Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Método de “Shooting” Aplicado a Problemas de EDP’s Singulares Envolvendo os Operadores Laplaciano e Monge-Ampère

por

Manuela Caetano Martins de Rezende

2007

Resumo

Neste trabalho ilustramos a aplicação do Método de "Shooting"em duas classes totalmente distintas de problemas de Equações Diferenciais parciais — ambas com valores de fronteira nulos e em domínios limitados — , uma envolvendo o operador Laplaciano e a outra o operador de Monge-Ampère.

Estudamos estes problemas na situação em que as perturbações não-lineares destes operadores apresentam algum tipo de singularidade e, combinando argumentos de ponto fixo e princípios de comparação, entre outros, ao Método de "Shooting", mostramos existência e não-existência de soluções clássicas radialmente simétricas.

Palavras-chaves: Método de "Shooting", Problemas Singulares, Soluções Clássicas e Radialmente Simétricas, Operadores Laplaciano e Monge-Ampère.

Abstract

This work illustrates the application of Shooting Methods as a way to solve two totally different classes of Partial Differential Equations problems. For one class, the Laplace operator is usual, while Monge-Ampère operator is used to the another. However, both classes have bounded domains and zero boundary values.

This study is developed in a specific situation: when the nonlinear disturbance of the operators presents some singularity. The combination of fixed point arguments with comparison principles to Shooting Methods shows the existence and nonexistence of radially symmetric classical solutions.

Key words: Shooting Method, Singular problems, Radially symmetric classical solutions, Laplace and Monge-Ampère operators.

Introdução

Entre as várias técnicas disponíveis para solução de problemas de Equações Diferenciais com valores de fronteira (do ponto de vista analítico e também numérico), destaca-se o Método de "Shooting".

No Método de "Shooting", ao problema de valor de fronteira é associada uma seqüência de problemas de valor inicial, em que condições iniciais "experimentais" são assumidas. A Equação Diferencial associada é resolvida, impondo a condição inicial assumida e objetivando satisfazer a condição de fronteira especificada. Caso o objetivo seja atingido, o problema está resolvido. Caso contrário, a condição inicial "experimental" — parâmetro de "shooting" — deverá ser ajustada. O parâmetro de "shooting"pode ser a derivada inicial ou o valor inicial.

De acordo com Roberts e Shipman [35], em 1972, Métodos de "Shooting"são totalmente gerais e aplicáveis a ampla variedade de Equações Diferenciais, não sendo necessário, para sua aplicabilidade, que as equações sejam de algum tipo especial.

Neste trabalho ilustramos a aplicação do Método de "Shooting" em problemas específicos (confira os problemas (CH) e (GS), páginas 3 e 4) que fazem parte de duas classes de problemas de Equações Diferenciais parciais totalmente distintas, a saber:

$$(L): \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

e

$$(M): \qquad \begin{cases} \det(D^2u) = \psi(x,u), & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $f : B_R \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $\psi : B_R \times (0,\infty) \to [0,+\infty)$ são funções apropriadas, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ é a bola de raio $R > 0$ centrada na origem do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, Δ é o operador Laplaciano e $\det(D^2u)$ é o operador de Monge-Ampère .

Além disto, estamos interessados em estudar os problemas (L) e (M) na situação em que as perturbações não-lineares dos operadores apresentam, por exemplo, o seguinte comportamento: $|f(x,s)| \longrightarrow +\infty$ e $\psi(x,s) \longrightarrow +\infty$, respectivamente, quando $s \to 0^+$ para cada $x \in B_R$.

De agora em diante, os problemas (L) e (M) cujas perturbações não-lineares apresentarem pelo menos um destes tipos de comportamento serão denominados problemas singulares.

O Método de "Shooting"aplicado a certos problemas — mais especificamente, às formas radiais de (L) e (M) — nos fornecerá soluções radialmente simétricas para estes problemas, isto é, soluções da forma $u(x) = u(|x|)$.

A existência de soluções positivas para o problema (L) tem sido extensivamente estudada quando f é não-singular. Para detalhes, veja Gidas et al. [14], Smoller e Wasserman [38], Ni [30] e as referências neles contidas. Em particular, Gidas et al. [14] mostraram que, se u é uma solução positiva em $C^2(\overline{B}_R)$ e $f(x,s) = f(s)$ é localmente lipschitziana, então u é radialmente simétrica.

Para casos em que a função f não é Lipschitz, há alguns resultados que ainda garantem radialidade de soluções. Em 1993, Kaper et al. [24] provaram que todas as soluções de (L) são radialmente simétricas para $f(x,s) = \sqrt{s} - 1$ ou $f(x,s) = -s^p + s^q,\ 0 < p < q$.

Em 1995, Gui [19] e, em 1996, Cortázar et al. [10] estudaram (L) com fronteira livre e $f(x,s) = s - s^\alpha,\ \alpha \in (0,1)$, provando que a fronteira livre deve ser uma esfera e, a solução, radialmente simétrica. Resultado similar foi obtido em 1996 por Cortázar et al. [9] para $f(x,s) = -s^p + s^q,\ 0 < p < 1 < q < (N+2)/(N-2),\ N \geq 3$.

Entretanto, segundo Hernández et al. [22], em 2006, o celebrado resultado de Gidas et al. [14], em 1979, não foi ainda estendido para o caso de não-linearidades singulares.

Motivados pelos trabalhos anteriores, focaremos nossa atenção nos problemas (L) e (M) singulares, estudando-os do ponto de vista radial. Mais especificamente, estaremos interessados na questão de existência e não-existência de soluções radiais clássicas $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$. Neste caso, o valor da derivada inicial será naturalmente zero, o que implicará no fato de o parâmetro de "shooting" ser o valor inicial.

Consideremos o problema (L) com

$$f(s) = s - \frac{s^{1-\alpha}}{\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2,$$

ou seja, estaremos interessados no caso em que

$$f(x,s) = f(s) \to -\infty \text{ quando } s \to 0^+.$$

Isto é,

$$(CH): \qquad \begin{cases} -\Delta u = u - \dfrac{u^{1-\alpha}}{\alpha}, & B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R. \end{cases}$$

Este problema foi estudado por Chen [5], em 1997, como conseqüência do seu trabalho de pesquisa com o problema parabólico não-linear

$$(PP): \qquad \begin{cases} v_t = v^\alpha(\triangle v + v) & (x \in \Omega,\ t > 0) \\ v(x,t) = 0, & (x \in \partial\Omega,\ t > 0) \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & (x \in \Omega), \end{cases}$$

que modela uma variedade de situações físicas (veja Chen [4]). Mais exatamente, ele mostrou que uma função da forma $v(x,t) = (T-t)^{-1/\alpha}u(x)$ é uma solução de (PP), onde $T < \infty$ é o tempo de "blow-up" de v, se u for uma solução de (CH).

Além disso, uma motivação matemática é a técnica utilizada para resolvê-lo, que combina o Método de "Shooting"com as propriedades da "Aplicação Tempo", designada, neste trabalho, por $T(p)$ (veja definição na página 10).

No Capítulo 2, nosso principal objetivo será demonstrar o seguinte teorema, provado em 1997, por Chen [5]:

Teorema (CH). *Existem números reais* $0 < R_1 < R_2,\ R_i = R_i(N,\alpha),\ i = 1,2,$ *tais que o problema* (CH) *tem solução* $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ *se, e somente se,* $R_1 < R \leq R_2$. *Além disso, se* u *é uma solução de* (CH) *para* $R = R_2$, *então* $u(R_2) = u'(R_2) = 0$.

Este resultado foi melhorado, em algum sentido, por Hirano e Shioji, em 2001 [23], e também por Gonçalves e Santos, em 2003 [16] (para maiores detalhes veja o Capítulo 2).

Quanto ao problema (M), motivações para seu estudo encontram-se principalmente na Geometria, em que certas métricas podem ser definidas em termos da solução de uma equação de Monge-Ampère.

Neste sentido, podemos citar, como exemplo, a métrica Kähler-Einstein proposta por Calabi [3], definida em função da solução da equação de (M) com $\psi(x,s) = \exp s$ (para maiores detalhes, veja o Capítulo 3).

Como outra aplicação, Loewner e Nirenberg [29], em domínios convexos limitados, associaram a métrica Riemanniana $ds^2 = -(u)^{-1}\sum u_{x_ix_j}d_{x_i}d_{x_j}$, invariante sob transformações projetivas entre tais domínios, onde u é solução positiva do problema (M), com $\psi(x,s) = (-1/s)^{N+2}$.

Resultados de existência e/ou unicidade para o problema (M) têm sido demonstrados. Em 1977, Cheng e Yau [6] estudaram o caso $\psi(x,s) = (-1/s)^{N+2}$ e, em 1996, Lazer e McKenna [28] consideraram $\psi(x,s) = p(x)(-s)^{-\gamma}$ em Ω, onde Ω é um domínio suave, limitado e estritamente convexo em $\mathbb{R}^N$, $p > 0$, $p \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $\gamma > 1$.

Estes resultados foram melhorados, em algum sentido, em 2005, por Gonçalves e Santos [17] que, combinando o Método de "Shooting"e argumentos de ponto fixo, consideraram o seguinte problema:

$$(GS): \qquad \begin{cases} \det(D^2u) = \psi(x,-u), & B \\ u < 0, & B \\ u = 0, & \partial B, \end{cases}$$

onde $\psi : B \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ é contínua e radialmente simétrica na primeira variável, $B = B_R,\ R = 1$ e $\psi(0,s) > 0$, para todo $s > 0$. Em [17], Gonçalves e Santos concentraram-se no caso em que ψ é singular em $u = 0$.

Aplicações adicionais da equação de Monge-Ampére também podem ser encontradas no Cálculo de Variações e Otimização, devido à sua conexão com problemas de transporte de massa (veja Gutiérrez [21]).

Além disso, de importância para o nosso trabalho é a aplicação do Método de "Shooting"neste problema, que envolve um operador totalmente não-linear (para maiores detalhes quanto à não-linearidade do operador de Monge-Ampère, veja Gilbarg e Trudinger [15]).

Quanto ao problema (GS), considere as seguintes hipóteses:

(GS_1) $\qquad \psi(x,\cdot)$ *é localmente Lipschitz em* $(0,\infty)$,

uniformemente com respeito a $x \in B$,

(GS_2) $\qquad \dfrac{\psi(x,s)}{s^N}$ *é não-crescente em* $s > 0$, *para cada* $x \in B$,

$$(GS_3) \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{\psi(x,s)}{s^N} < 1, \ \textit{uniformemente em } x \in B,$$

$$(GS_4) \qquad \lim_{s\to 0} \frac{\psi(x,s)}{s^N} = \infty \ \textit{uniformemente em } x \in B,$$

$$(GS_5) \qquad \int_{B(0,|x|)} \psi(y,s)dy \geq \mu_s |x|^N, \ x \in B, \ s \in (0,\infty),$$

onde μ_s *é alguma constante positiva.*

O Capítulo 3 deste trabalho terá, como principal objetivo, demonstrar o seguinte teorema, devido a Gonçalves e Santos (2005) [17]:

Teorema (GS). *Suponha* $(GS_1) - (GS_5)$. *Então* (GS) *admite uma solução convexa e radialmente simétrica*

$$u \in C^2(B) \cap C(\overline{B}).$$

Além disso, u *é unicamente determinada desde que, para algum* $b > 0$,

$$\frac{\psi(x,s)}{(s+b)^N} \ \textit{é não-crescente em } s > 0.$$

O resultado acima se aplica a termos $\psi(x,s)$ da forma

$$\zeta(|x|)s^{-p} \quad \text{e} \quad \left[2 + \sin\left(\frac{1}{1-|x|}\right)\right](s^{-p} + s^q),$$

onde $\zeta : [0,1] \to (0,\infty)$ é contínua, $p > -N$ e $0 < q < N$.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados clássicos da Análise necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho, assim como alguns resultados relacionados às equações diferenciais que foram usados durante nossas demonstrações.

No Capítulo 2 estudamos o problema (CH), tratando a questão de existência de soluções positivas via Método de "Shooting", combinado com propriedades da aplicação $T : D(T) \subset (0,\infty) \to (0,\infty)$, a qual designaremos por "Aplicação Tempo".

No Capítulo 3 tratamos do problema (GS), que envolve o operador de Monge-Ampère, utilizando também o Método de "Shooting" combinado com argumentos de ponto fixo e princípios de comparação.

Finalizamos o trabalho com os Apêndices 1 e 2, relacionados respectivamente aos Capítulos 2 e 3, onde demonstramos alguns resultados utilizados durante as demonstrações principais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Ambrosetti, A. and Prodi, G., *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, (1993).

[2] Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*, John Wiley&Sons, New York, (1976).

[3] Calabi, E., *A construction of nonhomogeneous Einstein metrics*, Differential geometry, Part2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, 17-24.

[4] Chen, H., *Analysis of blowup for a nonlinear degenerate parabolic equation*, J. Math. Anal. Appl. 192, (1995), no. 1, 180-193.

[5] Chen, H., *On a singular nonlinear elliptic equation*, Nonlinear Anal. 29, (1997), no. 3, 337-345.

[6] Cheng, S. Y. and Yau, S. T., *On the regularity of the Monge-Ampère equation* $\det(\frac{\partial 2u}{\partial x_i \partial x_j}) = F(x,u)$, Comm. Pure Appl. Math. 30, no. 1,(1977), 41-68.

[7] Cirstea, F.; Ghergu, M. and Radulescu, V., *Combined effects of asymptotically linear and singular nonlinearities in bifurcation problems of Lane-Emden-Fowler type*, J. Math. Pures Appl. 84, (2005), 493-508.

[8] Coclite, M. and Palmieri, G., *On a singular nonlinear Dirichlet problem*, Comm. Partial Differential equations 14, (1989), 1315-1327.

[9] Cortázar, C.; Elgueta, M. and Felmer, P., *Symmetry in an elliptic problem and the blow-up set of a quasilinear heat equation*, Comm. Partial Differential Equations 21, no. 3, 4, (1996), 507-520.

[10] Cortázar, C.; Elgueta, M. and Felmer, P., *On a semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$ *with a non-Lipschitzian nonlinearity*, Adv. Differential Equations 1, no. 2, (1996), 199-218.

[11] Crandall, M.; Rabinowitz, P. and Tartar, L., *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 2, (1977), 193-222.

[12] Gatica, J. A.; Oliker, V. and Waltman, P., *Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations*, J. Differential Equations 79, (1989), no. 1, 62-78.

[13] Ghergu, M. and Radulescu, V., *Multiparameter bifurcation and asymptotics for the singular Lane-Emden-Fowler equation with convection term*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 135, (2005), 61-83.

[14] Gidas, B.; Ni, W. M. and Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68 , no. 3, (1979), 209-243.

[15] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Third edition, Berlin, (1997).

[16] Gonçalves, J. V. A. and Santos, C. A. P., *Quasilinear singular equations: a variational approach for nondifferentiable functionals*, Nonlinear Analysis 55, (2003), 583-607.

[17] Gonçalves, J. V. A. and Santos, C. A. P., *Classical solutions of singular Monge-Ampère equations in a ball*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 305, (2005), 240-252.

[18] Guan, B., *The Dirichlet problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 350, no. 12,(1998), 4955-4971.

[19] Gui, C., *Symmetry of the blow-up set of a porous medium type equation*, Comm. Pure Appl. Math. 48, no. 5, (1995), 471-500.

[20] Gui, C. and Lin, F. H., *Regularity of an elliptic problem with a singular nonlinearity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123, (1993), 1021-1029.

[21] Gutiérrez, C. E., *The Monge-Ampère equation*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 44, Boston, (2001).

[22] Hernández, J.; Karátson, J. and Simon, P. L., *Multiplicity for semilinear elliptic equations involving singular nonlinearity*, Nonlinear Analysis 65, (2006), 265-283.

[23] Hirano, N. and Shioji, N., *Existence of positive solutions for singular Dirichlet problems*, Diff. and Int. Eq. 14, no. 12, (2001), 1531-1540.

[24] Kaper, H. G.; Kwong, M. K. and Li, Y., *Simmetry results for reaction-diffusion equations*, Differential Integral Equations 6, no. 5, (1993), 1045-1056.

[25] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag, Paris, (1993).

[26] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Applications*, Wiley, United States of America, (1978).

[27] Lazer, A. C. and McKenna, P. J., *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 111, (1991), no. 3, 721-730.

[28] Lazer, A. C. and McKenna, P. J., *On singular boundary value problems for the Monge-Ampère operator*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 197, (1996), 341-362.

[29] Loewner, C. and Nirenberg, L., *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations*, in: Contributions to analysis, Academic Press, New York, (1975), 245-274.

[30] Ni, W. N., *Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems*, Journal of Differential Equations 50, (1983), 289-304.

[31] Ni, W. M. and Nussbaum, R. D., *Uniqueness and Nonuniqueness for Positive Radial Solutions of* $\triangle u + f(u, r) = 0$, Comm. on Pure and App. Math., vol. XXXVIII, (1985), 67-108.

[32] Nirenberg, L., *Monge-Ampère equations and some associated problems in geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C.), vol. 2, (1975), 275-279.

[33] Peral, I., *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, (1997).

[34] Radulescu, V. D., *Singular phenomena in nonlinear elliptic problems*, Craiova, (2000).

[35] Roberts, S. M. and Shipman, J. S., *Two-point boundary value problems: Shooting Methods*, American Elsevier, New York, (1972).

[36] Santos, C. A. P., *Soluções radialmente simétricas de problemas quasilineares singulares*, Tese de Doutorado, UnB, (2003).

[37] Santos, C. A. P. and Goncalves, J. V., *Singular Elliptic Problems: Existence, Non-Existence and Boundary Behavior*, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications, Estados Unidos, v. 66, (2007), 2078-2090.

[38] Smoller, J. A. and Wasserman, G., *Existence, uniqueness and nondegeneracy of positive solutions of semilinear elliptic equations*, Communications in Mathematical Physics 95, (1984), 129-159.

[39] Sun, Y. and Wu, S., *Iterative solution for a singular nonlinear elliptic problem*, Appl. Math. Comput. 118, (2001), 53-62.

[40] Sun, Y. and Wu, S., *Combined effects of singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems*, J. Differential Equations 176, (2001), 511-531.

[41] Wang, H., *Convex solutions of boundary value problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 318, (2006), 246-252.

[42] Wheeden, R. L. and Zygmund, A., *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, (1977).

[43] Yao, M. and Zhao, J., *Positive solution of a singular non-linear elliptic boundary value problem*, Appl. Math. Comput. 148, (2004), 773-782.

[44] Zhang, Z.,*Critical points and positive of singular elliptic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 302, (2005), 476-483.