Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Determinação de soluções explícitas para o problema termoelástico não-estático

Rangel Pinheiro da Silva

Abril de 2007

Dissertação de Mestrado orientada pelo professor Guy Grebot.

Resumo. Esta dissertação apresenta soluções explícitas para o problema termoelástico linear e isotrópico com base no método clássico de simetrias criado pelo matemático Sophus Lie. Para o cálculo destas soluções, apresentamos os geradores infinitesimais de simetrias que geram a álgebra associada ao sistema de equações diferenciais que representa o problema já citado. As soluções assim construídas são invariantes sob subálgebras de dimensão três.

Abstract. We present explicit solutions for the linear and isotropic thermoelastic problem on the basis of the classical method of symmetries created by the mathematician Sophus Lie. In order to compute these solutions, we present the infinitesimal generators of symmetries that generate the algebra associated to the system of differential equations under study. The constructed solutions are thus invariants under subalgebras of dimension three.

Capítulo 1

Introdução

O objetivo desta dissertação é encontrar soluções explícitas para o problema termoelástico linear. Nós iremos trabalhar com o caso isotrópico que é representado pelo sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \Delta_1 \equiv (\lambda + 2\mu)(u_1)_{xx} + (\lambda + \mu)(u_2)_{xy} + (\lambda + \mu)(u_3)_{xz} \\ \quad + \mu(u_1)_{yy} + \mu(u_1)_{zz} - \rho(u_1)_{tt} = 0 \\ \\ \Delta_2 \equiv (\lambda + \mu)(u_3)_{yz} + (\lambda + \mu)(u_1)_{xy} + (\lambda + 2\mu)(u_2)_{yy} \\ \quad + \mu(u_2)_{xx} + \mu(u_2)_{zz} - \rho(u_2)_{tt} = 0 \\ \\ \Delta_3 \equiv (\lambda + \mu)(u_1)_{xz} + (\lambda + \mu)(u_2)_{yz} + (\lambda + 2\mu)(u_3)_{zz} \\ \quad + \mu(u_3)_{yy} + \mu(u_3)_{xx} - \rho(u_3)_{tt} = 0. \end{cases}$$

Apesar dos vários métodos existentes, a tarefa de encontrar as soluções explícitas de determinadas equações diferenciais continua sendo árdua. Geralmente, são usados programas computacionais que encontram soluções aproximadas para tais equações.

No meio do século dezenove, o matemático Sophus Lie desenvolveu uma teoria que associa o conceito algébrico de grupo e o conceito de variedade diferenciável para construir soluções explícitas de sistemas de equações diferenciais. Dentro dessa teoria, foi desenvolvido o conceito de grupos de simetrias de sistemas de equações diferenciais que são grupos de transformações que levam soluções em outras soluções de um mesmo sistema.

Resumidamente, o método de Lie consiste em diminuir a dimensão do espaço das variáveis independentes, determinando assim um sistema mais simples de se trabalhar. Para o caso de equações diferenciais ordinárias, o método permite que equações de ordem n sejam transformadas em equações de ordem 1 e ainda englobar todas as soluções do sistema original.

A grande vantagem desse método vem do fato dele ser algorítmico. Dessa forma, o uso de programas computacionais de manipulação algébrica torna-se possível, e até desejável pois a determinação dos geradores de simetrias é uma tarefa extensa e cansativa que exige muitos cálculos. Em determinados sistemas, tais cálculos podem se tornar impraticáveis sem o auxílio computacional.

Com isso em mente, desenvolvemos rotinas no programa computacional MAPLE (ver CD anexo) que permitem, por exemplo, calcular os grupos de simetrias interativamente. Dentre essas rotinas criadas, não foi usado nenhum pacote ou comando do MAPLE que envolvesse o método de Lie.

Nesta dissertação, usaremos este método para obter soluções explícitas do sistema dado acima.

O problema estático já foi abordado em [7] e, desse modo, esta dissertação completa e resolve totalmente o problema em questão.

No capítulo 2, será apresentada a teoria essencial para o cálculo de grupos de simetrias. Em seguida, no capítulo 3, além de fazer uma breve exposição teórica sobre o problema termoelástico linear, calculamos os geradores infinitesimais de simetrias do sistema acima. Tais geradores permitem o cálculo dos grupos de simetrias do sistema. Por fim, o capítulo 4 traz a teoria que permite transformar o sistema acima em um sistema de equações diferenciais ordinárias e, além disso, também traz suas soluções explícitas.

Bibliografia

[1] Olver, Peter J. *Applicacions of Lie groups to differential equations.*-2nd ed. (Graduate texts in mathematics; 107). Springer-Verlag.

[2] Carmo, M.P.do *Geometria Riemanniana.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - 2^a edição.

[3] Ince E. L. *Ordinary differential equations.* Logans, Green and Co., London, 1926.

[4] Herstein I. N. *Topics in algebra.* Blaisdell Publishing Company, 1964.

[5] Ruggeri, E. R. F. *A solution for the linear elastic anisotropic body problem.* Furnas Centrais Elétricas.

[6] Ruggeri, E. R. F. *A resolução completa do problema termoelástico linear e unicidade da sua solução.* Revista Escola de Minas - REM -, 42(3):36-48, em 1989.

[7] Oliveira, N. M. P. de *Determinação de soluções invariantes para o problema termo-elástico.* Universidade de Brasília. Dissertação de Mestrado. 2005.

[8] Akamatsu, M., Nakamura, G. and Steinberg, S. *Identification of Lamé coefficients from boundary observations.* Inverse Problems 7 (1991) 335-354. Printed in the UK.

[9] Kreyszig, E. *Matemática Superior 1.* -2nd ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.