

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Probabilidade de Ruína no Modelo de Sparre
Andersen Modificado pela Inclusão de Juro
Composto Continuamente

por

Fágner Lemos de Santana

Brasília
2006

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Probabilidade de Ruína no Modelo de Spare Andersen Modificado pela Inclusão de Juro Composto Continuamente

por

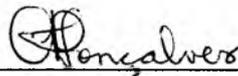
Fágner Lemos de Santana*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

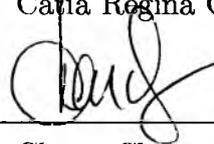
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 16 de março de 2006

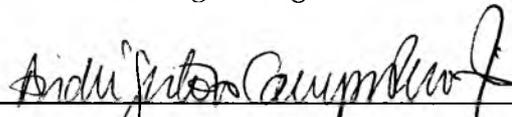
Comissão Examinadora:



Prof^a. Dr^a. Cária Regina Gonçalves - UnB (Orientadora)



Prof^a. Dr^a. Chang Chung Yu Dorea - UnB



Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira - UFRN

*O autor foi bolsista do CNPq/CAPES durante a elaboração deste trabalho.

*Dedico esta dissertação aos meus pais, meu
irmão Flávio e a minha namorada Fabiana.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus pais e ao meu irmão Flávio que, mesmo de tão longe, me deram todo o apoio pra que eu chegasse até aqui.

A minha namorada Fabiana pelos momentos que passamos juntos o que contribuiu muito para o sucesso dessa dissertação.

A minha orientadora, **Professora** Cátia Gonçalves pela orientação, pela paciência que demonstrou durante todo o último ano e principalmente pelas aulas incríveis de probabilidade, as quais me incentivaram ainda mais a ir para esta área.

A professora Chang Dorea pelas dicas e por ter aceitado participar da banca, tendo pouco tempo para ler o trabalho.

Ao professor/amigo André Gustavo, não só por ter aceitado participar da banca, fazendo várias correções que este trabalho precisava, tendo pouquíssimo tempo mas por todo o apoio que me deu durante os últimos quatro anos, sem o qual com certeza não teria chegado tão longe.

Aos professores do departameto de matemática da Unb José Alfredo, Hemar, Pedro, Raderson, Baigorri, Marcelo, Aline, Elvis e Nigel. Aos funcionários Manoel, Sandra e Tânia.

Aos meus professores da UFRN Viviane, Roberto Sá, Benedito, Gurgel, Marcelo, Rubens Leão, Ronaldo, Jaques e Marcos André.

Aos amigos da UFRN Júnior, Suzy, Débora, Enai, Désio, Daniel (pequeno), Francisco, Adriano Thiago, Francisco Márcio, Márcio, Lindenberg, Geovani, Mácia, Kaline, Jefferson, Aninha, Camila. Da UFCG Taty, Lya, Rafael, Marta e Jackélia.

Finalmente aos grandes amigos da UnB Evander, Thiago, Jander, Everson(est...), Fernando, Daniel(doido), Bianka, Sandrinha, Aline, Jhone, Raquel, Abílio, Letícia, Willian, André, Daniel(zin), Hélio, Elson, Zhou, Luverci, Anderson(Perigoso) e família, Leo, Juliana, Débora, Adriana, Euro, Anniely, Sérgio, Tertuliano, Ricardo(tchê), Allan, Valnei, Flávio, Porfírio, Élida, Luciene, Cira, Ney, Elenilson e ao meu “guru”o “reverendo”Walter Cotonete.

Agradeço a CAPES e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema da probabilidade de ruína para o modelo de risco de Sparre Andersen (ou modelo de renovação). Primeiramente, apresentamos dois limitantes superiores para a probabilidade de ruína, usando técnicas recursivas e de martingales. Depois, consideramos o modelo de Sparre Andersen modificado pela inclusão de juro composto continuamente sob uma taxa fixa $\delta > 0$. Usando as mesmas técnicas do modelo original, apresentamos dois limitantes superiores exponenciais para a probabilidade de ruína no modelo com juros, os quais foram obtidos por Cai e Dickson(2003).

Palavras-chave: processos de risco, processo de renovação, desigualdade de Lundberg, coeficiente de ajuste, taxa de juro, modelo de Sparre Andersen, equação integral recursiva, martingale.

Abstract

In this work, we study the ruin probability problem in the Sparre Andersen risk model (or renewal model). Firstly, two exponential type upper bounds for the ruin probability are presented by using martingale and recursive techniques. After, we consider the Sparre Andersen model modified by the inclusion of interest on the surplus, proposed by Cai and Dickson(2004). By using the same techniques as the original model we present two exponential upper bounds for the ruin probability in the model with interest, which were obtained by Cai and Dickson(2003).

Key words: risk processes, renewal process, Lundberg's inequality, adjustment coefficient, force of interest, Sparre Andersen model, recursive integral equation, martingale.

Sumário

1	Modelo de Sparre Andersen	6
1.1	Introdução	6
1.2	Processos de Renovação	7
1.3	Descrição do modelo de Sparre Andersen	9
1.4	Estimativas para probabilidade de ruína no modelo de Sparre Andersen . .	13
1.5	Uma equação para probabilidade de ruína no modelo de Sparre Andersen .	25
2	Estimativas para probabilidade de ruína no modelo com juro	28
2.1	Introdução	28
2.2	Inclusão do juro	29
2.3	Estimativa Obtida Usando Martingales	33
2.4	Estimativa Obtida Usando Técnicas Recursivas	36
2.5	Existência e unicidade dos coeficientes de ajuste no modelo com juro . . .	42
2.6	Modelo de Lundberg com juro	45
	Referências Bibliográficas	50

Introdução

Filip Lundberg foi o pioneiro no desenvolvimento da Teoria Clássica de Risco Coletivo. Em 1903, na sua tese de doutorado, ele introduziu um conceito completamente novo em teoria de risco. No modelo apresentado por Lundberg, os contratos de seguro são agrupados em classes e o superávit da seguradora consiste do capital inicial, do recebimento de prêmios e das perdas devido ao pagamento de indenizações. O primeiro tratamento substancial do modelo foi apresentado por Lundberg (1926). No entanto, a base matemática rigorosa da teoria foi fundamentada por Crámer (1930,1955).

No modelo proposto por Lundberg, conhecido como *modelo clássico de risco*, assume-se que o processo de chegadas dos pedidos de indenizações é um processo de Poisson homogêneo, as quantias de indenizações são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), independentes dos tempos de ocorrências das indenizações, e a entrada dos prêmios é linear no tempo.

Sob estas hipóteses, Lundberg apresentou uma desigualdade, que ficou conhecida como desigualdade de Lundberg, a qual fornece um limitante superior para a *probabilidade de ruína*, assumindo-se a existência de um certo coeficiente de ajuste. O termo *ruína* é oriundo do problema da ruína do jogador na teoria de probabilidade. No contexto da teoria de risco, diz-se que ocorre a ruína quando a reserva de capital (superávit) atinge um valor negativo em algum tempo finito. Somente em alguns casos especiais, como por exemplo, no caso das quantias de indenizações serem exponencialmente distribuídas, é possível obter uma expressão exata para a probabilidade de ruína. Assim, um dos problemas principais

da teoria de risco é a obtenção de estimativas precisas para a probabilidade de ruína.

Uma extensão natural do modelo clássico é considerar o processo de chegadas dos pedidos de indenizações como um processo de renovação, ou seja, um processo de contagem onde os tempos entre as chegadas das indenizações são i.i.d. com distribuição arbitrária. No caso particular do processo de Poisson esta distribuição é a exponencial. O primeiro a apresentar o modelo de risco usando o processo de renovação foi Sparre Andersen (1957), por isto, este modelo tem sido chamado de *modelo de Sparre Andersen*. Uma equação integral para a probabilidade de ruína e a extensão da desigualdade de Lundberg para o modelo de renovação foram obtidas por Sparre Andersen. Desde então vários autores têm estudado as propriedades deste modelo. Dentre eles, podemos citar Thorin (1970,1971), Takács (1970), von Bahr (1974) e Malinovskii (1998).

No entanto, no modelo de Sparre Andersen, e em particular no modelo clássico de Lundberg, a movimentação de capital não é muito realista. Nos dias atuais é natural considerar, por exemplo, a entrada de rendimentos provenientes do investimento do capital em aplicações financeiras. Desta forma, variações do modelo original que melhor se ajustem às necessidades práticas têm sido objeto de estudo dos pesquisadores da área de risco.

Neste trabalho, nos concentramos no problema da ruína para o modelo de Sparre Andersen modificado pela inclusão de juro composto continuamente, baseados em Cai e Dickson(2003).

Assim, no Capítulo 1 estudamos o modelo original de Sparre Andersen, que pode ser descrito como

$$U(t) = u + ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad (1)$$

onde $U(0) = u$ é o capital inicial, $U(t)$ representa a reserva de capital no instante t , $c > 0$ é a taxa de entrada de prêmios, Y_k é o valor da k -ésima indenização paga e $N(t)$ denota o número de indenizações ocorridas até o instante t . O processo $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de renovação, $\{Y_n, n \geq 1\}$ são v.a.'s i.i.d. não-negativas e independentes do processo de

chegadas de indenizações.

Uma forma de se estudar os modelos de risco a tempo contínuo é considerar o valor do capital da empresa apenas nos tempos de chegadas dos pedidos de indenizações, ou seja, considera-se o processo a tempo discreto, associado ao modelo $U(t)$, definido por

$$\begin{aligned} U_n &= U(T_n) \\ &= u + \sum_{k=1}^n (cX_k - Y_k), \end{aligned} \tag{2}$$

onde $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ é o tempo de chegada da n -ésima indenização e X_k representa o tempo entre a chegada da k -ésima e a $(k-1)$ -ésima indenizações. As variáveis $\{X_k\}_{k \geq 1}$ são i.i.d., não-negativas e independentes das quantias de indenizações $\{Y_k\}_{k \geq 1}$.

Todo o desenvolvimento deste trabalho é baseado nesta estratégia de discretização do processo a tempo contínuo.

Com isso, apresentamos (Teorema 1.4) a demonstração da desigualdade de Lundberg para o modelo de Sparre Andersen, utilizando técnicas da teoria de martingales, seguindo Grandell (1991). Um segundo limitante superior exponencial para a probabilidade de ruína, mais refinado do que o de Lundberg, é também considerado. A demonstração utiliza técnicas recursivas e é uma adaptação da prova apresentada em Cai e Dickson (2003) para o modelo com inclusão de juro. Ambas as estimativas para a probabilidade de ruína assumem a existência do coeficiente de ajuste de Lundberg e condições suficientes para a existência e unicidade deste coeficiente são também obtidas.

Finalizando o capítulo, apresentamos uma equação para a probabilidade de ruína do modelo de Sparre Andersen, que possibilita o cálculo exato da probabilidade de ruína para alguns casos especiais, como na presença de quantias de indenizações exponencialmente distribuídas.

A inclusão de juro composto continuamente é tratada no Capítulo 2. Seguindo Cai e Dickson (2003) apresentamos o modelo discreto, associado ao modelo contínuo, modificado pela inclusão de juro. Neste modelo, assume-se que a seguradora recebe juro sobre sua

reserva de risco a uma taxa de juro constante $\delta > 0$ composto continuamente. Assim, o processo dos valores acumulados da reserva de capital, calculados nos tempos $T_n, n \geq 1$, de pagamentos das indenizações, é descrito como

$$\begin{aligned} U_n^{(\delta)} &= U_\delta(T_n) = U_{n-1}^{(\delta)} e^{\delta X_n} + \frac{c(e^{\delta X_n} - 1)}{\delta} - Y_n \\ &= u e^{\delta T_n} + \frac{c(e^{\delta T_n} - 1)}{\delta} - \sum_{k=1}^n Y_k \exp\left\{\delta \sum_{i=k+1}^n X_i\right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

onde adotamos a convenção $\sum_a^b = 0$, quando $b < a$. As variáveis $\{X_k\}$ e $\{Y_k\}$ são como no modelo original de Sparre Andersen.

Associado ao modelo $U_n^{(\delta)}$ definimos o processo dos valores presentes como sendo:

$$\begin{aligned} V_n^{(\delta)} &= U_n^{(\delta)} e^{-\delta T_n} \\ &= u + \frac{c(1 - e^{-\delta T_n})}{\delta} - \sum_{k=1}^n Y_k \exp\left\{-\delta \sum_{i=1}^k X_i\right\} \\ &= u + c a_{T_n} - \sum_{k=1}^n Y_k e^{-\delta T_k}, \end{aligned} \quad (4)$$

onde $a_t = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$ indica o valor presente de uma anuidade pagável continuamente no tempo, sob uma taxa $\delta > 0$ de juro composto continuamente.

Com o auxílio do processo $\{V_n^{(\delta)}, n \geq 0\}$ e utilizando técnicas de martingales apresentamos a extensão da desigualdade de Lundberg, obtida por Cai e Dickson (2003), sob a hipótese da existência de um certo coeficiente de ajuste associado a $\{V_n^{(\delta)}\}$.

Em seguida, considerando o modelo $\{U_n^{(\delta)}\}$, apresentamos um segundo limitante superior exponencial para a probabilidade de ruína no modelo de Sparre Andersen com juros. Este limitante foi obtido por Cai e Dickson (2003) utilizando técnicas recursivas e assumindo-se a existência de um outro coeficiente de ajuste, associado ao modelo $\{U_n^{(\delta)}\}$. Além disso, condições suficientes para a existência e unicidade dos coeficientes de ajuste associados aos modelos $\{U_n^{(\delta)}\}$ e $\{V_n^{(\delta)}\}$ são também consideradas.

Finalmente, encerramos este trabalho apresentando a aplicação dos resultados obtidos ao modelo clássico de risco com juros, onde os tempos entre chegadas de indenizações são exponencialmente distribuídos.

Cabe observar que não foi obtido nenhum resultado conclusivo a respeito da melhor precisão entre as duas estimativas apresentadas. No entanto, uma análise numérica realizada por Cai e Dickson (2003) indica que o limitante superior exponencial obtido usando técnicas recursivas é mais refinado do que o limitante derivado das técnicas de martingales.

Capítulo 1

Modelo de Sparre Andersen

1.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos o modelo de risco de Sparre Andersen, que foi originalmente apresentado por Erik Sparre Andersen em 1957 no International Congress of Actuaries em Nova York.

Este modelo é uma generalização do modelo de risco clássico de Lundberg, no qual o processo de chegada de indenizações é um processo de Poisson composto. Ao invés de assumir que os tempos entre ocorrências de indenizações são variáveis aleatórias i.i.d. exponencialmente distribuídas, como no modelo de Lundberg, Sparre Andersen manteve a hipótese de independência e assumiu que os tempos entre chegadas de indenizações têm uma distribuição comum arbitrária $G(x)$. Ou seja, o processo de chegadas de indenizações é um processo de renovação.

Assim, na Seção 1.2 apresentamos alguns conceitos e propriedades básicas de processos de renovação.

Uma descrição detalhada do modelo de Sparre Andersen é apresentada na Seção 1.3. Além disso, definimos nesta mesma seção o modelo de risco a tempo discreto associado

ao modelo original a tempo contínuo, o qual nos auxiliará na análise da probabilidade de ruína do modelo a tempo contínuo.

O problema principal no estudo de processos de risco é a obtenção de estimativas para a probabilidade de ruína. Na Seção 1.4, apresentamos dois limitantes superiores para a probabilidade de ruína do modelo de Sparre Andersen. O primeiro deles (Teorema 1.4) é fornecido pela mesma desigualdade de Lundberg do caso clássico. A demonstração apresentada aqui, diferentemente da prova original de Sparre Andersen (1957), utiliza a abordagem via martingales. A segunda desigualdade (Teorema 1.5) fornece um limitante superior exponencial mais refinado do que o fornecido pela desigualdade de Lundberg e sua demonstração utiliza as mesmas técnicas recursivas de Cai e Dickson (2003) para o modelo com juro, a ser estudado no segundo capítulo.

Para finalizar, apresentamos na Seção 1.5 uma equação, semelhante à obtida para o modelo de Lundberg, que possibilita em alguns casos o cálculo exato da probabilidade de ruína para o modelo de Sparre Andersen.

1.2 Processos de Renovação

Nesta seção, relembramos a definição e algumas propriedades básicas de processos de renovação, que serão úteis para o entendimento do restante do trabalho.

Um estudo mais detalhado sobre processos de renovação pode ser encontrado por exemplo em Ross (1980) ou Grimmett e Stirzaker (2001).

Definição 1.1. *Um processo de contagem $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ é chamado um processo de renovação se para cada $t \geq 0$*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\},$$

onde

$$T_0 = 0, \quad T_n = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ para todo } n \geq 1$$

e X_m , $m \geq 1$ são v.a.'s não-negativas, independentes e identicamente distribuídas.

Podemos interpretar $N(t)$ como o número de chegadas de eventos (renovações) no intervalo de tempo $[0, t)$. Desta forma, T_n representa o tempo de chegada do n -ésimo evento e $X_n = T_n - T_{n-1}$ o tempo entre a chegada do $(n - 1)$ -ésimo e o n -ésimo evento.

É possível verificar que as distribuições finitas de um processo de renovação $\{N(t)\}$ são especificadas pela distribuição de X_n .

Um exemplo importante é o processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, para o qual os tempos entre chegadas $\{X_n\}$ têm distribuição exponencial de parâmetro λ .

No teorema a seguir, reunimos dois dos principais resultados sobre o comportamento assintótico de $N(t)$ e $EN(t)$, quando $t \rightarrow \infty$. O resultado do item (b) é conhecido como Teorema Elementar de Renovação.

Teorema 1.1. *Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de renovação, com tempos entre chegadas $\{X_n, n \geq 1\}$. Se $EX_1 < +\infty$, então*

$$(a) \quad \frac{N(t)}{t} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{EX_1}, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

$$(b) \quad \frac{EN(t)}{t} \xrightarrow{q.c.} EX_1, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Note que $N(t) \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow +\infty$.

Agora, considere um processo de renovação $N(t)$ com tempos entre-chegadas X_1, X_2, \dots e suponha que a cada chegada de renovação esteja associada uma recompensa. Suponha que os sucessivos valores das recompensas sejam variáveis aleatórias i.i.d. denotadas por Y_1, Y_2, \dots , respectivamente.

Dessa maneira, o valor total de recompensas recebidas até um determinado tempo t é dado por

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k. \tag{1.1}$$

Note que os custos são interpretados como recompensas negativas.

Quando as sequências $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ são tais que os vetores aleatórios (X_n, Y_n) são i.i.d., podendo X_n depender de Y_n , dizemos que o processo $S(t)$ dado por (1.1) é um Processo de Recompensa por Renovação. Um exemplo deste tipo de processo aparece, como veremos mais adiante, na teoria de processos de risco.

No caso em que as variáveis X_1, X_2, \dots possuem distribuição comum exponencial, ou seja, $N(t)$ é um processo de Poisson, o processo de recompensa por renovação recebe o nome de Processo de Poisson Composto.

O teorema a seguir, mostra o comportamento assintótico de $S(t)$ e de sua média quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 1.2. *Considere o processo de recompensa por renovação $S(t)$ dado por (1.1). Se $EX_1 < +\infty$, $EY_1 < +\infty$, então*

$$(a) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{EY_1}{EX_1} \text{ q.c..}$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[S(t)]}{t} = \frac{EY_1}{EX_1} \text{ q.c..}$$

O primeiro resultado é uma consequência do Teorema 1.1.(a) e de uma variação da Lei Forte dos Grandes. A prova do item (b) é mais complexa e necessita do conhecimento de resultados da Teoria Clássica de Renovação.

1.3 Descrição do modelo de Sparre Andersen

Considere a evolução do capital de uma empresa de seguros ao longo do tempo. Suponha que no instante $t = 0$ o capital inicial da seguradora é $u \geq 0$ e que o recebimento de prêmios seja linear no tempo com taxa $c > 0$. A chegada dos pedidos de indenizações ocorre de acordo com um processo de renovação $\{N(t), t \geq 0\}$.

Sejam X_1, X_2, \dots os tempos entre-chegadas de pedidos de indenizações e T_1, T_2, \dots os tempos de chegadas das sucessivas indenizações. Assim, $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ é o tempo de chegada da n -ésima indenização e o número de indenizações até o tempo t é dado por $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$. O valor da n -ésima indenização será denotado por Y_n .

Vamos assumir que $\{Y_n, n \geq 0\}$ são v.a.'s não-negativas i.i.d. com função de distribuição comum $F(x)$, onde $F(0) = 0$. As v.a.'s não-negativas $\{X_n, n \geq 0\}$ são i.i.d. com função de distribuição comum $G(x)$, com $G(0) = 0$ e independentes de $\{Y_n, n \geq 0\}$. Assumiremos que X_1 e Y_1 têm esperanças finitas.

Desta forma, o modelo de risco conhecido com *modelo de Sparre Andersen*, ou modelo de renovação, é dado por

$$U(t) = u + ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad (1.2)$$

ou seja, $U(t)$ representa a reserva de capital da seguradora no instante $t \geq 0$ e $U(0) = u$.

Este modelo foi proposto por Sparre Andersen em 1957, como uma generalização do modelo de risco clássico, introduzido por Lundberg em 1903, no qual a chegada dos pedidos de indenizações ocorre de acordo com um processo de Poisson.

Um dos principais interesses no estudo de processos de risco, consiste na análise da probabilidade de que a reserva de capital da empresa atinja valores negativos, ou seja, a probabilidade de que ocorra a *ruína* da empresa.

O *tempo de ruína* no processo dado por (1.2) é definido como

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 ; U(t) < 0\}. \quad (1.3)$$

Assim, a *probabilidade de ruína* associada ao modelo (1.2) é definida por

$$\psi(u) = P(\tau(u) < \infty) = P(\inf_{t \geq 0} U(t) < 0) = P\left(\bigcup_{t \geq 0} (U(t) < 0)\right). \quad (1.4)$$

Uma hipótese geralmente assumida é que

$$cEX_1 > EY_1, \quad (1.5)$$

ou seja, o valor médio dos prêmios recebidos entre um pedido de indenização e outro é superior ao valor médio das indenizações a serem pagas. Esta condição garante que $\psi(u) < 1$, conforme mostraremos no teorema abaixo.

Para isto, podemos observar que o processo das quantias de indenizações agregadas dado por

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad (1.6)$$

é um processo de recompensa por renovação, conforme definido na seção anterior. Assim, o teorema a seguir é uma consequência do Teorema 1.2.

Teorema 1.3. *Considere o processo de risco (1.2). Se $cEX_1 < EY_1$, então a ruína será certa, ou seja, $\psi(u) = 1$. Se $cEX_1 > EY_1$, então $\psi(u) < 1$ para todo u suficientemente grande.*

Demonstração: De (1.2) e (1.6) podemos escrever

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0,$$

então, como $S(t)$ é um processo de recompensa por renovação, do Teorema 1.2, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = c - \frac{EY_1}{EX_1} = \frac{cEX_1 - EY_1}{EX_1}.$$

Assim, como $EX_1 > 0$, se $cEX_1 < EY_1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = -\infty$. Portanto, $\inf_{t \geq 0} U(t) = -\infty$ e $\psi(u) = P(\inf_{t \geq 0} U(t) < 0) = 1$.

Por outro lado, se $cEX_1 > EY_1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = +\infty$ e $\inf_{t \geq 0} U(t) > -\infty$. Portanto, para um capital inicial u suficientemente grande teremos $\psi(u) < 1$.

■

Uma abordagem que tem sido utilizada para facilitar o estudo da probabilidade de ruína em processos de risco a tempo contínuo é a discretização do processo. Essa discretização é feita considerando o valor do capital da empresa apenas nos tempos de chegada dos pedidos de indenizações, ou seja, considera-se apenas $U(T_1), U(T_2), \dots$

Note que, o capital da empresa sofre perda apenas quando chega um pedido de indenização. Logo, a ruína do processo só vai ocorrer em um dos tempos de chegada T_n . Assim, para estudarmos a probabilidade de ruína no modelo dado por (1.2), podemos usar o processo a tempo discreto associado ao processo $U(t)$, que é dado por

$$\begin{aligned}
 U_n &= U(T_n) \\
 &= u + cT_n + \sum_{k=1}^n Y_k \\
 &= u + \sum_{k=1}^n (cX_k - Y_k) \\
 &= U_{n-1} + cX_n - Y_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Assim, podemos reescrever o tempo de ruína como

$$\tau(u) = \min\{n \geq 1 ; U_n = U(T_n) < 0\} \tag{1.8}$$

e a probabilidade de ruína como

$$\psi(u) = P(\tau(u) < \infty) = P(\min_{n \geq 1} U(T_n) < 0) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} (U(T_n) < 0)\right). \tag{1.9}$$

Observe que utilizando o processo a tempo discreto U_n , temos uma prova alternativa do Teorema 1.3, aplicando diretamente a Lei Forte dos Grandes Números. De fato, de (1.7) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u + \sum_{k=1}^n (cX_k - Y_k)}{n}.$$

Logo, como $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ são i.i.d. com médias finitas segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n} = cEX_1 - EY_1.$$

Se $cEX_1 - EY_1 > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$ e $\min_{n \geq 1} \{U(T_n)\} > -\infty$. Portanto, para um capital inicial suficientemente grande teremos $\psi(u) < 1$.

1.4 Estimativas para probabilidade de ruína no modelo de Sparre Andersen

Naturalmente, o cálculo da probabilidade de ruína, $\psi(u)$, depende das distribuições de X_1 e Y_1 . Mesmo conhecendo tais distribuições, o cálculo exato desta probabilidade pode não ser simples. Uma alternativa para estes casos é a obtenção de estimativas para $\psi(u)$.

Nesta seção apresentamos dois limitantes superiores diferentes para a probabilidade de ruína do modelo de Sparre Andersen.

Iniciaremos com o resultado obtido originalmente por Sparre Andersen(1957). Ele provou para o modelo de renovação (1.2), a mesma desigualdade de Lundberg do modelo clássico de Poisson. Esta desigualdade apresenta um limitante superior exponencial para a probabilidade de ruína, sob a hipótese da existência de um coeficiente de ajuste.

A demonstração que apresentaremos a seguir utiliza técnicas da teoria de martingales, seguindo Grandell(1991). A prova apresentada por Sparre Andersen utiliza métodos recursivos completamente diferentes.

Assim, denote por $Z_k = cX_k - Y_k$. Então, $\{Z_k, k \geq 1\}$ é uma sequência de v.a.'s i.i.d., para a qual estamos supondo $EZ_1 > 0$. Para a obtenção dos limitantes superiores exponenciais para $\psi(u)$ vamos assumir que existe uma constante $R_0 > 0$ satisfazendo

$$Ee^{-R_0Z_k} = 1. \quad (1.10)$$

Essa constante é chamada *coeficiente de ajuste* ou coeficiente de Lundberg do processo de risco $U(t)$ definido em (1.2) ou respectivamente do processo associado U_n .

Usando o fato que Z_n não depende de U_1, \dots, U_{n-1} e que U_{n-1} é $\sigma(U_1, U_2, \dots, U_n)$ -

mensurável segue

$$\begin{aligned}
 E(e^{-R_0 U_n} | e^{-R_0 U_1}, \dots, e^{-R_0 U_{n-1}}) &= (e^{-R_0(U_{n-1} + Z_n)} | e^{-R_0 U_1}, \dots, e^{-R_0 U_{n-1}}) \\
 &= e^{-R_0 U_{n-1}} E(e^{-R_0 Z_n} | e^{-R_0 U_1}, \dots, e^{-R_0 U_{n-1}}) \\
 &= e^{-R_0 U_{n-1}} E(e^{-R_0 Z_n}) = e^{-R_0 U_{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $e^{-R_0 U_n}$ é uma martingale. A existência desse coeficiente de ajuste vai depender de algumas hipóteses sobre as distribuições de X_1 e Y_1 . A seguir, veremos algumas condições para a existência e unicidade deste R_0 .

Condição 1.1. *Seja $M_{Y_1}(r) = Ee^{rY_1}$ a função geradora de momentos da variável Y_1 . Suponha:*

- (a) $M_{Y_1}(r)$ é finita para todo r , com $0 < r < \xi$ (podendo ser $\xi = +\infty$);
- (b) $\lim_{r \rightarrow \xi} M_{Y_1}(r) = +\infty$.

Note que a Condição (b) implica em $M_{Y_1}(r) = +\infty$, para todo $r \geq \xi$, pois $E(e^{rY_1}) \geq E(e^{\xi Y_1})$ para $r \geq \xi$.

Como a variável Y_1 é não-negativa (q.c.), então $Ee^{rY_1} \leq 1 < \infty$ para todo $r < 0$. Assim:

$$M_{Y_1}(r) = Ee^{rY_1} < +\infty, \text{ para todo } r \in (-\xi, \xi).$$

Proposição 1.1. *Assuma que a Condição 1.1 é satisfeita e $E(Y_1 - cX_1) < 0$. Se $\xi < +\infty$, então existe um único $R_0 > 0$ tal que:*

$$Ee^{-R_0(Y_1 - cX_1)} = 1. \tag{1.11}$$

Se $\xi = \infty$ e $P(Y_1 - cX_1 \leq 0) < 1$ então (1.11) é válida.

Demonstração: Como consequência da Condição 1.1, temos que $M_{Y_1}(r) < +\infty \forall 0 < r < \xi$.

Agora, seja $h(r)$ a função geradora de momentos da variável $Z_1 = Y_1 - cX_1$, ou seja,

$$h(r) = E(e^{r(Y_1 - cX_1)})$$

Como X_1 e Y_1 são independentes temos

$$h(r) = Ee^{rY_1} Ee^{-rcX_1} = M_{Y_1}(r)M_{X_1}(-cr).$$

Mas, $M_{X_1}(-cr) \leq 1$ para todo $r \geq 0$ (pois por hipótese $c > 0$) e $M_{Y_1}(r) < \infty$ para todo $0 \leq r < \xi$ então

$$h(r) < \infty, \forall 0 \leq r < \xi.$$

Então segue que h é uma função contínua em $(0, \xi)$,

$$h''(r) = E[Z_1^2 e^{rZ_1}] > 0, \forall 0 < r < \xi$$

e a sua derivada a direita no zero é

$$h'_+(0) = EZ_1 = E(Y_1 - cX_1) < 0.$$

Assim, h é uma função contínua, estritamente convexa em $[0, \xi)$ e decrescente em um intervalo do tipo $[0, \xi^*)$.

Agora, por hipótese temos $M_{Y_1}(r) \rightarrow \infty$, quando $r \rightarrow \xi$. Consideremos separadamente os casos $\xi < \infty$ e $\xi = \infty$.

Caso 1. $\xi < \infty$.

Como $h(r) = M_{Y_1}(r)M_{X_1}(-rc)$ e $M_{X_1}(-\xi c) > 0$, então segue

$$\lim_{r \rightarrow \xi} M_{Y_1}(r)M_{X_1}(-rc) = M_{X_1}(-\xi c) \lim_{r \rightarrow \xi} M_{Y_1}(r) = \infty.$$

Assim, das propriedades da função h obtidas acima podemos concluir que existe $R_0 > 0$ tal que $h(R_0) = 1$. Mais ainda, como observamos anteriormente $M_{Y_1}(r) = +\infty$ para $r \geq \xi$ e como $M_{X_1}(-rc) > 0$ segue que $h(r) = \infty$ para $r \geq \xi$. Portanto o R_0 mencionado acima é o único número positivo satisfazendo $h(R_0) = 1$

Caso 2. $\xi = \infty$

Neste caso, devemos usar a hipótese adicional que $P(Y_1 - cX_1 \leq 0) < 1$. Seja $H(z) = P(Y_1 - cX_1 \leq z)$ a função de distribuição da variável $Y_1 - cX_1$. Como H é contínua pela direita, existe $z_0 > 0$ tal que $H(z_0) < 1$. Segue que

$$\begin{aligned} h(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{rz} dH(z) \geq \int_{z_0}^{+\infty} e^{rz} dH(z) \geq \\ &\geq \int_{z_0}^{+\infty} e^{rz_0} dH(z) = e^{rz_0}(1 - H(z_0)) \longrightarrow +\infty, \text{ quando } r \longrightarrow \xi = +\infty \end{aligned}$$

Logo $h(r) \longrightarrow \infty$, quando $r \longrightarrow \xi = \infty$. Portanto, das propriedades de h , segue que existe um único $R_0 > 0$ tal que $h(R_0) = 1$.

■

No exemplo a seguir determinamos o coeficiente de ajuste R_0 no caso particular em que tanto os valores das indenizações quanto os tempos entre as chegadas dos pedidos de indenização possuem distribuição exponencial.

Exemplo 1.1. *Seja U_n o processo a tempo discreto associado a $U(t)$. Suponha que X_n tem distribuição exponencial de parâmetro μ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $U(t)$ é o modelo clássico de Lundberg. Vamos supor que Y_n tem distribuição exponencial de parâmetro λ , onde $\lambda > \frac{\mu}{c}$.*

Primeiro, temos que $E(Y_1 - cX_1) = \frac{1}{\lambda} - \frac{c}{\mu} < 0$ e para $r < \lambda$

$$E^{rY_1} = \frac{\lambda}{\lambda - r}.$$

Além disso, como $Ee^{-rcX_1} = \frac{\mu}{\mu + cr}$ segue

$$\lim_{r \rightarrow \lambda} Ee^{r(Y_1 - cX_1)} = \lim_{r \rightarrow \lambda} Ee^{rY_1} Ee^{-rcX_1} = \lim_{r \rightarrow \lambda} \frac{\lambda}{\lambda - r} \frac{\mu}{\mu + cr} = \infty.$$

Assim, ficam verificadas as condições para existência do coeficiente de ajuste R_0 que vimos na proposição anterior. Logo, o coeficiente será único em $(0, +\infty)$. Este coeficiente deve satisfazer $Ee^{R_0(Y_1 - cX_1)} = \frac{\lambda}{\lambda - R_0} \frac{\mu}{\mu + cR_0} = 1$, ou seja, devemos ter

$$cR_0^2 + R_0\mu - cR_0\lambda = 0 \text{ e } R_0 > 0. \quad (1.12)$$

Portanto, $R_0 = \frac{c\lambda - \mu}{c}$ é a única solução positiva de (1.12). ■

No próximo teorema apresentaremos a desigualdade de Lundberg para o modelo de Sparre Andersen $U(t)$.

Para isso, considere o modelo discreto U_n , dado por (1.7), associado a $U(t)$ e denote por $\psi(u, n)$ a probabilidade de que, dado o capital inicial $u \geq 0$, a ruína ocorra até o tempo T_n , ou seja,

$$\psi(u, n) = P\left(\bigcup_{k=1}^n \{U_k < 0\} \mid U_0 = u\right) = P(\tau(u) \leq n), \quad (1.13)$$

onde $\tau(u) = \min\{n \geq 1 : U_n < 0\}$ é o tempo de ruína do processo U_n .

Como os eventos $A_n = \{\tau(u) \leq n\}$ formam uma sequência crescente, segue da continuidade da probabilidade que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u, n) = \psi(u). \quad (1.14)$$

Teorema 1.4. *Supondo a existência do coeficiente de ajuste $R_0 > 0$ definido em (1.10), para o modelo de risco discreto (1.7) associado a $U(t)$, temos:*

$$\psi(u) \leq e^{-R_0 u} \quad \forall u \geq 0 \quad (1.15)$$

onde $\psi(u)$ é a probabilidade de ruína dada em (1.9).

Demonstração: Por (1.13) e (1.14), temos que a probabilidade de ruína para o modelo de Sparre Andersen pode ser calculada por

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau(u) \leq n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\tau(u) = k)\right), \quad (1.16)$$

onde $\tau(u)$ é o tempo de ruína definido em (1.8).

Por facilidade de notação, omitiremos os condicionamentos a U_0 .

Seja $\{U_n\}$ o processo de risco a tempo discreto dado por (1.7). Para cada $u \geq 0$, defina

$$M_u(n) = e^{-R_0 U_n}. \quad (1.17)$$

Como observamos acima, o processo $\{e^{-R_0 U_n}\}$ é uma martingale e o tempo de ruína $\tau(u)$ é um tempo de parada para este processo.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo. Então $\tau(u) \wedge n_0 = \min(\tau(u), n_0)$ é um tempo de parada limitado para o processo $\{M_u(n) = e^{-R_0 U_n}\}$, desse modo podemos usar o Teorema da Parada Opcional para Martingales (vide por exemplo Kannan (1979)) e obter

$$\begin{aligned} e^{-R_0 u} &= E(M_u(0)) \\ &= E(M_u(\tau(u) \wedge n_0)) \\ &= E(M_u(\tau(u))I_{(\tau(u) \leq n_0)}) + E(M_u(n_0)I_{(\tau(u) > n_0)}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Assim,

$$e^{-R_0 u} \geq E(M_u(\tau(u))I_{(\tau(u) \leq n_0)})$$

e como $U_{\tau(u)} < 0$, temos $M_u(\tau(u)) \geq 1$. Logo

$$e^{-R_0 u} \geq E(I_{(\tau(u) \leq n_0)}) = P(\tau(u) \leq n_0)$$

Portanto,

$$P(\tau(u) \leq n_0) \leq e^{-R_0 u}.$$

Como $n_0 \in \mathbb{N}$ é arbitrário e o limitante encontrado não depende de n_0 podemos concluir que

$$\psi(u, n) \leq e^{-R_0 u}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Sendo assim, para cada $u \geq 0$,

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau(u) \leq n) \leq e^{-R_0 u}.$$

■

No exemplo 1.1 encontramos o valor do coeficiente de ajuste do processo de risco quando X_1 e Y_1 são exponenciais. Com isso, podemos encontrar um limitante superior para a probabilidade de ruína.

Exemplo 1.2. *Considere as mesmas hipóteses do exemplo 1.1.*

Naquele exemplo, encontramos $R_0 = \lambda - \frac{\mu}{c}$. Portanto, pelo teorema acima, temos

$$\psi(u) \leq e^{-\left(\lambda - \frac{\mu}{c}\right)u}.$$

■

Nesta segunda parte da seção apresentaremos uma segunda estimativa exponencial para a probabilidade de ruína, que pode ser mais refinada que a desigualdade de Lundberg. Sua demonstração é uma adaptação da demonstração apresentada por Cai e Dickson(2003) para o modelo de Sparre Andersen com juro, que será apresentada no próximo capítulo.

Preliminarmente, apresentamos uma equação integral recursiva para a probabilidade de ruína até o tempo T_n , $\psi(u, n)$. Esta equação foi originalmente obtida por Sparre Andersen em 1957. A prova abaixo segue as idéias de Cai e Dickson(2003).

Lema 1.1. *Seja $\psi(u, n)$ a probabilidade de ruína até o tempo T_n , então temos*

$$\psi(u, n + 1) = \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} \psi(u + cx - y, n) dF(y) + \bar{F}(u + cx) \right] dG(x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.19)$$

Demonstração: Defina os eventos $A_s^{(n)} = \bigcup_{k=s}^n (U_k < 0)$, $s \leq n$. Dessa maneira, temos

$$\begin{aligned} \psi(u, n+1) = P(A_1^{(n+1)}) &= E[I_{A_1^{(n+1)}}] = \int_0^\infty \int_0^\infty E[I_{A_1^{(n+1)}} | X_1 = x, Y_1 = y] dF(y) dG(x) \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} E[I_{A_1^{(n+1)}} | X_1 = x, Y_1 = y] dF(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+cx}^\infty E[I_{A_1^{(n+1)}} | X_1 = x, Y_1 = y] dF(y) \right] dG(x). \end{aligned}$$

Usando a definição dos eventos $A_n^{(k)}$ e o princípio da substituição, segue que

$$\begin{aligned} \psi(u, n+1) &= \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} E[I_{\{(u+cx-y < 0) \cup A_2^{(n+1)}\}} | X_1 = x, Y_1 = y] dF(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+cx}^\infty E[I_{\{(u+cx-y < 0) \cup A_2^{(n+1)}\}} | X_1 = x, Y_1 = y] dF(y) \right] dG(x). \end{aligned}$$

Como o evento $A_2^{(n+1)}$ depende apenas de U_2, \dots, U_{n+1} , então $I_{\{(u+cx-y < 0) \cup A_2^{(n+1)}\}}$ é independente de X_1 e Y_1 . Logo, podemos obter

$$\begin{aligned} \psi(u, n+1) &= \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} E[I_{\{(u+cx-y < 0) \cup A_2^{n+1}\}}] dF(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+cx}^\infty E[I_{\{(u+cx-y < 0) \cup A_2^{n+1}\}}] dF(y) \right] dG(x). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Agora, note que dados $Y_1 = y$, $X_1 = x$, se $y > u + cx$ então $U_1 < 0$ e assim $I_{\{(u+cx-y < 0) \cup A_2^{n+1}\}} = 1$.

Por outro lado, para $y \leq u + cx$ podemos escrever

$$U_{n+1} = (u + cx - y) - \sum_{k=2}^{n+1} (Y_k - cX_k)$$

e como as variáveis X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots são identicamente distribuídas então

$$U_{n+1} \stackrel{D}{=} u^* - \sum_{k=1}^n (Y_k - cX_k) = U_n^*, \quad (1.21)$$

ou seja, U_{n+1} tem a mesma distribuição de U_n^* . Note que U_n^* é como o modelo de Sparre Andersen dado em (1.7), mas com capital inicial $u^* = u + cx - y$.

Assim, se $y \leq u + cx$ então

$$\begin{aligned} E\left[I_{\{(u+cx-y < 0) \cup A_2^{n+1}\}} | X_1 = x, Y_1 = y\right] &= E[I_{A_2^{n+1}}] \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (U_k^* < 0)\right) \\ &= \psi(u + cx - y, n). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Portanto, de (1.20) segue

$$\begin{aligned} \psi(u, n+1) &= \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} \psi(u + cx - y, n) dF(y) + \int_{u+cx}^\infty dF(y) \right] dG(x) = \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} \psi(u + cx - y, n) dF(y) + \bar{F}(u + cx) \right] dG(x) \end{aligned}$$

e (1.19) está provada. ■

Finalmente, com o auxílio do lema anterior, apresentamos a segunda desigualdade para a probabilidade de ruína.

Teorema 1.5. *Considere o modelo clássico de Sparre Andersen, dado por (1.2) e sua discretização dada por (1.7). Supondo a existência do coeficiente de ajuste $R_0 > 0$ satisfazendo (1.10), temos:*

$$\psi(u) \leq \beta e^{-R_0 u}, \quad (1.23)$$

onde,

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 t} \bar{F}(t)} \geq 1. \quad (1.24)$$

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar por indução sobre n que

$$\psi(u, n) \leq \beta e^{-R_0 u}, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.25)$$

Para isto, note que da definição de β , segue

$$\beta^{-1} \leq \frac{\int_t^\infty e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 t} \bar{F}(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &\leq \beta e^{-R_0 t} \int_t^\infty e^{R_0 y} dF(y) \\ &\leq \beta e^{-R_0 t} E e^{R_0 Y_1} \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Agora, para $n = 1$, temos por (1.26)

$$\begin{aligned} \psi(u, 1) = P(Y_1 > u + cX_1) &= \int_0^\infty \bar{F}(u + cx) dG(x) \\ &\leq \beta E e^{R_0 Y_1} E(\exp\{-R_0(u + cX_1)\}) \\ &= \beta e^{-R_0 u} E e^{-R_0(cX_1 - Y_1)}. \end{aligned}$$

Como R_0 é o coeficiente de ajuste, dado por (1.10) temos $E e^{-R_0(cX_1 - Y_1)} = 1$ e assim

$$\psi(u, 1) \leq \beta e^{-R_0 u}.$$

Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\psi(u, n) \leq \beta e^{-R_0 u} \quad \forall u \geq 0 \quad (1.27)$$

e verifiquemos (1.25) para $n + 1$.

Do lema anterior podemos obter

$$\psi(u, n + 1) = \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} \psi(u + cx - y, n) dF(y) + \bar{F}(u + cx) \right] dG(x).$$

Da desigualdade para $\bar{F}(t)$ encontrada em (1.26) e da hipótese de indução (1.27), segue que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} \psi(u+cx-y, n) dF(y) + \bar{F}(u+cx) \right] dG(x) \leq \\
 & \leq \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cx} \beta e^{-R_0(u+cx-y)} dF(y) + \beta e^{-R_0(u+cx)} \int_{u+cx}^\infty e^{R_0 y} dF(y) \right] dG(x) \\
 & = \int_0^\infty \left[\beta e^{-R_0(u+cx)} \left[\int_0^{u+cx} e^{R_0 y} dF(y) + \int_{u+cx}^\infty e^{R_0 y} dF(y) \right] \right] dG(x) \\
 & = \int_0^\infty \beta e^{-R_0(u+cx)} E e^{R_0 Y_1} dG(x) \\
 & = \beta e^{-R_0 u} E e^{R_0(Y_1 - cX_1)}. \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

Da definição do coeficiente de ajuste, temos $E e^{R_0(Y_1 - cX_1)} = 1$. Assim, obtemos

$$\psi(u, n+1) \leq \beta e^{-R_0 u}.$$

Logo,

$$\psi(u, n) \leq \beta e^{-R_0 u} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, por (1.14) temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u, n) = \psi(u)$. Portanto, podemos concluir que

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u, n) \leq \beta e^{-R_0 u}.$$

Para finalizar, note que para todo $t \geq 0$

$$\frac{\int_t^\infty e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 t} \bar{F}(t)} \geq \frac{e^{R_0 t} (1 - F(t))}{e^{R_0 t} \bar{F}(t)} = 1.$$

Logo $\beta^{-1} \geq 1$

■

Note que, por (1.24) temos $\beta \leq 1$. Assim, a desigualdade (1.23) melhora a desigualdade de Lundberg obtida no Teorema 1.4. No exemplo a seguir, verificamos que para o modelo de risco clássico de Lundberg com os valores das indenizações exponencialmente distribuídos, o limite superior obtido usando (1.23) é estritamente menor que o limitante derivado da desigualdade clássica de Lundberg, ou seja usando (1.15).

Exemplo 1.3. *Considere o modelo de Sparre Andersen e assuma que os valores das indenizações, $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, têm distribuição F exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.*

Neste caso, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\int_t^\infty e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 t} \bar{F}(t)} &= \frac{\lambda \int_t^\infty e^{-y(\lambda - R_0)} dy}{e^{R_0 t} e^{-\lambda t}} = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - R_0}, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } \lambda \neq R_0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\beta^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda - R_0} > 1.$$

Assim, se os tempos entre chegadas $\{X_n\}$ são tais que $cEX_1 > \frac{1}{\lambda}$ e $R_0 \neq \lambda$, então a condição $cEX_1 > EY_1$ é satisfeita. A Condição 1.1 é facilmente verificada para a distribuição exponencial, logo pelo Teorema 1.5 segue

$$\psi(u) \leq \left(1 - \frac{R_0}{\lambda}\right) e^{-R_0 u},$$

ou seja, o limitante obtido é estritamente mais preciso do que o da desigualdade de Lundberg. Em particular, se $\{X_n\}$ são exponencialmente distribuídas com parâmetro $\mu > 0$, como no Exemplo 1.1, então se $\mu < c\lambda$ segue $R_0 = \lambda - \frac{\mu}{c} < \lambda$ e assim

$$\psi(u) \leq \frac{\mu}{c\lambda} e^{-\left(\lambda - \frac{\mu}{c}\right)u}.$$

Este limitante superior é estritamente menor do que o obtido no Exemplo 1.2.

■

1.5 Uma equação para probabilidade de ruína no modelo de Sparre Andersen

Como foi mencionado anteriormente, o cálculo da probabilidade de ruína pode não ser simples. Nesta seção, apresentamos uma equação, que permite em alguns casos o cálculo exato desta probabilidade. As técnicas da demonstração são as mesmas utilizadas na prova do Teorema 1.4 usando a abordagem de martingales.

Teorema 1.6. *Considere o processo de risco a tempo discreto U_n dado por (1.7) associado ao processo a tempo contínuo $U(t)$ definido em (1.2). Suponha que a Condição 1.1 seja válida e $E(Y_1 - cX_1) < 0$. Então, temos a seguinte equação para a probabilidade de ruína*

$$\psi(u) = \frac{e^{-R_0 u}}{E[e^{-R_0 U(\tau(u))} | \tau(u) < \infty]}, \quad (1.29)$$

onde $\tau(u)$ é o tempo de ruína e R_0 é o coeficiente de ajuste do processo

Demonstração: Seguindo o mesmo raciocínio da prova do Teorema 1.4, podemos obter a relação (1.18), ou seja, para $n_0 \geq 1$ arbitrariamente fixado

$$e^{-R_0 u} = E[M_u(\tau(u))I_{(\tau(u) \leq n_0)}] + E[M_u(n_0)I_{(\tau(u) > n_0)}], \quad (1.30)$$

onde por (1.17) $M_u(n) = e^{-R_0 U_n}$.

Agora, por um lado, como por hipótese $cEX_1 - EY_1 > 0$, então pelas observações feitas no final da Seção 1.3, da Lei Forte dos Grandes Números segue que

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} U_{n_0} = \infty, \text{ q.c.}$$

e $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} M_u(n_0)I_{(\tau(u) > n_0)} = 0$, q.c.. Logo, como $M_u(n_0)I_{(\tau(u) > n_0)} \leq 1$, qualquer que seja $n_0 \in \mathbb{N}$, pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} E[M_u(n_0)I_{(\tau(u) > n_0)}] = 0. \quad (1.31)$$

Por outro lado, temos

$$0 \leq M_u(\tau(u))I_{(\tau(u) \leq n_0)} \uparrow M_u(\tau(u))I_{(\tau(u) < \infty)}, \text{ quando } n_0 \rightarrow \infty.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Monótona, segue

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} E[M_u(\tau(u))I_{(\tau(u) \leq n_0)}] = E[M_u(\tau(u))I_{(\tau(u) < \infty)}]. \quad (1.32)$$

Logo, substituindo (1.31) e (1.32) em (1.30), obtemos

$$e^{-R_0 u} = E[e^{-R_0 U_{\tau(u)}} I_{(\tau(u) < \infty)}] = E[e^{-R_0 U_{\tau(u)}} | \tau(u) < \infty] P(\tau(u) < \infty).$$

Como $U_{\tau(u)} < 0$ então $E[e^{-R_0 U_{\tau(u)}} I_{(\tau(u) < \infty)}] \geq 1$.

Portanto, segue que

$$\psi(u) = P(\tau(u) < \infty) = \frac{e^{-R_0 u}}{E(e^{-R_0 U_{\tau(u)}} | \tau(u) < \infty)}.$$

■

Exemplo 1.4. *Cálculo da probabilidade de ruína no caso em que Y_1 tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.*

É possível mostrar, usando técnicas de martingales a tempo contínuo, através do condicionamento à σ -álgebra estritamente à priori $\mathcal{F}_{\tau^-(u)} = \sigma(X(u) : u \leq t, t \geq 0)$ (vide Grandell(1991) e Asmussen(2000)) que a distribuição de $-U_{\tau(u)}$, condicionada ao evento $(\tau(u) < \infty)$ é também exponencial de parâmetro μ .

Assim,

$$\begin{aligned} E[e^{-R_0 U_{\tau(u)}} | \tau(u) < \infty] &= \int_0^{\infty} e^{R_0 y} \mu e^{-\mu y} dy = \\ &= \frac{\mu}{\mu - R_0}. \end{aligned}$$

Dessa forma, pelo teorema acima, temos:

$$\psi(u) = \frac{e^{-R_0 u}}{E[e^{-R_0 U_{\tau(u)}} | \tau(u) < \infty]} = \frac{\lambda - R_0}{\lambda} e^{-u R_0}. \quad (1.33)$$

Em particular no caso em que X_1 também tem distribuição exponencial, mas com parâmetro λ , vimos no Exemplo 1.1 que $R_0 = \mu - \frac{\lambda}{c}$.

Logo, de (1.33) segue

$$\psi(u) = \frac{\mu}{c\lambda} e^{-u\left(\lambda - \frac{\mu}{c}\right)}.$$

Assim, vemos que o limite para $\psi(u)$ encontrado no Exemplo 1.3 é a própria probabilidade de ruína. ■

Capítulo 2

Estimativas para probabilidade de ruína no modelo com juro

2.1 Introdução

No modelo original de Sparre Andersen a movimentação de capital não é muito realista. A empresa possui um capital inicial não negativo e conta com a entrada contínua de dinheiro. No mundo de hoje é normal que até mesmo uma pessoa física invista seu capital em algo como poupança e assim sobre este capital principal sejam calculados juros. O mesmo acontece com dívidas, sobre as quais também são calculados juros. Isso também deve acontecer com uma empresa de seguros.

Neste segundo capítulo, estudamos o modelo de Sparre Andersen modificado pela inclusão de juro composto continuamente. Este modelo foi proposto por Cai e Dickson (2003).

Para estimar a probabilidade de ruína neste caso, usamos dois processos, um a valor presente e outro a valor acumulado, os quais são descritos na Seção 2.2, que trata da inclusão de juro no modelo original. Para esses processos foram obtidos, por Cai e Dick-

son (2003), limitantes para a probabilidade de ruína no modelo com juro, os quais são apresentados nas Seções 2.3 e 2.4. O primeiro limitante é obtido usando a teoria de martingales e o segundo usando técnicas recursivas. Para a demonstração desses limitantes são assumidas a existência de dois coeficientes de ajuste (um para o processo a valor presente e outro para o processo a valor acumulado). Na Seção 2.5 apresentamos condições suficientes para existência e unicidade destes coeficientes de ajuste.

Finalmente, na Seção 2.6 os resultados obtidos nas seções anteriores são aplicados ao modelo de Lundberg modificado pela inclusão de juro composto continuamente.

2.2 Inclusão do juro

Para descrevermos o modelo de Sparre Andersen modificado pela inclusão de juro, vamos inicialmente fazer algumas considerações sobre o cálculo de juro composto continuamente.

Como motivação, iniciamos com o caso de juro simples. Suponha que investimos um certo capital $u > 0$, chamado principal, durante um período de tempo a uma taxa de juro simples $\delta > 0$ pelo período considerado. Então, o valor a ser resgatado no final do período será $u + \delta u = u(1 + \delta)$, que é chamado *valor acumulado*. Por outro lado, chamamos de *valor presente* do pagamento de uma quantia v no final de um período de tempo como sendo o valor do capital principal no início do período para que, com o cálculo do juro, tenhamos a quantia v no final do período. Dessa forma, se a taxa de juro é $\delta > 0$ pelo período considerado, então o valor presente de v será $v(1 + \delta)^{-1}$.

No caso de juro composto, suponha que o principal u é investido a uma taxa de juro $\delta > 0$ por um certo período de tempo (por exemplo, um ano) e que o juro é composto n vezes durante o período, ao final de cada subintervalo de tempo de mesmo comprimento (por exemplo, a cada mês). Assim, assumindo a proporcionalidade para a taxa de juro, o valor acumulado no final do período considerado será $u(1 + \delta)^n$.

Agora, considere a situação em que o juro é composto continuamente (J.C.C.). Neste caso, se um capital u é investido a uma taxa $\delta > 0$ de juro composto continuamente por um período de tempo de comprimento t , a idéia é calcular o juro ao final de intervalos de comprimentos cada vez menores, ou seja, calculamos o juro em n intervalos de tamanho igual a t/n e fazemos o limite quando os tamanhos destes intervalos vão a zero. Assim o valor acumulado para o principal $u > 0$ com J.C.C., é definido como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(1 + \delta t/n)^n = ue^{\delta t}.$$

Da mesma forma, o valor presente do pagamento de um capital v no final de um período t sob J.C.C., com uma taxa de juro nominal $\delta > 0$ é $ve^{-\delta t}$.

Por outro lado, suponha que o capital é investido continuamente no tempo, como é o caso do modelo de Sparre Andersen, a uma taxa de entrada $c > 0$. Para calcular J.C.C. neste caso suponha primeiramente a seguinte situação: em um determinado período de tempo de comprimento t recebe-se um capital fixo ct/n no final de cada subintervalo de tamanho t/n . Dessa maneira, o capital no tempo t/n é ct/n . Sobre este capital vamos calcular J.C.C. com taxa fixa $\delta > 0$ até o tempo $2t/n$. Assim, no tempo $2t/n$ o capital será

$$\frac{ct}{n}e^{\delta t/n} + ct/n = c\frac{t}{n}(e^{\delta t/n} + 1).$$

Do mesmo modo, ao final do k -ésimo subintervalo de tempo k ($1 \leq k \leq n$) o capital acumulado será

$$\frac{ct}{n}(1 + e^{\delta t/n} \dots + e^{(k-1)\delta t/n})$$

e o capital no tempo $nt/n = t$, ou seja, no final do período t , que denotaremos por M , será

$$M = ct/n \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\delta t/n}.$$

Note que M é a soma inferior $s(f, P)$ da função $f(x) = ce^{\delta x}$ relativa a partição $\{0, t/n, 2t/n, \dots, t\}$

do intervalo $[0, t]$. Dessa maneira, o valor acumulado no final do período t será:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c \left(\frac{t}{n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{k\delta t/n} \right) &= \lim_{|P| \rightarrow 0} s(ce^{\delta x}, P) \\ &= c \int_0^t e^{\delta x} dx = c \left(\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Para simplificar a notação, denote

$$cs_t = c \left(\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta} \right) \quad \text{e} \quad a_t = s_t e^{-\delta t}. \quad (2.2)$$

Neste caso, o valor presente de uma quantia pagável continuamente no tempo a uma taxa $c > 0$ é dado por

$$ca_t = c \left(\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} \right). \quad (2.3)$$

Voltando ao modelo de Sparre Andersen. Considere as mesmas hipóteses iniciais do modelo original. Ou seja, X_1, X_2, \dots denotam os tempos entre chegadas de indenizações, $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ denota os tempos de chegada da n -ésima indenização, com $T_0 = 0$ e Y_n representa o valor da n -ésima indenização paga. Assumimos que $\{X_n, n \geq 1\}$ e $\{Y_n, n \geq 1\}$ são seqüências independentes de v.a.'s não-negativas e i.i.d.. A distribuição comum de $\{X_n\}$ é $G(x) = P(X_1 \leq x)$, com $G(0) = 0$ e $\{Y_n\}$ tem distribuição comum $F(x)$ com $F(0) = 0$. Os prêmios são recebidos continuamente no tempo a uma taxa de entrada $c > 0$ e o capital inicial da seguradora é $u > 0$.

Agora, assumamos também que a seguradora recebe juro sobre sua reserva de risco a uma taxa constante $\delta > 0$ composta continuamente.

Como a ruína ocorre somente nos tempos das indenizações, para a análise da probabilidade da ruína, vamos considerar a inclusão de juro no proceso a tempo discreto imerso no modelo contínuo. Denote por $U_n^{(\delta)} = U_\delta(T_n)$ a reserva de capital da seguradora no tempo T_n do pagamento da n -ésima indenização.

Então, como $\delta > 0$ é constante e $U_\delta(0) = U_\delta(T_0) = u$, de acordo com as observações feitas no início da seção, temos que no tempo do pagamento da primeira indenização a reserva de capital é

$$U_1^{(\delta)} = U_\delta(T_1) = ue^{\delta X_1} + \frac{c(e^{\delta X_1} - 1)}{\delta} - Y_1.$$

Agora, durante o período $X_2 = T_2 - T_1$ entre o pagamento da primeira e segunda indenizações, são recebidos prêmios continuamente a uma taxa $c > 0$, sobre os quais é calculado juro continuamente a uma taxa δ , e como a reserva de capital no tempo $V_n^{(\delta)}$ é novamente investida a uma taxa de juro $\delta > 0$ composto continuamente, então a reserva de capital da seguradora no tempo do pagamento da segunda indenização será

$$\begin{aligned} U_2^{(\delta)} &= U_1^{(\delta)}e^{\delta X_2} + \frac{c(e^{\delta X_2} - 1)}{\delta} - Y_2 \\ &= ue^{\delta(X_1+X_2)} + \frac{c(e^{\delta(X_1+X_2)} - 1)}{\delta} - Y_1e^{\delta X_2} - Y_2 \\ &= ue^{\delta T_2} + \frac{c(e^{\delta T_2} - 1)}{\delta} - Y_1e^{\delta X_2} - Y_2. \end{aligned}$$

E assim, sucessivamente, a reserva de capital da empresa no tempo de pagamento da n -ésima indenização será dada por

$$\begin{aligned} U_n^{(\delta)} &= U_\delta(T_{n-1})e^{\delta X_n} + \frac{c(e^{\delta X_n} - 1)}{\delta} - Y_n \\ &= ue^{\delta T_n} + \frac{c(e^{\delta T_n} - 1)}{\delta} - \sum_{k=1}^n Y_k \exp\left\{\delta \sum_{i=k+1}^n X_i\right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde adotamos a convenção $\sum_a^b = 0$ quando $a > b$.

Além disso, considere o valor presente no tempo T_n da reserva de capital $U_n^{(\delta)}$, que é dada por

$$V_n^{(\delta)} = U_n^{(\delta)}e^{-\delta T_n}.$$

Assim, por (2.4) e usando a notação em (2.2) podemos escrever

$$\begin{aligned} V_n^{(\delta)} &= u + \frac{c(1 - e^{-\delta T_n})}{\delta} - \sum_{k=1}^n Y_k \exp\left\{-\delta \sum_{i=1}^k X_i\right\} \\ &= u + ca_{T_n} - \sum_{k=1}^n Y_k e^{-\delta T_k}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $V_\delta(0) = V_\delta(T_0) = u$.

Note que $V_n^{(\delta)} < 0$ se, e somente se, $U_n^{(\delta)} < 0$. Assim, definimos a probabilidade de ruína para o modelo de Sparre Andersen modificado pela inclusão de juro como sendo

$$\psi_\delta(u) = P(\tau_\delta(u) < \infty) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n^{(\delta)} < 0)\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n^{(\delta)} < 0)\right), \quad (2.6)$$

onde $\tau_\delta(u) = \inf\{n : U_n^{(\delta)} < 0\} = \inf\{n : V_n^{(\delta)} < 0\}$ indica o tempo de ruína do modelo com juro.

Mais ainda, assim como fizemos no capítulo anterior, se definirmos a probabilidade de que a ruína ocorra até o pagamento da n -ésima indenização

$$\psi_\delta(u, n) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (U_k^{(\delta)} < 0)\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (V_k^{(\delta)} < 0)\right), \quad (2.7)$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_\delta(u, n) = \psi_\delta(u). \quad (2.8)$$

2.3 Estimativa Obtida Usando Martingales

Nesta seção, apresentamos um limitante superior para a probabilidade de ruína no modelo com juro (2.4) usando a teoria de martingales (super-martingales). O resultado é devido a Cai e Dickson(2003). Para isto, é usado o processo auxiliar $V_n^{(\delta)}$ dado em (2.5).

Para o processo $V_n^{(\delta)}$, também definimos um coeficiente de ajuste, como sendo o número real positivo R_1 que satisfaz:

$$E\left[e^{R_1(Y_1 e^{-\delta X_1} - ca_{X_1})}\right] = 1. \quad (2.9)$$

Diferentemente do que tínhamos para o modelo original, este coeficiente R_1 transforma o processo $e^{-R_1 V_n^{(\delta)}}$ em uma super-martingale, como veremos mais adiante. Na Seção 2.4 apresentaremos condições suficientes para a existência e unicidade de R_1 . Por enquanto, assumimos a existência e unicidade deste coeficiente de ajuste.

Assim, no próximo teorema, usando argumentos semelhantes aos usados na prova da desigualdade de Lundberg para o modelo sem juro (Teorema 1.4), adaptados à super-martingales, obtemos um limitante superior exponencial para a probabilidade de ruína $\psi(u)$.

Teorema 2.1. *Considere o processo $V_n^{(\delta)}$ dado em (2.5). Suponha a existência do coeficiente de ajuste $R_1 > 0$ satisfazendo (2.9). Então:*

$$\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u} \quad \forall u \geq 0.$$

Demonstração: Primeiramente, por (2.5) e pela definição (2.3) temos

$$\begin{aligned} V_{n+1}^{(\delta)} &= u - \sum_{k=1}^{n+1} Y_k e^{-\delta T_k} + ca_{T_{n+1}} \\ &= u - \sum_{k=1}^{n+1} Y_k e^{-\delta T_k} + c \left(\frac{1 - e^{-\delta T_{n+1}}}{\delta} \right) \\ &= u - \sum_{k=1}^n Y_k e^{-\delta T_k} + \frac{c}{\delta} (1 - e^{-\delta T_n}) + \frac{c}{\delta} (e^{-\delta T_n} - e^{-\delta T_{n+1}}) - Y_{n+1} e^{-\delta T_{n+1}} \\ &= V_n^{(\delta)} + \frac{c}{\delta} (e^{-\delta T_n} - e^{-\delta T_{n+1}}) - Y_{n+1} e^{-\delta T_{n+1}} \end{aligned}$$

Como $T_{n+1} = T_n + X_{n+1}$, usando (2.3) temos

$$V_{n+1}^{(\delta)} = V_n^{(\delta)} + e^{-\delta T_n} (ca_{X_{n+1}} - Y_{n+1} e^{-\delta X_{n+1}}). \quad (2.10)$$

Agora, considere a σ -álgebra $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, T_2, \dots, T_n)$. Usando (2.10) vamos mostrar que $\{e^{-R_1 V_{n+1}^{(\delta)}}, n \geq 0\}$ é uma super-martingale com respeito a \mathcal{F}_n .

De fato, por (2.10), como $V_n^{(\delta)}$ é \mathcal{F}_n -mensurável segue que

$$\begin{aligned} E\left[e^{-R_1 V_{n+1}^{(\delta)}} | \mathcal{F}_n\right] &= e^{-R_1 V_n^{(\delta)}} E\left[\left(\exp\left\{-R_1(ca_{X_{n+1}} - \right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. - Y_{n+1}e^{-\delta X_{n+1}})\right\}\right)^{e^{-\delta T_n}} | \mathcal{F}_n\right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Temos que $0 \leq e^{-\delta T_n} \leq 1$, então como $\{T_n\}$ é independente de $\{Y_n\}$, usando o Princípio da Substituição e a Desigualdade de Jensen (funções côncavas) para esperança condicional obtemos

$$E\left[e^{-R_1 V_{n+1}^{(\delta)}} | \mathcal{F}_n\right] \leq e^{-R_1 V_n^{(\delta)}} \left[E\left(\exp\left\{-R_1(ca_{X_{n+1}} - Y_{n+1}e^{-\delta X_{n+1}})\right\}\right) | \mathcal{F}_n\right]^{e^{-\delta T_n}}$$

e como X_{n+1} e Y_{n+1} são independentes de \mathcal{F}_n , segue

$$E\left[e^{-R_1 V_{n+1}^{(\delta)}} | \mathcal{F}_n\right] = e^{-R_1 V_n^{(\delta)}} \left[E\left(\exp\left\{-R_1(ca_{X_{n+1}} - Y_{n+1}e^{-\delta X_{n+1}})\right\}\right)\right]^{e^{-\delta T_n}}. \quad (2.12)$$

Pela definição do coeficiente de ajuste R_1 , temos

$$E\left(\exp\left\{-R_1(ca_{X_{n+1}} - Y_{n+1}e^{-\delta X_{n+1}})\right\}\right) = 1$$

Assim, substituindo em (2.12) obtemos

$$E\left[e^{-R_1 V_{n+1}^{(\delta)}} | \mathcal{F}_n\right] \leq e^{-R_1 V_n^{(\delta)}}. \quad (2.13)$$

Isso mostra que, assumindo a existência do coeficiente de ajuste R_1 , temos que o processo $e^{-R_1 V_n^{(\delta)}}$ é uma super-martingale.

Seja $\tau_\delta(u)$ o tempo de ruína no processo com juro. Do mesmo modo que tínhamos para o modelo sem juro, aqui também $\tau_\delta(u)$ é um tempo de parada para o processo $e^{-R_1 V_n^{(\delta)}}$. Também, se fixarmos $n_0 \in \mathbb{N}$, então $\tau_\delta(u) \wedge n_0 = \min\{\tau_\delta(u), n_0\}$ será um tempo de parada limitado para o processo. Dessa forma, usando a versão para super-martingales do Teorema da Parada Opcional (vide por exemplo Kanann(1979)), como $V_0^\delta = u$, segue que:

$$\begin{aligned} E\left[e^{-R_1 V_{(\tau_\delta(u) \wedge n_0)}^{(\delta)}}\right] &\leq E\left[e^{-R_1 V_0^{(\delta)}}\right] \\ &= e^{-R_1 u}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por outro lado, como a variável $e^{-R_1 V_{(\tau_\delta(u) \wedge n_0)}^{(\delta)}}$ é não negativa e no tempo $\tau_\delta(u)$ temos que $V_{(\tau_\delta(u))}^{(\delta)} < 0$ obtemos

$$\begin{aligned} E\left[e^{-R_1 V_{(\tau_\delta(u) \wedge n)}^{(\delta)}}\right] &\geq E\left[e^{-R_1 V_{(\tau_\delta(u) \wedge n)}^{(\delta)}} I_{\{\tau_\delta(u) \leq n\}}\right] \\ &= E\left[e^{-R_1 V_{\tau_\delta(u)}^{(\delta)}} I_{\{\tau_\delta(u) \leq n\}}\right] \\ &\geq E\left[I_{\{\tau_\delta(u) \leq n\}}\right] = P(\tau_\delta(u) \leq n) = \psi_\delta(u, n), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\psi_\delta(u, n)$ é a probabilidade de que a ruína ocorra até o tempo T_n definida em (2.7).

Assim, de (2.14) e (2.15) podemos concluir que

$$\psi_\delta(u, n) \leq E\left[e^{-R_1 V_{(\tau_\delta(u) \wedge n_0)}^{(\delta)}}\right] \leq e^{-R_1 u}. \quad (2.16)$$

Como n_0 fixado foi qualquer, temos que (2.16) vale para todo $n_0 \in \mathbb{N}$. Da mesma maneira que vimos no caso do processo sem juro, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_\delta(u, n) = \psi_\delta(u)$. Portanto, de (2.16), segue

$$\psi_\delta(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_\delta(u, n) \leq e^{-R_1 u}.$$

■

2.4 Estimativa Obtida Usando Técnicas Recursivas

Agora, vamos apresentar um limitante superior diferente para $\psi_\delta(u)$, desta vez usando o processo $U_n^{(\delta)}$ e técnicas recursivas. Este limitante também foi encontrado por Cai e Dickson(2003).

Aqui, definimos um outro coeficiente de ajuste como sendo o número real positivo R_2 que satisfaz:

$$E\left[e^{R_2(Y_1 - csX_1)}\right] = 1. \quad (2.17)$$

Na Seção 2.5, também veremos condições suficientes para a existência e unicidade deste coeficiente de ajuste R_2 .

Assim como fizemos para o modelo de Sparre Andersen sem juro (Lema 1.1), vamos primeiramente obter uma equação integral recursiva para a probabilidade de ruína até o tempo T_n , $\psi_\delta(u, n)$.

Lema 2.1. Para o processo $U_n^{(\delta)}$ dado em (2.4), temos

$$\begin{aligned} \psi_\delta(u, n+1) &= \int_0^\infty \left[\int_0^{ue^{\delta x} + cs_x} \psi_\delta(ue^{\delta x} + cs_x - y, n) dF(y) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{F}(ue^{\delta x} + cs_x) \right] dG(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde $\psi_\delta(u, n)$ é a probabilidade de que ocorra ruína até o tempo T_n .

Demonstração: Da mesma forma que foi feito no Lema 1.1, definimos os eventos $A_s^n = \bigcup_{k=s}^n (U_\delta(T_k) < 0)$, $s \leq n$.

Condicionando às variáveis X_1 e Y_1 , usando o princípio da substituição para esperanças condicionais e a independência de A_2^{n+1} , X_1 e Y_1 podemos obter

$$\begin{aligned} \psi_\delta(u, n+1) &= P(A_1^{n+1}) = \int_0^\infty \int_0^\infty E[I_{A_1^{n+1}} | X_1 = x, Y_1 = y] dF(y) dG(x) \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^{ue^{\delta x} + cs_x} E[I_{\{ue^{\delta x} + cs_x - y < 0\} \cup A_2^{n+1}}] dF(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{ue^{\delta x} + cs_x}^\infty E[I_{\{ue^{\delta x} + cs_x - y < 0\} \cup A_2^{n+1}}] dF(y) \right] dG(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Agora, dados $Y_1 = y$, $X_1 = x$, se $y > ue^{-\delta x} + ca_x$ então $I_{\{ue^{\delta x} + cs_x - y\} \cup A_2^{n+1}} = 1$. Por outro lado, usando os mesmos argumentos da prova do Lema 1.1 para a obtenção de (1.19), dados $Y_1 = y$ e $X_1 = x$, podemos escrever

$$\begin{aligned} U_{n+1}^{(\delta)} &= (ue^{\delta x} + cs_x - y) \exp\left\{\delta \left(\sum_{k=2}^{n+1} X_k\right)\right\} + \frac{c}{\delta} \left(\exp\left\{\delta \left(\sum_{k=2}^{n+1} X_k\right)\right\} - 1\right) - \sum_{k=2}^{n+1} Y_k \exp\left\{\sum_{i=k+1}^{n+1} X_i\right\} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} u^* e^{\delta T_n} + \frac{c(e^{\delta T_n} - 1)}{\delta} - \sum_{k=1}^n Y_k \exp\left\{\delta \sum_{i=k+1}^{n+1} X_i\right\} = U_n^{\delta*}, \end{aligned}$$

onde $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ indica igualdade em distribuição e $u^* = ue^{\delta x} + cs_x - y$. Assim, $\{U_n^{\delta^*}\}$ é como o modelo (2.4), mas com capital inicial u^* .

Logo, se $y \leq ue^{\delta x} + cs_x$ então

$$\begin{aligned} E\left[I_{\{ue^{\delta x} + cs_x - y < 0\} \cup A_2^{n+1}} \mid X_1 = x, Y_1 = y\right] &= E[I_{A_2^{n+1}}] \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (U_k^{\delta^*} < 0)\right) \\ &= \psi_{\delta}(ue^{\delta x} + cs_x - y, n). \end{aligned}$$

Portanto, de (2.18) segue

$$\psi_{\delta}(u, n+1) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{ue^{\delta x} + cs_x} \psi_{\delta}(ue^{\delta x} + cs_x - y, n) dF(y) + \bar{F}(ue^{\delta x} + cs_x) \right] dG(x)$$

■

Este lema é usado na demonstração do próximo teorema o qual fornece um outro limitante para probabilidade de ruína no modelo com juro.

Teorema 2.2. *Considere o processo $U_n^{(\delta)}$ dado em (2.4). Suponha a existência do coeficiente de ajuste R_2 satisfazendo (2.17). Nestas condições, temos:*

$$\psi_{\delta}(u) \leq \beta E[e^{R_2 Y_1}] E\left[\exp\{-R_2(ue^{\delta X_1} + cs_{X_1})\}\right], \quad (2.19)$$

onde,

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^{\infty} e^{R_2 y} dF(y)}{e^{R_2 t} \bar{F}(t)} \geq 1. \quad (2.20)$$

Demonstração: Primeiramente, vamos usar indução sobre n para mostrar que

$$\psi_{\delta}(u, n) \leq \beta E[e^{R_2 Y_1}] E\left[\exp\{-R_2(ue^{\delta X_1} + cs_{X_1})\}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

De fato, para $n = 1$ temos

$$\begin{aligned}
 \psi_\delta(u, 1) &= P(Y_1 > ue^{\delta X_1} + cs_{X_1}) \\
 &= \int_0^\infty P(Y_1 > ue^{\delta X_1} + cs_{X_1} | X_1 = x) dG(x) \\
 &= \int_0^\infty \bar{F}(ue^{\delta x} + cs_x) dG(x) \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio para obtenção de (1.23) na demonstração do Teorema 1.5 podemos obter

$$\bar{F}(t) \leq \beta e^{-R_2 t} \int_t^\infty e^{R_2 y} dF(y) \leq \beta e^{-R_2 t} E e^{R_2 Y_1}, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.23}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \bar{F}(ue^{\delta x} + cs_x) dG(x) &\leq \\
 &\leq \int_0^\infty \beta E e^{R_2 Y_1} E(\exp\{-R_2(ue^{\delta x} + cs_x)\}) dG(x) = \\
 &= \beta e^{R_2 Y_1} E e^{-R_2(ue^{\delta X} + cs_X)}. \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Logo, de (2.22) e (2.24) segue

$$\psi_\delta(u, 1) \leq \beta e^{R_2 Y_1} E e^{-R_2(ue^{\delta X_1} + cs_{X_1})}.$$

Agora, suponha que para $n \in \mathbb{N}$, tenhamos:

$$\psi_\delta(u, n) \leq \beta E[e^{R_2 Y_1}] E[\exp\{-R_2(ue^{\delta X_1} + cs_{X_1})\}] \quad \forall u \geq 0. \tag{2.25}$$

Como $e^{\delta x} > 1$, $\forall x \geq 0$, a desigualdade na hipótese de indução implica em

$$\begin{aligned}
 \psi_\delta(u, n) &\leq \beta E[e^{R_2 Y_1}] E[\exp\{-R_2(u + cs_{X_1})\}] \\
 &= \beta e^{-R_2 u} E[e^{R_2(Y_1 - cs_{X_1})}] = \beta e^{-R_2 u}, \quad \forall u \geq 0. \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Vamos verificar que vale (2.21) para $n+1$ e assim encerrar a demonstração por indução.

Usando o Lema 2.1, a desigualdade (2.23) e a hipótese de indução (2.25) e (2.26) podemos obter

$$\begin{aligned}
 \psi_\delta(u, n+1) &= \int_0^\infty \left[\int_0^{ue^{\delta x} + cs_x} \psi_\delta(ue^{\delta x} + cs_x - y, n) dF(y) + \bar{F}(ue^{\delta x} + cs_x) \right] dG(x) \\
 &\leq \int_0^\infty \left[\int_0^{ue^{\delta x} + cs_x} \beta e^{-R_2(ue^{\delta x} + cs_x - y)} dF(y) + \right. \\
 &\quad \left. + \beta e^{-R_2(ue^{\delta x} + cs_x)} \int_{ue^{\delta x} + cs_x}^\infty e^{R_2 y} dF(y) \right] dG(x) \\
 &= \int_0^\infty \beta e^{-R_2(ue^{\delta x} + cs_x)} \left[\int_0^{ue^{\delta x} + cs_x} e^{R_2 y} dF(y) + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{ue^{\delta x} + cs_x}^\infty e^{R_2 y} dF(y) \right] dG(x) \\
 &= \int_0^\infty \beta e^{-R_2(ue^{\delta x} + cs_x)} E e^{R_2 Y_1} dG(x) \\
 &= \beta E e^{R_2 Y_1} E \left[\exp\{-R_2(ue^{\delta X_1} + cs_{X_1})\} \right].
 \end{aligned}$$

Portanto, (2.19) é válido para todo $n \geq 1$.

Como já vimos, $\psi_\delta(u, n) \rightarrow \psi_\delta(u)$, quando $n \rightarrow \infty$, como o limitante encontrado acima para $\psi_\delta(u, n)$ não depende de n , podemos concluir

$$\psi_\delta(u) \leq \beta E e^{R_2 Y_1} E \left[\exp\{-R_2(ue^{\delta X_1} + ca_{X_1})\} \right].$$

■

Observe que da definição de β^{-1} em (2.20) temos que

$$[E e^{R_2 Y_1}]^{-1} \leq \beta \leq 1. \tag{2.27}$$

Como consequência do teorema anterior, podemos obter uma desigualdade simplificada, como a obtida no Teorema 1.5 do modelo sem juro, mas que fornece um limitante superior mais fraco do que este dado em (2.19).

Corolário 2.1. *Nas condições do Teorema 2.2, temos:*

$$\psi_\delta(u) \leq e^{-R_2 u}, \quad \forall u \geq 0.$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.2 temos a desigualdade (2.19). Como X_1 é não-negativa temos $e^{\delta X_1} \geq 1$ e como X_1 e Y_1 são independentes, de (2.19) segue

$$\begin{aligned} \psi_\delta(u) &\leq \beta E e^{R_2 Y_1} E \left[\exp \{ -R_2 (u e^{\delta X_1} + c s_{X_1}) \} \right] \\ &\leq \beta E e^{R_2 Y_1} E \left[\exp \{ -R_2 (u + c s_{X_1}) \} \right] \\ &= \beta E e^{R_2 u} E \left[\exp \{ R_2 (Y_1 - c s_{X_1}) \} \right] \end{aligned} \tag{2.28}$$

Pela definição do coeficiente de ajuste R_2 temos

$$E \left[\exp \{ R_2 (Y_1 - c s_{X_1}) \} \right] = 1$$

e com $\beta \leq 1$, de (2.28) obtemos

$$\psi_\delta(u) \leq \beta e^{-R_2 u} \leq e^{-R_2 u}$$

■

Note que, podemos verificar que, fazendo $\delta \downarrow 0$ na equação (2.17), o coeficiente R_2 reduz-se ao coeficiente R_0 do modelo sem juro. Logo, o Teorema 2.2 é uma generalização da Desigualdade de Lundberg do modelo de Sparre Andersen sem juro.

2.5 Existência e unicidade dos coeficientes de ajuste no modelo com juro

Nesta seção apresentamos condições suficientes para a existência e unicidade dos coeficientes de ajuste R_1 e R_2 considerados na seção anterior.

Vamos iniciar mostrando a existência e unicidade do coeficiente R_1 .

Proposição 2.1. *Assuma que a Condição 1.1 é satisfeita e $E[Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1}] < 0$. Se $\xi < \infty$, então existe um único $R_1 > 0$ que satisfaz*

$$E\left[\exp\{R_1(Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1})\}\right] = 1. \quad (2.29)$$

Se $\xi = \infty$ e $P(Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1} \geq 0) > 0$, então existe um único $R_1 > 0$ satisfazendo (2.29).

Demonstração: Defina a seguinte função

$$k(r) = E\left[\exp\{r(Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1})\}\right],$$

ou seja, k é a função geradora de momentos da variável $Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1}$. Como $a_{X_1} \geq 0$, temos $e^{-rca_{X_1}} \leq 1$ para $r \geq 0$. Além disso, como X_1 e Y_1 são não-negativas e $e^{-\delta X_1} \leq 1$, temos

$$k(r) = E\left[e^{rY_1e^{-\delta X_1}}e^{-rca_{X_1}}\right] \leq Ee^{rY_1}.$$

Pela Condição 1.1.(a) temos que $Ee^{rY_1} < \infty$, para todo r tal que $0 \leq r < \xi$. Sendo assim, k também é finita para todo r em $[0, \xi)$. Logo, das propriedades de função geradora de momentos (ver Ash(2000)), segue que k é contínua em $(0, \xi)$ e

$$k'_+(0) = E(Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1}), \quad k''(r) = E((Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1})^2 e^{r(Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1})}), \quad \forall r \in (0, \xi).$$

Mas, por hipótese, temos $E[Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1}] < 0$, então $P(Y_1e^{-\delta X_1} - ca_{X_1} \neq 0) > 0$. Logo

$$k''(r) > 0, \quad \forall 0 < r < \xi \text{ e } k'_+(0) < 0.$$

Assim, k é uma função estritamente convexa em $[0, \xi)$ e localmente decrescente em algum intervalo do tipo $[0, \xi^*)$.

Agora, consideremos separadamente os casos $\xi < +\infty$ e $\xi = +\infty$.

Caso 1. $\xi < \infty$.

Como $EX_1 < +\infty$, então existe $b > 0$ tal que $G(b) > 0$. Por outro lado, temos $a_{X_1} = \frac{1 - e^{-\delta X_1}}{\delta} \leq \frac{1}{\delta}$. Assim, podemos obter

$$\begin{aligned}
 k(r) &= E\left[e^{rY_1 e^{-\delta X_1}} e^{-rc a_{X_1}}\right] \geq e^{-rc/\delta} E\left[e^{rY_1 e^{-\delta X_1}}\right] \\
 &= e^{-rc/\delta} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{rye^{-\delta x}} dG(x) dF(y) \\
 &\geq e^{-rc/\delta} \int_0^\infty \int_0^b e^{rye^{-\delta b}} dG(x) dF(y) \\
 &= G(b) e^{-rc/\delta} \int_0^\infty e^{rye^{-\delta b}} dF(y) \\
 &= G(b) e^{-rc/\delta} E e^{rY_1 e^{-\delta b}}. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Agora, da Condição 1.1(b) temos que $E e^{rY} \rightarrow \infty$, quando $r \rightarrow \xi$ então como $G(b) > 0$, de (2.30) segue

$$\lim_{r \rightarrow \xi e^{\delta b}} k(r) = \infty.$$

Dessa forma, podemos concluir que existe $R_1 > 0$ tal que $k(R_1) = 1$.

Agora, defina $\varepsilon = \inf\{t : \lim_{r \rightarrow t} k(r) = \infty\}$, então $\varepsilon \geq \xi$, $k(\varepsilon) = \infty$ e $k(r) < \infty$ para todo $0 < r < \varepsilon$. Dessa forma, k é estritamente convexa e contínua em $(0, \varepsilon)$ e $k(r) = \infty$ para $r \geq \varepsilon$. Portanto, segue a unicidade de R_1 .

Caso 2. $\xi = \infty$.

Basta considerar H como a função de distribuição da variável $Y e^{-\delta X} - ca_X$ e repetir os mesmos argumentos usados na demonstração da Proposição 1.1, no caso $\xi = \infty$ e o

resultado segue. ■

Na próxima proposição trataremos da existência e unicidade do coeficiente de ajuste R_2 .

Proposição 2.2. *Assuma que a Condição 1.1 é válida e $E(Y_1 - cX_1) < 0$. Se $\xi < \infty$, então existe um único $R_2 > 0$ tal que*

$$E\left[\exp\{R_2(Y_1 - cs_{X_1})\}\right] = 1 \quad (2.31)$$

Se $\xi = \infty$ e $P(Y_1 - cs_{X_1} \geq 0) > 0$, então vale (2.31) para um único $R_2 > 0$.

Demonstração: Primeiramente, considere a função geradora de momentos da variável $Y_1 - cs_{X_1}$

$$h(r) = E\left[\exp\{r(Y_1 - cs_{X_1})\}\right].$$

Da independência de X_1 e Y_1 , e como $s_{X_1} = \int_0^{X_1} e^{\delta t} dt \geq X_1$, com X_1 não-negativa temos

$$\begin{aligned} h(r) &= Ee^{rY_1} Ee^{-rcs_{X_1}} \\ &\leq Ee^{rY_1} Ee^{-rcX_1} \leq Ee^{rY_1} \end{aligned}$$

Pela Condição 1.1(a) temos que Ee^{rY} é finita para todo r em $(0, \xi)$ então $h(r)$ é finita em $(0, \xi)$. Logo, podemos usar as propriedades da função geradora de momentos e obter

$$h'_+(0) = E(Y_1 - cs_{X_1}), \quad h''(r) = E((Y_1 - cs_{X_1})^2 e^{r(Y_1 - cs_{X_1})}), \quad \forall r \in (0, \xi).$$

Agora, novamente como $s_{X_1} \geq X_1$, temos $E(Y_1 - cs_{X_1}) \leq E(Y_1 - cX_1)$. Da hipótese $E(Y_1 - cX_1) < 0$ segue $E(Y_1 - cs_{X_1}) < 0$. Logo, $h'_+(0) < 0$ e, portanto, h é decrescente em um intervalo do tipo $(0, \xi^*)$. Além disso, segue que $P(Y_1 - cs_{X_1} \neq 0) > 0$ e então

podemos concluir que $h''(r) = E((Y - cs_X)^2 e^{r(Y - cs_X)}) > 0$ para todo $r \in (0, \xi)$, ou seja, h é estritamente convexa em $(0, \xi)$.

Para mostrarmos que $h(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \xi$, considere inicialmente que $\xi < \infty$. Neste caso, como $E(e^{-\xi cs_{X_1}}) > 0$ e pela Condição 1.1(b) $M_{Y_1}(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \xi$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \xi} h(r) &= \lim_{r \rightarrow \xi} E e^{rY_1} E e^{-rcs_{X_1}} = \\ &= E e^{-\xi cs_{X_1}} \lim_{r \rightarrow \xi} E e^{rY_1} = +\infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, existe um único $R_2 > 0$ tal que $h(R_2) = 1$.

No caso em que $\xi = \infty$, tomamos H como sendo a função de distribuição da variável $Y - cs_X$ e argumentamos do mesmo modo que foi feito na demonstração da Proposição 1.1 e o resultado segue. ■

2.6 Modelo de Lundberg com juro

Aqui, fazemos aplicações dos resultados obtidos nas seções anteriores para o modelo de Lundberg (ou modelo de Poisson composto) com juro, o qual é um caso particular do modelo de Sparre Andersen.

Nesse modelo, os pedidos de indenização chegam de acordo com um processo de Poisson, ou seja, um processo de renovação cujos tempos entre chegadas de renovações, $\{X_n\}_{n \geq 1}$ têm distribuição exponencial.

O modelo de Poisson modificado pela inclusão de juro tem sido estudado por muitos autores. Dentre eles podemos citar Dickson e Waters(1999), Sundt e Teugels(1995,1997) e Vázquez-Abad(2000)

Os resultados desta seção são devidos a Cai e Dickson(2003).

Considere o modelo (2.5) e suponha que $\{X_n\}_{n \geq 1}$ têm função de distribuição $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, para $x \geq 0$ e $G(x) = 0$ para $x < 0$, onde $\lambda > 0$.

Primeiramente, considere a equação (2.9) que define o coeficiente R_1 , ou seja,

$$E[\exp(Y_1 e^{-\delta X_1} - ca_{X_1})] = 1.$$

Note que, como X_1 e Y_1 são independentes então (2.9) reduz-se a

$$\begin{aligned} 1 &= E\left[E\left(\exp\{R_1 Y_1 e^{-\delta X_1}\} \exp\{-R_1 ca_{X_1}\}\right) | X_1\right] \\ &= E\left[\exp\{-R_1 ca_{X_1}\} M_{Y_1}(R_1 e^{-\delta X_1})\right], \end{aligned}$$

onde $M_{Y_1}(t)$ é a função geradora de momentos de Y_1 .

Particularmente, para X_1 com distribuição $\text{Exp}(\lambda)$, temos

$$E\left[\exp\{-R_1 ca_{X_1}\} M_{Y_1}(R_1 e^{-\delta X_1})\right] = \int_0^\infty \exp\{-R_1 ca_x\} M_{Y_1}(R_1 e^{-\delta x}) \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Como $a_x = \frac{1 - e^{-\delta x}}{\delta}$, fazendo a substituição $y = \frac{c(1 - e^{-\delta x})}{\delta}$, segue que

$$E\left(\exp\{R_1(Y_1 e^{-\delta X_1})\} \exp\{-R_1 ca_{X_1}\}\right) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{c/\delta} e^{-R_1 y} \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right)^{\lambda/\delta - 1} M_{Y_1}\left[R_1 \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right)\right] dy.$$

Assim, a equação (2.9) para o modelo de Lundberg com juro é equivalente a

$$\int_0^{c/\delta} e^{-R_1 y} \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right)^{\lambda/\delta - 1} M_{Y_1}\left[R_1 \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right)\right] dy = \frac{c}{\lambda}. \quad (2.32)$$

Suponha que $cEX_1 - EY_1 = \frac{c}{\lambda} - EY_1 > 0$. Para o caso X_1 exponencial de parâmetro λ temos

$$Ee^{-\delta X_1} = \frac{\lambda}{\lambda + \delta}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 E(Y_1 e^{-\delta X_1} - c a_{X_1}) &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} EY_1 - \frac{c}{\delta} + \frac{c\lambda}{\delta(\lambda + \delta)} \\
 &= \frac{\delta\lambda EY_1 - c\lambda - c\delta + c\lambda}{\delta(\lambda + \delta)} \\
 &= \frac{\delta(\lambda EY_1 - c)}{\delta(\lambda + \delta)}.
 \end{aligned}$$

Como $\frac{c}{\lambda} > EY_1$, então $\frac{\delta(\lambda EY_1 - c)}{\delta(\lambda + \delta)} < 0$ e assim a condição $E(Y_1 e^{-\delta X_1} - c a_{X_1}) < 0$ fica verificada. Portanto, pela Proposição 2.1, segue que existe um único $R_1 > 0$ satisfazendo (2.32).

Se indicarmos por $\psi_\delta^*(u)$ a probabilidade de ruína para o modelo de Lundberg com juro, segue então do Teorema 2.1 que com R_1 solução de (2.32) temos

$$\psi_\delta^*(u) \leq e^{-uR_1}.$$

Por outro lado, considere o coeficiente $R_1 > 0$ definido na equação (2.17), ou seja,

$$[Ee^{R_2 Y_1}] E[e^{-R_2 c s_{X_1}}] = 1,$$

ou ainda,

$$[Ee^{R_2 Y_1}]^{-1} = E[e^{-R_2 c s_{X_1}}]. \quad (2.33)$$

Novamente, para X_1 exponencial de parâmetro $\lambda > 0$,

$$E[e^{-R_2 c s_{X_1}}] = \int_0^\infty e^{-R_2 c s_x} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

e como $s_x = \frac{e^{\delta x} - 1}{\delta}$, fazendo a substituição $y = \frac{c(e^{\delta x} - 1)}{\delta}$, segue que

$$\begin{aligned} E[e^{-R_2 c s_{X_1}}] &= \lambda \int_0^\infty e^{-R_2 y} e^{-\frac{\lambda}{\delta} \ln(1+\delta y/c)} \frac{dy}{c(1+\frac{\delta y}{c})} \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-R_2 y} \left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{-\lambda/\delta} \left(1 + \frac{\delta y}{c}\right) dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y}}{(1 + \delta y/c)^{\lambda/\delta+1}} dy. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Portanto, para o caso do modelo de Lundberg com juro, a equação (2.17) é equivalente

a

$$\left[E e^{r_2 Y_1} \right]^{-1} = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y}}{(1 + \delta y/c)^{\lambda/\delta+1}} dy. \quad (2.35)$$

Suponha que $\frac{c}{\lambda} > EY_1$, ou seja $cEX_1 > EY_1$. Assim, ficam verificadas as hipóteses da Proposição 2.2, logo, existe um único $R_2 > 0$ satisfazendo (2.35).

Assim, do Teorema 2.2 obtemos que

$$\begin{aligned} \psi_\delta^*(u) &\leq \beta E(e^{R_2 Y_1}) \left[\exp\{-R_2(u e^{\delta X_1} + c s_{X_1})\} \right] \\ &= \beta E(e^{R_2 Y_1}) \int_0^\infty \exp\{-R_2(u e^{\delta x} + c(\frac{e^{\delta x} - 1}{\delta}))\} \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= \beta E(e^{R_2 Y_1}) \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \exp\{-R_2[u(1 + \delta y/c) + y]\} (1 + \delta y/c)^{-\lambda/\delta-1} dy = \\ &= \beta E(e^{R_2 Y_1}) \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 u} e^{-R_2 y(1+\delta u/c)}}{(1 + \delta y/c)^{\lambda/\delta+1}} dy. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\psi_\delta^*(u) \leq \beta E(e^{R_2 Y_1}) \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1+\delta u/c)}}{(1 + \delta y/c)^{\lambda/\delta+1}}, \quad (2.36)$$

onde $R_2 > 0$ é a solução de (2.33) e $\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_2 y} dF(y)}{e^{R_2 t} \bar{F}(t)}$.

Mais ainda como $(1 + \delta y/c)^{\lambda/\delta+1} > 1$, então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1+\delta u/c)}}{(1 + \delta y/c)^{\lambda/\delta+1}} dy &\leq \int_0^\infty e^{-R_2 y(1+\delta u/c)} dy \\ &= \frac{1}{R_2(1 + \delta u/c)}. \end{aligned}$$

Assim, de (2.36) obtemos o seguinte limitante superior simplificado para a probabilidade de ruína no modelo de Lundberg com juro

$$\psi_\delta^*(u) \leq \beta E(e^{R_2 Y_1}) \frac{\lambda}{c R_2} \frac{e^{-R_2 u}}{1 + \delta u/c}.$$

Note que o limitante acima decai a zero muito mais rapidamente do que o limitante exponencial $e^{-R_1 u}$ quando fazemos $u \rightarrow \infty$.

Para finalizar, Cai e Dickson(2003) realizaram algumas simulações numéricas onde foram comparados os limitantes para probabilidade de ruína no modelo de Lundberg com juro obtidos por técnicas de martingales e por técnicas recursivas. Nestas simulações, considerou-se valores diferentes de δ e as distribuições de indenizações avaliadas foram a Gamma e a Exponencial. Em ambas, verificou-se que o limitante obtido por técnicas recursivas era melhor do que o derivado por técnicas de martingales para valores cada vez maiores do capital inicial u .

No caso dos valores das indenizações exponencialmente distribuídos, os autores também compararam os limitantes com os valores exatos da probabilidade de ruína. Para o cálculo exato, eles usaram a equação

$$\psi_\delta^*(u) = \frac{\Gamma(\lambda/\delta, c/\delta\mu + u/\mu)}{\Gamma(\lambda/\delta, c/\delta\mu) + (\delta/\lambda)(c/\lambda\mu)e^{-c/\delta\mu}},$$

onde $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty y^{a-1} e^{-y} dy$, $a \geq 0$, $z \geq 0$. Esta equação pode ser encontrada em Sundt e Teugels(1995). Neste caso, também observou-se que o limitante superior obtido por técnicas recursivas foi o mais próximo do valor exato da probabilidade de ruína.

Referências Bibliográficas

- [1] Ash, Robert B.,Dóleans-Dade, C. *Probability and Measure Theory*, Academic Press, San Diego, California, 2000.
- [2] Asmussen, S. *Ruin Probabilities*, World Scientific, Singapura, 2000.
- [3] von Bahr, B. *Ruin Probabilities Expressed in Terms of Ladder Height Distributions*, Scandinavian Actuarial Journal, 190-204, 1974.
- [4] Cai, J., Dickson, D.C.M. *Upper Bounds for Ultimate Ruin Probabilities in the Sparre Andersen Model with Interest*, Insurance: Mathematics and Economics 32, 61-71, 2003.
- [5] Cai, J., Dickson, D.C.M. *Ruin Probabilities with Markov Chain Interest Model*, Insurance: Mathematics and Economics 35, 513-525, 2004.
- [6] Cramér, H. *On the Mathematical Theory of Risk*, Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.
- [7] Cramér, H. *Collective Risk Theory*, The Jubilee volume of, Försäkringsbolaget Skandia, Stockholm, 1955.
- [8] Grandell, J. *Aspects of Risk Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] Grimmett,G., Stirzaker, D. *Probability and Random Processes*, Oxford University Press Inc, New York, 3ed, 2001.

- [10] Grisi, R.M. *Desigualdade de Lundberg para Processos de Risco com Taxa de Juros Dependentes*, Dissertação de Mestrado, UnB, 2004.
- [11] Kaas, R.,Goovaertes, M. e Denuit, M. *Modern Actuarial Risc Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
- [12] Kannan, D. *An Introduction to Stochastic Processes*, Elsevier North Holland Scientific Publishers, New York, 1979.
- [13] Lundberg, F. *Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen*, Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1903.
- [14] Lundberg, F. *Försäkringsteknisk Riskutjämning*, F. Englunds Boktryckeri AB, Stockholm, 1926.
- [15] Malinovskii, V.K. *Non-Poissonian Claims'Arrivals and Calculation of the probability of ruin*, Insurance: Mathematics and Economics, 22, 123-138, 1998.
- [16] Nesbitt, C.J., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Bower Jr., N.L., Jones, D.A. *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois, 1997.
- [17] Ross, S.M. *Stochastic Processes*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1980.
- [18] Ross, S.M. *An Introduction to Mathematical Finance*, Cambridge University Press, 1999.
- [19] Sparre Andersen, E. *On the Collective Theory of Risk in the Case of contagion between the Claims*, Transactiores XV th International Congress of Actuaries, New Yorke, II, 219-229, 1957.
- [20] Sundt, B, Teugels, J.L. *Ruin Estimates under Interest Force*, Insurance: Mathematics and Economics 16, 7-22, 1995.
- [21] Sundt, B, Teugels, J.L. *The Adjustment Function in Ruin Estimates Under Interest Force*, Insurance: Mathematics and Economics 19, 85-94, 1997.

- [22] Takács, L. *On Risk Reserve Processes*, Scandinavian Actuarial Journal, III, 64-75, 1970.
- [23] Thorin, O. *Some Remarks on the Ruin Problem in Case the Epochs of Claims Form a Renewal Process*, Scandinavian Actuarial Journal, III, 29-50, 1970.
- [24] Thorin, O. *Further Remarks on the Ruin Problem in Case the Epochs of Claims Form a Renewal Process*, Scandinavian Actuarial Journal, IV, 14-38, 121-142, 1971.
- [25] Thorin, O. *An Outline of a Generalization-Started by E. Sparre Andersen-of the Classical Ruin Theory*, Austin Bulletin VI, 108-115, 1971.
- [26] Vázquez-Abad, F. *Pathwise Derivative Estimation Of Ruin Probabilities*, Insurance: Mathematics and Economics 26, 269-288, 2000.