Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Imersões Taut de Superfícies não Compactas

por

Anyelle Nogueira de Souza

Brasília
2007

Resumo

O objetivo deste trabalho é provar, com base no artigo de Thomas E. Cecil, que se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão taut de uma superfície não compacta e conexa, então $f(M)$ é um hiperplano ou uma cíclide de Dupin completa.

Abstract

Our purpose is to prove, based on a paper of Thomas E. Cecil, that if $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ is a taut immersion of a connected noncompact surface, then $f(M)$ is either a hyperplane or a complete cyclide of Dupin.

Introdução

O objetivo deste trabalho é provar com base no artigo [5] de Thomas E. Cecil, que se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão taut de uma superfície não compacta e conexa, então $f(M)$ é um hiperplano ou uma cíclide de Dupin completa.

As imersões taut de superfícies compactas em $\mathbb{R}^n$ já são todas conhecidas pelo trabalho de Kuiper [9] e Banchoff [1]. Em particular, Banchoff mostrou que se $n = 3$, $f(M)$ é uma esfera euclideana ou uma cíclide de Dupin.

Combinando este resultado com o obtido por Cecil para superfícies não compactas concluimos que se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão taut de uma superfície conexa, então $f(M)$ é totalmente umbílica ou uma cíclide de Dupin completa.

Observamos que o resultado de Banchoff foi generalizado em [12] por Nomizu e Rodrigues que mostraram que uma imersão taut de uma m-esfera em $\mathbb{R}^n$ deve ser, de fato, uma esfera euclideana $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^n$. Diversas outras generalizações foram obtidas por Carter e West [2].

Por outro lado, Carter e West [2] provaram que se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão taut de uma superfície não compacta, então $f(M) \subset \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^n$. Se $f(M)$ não está totalmente contida em $\mathbb{R}^3$, então $f(M) = P(V)$, onde V é a superfície de Veronese [9] em S^4 e P é a projeção estereográfica de S^4 em $\mathbb{R}^4$ com respeito a um ponto de V.

Assim o estudo das possíveis imersões taut $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde M é não compacta, foi reduzido ao estudo de todas as imersões taut de M em $\mathbb{R}^3$. Tais imersões são o tema deste trabalho.

O conceito de imersões taut envolve as funções distância dos pontos de $f(M)$ a um ponto p de $\mathbb{R}^n$. Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão suave de uma superfície M diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Para $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in M$, a função $L_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $L_p(x) = d(f(x), p)^2$, onde d é a distância euclideana em $\mathbb{R}^n$. A imersão f é dita própria se a imagem inversa sob f de qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ é compacta. Segundo Carter e West [2], uma imersão é dita taut, se f é própria e toda função de Morse L_p , $p \in \mathbb{R}^n$, tem um número mínimo de pontos críticos requerido pelas desigualdades de Morse [11].

A definição precisa de imersão taut será dada no Capítulo 1, onde vamos incluir também a noção de ponto focal. Tais pontos serão caracterizados em termos dos pontos críticos das funções L_p.

As cíclides de Dupin serão definidas no Capítulo 2 como superfícies que são o envelope de duas famílias a 1-parâmetro de esferas (incluindo os planos como esferas degeneradas). Tais superfícies serão localmente e globalmente caracterizadas em termos das curvaturas principais, de suas linhas de curvatura e também por suas superfícies focais. O resultado principal será provado no capítulo 3.

Referências Bibliográficas

[1] Banchoff, T. F., *The spherical two-piece property and tight surfaces in spheres*, J. Differential Geometry, **4** 193-205 (1970).

[2] Carter, S. e West, A., *Tight and taut immersions*, Proc. London Math. Soc., **25** 701-720 (1972).

[3] Cecil, T., *A characterization of metric spheres in hyperbolic space by Morse theory*, Tôhoku Math. J., **26** 341-351 (1974).

[4] Cecil, T., *Geometric applications of critical point theory to submanifolds of complex projective space*, Nagoya Math. J., **55** 5-31 (1974).

[5] Cecil, T. E., *Taut immersions of noncompact surfaces into a euclidean 3-space*, J. Diferential Geometry, **11** 451-459, (1976).

[6] de Rham, *Variétés Différentiables*, Herman, Paris, (1955).

[7] Eisenhart, E., *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Constable, London, (1909).

[8] Goetz, A., *Introduction to differential geometry*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1970).

[9] Kuiper, N. H., *On convex maps*, Nieuw Arch. Wisk, **10** 147-164 (1962).

[10] Milnor, J., *Morse theory*, Ann. of Math. Studies, No. **51**, Princeton University Press, Princeton, (1963).

[11] Morse, M. e Cairns, S., *Critical point theory in global analysis and differential topology*, Academic Press, New York, (1969).

[12] Nomizu, K. e Rodriguez, L., *Umbilical submanifolds and Morse funtions*, Nagoya Math. J., **48** 197-201 (1972).

[13] Rodrigues, L. M. D., *Classes de Hipersuperfícies de Dupin*, Tese de Doutorado, Brasília, (2005).