot r_0 = 0 \quad (4.13)$$

cuja validade para um vetor  $\mathbf{r}_\theta$  qualquer implica em:

$$\mathbf{R}_\theta^T \cdot \mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} \quad (4.14)$$

Conseqüentemente, pode-se afirmar que a matriz de rotação é ortogonal e, portanto, segundo Cole (1990),  $\mathbf{R}_\theta$  em um ponto pode ser caracterizada por apenas três componentes ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ ) em vez de nove. Esta representação da matriz de rotação na forma de um vetor  $\boldsymbol{\theta}$ , geralmente conhecido na literatura por “*pseudovetor de rotação*” (Argyris, 1982), conforme apresentada abaixo:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \theta \cdot \mathbf{e} \quad \theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad (4.15)$$

permite reescrever a Equação (4.12) em função das componentes de rotação:

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} + \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \mathbf{S}_\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2} \mathbf{S}_\theta^2 \quad (4.16)$$

O problema inverso, ou seja, a obtenção das componentes de rotação  $\boldsymbol{\theta}$  a partir de  $\mathbf{R}_\theta$ , simbolizado pela seguinte operação:  $\boldsymbol{\theta} = \text{rot}(\mathbf{R}_\theta)$ , pode ser obtido, facilmente, em função da parte anti-simétrica de  $\mathbf{R}_\theta$  expressa por:

$$\frac{\mathbf{R}_\theta - \mathbf{R}_\theta^T}{2} = \text{sen } \theta \cdot \mathbf{S}_e \quad (4.17)$$

que pode ser reescrita expandindo-se as matrizes de rotação e anti-simétrica como:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & R_{12} - R_{21} & R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} & 0 & R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} & R_{32} - R_{23} & 0 \end{bmatrix} = \text{sen } \theta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

sendo  $R_{ij}$  os componentes de  $\mathbf{R}_\theta$ .



Em função da Equação (4.18) pode-se dizer que:

$$\text{sen } \theta \cdot \mathbf{e} = \text{sen } \theta \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{r} \quad (4.19)$$

portanto, lembrando que  $\boldsymbol{\theta} = \theta \cdot \mathbf{e}$ , sendo  $\mathbf{e}$  um vetor unitário e  $\theta \geq 0$ , tem-se que:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \text{se } \|\mathbf{r}\| = 0 \quad (4.20a)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \text{sen}^{-1}(\|\mathbf{r}\|) \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad \text{se } \|\mathbf{r}\| \neq 0 \quad (4.20b)$$

Observa-se que os valores de  $\theta$  estão restritos ao intervalo  $(0, \pi/2)$ . Entretanto, pode-se facilmente ampliar o intervalo de amplitudes para  $(0, \pi)$  empregando-se um algoritmo muito conhecido atribuído a Spurrier (1978), sendo apresentado a seguir:

$$\text{tr}(\mathbf{R}_\theta) = R_{11} + R_{22} + R_{33} \quad (4.21)$$

$$m = \max[\text{tr}(\mathbf{R}_\theta), R_{11}, R_{22}, R_{33}] \quad (4.22)$$

$$n = \sqrt{1 + 2m - \text{tr}(\mathbf{R}_\theta)} \quad (4.23)$$

se  $m = \text{tr}(\mathbf{R}_\theta)$

$$\mathbf{q} = \frac{n}{2} \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{32} - R_{23} \quad R_{13} - R_{31} \quad R_{21} - R_{12}]^T \quad (4.24a)$$

se  $m = R_{11}$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2n} (R_{32} - R_{23}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [n^2 \quad R_{21} + R_{12} \quad R_{31} + R_{13}]^T \quad (4.24b)$$

se  $m = R_{22}$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2n} (R_{13} - R_{31}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{12} + R_{21} \quad n^2 \quad R_{32} + R_{23}]^T \quad (4.24c)$$

se  $m = R_{33}$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2n} (R_{21} - R_{12}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{13} + R_{31} \quad R_{23} + R_{32} \quad n^2]^T \quad (4.24d)$$

Do algoritmo assim descrito se obtém, a partir da matriz de rotação, o escalar  $q$  e o vetor  $\mathbf{q}$  empregados no cálculo do vetor  $\mathbf{w}$ , descrito por Crisfield (1997) como

$$\mathbf{w} = 2 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{e} = \frac{2\mathbf{q}}{q} \quad (4.25)$$

que define o pseudovetor de rotação através das seguintes expressões:

$$\theta = 0 \quad \text{se } \|\mathbf{w}\| = 0 \quad (4.26a)$$

$$\theta = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{\|\mathbf{w}\|}{2}\right) \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \quad \text{se } \|\mathbf{w}\| \neq 0 \quad (4.26b)$$

Vale ressaltar que, as quantidades  $q$  e  $\mathbf{q}$  são as principais componentes da *álgebra dos quatérnios*, comumente utilizada no estudo de rotações finitas no espaço por um grande número de pesquisadores, com o intuito de reduzir o esforço computacional.

## 4.2 – MATRIZ DE ROTAÇÃO PARA PEQUENAS ROTAÇÕES

Admitindo-se que o corpo rígido apresentado na Figura 4.1 gire de um pequeno ângulo  $\Delta\theta$  em torno do eixo de rotação, tem-se que o comprimento do arco descrito pela trajetória de  $Q$  entre as posições  $Q'$  e  $Q''$ , pode ser definido, de maneira aproximada, pela corda que une os pontos  $Q'$  e  $Q''$ , representada pelo vetor  $\mathbf{d}_{rot}$ :

$$R \cdot \Delta\theta \cong \|\mathbf{d}_{rot}\| \quad (4.27)$$

ao passo que o deslocamento  $\mathbf{d}_{rot}$  pode ser considerado perpendicular ao plano formado pelo eixo de rotação e pelo vetor  $\mathbf{r}_0$ :

$$\mathbf{d}_{rot} = \|\mathbf{d}_{rot}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0\|} = \frac{\|\mathbf{d}_{rot}\|}{R} \mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 \quad (4.28)$$

Substituindo-se a Equação (4.27) em (4.28), obtém-se:

$$\mathbf{d}_{rot} = \Delta\theta \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 = \Delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0 \quad (4.29)$$

A equação acima pode então ser substituída na Equação (4.3) para se obter a matriz de rotação no caso de pequenas rotações:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{r}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}}) \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{r}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \quad (4.30)$$

que é a linearização da *fórmula de Rodrigues*. Em decorrência da linearização, pequenas rotações podem ser tratadas vetorialmente. Se o corpo sofre uma rotação  $\Delta\boldsymbol{\theta}_1$ , seguida de uma rotação  $\Delta\boldsymbol{\theta}_2$ , tem-se:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_2} \cdot \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_1} \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_{12}} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (4.31)$$

sendo a matriz de rotação resultante

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_{12}} &= (\mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_2}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_1}) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_1} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_2} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_2} \cdot \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_1} \\ &\cong \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_1} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde a parcela  $\mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_2} \cdot \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_1}$  pode ser desprezada por se tratar de um infinitésimo de ordem superior. Nessas condições,  $\mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_{12}} = \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}_{21}}$  e, portanto,  $\Delta\boldsymbol{\theta}_1 + \Delta\boldsymbol{\theta}_2 = \Delta\boldsymbol{\theta}_2 + \Delta\boldsymbol{\theta}_1$ , sendo válida a propriedade comutativa, assim como para o caso de rotações no plano (2D).

## 5 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE PÓRTICOS ESPACIAIS

### 5.1 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

Uma vez conhecida a matriz de rotação que descreve o movimento de um corpo rígido no espaço, no presente capítulo será descrita uma formulação co-rotacional de pórticos espaciais, capaz de permitir que formulações lineares de elementos finitos possam ser utilizadas em análises não-lineares envolvendo rotações finitas. Este procedimento está baseado na chamada formulação *EICR (Element Independent Co-Rotational Formulation)*, desenvolvida por Nour-Omid & Rankin (1991), na qual os movimentos de corpo rígido (translações e rotações) são separados da parcela deformacional do movimento total. Esta separação é possível graças à utilização de um sistema local de eixos fixo ao elemento, de modo que o movimento do elemento em relação a este sistema local de eixos descreva unicamente a deformação do mesmo.

A energia de deformação do elemento depende somente deste movimento em relação ao sistema local, sendo independente da parcela associada ao movimento de corpo rígido. Esta separação de movimentos é obtida através da utilização dos chamados operadores de projeção ou projetores, que podem ser usados como pré e pós-processadores nas rotinas computacionais, de modo que não sejam necessárias modificações internas em rotinas lineares de elementos finitos já existentes, conferindo assim o grande poder e a facilidade de implementação da referida formulação.

O movimento de um elemento genérico de pórtico espacial (*3D*), desde a sua configuração inicial  $C_0$  até a configuração atual  $C$ , é mostrado na Figura 5.1, sendo utilizados três sistemas distintos de eixos cartesianos ortogonais da mesma forma que a empregada por Rankin & Brogan (1986):

- *Sistema global - xyz* utilizado para definir a conectividade entre os elementos.
- *Sistema local  $T$*  que sofre translações e giros ao acompanhar o elemento, sendo, em geral, conhecido na literatura como sistema co-rotacional.
- *Sistemas nodais  $A$  e  $B$*  que estão atrelados, respectivamente, aos nós inicial ( $1$ ) e final ( $2$ ) de cada elemento.

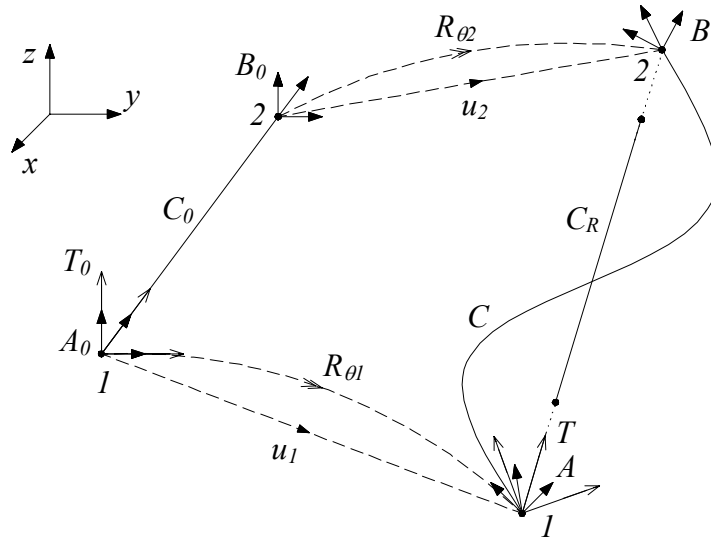


Figura 5.1 – Configurações inicial, co-rotacionada e deformada do elemento de viga (3D).

O sistema local de eixos  $T$ , definido na configuração inicial  $C_0$  como  $T_0$ , pode ser expresso pela seguinte equação:

$$T_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1\_0}^T \\ \mathbf{i}_{2\_0}^T \\ \mathbf{i}_{3\_0}^T \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{i}_{1\_0} = \frac{\mathbf{X}_{2I}}{\|\mathbf{X}_{2I}\|} \quad \mathbf{i}_{3\_0} = \frac{\mathbf{i}_{1\_0} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{i}_{1\_0} \times \mathbf{v}\|} \quad \mathbf{i}_{2\_0} = \mathbf{i}_{3\_0} \times \mathbf{i}_{1\_0} \quad (5.2)$$

sendo  $\mathbf{X}_{2I} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_I$ , tal que o vetor  $\mathbf{X}_i$  representa a posição inicial do nó  $i$  na configuração  $C_0$  e  $\mathbf{v}$  é um vetor contido no plano local  $x_0y_0$  do elemento. No presente trabalho, a origem do sistema local está localizada no nó  $I$  e o posicionamento de seus eixos locais coincide com as direções principais de inércia do elemento.

As orientações iniciais dos sistemas nodais  $A$  e  $B$  na configuração inicial  $C_0$ , denominadas  $A_0$  e  $B_0$ , respectivamente, são escolhidas iguais à do sistema de eixos locais:

$$A_0 = B_0 = T_0^T \quad (5.3)$$

O movimento do elemento de pórtico entre as configurações inicial e atual pode ser subdividido em duas etapas. Observando-se a Figura 5.1 novamente, inicialmente os nós 1 e 2 sofrem translações representadas por  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ ; sendo  $\mathbf{u}_i$  composto de uma parcela de corpo rígido  $\mathbf{u}_i^r$  e uma parcela deformacional  $\mathbf{u}_i^d$ , resultando em deformações axiais do elemento e em seguida, os sistemas nodais  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sofrem rotações de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  com relação a referência inicial  $\mathbf{T}_0$ , gerando curvaturas no elemento. A posição final dos nós em  $C$  pode então ser expressa por:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^r + \mathbf{u}_i^d \quad (5.4)$$

ao passo que a orientação dos eixos nodais pode ser obtida por:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \mathbf{R}_{\theta_1} \cdot \mathbf{A}_0 \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] = \mathbf{R}_{\theta_2} \cdot \mathbf{B}_0 \quad (5.5)$$

O sistema co-rotacional  $\mathbf{T}$  na configuração atual  $C$ , por sua vez, pode ser definido da seguinte forma, segundo Rankin & Nour-Omid (1988):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^T \\ \mathbf{i}_2^T \\ \mathbf{i}_3^T \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\theta}^T \quad (5.6)$$

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{x}_{21}}{\|\mathbf{x}_{21}\|} \quad \mathbf{i}_3 = \frac{\mathbf{i}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{i}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 \quad (5.7)$$

observando-se que o eixo  $\mathbf{i}_1$  aponta no sentido da corda que une os nós 1 e 2 e os demais eixos são definidos de tal forma que seja garantido que as rotações em torno do eixo da viga permaneçam da mesma ordem de grandeza das rotações que produzem torção.

Uma vez definido o sistema de eixos co-rotacionais, estabelece-se a mudança de coordenadas entre o sistema global  $xyz$  e o local  $x^e y^e z^e$  através das seguintes operações, sendo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{X}$  quantidades tensoriais de primeira e segunda ordem, respectivamente:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{X}^e = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{T}^T \quad (5.8)$$

O próximo passo é a determinação dos deslocamentos e rotações deformacionais medidos no sistema local, também denominados co-rotacionais, obtidos a partir dos deslocamentos generalizados globais do elemento. Inicialmente, será calculada a posição do  $i$ -ésimo nó do elemento genérico apresentado na Figura 5.2 em sua configuração atual  $C$ , designada pelo vetor  $x_i^c$ .

$$x_i^c = T \cdot (x_i - x_I) = T \cdot x_{iI} \quad (5.9)$$

O deslocamento co-rotacional  $u_i^c$  pode então ser obtido, escrevendo-se localmente a relação definida na Equação (5.4) e substituindo-se o valor de  $x_i^c$  definido acima:

$$u_i^c = x_i^c - X_i^c$$

$$u_i^c = T \cdot x_{iI} - X_i^c$$

$$u_i^c = T \cdot (X_{iI} + u_{iI}) - X_i^c \quad (5.10)$$

sendo a posição inicial local do nó  $i$  em  $C_0$  definida através da seguinte equação:

$$X_i^c = T_0 \cdot (X_i - X_I) = T_0 \cdot X_{iI} \quad (5.11)$$

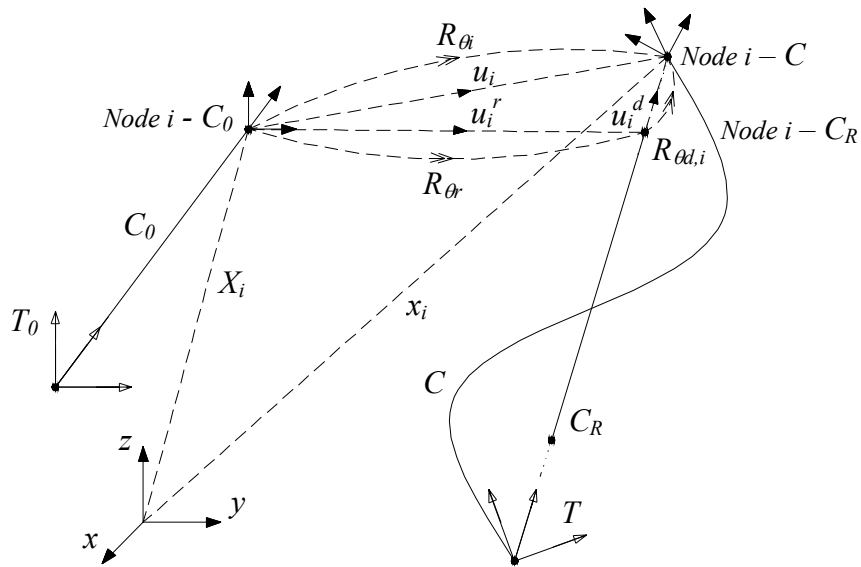


Figura 5.2 – Translações e rotações de um elemento genérico de viga (3D).

Lembrando que o deslocamento corrente de rotação  $\theta_i$  compõe-se de uma parcela rígida  $\theta_r$  seguida de uma parcela deformacional  $\theta_{d,i}$  e que a rotação de corpo rígido do elemento é por definição a rotação entre os eixos  $T_0$  e  $T$ , então:

$$\mathbf{R}_{\theta_i} = \mathbf{R}_{\theta_{d,i}} \cdot \mathbf{R}_{\theta_r} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{R}_{\theta_r} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}_0 \quad (5.13)$$

Substituindo-se a Equação (5.13) em (5.12), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\theta_{d,i}} &= \mathbf{R}_{\theta_i} \cdot \mathbf{R}_{\theta_r}^T = \mathbf{R}_{\theta_i} \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}_0)^T \\ \mathbf{R}_{\theta_{d,i}} &= \mathbf{R}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_0^T \cdot \mathbf{T} \end{aligned} \quad (5.14)$$

A rotação co-rotacional  $\theta_i^c$  pode então ser obtida efetuando-se a mudança de coordenadas proposta na Equação (5.8):

$$\mathbf{R}_{\theta_i^c} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_0^T \quad \theta_i^c = \text{rot}(\mathbf{R}_{\theta_i^c}) \quad (5.15)$$

A mudança de variáveis, inerente à formulação co-rotacional fica, portanto, definida pelas Equações (5.10) e (5.15). Os deslocamentos co-rotacionais nodais  $d_1^c$  e  $d_2^c$  do elemento de pórtico podem então ser definidos através das seguintes expressões:

$$d_1^c = \begin{Bmatrix} u_1^c \\ \theta_1^c \end{Bmatrix} \quad u_1^c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \theta_1^c = \text{rot}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\theta_1} \cdot \mathbf{T}_0^T) = \text{rot}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}) \quad (5.16)$$

$$d_2^c = \begin{Bmatrix} u_2^c \\ \theta_2^c \end{Bmatrix} \quad u_2^c = \begin{Bmatrix} L - L_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \theta_2^c = \text{rot}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\theta_2} \cdot \mathbf{T}_0^T) = \text{rot}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{B}) \quad (5.17)$$

sendo os comprimentos inicial e final do elemento definidos, respectivamente, por:

$$L_0 = \|\mathbf{X}_{21}\| \quad L = \|\mathbf{x}_{21}\| \quad (5.18)$$



## 5.2 – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Uma vez atingida uma configuração de equilíbrio, o trabalho virtual externo ( $\delta W_e$ ), realizado pelas forças nodais generalizadas externas  $\mathbf{F}_{ext}$  sobre os deslocamentos virtuais nodais generalizados de toda a estrutura  $\delta \mathbf{D}$ , será igual ao trabalho virtual interno ( $\delta W_i$ ), proveniente do somatório do trabalho virtual realizado pela distribuição de tensão que atua em cada um dos elementos, de modo que a variação da energia total do sistema será nula:

$$\delta W_e + \delta W_i = 0 \quad (5.19)$$

$$\delta W_e = \delta \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{F}_{ext} \quad (5.20)$$

$$\delta W_i = - \sum_{V_0} \int (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) dV_0 \quad (5.21)$$

Em virtude do princípio da invariância da energia interna para o caso de movimentos de corpo rígido, o trabalho realizado pelas forças internas durante deslocamentos virtuais rígidos será nulo e conseqüentemente, este trabalho é proveniente somente de  $\delta \mathbf{d}_d$  que representa a parcela deformacional de  $\delta \mathbf{d}$ . Além disso, por se tratar de uma quantidade escalar, o trabalho virtual interno proveniente dos deslocamentos deformacionais medidos nos sistemas global e local devem ser iguais e portanto:

$$\delta W_i(\delta \mathbf{d}) = \delta W_i(\delta \mathbf{d}_d) = \delta W_i(\delta \mathbf{d}^e) \quad (5.22)$$

sendo  $\delta \mathbf{d}^e$  os deslocamentos co-rotacionais generalizados do elemento, representando a parcela de deslocamentos deformacionais  $\delta \mathbf{d}_d$ , escrita no sistema local. Vale ressaltar que é muito mais vantajoso definir o par de tensões e deformações conjugadas no sistema local, uma vez que devido ao fato do campo de deslocamentos co-rotacionais ser exclusivamente deformacional, pode-se linearizar a relação deslocamento-deformação desde que localmente as deformações sejam pequenas. Esta hipótese torna-se mais realista à medida que a malha é refinada.

Supondo uma relação deformação-deslocamento local linear, é possível escrever a seguinte expressão para o campo de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  em função dos deslocamentos co-rotacionais  $\boldsymbol{d}^c$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_d^c \cdot \boldsymbol{d}^c \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x^e, y^e, z^e) \quad (5.23)$$

lembrando que neste caso  $\mathbf{B}_d^c$  independe de  $\boldsymbol{d}^c$ . Substituindo-se:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{d}^c} \right] \cdot \delta\boldsymbol{d}^c = \mathbf{B}_d^c \cdot \delta\boldsymbol{d}^c \quad (5.24)$$

na Equação (5.21) obtém-se a seguinte expressão para o trabalho virtual interno:

$$\delta W_i = - \sum_{V_0} \int (\delta\boldsymbol{d}^c)^T \cdot (\mathbf{B}_d^c)^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV_0 = - \sum (\delta\boldsymbol{d}^c)^T \cdot \boldsymbol{f}^c \quad (5.25)$$

sendo  $\boldsymbol{f}^c$  o vetor de forças co-rotacionais generalizadas do elemento que realiza trabalho com os deslocamentos virtuais  $\delta\boldsymbol{d}^c$ , tal que:

$$\boldsymbol{f}^c = \int_{V_0} (\mathbf{B}_d^c)^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV_0 \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x^e, y^e, z^e) \quad (5.26)$$

Admitindo-se as seguintes expressões que relacionam os deslocamentos virtuais ( $\delta\boldsymbol{d}^c$ ), ( $\delta\boldsymbol{d}^e$ ) e ( $\delta\boldsymbol{d}$ ), definidas por Nour-Omid & Rankin (1991):

$$\delta\boldsymbol{d}^c = \mathbf{P} \cdot \delta\boldsymbol{d}^e \quad \delta\boldsymbol{d}^e = \mathbf{G} \cdot \delta\boldsymbol{d} \quad (5.27)$$

então:

$$\delta\boldsymbol{d}^c = \mathbf{P} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta\boldsymbol{d} \quad (5.28)$$

e substituindo-se a equação acima na Equação (5.25), obtém-se:

$$\delta W_i = - \sum \delta\boldsymbol{d}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{f}^c = - \delta\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{F} \quad (5.29)$$

sendo  $F$  o vetor de forças nodais generalizadas de toda a estrutura, obtido a partir da contribuição  $f$  de cada elemento:

$$F = \sum G^T . P^T . f^e = \sum G^T . f^e = \sum f \quad (5.30)$$

É importante ressaltar que a transformação  $P$  que aparece na Equação (5.27) atua como um filtro para os deslocamentos deformacionais, uma vez que ao ser aplicada sobre o vetor de deslocamentos virtuais nodais  $\delta d^e$  extrai-lhe apenas a sua parcela deformacional  $\delta d^c$ . Portanto, se  $P$  elimina a parcela de deslocamento rígido de  $\delta d^e$ , então ao ser aplicada sobre a sua parcela deformacional, resulta nela mesma:

$$\delta d^c = P . \delta d^e \quad (5.31)$$

$$\delta d^e = P . P . \delta d^e = P^2 . \delta d^e \quad (5.32)$$

e conseqüentemente:

$$P = P^2 \quad (5.33)$$

caracterizando-o como um operador de projeção segundo Rankin & Nour-Omid (1988) e Rao & Mitra (1971). Vale a pena ressaltar que o projetor tem algumas propriedades bem interessantes. Primeiro, este operador é capaz de converter um vetor de forças internas desequilibrado em um vetor de forças auto-equilibrado ao se multiplicar o vetor de forças pela transposta da matriz de projeção. Segundo, a parcela de corpo rígido de um vetor de deslocamentos incrementais pode ser totalmente eliminada ao se multiplicar pelo projetor. Terceiro, o projetor é capaz de transformar uma matriz de rigidez do elemento em uma matriz de rigidez sem modos espúrios de corpo rígido e caso a matriz de rigidez já possua os seus modos de energia nulos, a aplicação do projetor sobre a matriz de rigidez não produzirá nenhum efeito. Em outras palavras, o elemento é forçado a apresentar as propriedades corretas e desejáveis quando submetido a movimentos de corpo rígido. São justamente estas propriedades que garantem ao projetor a capacidade de estender o alcance de aplicação de muitos elementos finitos lineares de vigas, placas e cascas de modo a permitir a consideração de grandes deslocamentos e rotações muito comuns em problemas de instabilidade estrutural (Rankin & Nour-Omid, 1988).

Substituindo-se as Equações (5.29) e (5.20) em (5.19) e considerando a arbitrariedade de  $\delta\mathbf{D}$ , resulta no seguinte sistema não linear, cuja solução pode ser obtida pelo processo incremental-iterativo de Newton-Raphson:

$$\{\Psi\} = F_{ext} - F = 0 \quad (5.34)$$

Vale enfatizar o fato de que no método de Newton-Raphson, os deslocamentos nodais generalizados são atualizados da seguinte forma:

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_k + \delta\mathbf{D}_k \quad (5.35)$$

sendo, invariavelmente, inconsistente para os deslocamentos de rotação, representando apenas uma estimativa arbitrária para a posição de equilíbrio e, portanto, desprovida de sentido físico. Uma nova estimativa para o deslocamento translacional  $\mathbf{u}_i$  é obtida a partir de seu valor corrente adicionando-lhe o deslocamento iterativo  $\delta\mathbf{u}_i$ :

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{u}_i^k + \delta\mathbf{u}_i^k \quad (5.36a)$$

ao passo que a atualização para a rotação nodal, não podendo ser feita da mesma maneira, é obtida atualizando-se a matriz de rotação associada. Dada a estimativa inconsistente natural do método de Newton-Raphson:

$$\boldsymbol{\theta}_i^{k+1} = \boldsymbol{\theta}_i^k + \delta\boldsymbol{\theta}_i^k \quad (5.36b)$$

a matriz de rotação associada ao deslocamento  $\boldsymbol{\theta}_i$  é atualizada consistentemente na forma:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^k + \delta\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^k + \dots \quad (5.37)$$

sendo a variação  $\delta\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}}$  calculada diferenciando a matriz de rotação definida pela *fórmula de Rodrigues* na Equação (4.12) e considerando a identidade definida na Equação (5.38), que pode ser facilmente obtida após manipulação algébrica:

$$\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{S}_e = \cos\theta \cdot \mathbf{S}_e + \sin\theta \cdot \mathbf{S}_e^2 \quad (5.38)$$

$$\delta\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \delta\theta + \sin\theta \cdot \delta\mathbf{S}_e + (1 - \cos\theta) \cdot (\delta\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_e \cdot \delta\mathbf{S}_e) \quad (5.39)$$

### 5.3 – MUDANÇA DA VARIÁVEL ITERATIVA DE ROTAÇÃO

Nesta seção, será efetuada uma mudança na variável iterativa de rotação, de acordo com a formulação co-rotacional *EICR* apresentada por Nour-Omid & Rankin (1991), segundo a qual é importante diferenciar o deslocamento virtual de rotação  $\delta\theta_i$  da rotação do sistema nodal  $\delta\bar{\theta}_i$ , uma vez que esta última rotação virtual não está relacionada com a variação do campo de deslocamento de rotação do elemento e sim com o giro instantâneo da tríade nodal. Portanto, será empregada a rotação do eixo nodal  $\delta\bar{\theta}_i$  como variável iterativa de rotação no lugar do deslocamento virtual  $\delta\theta_i$ . Com esta modificação, a variável de rotação passa a ser  $\bar{\theta}$ , estando associada ao mesmo estado de rotação de  $\theta$ .

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}} = \mathbf{R}_{\theta} \quad (5.40)$$

cuja matriz de rotação pode ser atualizada na forma:

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\delta\bar{\theta}_i}^k \cdot \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k \quad (5.41)$$

porém, é importante salientar que  $\delta\bar{\theta} \neq \delta\theta$ , conforme será mostrado posteriormente. O sistema não linear definido na Equação (5.34) pode então ser re-escrito através da seguinte equação, onde a barra sobre as quantidades indica dependência da variável  $\bar{\theta}$ :

$$\{\bar{\psi}\} = \mathbf{F}_{ext} - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (5.42)$$

Conforme comentado por Nour-Omid & Rankin (1991), é importante mencionar que no sistema local a matriz de rigidez constitutiva  $\bar{\mathbf{k}}^c$  é não simétrica, uma vez que a energia potencial do elemento é definida em função dos deslocamentos co-rotacionais  $\mathbf{d}^c$ , ou seja, dos graus de liberdade do elemento na formulação elástico-linear, e não em termos dos deslocamentos  $\bar{\mathbf{d}}^c$  que dependem das variáveis associadas à rotação da tríade nodal.

Considerando a Equação (5.40) e substituindo a matriz de rotação linearizada definida na Equação (4.30) em (5.41) obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\delta\bar{\theta}_i}^k \cdot \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k = \left( \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_i}^k \right) \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k = \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k + \mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_i}^k \cdot \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k \quad (5.43)$$

que, ao ser comparada com a Equação (5.37), fornece:

$$\mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}} = \delta\mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{R}_\theta^T \quad (5.44)$$

A expressão definida na equação acima estabelece a relação existente entre a rotação  $\delta\bar{\theta}$  dos eixos cartesianos associados à matriz  $\mathbf{R}_\theta$  com a variação consistente  $\delta\mathbf{R}_\theta$  no sistema global de coordenadas. O próximo passo é a determinação da relação entre as rotações  $\delta\theta$  e  $\delta\bar{\theta}$  obtida aplicando-se as Equações (5.39) e (4.12) em (5.44), que após algebrismos que foram apresentados de forma bem detalhada por Monteiro (2004) resulta na seguinte expressão:

$$\mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}} = \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta}^T \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{S}_\theta + \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \delta\mathbf{S}_\theta + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} (\mathbf{S}_\theta \cdot \delta\mathbf{S}_\theta - \delta\mathbf{S}_\theta \cdot \mathbf{S}_\theta) \quad (5.45)$$

a partir da qual, pode-se obter:

$$\delta\bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}_\theta^{-1} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \quad (5.46)$$

sendo:

$$\mathbf{A}_\theta^{-1} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{S}_\theta + \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T \quad (5.47)$$

A relação inversa pode então ser expressa por:

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}_\theta \cdot \delta\bar{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.48)$$

onde:

$$\mathbf{A}_\theta = \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta + \xi \cdot \mathbf{S}_\theta^2 \quad (5.49)$$

$$\xi = \frac{2 \text{sen } \theta - \theta(1 + \cos \theta)}{2\theta^2 \text{sen } \theta} \quad (5.50)$$

Uma vez feita a atualização dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}_i$  através da Equação (5.36) e da matriz de rotação através da Equação (5.41), podem-se obter os deslocamentos co-rotacionais do elemento utilizando-se as expressões (5.10) e (5.15). Conhecido o vetor de deslocamentos co-rotacionais  $\mathbf{d}^c$  e a matriz de rigidez constitutiva clássica do elemento  $\mathbf{k}^c$ , o vetor de forças co-rotacionais  $\mathbf{f}^c$  pode ser calculado na forma:

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{k}^c \cdot \mathbf{d}^c \quad \mathbf{f}^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^c \\ \mathbf{f}_2^c \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}_i^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_i^c \\ \mathbf{m}_i^c \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

Porém, como foi feita uma mudança da variável de rotação, torna-se necessário determinar as quantidades  $\bar{\mathbf{f}}^c$  e  $\bar{\mathbf{k}}^c$  do elemento, sendo as forças  $\bar{\mathbf{f}}^c$  obtidas diretamente a partir de  $\mathbf{f}^c$  aplicando-se a regra da cadeia sobre a energia potencial do elemento  $\phi$ :

$$\bar{\mathbf{f}}^c = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right\}^T = \left[ \frac{\partial \mathbf{d}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right]^T \cdot \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{d}^c} \right\}^T = [\mathbf{H}^c]^T \cdot \mathbf{f}^c \quad (5.52)$$

sendo  $\mathbf{H}^c$  uma matriz quadrada  $12 \times 12$  definida por:

$$\mathbf{H}^c = \left[ \frac{\partial \mathbf{d}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^c & \mathbf{H}_{12}^c \\ \mathbf{H}_{21}^c & \mathbf{H}_{22}^c \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

e  $\mathbf{H}_{ij}^c$  sub-matrizes quadradas  $6 \times 6$  que podem ser expressas por:

$$\mathbf{H}_{ij}^c = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \cdot \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_{ij} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^c}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_i^c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \delta_{ij} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\theta_i^c} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o *delta de Kronecker* e  $\mathbf{0}$  são matrizes quadradas  $3 \times 3$  nulas. Já a matriz de rigidez  $\bar{\mathbf{k}}^c$  do elemento pode ser obtida da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{k}}^c = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left[ (\mathbf{H}^c)^T \cdot \mathbf{f}^c \right] \quad (5.55)$$

$$\bar{\mathbf{k}}^c = (\mathbf{H}^c)^T \left[ \frac{\partial \mathbf{f}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left[ (\mathbf{H}^c)^T \cdot \mathbf{f}^c \right] = \bar{\mathbf{k}}_1^c + \bar{\mathbf{k}}_2^c \quad (5.56)$$

As parcelas simétrica  $\bar{\mathbf{k}}_1^c$  e não simétrica  $\bar{\mathbf{k}}_2^c$  da matriz de rigidez podem ser expressas por:

$$\bar{\mathbf{k}}_1^c = (\mathbf{H}^c)^T \left[ \frac{\partial \mathbf{f}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = (\mathbf{H}^c)^T \cdot \mathbf{k}^c \cdot \mathbf{H}^c \quad (5.57)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_2^c = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left( (\mathbf{H}^c)^T \cdot \mathbf{f}^c \right) \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left\{ \begin{matrix} (\mathbf{H}_{11}^c)^T \cdot \mathbf{f}_1^c \\ (\mathbf{H}_{22}^c)^T \cdot \mathbf{f}_2^c \end{matrix} \right\} \cdot \mathbf{H}^c = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_1^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_1^c})^T \cdot \mathbf{m}_1^c \right) \\ \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_2^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_2^c})^T \cdot \mathbf{m}_2^c \right) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}^c \quad (5.58)$$

lembrando que o vetor  $\mathbf{f}^c$  entra na derivada da equação acima como uma constante, tem-se:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{n}_1^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_2^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = [\mathbf{0}]_{3 \times 12} \quad (5.59)$$

ao passo que as demais sub-matrizes podem ser representadas após algebrismos por:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_1^c})^T \cdot \mathbf{m}_1^c \right) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{\Omega}_1^c \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad \mathbf{\Omega}_1^c = \frac{\partial}{\partial \theta_1^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_1^c})^T \cdot \mathbf{m}_1^c \right) \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_2^c})^T \cdot \mathbf{m}_2^c \right) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{\Omega}_2^c] \quad \mathbf{\Omega}_2^c = \frac{\partial}{\partial \theta_2^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_2^c})^T \cdot \mathbf{m}_2^c \right) \quad (5.61)$$

sendo  $\mathbf{0}$  matrizes quadradas  $3 \times 3$  nulas, ao passo que as derivadas que aparecem nas Equações (5.60) e (5.61) podem ser expressas pela seguinte equação, conforme demonstrado em detalhes por Monteiro (2004) e Nour-Omid & Rankin (1991):



$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\mathbf{A}_\theta)^T \mathbf{m} \right) = -\frac{1}{2} \mathbf{S}_m + \xi \left( \theta^T \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{I} + \theta \cdot \mathbf{m}^T - 2 \cdot \mathbf{m} \theta^T \right) + \mu \cdot \mathbf{S}_\theta^2 \cdot \mathbf{m} \theta^T \quad (5.62)$$

$$\mu = \frac{1}{\theta} \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\theta \cdot (\sin \theta + \theta) - 8 \sin^2(\theta/2)}{4\theta^2 \sin(\theta/2)} \quad (5.63)$$

Finalmente, substituindo as Equações (5.59), (5.60) e (5.61) em (5.58), obtém-se:

$$\bar{\mathbf{k}}_2^c = \mathbf{\Omega}^c \cdot \mathbf{H}^c \quad \mathbf{\Omega}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & \\ & \mathbf{\Omega}_1^c & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \mathbf{\Omega}_2^c \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (5.64)$$

cuja influência segundo Nour-Omid & Rankin (1991) é desprezível quando as rotações co-rotacionais são moderadas ou quando a malha é refinada, para as quais a matriz  $\bar{\mathbf{k}}^c$  do elemento é simétrica para efeito prático.

#### 5.4 – OPERADOR DE PROJEÇÃO

Nesta seção será apresentada a determinação do operador de projeção  $\bar{\mathbf{P}}$  do elemento, definido em função da mudança da variável iterativa de rotação proposta na seção anterior. Partindo da Equação (5.27), tem-se:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{11} & \bar{\mathbf{P}}_{12} \\ \bar{\mathbf{P}}_{21} & \bar{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad \bar{\mathbf{P}}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_i^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}_j^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \theta_j^e} \right] & \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \theta_j^e} \right] \\ \left[ \frac{\partial \theta_i^c}{\partial \theta_j^e} \right] & \left[ \frac{\partial \theta_i^c}{\partial \theta_j^e} \right] \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (5.65)$$

Inicialmente, será feita a determinação da variação do deslocamento co-rotacional  $\mathbf{u}_i^c$ , definido na Equação (5.10):

$$\delta \mathbf{u}_i^c = \delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u}_{i1} \quad (5.66)$$

Aplicando a propriedade estabelecida na Equação (5.44) à tríade local do elemento e efetuando a mudança do sistema de coordenadas proposto na Equação (5.8), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}_i^c &= -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u}_{i1} \\
&= -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u}_{i1} \\
&= -\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T^e} \cdot (\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_1^e) + (\delta \mathbf{u}_i^e - \delta \mathbf{u}_1^e)
\end{aligned} \tag{5.67}$$

lembrando que o nó inicial  $1$  foi definido como a origem do sistema local e admitindo-se que não existam modos espúrios de corpo rígido associados à translação da origem do sistema local, têm-se que a sua posição e seus deslocamentos locais são nulos e portanto:

$$\delta \mathbf{u}_i^c = -\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T^e} \cdot \mathbf{x}_i^c + \delta \mathbf{u}_i^e = \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \delta \bar{\theta}_T^e + \delta \mathbf{u}_i^e \tag{5.68}$$

Uma vez conhecida a variação do deslocamento co-rotacional segundo a equação acima, o próximo passo é a determinação da variação da matriz de rotação associada ao deslocamento co-rotacional  $\theta_i^c$ , definida pela Equação (5.15), de modo que:

$$\delta \mathbf{R}_{\theta_i^c} = (\delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i} + \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R}_{\theta_i}) \mathbf{T}_0^T \tag{5.69}$$

Procedendo de forma análoga ao caso do deslocamento co-rotacional e aplicando-se a propriedade (5.44) à tríade local do elemento e efetuando-se a mudança do sistema de coordenadas apresentado em (5.8), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{\theta_i^c} &= \left( -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i} \right) \mathbf{T}_0^T \\
&= \left( -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{T} \right) \mathbf{R}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_0^T \\
&= \left( -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i} \cdot \mathbf{T}^T \right) \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_0^T = \left( \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i^e - \delta \bar{\theta}_T^e} \right) \mathbf{R}_{\theta_i^c}
\end{aligned} \tag{5.70}$$

isolando-se o termo entre parênteses na equação acima:

$$\left( \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i^e - \delta \bar{\theta}_T^e} \right) = \delta \mathbf{R}_{\theta_i^c} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i^c}^T \tag{5.71}$$

que resulta, considerando a Equação (5.44), na seguinte expressão:

$$\delta\bar{\theta}_i^c = \delta\bar{\theta}_i^e - \delta\bar{\theta}_T^e \quad (5.72)$$

Em função das Equações (5.68) e (5.72) as derivadas dos deslocamentos co-rotacionais  $\mathbf{u}_i^c$  e  $\bar{\theta}_i^c$  com relação aos deslocamentos  $\mathbf{u}_i^e$  e  $\bar{\theta}_i^e$  podem ser definidas por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} &= \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_i^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} + \delta_{ij} \cdot \mathbf{I} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} &= \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_i^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_i^c}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} = \delta_{ij} \cdot \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix}$$

Substituindo-se as derivadas definidas na Equação (5.73) em (5.65), podem-se obter as seguintes expressões para a sub-matriz  $\bar{\mathbf{P}}_{ij}$  em forma expandida ou compacta:

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} & \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (5.74)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{I} - \Psi_i \Gamma_j^T \quad (5.75)$$

sendo:

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{x_i^c} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x_i^c} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \quad \Gamma_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{d}_j^e} \end{bmatrix}^T \quad (5.76)$$

Conseqüentemente, o operador de projeção do elemento pode então ser expresso por:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{12 \times 12} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_1^T & \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_2^T \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\Gamma}_1^T & \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\Gamma}_2^T \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (5.77)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T \quad (5.78)$$

sendo:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \end{bmatrix}_{12 \times 3} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x_1^c} & \mathbf{I} & \mathbf{S}_{x_2^c} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \quad (5.79a)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \quad (5.79b)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{bmatrix}_{12 \times 3} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_1^e} \right] & \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_2^e} \right] \end{bmatrix}^T = \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right]^T \quad (5.80)$$

O próximo passo será a obtenção da matriz  $\boldsymbol{\Gamma}$  definida acima, que depende da geometria atual e da orientação dos eixos locais do elemento. Inicialmente, a propriedade (5.44) é aplicada sobre a tríade local do elemento  $\mathbf{T}$  e em seguida é efetuada a mudança de coordenadas apresentada na Equação (5.8), tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T} &= \delta \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T} \cdot \mathbf{T}^T &= \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T \\ \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e} &= \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{T}^T \end{aligned} \quad (5.81)$$

que ao ser expandida fornece no sistema local de coordenadas:

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e = \begin{Bmatrix} -\left(\mathbf{i}_2^e\right)^T \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3^e \\ -\left(\mathbf{i}_3^e\right)^T \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1^e \\ +\left(\mathbf{i}_2^e\right)^T \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[0 \ 1 \ 0] \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3^e \\ -[0 \ 0 \ 1] \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1^e \\ +[0 \ 1 \ 0] \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1^e \end{Bmatrix} \quad (5.82)$$

A seguir serão determinadas as variações  $\delta \mathbf{i}_1^e$  e  $\delta \mathbf{i}_3^e$  que aparecem na equação anterior. A primeira variação pode ser obtida a partir das Equações (5.7) e (5.18):

$$\delta \mathbf{i}_1 = \frac{1}{L} \delta \mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^2} \delta L \cdot \mathbf{x}_{21} = \frac{1}{L} (\mathbf{I} - \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1^T) \delta \mathbf{u}_{21} \quad (5.83)$$

que, localmente, pode se escrito por:

$$\delta \mathbf{i}_1^e = \frac{1}{L} (\mathbf{I} - \mathbf{i}_1^e \mathbf{i}_1^{eT}) \delta \mathbf{u}_{21}^e = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_{21}^e \quad (5.84)$$

A variação  $\delta \mathbf{i}_3^e$  pode também ser obtida a partir da Equação (5.7), no sistema local de coordenadas, da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{i}_3^e = \frac{1}{\|\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{a}_2^e\|} \cdot \delta (\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{a}_2^e) - \frac{1}{\|\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{a}_2^e\|} \cdot \delta (\|\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{a}_2^e\|) \mathbf{i}_3^e \quad (5.85)$$

Definindo o vetor  $\mathbf{a}_2^e$  como:

$$\mathbf{a}_2^e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (5.86)$$

e lembrando que, conforme a Equação (5.7), os vetores  $\mathbf{i}_3$  e  $\mathbf{a}_2$  são ortogonais, então:

$$q_3 = 0 \quad (5.87)$$

$$\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{a}_2^e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (5.88)$$

Portanto:

$$\delta \mathbf{i}_3^e = \frac{1}{q_2} \cdot (\delta \mathbf{i}_1^e \times \mathbf{a}_2^e + \mathbf{i}_1^e \times \delta \mathbf{a}_2^e) - \frac{\delta q_2}{q_2} \cdot \mathbf{i}_3^e \quad (5.89)$$

A partir das Equações (5.3) e (5.5) tem-se:

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{R}_{\theta_1} \cdot \mathbf{T}_0^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.90)$$

cuja variação, considerando-se a Equação (5.44), pode ser expressa por:

$$\delta \mathbf{a}_2 = \delta \mathbf{R}_{\theta_1} \cdot \mathbf{T}_0^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_1} \cdot \mathbf{R}_{\theta_1} \cdot \mathbf{T}_0^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_1} \cdot \mathbf{a}_2 \quad (5.91)$$

que escrita localmente fornece:

$$\delta \mathbf{a}_2^e = \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_1^e} \cdot \mathbf{a}_2^e = -\mathbf{S}_{\mathbf{a}_2^e} \cdot \delta \bar{\theta}_1^e \quad (5.92)$$

Definindo

$$\bar{\theta}_1^e = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (5.93)$$

e calculando  $\delta \mathbf{a}_2^e$  a partir da Equação (5.92) pode-se obter:

$$\delta q_2 = q_1 \cdot \delta \alpha_3 \quad (5.94)$$

Substituindo-se as Equações (5.84), (5.91) e (5.94) em (5.89) e definindo  $\eta = q_1/q_2$ , tem-se a seguinte expressão para a variação  $\delta \tilde{\mathbf{i}}_3^e$ :

$$\delta \tilde{\mathbf{i}}_3^e = \frac{1}{q_2} \left( -\mathbf{a}_2^e \times \delta \tilde{\mathbf{i}}_1^e + \mathbf{i}_1^e \times \delta \mathbf{a}_2^e \right) - \frac{q_1 \cdot \delta \alpha_3}{q_2} \mathbf{i}_3^e \quad (5.95)$$

$$\delta \mathbf{i}_3^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & -\eta & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1^e - \eta \cdot \delta \alpha_3 \cdot \mathbf{i}_3^e \quad (5.96)$$

Uma vez conhecidas as variações de  $\delta \mathbf{i}_1^e$  e  $\delta \mathbf{i}_3^e$  definidas pelas Equações (5.84) e (5.96), respectivamente, pode-se então calcular as componentes de  $\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e$  em (5.82):

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e = \begin{Bmatrix} \delta \bar{\theta}_{i1}^e \\ \delta \bar{\theta}_{i2}^e \\ \delta \bar{\theta}_{i3}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L} + \begin{bmatrix} 1 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1^e \quad (5.97)$$

Em função das Equações (5.80) e (5.97), finalmente obtém-se a matriz  $\boldsymbol{\Gamma}$  na forma:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right]^T = \frac{1}{L} \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & -\eta L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^T \quad (5.98)$$

que pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \boldsymbol{\Xi} \quad (5.99)$$

sendo

$$\mathbf{Y}_1 = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^T \quad (5.100)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^T \quad (5.101)$$

$$\boldsymbol{\Xi} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \eta L & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.102)$$

## 5.5 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS E MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

O vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente da estrutura após a mudança da variável iterativa de rotação podem ser expressos pelas seguintes equações:

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c = \sum \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^e = \sum \bar{\mathbf{f}} \quad (5.103)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_t = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \bar{\mathbf{D}}} \right] = \sum \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = \sum \bar{\mathbf{k}}_t \quad (5.104)$$

sendo o vetor de forças internas do elemento no sistema global e a matriz  $\mathbf{G}^T$  definidos por:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c; \quad \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & & & \\ & \mathbf{T}^T & & \\ & & \mathbf{T}^T & \\ & & & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}_{12 \times 12} = \text{diag}_4(\mathbf{T}^T) \quad (5.105)$$

ao passo que a matriz de rigidez tangente pode ser obtida pela variação do vetor de forças internas  $\bar{\mathbf{f}}$  do elemento, sendo composta por três parcelas:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{f}} &= \delta(\mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c) = \delta \bar{\mathbf{f}}_1 + \delta \bar{\mathbf{f}}_2 + \delta \bar{\mathbf{f}}_3 \\ \delta \bar{\mathbf{f}}_1 &= \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{f}}^c \\ \delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= \mathbf{G}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c \\ \delta \bar{\mathbf{f}}_3 &= \delta \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c \end{aligned} \quad (5.106)$$

Inicialmente, será calculada a variação das forças co-rotacionais  $\delta \bar{\mathbf{f}}^c$ , que em função das Equações (5.27) e (5.55), pode ser expressa por:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}^c = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \delta \bar{\mathbf{d}}^c = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \cdot \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right] \cdot \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (5.107a)$$

$$\delta \bar{\mathbf{f}}^c = \bar{\mathbf{k}}^c \cdot \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (5.107b)$$



Substituindo-se a equação anterior na primeira parcela da Equação (5.106):

$$\delta \bar{f}_1 = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot (\bar{\mathbf{k}}^c \cdot \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \bar{d}) = \bar{\mathbf{k}}_{r1} \cdot \delta \bar{d} \quad (5.108)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{r1} = \left[ \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \bar{d}} \right] = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{r1}^e \cdot \mathbf{G} \quad \bar{\mathbf{k}}_{r1}^e = \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}^c \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (5.109)$$

O próximo passo é a determinação da variação do operador de projeção  $\delta \bar{\mathbf{P}}$  que pode ser obtido calculando-se a variação do operador  $\bar{\mathbf{P}}$  definido na Equação (5.78) e lembrando que as componentes  $\mathbf{Y}_1$  e  $\mathbf{Y}_2$  definidas na Equação (5.99) são constantes, tal que:

$$\delta \bar{\mathbf{P}} = -\delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T - \boldsymbol{\Psi} \cdot \delta \boldsymbol{\Xi}^T \cdot \mathbf{Y}_2^T \quad (5.110)$$

Observando-se que as matrizes  $\boldsymbol{\Psi}$  e  $\boldsymbol{\Gamma}$  são bi-ortonormais, ou seja,  $\boldsymbol{\Gamma}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I}$ , e considerando a Equação (5.99), a condição de bi-ortonormalidade pode ser escrita por:

$$\boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{Y}_1 + \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{Y}_2 \cdot \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{I} \quad (5.111)$$

Diferenciando-se a equação acima, pode-se obter:

$$\delta \boldsymbol{\Xi} = -\left( \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{Y}_2 \right)^{-1} \cdot \delta \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma} \quad (5.112)$$

Assim, a variação do operador de projeção pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{P}} &= -\delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T \cdot \delta \boldsymbol{\Psi} \left( \left( \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{Y}_2 \right)^{-1} \right)^T \cdot \mathbf{Y}_2^T \\ &= -\delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T \cdot \delta \boldsymbol{\Psi} \left( \left( \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{Y}_2 \right)^T \right)^{-1} \cdot \mathbf{Y}_2^T \\ &= -\delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T \cdot \delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad (5.113)$$

que considerando-se a condição de bi-ortonormalidade e a Equação (5.78)

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{P}} &= -\delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T \cdot \delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^{-1} \left( \boldsymbol{\Gamma}^{-T} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T \right) \\ &= -\left( \mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T \right) \delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T = -\bar{\mathbf{P}} \cdot \delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T \end{aligned} \quad (5.114)$$

Substituindo-se a equação anterior na segunda parcela da Equação (5.106):

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= \mathbf{G}^T \cdot (-\bar{\mathbf{P}} \cdot \delta \Psi \cdot \Gamma^T)^T \bar{\mathbf{f}}^c \\
 &= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \delta \Psi^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c \\
 &= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \delta \Psi^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^e
 \end{aligned} \tag{5.115}$$

e levando-se em conta a derivada das Equações (5.79) e (5.10):

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= \mathbf{G}^T \cdot \Gamma \left( \mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \cdot \delta \mathbf{x}_1^c + \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \cdot \delta \mathbf{x}_2^c \right) \\
 &= \mathbf{G}^T \cdot \Gamma \left( \mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \cdot \delta \mathbf{u}_1^c + \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \cdot \delta \mathbf{u}_2^c \right)
 \end{aligned} \tag{5.116}$$

podendo ser compactado na seguinte forma:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_2 = -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}^c \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{12 \times 3} \tag{5.117}$$

Portanto, a segunda parcela da Equação (5.106) pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}^c \\
 &= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \end{bmatrix} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} \\
 &= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}_{t_2} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}
 \end{aligned} \tag{5.118}$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{k}}_{t_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_2}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e \cdot \mathbf{G} \quad \bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e = -\Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}} \tag{5.119}$$

Por último, será calculada a variação  $\delta\mathbf{G}^T$  no sistema local de coordenadas. Considerando a Equação (5.81) e a matriz  $\mathbf{G}^T$  definida na Equação (5.105):

$$\delta\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{T}^T & & & \\ & \delta\mathbf{T}^T & & \\ & & \delta\mathbf{T}^T & \\ & & & \delta\mathbf{T}^T \end{bmatrix}_{12 \times 12} = \mathbf{T}^T \cdot \text{diag}_4(\mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_T^e}) \quad (5.120)$$

que fornece para a parcela  $\delta\bar{\mathbf{f}}_3$ :

$$\delta\bar{\mathbf{f}}_3 = \delta\mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^e = \delta\mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^e = \mathbf{G}^T \cdot \text{diag}_4(\mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_T^e}) \cdot \bar{\mathbf{f}}^e = -\mathbf{G}^T \cdot \text{diag}_4(\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{f}}^e}) \cdot \delta\bar{\theta}_T^e \quad (5.121)$$

podendo ser re-escrita da seguinte forma:

$$\delta\bar{\mathbf{f}}_3 = -\mathbf{G}^T \cdot \tilde{\mathbf{H}} \cdot \delta\bar{\theta}_T^e \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{m}_1^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{m}_2^e} \end{bmatrix}_{12 \times 3} \quad (5.122)$$

e considerando a identidade

$$\delta\bar{\theta}_T^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \end{bmatrix} \delta\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{\Gamma}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \delta\bar{\mathbf{d}} \quad (5.123)$$

pode-se escrever a Equação (5.122) na forma:

$$\delta\bar{\mathbf{f}}_3 = -\mathbf{G}^T \cdot \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \delta\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}_{t3} \cdot \delta\bar{\mathbf{d}} \quad (5.124)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{k}}_{t3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_3}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{t3}^e \cdot \mathbf{G} \quad \bar{\mathbf{k}}_{t3}^e = -\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \quad (5.125)$$

Finalmente, agrupando-se as Equações (5.109), (5.119) e (5.125) obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico espacial no sistema global de eixos:

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \bar{\mathbf{k}}_{t1} + \bar{\mathbf{k}}_{t2} + \bar{\mathbf{k}}_{t3} = \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{k}}_t^e \mathbf{G} \quad (5.126)$$

sendo as matrizes de rigidez tangente de pórtico espacial no sistema local definidas por:

$$\bar{\mathbf{k}}_t^e = \bar{\mathbf{k}}_{t1}^e + \bar{\mathbf{k}}_{t2}^e + \bar{\mathbf{k}}_{t3}^e = \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{k}}^c \bar{\mathbf{P}} - \Gamma \tilde{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{H}} \Gamma^T \quad (5.127)$$

A parcela  $\bar{\mathbf{k}}_{t1}$  é conhecida por rigidez material ou constitutiva e as parcelas  $\bar{\mathbf{k}}_{t2}$  e  $\bar{\mathbf{k}}_{t3}$  juntas formam a chamada rigidez geométrica do elemento. Vale ressaltar que a matriz de rigidez tangente do elemento é não simétrica, entretanto testes numéricos apresentados por Cole (1990) e Crisfield (1990) evidenciam que, no equilíbrio de sistemas conservativos, a matriz de rigidez tangente da estrutura é simétrica e, conseqüentemente, na implementação computacional foi feita uma simetrização da matriz de rigidez tangente, calculando-a como a média entre a parte simétrica e a parte anti-simétrica segundo a equação abaixo:

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{k}}_t + \bar{\mathbf{k}}_t^T) \quad (5.128)$$

## 5.6 – ESFORÇOS RESULTANTES

Os elementos de pórtico espacial estão submetidos a seis esforços resultantes em cada um dos nós, representados na configuração atual por  $N$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ ,  $T$ ,  $M_y$  e  $M_z$ , totalizando doze esforços por elemento. O esforço normal  $N$ , os cortantes  $V_y$  e  $V_z$  e o momento torçor  $T$  são constantes ao longo de todo o elemento, ao passo que os momentos fletores  $M_y = M_y(x^e)$  e  $M_z = M_z(x^e)$  variam linearmente ao longo do elemento, admitindo-se tratar de um modelo hermitiano. Estes esforços, com as respectivas convenções de sinais, são mostrados a seguir na Figura 5.3, sendo obtidos a partir das respectivas deformações de acordo com as seguintes equações apresentadas por Harrison (1973):

$$N = E.A_0.\varepsilon = \frac{E.A_0}{L_0} d \quad T = \frac{G.I_x}{L} \theta_x^c \quad (5.129a)$$

$$M_{1y} = \frac{2.E.I_y}{L_0} (2\theta_{1y}^c + \theta_{2y}^c) \quad M_{2y} = \frac{2.E.I_y}{L_0} (\theta_{1y}^c + 2\theta_{2y}^c) \quad (5.129b)$$

$$M_{1z} = \frac{2.E.I_z}{L_0} (2\theta_{1z}^c + \theta_{2z}^c) \quad M_{2z} = \frac{2.E.I_z}{L_0} (\theta_{1z}^c + 2\theta_{2z}^c) \quad (5.129c)$$

$$V_{1y} = \frac{M_{1z} + M_{2z}}{L} \quad V_{2y} = -\frac{M_{1z} + M_{2z}}{L} \quad (5.129d)$$

$$V_{1z} = -\frac{M_{1y} + M_{2y}}{L} \quad V_{2z} = \frac{M_{1y} + M_{2y}}{L} \quad (5.129e)$$

sendo  $E$  e  $G$  os módulos de elasticidade longitudinal e transversal;  $A_0$  a área da seção transversal;  $I_x$  o momento de inércia associado à torção de Saint Venant e  $I_y$  e  $I_z$  os momentos de inércia associados à flexão nas direções  $y$  e  $z$ ;  $\varepsilon$  a deformação de engenharia e os ângulos de rotação  $(\theta_{1x}^c, \theta_{1y}^c, \theta_{1z}^c)$  e  $(\theta_{2x}^c, \theta_{2y}^c, \theta_{2z}^c)$  definidos, respectivamente, pelas Equações (5.16) e (5.17).

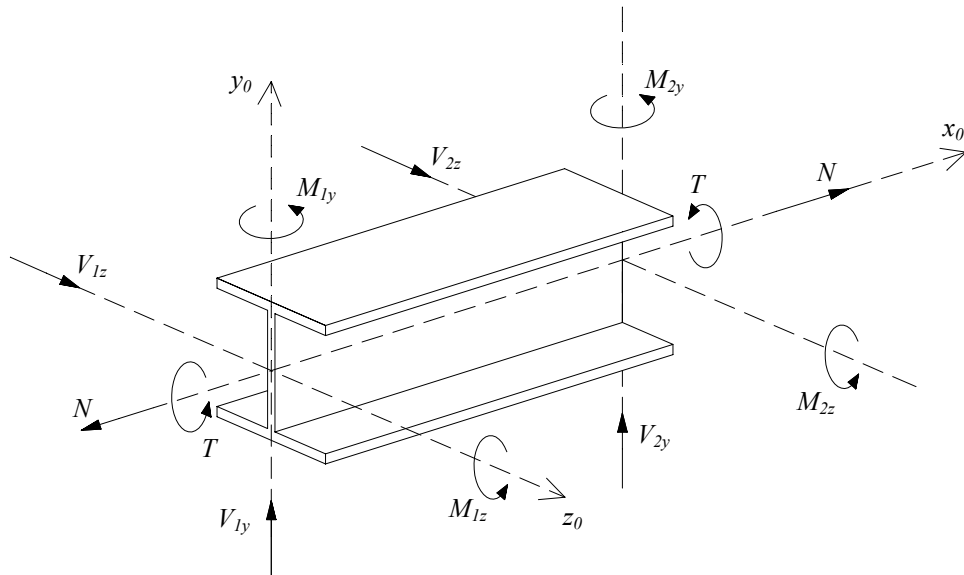


Figura 5.3 – Esforços resultantes e convenção de sinais positivos.

## 6 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE CASCAS

### 6.1 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

No presente capítulo, será descrita a formulação co-rotacional para um elemento finito de casca plano e triangular, baseando-se, novamente, na chamada formulação *EICR* (*Element Independent Co-Rotational Formulation*) desenvolvida por Nour-Omid & Rankin (1991), com modificações apresentadas em Menin & Taylor (2005<sup>a</sup>) e Menin & Taylor (2005<sup>b</sup>). Conforme comentado anteriormente para o caso de pórticos (*3D*), este procedimento está baseado na separação explícita dos movimentos de corpo rígido e deformacional, graças à utilização de um sistema de eixos locais que acompanha o elemento sofrendo translações e giros durante o movimento da estrutura no espaço e em relação ao qual os movimentos são unicamente deformacionais. Esta separação dos movimentos de corpo rígido é possível através da utilização dos chamados operadores de projeção, empregados como pré e pós-processadores nas rotinas computacionais de elementos finitos, de modo a permitir que formulações lineares de elementos finitos possam ser estendidas para o caso de análises não-lineares geométricas, envolvendo grandes deslocamentos e rotações.

Da mesma forma que havia sido feito anteriormente com treliças e pórticos planos, será apresentada a descrição cinemática para um elemento finito de casca procurando-se manter o mesmo formato do capítulo anterior, no qual a formulação co-rotacional foi desenvolvida para o caso de pórticos espaciais, de modo a facilitar o entendimento e a visualização das semelhanças e diferenças existentes entre os dois modelos. O movimento de um elemento de casca plano e triangular contendo três nós e seis graus de liberdade por nó, desde a sua configuração inicial  $C^0$  até a configuração atual  $C^n$ , é mostrado na Figura 6.1, sendo utilizados três sistemas distintos de eixos cartesianos ortogonais da mesma forma que a empregada por Rankin & Brogan (1986):

- *Sistema global* -  $xyz$  utilizado para definir a conectividade entre os elementos.
- *Sistema local*  $T$  que sofre translações e giros ao acompanhar o elemento, sendo, em geral, conhecido na literatura como sistema co-rotacional.
- *Sistemas nodais*  $A$ ,  $B$  e  $C$  que estão atrelados, respectivamente, aos nós 1, 2 e 3 de cada elemento triangular.

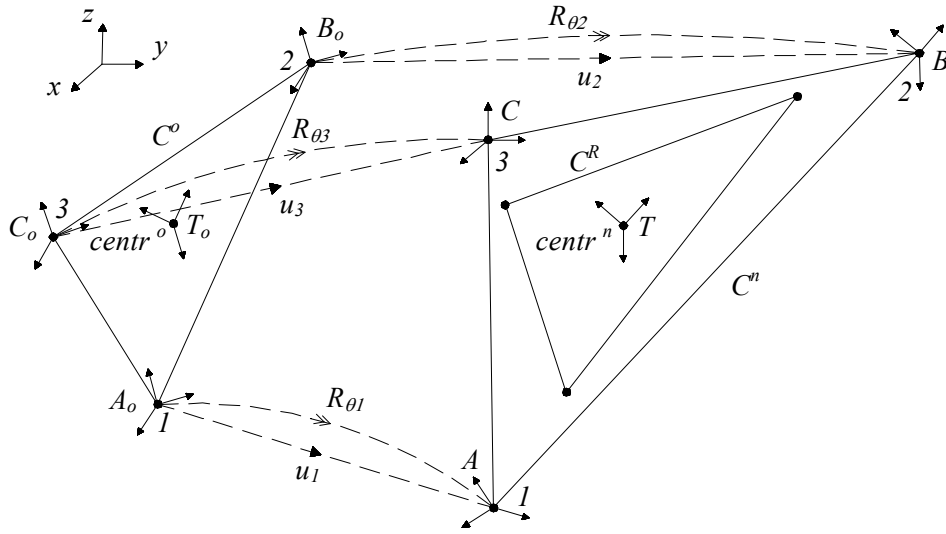


Figura 6.1 – Configurações inicial, co-rotacionada e deformada do elemento de casca.

O sistema local de eixos  $T$ , definido na configuração inicial  $C^0$  como  $T_0$ , pode ser expresso pela seguinte equação:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1\_0}^T \\ \mathbf{i}_{2\_0}^T \\ \mathbf{i}_{3\_0}^T \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{i}_{1\_0} = \frac{\mathbf{X}_{21}}{\|\mathbf{X}_{21}\|} \quad \mathbf{i}_{3\_0} = \frac{\mathbf{i}_{1\_0} \times \mathbf{X}_{31}}{\|\mathbf{i}_{1\_0} \times \mathbf{X}_{31}\|} \quad \mathbf{i}_{2\_0} = \frac{\mathbf{i}_{3\_0} \times \mathbf{i}_{1\_0}}{\|\mathbf{i}_{3\_0} \times \mathbf{i}_{1\_0}\|} \quad (6.2)$$

sendo  $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j$ , tal que o vetor  $\mathbf{X}_i$  representa a posição inicial do nó  $i$  na configuração  $C^0$ . Este procedimento de fazer o alinhamento do sistema co-rotacional a um dos lados do elemento é semelhante ao apresentado por Nour-Omid & Rankin (1991), diferindo pelo fato de que, enquanto Nour-Omid & Rankin (1991) escolheram o lado  $13$  para definir a direção unitária  $\mathbf{i}_{2\_0}$  e o nó  $1$  como a origem do sistema local, no presente trabalho, a origem do sistema local  $T_0$  está localizada no centróide, definido como sendo a média aritmética das coordenadas nodais de cada elemento, enquanto a direção unitária  $\mathbf{i}_{1\_0}$  é alinhada com a direção do lado  $12$  do elemento. De modo a facilitar o seu entendimento e visualização, o sistema local  $T_0$  é mostrado na Figura 6.2, sendo o vetor  $\mathbf{i}_{3\_0}$  perpendicular ao plano local  $x^e y^e$ .

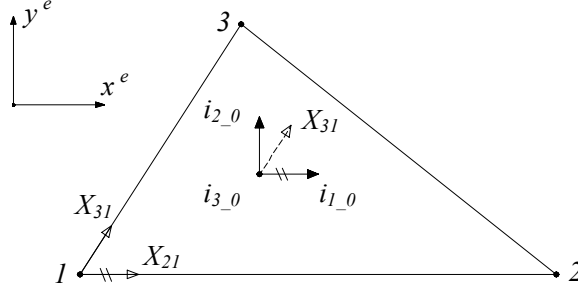


Figura 6.2 – Sistema local  $T_0$  na configuração inicial  $C^0$ .

As orientações iniciais dos sistemas nodais  $A$ ,  $B$  e  $C$  na configuração  $C^0$ , denominadas  $A_0$ ,  $B_0$  e  $C_0$ , respectivamente, são escolhidas iguais à do sistema de eixos locais:

$$A_0 = B_0 = C_0 = T_0^T \quad (6.3)$$

O movimento do elemento entre as configurações inicial e atual pode ser subdividido em duas etapas. Observando-se a Figura 6.1 novamente, inicialmente os nós  $1$ ,  $2$  e  $3$  sofrem translações representadas por  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ ; sendo  $u_i$  composto por uma parcela de corpo rígido  $u_i^r$  e uma parcela deformacional  $u_i^d$ ; e em seguida, os sistemas nodais  $A$ ,  $B$  e  $C$  sofrem rotações de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  com relação a referência inicial  $T_0$ , gerando curvaturas no elemento. A posição final dos nós e a respectiva orientação dos eixos nodais podem então ser expressas na configuração atual por:

$$x_i = X_i + u_i \quad u_i = u_i^r + u_i^d \quad (6.4)$$

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3] = R_{\theta_1} \cdot A_0 \quad B = [b_1 \ b_2 \ b_3] = R_{\theta_2} \cdot B_0 \quad C = [c_1 \ c_2 \ c_3] = R_{\theta_3} \cdot C_0 \quad (6.5)$$

Usando um raciocínio análogo ao da configuração inicial, o sistema co-rotacional  $T$  na configuração atual  $C^n$  pode ser definido da seguinte forma:

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^T \\ \mathbf{i}_2^T \\ \mathbf{i}_3^T \end{bmatrix} = R_{\theta T}^T \quad (6.6)$$

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{x}_{21}}{\|\mathbf{x}_{21}\|} \quad \mathbf{i}_3 = \frac{\mathbf{i}_1 \times \mathbf{x}_{31}}{\|\mathbf{i}_1 \times \mathbf{x}_{31}\|} \quad \mathbf{i}_2 = \frac{\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1}{\|\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1\|} \quad (6.7)$$



Uma vez definido o sistema de eixos co-rotacionais, estabelece-se a mudança de coordenadas entre o sistema global  $xyz$  e o local  $x^e y^e z^e$  através das seguintes operações, sendo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{X}$  quantidades tensoriais de primeira e segunda ordem, respectivamente:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \qquad \mathbf{X}^e = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{T}^T \qquad (6.8)$$

O próximo passo é a determinação dos deslocamentos e rotações deformacionais medidos no sistema local, também denominados co-rotacionais, obtidos a partir dos deslocamentos generalizados globais do elemento. Inicialmente, serão calculadas as posições do  $i$ -ésimo nó do elemento genérico, conforme apresentado na Figura 6.3, nas configurações inicial  $C^0$  e atual  $C^n$ , designadas respectivamente pelos vetores  $\mathbf{X}_i^c$  e  $\mathbf{x}_i^c$ :

$$\mathbf{X}_i^c = \mathbf{T}_0 \cdot (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{centr}) \qquad \mathbf{X}_{centr} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \mathbf{X}_k \qquad (6.9)$$

$$\mathbf{x}_i^c = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{centr}) \qquad \mathbf{x}_{centr} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \mathbf{x}_k \qquad (6.10)$$

O deslocamento co-rotacional  $\mathbf{u}_i^c$  pode então ser obtido, escrevendo-se localmente a relação definida na Equação (6.4) e substituindo-se os valores de  $\mathbf{x}_i^c$  e  $\mathbf{X}_i^c$  definidos acima:

$$\mathbf{u}_i^c = \mathbf{x}_i^c - \mathbf{X}_i^c = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{centr}) - \mathbf{T}_0 \cdot (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{centr}) \qquad (6.11)$$

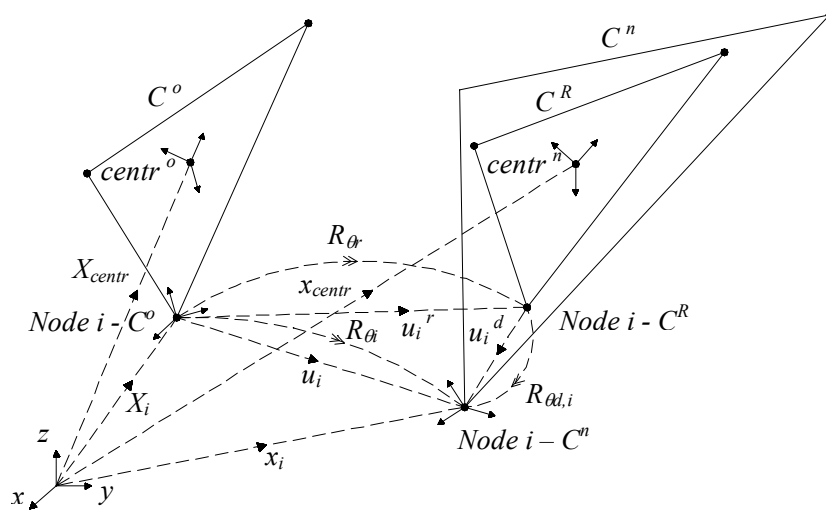


Figura 6.3 – Translações e rotações de um elemento genérico de casca triangular.

Lembrando que o deslocamento corrente de rotação  $\theta_i$  compõe-se de uma parcela rígida  $\theta$ , seguida de uma parcela deformacional  $\theta_{d,i}$  e que a rotação de corpo rígido do elemento é por definição a rotação entre os eixos  $T_0$  e  $T$ , então:

$$R_{\theta} = R_{\theta_{d,i}} \cdot R_{\theta} \quad (6.12)$$

$$R_{\theta} = T^T \cdot T_0 \quad (6.13)$$

substituindo-se a Equação (6.13) em (6.12), obtém-se:

$$R_{\theta_{d,i}} = R_{\theta} \cdot R_{\theta}^T = R_{\theta} \cdot (T^T \cdot T_0)^T$$

$$R_{\theta_{d,i}} = R_{\theta} \cdot T_0^T \cdot T \quad (6.14)$$

A rotação co-rotacional  $\theta_i^c$  pode, então, ser obtida efetuando-se a mudança de coordenadas proposta na Equação (6.8):

$$R_{\theta_i^c} = T \cdot R_{\theta_i} \cdot T_0^T \quad \theta_i^c = \text{rot}(R_{\theta_i^c}) \quad (6.15)$$

A mudança de variáveis, inerente à formulação co-rotacional fica, portanto, definida pelas Equações (6.11) e (6.15). Os deslocamentos co-rotacionais nodais  $d_1^c$ ,  $d_2^c$  e  $d_3^c$  do elemento de casca podem, então, ser definidos através das seguintes expressões:

$$d_1^c = \begin{Bmatrix} u_1^c \\ \theta_1^c \end{Bmatrix} \quad \theta_1^c = \text{rot}(R_{\theta_1^c}) = \text{rot}(T \cdot R_{\theta_1} \cdot T_0^T) = \text{rot}(T \cdot A) \quad (6.16)$$

$$d_2^c = \begin{Bmatrix} u_2^c \\ \theta_2^c \end{Bmatrix} \quad \theta_2^c = \text{rot}(R_{\theta_2^c}) = \text{rot}(T \cdot R_{\theta_2} \cdot T_0^T) = \text{rot}(T \cdot B) \quad (6.17)$$

$$d_3^c = \begin{Bmatrix} u_3^c \\ \theta_3^c \end{Bmatrix} \quad \theta_3^c = \text{rot}(R_{\theta_3^c}) = \text{rot}(T \cdot R_{\theta_3} \cdot T_0^T) = \text{rot}(T \cdot C) \quad (6.18)$$

## 6.2 – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Uma vez atingida uma configuração de equilíbrio, o trabalho virtual externo ( $\delta W_e$ ) será igual ao trabalho virtual interno ( $\delta W_i$ ), proveniente do somatório do trabalho virtual realizado pela distribuição de tensão que atua em cada um dos elementos, de modo que a variação da energia total do sistema será nula:

$$\delta W_e + \delta W_i = 0 \quad (6.19)$$

$$\delta W_e = \delta \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{F}_{ext} \quad (6.20)$$

$$\delta W_i = - \sum_{V_0} \int (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) dV_0 \quad (6.21)$$

Da mesma forma que havia sido comentado anteriormente para o caso de pórticos (3D), o trabalho realizado pelas forças internas durante deslocamentos virtuais rígidos será nulo e, conseqüentemente, este trabalho é decorrente somente de  $\delta \mathbf{d}_d$ , que representa a parcela deformacional de  $\delta \mathbf{d}$ . Além disso, por se tratar de uma quantidade escalar, o trabalho virtual interno proveniente dos deslocamentos deformacionais medidos nos sistemas global e local devem ser iguais, portanto:

$$\delta W_i (\delta \mathbf{d}) = \delta W_i (\delta \mathbf{d}_d) = \delta W_i (\delta \mathbf{d}^c) \quad (6.22)$$

sendo  $\delta \mathbf{d}^c$  os deslocamentos co-rotacionais generalizados do elemento, representando a parcela de deslocamentos deformacionais  $\delta \mathbf{d}_d$ , escrita no sistema local, sendo mais vantajoso definir as tensões e deformações conjugadas no sistema local. Supondo uma relação entre a deformação e o deslocamento local linear, é possível escrever a seguinte expressão para a variação do trabalho virtual interno em função da variação dos deslocamentos co-rotacionais:

$$\delta W_i = - \sum_{V_0} \int (\delta \mathbf{d}^c)^T \cdot (\mathbf{B}_d^c)^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV_0 = - \sum (\delta \mathbf{d}^c)^T \cdot \mathbf{f}^c \quad (6.23)$$

sendo  $\mathbf{f}^c$  o vetor de forças co-rotacionais generalizadas do elemento que realizam trabalho com os deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{d}^c$ , tal que:

$$\mathbf{f}^c = \int_{V_0} (\mathbf{B}_d^c)^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV_0 \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^e, \mathbf{y}^e, \mathbf{z}^e) \quad (6.24)$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado em pórticos espaciais e admitindo-se as seguintes expressões que relacionam os deslocamentos virtuais ( $\delta \mathbf{d}^c$ ), ( $\delta \mathbf{d}^e$ ) e ( $\delta \mathbf{d}$ ), definidas por Nour-Omid & Rankin (1991):

$$\delta \mathbf{d}^c = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{d}^e \quad \delta \mathbf{d}^e = \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (6.25)$$

então:

$$\delta \mathbf{d}^c = \mathbf{P} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (6.26)$$

e substituindo-se a equação acima na Equação (6.23), obtém-se:

$$\delta W_i = - \sum \delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{f}^c = - \delta \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{F} \quad (6.27)$$

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{f}^c = \sum \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{f}^e = \sum \mathbf{f} \quad (6.28)$$

É importante ressaltar novamente que o operador  $\mathbf{P}$  que aparece na Equação (6.25) atua como um filtro para os deslocamentos deformacionais, uma vez que ao ser aplicado sobre o vetor de deslocamentos virtuais nodais  $\delta \mathbf{d}^e$  extrai-lhe apenas a sua parcela deformacional  $\delta \mathbf{d}^c$ . O projetor também é capaz de converter um vetor de forças desequilibrado em um vetor de forças auto-equilibrado, assim como transformar a matriz de rigidez do elemento em uma matriz sem modos espúrios de corpo rígido, de modo que o elemento seja forçado a apresentar as propriedades corretas quando submetido a movimentos de corpo rígido.

Substituindo-se as Equações (6.27) e (6.20) em (6.19) resulta no seguinte sistema não linear, cuja solução pode ser obtida pelo processo de Newton-Raphson:

$$\{\Psi\} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (6.29)$$

### 6.3 – MUDANÇA DA VARIÁVEL ITERATIVA DE ROTAÇÃO

Procedendo de forma análoga ao caso de pórticos espaciais, nesta seção será efetuada uma mudança na variável iterativa de rotação de acordo com a formulação co-rotacional *EICR* apresentada por Nour-Omid & Rankin (1991), segundo a qual é importante diferenciar o deslocamento virtual de rotação  $\delta\theta_i$  da rotação do sistema nodal  $\delta\bar{\theta}_i$ , uma vez que esta última rotação virtual não está relacionada com a variação do campo de deslocamento de rotação do elemento e sim com o giro instantâneo da tríade nodal. Conseqüentemente, será empregada a rotação do sistema nodal  $\bar{\theta}_i$  como variável iterativa de rotação no lugar do deslocamento virtual  $\delta\theta_i$ . Com esta mudança, a variável de rotação passa a ser  $\bar{\theta}$ , estando associada ao mesmo estado de rotação de  $\theta$ :

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}} = \mathbf{R}_{\theta} \quad (6.30)$$

cuja matriz de rotação pode ser atualizada na forma:

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\delta\bar{\theta}_i}^k \cdot \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k \quad (6.31)$$

porém, é importante salientar que  $\delta\bar{\theta} \neq \delta\theta$ , conforme será mostrado posteriormente. O sistema não linear definido na Equação (6.29) pode então ser re-escrito através da seguinte equação, onde a barra sobre as quantidades indica dependência da variável  $\bar{\theta}$ :

$$\{\bar{\psi}\} = \mathbf{F}_{ext} - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (6.32)$$

Conforme comentado por Nour-Omid & Rankin (1991) é importante mencionar que no sistema local a matriz de rigidez constitutiva  $\bar{\mathbf{k}}^c$  é não simétrica, uma vez que a energia potencial do elemento é definida em função dos deslocamentos co-rotacionais  $\mathbf{d}^c$ , ou seja, dos graus de liberdade do elemento na formulação elástico-linear, e não em termos dos deslocamentos  $\bar{\mathbf{d}}^c$  que dependem das variáveis associadas a rotação da tríade nodal.

Considerando as Equações (5.37) e (6.30) e substituindo-se a matriz de rotação linearizada definida na Equação (4.30) em (6.31) obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}} = \delta\mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{R}_\theta^T \quad (6.33)$$

A expressão definida na equação acima estabelece a relação existente entre a rotação  $\delta\bar{\theta}$  dos eixos cartesianos associados a matriz  $\mathbf{R}_\theta$  com a variação consistente  $\delta\mathbf{R}_\theta$  no sistema global de coordenadas. Conforme apresentado para o caso de pórticos espaciais, o próximo passo é a determinação da relação entre as rotações  $\delta\theta$  e  $\delta\bar{\theta}$  obtida aplicando-se as Equações (4.30) e (5.39) em (6.33), que após algebrismos que foram apresentados por Monteiro (2004) resulta na seguinte expressão:

$$\mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}} = \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta}^T \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{S}_\theta + \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \delta\mathbf{S}_\theta + \frac{1 - \text{cos } \theta}{\theta^2} (\mathbf{S}_\theta \cdot \delta\mathbf{S}_\theta - \delta\mathbf{S}_\theta \cdot \mathbf{S}_\theta) \quad (6.34)$$

a partir da qual, pode-se obter:

$$\delta\bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}_\theta^{-1} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \quad (6.35)$$

$$\mathbf{A}_\theta^{-1} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \mathbf{I} + \frac{1 - \text{cos } \theta}{\theta^2} \mathbf{S}_\theta + \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T \quad (6.36)$$

A relação inversa é então expressa por:

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}_\theta \cdot \delta\bar{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.37)$$

$$\mathbf{A}_\theta = \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta + \xi \cdot \mathbf{S}_\theta^2 \quad (6.38)$$

$$\xi = \frac{2 \text{sen } \theta - \theta(1 + \text{cos } \theta)}{2\theta^2 \text{sen } \theta} \quad (6.39)$$

Uma vez feita a atualização dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}_i$  através da Equação (5.36) e da matriz de rotação através da Equação (6.31), podem-se obter os respectivos deslocamentos co-rotacionais do elemento utilizando-se as Equações (6.11) e (6.15). Conhecido o vetor de deslocamentos co-rotacionais  $\mathbf{d}^c$  e a matriz de rigidez linear do elemento  $\mathbf{k}^c$ , o vetor de forças co-rotacionais  $\mathbf{f}^c$  pode ser calculado na forma:

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{k}^c \cdot \mathbf{d}^c \quad \mathbf{f}^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^c \\ \mathbf{f}_2^c \\ \mathbf{f}_3^c \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}_i^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_i^c \\ \mathbf{m}_i^c \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$

Na definição da matriz de rigidez linear  $\mathbf{k}^c$  do elemento finito triangular, enquanto Nour-Omid & Rankin (1991) utilizaram o elemento de casca “*shell element 410*” do programa *STAGS - Structural Analysis of General Shells* (Almroth *et al.*, 1979), no caso do presente trabalho foi utilizado o elemento de casca plano e triangular do tipo *ANDES – Assumed Natural Deviatoric Strains*, desenvolvido por Militello (1991), Felippa e Militello (1992) e Haugen (1994). O elemento de casca do tipo *ANDES* foi utilizado como uma ferramenta para obtenção da matriz de rigidez linear, não sendo abordado no presente trabalho e para maiores detalhes consultar à bibliografia mencionada acima. É importante salientar que uma das principais vantagens da formulação *EICR* é a chamada “*element independence*” que está relacionada com uma classe particular de elementos com a mesma conectividade. Isto significa que a formulação co-rotacional será a mesma para todos os elementos finitos lineares com o mesmo número de nós e graus de liberdade. Portanto, uma formulação desenvolvida para um elemento finito de casca triangular contendo três nós e seis graus de liberdade por nó poderá ser aplicada para qualquer elemento linear de casca triangular com estas mesmas características.

Como foi feita uma mudança da variável de rotação, torna-se necessário determinar as quantidades  $\bar{\mathbf{f}}^c$  e  $\bar{\mathbf{k}}^c$  do elemento, sendo as forças  $\bar{\mathbf{f}}^c$  obtidas diretamente a partir de  $\mathbf{f}^c$  aplicando-se a regra da cadeia sobre a energia potencial do elemento  $\phi$ :

$$\bar{\mathbf{f}}^c = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right\}^T = \left[ \frac{\partial \mathbf{d}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right]^T \cdot \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{d}^c} \right\}^T = [\mathbf{H}^c]^T \cdot \mathbf{f}^c \quad (6.41)$$

sendo  $\mathbf{H}^c$  uma matriz quadrada  $18 \times 18$  definida por:

$$\mathbf{H}^c = \left[ \frac{\partial \mathbf{d}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^c & \mathbf{H}_{12}^c & \mathbf{H}_{13}^c \\ \mathbf{H}_{21}^c & \mathbf{H}_{22}^c & \mathbf{H}_{23}^c \\ \mathbf{H}_{31}^c & \mathbf{H}_{32}^c & \mathbf{H}_{33}^c \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

e  $\mathbf{H}_{ij}^c$  sub-matrizes quadradas  $6 \times 6$  que considerando a Equação (6.38), podem ser expressas pela seguinte equação:

$$\mathbf{H}_{ij}^c = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \cdot \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_{ij} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^c}{\partial d^c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \delta_{ij} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\theta_i^c} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o *delta de Kronecker* e  $\mathbf{0}$  são matrizes quadradas  $3 \times 3$  nulas. Já a matriz de rigidez  $\bar{\mathbf{k}}^c$  do elemento pode ser obtida da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{k}}^c = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left[ (\mathbf{H}^c)^T \cdot \mathbf{f}^c \right] \quad (6.44)$$

$$\bar{\mathbf{k}}^c = (\mathbf{H}^c)^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{f}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \left[ (\mathbf{H}^c)^T \cdot \mathbf{f}^c \right] = \bar{\mathbf{k}}_1^c + \bar{\mathbf{k}}_2^c \quad (6.45)$$

As parcelas simétrica  $\bar{\mathbf{k}}_1^c$  e não simétrica  $\bar{\mathbf{k}}_2^c$  da matriz de rigidez podem ser expressas por:

$$\bar{\mathbf{k}}_1^c = (\mathbf{H}^c)^T \left[ \frac{\partial \mathbf{f}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \mathbf{d}^c} \right] = (\mathbf{H}^c)^T \cdot \mathbf{k}^c \cdot \mathbf{H}^c \quad (6.46)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_2^c = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} \left( (\mathbf{H}^c)^T \cdot \mathbf{f}^c \right) \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \mathbf{d}^c} \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} \left\{ \begin{matrix} (\mathbf{H}_{11}^c)^T \cdot \mathbf{f}_1^c \\ (\mathbf{H}_{22}^c)^T \cdot \mathbf{f}_2^c \\ (\mathbf{H}_{33}^c)^T \cdot \mathbf{f}_3^c \end{matrix} \right\} \cdot \mathbf{H}^c = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_1^c}{\partial \mathbf{d}^c} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_1^c})^T \cdot \mathbf{m}_1^c \right) \\ \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_2^c}{\partial \mathbf{d}^c} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_2^c})^T \cdot \mathbf{m}_2^c \right) \\ \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_3^c}{\partial \mathbf{d}^c} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_3^c})^T \cdot \mathbf{m}_3^c \right) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}^c \quad (6.47)$$



lembrando que o vetor  $f^c$  entra na derivada da equação anterior como uma constante:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{n}_1^c}{\partial d^c} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_2^c}{\partial d^c} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_3^c}{\partial d^c} \right] = [\mathbf{0}]_{3 \times 18} \quad (6.48)$$

ao passo que as demais sub-matrizes podem ser representadas, após algebrismos, por:

$$\frac{\partial}{\partial d^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_1^c})^T \cdot \mathbf{m}_1^c \right) = [\mathbf{0} \quad \boldsymbol{\Omega}_1^c \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad \boldsymbol{\Omega}_1^c = \frac{\partial}{\partial \theta_1^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_1^c})^T \cdot \mathbf{m}_1^c \right) \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial d^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_2^c})^T \cdot \mathbf{m}_2^c \right) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\Omega}_2^c \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad \boldsymbol{\Omega}_2^c = \frac{\partial}{\partial \theta_2^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_2^c})^T \cdot \mathbf{m}_2^c \right) \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial d^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_3^c})^T \cdot \mathbf{m}_3^c \right) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\Omega}_3^c] \quad \boldsymbol{\Omega}_3^c = \frac{\partial}{\partial \theta_3^c} \left( (\mathbf{A}_{\theta_3^c})^T \cdot \mathbf{m}_3^c \right) \quad (6.51)$$

sendo  $\mathbf{0}$  matrizes quadradas  $3 \times 3$  nulas, ao passo que as derivadas que aparecem nas Equações (6.49), (6.50) e (6.51) podem ser expressas pela seguinte equação, conforme demonstrado em detalhes por Monteiro (2004) e Nour-Omid & Rankin (1991):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\mathbf{A}_\theta)^T \mathbf{m} \right) = -\frac{1}{2} \mathbf{S}_m + \xi \left( \boldsymbol{\theta}^T \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{m}^T - 2 \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}^T \right) + \mu \cdot \mathbf{S}_\theta^2 \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}^T \quad (6.52)$$

$$\mu = \frac{1}{\theta} \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\theta \cdot (\sin \theta + \theta) - 8 \sin^2(\theta/2)}{4\theta^2 \sin(\theta/2)} \quad (6.53)$$

Finalmente, substituindo-se as Equações (6.48) a (6.51) na Equação (6.47), pode-se obter:

$$\bar{\mathbf{k}}_2^c = \boldsymbol{\Omega}^c \cdot \mathbf{H}^c \quad \boldsymbol{\Omega}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ & \boldsymbol{\Omega}_1^c & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \\ & & & \boldsymbol{\Omega}_2^c & & \\ & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & & \boldsymbol{\Omega}_3^c \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (6.54)$$

cuja influência segundo Nour-Omid & Rankin (1991) é desprezível quando as rotações co-rotacionais são moderadas ou quando a malha é refinada, para as quais a matriz  $\bar{\mathbf{k}}^c$  do elemento é simétrica para efeito prático.

## 6.4 – OPERADOR DE PROJEÇÃO

Nesta seção será apresentado o operador de projeção  $\bar{\mathbf{P}}$  do elemento, definido em função da mudança da variável iterativa de rotação proposta na seção anterior. Partindo-se da Equação (6.25) obtém-se:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{11} & \bar{\mathbf{P}}_{12} & \bar{\mathbf{P}}_{13} \\ \bar{\mathbf{P}}_{21} & \bar{\mathbf{P}}_{22} & \bar{\mathbf{P}}_{23} \\ \bar{\mathbf{P}}_{31} & \bar{\mathbf{P}}_{32} & \bar{\mathbf{P}}_{33} \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad \bar{\mathbf{P}}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_i^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}_j^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^c}{\partial \boldsymbol{\theta}_j^e} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (6.55)$$

Inicialmente será feita a determinação da variação do deslocamento co-rotacional  $\mathbf{u}_i^c$ , definido na Equação (6.11):

$$\delta \mathbf{u}_i^c = \delta \mathbf{T} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{centr}) + \mathbf{T} \cdot \delta (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{centr}) \quad (6.56)$$

Aplicando a propriedade definida na Equação (6.33) à tríade local do elemento e efetuando a mudança do sistema de coordenadas proposto na Equação (6.8), obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_i^c &= -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}^T} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{centr}) + \mathbf{T} \cdot \delta \left( \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (\mathbf{X}_k + \mathbf{u}_k) \right) \\ &= -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}^T} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{centr}) + \mathbf{T} \cdot \left( \delta \mathbf{u}_i - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (\delta \mathbf{u}_k) \right) \\ &= -\mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}^T} \cdot \mathbf{x}_i^c + \delta \mathbf{u}_i^e - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \delta \mathbf{u}_k^e \\ &= \mathbf{S}_{\mathbf{x}_i^c} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}^T + \delta \mathbf{u}_i^e - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \delta \mathbf{u}_k^e \end{aligned} \quad (6.57)$$

Uma vez conhecida a variação do deslocamento co-rotacional conforme a equação acima, o próximo passo é a determinação da variação da matriz de rotação associada ao deslocamento co-rotacional  $\boldsymbol{\theta}_i^c$ , definida pela Equação (6.15), de modo que:

$$\delta \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i^c} = (\delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i} + \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}) \mathbf{T}_0^T \quad (6.58)$$

Procedendo de forma análoga ao caso do deslocamento co-rotacional, aplicando-se a propriedade (6.33) à tríade local do elemento e efetuando-se a mudança do sistema de coordenadas apresentado em (6.8), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{\theta^c} &= \left( -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i} \right) \mathbf{T}_0^T \\
&= \left( -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \right) \mathbf{R}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_0^T \\
&= \left( -\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i} \cdot \mathbf{T}^T \right) \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_0^T = \left( \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i^e - \delta \bar{\theta}_T^e} \right) \mathbf{R}_{\theta^c} \quad (6.59)
\end{aligned}$$

isolando-se o termo entre parênteses na equação acima:

$$\left( \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i^e - \delta \bar{\theta}_T^e} \right) = \delta \mathbf{R}_{\theta^c} \cdot \mathbf{R}_{\theta^c}^T \quad (6.60)$$

que resulta, considerando a Equação (6.33), na seguinte expressão:

$$\delta \bar{\theta}_i^c = \delta \bar{\theta}_i^e - \delta \bar{\theta}_T^e \quad (6.61)$$

Em função das Equações (6.57) e (6.61) as derivadas dos deslocamentos co-rotacionais  $\mathbf{u}_i^c$  e  $\bar{\theta}_i^c$  com relação aos deslocamentos  $\mathbf{u}_i^e$  e  $\bar{\theta}_i^e$  podem ser definidas por:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] &= \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_k^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] = \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] + \delta_{ij} \cdot \mathbf{I} - \frac{1}{3} \cdot \mathbf{I} \\
\left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] &= \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_k^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] = \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] \\
\left[ \frac{\partial \bar{\theta}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] &= \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_i^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] - \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] = - \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] \\
\left[ \frac{\partial \bar{\theta}_i^c}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] &= \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] - \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] = \delta_{ij} \cdot \mathbf{I} - \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right]
\end{aligned} \quad (6.62)$$

Substituindo-se as derivadas definidas na Equação (6.62) em (6.55), podem-se obter as seguintes expressões para a sub-matriz  $\bar{\mathbf{P}}_{ij}$  em forma expandida ou compacta:

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{6 \times 6} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 6} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_j^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} & \mathbf{S}_{x_i^c} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_j^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_j^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_j^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (6.63)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{I} - \mathbf{P}_{T,ij} - \mathbf{P}_{R,ij} = \delta_{ij} \mathbf{I} - \mathbf{P}_{T,ij} - \boldsymbol{\Psi}_i \cdot \boldsymbol{\Gamma}_j^T \quad (6.64)$$

sendo:

$$\mathbf{P}_{T,ij} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \mathbf{P}_{R,ij} = \boldsymbol{\Psi}_i \cdot \boldsymbol{\Gamma}_j^T \quad (6.65)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{x_i^c} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x_i^c} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{3 \times 6}^T \quad \boldsymbol{\Gamma}_j = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_j^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_j^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_j^e} \end{bmatrix}^T \quad (6.66)$$

Conseqüentemente, o operador de projeção do elemento pode então ser expresso por:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & \\ & \mathbf{I} & \\ & & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{18 \times 18} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{T11} & \mathbf{P}_{T12} & \mathbf{P}_{T13} \\ \mathbf{P}_{T21} & \mathbf{P}_{T22} & \mathbf{P}_{T23} \\ \mathbf{P}_{T31} & \mathbf{P}_{T32} & \mathbf{P}_{T33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1^T & \boldsymbol{\Psi}_1 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2^T & \boldsymbol{\Psi}_1 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_3^T \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1^T & \boldsymbol{\Psi}_2 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2^T & \boldsymbol{\Psi}_2 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_3^T \\ \boldsymbol{\Psi}_3 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1^T & \boldsymbol{\Psi}_3 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2^T & \boldsymbol{\Psi}_3 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_3^T \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (6.67)$$

ou de forma compacta por:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_T - \mathbf{P}_R = \mathbf{I} - \mathbf{P}_T - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T \quad (6.68)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \\ \boldsymbol{\Psi}_3 \end{bmatrix}_{18 \times 3} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x_1^c} & \mathbf{I} & \mathbf{S}_{x_2^c} & \mathbf{I} & \mathbf{S}_{x_3^c} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{x_1^c} \\ \mathbf{I} \\ -\mathbf{S}_{x_2^c} \\ \mathbf{I} \\ -\mathbf{S}_{x_3^c} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

$$\mathbf{\Gamma}^T = \left[ \mathbf{\Gamma}_1^T \quad \mathbf{\Gamma}_2^T \quad \mathbf{\Gamma}_3^T \right]_{3 \times 18} = \left[ \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_1^e} \right] \quad \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_2^e} \right] \quad \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_3^e} \right] \right] = \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right] \quad (6.70)$$

Vale a pena ressaltar que o operador  $\mathbf{P}_T$  está associado à translação do centróide ao passo que o operador  $\mathbf{P}_R$  está associado à rotação do centróide, lembrando que o operador  $\mathbf{P}_T$  não foi definido na formulação de pórticos espaciais, uma vez que foi admitido que não existiam modos espúrios de corpo rígido associados à movimentos de translação na origem do sistema local (Nour-Omid & Rankin, 1991).

O próximo passo será a obtenção da matriz  $\mathbf{\Gamma}^T$  que depende da geometria atual e da orientação dos eixos locais do elemento. Calculando-se a variação consistente do sistema de eixos locais na configuração deformada  $C^n$  pode-se obter a seguinte equação, conforme apresentada de forma detalhada no *Apêndice A*:

$$\mathbf{\Gamma}^T = \frac{1}{2.A} \left[ \begin{array}{ccc} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_{32}^c \\ 0 & 0 & y_{32}^c \\ 0 & \frac{-2.A}{L_3} & 0 \end{array} \right]_{3 \times 3} & \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_{13}^c \\ 0 & 0 & y_{13}^c \\ 0 & \frac{2.A}{L_3} & 0 \end{array} \right]_{3 \times 3} & \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_{21}^c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{3 \times 3} \end{array} \right] \quad (6.71)$$

sendo que  $x_{ij}^c = x_i^c - x_j^c$  representa a diferença nas coordenadas nodais em relação ao sistema local na configuração atual  $C^n$  ao passo que  $A$  e  $L_3$  representam, respectivamente, a área e o comprimento do lado  $L_3$  entre os nós 1 e 2 do elemento triangular e  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  matrizes quadradas nulas associadas aos graus de liberdade de rotação.

## 6.5 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS E MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

O vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente da estrutura após a mudança da variável iterativa de rotação podem ser expressos pelas seguintes equações:

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c = \sum \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^e = \sum \bar{\mathbf{f}} \quad (6.72)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_t = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \bar{\mathbf{D}}} \right] = \sum \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = \sum \bar{\mathbf{k}}_t \quad (6.73)$$

sendo o vetor de forças internas do elemento no sistema global e a matriz  $\mathbf{G}^T$  definidos por:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c \quad \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}_{18 \times 18} = \text{diag}_6(\mathbf{T}^T) \quad (6.74)$$

ao passo que a matriz de rigidez tangente pode ser obtida pela variação das forças internas  $\bar{\mathbf{f}}$  do elemento, sendo composta por três parcelas:

$$\begin{aligned} \bar{\delta \mathbf{f}}_1 &= \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\delta \mathbf{f}}^c \\ \bar{\delta \mathbf{f}} &= \delta(\mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c) = \bar{\delta \mathbf{f}}_1 + \bar{\delta \mathbf{f}}_2 + \bar{\delta \mathbf{f}}_3 \quad \bar{\delta \mathbf{f}}_2 = \mathbf{G}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c \\ \bar{\delta \mathbf{f}}_3 &= \delta \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c \end{aligned} \quad (6.75)$$

Inicialmente, será calculada a variação das forças co-rotacionais  $\bar{\delta \mathbf{f}}^c$ , que em função das Equações (6.25) e (6.44), pode ser expressa por:

$$\bar{\delta \mathbf{f}}^c = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \delta \bar{\mathbf{d}}^c = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right] \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] \delta \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}^c \cdot \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (6.76)$$

Portanto

$$\bar{\delta \mathbf{f}}_1 = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot (\bar{\mathbf{k}}^c \cdot \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}) = \bar{\mathbf{k}}_{t1} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (6.77)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{t1} = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_1}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{t1}^e \cdot \mathbf{G} \quad \bar{\mathbf{k}}_{t1}^e = \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}^c \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (6.78)$$

O próximo passo é a determinação da variação do operador de projeção  $\delta \bar{\mathbf{P}}$  que pode ser obtido calculando-se a variação do operador  $\bar{\mathbf{P}}$  definido na Equação (6.68), tal que:

$$\delta \bar{\mathbf{P}} = \delta \mathbf{I} - \delta \mathbf{P}_T - \delta \mathbf{P}_R = -(\delta \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \cdot \delta \boldsymbol{\Gamma}^T) \quad (6.79)$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} \mathbf{f}_2 &= \mathbf{G}^T \cdot (-\delta \Psi \cdot \Gamma^T - \Psi \cdot \delta \Gamma^T)^T \bar{\mathbf{f}}^c \\
&= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \delta \Psi^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c - \mathbf{G}^T \cdot \delta \Gamma \cdot \Psi^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c \\
&= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \delta \Psi^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c
\end{aligned} \tag{6.80}$$

onde a segunda parcela do lado direito da equação acima foi ignorada, uma vez que segundo Haugen (1994) este termo tende a zero quando as configurações  $C^R$  e  $C^n$  estão próximas. Substituindo-se derivada da Equação (6.69) em (6.80):

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \sum_{i=1}^3 \left[ \mathbf{S}_{\bar{\alpha}_i^c} \quad \mathbf{0} \right] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_i^e \\ \bar{\mathbf{m}}_i^e \end{bmatrix} \\
&= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \sum_{i=1}^3 \left[ -\mathbf{S}_{\bar{n}_i^e} \quad \mathbf{0} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i^c \\ \delta \bar{\theta}_i^c \end{bmatrix} \\
&= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \sum_{i=1}^3 \left[ -\mathbf{S}_{\bar{n}_i^e} \quad \mathbf{0} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i^c \\ \delta \bar{\theta}_i^c \end{bmatrix} \\
&= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \sum_{i=1}^3 \left[ -\mathbf{S}_{\bar{n}_i^e} \quad \mathbf{0} \right] \delta \bar{\mathbf{d}}^c
\end{aligned} \tag{6.81}$$

podendo ser compactado na seguinte forma:

$$\bar{\delta} \mathbf{f}_2 = -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}^c \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{\bar{n}_3^e} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{18 \times 3} \tag{6.82}$$

Conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}^c \\
&= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \end{bmatrix} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} \\
&= -\mathbf{G}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}_{12} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}
\end{aligned} \tag{6.83}$$

sendo

$$\bar{\mathbf{k}}_{t_2} = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_2}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e \cdot \mathbf{G} \quad \bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e = -\mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (6.84)$$

Por último, será feito o cálculo da variação  $\delta \mathbf{G}^T$  no sistema local de coordenadas. Inicialmente, a propriedade definida na Equação (6.33) é aplicada sobre a tríade local do elemento  $\mathbf{T}$  e em seguida é efetuada a mudança de coordenadas proposta na Equação (6.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} &= \delta \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot \mathbf{T}^T &= \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T \\ \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T^e} &= \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{T}^T \end{aligned} \quad (6.85)$$

Considerando a Equação (6.85) e a matriz  $\mathbf{G}^T$  definida na Equação (6.74):

$$\delta \mathbf{G}^T = \left[ \begin{array}{ccc} \delta \mathbf{T}^T & & \\ & \ddots & \\ & & \delta \mathbf{T}^T \end{array} \right]_{18 \times 18} = \mathbf{G}^T \cdot \text{diag}_6(\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T^e}) \quad (6.86)$$

que fornece para a variação  $\delta \bar{\mathbf{f}}_3$ :

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_3 = \delta \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^c = \delta \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^e = \mathbf{G}^T \cdot \text{diag}_6(\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T^e}) \cdot \bar{\mathbf{f}}^e = -\mathbf{G}^T \cdot \text{diag}_6(\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{f}}^e}) \cdot \delta \bar{\theta}_T^e \quad (6.87)$$

podendo ser re-escrita da seguinte forma:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_3 = -\mathbf{G}^T \cdot \tilde{\mathbf{H}} \cdot \delta \bar{\theta}_T^e \quad \tilde{\mathbf{H}} = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{m}_1^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{m}_2^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{n}_3^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{m}_3^e} \end{array} \right]_{18 \times 3} \quad (6.88)$$

e considerando a identidade

$$\delta \bar{\theta}_T^e = \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right] \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] \delta \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{\Gamma}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (6.89)$$



pode-se escrever a Equação (6.88) na forma:

$$\bar{\delta f}_3 = -\mathbf{G}^T \cdot \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}_{t3} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (6.90)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{k}}_{t3} = \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_3}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{t3}^e \cdot \mathbf{G} \quad \bar{\mathbf{k}}_{t3}^e = -\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \quad (6.91)$$

Finalmente, agrupando-se as Equações (6.78), (6.84) e (6.91) obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento de casca triangular no sistema global de eixos:

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \bar{\mathbf{k}}_{t1} + \bar{\mathbf{k}}_{t2} + \bar{\mathbf{k}}_{t3} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_t^e \cdot \mathbf{G} \quad (6.92)$$

sendo as matrizes de rigidez tangente de casca triangular no sistema local definidas por:

$$\bar{\mathbf{k}}_t^e = \bar{\mathbf{k}}_{t1}^e + \bar{\mathbf{k}}_{t2}^e + \bar{\mathbf{k}}_{t3}^e = \bar{\mathbf{P}}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}^c \cdot \bar{\mathbf{P}} - \mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \quad (6.93)$$

A parcela  $\bar{\mathbf{k}}_{t1}$  é conhecida por rigidez material ou constitutiva e as parcelas  $\bar{\mathbf{k}}_{t2}$  e  $\bar{\mathbf{k}}_{t3}$  juntas formam a chamada rigidez geométrica do elemento. Vale ressaltar que a matriz de rigidez tangente do elemento é não simétrica, entretanto, testes numéricos apresentados por Nour-Omid & Rankin (1991) e Menin & Taylor (2005<sup>a</sup>) mostram que no equilíbrio de sistemas conservativos a matriz de rigidez tangente da estrutura é simétrica e, portanto, na implementação computacional foi feita uma simetrização da matriz de rigidez tangente da mesma forma que havia sido feito para o caso de pórticos espaciais, calculando-a como a média entre a parte simétrica e a parte anti-simétrica, segundo a equação abaixo:

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \frac{1}{2} \cdot (\bar{\mathbf{k}}_t + \bar{\mathbf{k}}_t^T) \quad (6.94)$$

## 7 – ALGORITMOS DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

### 7.1 – EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS ALGORITMOS

No período anterior à metade dos anos 70, problemas estruturais envolvendo não-linearidade geométrica eram, geralmente, tratados com métodos puramente incrementais sob controle de carga. Estes métodos têm a grande desvantagem de poder desviar a solução da trajetória de equilíbrio. Uma vez que estes métodos não fazem a verificação de forças residuais ou desequilibradas, o erro associado neste caso é dependente do passo de carga  $e$ , freqüentemente, é acumulativo durante a análise, tanto que requer um passo de carga muito pequeno para uma análise mais precisa. Somando-se a esta deficiência, a possibilidade de a resolução do sistema ir além de um ponto crítico, utilizando controle de carga, era muita pequena ou mesmo nula.

Esta dificuldade motivou o desenvolvimento de métodos incrementais-iterativos, nos quais os incrementos, que caracterizavam uma fase preditora, foram seguidos pelas iterações de correção do equilíbrio ou fase corretora. Estas correções trazem a solução de volta para a trajetória de equilíbrio e o algoritmo passa a ser menos dependente do tamanho do passo de carga utilizado.

Em uma análise envolvendo não-linearidade geométrica, as estruturas ou componentes estruturais, usualmente, alcançam um nível de carga máximo, no qual se tornam incapazes de resistir a mais incrementos de carga, até que uma mudança significativa na geometria ocorra. Estes níveis de carga são chamados de pontos críticos (limites ou de bifurcação), sendo caracterizados por uma matriz de rigidez tangente singular. Um método baseado em controle de carga pode ser capaz de detectar um ponto limite mas, em geral, não é capaz de ir além deste ponto. A necessidade de atravessar um ponto limite é motivada pelo fato de que, em muitos casos, a estrutura possui capacidade resistente de carga que pode ainda ser aproveitada. Existem na literatura diversas estratégias para ultrapassar os pontos críticos, dentre as quais podem-se destacar: os métodos de molas artificiais (Wright & Gaylord, 1968 e Sharifi & Popov, 1971), métodos baseados no controle do incremento de carga utilizando o parâmetro de rigidez *CST – Current Stiffness Parameter* (Bergan et al., 1979) e técnicas de controle de deslocamento (Argyris, 1965).

Durante os últimos 30 anos, importantes avanços têm sido alcançados na resolução de sistemas não-lineares de equações, possibilitando que tanto a carga quanto o deslocamento possam variar simultaneamente durante os passos incrementais, de modo a permitir que os algoritmos sejam capazes de atravessar um ponto limite e com isso obter com maior êxito a continuação da resposta, dentre os quais se destacam os métodos de *comprimento de arco*, inicialmente propostos por Riks (1972) e Wempner (1971) e posteriormente melhorados por vários autores dentre os quais podem-se destacar Batoz & Dhatt (1979), Ramm(1981) e Crisfield (1981). Segundo Haugen (1994) e Crisfield (1991) nenhum algoritmo é aplicável a todos os tipos de problemas, porém, os algoritmos do tipo *comprimento de arco* são, geralmente, considerados os mais versáteis em termos de alcance de problemas de engenharia estrutural que eles podem resolver.

## 7.2 – MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS

O sistema discreto de equações não-lineares que governa os problemas estáticos com não-linearidade geométrica pode ser definido pela seguinte equação:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor de forças residuais ou desequilibradas,  $\mathbf{x}$  é o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças externas e  $\boldsymbol{\varphi}$  é o vetor de forças internas da estrutura calculado em função dos deslocamentos nodais. Argumentos numéricos (boa aproximação inicial a solução) e físicos (resposta completa do sistema) levam a dividir a carga externa total  $\mathbf{f}$  em vários incrementos. Deste modo, um certo nível de carga será caracterizado por uma força externa  $\mathbf{f}^{n-1}$  e o equilíbrio para este nível de carga será expresso por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{n-1}) = \mathbf{f}^{n-1} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{n-1}) = \mathbf{0} \quad (7.2)$$

A incógnita do problema passa a ser o deslocamento  $\mathbf{x}^{n-1}$  para este nível de carga e uma vez satisfeito o equilíbrio para o passo de carga  $n-1$ , procede-se o incremento na força externa:

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{n-1} + \Delta\mathbf{f}^n \quad (7.3)$$

Com este incremento na força externa, o vetor de deslocamentos  $\mathbf{x}^n$  para o novo passo de carga pode ser definido pela equação abaixo, sendo que a nova incógnita do problema passará a ser o incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{x}^n$ :

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{n-1} + \Delta\mathbf{x}^n \quad (7.4)$$

A maneira mais fácil de dividir a carga externa total  $\mathbf{f}$  em incrementos é fazendo de forma proporcional, utilizando-se um parâmetro escalar  $\lambda$ , chamado nível ou fator de carga:

$$\mathbf{f}^n = \lambda^n \cdot \mathbf{f} \quad (7.5)$$

em função do qual a Equação (7.3) pode ser re-escrita por:

$$\lambda^n \mathbf{f} = \lambda^{n-1} \mathbf{f} + \Delta\lambda^n \mathbf{f} \quad (7.6)$$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \Delta\lambda^n \quad (7.7)$$

O método incremental apresentado nas Equações (7.2) a (7.4) pode ser convertido em um método incremental-iterativo quando se decide resolver iterativamente para cada um dos incrementos  $\Delta\mathbf{x}^n$ . Utilizando-se uma expansão em série de Taylor de  $\mathbf{r}(\mathbf{x}^n)$  pode-se obter uma predição inicial para  $\Delta\mathbf{x}^n$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}^n) &= \mathbf{f}^n - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n) = \mathbf{f}^{n-1} + \Delta\mathbf{f}^n - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{n-1} + \Delta\mathbf{x}^n) \\ &= \mathbf{f}^{n-1} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{n-1}) + \Delta\mathbf{f}^n - \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{n-1})\Delta\mathbf{x}^n \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{x}^{n-1}) + \Delta\mathbf{f}^n - \mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1})\Delta\mathbf{x}^n \\ &= \mathbf{0} + \Delta\mathbf{f}^n - \mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1})\Delta\mathbf{x}^n = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.8)$$

o que implica em:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1})\Delta\mathbf{x}^n = \Delta\mathbf{f}^n \quad (7.9)$$

O valor de  $\Delta \mathbf{x}^n$  obtido pela resolução da Equação (7.9) é tomado então como uma primeira aproximação do incremento de deslocamento, denominado  $\Delta \mathbf{x}^n_I$ . Como aproximação inicial ao deslocamento  $\mathbf{x}^n_0$  no passo de carga  $n$ , é tomado o valor  $\mathbf{x}^{n-1}$ . Portanto, tem-se uma primeira aproximação  $\mathbf{x}^n_I$ :

$$\mathbf{x}^n_I = \mathbf{x}^{n-1} + \Delta \mathbf{x}^n_I = \mathbf{x}^{n-1} + \Delta \mathbf{x}^n \quad (7.10)$$

Caso a primeira aproximação  $\mathbf{x}^n_I$  não seja suficiente para atingir o equilíbrio do sistema, é necessário iniciar a fase iterativa ou corretora:

$$\mathbf{x}^n_{i+1} = \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_i \quad (7.11)$$

lembrando que o símbolo  $\delta$  é empregado para destacar que se trata de um deslocamento iterativo e não de um deslocamento incremental que corresponde a um incremento de carga  $\Delta \mathbf{f}^n$ . Vale a pena ressaltar que a Equação (7.11) pode também ser escrita para o caso dos deslocamentos incrementais:

$$\Delta \mathbf{x}^n_{i+1} = \Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_i \quad (7.12)$$

Da mesma forma que havia sido feito para os deslocamentos incrementais, o deslocamento iterativo  $\delta \mathbf{x}_i$  que aparece nas Equações (7.11) e (7.12) pode ser obtido utilizando-se uma expansão em série de Taylor similar à utilizada na Equação (7.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_{i+1}) &= \mathbf{f}^n - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_{i+1}) \approx \mathbf{f}^n - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i) - \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \delta \mathbf{x}_i \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) - \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.13)$$

o que implica em:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) \quad (7.14)$$

O esquema “preditor-corretor” apresentado nesta seção é conhecido como *Newton-Raphson Completo*, lembrando que são conhecidas modificações na Equação (7.14) que levam a métodos de Newton-Raphson modificados.

É importante mencionar que neste esquema “preditor-corretor” se utiliza controle de carga, uma vez que o parâmetro utilizado para dividir o problema definido na Equação (7.1) em incrementos é o nível ou fator de carga  $\lambda$ . Um certo valor  $\lambda^n$  deste parâmetro caracteriza precisamente um incremento e os deslocamento iterativos  $\Delta \mathbf{x}_i$  são sempre calculados para um mesmo nível de carga que não sofre variações durante o processo iterativo.

Conforme comentado no início do capítulo, o esquema preditor-corretor que utiliza controle de carga não é um método muito apropriado para muitas situações encontradas na análise estrutural, em especial na transposição de pontos críticos. Existem outros métodos (comprimento de arco, controle de deslocamentos, etc...) nos quais se escolhe outro parâmetro para caracterizar os incrementos. Conforme será abordado a seguir, a idéia básica destes métodos é tratar o fator de carga como uma variável e impor, no lugar da sua constância, uma restrição diferente caracterizada por um certo incremento do comprimento de arco no espaço definido por forças e deslocamentos.

### 7.3 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO

Da mesma forma que havia sido feito para o caso de métodos incrementais-iterativos com controle de carga, supõe-se uma situação de equilíbrio no passo  $n-1$ , conforme definido na Equação (7.2) e busca-se uma nova situação de equilíbrio para o passo  $n$ , correspondente a uma carga  $\mathbf{f}^n$  definida conforme a Equação (7.6). A diferença básica nos métodos de comprimento de arco é que o incremento de carga  $\Delta \lambda^n \mathbf{f}$  é desconhecido a priori. Para determinar a incógnita adicional  $\Delta \lambda^n$  se impõe a seguinte restrição:

$$(\Delta \mathbf{x}^n)^T (\Delta \mathbf{x}^n) + b (\Delta \lambda^n)^2 \mathbf{f}^T \mathbf{f} = \Delta L^2 \quad (7.15)$$

sendo  $b$  um parâmetro de ponderação que será discutido posteriormente. A Equação (7.15) impõe que o incremento da solução no espaço  $\mathbf{x}$ - $\mathbf{f}$  tenha um certo comprimento de valor  $\Delta L$  convenientemente escolhido a priori. A Equação (7.9) continua sendo válida para definir uma predição do deslocamento incremental:

$$\mathbf{K}^{n-1} \Delta \mathbf{x}^n = \Delta \lambda^n \mathbf{f} \quad (7.16)$$

podendo ser observado que a solução predita  $\Delta \mathbf{x}^n$  definida na Equação (7.16) depende linearmente de  $\Delta \lambda^n$ , de modo que:

$$\mathbf{K}^{n-1} \cdot \Delta \mathbf{x}_T = \mathbf{f} \quad (7.17)$$

$$\Delta \mathbf{x}^n = \Delta \lambda^n \cdot \Delta \mathbf{x}_T \quad (7.18)$$

sendo  $\Delta \mathbf{x}_T$  o incremento de deslocamento correspondente a totalidade da carga externa de referência. Em função da Equação (7.18) a restrição do método de comprimento de arco definida na Equação (7.15), pode ser re-escrita por:

$$(\Delta \lambda^n)^2 \cdot [(\Delta \mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_T) + b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}] = \Delta L^2 \quad (7.19)$$

que permite calcular a predição para o fator de carga  $\Delta \lambda^n$  :

$$(\Delta \lambda^n)^2 = \frac{\Delta L^2}{(\Delta \mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_T) + b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}} \quad \Rightarrow \quad \Delta \lambda^n = \pm \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta \mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_T) + b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}}} \quad (7.20)$$

Uma vez conhecido  $\Delta \lambda^n$ , pode-se calcular  $\Delta \mathbf{x}^n$  na Equação (7.18), e em seguida o deslocamento para o nível de carga  $n$ , conforme a Equação (7.4). Este método puramente incremental pode ser combinado com iterações dentro de cada incremento. Deste modo, os valores de  $\Delta \lambda^n$  e  $\Delta \mathbf{x}^n$  são considerados apenas como as primeiras aproximações  $\Delta \lambda^n_i$  e  $\Delta \mathbf{x}^n_i$  a serem corrigidas de forma iterativa. Com base nas Equações (7.11) e (7.12), pode-se então escrever equações similares para o fator de carga  $\lambda^n$ :

$$\lambda^n_{i+1} = \lambda^n_i + \delta \lambda_i \quad (7.21)$$

$$\Delta \lambda^n_{i+1} = \Delta \lambda^n_i + \delta \lambda_i \quad (7.22)$$

Lembrando que o incremento  $\Delta \lambda^n$  é desconhecido a priori, deve-se determinar o seu valor iterativamente, sem considerá-lo fixo dentro de um mesmo incremento.

Supondo que para a iteração  $i$ -ésima não tenha sido alcançado uma posição de equilíbrio:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) = \mathbf{f}^n_i - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i) = \lambda^n_i \cdot \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i) \neq \mathbf{0} \quad (7.23)$$

então, para a iteração seguinte tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_{i+1}) &= \mathbf{f}^n_{i+1} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_{i+1}) = \lambda^n_{i+1} \cdot \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_{i+1}) \\ &= (\lambda^n_i + \delta\lambda_i) \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i + \delta\mathbf{x}_i) \\ &= \lambda^n_i \cdot \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i) + \delta\lambda_i \cdot \mathbf{f} - \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \cdot \delta\mathbf{x}_i \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) + \delta\lambda_i \cdot \mathbf{f} - \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \delta\mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (7.24)$$

Comparando-se as Equações (7.13) e (7.24), pode-se ver que esta última tem um termo adicional  $\delta\lambda_i \mathbf{f}$  que está associado à variação da carga durante o processo iterativo. Em virtude deste termo adicional, ao se admitir  $\mathbf{r}(\mathbf{x}^n_{i+1}) = \mathbf{0}$ , não se pode obter diretamente o deslocamento iterativo  $\delta\mathbf{x}_i$  até que seja determinado o termo  $\delta\lambda_i$ , obtido graças à utilização da restrição definida na Equação (7.15):

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^n_{i+1}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \cdot \delta\mathbf{x}_i = \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) + \delta\lambda_i \cdot \mathbf{f} \quad (7.25)$$

A Equação (7.25) pode, então, ser invertida para se obter a seguinte equação:

$$\delta\mathbf{x}_i = [\mathbf{K}^n_i]^{-1} \mathbf{r}^n_i + \delta\lambda_i \cdot [\mathbf{K}^n_i]^{-1} \cdot \mathbf{f} = \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (7.26)$$

sendo  $\delta\mathbf{x}_{Ri}$  o deslocamento iterativo correspondente ao método com controle de cargas e  $\delta\mathbf{x}_{Ti}$  o deslocamento iterativo correspondente a totalidade da carga externa de referência, podendo os mesmos serem obtidos através da resolução dos seguintes sistemas:

$$\mathbf{K}^n_i \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} = \mathbf{r}^n_i \quad ; \quad \mathbf{K}^n_i \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} = \mathbf{f} \quad (7.27)$$

observando-se que na Equação (7.26) aparece novamente o termo adicional que está associado à variação da carga externa.



Combinando as Equações (7.12) e (7.26) obtém-se:

$$\Delta \mathbf{x}^n_{i+1} = \Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_i = \Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} \quad (7.28)$$

Uma vez que a restrição definida anteriormente na Equação (7.15) admite, evidentemente, uma formulação em iterações:

$$\left(\Delta \mathbf{x}^n_{i+1}\right)^T \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_{i+1}\right) + b \cdot \left(\Delta \lambda^n_{i+1}\right)^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \left(\Delta \mathbf{x}^n_i\right)^T \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_i\right) + b \cdot \left(\Delta \lambda^n_i\right)^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \Delta L^2 \quad (7.29)$$

e substituindo-se as Equações (7.22) e (7.28) em (7.29) pode-se obter a seguinte expressão após algebrismos simples:

$$\begin{aligned} \left(\Delta \mathbf{x}^n_{i+1}\right)^T \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_{i+1}\right) + b \cdot \left(\Delta \lambda^n_{i+1}\right)^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} &= \\ &= \left(\delta \lambda_i\right)^2 \cdot \left(\delta \mathbf{x}_{Ti}\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} \\ &+ \delta \lambda_i \cdot \left(2 \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri}\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + 2 \cdot \Delta \lambda^n_i \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}\right) \\ &+ \left(\left(\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri}\right)^T \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri}\right) + \left(\Delta \lambda^n_i\right)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}\right) = \Delta L^2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

podendo ser compactada na forma de um equação de segundo grau em função de  $\delta \lambda_i$ :

$$a_1 \cdot \left(\delta \lambda_i\right)^2 + a_2 \cdot \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (7.31)$$

sendo:

$$a_1 = \left(\delta \mathbf{x}_{Ti}\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} \quad (7.32a)$$

$$a_2 = 2 \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri}\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + 2 \cdot \Delta \lambda^n_i \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} \quad (7.32b)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \left(\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri}\right)^T \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri}\right) + \left(\Delta \lambda^n_i\right)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} - \Delta L^2 \\ &= \left(\Delta \mathbf{x}^n_i\right)^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + \left(\Delta \lambda^n_i\right)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} - \Delta L^2 + 2 \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_i\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + \left(\delta \mathbf{x}_{Ri}\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} \\ &= \Delta L^2 - \Delta L^2 + 2 \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_i\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + \left(\delta \mathbf{x}_{Ri}\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} \\ &= 2 \cdot \left(\Delta \mathbf{x}^n_i\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + \left(\delta \mathbf{x}_{Ri}\right)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} \end{aligned} \quad (7.32c)$$

Supondo que a Equação (7.31) tenha duas raízes reais  $\delta\lambda_i^{(1)}$  e  $\delta\lambda_i^{(2)}$ , isto implica na existência de dois deslocamentos incrementais:

$$\Delta\mathbf{x}_{i+1}^{(1)} = \Delta\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}_i^{(1)} = \Delta\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i^{(1)} \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (7.33a)$$

$$\Delta\mathbf{x}_{i+1}^{(2)} = \Delta\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}_i^{(2)} = \Delta\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i^{(2)} \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (7.33b)$$

Na escolha de uma das duas raízes da Equação (7.31), existem várias estratégias propostas por um grande número de pesquisadores, sendo uma delas impor a seguinte condição:

$$(\Delta\mathbf{x}_{i+1}^{(j)})^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_i) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti})^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_i) > 0 \quad (7.34)$$

Esta condição evita que a solução retorne pela trajetória de equilíbrio, iniciando um processo de descarregamento indesejado. Caso as duas raízes satisfaçam a Equação (7.34), pode-se optar pela solução que mais se aproxime da solução linear  $\delta\lambda_i^{linear} = -a_3 / a_2$ .

Este procedimento apresentado na presente seção recebe o nome de comprimento de arco esférico (*spherical arc-length procedure*) para o caso de se utilizar o parâmetro de ponderação  $b=1$ . No espaço  $\mathbf{x}\text{-}\mathbf{f}$ , as sucessivas aproximações da solução estão situadas em uma esfera de raio  $\Delta L$  e centrada no ponto de equilíbrio da iteração anterior  $(\mathbf{x}^{n-1}, \lambda^{n-1}, \mathbf{f})$ , conforme pode ser visualizado na Figura 7.1.

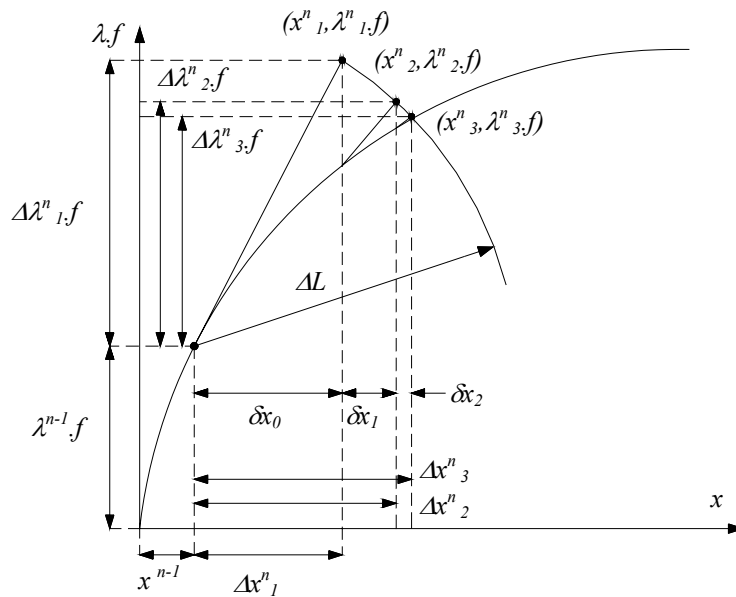


Figura 7.1 – Método de comprimento de arco esférico.

## 7.4 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEARIZADOS

Pode-se utilizar uma formulação alternativa linearizada da Equação (7.31), empregando-se a seguinte restrição:

$$(\Delta \mathbf{x}^n_{i+1})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_i) + b \cdot (\Delta \lambda^n_{i+1}) (\Delta \lambda^n_i) \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \Delta L^2 \quad (7.35)$$

na qual os produtos escalares são entre vetores em duas iterações distintas  $i$  e  $i+1$ . Substituindo-se as Equações (7.22) e (7.28) em (7.35) pode-se obter:

$$\begin{aligned} & (\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_i) + b \cdot (\Delta \lambda^n_i + \delta \lambda_i) (\Delta \lambda^n_i) \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \Delta L^2 \\ & (\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_i) + b \cdot (\Delta \lambda^n_i)^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} + \delta \lambda_i \cdot ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + b \cdot \Delta \lambda^n_i \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = \Delta L^2 \\ & (\Delta \mathbf{x}^n_i)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_i) + b \cdot (\Delta \lambda^n_i)^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \lambda_i \cdot ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + b \cdot \Delta \lambda^n_i \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = \Delta L^2 \\ & \Delta L^2 + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \lambda_i \cdot ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + b \cdot \Delta \lambda^n_i \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = \Delta L^2 \\ & (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \lambda_i \cdot ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + b \cdot \Delta \lambda^n_i \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

a partir da qual pode-se extrair a correção linearizada para o fator de carga:

$$\delta \lambda_i = - \frac{(\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i}{(\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + b \cdot \Delta \lambda^n_i \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}} \quad (7.37)$$

Esta formulação recebe o nome de plana normal atualizada – *updated normal plane*, sendo também conhecida na literatura como método de Ramm (Ramm, 1981). A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & (\delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + b \cdot (\Delta \lambda^n_i \cdot \mathbf{f}^T) (\delta \lambda_i \cdot \mathbf{f}) = 0 \\ & (\delta \mathbf{x}_i)^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_i + b \cdot (\Delta \lambda^n_i \cdot \mathbf{f}^T) (\delta \lambda_i \cdot \mathbf{f}) = 0 \end{aligned} \quad (7.38)$$

o que implica que  $(\delta \mathbf{x}_i, \delta \lambda_i \cdot \mathbf{f})$  é ortogonal a  $(\Delta \mathbf{x}^n_i, \Delta \lambda^n_i \cdot \mathbf{f})$ .

Pode-se conseguir uma simplificação ainda maior em relação ao método de Ramm com a seguinte restrição linearizada:

$$(\Delta \mathbf{x}^n_{i+1})^T (\Delta \mathbf{x}^n_1) + b (\Delta \lambda^n_{i+1}) (\Delta \lambda^n_1) \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \Delta L^2 \quad (7.39)$$

sendo o produto escalar obtido entre os vetores nas iterações atual  $i+1$  e inicial  $1$ . Usando um raciocínio análogo ao método de Ramm, pode-se obter a seguinte correção linearizada para o fator de carga:

$$\delta \lambda_i = - \frac{(\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_1}{(\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_1 + b \cdot \Delta \lambda^n_1 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}} \quad (7.40)$$

Esta formulação recebe o nome de plana normal – *normal plane*, sendo também conhecida na literatura como método de Riks-Wempner (Riks, 1972 e Wempner, 1971). A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_1 + b (\Delta \lambda^n_1 \cdot \mathbf{f}^T) (\delta \lambda_i \cdot \mathbf{f}) &= 0 \\ (\delta \mathbf{x}_i)^T \cdot \Delta \mathbf{x}^n_1 + b (\Delta \lambda^n_1 \cdot \mathbf{f}^T) (\delta \lambda_i \cdot \mathbf{f}) &= 0 \end{aligned} \quad (7.41)$$

o que implica que  $(\delta \mathbf{x}_i, \delta \lambda_i \cdot \mathbf{f})$  é ortogonal a  $(\Delta \mathbf{x}^n_1, \Delta \lambda^n_1 \cdot \mathbf{f})$ .

## 7.5 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO CILÍNDRICOS

Conforme comentado para o método de comprimento de arco esférico, o parâmetro de ponderação  $b=1$ , ou seja, é considerado o mesmo peso para os termos de deslocamento e força no cálculo do comprimento de arco. Uma alternativa comumente utilizada é considerar  $b=0$ . Recordando a restrição do método de comprimento de arco definida na Equação (7.15), pode ver claramente que tomar  $b=0$  equivale a considerar unicamente os deslocamentos na determinação do incremento da solução. Segundo Crisfield (1991), vários pesquisadores comprovaram a pequena influência dos termos de carregamento e um bom funcionamento dos algoritmos com  $b=0$  para uma grande variedade de problemas práticos, sendo estes algoritmos conhecidos pelo nome de comprimento de arco cilíndrico.

Deste modo, uma formulação esférica pode ser transformada em uma formulação cilíndrica simplesmente anulando o parâmetro de ponderação  $b$  na definição dos coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  das Equações (7.31) e (7.32):

$$a_1.(\delta\lambda_i)^2 + a_2.\delta\lambda_i + a_3 = 0 \quad (7.42)$$

sendo:

$$a_1 = (\delta\mathbf{x}_{Ti})^T . \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (7.43a)$$

$$a_2 = 2.(\Delta\mathbf{x}^n_i + \delta\mathbf{x}_{Ri})^T . \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (7.43b)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (\Delta\mathbf{x}^n_i + \delta\mathbf{x}_{Ri})^T . (\Delta\mathbf{x}^n_i + \delta\mathbf{x}_{Ri}) - \Delta L^2 \\ &= (\Delta\mathbf{x}^n_i)^T . \Delta\mathbf{x}^n_i - \Delta L^2 + 2.(\Delta\mathbf{x}^n_i)^T . \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T . \delta\mathbf{x}_{Ri} \\ &= \Delta L^2 - \Delta L^2 + 2.(\Delta\mathbf{x}^n_i)^T . \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T . \delta\mathbf{x}_{Ri} \\ &= 2.(\Delta\mathbf{x}^n_i)^T . \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T . \delta\mathbf{x}_{Ri} \end{aligned} \quad (7.43c)$$

Procedendo de forma análoga com a formulação plana normal atualizada e anulando o termo  $b$  na Equação (7.37), pode-se extrair a seguinte correção linearizada para o fator de carga em uma formulação cilíndrica:

$$\delta\lambda_i = -\frac{(\delta\mathbf{x}_{Ri})^T . \Delta\mathbf{x}^n_i}{(\delta\mathbf{x}_{Ti})^T . \Delta\mathbf{x}^n_i} \quad (7.44)$$

A correção linearizada para o fator de carga na formulação plana normal cilíndrica pode também ser obtida anulando o coeficiente de ponderação  $b$  que aparece na Equação (7.40), resultando na seguinte equação:

$$\delta\lambda_i = -\frac{(\delta\mathbf{x}_{Ri})^T . \Delta\mathbf{x}^n_1}{(\delta\mathbf{x}_{Ti})^T . \Delta\mathbf{x}^n_1} \quad (7.45)$$

### 7.5.1 – Determinação do sinal da predição de $\Delta\lambda$

Em uma formulação cilíndrica, a predição do incremento de carga pode ser obtida tomando o coeficiente de ponderação  $b=0$  na Equação (7.20)

$$\Delta\lambda^n = \pm \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta\mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_T)}} = a \cdot \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta\mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_T)}} \quad (7.46)$$

A definição do sinal da equação acima esta associada a um processo de carga ou descarga da estrutura, que por sua vez esta associado às características da matriz de rigidez. No presente trabalho foi utilizado o seguinte critério nesta definição, segundo Crisfield (1991):

$$a = \text{sgn}(r) \quad \Leftrightarrow \quad r = (\Delta\mathbf{x}_T)^T \cdot \mathbf{f} = (\Delta\mathbf{x}_T)^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{x}_T \quad (7.47)$$

### 7.5.2 – Tamanho do comprimento de arco

A idéia básica na determinação do tamanho do comprimento de arco a ser utilizado é que ele seja grande em regiões com poucas não-linearidades e pequeno em regiões com forte comportamento não-linear. Um mecanismo automático para atualização do comprimento de arco sugerido por Crisfield (1991) é o seguinte:

$$\Delta L^n = \Delta L^{n-1} \cdot \sqrt{\frac{I_d^n}{I^{n-1}}} \quad (7.48)$$

sendo  $\Delta L^{n-1}$  o comprimento de arco no passo  $n-1$ ;  $I^{n-1}$  o número de iterações necessárias para convergir no passo  $n-1$  e  $I_d^n$  o número de iterações desejadas no passo  $n$ , sendo  $I_d^n \approx 3$  segundo Crisfield (1991) e finalmente  $\Delta L^n$  o comprimento de arco a ser utilizado no passo  $n$ . Caso a Equação (7.31) tenha duas raízes complexas, isto indica que não existem intersecções entre a esfera (ou o cilindro) de raio  $\Delta L$  e a trajetória de equilíbrio. Esta situação indica que o comprimento de arco é muito longo e o método perdeu o seu caráter de continuação da resposta, optando-se pela redução do comprimento:

$$\Delta L^{new} = 1/2 \cdot \Delta L \quad (7.49)$$

## 7.6 – DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Existe uma grande quantidade de métodos indiretos na literatura que podem ser utilizados para a detecção de pontos críticos ao longo da trajetória de equilíbrio. O parâmetro de rigidez *CST* – *current stiffness parameter* definido por Bergan (1980) é uma ferramenta bastante eficiente para fornecer uma medida do grau de não-linearidade e detecção de pontos limites. A expressão não normalizada que define o *CST* é a seguinte:

$$k_n = \frac{\mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{x}_T}{\Delta \mathbf{x}_T \cdot \Delta \mathbf{x}_T} \quad (7.50)$$

a partir da qual pode-se obter uma expressão normalizada do parâmetro, dividindo-se o valor atual  $k_n$  pelo seu valor no início do processo de carregamento  $k_0$ :

$$CST = \frac{k_n}{k_0} \quad (7.51)$$

podendo ser observado que, ao se atingir um ponto limite, o *CST* tende a zero enquanto que nos pontos de bifurcação o *CST* assume um valor arbitrário diferente de zero.

Vale a pena ressaltar que o processo de triangularização da matriz de rigidez tangente antes da resolução do sistema de equações também fornece uma outra maneira bastante eficiente para detecção de pontos críticos (limites ou de bifurcação). Segundo Crisfield (1991) e Haugen (1994), o número de pivôs negativos da matriz de rigidez triangularizada é igual ao número de autovalores negativos da matriz de rigidez tangente e portanto, monitorando-se o número de pivôs negativos da matriz de rigidez triangularizada, pode-se detectar a ocorrência de pontos críticos pela alteração do número de pivôs negativos entre dois passos de carga sucessivos. Os pontos nos quais a tangente à trajetória de equilíbrio é vertical, ou seja, paralela ao eixo das cargas são chamados *turning points*. Estes pontos não são considerados pontos críticos e tem menor significado físico, porém, são de grande interesse pelo fato de poderem afetar o desempenho do algoritmo de resolução do sistema. Estes pontos podem ser detectados pelo *CST*, entretanto, não causam alteração no número de pivôs negativos da matriz de rigidez.

## 7.7 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Na resolução do sistema de equações não-lineares foram implementados os métodos de comprimento de arco cilíndrico, método de Riks-Wempner e método de Ramm com formulações cilíndricas ( $b=0$ ), conforme o fluxograma apresentado na Figura 7.2:

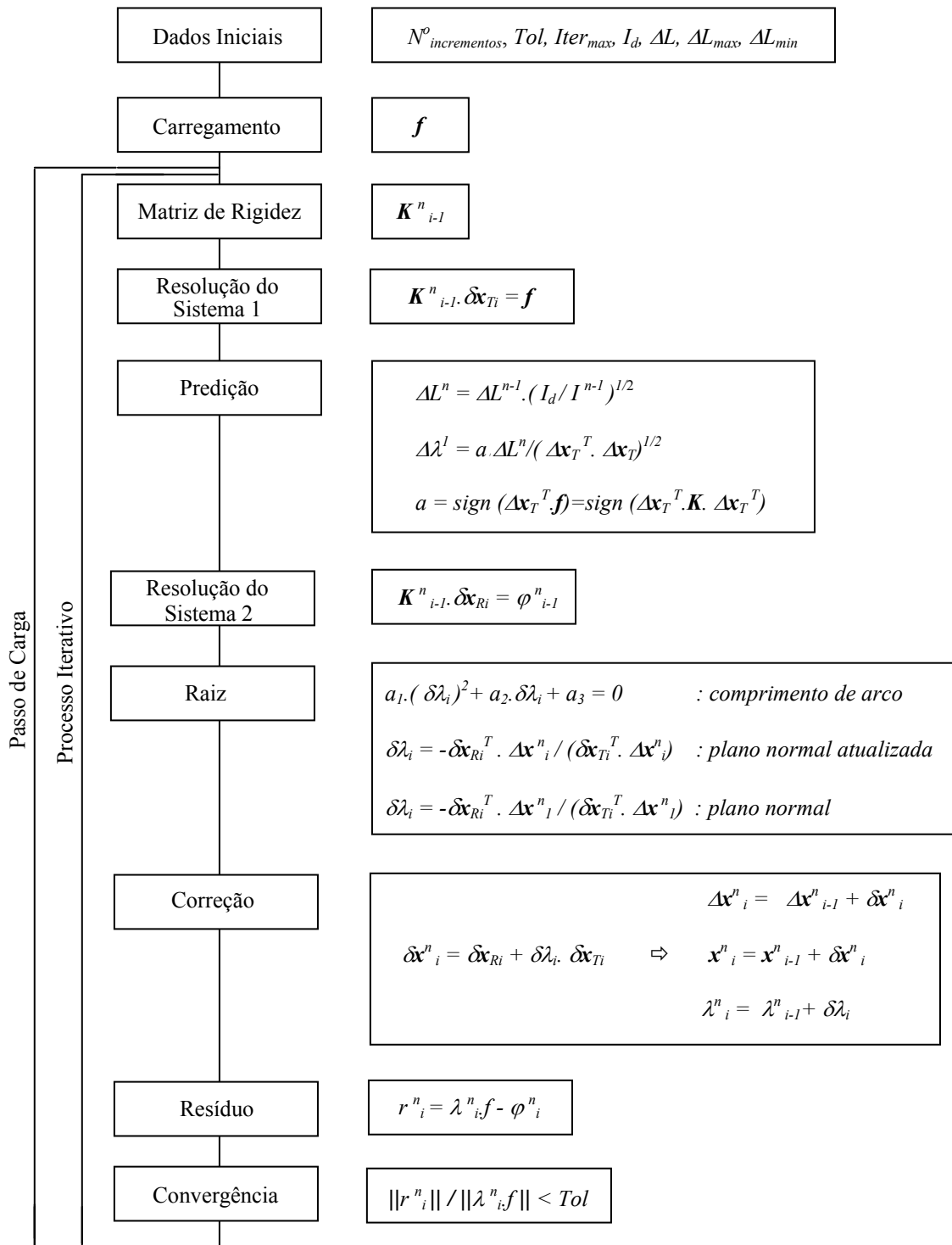


Figura 7.2 – Fluxograma do algoritmo de resolução do sistema de equações.



## 8 – EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, serão apresentados exemplos numéricos da análise não linear geométrica estática de algumas estruturas planas e espaciais, constituídas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas segundo as descrições cinemáticas co-rotacionais (*CR*) apresentadas nos capítulos anteriores, de modo a permitir a avaliação do desempenho da formulação utilizada, bem como a eficiência do algoritmo de continuação da resposta.

Para fazer as análises foram desenvolvidos pelo autor cinco programas computacionais em linguagem *Fortran*, conforme apresentados na Tabela 8.1, observando-se que, para o caso específico dos programas envolvendo elementos de treliça, foi também implementado nos mesmos programas a formulação lagrangiana total (*LT*), conforme descrito por Taylor (2001). De modo a facilitar a visualização das deformadas das estruturas discretizadas por elementos finitos de cascas foi também implementado pelo autor um pós-processador em linguagem *MatLab*, denominado “*def\_config.m*” que permite observar a modificação da geometria da estrutura ao longo do processo de carregamento.

As trajetórias de equilíbrio foram obtidas utilizando o método de comprimento de arco cilíndrico combinado com o método de Newton-Raphson completo descritos no capítulo 7.

Tabela 8.1 – Programas computacionais.

<b>Programa</b>	<b>Elemento</b>	<b>Dimensão</b>	<b>Cinemática</b>	<b>Capítulo</b>
<i>Truss_AL2D</i>	<i>Treliça</i>	<i>2D</i>	<i>CR e LT</i>	2
<i>Truss_AL3D</i>	<i>Treliça</i>	<i>3D</i>	<i>CR e LT</i>	2
<i>Beam_AL2D</i>	<i>Viga</i>	<i>2D</i>	<i>CR</i>	3
<i>Beam_AL3D</i>	<i>Viga</i>	<i>3D</i>	<i>CR</i>	5
<i>Shell_AL</i>	<i>Casca</i>	<i>3D</i>	<i>CR</i>	6

### 8.1 – TRELIÇAS PLANAS E ESPACIAIS

Nesta primeira seção do capítulo, serão apresentados cinco exemplos numéricos de estruturas constituídas por elementos finitos de treliças planas ou espaciais, sendo as mesmas analisadas segundo as formulações co-rotacional (*CR*) e lagrangiana total (*LT*), procurando-se, sempre que possível, detectar pontos de instabilidade através do parâmetro de rigidez *CST* ou pela alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez.

### 8.1.1 – Barra articulada 2D com 1 grau de liberdade

A primeira estrutura analisada corresponde a uma barra articulada com 1 grau de liberdade, cujas características geométricas são apresentadas na Figura 8.1. Esta estrutura foi estudada inicialmente por Crisfield (1991) para o caso de duas situações distintas. Na primeira obtém-se a trajetória de equilíbrio em regime de deformações infinitesimais atribuindo-se os valores  $X = 2500.0$ ,  $Y = 25.0$ ,  $A = 100.0$  e  $E = 5 \times 10^5$  para as propriedades geométricas e mecânicas. Na Figura 8.2 são mostradas as trajetórias de equilíbrio para este primeiro caso, podendo-se observar que a resposta estrutural coincide para as diferentes medidas de deformações utilizadas. Pela trajetória de equilíbrio verifica-se a presença de 2 pontos limites ( $PL$ ), caracterizados por tangentes horizontais, ou seja paralelas ao eixo de deslocamentos, que puderam ser detectados com grande precisão através da anulação do parâmetro de rigidez  $CST$ , conforme apresentado na Figura 8.3.

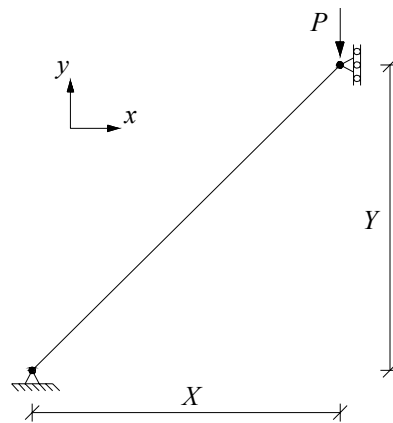


Figura 8.1 – Barra articulada 2D com 1 grau de liberdade.

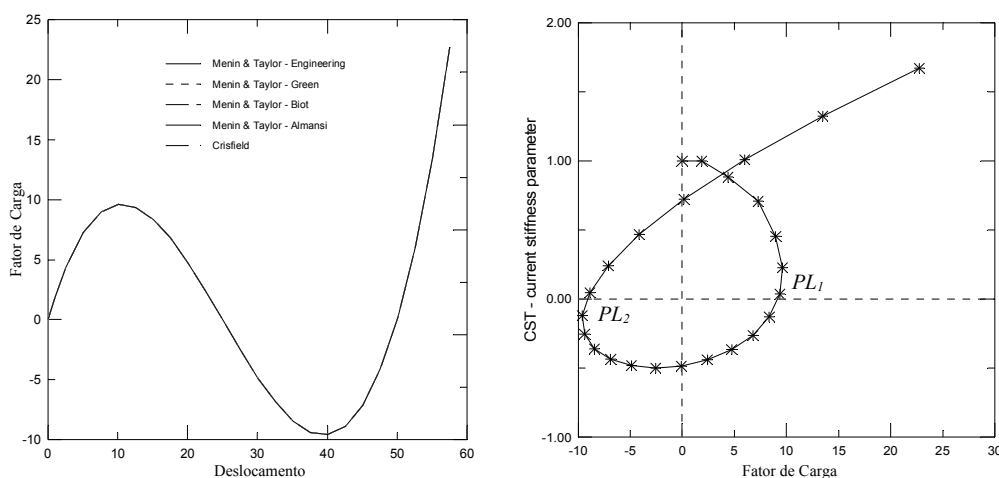


Figura 8.2 – Trajetórias de equilíbrio para deformações infinitesimais.

Figura 8.3 – Gráfico  $CST$  x Fator de Carga para deformações infinitesimais.

Por outro lado, é possível também simular um regime de deformações finitas atribuindo-se os valores  $X = 2500.0$  e  $Y = 2500.0$  para a mesma rigidez axial  $EA = 5 \times 10^7$ . Na Figura 8.4 são mostradas as trajetórias de equilíbrio para este segundo caso, podendo-se observar que foram obtidas distintas trajetórias de equilíbrio para as diferentes deformações utilizadas. Pelas trajetórias de equilíbrio, verifica-se a presença de 2 pontos limites (PL), que também puderam ser detectados com grande precisão através da anulação do parâmetro de rigidez  $CST$ , conforme apresentados na Figura 8.5.

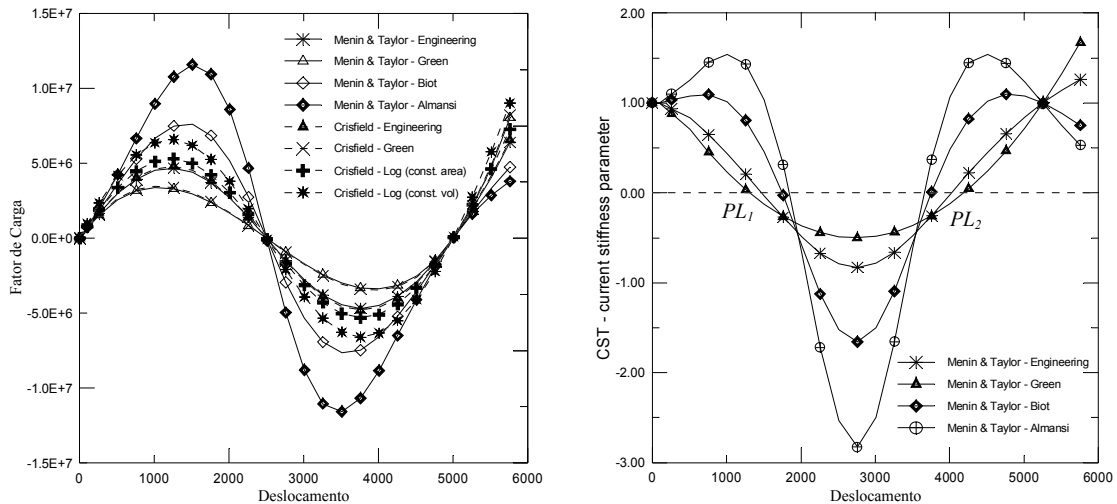


Figura 8.4 – Trajetórias de equilíbrio para deformações finitas.

Figura 8.5 – Gráfico  $CST$  x Deslocamento para deformações finitas.

### 8.1.2 – Arco circular abatido 2D

A segunda estrutura analisada corresponde a um arco circular abatido submetido ao efeito de um carregamento vertical no topo, cujas características mecânicas e geométricas são apresentadas na Figura 8.6.

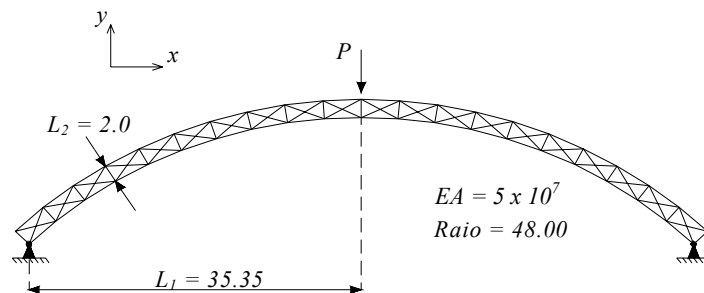


Figura 8.6 – Arco circular abatido 2D.

Esta estrutura apresenta 42 nós e 101 elementos de treliça e foi estudada anteriormente por Crisfield (1997) utilizando uma formulação lagrangiana total (*LT*). Na Figura 8.7 são mostradas as trajetórias de equilíbrio empregando-se distintas medidas de deformações, observando-se uma excelente concordância com os resultados encontrados por Crisfield (1997). Este exemplo foi também analisado por Menin & Taylor (2003<sup>a</sup>) empregando-se uma formulação *LT* combinada com o método incremental-iterativo de Newton-Raphson, para o qual o método divergiu para um fator de carga de aproximadamente  $\lambda \approx 6.27 \times 10^5$ , devido à singularidade da matriz de rigidez na proximidade com o ponto limite. Através das trajetórias de equilíbrio, verifica-se a presença de 1 ponto limite (*PL*) para um fator de carga de  $\lambda \approx 6.78 \times 10^5$ , que pode ser detectado com grande precisão através da anulação do parâmetro de rigidez *CST*, conforme apresentado na Figura 8.8.

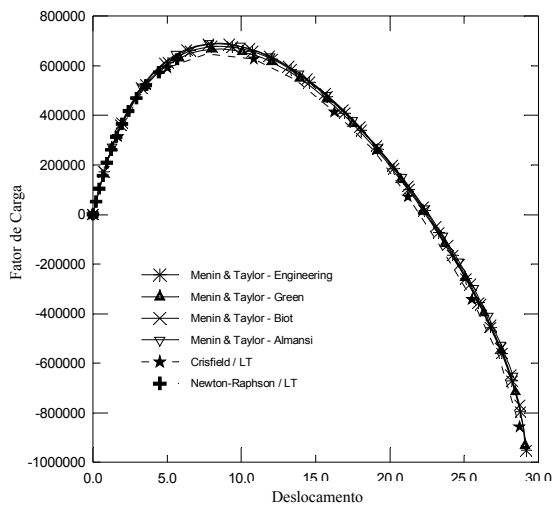


Figura 8.7 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical no topo.

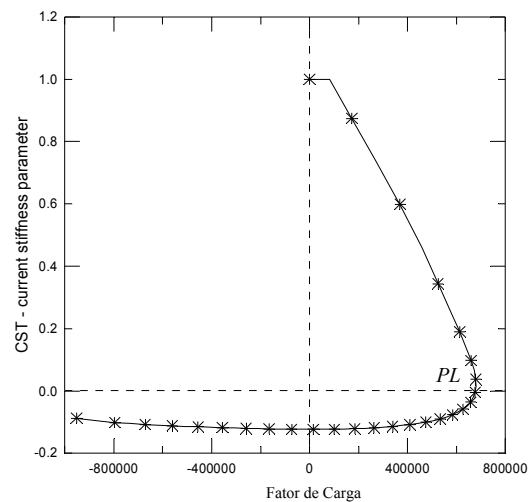


Figura 8.8 – Gráfico *CST* x Fator de Carga.

### 8.1.3 – Estrutura articulada 2D não simétrica

A terceira estrutura analisada corresponde a uma cobertura articulada plana, abatida e não simétrica, cujas características geométricas são apresentadas na Figura 8.9. Esta estrutura foi estudada por Powell & Simons (1981), apresentando 18 nós e 33 elementos de barra, com rigidez axial  $EA = 9.0 \times 10^6$  e está submetida ao efeito de 3 carregamentos nodais *P* de igual magnitude. Na Figura 8.10 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio não linear para o deslocamento vertical do nó 9 utilizando-se diferentes medidas de deformações, juntamente com os resultados encontrados por Powell & Simons (1981).

Todas as diferentes medidas de deformações foram capazes de detectar um comportamento complexo em problemas de instabilidade de estruturas, caracterizado pelo salto para trás (*snap-back*) das trajetórias de equilíbrio e, de uma maneira geral, todas apresentaram comportamentos semelhantes. Porém, as respostas apresentaram uma certa discrepância, em especial nas regiões próximas de pontos limites e na região do *snap-back*.

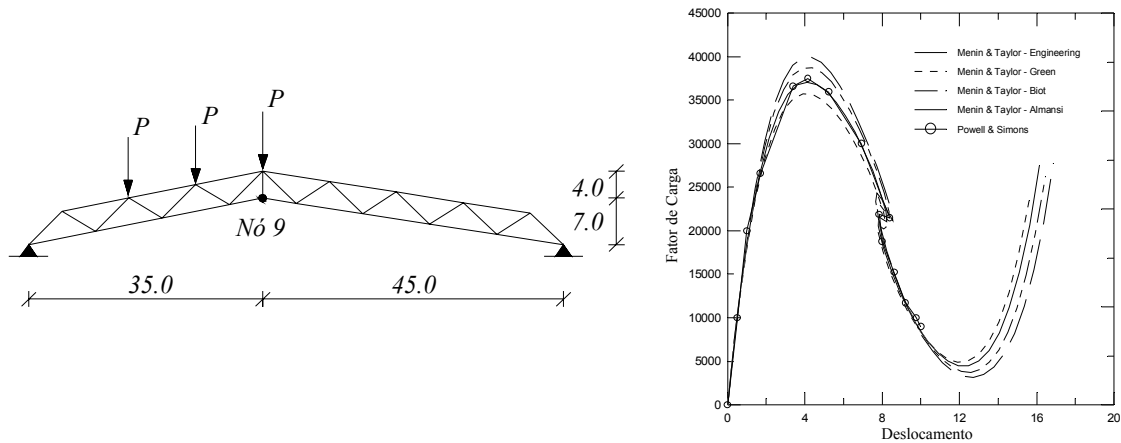


Figura 8.9 – Estrutura articulada 2D não simétrica.

Figura 8.10 – Trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó 9.

Conforme pode ser visualizado pela Figura 8.10, as trajetórias de equilíbrio apresentam pontos limites (*PL*) e *turning points* (*TP*), caracterizados, respectivamente, por tangentes horizontais e verticais. Nas Figuras 8.11 e 8.12, o parâmetro de rigidez *CST* é mostrado em função do deslocamento vertical do nó 9 e do número de passos de carga. Através destas figuras constata-se que o *CST* se anula 6 vezes, sendo 4 correspondentes a pontos limites e 2 referentes a *turning points*.

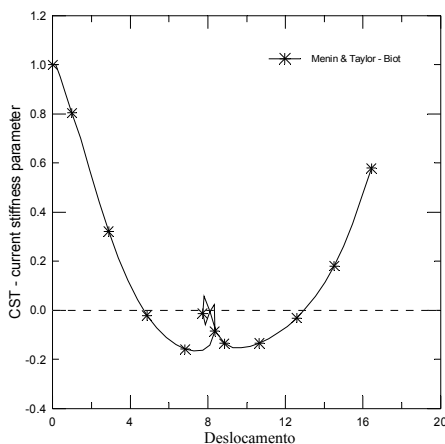


Figura 8.11 – Gráfico *CST* x Deslocamento.

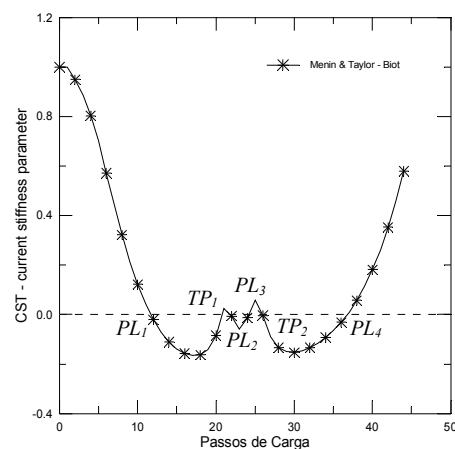


Figura 8.12 – Gráfico *CST* x Passos de Carga.

Uma outra forma de detectar pontos críticos (pontos limites ou de bifurcação) é através da alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente triangularizada entre dois passos de carga sucessivos. Nas Figuras 8.13 e 8.14, o número de pivôs negativos da matriz de rigidez é apresentado em função do deslocamento vertical e do número de passos de carga. Através destas figuras constata-se que o número de pivôs negativos sofreu 4 alterações, correspondendo aos 4 pontos limites (*PL*). Vale a pena ressaltar que a alteração do número de pivôs negativos não detecta *turning points*, uma vez que estes pontos não são considerados pontos críticos.

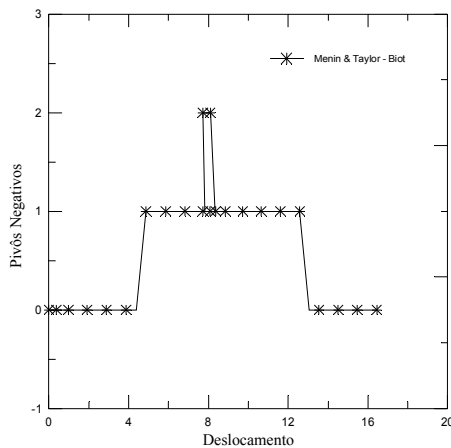


Figura 8.13 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Deslocamento.

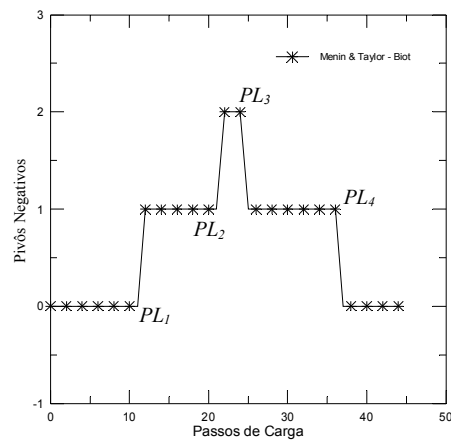


Figura 8.14 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Passos de Carga.

### 8.1.4 – Estrutura articulada 3D em forma de torre esbelta

O quarto exemplo analisado é uma estrutura articulada espacial em forma de torre com imperfeição geométrica, conforme mostrado na Figura 8.15. Esta estrutura foi analisada por Onate (1986) com 13 nós e 36 elementos, estando submetida a um carregamento vertical no seu topo. O modelo apresenta 27 graus de liberdade livres e 12 graus de liberdade restringidos em 4 apoios rotulados na sua base. Todos os elementos de barra possuem a mesma seção, com área  $A = 1.00$  e módulo de elasticidade  $E = 1.00 \times 10^4$ . Na Figura 8.16 são mostradas as trajetórias de equilíbrio não linear para o deslocamento horizontal do topo da estrutura (*nó 1*) na direção horizontal  $x$  utilizando distintas medidas de deformações, podendo-se observar uma excelente concordância nos resultados, bem como em relação aos resultados encontrados por Onate (1986) utilizando uma formulação lagrangiana total (*LT*).

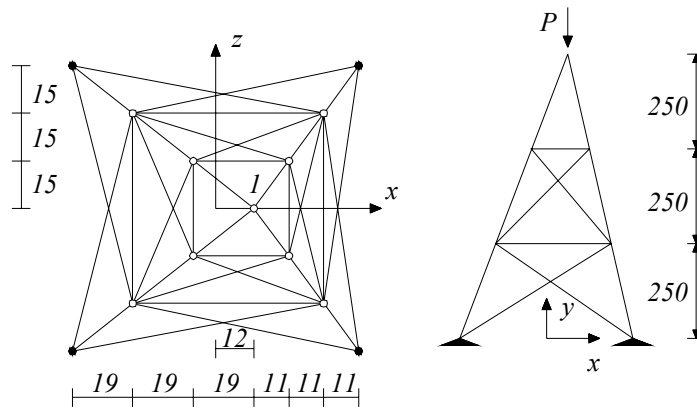


Figura 8.15 – Estrutura articulada 3D em forma de torre esbelta.

Na Figura 8.17, é apresentada a variação do parâmetro de rigidez  $CST$  em relação ao carregamento da estrutura, podendo-se constatar, conforme o esperado, que o  $CST$  anula-se apenas uma vez, correspondendo a um ponto limite que pode ser observado em função da tangente horizontal nas trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 8.16. Através deste parâmetro foi possível detectar a carga crítica da estrutura:  $P_{crit} \approx 90.75$ .

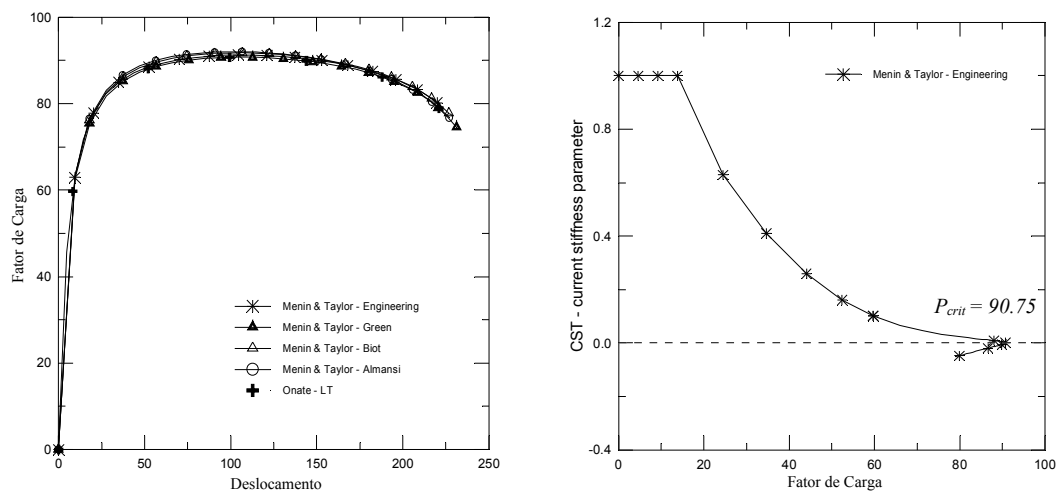


Figura 8.16 – Trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal do topo.

Figura 8.17 – Gráfico  $CST$  x Fator de Carga.

Finalmente, nas Figuras 8.18 e 8.19, o número de pivôs negativos da matriz de rigidez triangularizada é apresentado em função do fator de carga e do deslocamento. Através destes gráficos é possível verificar que ocorreram duas alterações no número de pivôs negativos, sendo a primeira referente a um provável ponto de bifurcação ( $PB$ ) que não será estudado no presente trabalho e a segunda referente ao ponto limite ( $PL$ ) que está associado à carga crítica da estrutura ( $P_{crit}$ ).

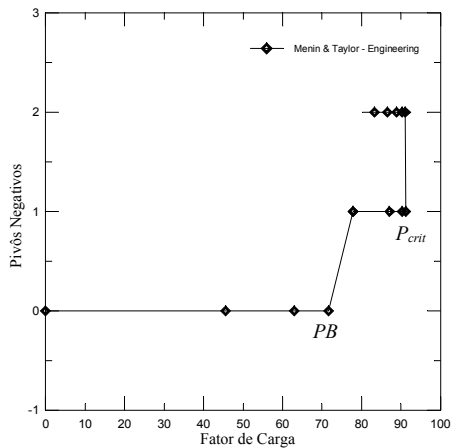


Figura 8.18 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Fator de Carga.

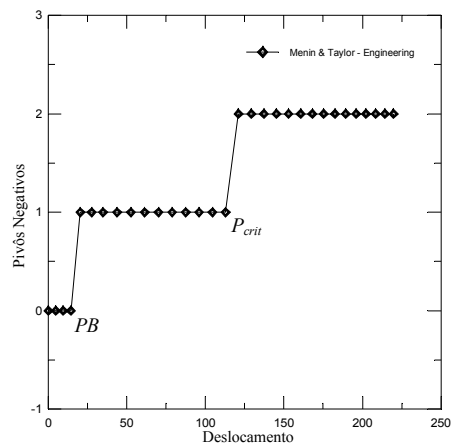


Figura 8.19 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Deslocamento.

### 8.1.5 – Estrutura articulada 3D em forma de cúpula

A quinta estrutura analisada corresponde a uma cúpula espacial estudada por Choong & Hangai (1993) e Taylor (2002), cujas características geométricas são apresentadas na Figura 8.20. Esta estrutura possui 25 nós e 60 elementos, com rigidez axial  $EA=1.0 \times 10^4$  estando submetida ao efeito de 7 carregamentos verticais  $P$  de igual magnitude, aplicados, respectivamente, dos nós 1 ao 7. Na Figura 8.21 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó central utilizando-se diferentes medidas de deformações, observando-se que as respostas são bem semelhantes e apresentando apenas pequenas discrepâncias nas regiões próximas aos pontos limites. Pode também ser observada uma boa concordância em relação aos resultados encontrados por Choong & Hangai (1993) e Taylor (2002).

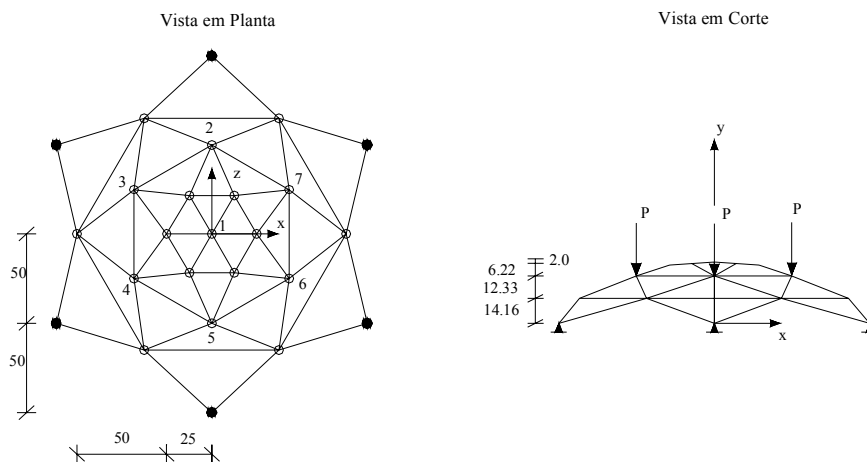


Figura 8.20 – Estrutura articulada 3D em forma de cúpula.



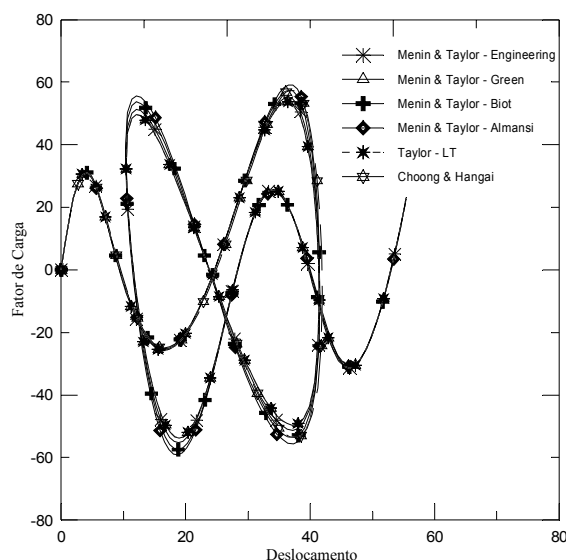


Figura 8.21 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical do nó central

Conforme se pode ver na Figura 8.21, a trajetória de equilíbrio apresenta 8 pontos limites (*PL*) e 2 *turning points* (*TP*). Nas Figuras 8.22 e 8.23, o parâmetro de rigidez *CST* é mostrado em função do deslocamento vertical do nó central e do número de passos de carga. Através destas duas figuras constata-se que o *CST* se anula 10 vezes, sendo 8 correspondentes a pontos limites e 2 referentes a *turning points*.

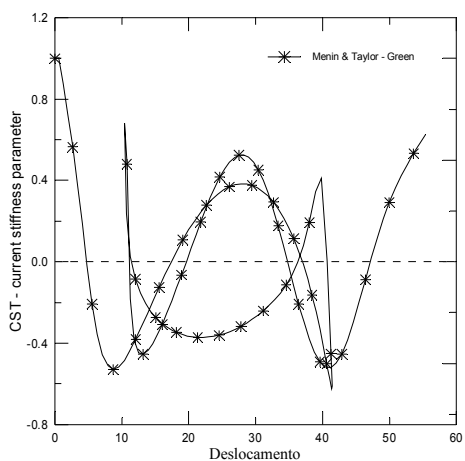


Figura 8.22 – Gráfico *CST* x Deslocamentos.

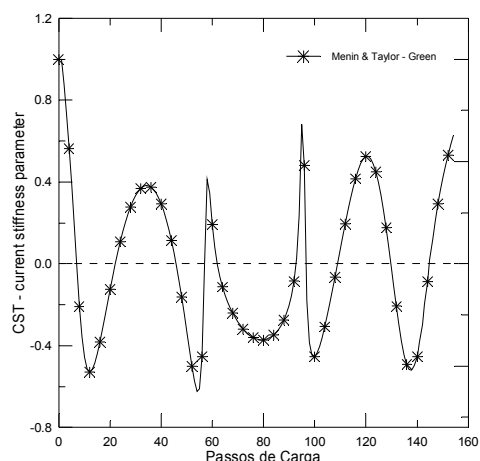


Figura 8.23 – Gráfico *CST* x Passos de Carga.

Nas Figuras 8.24 e 8.25, o número de pivôs negativos é apresentado em função dos deslocamentos e do número de passos de carga, constatando-se que o mesmo sofre 28 alterações, correspondendo aos 8 pontos limites (*PL*) e as demais 20 são referentes a pontos de bifurcação (*PB*). Vale ressaltar que este método indireto não detecta *turning points* e que no presente trabalho não serão obtidas as trajetórias secundárias de equilíbrio.

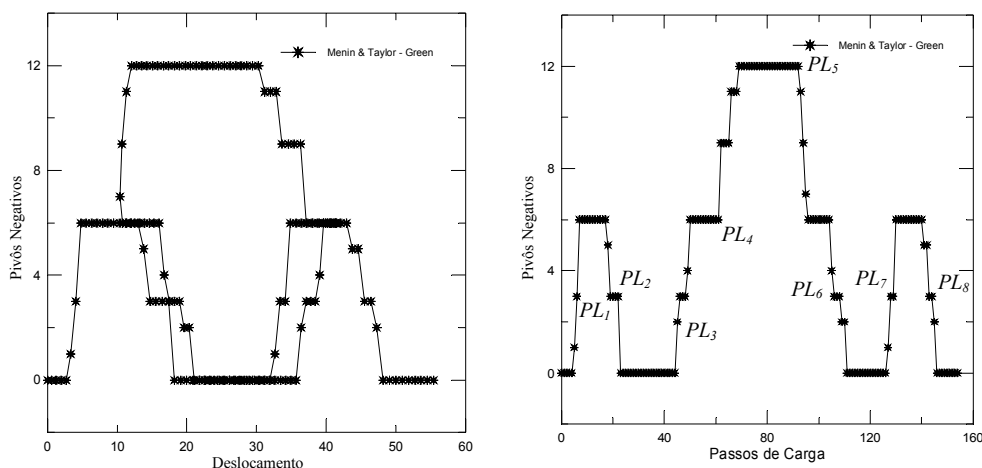


Figura 8.24 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Deslocamentos.

Figura 8.25 – Gráfico Número de Pivôs Negativos x Passos de Carga.

## 8.2 – PÓRTICOS PLANOS E ESPACIAIS

Nesta segunda seção do capítulo, serão apresentados cinco exemplos numéricos de estruturas constituídas por elementos finitos de vigas planas (2D) ou espaciais (3D), segundo as descrições cinemáticas co-rotacionais apresentadas nos capítulos 3 ou 5. Vale a pena enfatizar que os problemas envolvendo estruturas no plano podem ser resolvidos utilizando-se o programa computacional *Beam\_AL2D* (Pórticos Planos) ou o programa *Beam\_AL3D* (Pórticos Espaciais), conforme comentado na Tabela 8.1. Para o caso das estruturas planas estudadas no presente trabalho, todas apresentaram os mesmos resultados quando analisadas com os programas plano e espacial, conforme o esperado. Durante as análises, procurou-se detectar pontos de instabilidade através do parâmetro de rigidez *CST* ou pela alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez.

### 8.2.1 – Viga em balanço com momento fletor na extremidade livre

Este primeiro exemplo corresponde a uma viga em balanço sujeita à flexão pura através da aplicação de um momento fletor positivo (sentido anti-horário) na sua extremidade livre, conforme mostrado na Figura 8.26. Esta estrutura, com comprimento total  $L=1000.0\text{ mm}$ , foi estudada anteriormente por Faria (1998), segundo a formulação lagrangiana total (LT), sendo a mesma discretizada utilizando-se 10 elementos de viga de mesmo comprimento e seção transversal quadrada, com as seguintes propriedades mecânicas:  $E=30.0 \times 10^6\text{ N/mm}^2$ ,  $A=1.0\text{ mm}^2$  e  $I_z=8.333 \times 10^{-2}\text{ mm}^4$ .

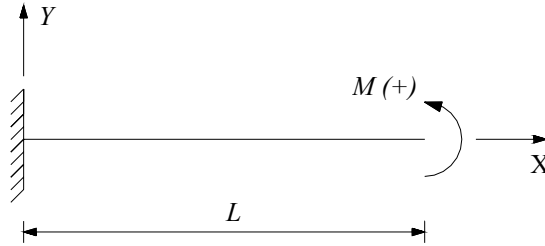


Figura 8.26 – Viga em balanço com momento fletor na extremidade livre.

No trabalho de Faria (1998), a viga foi submetida ao momento fletor  $M=15708.\lambda$ , sendo  $\lambda$  um fator de carga que variou de  $0$  até  $1$ . Quando o momento fletor  $M$  atinge o seu valor máximo de  $15708.0$  ( $\lambda=1$ ), a viga se torna um círculo de diâmetro  $d = L/\pi = 318.31mm$ , conforme pode ser visto na configuração deformada da estrutura na Figura 8.27<sup>(a)</sup>. No caso do presente trabalho, a viga foi submetida a um momento fletor máximo  $M=31416.0$  que corresponde a um fator de carga  $\lambda=2$ , para o qual a viga completa uma segunda volta em torno do eixo  $z$ . Para facilitar a visualização, é mostrada na Figura 8.27<sup>(a)</sup> a configuração deformada da estrutura para a primeira volta completa em torno do eixo  $z$  ( $\lambda=0.00, \dots, 1.00$ ), ao passo que na Figura 8.27<sup>(b)</sup> é mostrada a deformada para a segunda volta completa em torno do eixo  $z$  ( $\lambda=1.00, \dots, 2.00$ ). Este exemplo constitui um teste severo para verificar a eficiência da formulação cinemática e da implementação computacional para o caso de uma análise não linear de estruturas envolvendo grandes deslocamentos e rotações.

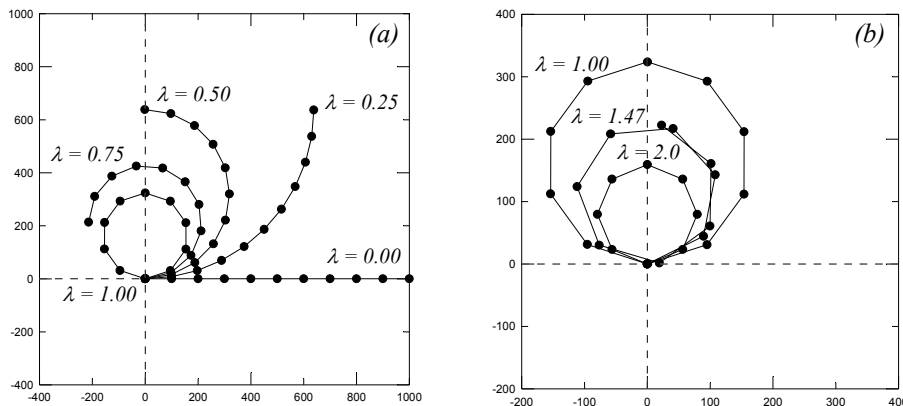


Figura 8.27 – Configurações deformadas da estrutura.

As trajetórias de equilíbrio para a extremidade livre da viga nas direções horizontal ( $U$ ) e vertical ( $V$ ), referentes a um carregamento total  $\lambda=2.0$  são apresentadas de uma forma adimensional na Figura 8.28.

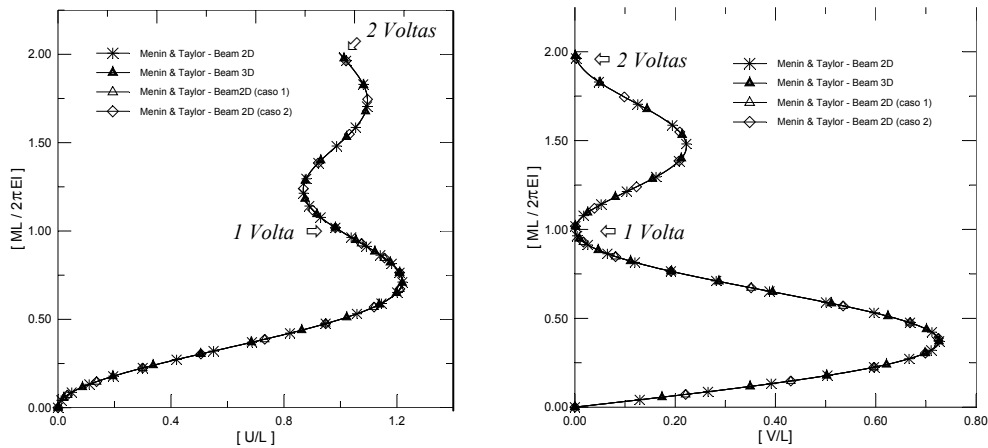


Figura 8.28 – Trajetórias de equilíbrio da extremidade livre da viga.

Nesta figura, são apresentados os resultados utilizando-se o elemento de viga plano com o programa *Beam\_AL2D*, assim como para o elemento de viga espacial com o programa *Beam\_AL3D*, podendo-se constatar uma excelente concordância entre os resultados. São também indicados resultados para dois casos especiais. O caso 1 é referente ao elemento de viga plano, sem a implementação computacional do cálculo da rotação deformacional para rotações totais compreendidas entre  $[n.2\pi]$  e  $[(n+1).2\pi]$ , definida nas Equações (3.49) e (3.50) e dos 6 casos especiais de rotações, definidos nas Equações (3.51) a (3.56), que estão associados à ocorrência simultânea de rotações totais e de corpo rígido no primeiro e quarto quadrantes, podendo ser observado que ao ser completada a primeira volta, o programa passa a divergir, não sendo mais possível obter a continuação da resposta estrutural além do fator de carga  $\lambda=1.0$ . Vale a pena ressaltar que ao se empregar *quatérnios* na obtenção das rotações espaciais no programa *Beam\_AL3D*, não foi mais necessária a implementação destes 6 casos especiais de rotações, que tinham uma grande importância no caso plano (2D), em especial no caso de rotações totais superiores a  $2\pi$ .

Já no caso especial 2, a viga em balanço é colocada na posição vertical, ou seja, alinhada com o eixo global *Y* da Figura 8.26 e, em seguida, é analisada utilizando o programa *Beam\_AL2D*, sendo obtida a mesma resposta estrutural, conforme pode ser visualizado pelas trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 8.28. O caso 2 serve para enfatizar que a implementação computacional do elemento de viga plano no programa *Beam\_AL2D* é capaz de obter os resultados corretos, independentemente da posição inicial da viga, em função do quadrante em que ela se encontra na sua posição indeformada.

## 8.2.2 – Pórtico de Lee

Esta estrutura bastante conhecida na literatura corresponde a um pórtico plano formado pela união entre uma viga e uma coluna, cujas características geométricas são apresentadas na Figura 8.29<sup>(a)</sup>. Este exemplo foi estudado por Cichón (1984), Schweizerhof & Wriggers (1986) e por Hsiao & Hou (1987), sendo cada uma das duas barras discretizada por meio de 10 elementos finitos de viga de mesmo comprimento. As propriedades mecânicas da estrutura são as seguintes:  $A_0=6.0 \text{ cm}^2$ ,  $E=720.0 \text{ kN/cm}^2$  e  $I=2.0 \text{ cm}^4$ .

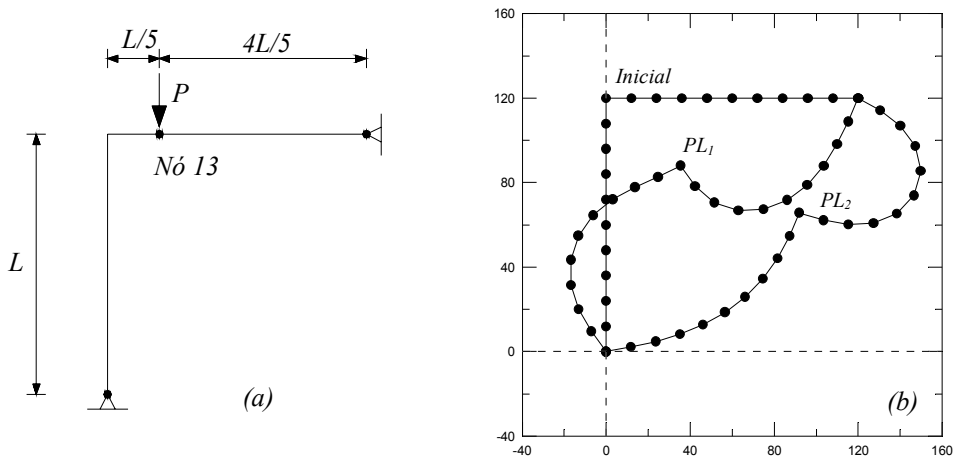


Figura 8.29 – (a) Pórtico de Lee e (b) configurações deformadas.

Na Figura 8.30, são apresentadas as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos nas direções vertical (a) e horizontal (b), referentes ao nó 13, sobre o qual está aplicado o carregamento  $P$ , podendo ser observado uma excelente concordância entre os resultados obtidos utilizando os programas *Beam\_AL2D* e *Beam\_AL3D*, bem como em relação aos resultados apresentados por Cichón (1984) e Hsiao & Hou (1987).

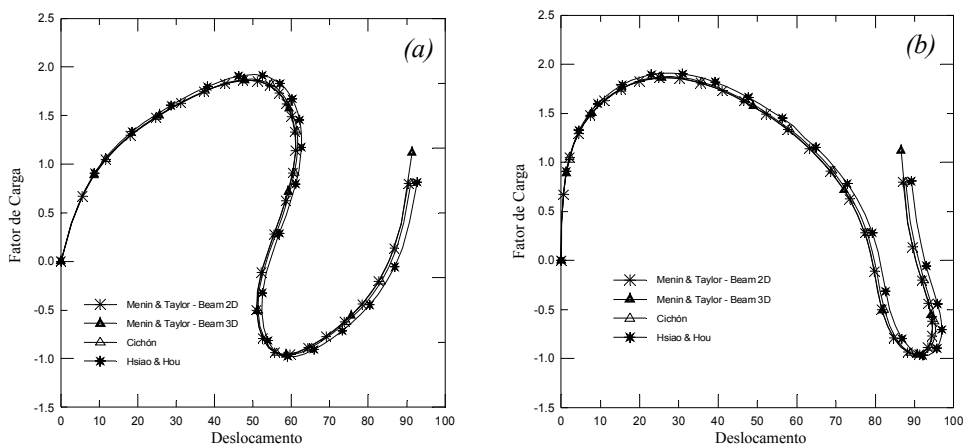


Figura 8.30 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical e horizontal.

De modo a facilitar o entendimento das trajetórias de equilíbrio e obter uma melhor visualização do comportamento pós-crítico da estrutura, são apresentadas na Figura 8.29<sup>(b)</sup>, as configurações deformadas do sistema para os carregamentos referentes aos pontos limites  $PL_1$  e  $PL_2$ , conforme comentado a seguir.

A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical apresenta pontos limites (tangente horizontal) e *turning points* (tangente vertical). Para detectar os pontos limites e *turning points* foi calculado o parâmetro de rigidez  $CST$  – *current stiffness parameter*, que se anula quando estes tipos de pontos são encontrados. Na Figura 8.31, o parâmetro de rigidez  $CST$  é mostrado em função do carregamento e do número de passos de carga. Através destas figuras, constata-se que o  $CST$  se anula 4 vezes, sendo 2 correspondentes a pontos limites e 2 referentes a *turning points*. Verifica-se que o primeiro ponto limite ( $PL_1$ ) ocorre para um carregamento  $P = 1.857 \text{ kN}$  e o segundo ponto limite ( $PL_2$ ) ocorre para  $P = -0.950 \text{ kN}$ . O carregamento referente à  $PL_1$  é muito próximo ao valor apresentado por Schweizerhof & Wriggers (1986) que é de  $1.851 \text{ kN}$ , que entretanto não forneceu o valor referente à  $PL_2$ .

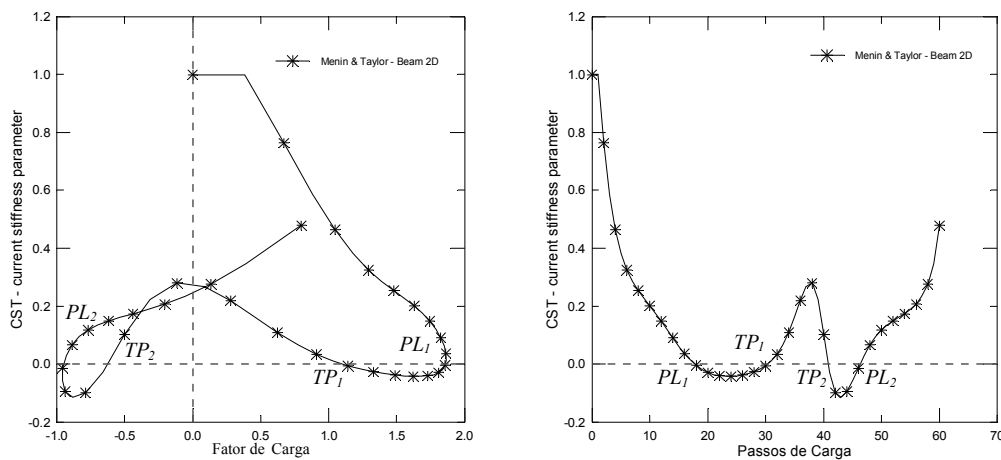


Figura 8.31 – Parâmetro de rigidez  $CST$  em função do fator e passos de carga.

Finalmente, na Figura 8.32, o número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente é apresentado em função do deslocamento vertical e do número de passos de carga. Através desta figura, pode ser constatado que o número de pivôs negativos apresentou 2 alterações, correspondendo aos 2 pontos limites ( $PL$ ). Vale a pena ressaltar, mais uma vez, que a alteração do número de pivôs negativos não detecta *turning points*, uma vez que estes pontos não são considerados pontos críticos.

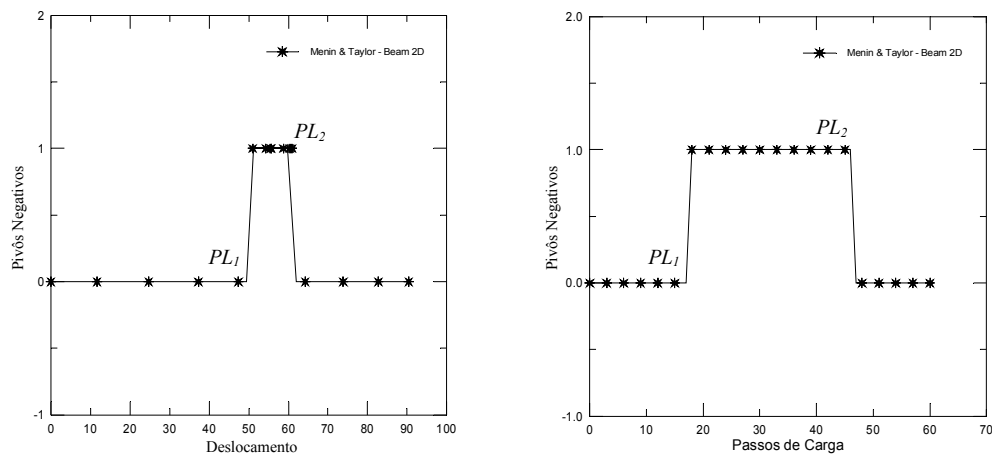


Figura 8.32 – Número de pivôs negativos em função dos deslocamentos e passos de carga.

### 8.2.3 – Arcos circulares de grande altura

A terceira estrutura analisada corresponde a um arco circular de grande altura, submetido à ação de uma carga vertical no ápice, conforme mostrado na Figura 8.33, com  $R=100\text{ cm}$ , assumindo-se, inicialmente, duas condições de contorno distintas (arco biengastado ou arco rotulado-engastado), em função das quais o arco apresenta diferentes comportamentos pós-críticos. A estrutura foi discretizada utilizando-se 20 elementos de mesmo comprimento, cujas propriedades mecânicas são expressas por:  $EA_0=1.0 \times 10^6\text{ N}$  e  $EI=1.0 \times 10^6\text{ N.cm}^2$ .

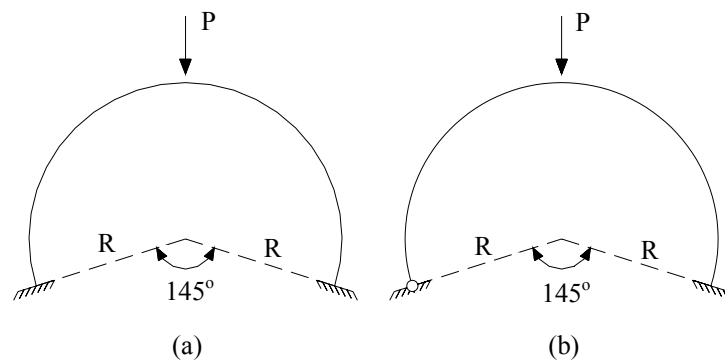


Figura 8.33 – (a) Arco biengastado e (b) Arco rotulado-engastado.

Na Figura 8.34, são apresentadas as trajetórias de equilíbrio não linear para o deslocamento vertical do nó central para os arcos biengastado e rotulado-engastado, podendo-se verificar que no caso do arco biengastado a trajetória de equilíbrio apresenta apenas pontos limites (tangentes horizontais).

Já para o caso do arco rotulado-engastado, ocorrem pontos limites e *turning points* (tangentes verticais), entre os quais ocorre uma acentuada queda da rigidez da estrutura na fase pós-crítica. Para os dois casos, pode-se verificar uma boa concordância em relação aos resultados encontrados por Faria (1998), Battini (2002) e Wagner (1991), assim como entre os resultados obtidos utilizando-se os programas *Beam\_AL2D* e *Beam\_AL3D*.

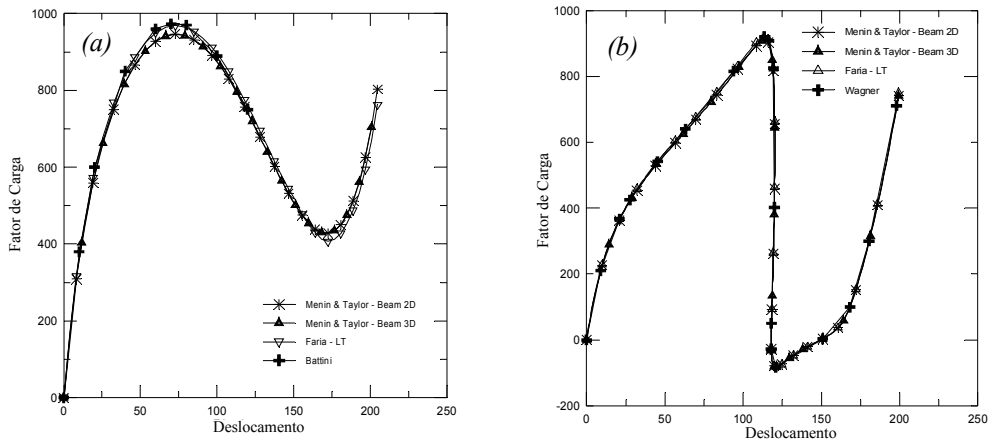


Figura 8.34 – Trajetórias de equilíbrio do arco biengastado (a) e rotulado-engastado (b).

Na detecção de pontos limites (*PL*) e *turning points* (*TP*), foi utilizado o parâmetro de rigidez *CST*. Na Figura 8.35 o parâmetro de rigidez *CST* é apresentado em função do fator de carga, podendo ser observado que o mesmo se anula 2 vezes para o arco biengastado, correspondendo aos 2 pontos limites  $PL_1$  e  $PL_2$ , ao passo que para o caso do arco rotulado-engastado, o *CST* se anula 4 vezes, correspondendo aos dois pontos limites  $PL_1$  e  $PL_2$  e dois *turning points*  $TP_1$  e  $TP_2$ .

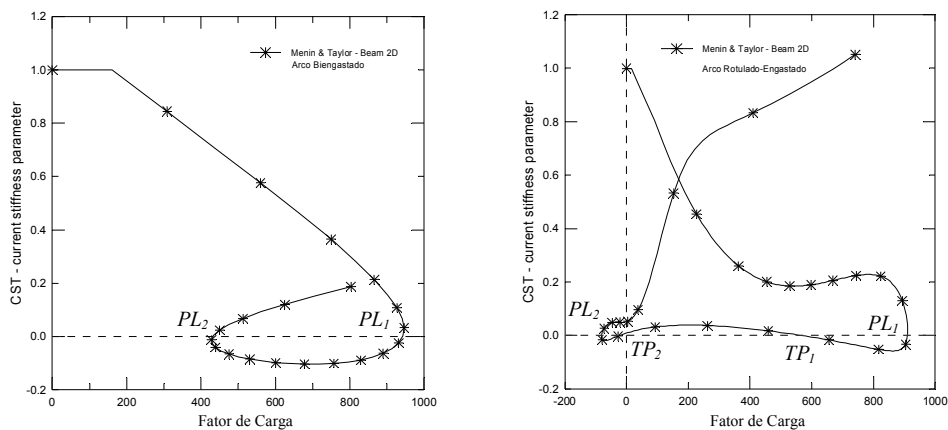


Figura 8.35 - *CST* x Fator de Carga do arco biengastado (a) e rotulado-engastado (b).



Com o auxílio da Figura 8.35, é possível calcular os valores dos carregamentos nos quais ocorrem os pontos limites para os dois arcos, sendo estes valores mostrados na Tabela 8.2, juntamente com os resultados encontrados por Wriggers & Simo (1990) e Faria (1998).

Tabela 8.2 – Cargas críticas dos arcos biengastado e rotulado-engastado.

Condição de Contorno	Biengastado		Rotulado-Engastado	
	PL <sub>1</sub>	PL <sub>2</sub>	PL <sub>1</sub>	PL <sub>2</sub>
Menin & Taylor	941.65	432.65	910.22	-81.60
Faria (1998)	965.14	410.25	921.05	-87.42
Wriggers & Simo (1990)	972.90	407.20	-	-

Para facilitar o entendimento das trajetórias de equilíbrio e obter uma melhor visualização das diferenças no comportamento pós-crítico da estrutura ao se variar as condições de contorno, são apresentadas na Figura 8.36 as configurações deformadas do sistema para os carregamentos referentes aos pontos limites  $PL_1$  e  $PL_2$ , conforme indicados anteriormente na Tabela 8.2. Ao se observar as deformadas das estruturas, verifica-se que no caso do arco biengastado, a estrutura sofre deformações simétricas, ao passo que o arco rotulado-engastado sofre uma grande diminuição da rigidez acompanhada de deformações não simétricas. Analisando-se as trajetórias de equilíbrio e os carregamentos correspondentes aos pontos limites na Tabela 8.2, pode-se ver, claramente, que o fato de substituir um engaste por uma rótula no apoio esquerdo leva a uma grande diminuição da rigidez na fase pré-crítica, ou seja, anterior ao ponto limite  $PL_1$ , conduzindo a uma diminuição da capacidade resistente da estrutura em cerca de  $31.43 N$  e um grande aumento nos deslocamentos, acompanhados por uma forte não linearidade na fase pós-crítica entre os 2 *turning points*, além de deformações não simétricas desde o início do carregamento.

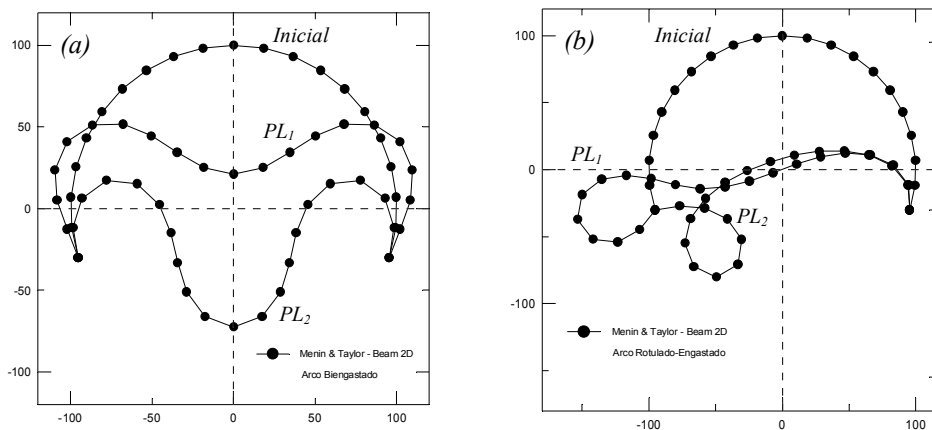


Figura 8.36 – Configurações deformadas do arco biengastado (a) e rotulado-engastado (b).

Em uma terceira simulação numérica, será considerado um arco bi-rotulado, utilizando as mesmas propriedades mecânicas e geométricas definidas anteriormente. Nesta simulação, o arco será, inicialmente, submetido ao efeito de uma carga vertical  $P$  no ápice, conforme Figura 8.37, sendo obtida uma trajetória de equilíbrio primária, caracterizada por uma diminuição da rigidez até atingir um ponto limite  $PL_1$  indicado na Figura 8.38.

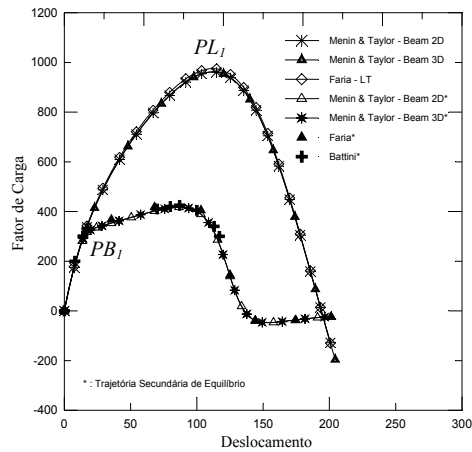
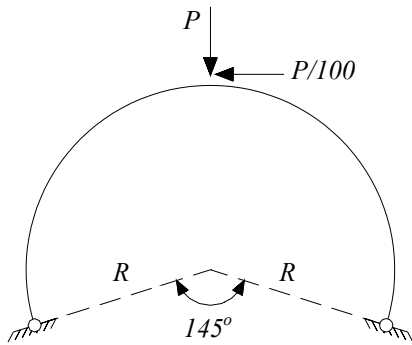


Figura 8.37 – Arco circular bi-rotulado.

Figura 8.38 – Trajetórias de equilíbrio primária e secundária para arco bi-rotulado.

O ponto limite  $PL_1$  da trajetória primária pode ser detectado com grande precisão utilizando-se o parâmetro de rigidez  $CST$  e pela alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente triangularizada, conforme pode ser observado na Figura 8.39. Pode também ser constatada uma alteração do número de pivôs negativos para um carregamento de  $337.94\text{ N}$ , correspondendo a um ponto de bifurcação  $PB_1$ .

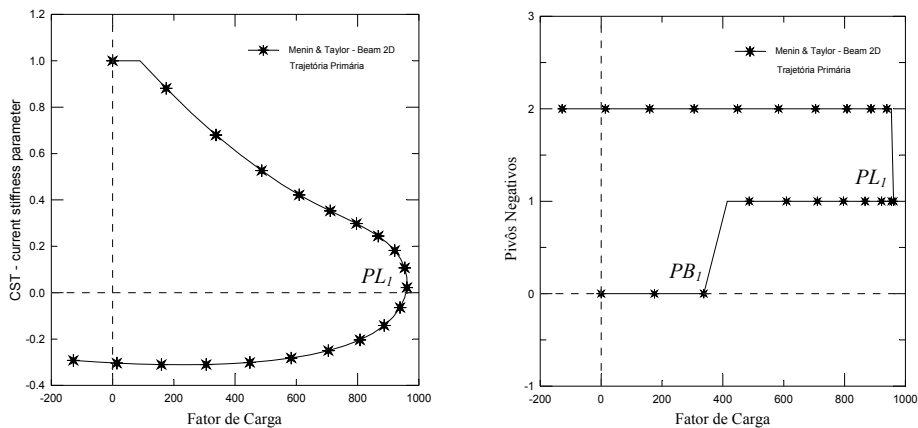


Figura 8.39 – Parâmetro de rigidez  $CST$  e número de pivôs negativos.

Para obter uma trajetória secundária de equilíbrio, aplicou-se uma carga de perturbação horizontal  $P/100$  no topo da estrutura, juntamente com a carga vertical  $P$ , conforme pode ser observado na Figura 8.37. Com a aplicação da carga de perturbação horizontal, a estrutura segue a trajetória primária até o ponto de bifurcação  $PB_1$ , a partir do qual ela passa a seguir a trajetória secundária de equilíbrio, conforme mostrado na Figura 8.38. Nas duas trajetórias foi observada uma grande concordância em relação aos resultados encontrados por Faria (1998) e Battini (2002). Com o auxílio da Figura 8.39, é possível calcular os valores dos carregamentos nos quais ocorrem o ponto limite ( $PL_1$ ) e o ponto de bifurcação ( $PB_1$ ), sendo estes valores apresentados na Tabela 8.3, juntamente com os resultados encontrados por Wriggers & Simo (1990) e Faria (1998).

Tabela 8.3 – Cargas críticas do arco bi-rotulado.

Condição de Contorno	Bi-rotulado		
	Autor	$PB_1$	$PL_1$
	Menin & Taylor	337.94	960.83
	Faria (1998)	336.97	974.21
	Wriggers & Simo (1990)	334.90	-

Para obter uma melhor visualização das diferenças no comportamento pós-crítico da estrutura, são apresentadas na Figura 8.40 as configurações deformadas do sistema para os carregamentos referentes aos pontos críticos  $PL_1$  e  $PB_1$ . De acordo com estas deformadas, se observa que o arco apresenta instabilidade de equilíbrio em duas formas distintas: uma deformada simétrica para uma carga  $PL_1 = 960.83 N$  (trajetória primária) e uma deformada não simétrica com bifurcação de equilíbrio para uma carga  $PB_1 = 337.94 N$  (trajetória secundária).

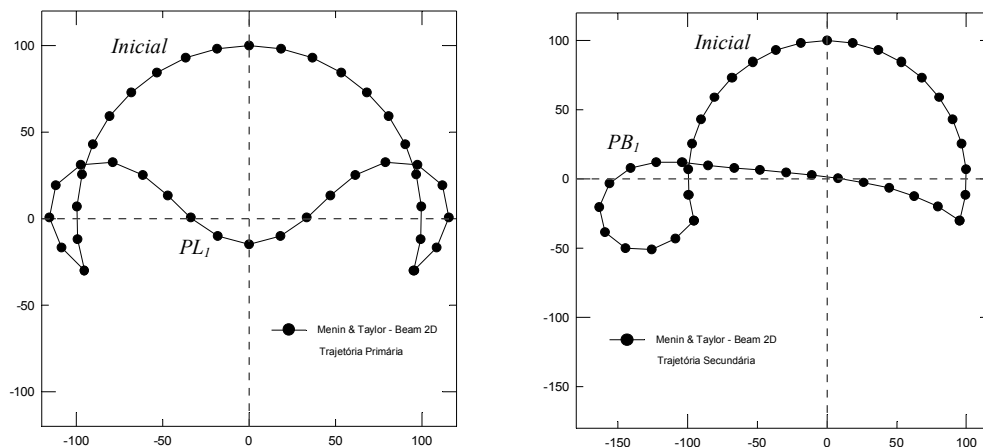


Figura 8.40 – Configurações deformadas do arco bi-rotulado.

### 8.2.4 – Viga engastada espacial com curvatura de 45 graus

Neste exemplo, uma viga engastada e livre, inicialmente curva e com seção transversal quadrada é submetida ao efeito de um carregamento na direção vertical  $P=600$ , aplicado na sua extremidade livre. A estrutura foi discretizada utilizando-se 8 elementos finitos de viga de igual comprimento, sendo as configurações inicial e deformada, juntamente com as propriedades mecânicas e geométricas apresentadas na Figura 8.41.

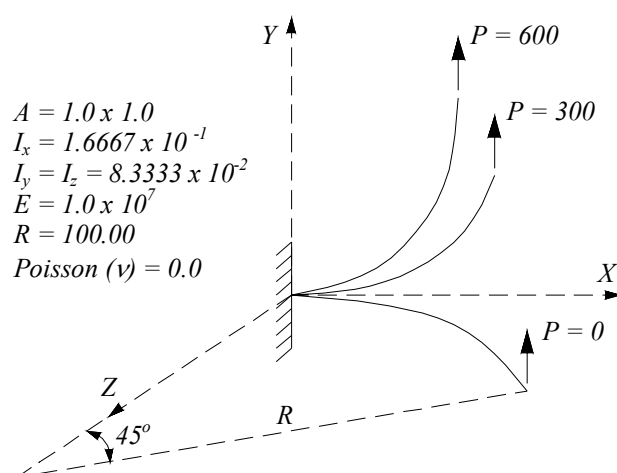


Figura 8.41 – Configurações inicial e deformada e propriedades da estrutura.

A estrutura foi submetida a um carregamento máximo  $P=600$ , conforme comentado anteriormente, utilizando-se 21 incrementos de carga no método de comprimento de arco cilíndrico combinado com o método de Newton Raphson. Na Tabela 8.4, são apresentados os deslocamentos da extremidade livre da viga para os carregamentos  $P$  de 300, 450 e 600, nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Nesta tabela, são também apresentados valores encontrados por outros autores, tais como: Simo & Vu-Quoc (1986) e Cole (1990), podendo-se observar uma grande concordância nos resultados entre todos os autores.

Tabela 8.4 – Deslocamentos da extremidade livre da viga.

Carregamento	P=300			P=450			P=600		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
Menin & Taylor	-11.90	40.19	-7.02	-18.43	48.53	-10.74	-23.52	53.50	-13.56
Simo & Vu-Quoc	-11.87	40.08	-6.96	-18.39	48.39	-10.67	-23.48	53.37	-13.50
Cole	-11.95	40.25	-7.01	-18.50	48.58	-10.73	-23.61	53.58	-13.55

Na Figura 8.42, são apresentadas as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  na extremidade livre da viga, respectivamente, nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Nesta mesma figura, são também mostradas as trajetórias de equilíbrio em uma forma adimensional, sendo  $K\_Deslocamento = deslocamento/R$  e  $K\_Carga = PR^2/EI$ , juntamente com os resultados apresentados por Surana & Sorem (1989), observando-se uma excelente concordância.

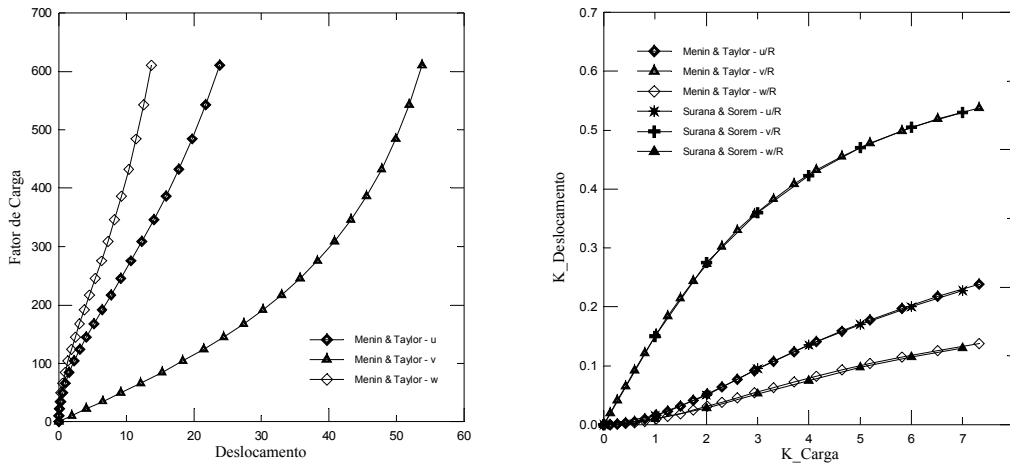


Figura 8.42 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamentos da extremidade da viga.

### 8.2.5 – Estrutura espacial abatida em forma de cúpula

Este exemplo corresponde a uma cúpula espacial analisada por Hsiao et al. (1987), cujas características geométricas e mecânicas são apresentadas na Figura 8.43. A estrutura possui 13 nós e 24 elementos de viga com a mesma seção transversal. Os apoios desta estrutura são considerados rotulados, ou seja, restringindo apenas os movimentos de translação em todas as direções.

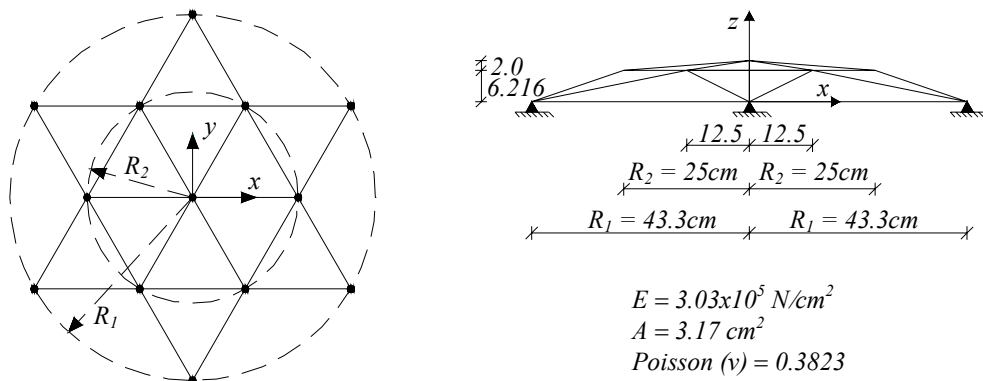


Figura 8.43 – Estrutura espacial abatida em forma de cúpula.

Esta estrutura será analisada considerando-se 3 casos distintos, nos quais serão feitas alterações nas condições de carregamento e nos momentos de inércia da seção transversal. No primeiro caso, a condição de carregamento considerada é representada por uma carga vertical  $P$  no topo da estrutura, com as inércias da seção transversal definidas na Figura 8.44. A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó central é apresentada na Figura 8.44, juntamente com o resultado encontrado por Hsiao et al. (1987).

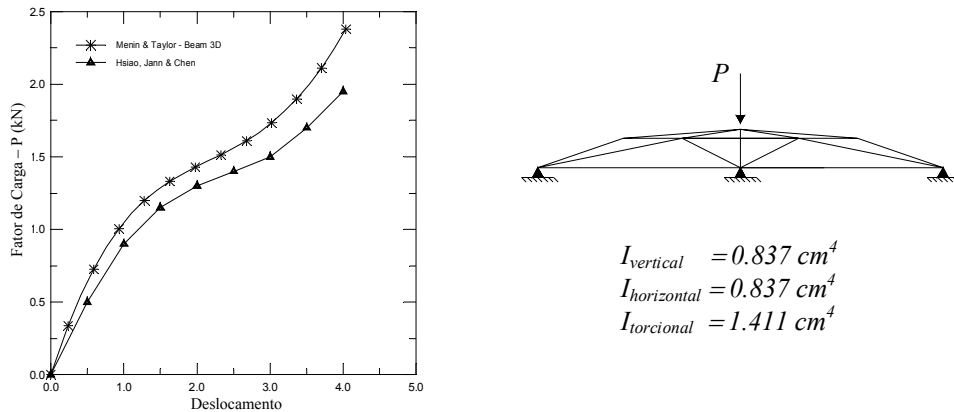


Figura 8.44 – Trajetórias de equilíbrio, carregamento e momentos de inércia (caso1).

No segundo caso, a condição de carregamento considerada também é representada por uma carga vertical  $P$  no topo da estrutura, porém, são feitas alterações nos momentos de inércia, mantendo-se a mesma área da seção transversal e reduzindo-se a rigidez à flexão na direção vertical, com as novas inércias da seção transversal definidas na Figura 8.45. A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó central é apresentada na Figura 8.45, juntamente com o resultado encontrado por Hsiao et al. (1987).

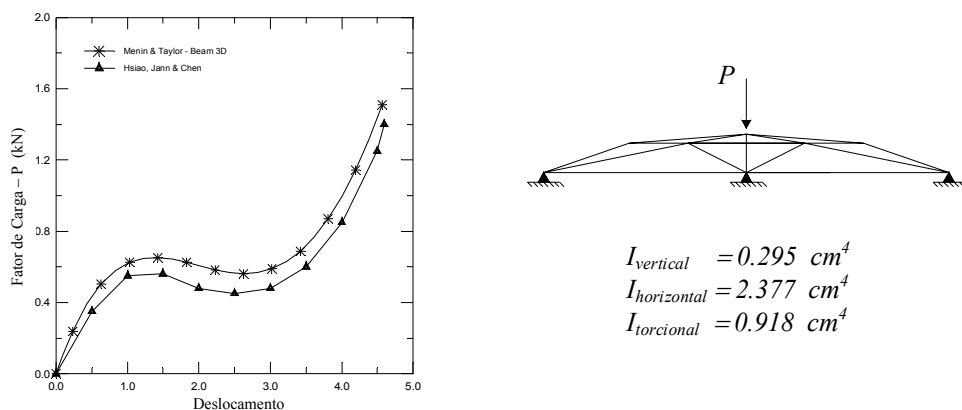


Figura 8.45 – Trajetórias de equilíbrio, carregamento e momentos de inércia (caso2).

A trajetória de equilíbrio para o caso 2 apresenta dois pontos limites ( $PL$ ), que puderam ser detectados com grande precisão utilizando-se o parâmetro de rigidez  $CST$  e pela alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente, conforme pode ser observado na Figura 8.46.

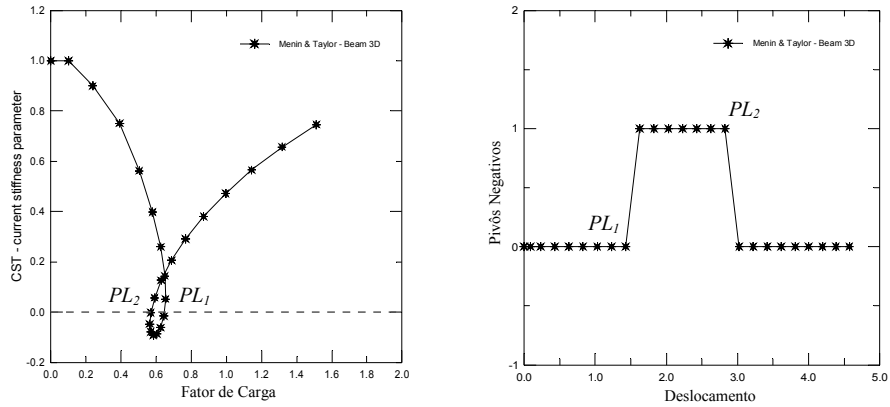


Figura 8.46 – Parâmetro de rigidez  $CST$  e número de pivôs negativos (caso 2).

No terceiro caso, a estrutura é submetida a um carregamento simétrico, conforme mostrado na Figura 8.47, com os mesmos momentos de inércia definidos para o caso 2. A trajetória de equilíbrio para o caso 3 é apresentada na Figura 8.47, juntamente com o resultado encontrado por Hsiao et al. (1987).

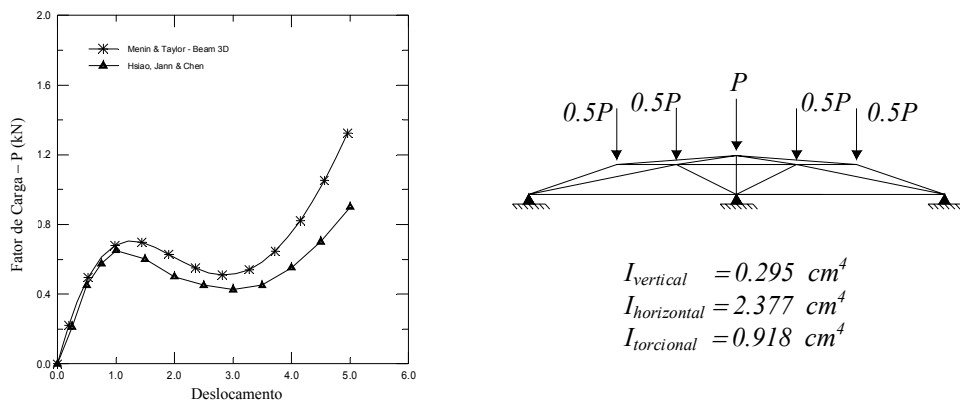


Figura 8.47 – Trajetórias de equilíbrio, carregamento e momentos de inércia (caso3).

De forma similar ao caso 2, a trajetória de equilíbrio para o caso 3 apresenta dois pontos limites ( $PL$ ), que também puderam ser detectados com grande precisão utilizando-se o parâmetro de rigidez  $CST$  e pela alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente, conforme pode ser observado na Figura 8.48.

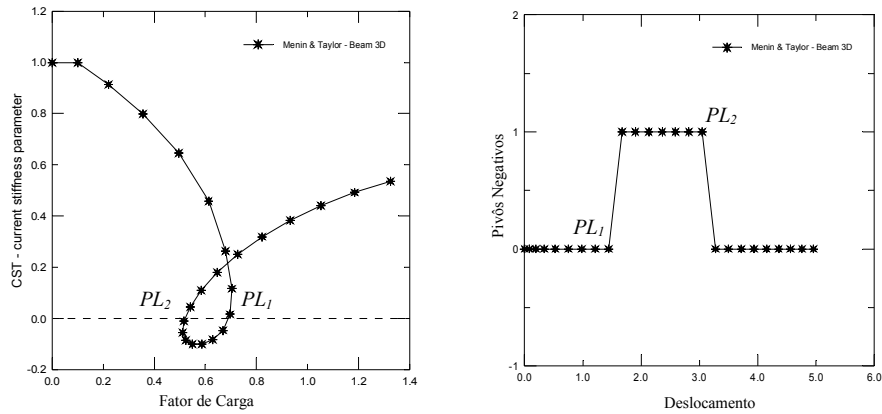


Figura 8.48 – Parâmetro de rigidez  $CST$  e número de pivôs negativos (caso 3).

De uma maneira geral, as trajetórias de equilíbrio obtidas no presente trabalho para todos os três casos analisados apresentaram um comportamento bastante semelhante às obtidas por Hsiao et al. (1987), porém, com a presente formulação, as estruturas se mostraram um pouco mais rígidas do que com a formulação não linear de Hsiao et al. (1987).

### 8.3 – ESTRUTURAS DE CASCAS

Nesta terceira seção do capítulo, serão apresentados oito exemplos numéricos de estruturas representadas por vigas, placas, cilindros ou esferas, sendo as mesmas discretizadas por elementos finitos de cascas planos e triangulares, segundo a descrição cinemática co-rotacional apresentada no capítulo 6, utilizando-se o programa computacional *Shell\_AL*. Durante as análises procurou-se, sempre que possível, detectar pontos de instabilidade através do parâmetro de rigidez  $CST$  ou pela alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente.

Foram criados programas computacionais auxiliares (pré-processadores) de geração automática da malha de elementos finitos, referentes à configuração inicial de cada uma das estruturas. Estes programas permitiram o estudo do comportamento destas estruturas para diferentes malhas, desde as mais grosseiras até as mais refinadas. Serão também apresentadas as deformadas ao longo do processo de carregamento, utilizando o pós-processador “*def\_config.m*” gerado em linguagem Matlab.



### 8.3.1 – Viga em balanço com momento fletor na extremidade livre

Este primeiro exemplo corresponde a uma viga em balanço sujeita à flexão pura através da aplicação de um momento fletor na sua extremidade livre, conforme apresentado na Figura 8.49. Esta estrutura foi estudada por Haugen (1994), segundo a formulação co-rotacional, utilizando elementos finitos de cascas triangulares e quadrangulares. No caso do presente trabalho, a viga foi discretizada utilizando-se uma malha retangular  $2 \times 5$ , contendo 20 elementos finitos de cascas planos e triangulares.

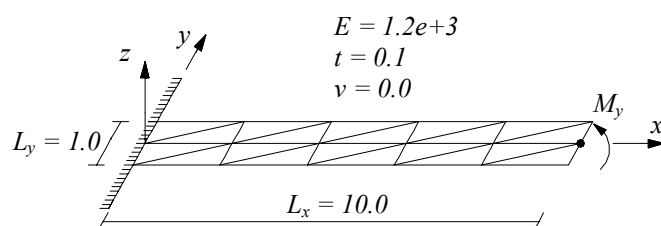


Figura 8.49 – Viga em balanço com momento fletor na extremidade livre.

A viga foi submetida ao efeito de um momento fletor  $M_y = (2\pi/100) \cdot \lambda$ , sendo  $\lambda$  um fator de carga que variou de 0 até 2, para o qual a viga completa duas voltas em torno do eixo  $y$ . Na Figura 8.50, são apresentadas as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos horizontal (a) e vertical (b) da extremidade livre da viga, utilizando-se o elemento finito de casca, juntamente com os resultados obtidos utilizando-se o elemento de viga plano com o programa *Beam\_AL2D*, o elemento de viga espacial com o programa *Beam\_AL3D*, assim como os resultados encontrados por Haugen (1994), podendo-se constatar uma excelente concordância entre os mesmos.

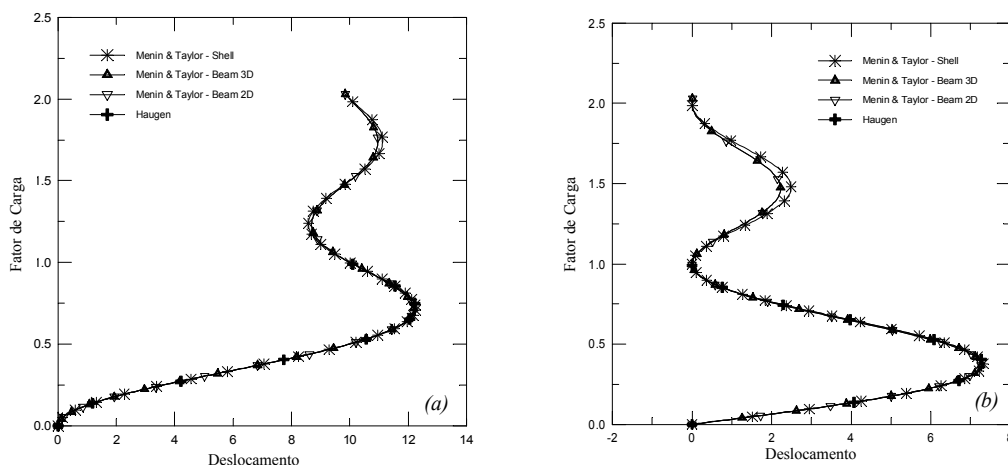


Figura 8.50 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamentos na extremidade da viga.

A seguir, são mostradas na Figura 8.51 algumas configurações deformadas da estrutura para a primeira volta completa em torno do eixo  $y$  ( $\lambda=0.00, \dots, 1.00$ ), utilizando-se uma malha retangular  $1 \times 10$ , contendo 20 elementos finitos para discretizar a viga. Este exemplo constitui um teste severo para verificar a eficiência da formulação para o caso de uma análise não linear de estruturas envolvendo grandes deslocamentos e rotações.

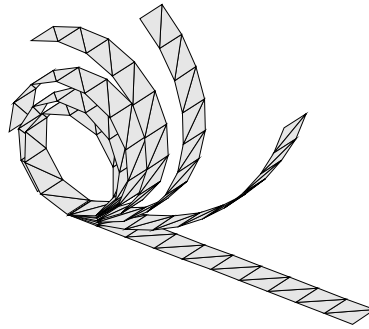


Figura 8.51 – Configurações deformadas da estrutura.

### 8.3.2 – Placa quadrada submetida a carregamento concentrado

Este segundo exemplo corresponde a uma placa quadrada engastada em duas extremidades e livre nas outras duas restantes, sendo a mesma submetida a um carregamento transversal concentrado sobre o ponto  $A$ , conforme apresentado na Figura 8.52<sup>(a)</sup>, juntamente com suas propriedades mecânicas e geométricas. Utilizando as condições de simetria, somente  $\frac{1}{2}$  da placa foi modelada com uma malha retangular  $5 \times 10$ , contendo 100 elementos finitos de cascas planos e triangulares.

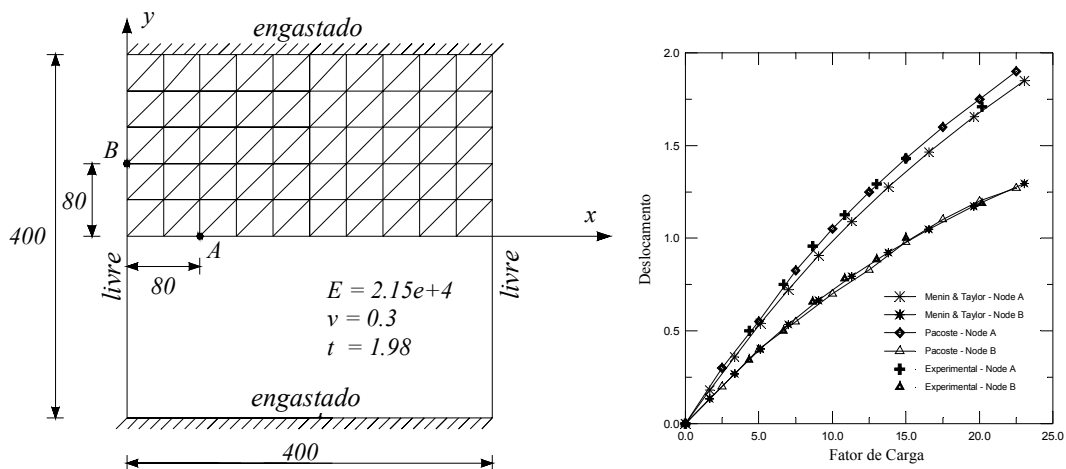


Figura 8.52 – Geometria da placa (a) e trajetórias de equilíbrio (b).

As trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos verticais nos pontos  $A$  e  $B$  são apresentadas na Figura 8.52<sup>(b)</sup>, podendo-se comprovar uma grande concordância em relação aos resultados numéricos de Pacoste (1998) e os resultados experimentais encontrados por Kawai & Yoshimura (1969).

### 8.3.3 – Cobertura cilíndrica abatida submetida a carregamento concentrado

A terceira estrutura analisada corresponde a uma cobertura cilíndrica apoiada nas duas bordas longitudinais e livre nas duas extremidades, com espessura de  $6.35\text{mm}$  ou  $12.70\text{mm}$ , submetida a uma carga vertical concentrada  $P=1.0\lambda$ , na qual se observa um *snap-through*. Devido às condições de simetria, somente  $\frac{1}{4}$  da estrutura foi modelada, utilizando-se malhas retangulares  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$  e  $8 \times 8$  contendo, respectivamente, 8, 32, 72 e 128 elementos triangulares, conforme apresentado na Figura 8.53.

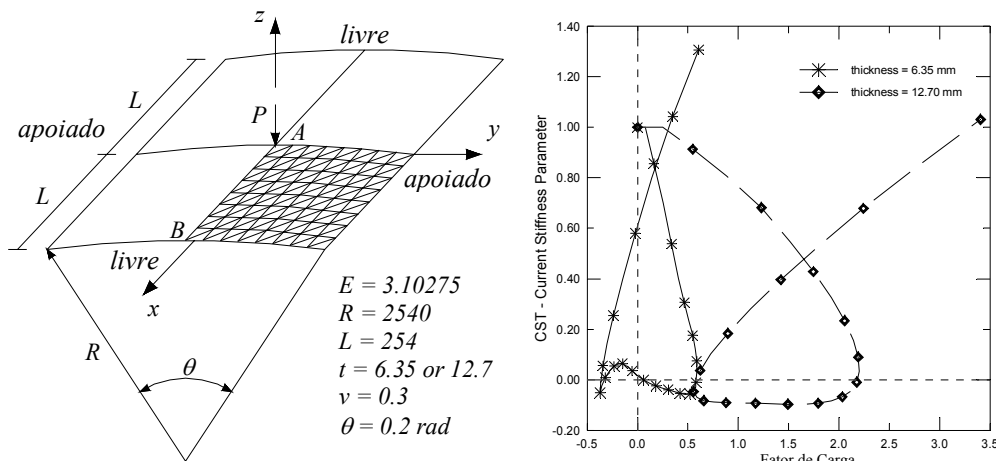


Figura 8.53 – Cobertura cilíndrica abatida submetida a carregamento concentrado.

Figura 8.54 – Gráfico  $CST$  x Fator de Carga.

As trajetórias de equilíbrio mostradas na Figura 8.55 apresentaram grande concordância com os resultados encontrados por Peng & Crisfield (1992), especialmente para as malhas mais refinadas. Pode-se ver que as trajetórias de equilíbrio apresentaram dois pontos limites (tangentes horizontais), que puderam ser detectados utilizando o parâmetro  $CST$ , conforme mostrado na Figura 8.54. Nesta mesma figura também é mostrado que para o caso da estrutura com espessura de  $6.35\text{mm}$ , o  $CST$  foi também capaz de detectar os dois *turning points* (tangentes verticais), localizados entre os dois pontos limites.

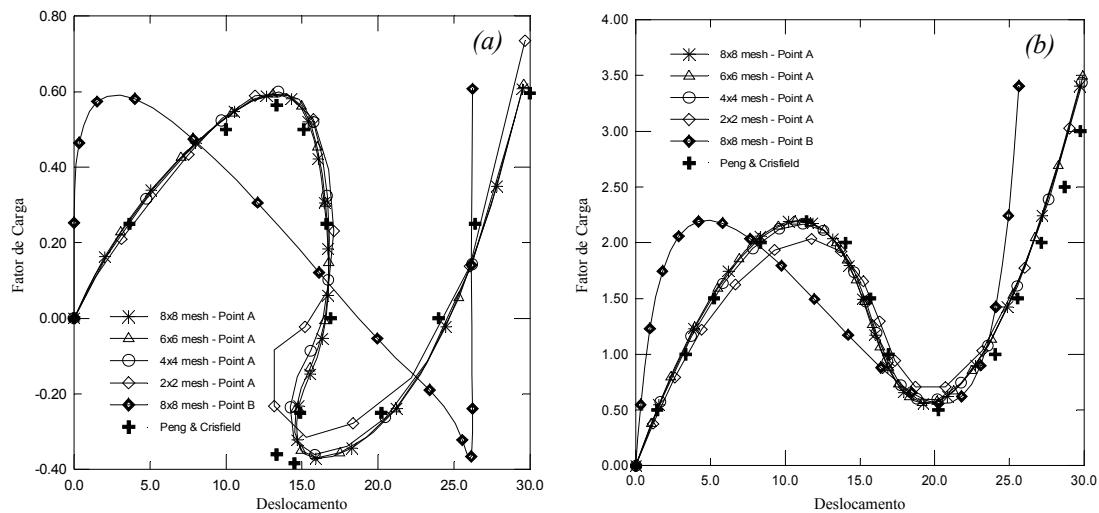


Figura 8.55 – Trajetórias de equilíbrio: (a)  $espessura = 6.35mm$  e (b)  $espessura = 12.70mm$ .

Na Figura 8.56, são apresentadas algumas configurações deformadas da estrutura ao longo do processo de carregamento, utilizando-se o pós-processador “*def\_config.m*”, gerado em linguagem *Matlab*. Estas deformadas são referentes a cobertura com espessura de 6.35mm.

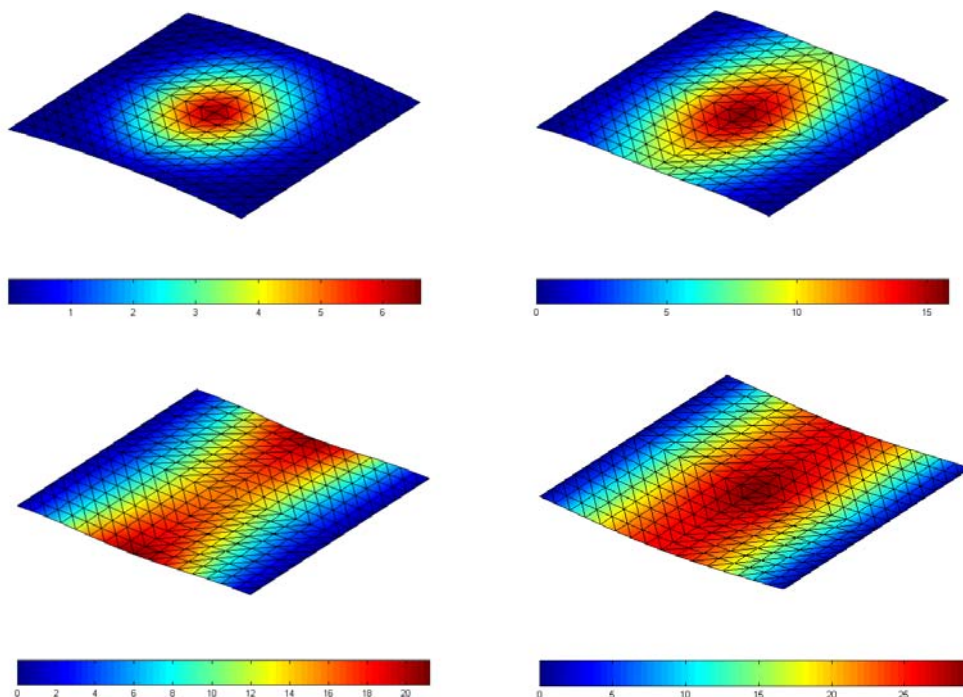


Figura 8.56 – Configurações deformadas da estrutura ( $espessura = 6.35mm$ ).

Obs: Barra de cores (*colormap*) em função dos deslocamentos verticais.

### 8.3.4 – Cilindro em balanço com carregamento na extremidade livre

Uma casca cilíndrica engastada em uma das extremidades e livre na outra foi submetida à ação de duas cargas verticais e de igual magnitude  $P = 1.00 \lambda$ , conforme mostrado na Figura 8.57, juntamente com as propriedades mecânicas e geométricas. Usando as condições de simetria, somente  $\frac{1}{4}$  do cilindro foi modelado com malhas retangulares de  $16 \times 16$  e  $20 \times 20$  contendo, respectivamente, 512 e 800 elementos triangulares.

A análise foi conduzida até um deslocamento vertical no ponto de carregamento de aproximadamente  $1.5R$ . Vale a pena ressaltar que, embora este limite não seja fisicamente possível, esta análise representa um excelente teste para verificar a eficiência do algoritmo no tratamento de grandes deslocamentos.

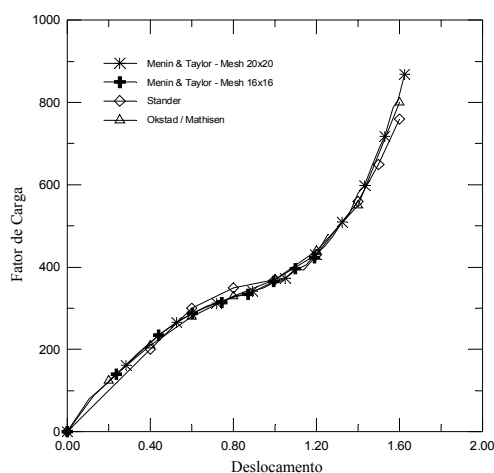
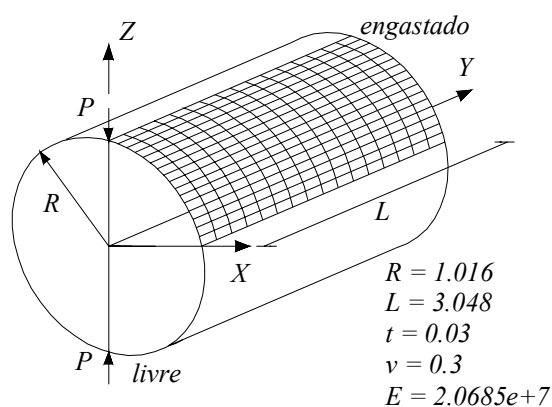


Figura 8.57 – Cilindro em balanço com carregamento na extremidade livre.

Figura 8.58 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical.

As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical no ponto de carregamento são apresentadas na Figura 8.58, podendo-se constatar uma excelente concordância com os resultados de Okstad & Mathisen (1994), que discretizaram  $\frac{1}{4}$  da estrutura utilizando 976 elementos triangulares e Stander et al. (1989), que utilizaram uma malha com elementos finitos quadrangulares.

Na Figura 8.59, são apresentadas algumas deformadas da estrutura ao longo do processo de carregamento, utilizando o pós-processador “*def\_config.m*”, gerado na linguagem Matlab.

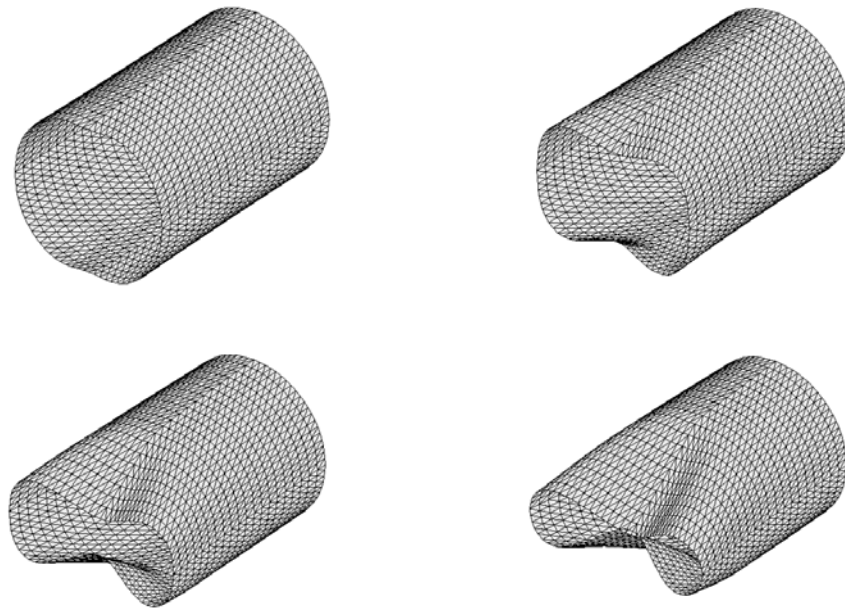


Figura 8.59 – Malha de elementos finitos das configurações deformadas.

### 8.3.5 – Casca cilíndrica estirada com extremidades livres

Uma casca cilíndrica com as extremidades livres foi submetida à ação de duas cargas verticais e diametralmente opostas  $P = 50.00 \lambda$ , conforme mostrado na Figura 8.60, juntamente com as propriedades mecânicas e geométricas. Usando as condições de simetria, somente  $1/8$  da estrutura foi modelada com uma malha retangular de  $8 \times 16$ , contendo 256 elementos triangulares.

As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical no ponto  $A$  e horizontais nos pontos  $B$  e  $C$  são apresentadas na Figura 8.61, podendo-se constatar uma excelente concordância com os resultados encontrados por Peric & Owen (1991) e Sansour & Bufler (1992). Na Figura 8.62, é apresentada uma malha inicial de elementos finitos, utilizada para discretizar a configuração indeformada, bem como algumas deformadas da estrutura ao longo do processo de carregamento, utilizando o pós-processador gerado em Matlab.

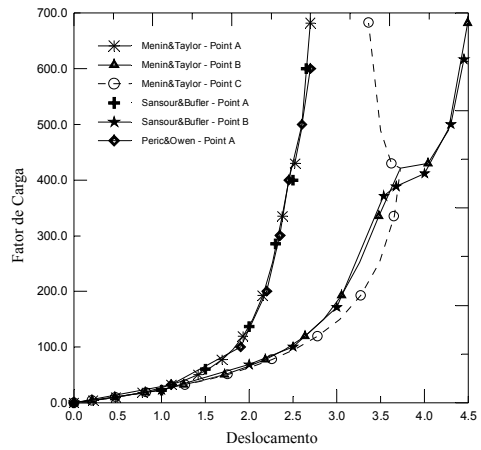
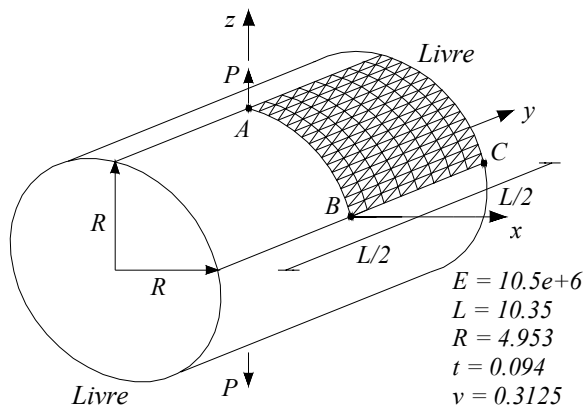


Figura 8.60 – Casca cilíndrica estirada com extremidades livres.

Figura 8.61 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamentos verticais e horizontais.

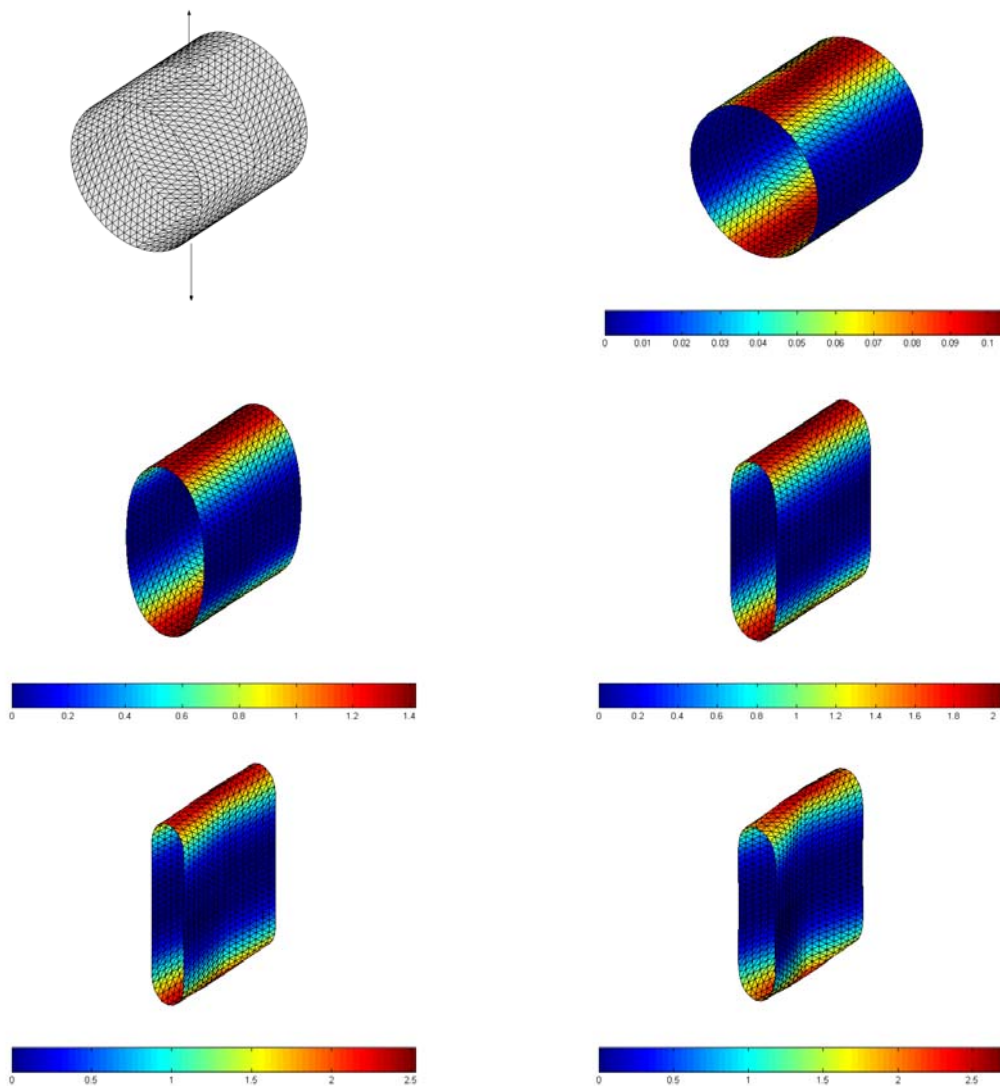


Figura 8.62 – Malha inicial de elementos finitos e configurações deformadas.

Obs: Barra de cores (*colormap*) em função dos deslocamentos verticais.

### 8.3.6 – Cobertura esférica apoiada nas quatro bordas

O sexto exemplo analisado corresponde a uma cobertura esférica apoiada nas quatro bordas e submetida a uma carga vertical concentrada  $P = 1000.0 \lambda$ , na qual se observa um *snap-through*. Devido à simetria, somente  $\frac{1}{4}$  da estrutura foi modelada utilizando uma malha quadrada  $5 \times 5$ , contendo 50 elementos triangulares, conforme mostrado na Figura 8.63, juntamente com as propriedades mecânicas e geométricas.

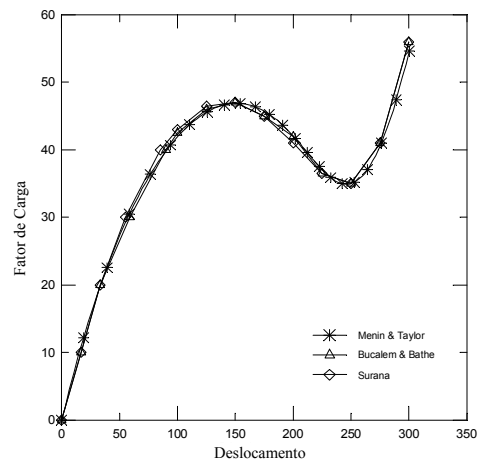
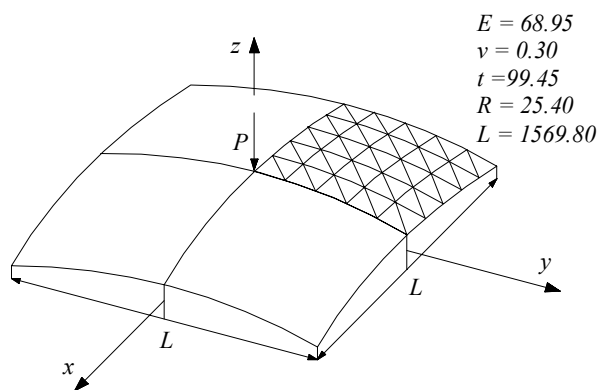


Figura 8.63 – Cobertura esférica apoiada nas quatro bordas.

Figura 8.64 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical.

A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó central da estrutura, mostrada na Figura 8.64, apresentou uma grande concordância com os resultados de Surana (1983) e Bucalem & Bathe (1993).

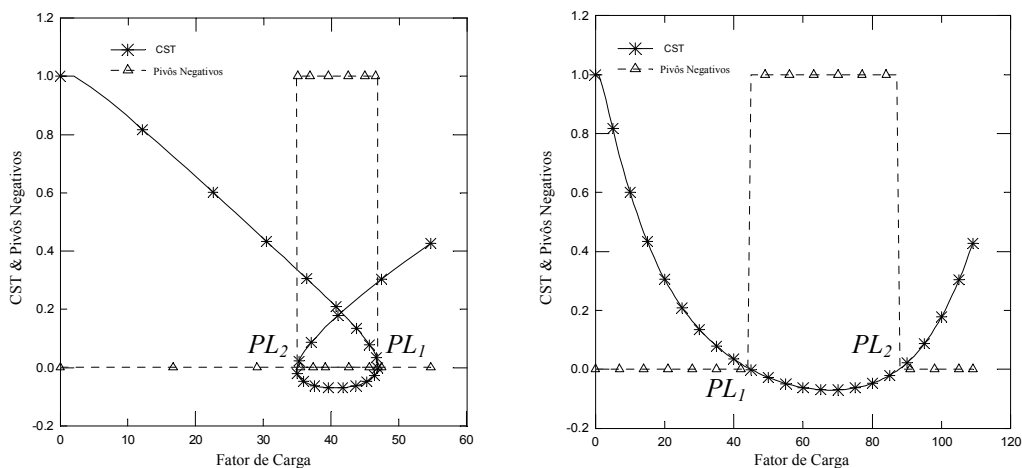


Figura 8.65 – Parâmetro de rigidez  $CST$  e número de pivôs negativos.



Pode-se ver que a trajetória de equilíbrio apresenta dois pontos limites (tangentes horizontais) que podem ser detectados utilizando o parâmetro de rigidez  $CST$ , que se anula quando um ponto limite é encontrado, bem como pela alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente, conforme mostrados na Figura 8.65. Na Figura 8.66, são apresentadas algumas configurações deformadas da estrutura ao longo do processo de carregamento utilizando o pós-processador “*def config.m*”.

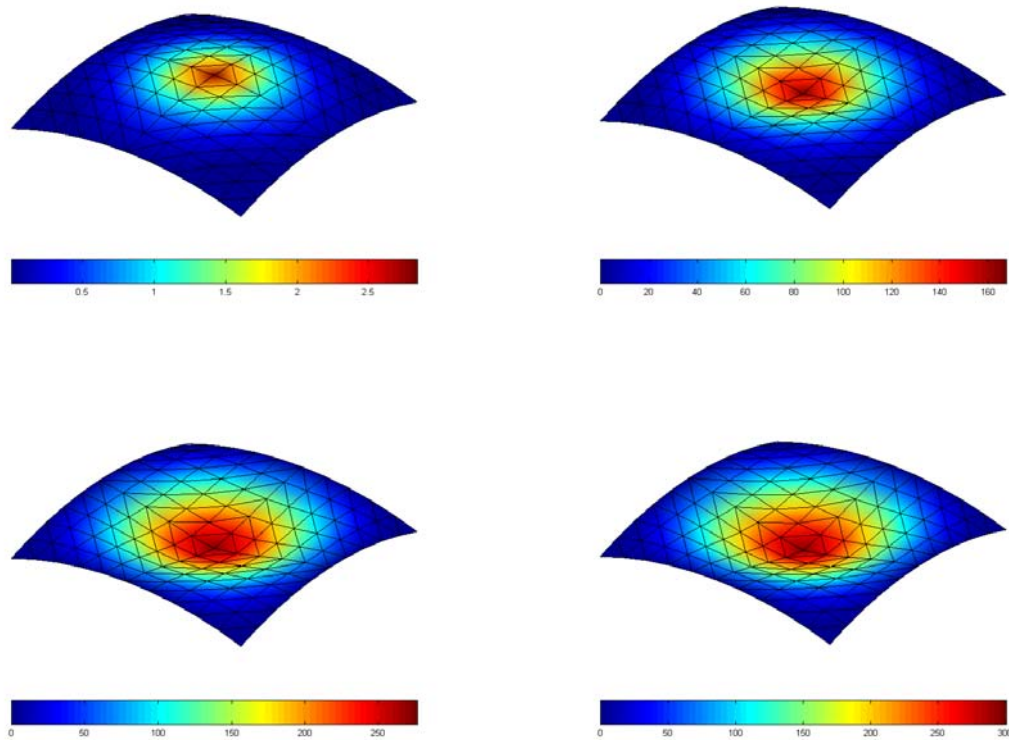


Figura 8.66 – Configurações deformadas ao longo do processo de carregamento.

Obs: Barra de cores (*colormap*) em função dos deslocamentos verticais.

### 8.3.7 – Casca hemisférica puncionada

Uma casca hemisférica com abertura de  $18$  graus no topo é submetida à ação de duas cargas  $P=1.0$  de fora para dentro na direção  $Y$  e de duas cargas  $P=1.0$  de dentro para fora na direção  $X$ , conforme mostrado na Figura 8.67, juntamente com as propriedades mecânicas e geométricas. Usando as condições de simetria, somente  $\frac{1}{4}$  da estrutura foi modelada utilizando-se malhas retangulares de  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$  e  $16 \times 16$ , constituídas por  $32$ ,  $128$  e  $512$  elementos finitos triangulares. A análise foi conduzida até um valor de carregamento  $P=100.0$ , gerando deslocamentos na estrutura de aproximadamente  $60\%$  do raio.

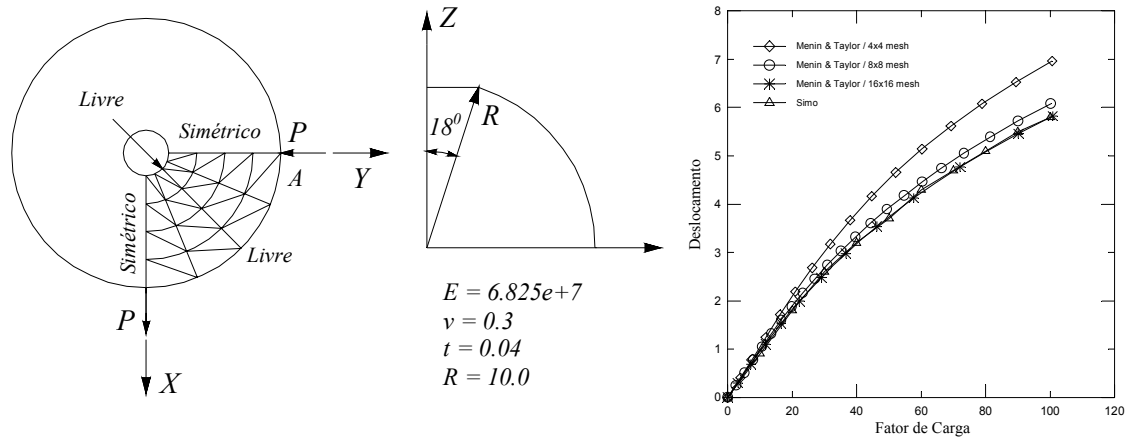


Figura 8.67 – Casca hemisférica puncionada.

Figura 8.68 – Trajetórias de equilíbrio para deslocamento horizontal do ponto  $A$ .

As trajetórias de equilíbrio obtidas para a malha de  $16 \times 16$  estão em excelente concordância com os resultados encontrados por Simo et al. (1990), ao passo que para as demais malhas de  $4 \times 4$  e  $8 \times 8$ , foram obtidos deslocamentos um pouco superiores, conforme podem ser observados na Figura 8.68. Na Figura 8.69, são apresentadas algumas configurações deformadas da estrutura ao longo do processo de carregamento.

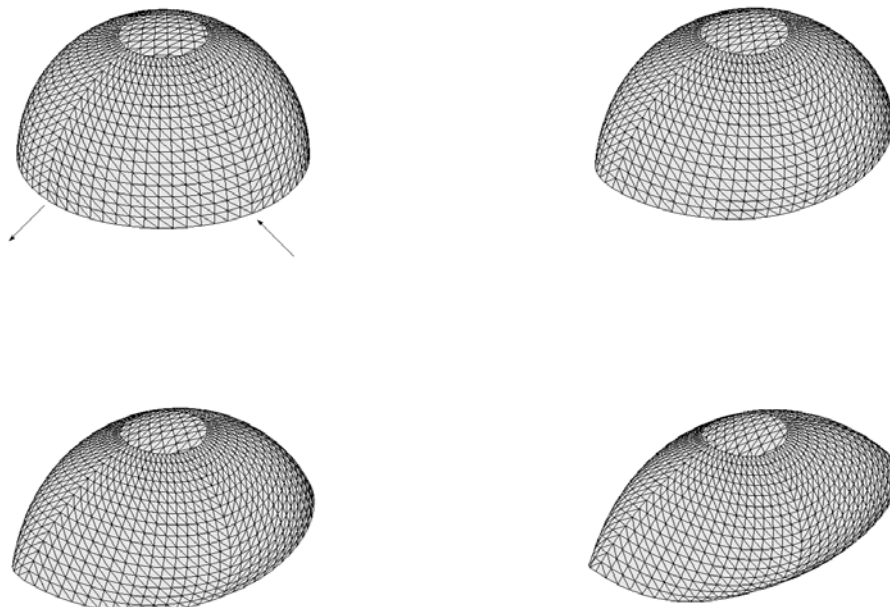


Figura 8.69 – Configurações deformadas da estrutura.

### 8.3.8 – Colapso de uma casca esférica de borracha

Uma casca esférica de borracha (meia bola de tênis) engastada na base foi submetida à ação de um carregamento pontual  $P = 1.0\lambda$  no topo, conforme apresentado na Figura 8.70, juntamente com as suas propriedades mecânicas e geométricas. Usando as condições de simetria, somente  $\frac{1}{4}$  da estrutura foi modelada, utilizando uma malha retangular  $8 \times 8$  formada por 96 elementos finitos triangulares.

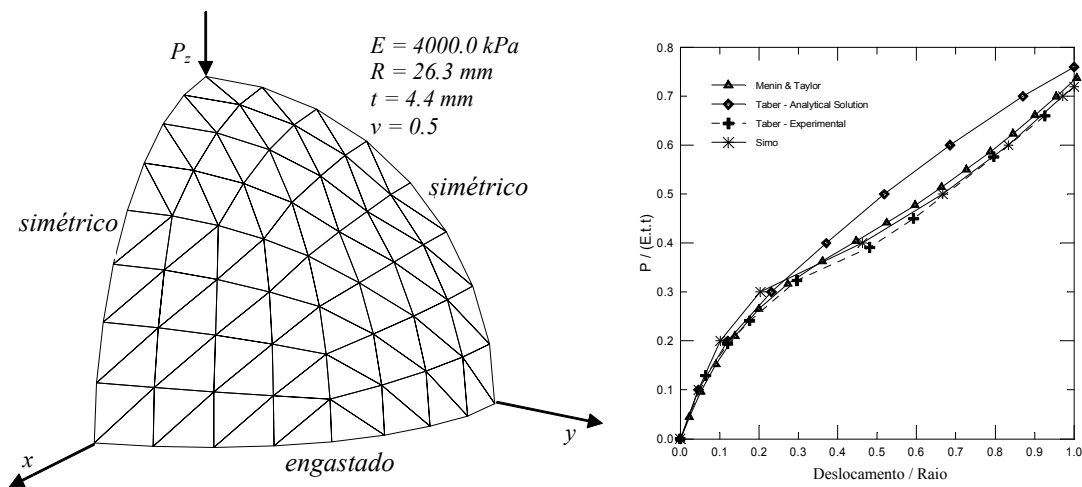


Figura 8.70 – Colapso de uma casca esférica de borracha.

Figura 8.71 – Trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical no topo.

A análise foi conduzida até o colapso total da estrutura, caracterizado por deslocamentos verticais no topo iguais ao raio. Os resultados obtidos estão em excelente concordância com os encontrados por Simo et al. (1990) e com os dados experimentais apresentados por Taber (1982), conforme pode ser observado pelas trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical no topo da estrutura, apresentadas na Figura 8.71. Nesta mesma figura, são também mostrados os resultados analíticos apresentados por Taber (1982), observando-se uma certa discrepância da solução analítica em relação aos resultados numéricos e experimentais.

A seguir, são apresentadas na Figura 8.72 algumas configurações deformadas da estrutura ao longo do processo de carregamento, utilizando-se mais uma vez, o pós-processador “*def\_config.m*”.

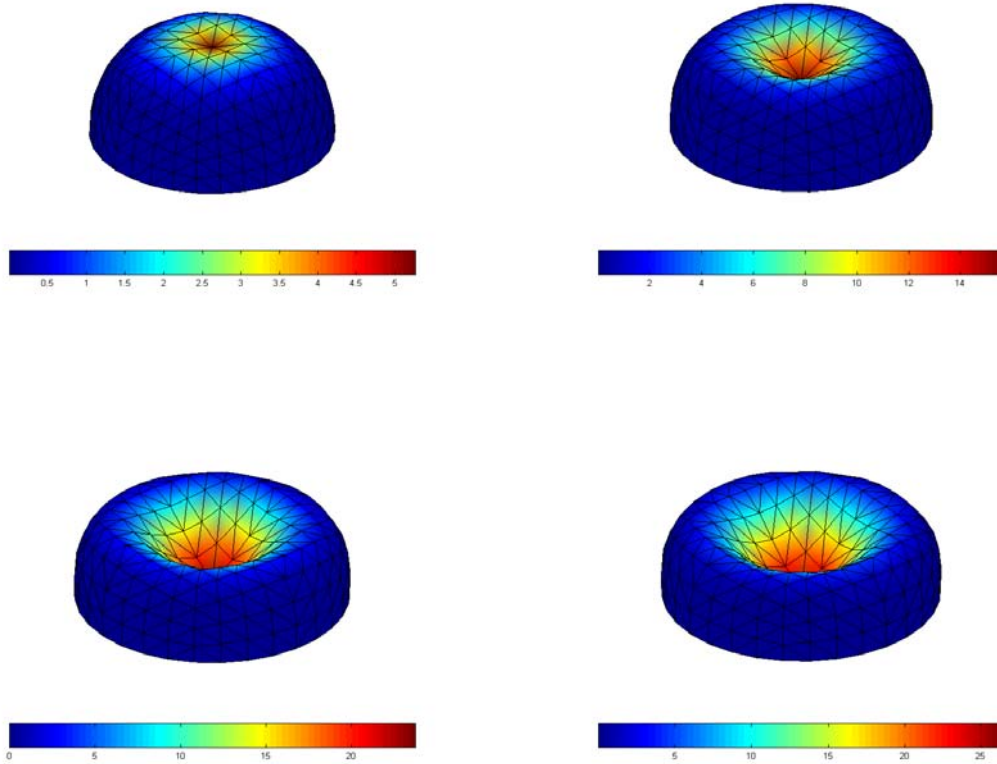


Figura 8.72 – Configurações deformadas da estrutura.

Obs: Barra de cores (*colormap*) definido em função dos deslocamentos verticais.

## 9 – CONCLUSÕES

### 9.1 – CONCLUSÕES FINAIS

Com a crescente utilização de estruturas cada vez mais esbeltas, aumenta a possibilidade de ocorrência de fenômenos de instabilidade de equilíbrio, tanto na fase pré-crítica quanto na fase posterior à perda de estabilidade (fase pós-crítica), estando a perda da capacidade portante da estrutura relacionada com a natureza da instabilidade de equilíbrio.

No presente trabalho, a formulação co-rotacional foi utilizada como descrição cinemática, com o objetivo de avaliar o comportamento não-linear geométrico de diversas tipologias estruturais em uma análise estática, permitindo o estudo da capacidade portante destas estruturas após a perda ou bifurcação de equilíbrio.

Ao longo deste trabalho, procurou-se enfatizar os conceitos básicos da formulação co-rotacional, baseada na decomposição dos deslocamentos totais em deslocamentos de corpo rígido e deformacional, visando estudar o comportamento de diversas estruturas planas e espaciais discretizadas com elementos finitos de treliças, vigas ou cascas triangulares.

Para o caso de treliças e pórticos planos, as equações de transformação que permitem a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional puderam ser obtidas de forma exata (*closed form*), considerando apenas argumentos puramente geométricos, sem necessidade de nenhum tratamento especial para a determinação e atualização dos graus de liberdade de rotação.

Para o caso de pórticos espaciais e cascas, os deslocamentos deformacionais das estruturas foram obtidos utilizando os chamados operadores de projeção, que podem ser usados como pré e pós-processadores nas rotinas computacionais, sem a necessidade de mudanças internas em rotinas lineares de elementos finitos pré-existentes, conferindo assim o grande poder e a facilidade de implementação da formulação. No estudo de pórticos espaciais e de cascas foi utilizada a formulação *EICR* desenvolvida por Nour-Omid & Rankin (1991), com modificações propostas por Menin & Taylor (2005<sup>a</sup>) e Menin & Taylor (2005<sup>b</sup>) para o caso específico de elementos finitos de cascas.

Em função dos exemplos numéricos analisados, pode-se concluir que a formulação co-rotacional e a sua implementação computacional nos diversos programas comentados na Tabela 8.1 apresentaram, de uma forma geral, resultados com grande concordância em relação aos encontrados na literatura, ocorrendo apenas pequenas discrepâncias em regiões próximas de pontos críticos ou de fortes não-linearidades geométricas, caracterizadas por instabilidades do tipo: *snap-through* ou *snap-back*.

Em relação aos exemplos analisados envolvendo estruturas constituídas por elementos de treliças, pode-se observar que no caso de deformações infinitesimais, as configurações inicial e deformada se confundem e, portanto, se obtém unicidade na resposta estrutural, independente do tipo de deformação utilizado. Entretanto, para o regime de deformações finitas, ao se adotar uma relação linear entre o par conjugado de tensão e deformação, não se obtém unicidade na resposta, implicando na utilização de materiais diferentes. Para se obter unicidade na resposta, seria necessário fazer o uso de transformações tensoriais que fazem o mapeamento do tensor constitutivo entre as configurações inicial e atual. Pode também ser observado que no caso de se adotar o mesmo tipo de deformação, as trajetórias de equilíbrio para as formulações *LT* e *CR* são coincidentes.

Em relação aos exemplos analisados utilizando elementos finitos de vigas, pode ser estudada uma grande variedade de tipologias estruturais, tais como: barras, pórticos, cúpulas e arcos. No caso das estruturas planas estudadas no presente trabalho, todas apresentaram os mesmos resultados quando analisadas com os programas computacionais *Beam\_AL2D* (Pórticos Planos) e *Beam\_AL3D* (Pórticos Espaciais), conforme o esperado. Por se tratar de soluções obtidas de forma exata (*closed form*), a formulação co-rotacional para pórticos planos descrita no presente trabalho apresenta, rigorosamente, a mesma resposta da formulação de Felippa (2001), utilizada como ponto de partida. Ao contrário dos trabalhos de Crisfield (1991) e Felippa (2001), para os quais, as rotações totais estavam limitadas a  $2\pi$ , no caso do presente trabalho foram apresentadas informações adicionais para a implementação computacional da formulação, de modo a permitir rotações totais de qualquer ordem de grandeza, conforme pode ser comprovado pelo estudo da viga em balanço com momento fletor aplicado na extremidade livre. Foi possível a observação das mudanças no comportamento de uma estrutura, provocadas por alterações no carregamento e nas propriedades mecânicas da seção transversal, conforme apresentado na análise da cúpula espacial abatida estudada na seção 8.2.5.

No estudo do arco circular, observou-se a mudança no comportamento estrutural em função de alterações nas condições de contorno da estrutura, bem como a simulação de trajetórias secundárias de equilíbrio aplicando-se cargas de perturbação lateral.

Em relação aos exemplos analisados envolvendo estruturas de cascas discretizadas por elementos finitos planos triangulares, foi estudada uma grande variedade de tipologias estruturais, tais como: vigas, placas, cilindros e esferas. Os programas pré-processadores de geração automática de malha permitiram o estudo do comportamento destas estruturas para diferentes malhas, desde as mais grosseiras até as mais refinadas. Em relação ao exemplo da viga em balanço com momento fletor na extremidade livre, verificou-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos com os programas *Beam\_AL2D*, *Beam\_AL3D* e *Shell\_AL*. Os resultados numéricos também apresentaram uma boa concordância em relação a alguns resultados experimentais, conforme comprovados para o caso da placa quadrada submetida a carregamento concentrado e para o colapso da casca esférica de borracha. De uma maneira geral, o programa *Shell\_AL* se mostrou muito eficiente ao conseguir simular exemplos numéricos com forte comportamento não-linear em cascas, caracterizados por instabilidades do tipo: *snap-through* ou *snap-back*.

Métodos indiretos como o parâmetro de rigidez *CST – Current Stiffness Parameter* e a alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez foram capazes de detectar e classificar, com grande precisão, a ocorrência de pontos limites (*PL*), *turning points (TP)* e pontos de bifurcação (*PB*) ao longo das trajetórias de equilíbrio.

Na resolução do sistema de equações não-lineares e obtenção das trajetórias de equilíbrio foram implementados o método de comprimento de arco cilíndrico, o método de Riks-Wempner (*Normal Plane*) e o método de Ramm (*Updated Normal Plane*), sendo estes métodos combinados com o método de Newton-Raphson completo. Embora nos exemplos numéricos, só tenham sido mostrados resultados referentes ao método de comprimento de arco cilíndrico, os métodos de Riks-Wempner e Ramm também apresentaram resultados excelentes e rendimentos idênticos ao método de comprimento de arco cilíndrico.

## 9.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apresentam-se algumas sugestões para futuras linhas de investigação, a fim de abordar aspectos não estudados no presente trabalho.

- Efeitos da não-linearidade física do material (plasticidade).
- Flambagem e determinação de trajetórias secundárias de equilíbrio.
- Efeitos de gradientes térmicos.
- Inclusão de um algoritmo para verificar problemas de contato ou impacto.
- Análise de instabilidade dinâmica considerando métodos implícitos ou explícitos.
- Análise com materiais compósitos, no caso específico do estudo de cascas.
- Análise não-linear geométrica de cascas, substituindo o elemento finito linear do tipo *ANDES* por outros elementos encontrados na literatura, como por exemplo, os três elementos planos e triangulares utilizados por Pacoste (1998).

Vale a pena ressaltar que um dos objetivos iniciais do presente trabalho seria efetuar uma análise dinâmica de estruturas envolvendo não-linearidade geométrica, incluindo uma formulação geral do método de conservação da energia, segundo Kuhl & Crisfield (1999), tendo como base o conhecido método- $\alpha$  generalizado. Nesta linha de pesquisa, o principal objetivo seria investigar o comportamento de diversos algoritmos implícitos de integração no tempo, tais como: o método de Newmark, os métodos- $\alpha$  clássicos e os métodos de conservação de energia com ou sem dissipação numérica, em relação às seguintes propriedades: estabilidade numérica, conservação ou decréscimo da energia total, mínima dissipação numérica de frequências baixas e máxima dissipação numérica de frequências altas. Inicialmente, foi realizada uma análise dinâmica de treliças utilizando a descrição lagrangiana total, conforme Taylor (2005) e Menin et al. (2007). Em seguida, procurou-se estender o raciocínio para o caso de cascas planas e triangulares, utilizando uma descrição cinemática co-rotacional. Foi elaborado um programa para a análise dinâmica de cascas, denominado *Shell\_ND*, entretanto, ainda existem dúvidas em como efetuar, de maneira consistente, a atualização das velocidades e acelerações associadas aos graus de liberdade rotacionais, via pré-multiplicação da matriz de rotação.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almroth, B.O., Brogan, F., Stanley, G.M., (1979), “Structural analysis of general shells, Volume II. User’s instructions for STAGSC-1”, Lockheed Report LMSC-D633873, Lockheed Palo Alto Research Laboratory, Palo Alto – CA, USA.
- Argyris, J.H., (1965), “Continua and discontinua”, Proceedings 1<sup>st</sup> Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Tecnology, Dayton, Ohio-USA.
- Argyris, J.H.,(1982), “An excursion into large rotations”, Computer Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. 32, pp. 85-155.
- Batoz, J.L. & Dhatt, G., (1979), “Incremental displacement algorithm for non-linear problems”, Int. J. Numer. Methods Engrg, Vol. 14, pp 1262-1266.
- Battini, J.M., (2002), “Co-rotational beam elements in instability problems”, Ph.D Thesis, Royal Institute of Tecnology - Departament of Mechanics, Stockholm / Sweeden.
- Belytschko, T. & Hsieh, B.J., (1973), “Non-linear transient finite element analysis with convected co-coordinates”, Int. J. Numer. Methods in Engineering, Vol.7, pp 255-271.
- Bergan, P.G. & Horrigmoe, G., (1976), “Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems”, Computer Methods in Applied Mech. Engineering, Vol. 7, pp 201-217.
- Bergan, P.G., Holand, I., Soreide, T.H., (1979), “Use of the current stiffness parameter in solutions of nonlinear problems”, in R. Glowinski, E. Rodin and O. Zienkiewicz (Eds.), Energy Methods in Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, London-UK.
- Bergan P.G., (1980), “Solution algorithms for non-linear structural problems”, Computers & Structures, Vol. 12, pp 497-509.
- Bergan P.G. & Nygard, M.K., (1989), “Nonlinear shell analysis using Free Formulation finite elements”, Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Springer Verlag, Berlin, pp 317-338.
- Biot, M.A., (1965), “The mechanics of incremental deformations”, McGraw-Hill, New York, USA.
- Bucalem, M.L. & Bathe, K.J., (1993), “Higher-order MITC general shell elements”, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, pp 3729-3754.

- Cardona, A., (1989), “An integrated approach to mechanism analysis”, Ph.D thesis, University of Liege, Belgium.
- Choong, K.K. & Hangai, Y., (1993), “Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures”, Bulletin of IASS, Vol. 34, No 112, pp. 13-149.
- Cichón, C., (1984), “Large displacements in plane analysis of elastic-plastic frames”, Computers & Structures, Vol. 19, pp 737-745.
- Cole, G., (1990), “Consistent co-rotational formulation for geometrically nonlinear beam elements with special reference to large rotations”, Ph.D thesis, School of Civil Engineering – Kingston Polytechnic, UK.
- Cortivo, N., (2004), “Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotacional, um modelo plástico por camadas e o elemento finito ANDES”, Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília/DF, Brasil.
- Crisfield, M.A., (1981), “A fast incremental / iterative solution procedure that handles snap-through”, Computers & Structures, Vol. 13, pp 55-62.
- Crisfield, M.A., (1990), “A consistent co-rotational formulation for non-linear three-dimensional beam elements”, Computer Methods Appl. Mech. Engineering, Vol. 81, pp131-150.
- Crisfield, M.A., (1991), “Non-linear finite element analysis of solids and structures”, Volume 1: Essential, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Crisfield, M. A. & Moita, G. F., (1996), “A unified co-rotational framework for solids, shells and beams”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 33, No 20-22, pp. 2969-2992.
- Crisfield, M.A., (1997), “Non-linear finite element analysis of solids and structures”, Volume 2: Advanced Topics, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Faria, H.P., (1998), “Análise não-linear de instabilidade elástica de pórticos planos”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília - UnB / DF, Brasil.
- Felippa, C.A. & Militello, C., (1992), “Membrane triangles with corner drilling freedoms – II. The *ANDES* element”, Finite Elements in Analysis and Design, Volume 12, pp 189-201.
- Felippa, C.A., (2001), “Non-linear finite element methods / NFEM”, Lecture notes for the course non-linear finite element methods, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder/USA.
- Fraeijs de Veubeke, B.M., (1976), “The dynamics of flexible bodies”, Int. J. Engineering Science, Pergamon Press, 895-913.

- Gere, J. & Weaver, W., (1981), “Análise de Estruturas Reticuladas”, Editora Guanabara, Rio de Janeiro, Brasil.
- Harrison, H.B., (1973), “Computer methods in structural analysis”, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Haugen, B., (1994), “Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High Performance Finite Elements”, Ph.D Thesis, University of Colorado, USA.
- Hsiao, K.M. & Hou, F.Y., (1987), “Nonlinear finite element analysis of elastic frames”, Computers & Structures, Vol. 26, pp 693-701.
- Hsiao, K.M., Jann, H., Chen, Y.R., (1987), “A corotational procedure that handles large rotations of spacial beam structures”, Computers & Structures, Vol. 27, pp 769-781.
- Kawai, T. & Yoshimura, N., (1969), “Analysis of large deflection of plates by the finite element method”, Int. Journal for Num. Methods in Engineering, Vol. 1, pp 123-133.
- Kuhl, D. & Crisfield, M.A., (1999), “Energy-conserving and energy decaying algorithms in non-linear structural dynamics”, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, pp 569-599.
- Menin, R.C.G. & Taylor, W.M.S, (2003<sup>a</sup>), “Resposta pós-crítica de sistemas articulados com diferentes deformações utilizando uma formulação co-rotacional”, XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilandce 2003, Ouro Preto / MG, Brasil.
- Menin, R.C.G. & Taylor, W.M.S, (2003<sup>b</sup>), “Resposta pós-crítica de pórticos planos discretizados com elementos de viga de Euler-Bernoulli utilizando uma formulação co-rotacional”, XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilandce 2003, Ouro Preto / MG, Brasil.
- Menin, R.C.G. (2004), “Análise não-linear geométrica de estruturas utilizando uma formulação co-rotacional”, Exame de Qualificação de Doutorado, Universidade de Brasília - UnB, Brasília / DF, Brasil.
- Menin, R.C.G. & Taylor, W.M.S, (2004), “Análise não-linear geométrica de pórticos espaciais utilizando uma formulação co-rotacional”, XXXI Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, Mendoza, Argentina.
- Menin, R.C.G. & Taylor, W.M.S, (2005<sup>a</sup>), “Não-linearidade geométrica de cascas finas discretizadas com elementos finites triangulares aplicando a descrição cinemática co-rotacional”, Congreso de Métodos Numéricos en Ingenieria 2005 / SEMNI, Granada, Espanha.

- Menin, R.C.G. & Taylor, W.M.S, (2005<sup>b</sup>), “Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas laminares”, XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2005, Guarapari / ES, Brasil.
- Menin, R.C.G., Taylor, W.M.S, Lopes, A.P., Menin, E.C.G. (2006), “Análise não-linear geométrica de treliças utilizando diferentes medidas de deformações”, XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2006, Belem / PA, Brasil.
- Menin, R.C.G., Taylor, W.M.S, Menin, E.C.G. (2007), “Energy-conserving and energy-decaying algorithms in the nonlinear dynamics of truss elements”, XII DINAME – Internatinal Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, Ilha Bela / SP, Brasil.
- Militello, C., (1991), “Application of parametrized variational principles to the finite element method”, Ph.D thesis, Department of Aerospace Engineering Science, University of Colorado, Boulder/USA.
- Monteiro, F.A.C., (2004), “Estudo de uma Formulação Co-Rotacional Geral: Aplicação a Pórticos Espaciais”, Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos / SP.
- Nour-Omid, B. & Rankin, C.C., (1991), “Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors”, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, pp. 353-384.
- Okstad, K.M. & Mathisen, K., (1994), “Towards automatic adaptative geometrically nonlinear shell analysis. Part I: Implementation of an h-adaptative mesh refinement procedure”, *Int. Journal for Num. Methods in Engineering*, Vol. 37, pp 2567-2578.
- Oñate, E., (1986), “Una formulación incremental para problemas de no linealidad geométrica por el metodo de los elementos finitos”, UPC / Barcelona, Espanha.
- Pacoste, C. & Eriksson, A., (1996), “Beam element in instability problems”, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 144, pp. 163-197.
- Pacoste, C., (1998), “Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses”, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 156, pp. 75-110.
- Peng, X. & Crisfield, M.A., (1992), “A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress / constant moment triangle”, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp 1829-1847.
- Peric, D. & Owen, D., (1991), “The Morley thin shell finite element for large deformation problems: simplicity versus sophistication”, 4<sup>th</sup> International Conference on Nonlinear Engineering Computations (NEC-91).

- Powel, G. & Simons, J., (1981), "Improved iteration strategy for nonlinear structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 1455-1467.
- Ramm, E., (1981), "Strategies for tracing the nonlinear response near limit points", in: W. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe (Eds.), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, pp 63-89.
- Rankin, C.C. & Brogan, F.A., (1986), "An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations", *ASME J. Pressure Vessel Technology*, Vol. 108, pp 165-174.
- Rankin, C.C. & Nour-Omid, B., (1988), "The use of projectors to improve finite element performance", *Computers & Structures*, Vol. 30, pp 257-267.
- Rao, C.R. & Mitra, S.K., (1971), "Generalized inverse of matrices and its applications", John Wiley and Sons Inc., New York.
- Riks, E., (1972), "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", *J. Applied Mechanics*, Vol. 39, pp 1060-1066.
- Sansour, C. & Bufler, H., (1992), "An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation", *Int. Journal for Num. Methods in Engineering*, Vol. 34, pp 73-115.
- Schweizerhof, K. & Wriggers, P., (1986), "Consistent linearization for path following methods in nonlinear F.E. Analysis", *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 59, pp 261-279, North-Holland.
- Sharifi, P. & Popov, E.P., (1971), "Nonlinear buckling analysis of sandwich arches", *Proc. ASCE, J. Engineering Division*, Vol. 97, pp 1397-1412.
- Simo, J.C. & Vu-Quoc, L., (1986), "A three-dimensional finite strain rod model. Part 2: Computational Aspects", *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 58, pp 79-116.
- Simo, J.C., Fox, D.D., Rifai, M.S., (1990), "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory", *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 79, pp 21-70.
- Spurrier, R.A. (1978), "A comment on singularity-free extraction of a quaternion from a direction cosine matrix", *J. Spacecrafts & Rockets*, Vol. 15, pp 255.
- Stander, N., Matzenmiller, A., Ramm, E., (1989), "An assesment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis", *Engineering Computers*, Vol. 6, pp 58-66.
- Surana, K.S., (1983), "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp 582-615.

- Surana, K.S. & Sorem, R., (1989), "Geometrically non-linear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp 43-73.
- Taber, L.A., (1982), "Large deflection of a large fluid filled spherical shell under a point load", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp 121-128.
- Taylor, W.M.S., (2001), "Análisis no lineal elástico de estructuras de barras articuladas com diferentes medidas de deformacion", XXII Cilamce, Campinas / SP, Brasil.
- Taylor, W.M.S., (2002), "El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria*, Vol. 18, 4, pp 549-572.
- Taylor, W.M.S., (2005), "Aplicaciones de algoritmos que conservan la energia-momentum en dinámica no lineal", *Congreso de Métodos Numéricos en Ingenieria 2005 / SEMNI*, Granada, Espanha.
- Truesdell, C., (1966), "Continuum mechanics I: the mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics", Gordon & Breach, New York, USA.
- Wagner, W. (1991), "A path following algorithm with quadratic predictor", *Computers & Structures*, Vol. 39, pp 339-348.
- Wempner, G.A., (1969), "Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 5, pp 117-153.
- Wempner, G.A., (1971), "Discrete approximations related to non-linear theories of solids", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 7, pp 1581-1599.
- Wriggers, P. & Simo, J.C., (1990), "A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp 155-176.
- Wright, E.W. & Gaylord, E.H., (1968), "Analysis of unbraced multistory steel rigid frames", *Proc. ASCE, J. Structural Division*, Vol. 94, pp 1143-1153.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ $\Gamma^T$

Neste apêndice será apresentada a determinação da matriz  $\Gamma^T$  para o caso de um elemento finito de casca plano e triangular, lembrando que esta matriz depende da geometria atual e da orientação dos eixos locais do elemento e que a mesma representa uma das parcelas do operador de projeção  $P_R$ , conforme mostrados nas equações a seguir:

$$P_R = \Psi \cdot \Gamma^T \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma^T = \begin{bmatrix} \Gamma_1^T & \Gamma_2^T & \Gamma_3^T \end{bmatrix}_{3 \times 18} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{d}_1^e} \right] & \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{d}_2^e} \right] & \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{d}_3^e} \right] \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial \bar{\theta}_T^e}{\partial \bar{d}^e} \right] \quad (\text{A.2})$$

Inicialmente, a propriedade definida na Equação (6.33) é aplicada sobre o sistema de eixos co-rotacionais do elemento  $T$  na configuração atual  $C^n$  e em seguida é efetuada a mudança de coordenadas proposta na Equação (6.8), tal que:

$$\begin{aligned} S_{\delta \bar{\theta}_T} &= \delta T^T \cdot T \\ T \cdot S_{\delta \bar{\theta}_T} \cdot T^T &= T \cdot \delta T^T \cdot T \cdot T^T \\ S_{\delta \bar{\theta}_T^e} &= T \cdot \delta T^T \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

que ao ser expandida fornece no sistema local de coordenadas:

$$\delta \bar{\theta}_T^e = \begin{Bmatrix} - \left( \mathbf{i}_2^e \right)^T \cdot \delta \bar{\alpha}_3^e \\ - \left( \mathbf{i}_3^e \right)^T \cdot \delta \bar{\alpha}_1^e \\ + \left( \mathbf{i}_2^e \right)^T \cdot \delta \bar{\alpha}_1^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - [0 \ 1 \ 0] \delta \bar{\alpha}_3^e \\ - [0 \ 0 \ 1] \delta \bar{\alpha}_1^e \\ + [0 \ 1 \ 0] \delta \bar{\alpha}_1^e \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A seguir serão determinadas as variações  $\delta \bar{\alpha}_1^e$  e  $\delta \bar{\alpha}_3^e$  que aparecem na equação anterior. A primeira variação pode ser obtida a partir da Equação (6.7):

$$\delta \bar{\alpha}_1^e = \frac{1}{L_3} \delta x_{21} - \frac{x_{21}}{L_3^2} \delta L_3 \quad (\text{A.5})$$



$$\begin{aligned}\delta \tilde{\mathbf{i}}_1 &= \frac{1}{L_3} \delta \mathbf{u}_{21} - \frac{L_3 \cdot \mathbf{i}_1}{L_3^2} \cdot \delta \left( \sqrt{\mathbf{x}_{21}^T \cdot \mathbf{x}_{21}} \right) \\ &= \frac{1}{L_3} \left( \mathbf{I} - \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1^T \right) \delta \mathbf{u}_{21}\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

lembrando que o módulo do vetor  $\mathbf{x}_{21}$  é igual ao comprimento do lado  $L_3$ , ou seja,  $\|\mathbf{x}_{21}\| = L_3$ . A equação acima pode ser escrita localmente por:

$$\delta \tilde{\mathbf{i}}_1^e = \frac{1}{L_3} \left( \mathbf{I} - \mathbf{i}_1^e \cdot (\mathbf{i}_1^e)^T \right) \delta \mathbf{u}_{21}^e = \frac{1}{L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{u}_{21}^e \quad (\text{A.7})$$

A variação  $\delta \tilde{\mathbf{i}}_3^e$  pode, também, ser obtida a partir da Equação (6.7), podendo ser expressa no sistema local de coordenadas da seguinte forma:

$$\delta \tilde{\mathbf{i}}_3^e = \frac{1}{\|\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{x}_{31}^e\|} \cdot \delta \left( \mathbf{i}_1^e \times \mathbf{x}_{31}^e \right) - \frac{1}{\|\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{x}_{31}^e\|} \cdot \delta \left( \|\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{x}_{31}^e\| \right) \mathbf{i}_3^e \quad (\text{A.8})$$

Definindo-se o vetor  $\mathbf{x}_{31}^e$  como:

$$\mathbf{x}_{31}^e = \mathbf{X}_{31}^e + \mathbf{u}_{31}^e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

e lembrando que, segundo a Equação (6.7), os vetores  $\mathbf{i}_3$  e  $\mathbf{x}_{31}$  são ortogonais então:

$$q_3 = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{i}_1^e \times \mathbf{x}_{31}^e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Substituindo-se a Equação (A.11) em (A.8):

$$\begin{aligned}\delta\vec{\mathbf{i}}_3^e &= \frac{1}{q_2} \cdot (\delta\vec{\mathbf{i}}_1^e \times \mathbf{x}_{31}^e + \mathbf{i}_1^e \times \delta\mathbf{x}_{31}^e) - \frac{\delta q_2}{q_2} \cdot \mathbf{i}_3^e \\ \delta\vec{\mathbf{i}}_3^e &= \frac{1}{q_2} \cdot (-\mathbf{x}_{31}^e \times \delta\vec{\mathbf{i}}_1^e + \mathbf{i}_1^e \times \delta\mathbf{x}_{31}^e) - \frac{\delta q_2}{q_2} \cdot \mathbf{i}_3^e\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

A variação de  $\delta\vec{\mathbf{i}}_3^e$  definida na equação acima será feita em três etapas, conforme indicado na equação a seguir:

$$\begin{aligned}P1 &= \frac{1}{q_2} \cdot (-\mathbf{x}_{31}^e \times \delta\vec{\mathbf{i}}_1^e) \\ \delta\vec{\mathbf{i}}_3^e &= P1 + P2 + P3 \quad \Leftrightarrow \quad P2 = \frac{1}{q_2} \cdot (\mathbf{i}_1^e \times \delta\mathbf{x}_{31}^e) \\ P3 &= -\frac{\delta q_2}{q_2} \cdot \mathbf{i}_3^e\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

A primeira etapa compreende a determinação da parcela  $P1$ , que considerando as Equações (A.7) e (A.9) pode ser expressa por:

$$P1 = \frac{1}{q_2} \cdot (-\mathbf{x}_{31}^e \times \delta\vec{\mathbf{i}}_1^e) = \frac{1}{q_2} \cdot \left( \begin{Bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta\mathbf{u}_{21}^e}{L_3} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$P1 = \frac{1}{q_2} \cdot \left( \begin{Bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u}_{21x}^e \\ \delta\mathbf{u}_{21y}^e \\ \delta\mathbf{u}_{21z}^e \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{L_3} \right) = \frac{1}{q_2} \cdot \left( \begin{Bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta\mathbf{u}_{21y}^e \\ \delta\mathbf{u}_{21z}^e \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{L_3} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$P1 = \frac{1}{q_2} \cdot \left( \begin{Bmatrix} -q_2 \cdot \delta\mathbf{u}_{21z}^e \\ q_1 \cdot \delta\mathbf{u}_{21z}^e \\ -q_1 \cdot \delta\mathbf{u}_{21y}^e \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{L_3} \right) = \begin{Bmatrix} -\delta\mathbf{u}_{21z}^e \\ \eta \cdot \delta\mathbf{u}_{21z}^e \\ -\eta \cdot \delta\mathbf{u}_{21y}^e \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{L_3} \quad (\text{A.16})$$

sendo a constante  $\eta = q_1 / q_2$ .

A parcela  $P1$  pode então ser re-escrita da seguinte forma:

$$P1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & -\eta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta u_{21x}^e \\ \delta u_{21y}^e \\ \delta u_{21z}^e \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{L_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & -\eta & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L_3} \quad (\text{A.17})$$

A segunda etapa compreende a determinação da parcela  $P2$ , que, considerando a Equação (A.9), pode ser expressa por:

$$P2 = \frac{1}{q_2} \cdot (\mathbf{i}_1^e \times \delta \mathbf{x}_{31}^e) = \frac{1}{q_2} \cdot (\mathbf{i}_1^e \times \delta \mathbf{u}_{31}^e) \quad (\text{A.18})$$

$$P2 = \frac{1}{q_2} \cdot \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta u_{31x}^e \\ \delta u_{31y}^e \\ \delta u_{31z}^e \end{Bmatrix} \right) = \frac{1}{q_2} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -\delta u_{31z}^e \\ \delta u_{31y}^e \end{Bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$P2 = \frac{1}{q_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta u_{31x}^e \\ \delta u_{31y}^e \\ \delta u_{31z}^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{q_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{u}_{31}^e \quad (\text{A.20})$$

A última etapa está associada à determinação da parcela  $P3$ , podendo ser expressa através da seguinte equação:

$$P3 = -\frac{\delta q_2}{q_2} \cdot \mathbf{i}_3^e = -\frac{\delta u_{31y}^e}{q_2} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{q_2} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta u_{31y}^e \end{Bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$P3 = \frac{1}{q_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta u_{31x}^e \\ \delta u_{31y}^e \\ \delta u_{31z}^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{q_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{u}_{31}^e \quad (\text{A.22})$$

Finalmente, substituindo-se as Equações (A.17), (A.20) e (A.22) em (A.13), pode-se obter:

$$\delta \tilde{\mathbf{i}}_3^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & -\eta & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L_3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{31}^e}{q_2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{31}^e}{q_2} \quad (\text{A.23})$$

$$\delta \tilde{\mathbf{i}}_3^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & -\eta & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L_3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{31}^e}{q_2} \quad (\text{A.24})$$

Uma vez conhecidas as variações  $\delta \tilde{\mathbf{i}}_1^e$  e  $\delta \tilde{\mathbf{i}}_3^e$  definidas nas Equações (A.7) e (A.24), pode-se calcular as componentes da variação do sistema de eixos co-rotacionais em (A.4):

$$-(\mathbf{i}_2^e)^T \cdot \delta \tilde{\mathbf{i}}_3^e = \{0 \quad 0 \quad -\eta\} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L_3} + \{0 \quad 0 \quad 1\} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{31}^e}{q_2} \quad (\text{A.25})$$

$$-(\mathbf{i}_3^e)^T \cdot \delta \tilde{\mathbf{i}}_1^e = \{0 \quad 0 \quad -1\} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L_3} \quad (\text{A.26})$$

$$(\mathbf{i}_2^e)^T \cdot \delta \tilde{\mathbf{i}}_1^e = \{0 \quad 1 \quad 0\} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L_3} \quad (\text{A.27})$$

que agrupadas fornecem:

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L_3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{31}^e}{q_2} \quad (\text{A.28})$$

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_1^e}{L_3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_2^e}{L_3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_1^e}{q_2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_3^e}{q_2} \quad (\text{A.29})$$

$$\delta\bar{\theta}_T^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\eta}{L_3} - \frac{1}{q_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \\ 0 & \frac{-1}{L_3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\mathbf{u}_1^e + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-\eta}{L_3} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L_3} \\ 0 & \frac{1}{L_3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\mathbf{u}_2^e + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{q_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\mathbf{u}_3^e \quad (\text{A.30})$$

A Equação (A.30) pode então ser re-escrita acrescentando-se a parcela referente aos graus de liberdade de rotação:

$$\delta\bar{\theta}_T^e = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\eta}{L_3} - \frac{1}{q_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \\ 0 & \frac{-1}{L_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-\eta}{L_3} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L_3} \\ 0 & \frac{1}{L_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{q_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_1^e \\ \delta\bar{\theta}_1^e \\ \delta\mathbf{u}_2^e \\ \delta\bar{\theta}_2^e \\ \delta\mathbf{u}_3^e \\ \delta\bar{\theta}_3^e \end{bmatrix} \right] \quad (\text{A.31})$$

Observando-se as propriedades geométricas de um elemento finito triangular de área =  $A$ , conforme apresentado na Figura A.1 e escrevendo-se os vetores do sistema local em relação ao sistema co-rotacional podem-se definir as seguintes relações:

$$\mathbf{x}_{31}^e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{31x}^e \\ x_{31y}^e \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{31}^c \\ y_{31}^c \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{x}_{31}^c \quad (\text{A.32})$$

$$q_2 = h_3 = \frac{2A}{L_3} \quad h_3 = y_{31}^c = y_{32}^c \quad (\text{A.33})$$

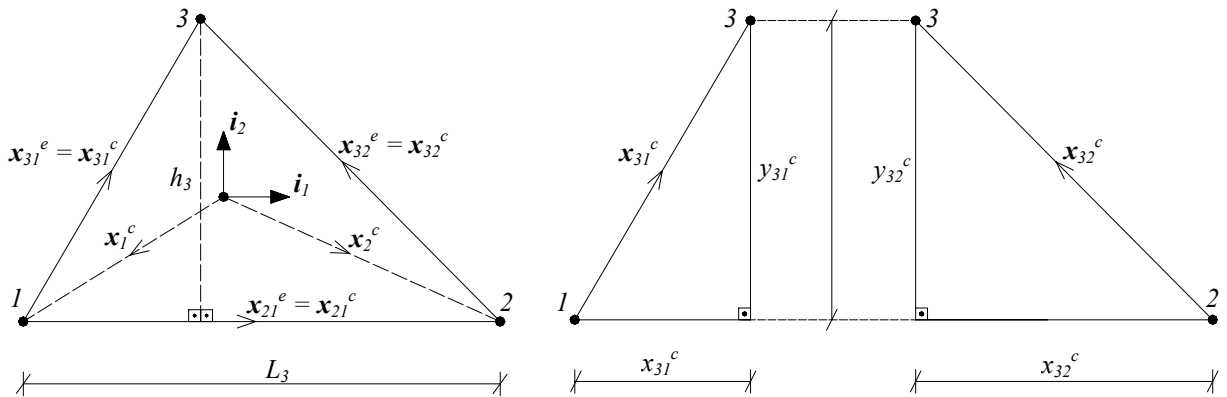


Figura A.1 – Geometria do elemento finito triangular.

Em função das Equações (A.32) e (A.33), os termos que aparecem em (A.31) podem ser expressos por:

$$\text{Termo [1,3]:} \quad \frac{\eta}{L_3} - \frac{1}{q_2} = \frac{q_1}{q_2 \cdot L_3} - \frac{1}{q_2} = \frac{q_1 - L_3}{q_2 \cdot L_3} = \frac{x_{31}^c - L_3}{h_3 \cdot L_3} = \frac{x_{32}^c}{2 \cdot A} \quad (\text{A.34})$$

$$\text{Termo [1,9]:} \quad -\frac{\eta}{L_3} = -\frac{q_1}{q_2 \cdot L_3} = -\frac{x_{31}^c}{h_3 \cdot L_3} = -\frac{x_{31}^c}{2 \cdot A} = \frac{x_{13}^c}{2 \cdot A} \quad (\text{A.35})$$

$$\text{Termo [1,15]:} \quad \frac{1}{q_2} = \frac{1}{h_3} = \frac{L_3}{2 \cdot A} = \frac{x_{21}^c}{2 \cdot A} \quad (\text{A.36})$$

$$\text{Termo [2,3]:} \quad \frac{1}{L_3} = \frac{h_3}{2 \cdot A} = \frac{y_{32}^c}{2 \cdot A} \quad (\text{A.37})$$

$$\text{Termo [2,9]:} \quad -\frac{1}{L_3} = -\frac{h_3}{2 \cdot A} = -\frac{y_{31}^c}{2 \cdot A} = \frac{y_{13}^c}{2 \cdot A} \quad (\text{A.38})$$

Finalmente, substituindo-se as Equações (A.34) a (A.38) na Equação (A.31), pode-se obter a expressão final da matriz  $\mathbf{\Gamma}^T$  para um elemento de casca plano e triangular:

$$\mathbf{\Gamma}^T = \frac{1}{2 \cdot A} \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_{32}^c \\ 0 & 0 & y_{32}^c \\ 0 & -\frac{2 \cdot A}{L_3} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_{13}^c \\ 0 & 0 & y_{13}^c \\ 0 & \frac{2 \cdot A}{L_3} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_{21}^c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \mathbf{0}_{3 \times 3} \right] \left[ \mathbf{0}_{3 \times 3} \right] \left[ \mathbf{0}_{3 \times 3} \right] \end{array} \right] \quad (\text{A.39})$$