Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Multiplicidade de Soluções Radiais do Problema de Dirichlet para o p-Laplaciano

por

Gisliane Alves Pereira

Brasília
2007

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Multiplicidade de Soluções Radiais do Problema de Dirichlet para o p-Laplaciano

por

Gisliane Alves Pereira*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 26 de julho de 2007

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo - FUP/UnB (Orientador)

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UAME/UFCG (Membro)

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves - MAT/UnB (Membro)

*A autora foi bolsista da CAPES/CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pelos obstáculos superados e benções concedidas.

Ao professor Antônio Luiz de Melo, pela excelente orientação, dedicação, amizade e paciência.

Aos professores José de Arimatéia Fernandes, José Valdo Abreu Gonçalves e Carlos Alberto Pereira dos Santos, pelas correções e sugestões.

Aos professores do Departamento de Matemática da UnB que contribuíram na minha formação.

Aos funcionários desse departamento, pelo auxílio durante o curso.

Aos amigos de pós-graduação, pelos estudos em grupo e pela boa convivência.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Edson Alves Figueira e Gizélia Pereira de Medeiros, pelo amor e pelo apoio em cada etapa de minha vida.

Ao meu namorado Leonardo de Amorim e Silva, por todo o amor e companheirismo.

Ao meu irmão Edson Alves Figueira Júnior e aos meus primos Marco Aurélio e Luciana, pela amizade.

Aos meus tios Elson e Maria Angélica, pela ajuda, pela atenção e pelo carinho.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram para o sucesso deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho examinamos a existência e a multiplicidade de soluções radiais do problema de Dirichlet

$$(P)_p : \quad \begin{cases} -\Delta_p v(x) = |v(x)|^{q-1}\, v(x),\ x \in \Omega \\ \quad v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < q + 1 < p < N$ e Ω é a bola unitária aberta do $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$. Usando o método de "Shooting" mostramos que esse problema tem infinitas soluções, cada uma com um número específico de zeros interiores em $[0, 1]$.

Abstract

In this work we examine the existence and the multiplicity of radial solutions of the Dirichlet problem

$$(P)_p : \qquad \begin{cases} -\Delta_p v(x) = |v(x)|^{q-1}\, v(x),\ x \in \Omega \\ \ \ v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $1 < q+1 < p < N$ and Ω is the open unit ball in $\mathbb{R}^N$, with $N \geq 2$. Using the Shooting method we show that this problem has an infinite number of radial solutions, each one with a specific number of interior zeros in $[0,1]$.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar resultados de existência, regularidade e multiplicidade de soluções radiais de equações diferenciais parciais elípticas da forma

$$(P)_p : \qquad \begin{cases} -\Delta_p v(x) = |v(x)|^{q-1} v(x), \; x \in \Omega \\ v(x) = 0, \; x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < q+1 < p < N$, $\Omega = B_1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\right\}$, com $N \geq 2$, e $\Delta_p v = div\left(|\nabla v|^{p-2} \nabla v\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla v|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ é o operador *p-Laplaciano*. Note que, para $p = 2$, temos o operador Laplaciano.

É bem conhecido, (cf. Nirenberg [12]), que soluções de $(P)_p$ em um domínio geral Ω equivale a encontrar pontos críticos do funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde

$$J(v) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx - \frac{1}{q+1}\int_{\Omega} |v|^{q+1} \, dx.$$

Se $q+1 < p^* := \dfrac{Np}{N-p}$ então a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é compacta. Assim, usando métodos variacionais, obtemos soluções fracas para $(P)_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Se $q+1 = p^*$, a imersão acima é apenas contínua e soluções não triviais geralmente não existem (cf. Ni e Serrin [11]). Se $q+1 > p^*$ então a não existência da imersão acima dificulta a utilização de métodos variacionais para a existência de soluções de $(P)_p$.

Os métodos variacionais, apesar de serem bastante gerais e de prática aplicação, além de apresentarem algumas das limitações mencionadas, não possibilitam, em geral, a existência de infinitas soluções para $(P)_p$.

Como, em nosso caso, $\Omega = B_1(0)$ consideramos soluções radialmente simétricas para

$(P)_p$, isto é, soluções da forma $v(x) = u(|x|)$, onde $r = |x|$. Assim, (cf. Apêndice A), $(P)_p$ torna-se o seguinte problema de equações diferenciais ordinárias

$$(P)_{u,r} : \qquad \begin{cases} -(r^{N-1}\,|u'(r)|^{p-2}\,u'(r))' = r^{N-1}\,|u(r)|^{q-1}\,u(r), \;\; 0 < r < 1 \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

o qual é a forma radial de $(P)_p$.

Usamos o método clássico de "Shooting" para mostrar que, quando $1 < q+1 < p < N$, o problema $(P)_{u,r}$ tem um número infinito de soluções radiais, cada uma com um número específico de zeros interiores no intervalo $[0,1]$. Portanto, o problema $(P)_p$ tem um número infinito de soluções radiais.

O método de "Shooting" é uma forma para resolver um problema de valor de fronteira reduzindo-o a uma seqüência de problemas de valor inicial, em geral, de equações diferenciais ordinárias. Nesse método, o dado inicial é ajustado, através do parâmetro de "shooting", para que a solução de um problema de valor inicial satisfaça a condição de fronteira requerida. Tal parâmetro pode ser, por exemplo, a derivada inicial ou o valor inicial.

Aplicando esse método, consideramos o problema de valor inicial abaixo

$$(P)_{r,d} : \qquad \begin{cases} -(r^{N-1}\,|u'(r)|^{p-2}\,u'(r))' = r^{N-1}\,|u(r)|^{q-1}\,u(r), \;\; r > 0 \\ u'(0) = 0 \\ u(0) = d > 0 \end{cases}$$

e ajustamos o dado inicial, através do parâmetro de "shooting" d, até que a solução $u(r,d)$ do problema satisfaça $u(1,d) = 0$, isto é, até que $u(r,d)$ também seja solução de $(P)_{u,r}$.

Baseando-se no trabalho de Joseph A. Iaia [8], provamos os seguintes resultados:

Teorema A: *Sejam $N \geq 2$, $1 < q+1 < p < N$ e $d > 0$ um número positivo. Então o problema $(P)_{r,d}$ tem uma única solução $u(r) = u(r,d) \in C^1([0,\infty))$. Além disso, se $d \to d_0$ então $u(r,d) \to u_0(r,d_0)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $[0,\infty)$.*

Teorema B: *Sejam $N \geq 2$ e $1 < q+1 < p < N$. Então existe uma seqüência decrescente de números positivos $d_0 > d_1 > \cdots > d_{k-1} > d_k > \cdots > 0$ com $u(0) = d_k$ tal que $u(1,d_k) = 0$ e u possui exatamente k zeros interiores em $[0,1]$.*

Teorema C: *Sejam $N \geq 2$, $1 < q+1 < p < N$ e $\Omega = B_1(0)$. Então o problema de valor de fronteira $(P)_p$ tem um número infinito de soluções radiais, $v \in C^1(\overline{\Omega})$.*

Quando $p = 2$ esse resultado foi provado por Castro e Kurepa [4] e Strauss [17]. No caso $1 < p < 2$ e $p < q+1 < p^*$, ver Saxton e Wei [16]. Em 1995, Cheng [5] ampliou esses resultados mostrando que se $1 < p < N$ e $p < q+1 < p^*$ então $(P)_p$ tem um número infinito de soluções radiais. Quando $1 < p < N$ e $q+1 \geq p^*$ Saxton e Wei [16] demonstraram que $(P)_p$ não tem soluções radiais não triviais (cf. Apêndice A).

O problema $(P)_{u,r}$ foi considerado, de forma mais geral, por Gonçalves e Melo [7], que encontraram múltiplas soluções da seguinte classe de problemas quasilineares

$$\begin{cases} -(r^{\alpha}\left|u'(r)\right|^{\beta} u'(r))' = \lambda r^{\gamma} f(u(r)), \; 0 < r < R \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases}$$

onde α, β e γ são números reais dados, $\lambda > 0$ é um parâmetro, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $0 < R < \infty$. O operador quasilinear $(r^{\alpha}\left|u'(r)\right|^{\beta} u'(r))'$ inclui como um caso especial o operador *p-Laplaciano*, $1 < p < N$, considerando $\alpha = N-1$ e $\beta = p-2$.

Este trabalho contém três capítulos organizados da seguinte maneira.

No capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados preliminares, os quais serão usados nas demonstrações posteriores. Também, faremos uma pequena discussão sobre o método de "Shooting".

No capítulo 2, mostramos existência e unicidade de soluções de $(P)_{r,d}$, para todo $r > 0$, e que a solução depende continuamente dos dados iniciais, ou seja, demonstramos o Teorema A.

No capítulo 3, enunciamos e provamos alguns lemas necessários na demonstração do Teorema B. Procuramos uma solução, $u(r,d)$, de $(P)_{r,d}$ e um valor do parâmetro d tal que

$$u(1,d) = 0,$$

e demonstramos o Teorema B. Como conseqüência de tal resultado obtemos o Teorema C.

Nos Apêndices A e B encontram-se alguns resultados utilizados neste trabalho e suas respectivas demonstrações.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e Resultados Utilizados

Nesta seção enunciaremos algumas definições e resultados clássicos, os quais serão usados durante este trabalho.

Definição 1.1. (Brezis [3]). Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, define-se

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f|^p dx < \infty \right\}.$$

Observação 1.2. Para cada $f \in L^p(\Omega)$, seja

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

Temos que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ é um espaço de Banach e que $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, (cf. Brezis [3]).

Definição 1.3. (Brezis [3]). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$, o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, N \end{array} \right\},$$

onde $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.

Notação: $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denotamos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = \text{ grad } u, \text{ onde } \frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i.$$

Observação 1.4. Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ está munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{L^p}$$

ou, às vezes, da norma equivalente $\left(||u||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$, se $1 \leq p < \infty$.

Definição 1.5. (Brezis [3]). Seja $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Notação: $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

O espaço $W_0^{1,p}$ munido da norma induzida por $W^{1,p}$ é um espaço de Banach reflexivo, se $1 < p < \infty$.

Definição 1.6. $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua }\}$.

Definição 1.7. $C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a,b], f' \in C([a,b])\}$.

Proposição 1.8. ***(Kreyszig [9]).*** *O espaço $C([a,b])$ é completo com a métrica $d(f,g) = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$.*

Demonstração: Seja (f_m) uma sequência de Cauchy qualquer em $C([a,b])$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{t\in J} |f_m(t) - f_n(t)| = d\,(f_m, f_n) < \epsilon, \qquad \forall\, m, n > N. \tag{1.1}$$

onde $J = [a,b]$. Logo, para todo $t = t_0 \in J$ fixo,

$$|f_m(t_0) - f_n(t_0)| \leq \max_{t\in J} |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon, \qquad \forall\, m, n > N.$$

Isso mostra que $(f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo, essa sequência converge, digamos $f_m(t_0) \to f(t_0)$ quando $m \to \infty$. Desse modo, podemos associar a cada $t \in J$ um único número real $f(t)$. Isso define, pontualmente, uma função f em J. Mostraremos que $f \in C([a,b])$ e $f_m \to f$ em $C([a,b])$.

Fazendo $n \to \infty$ em (1.1), temos

$$\max_{t \in J} |f_m(t) - f(t)| \leq \epsilon, \qquad \forall\, m > N. \tag{1.2}$$

Então, para todo $t \in J$,

$$|f_m(t) - f(t)| \leq \epsilon, \qquad \forall\, m > N.$$

Assim, (f_m) converge uniformemente para f em J. Como as f_m's são contínuas em J e a convergência é uniforme, a função limite f é contínua em J. Logo, $f \in C([a,b])$. De (1.2), obtemos que $d\,(f_m, f) \leq \epsilon$, $\forall\, m > N$. Então, $f_m \to f$. Portanto, $C([a,b])$ é completo.

□

Proposição 1.9. ***(Lima [10]).*** *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.*

Definição 1.10. (Kreyszig [9]). Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $T : X \to X$ é chamada uma contração em X se existe um número real positivo $\alpha < 1$ tal que para todo $x, y \in X$

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Teorema 1.11. ***(Kreyszig [9], Teorema do ponto fixo de Banach).*** *Considere um espaço métrico $X = (X, d)$, onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e seja $T : X \to X$ uma contração em X. Então T possui um único ponto fixo, $u = Tu$.*

Teorema 1.12. ***(Piccinini et al. [14], Teorema de existência local de Peano).*** *Sejam $f_1, \ldots, f_n$ funções contínuas no retângulo $\mathcal{R}$ definido por $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, $y_i^0 - a_i \leq y_i \leq y_i^0 + a_i$. Então existe ao menos uma n-upla $y_1, \ldots, y_n$ de funções diferenciáveis num intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ com $0 < \delta \leq a$ satisfazendo o problema de valor inicial*

$$y_i' = f_i\,(x, y(x))\,, \quad y_i(x_0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Proposição 1.13. ***(Evans [6], Desigualdade de Gronwall - forma diferencial).***

(i) *Seja $\eta(\cdot\,)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$, que satisfaz a* *desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \;\; q.t.p. \; em \; [0, T], \tag{1.3}$$

onde $\phi(t)$ *e* $\psi(t)$ *são funções não negativas e integráveis em* $[0, T]$*. Então,*

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds \right], \tag{1.4}$$

para todo $0 \leq t \leq T$*.*

(ii) *Em particular, se*

$$\eta' \leq \phi\eta \;\; em \; [0, T] \;\; e \; \eta(0) = 0,$$

então

$$\eta \equiv 0 \;\; em \; [0, T].$$

Demonstração: De (1.3), temos que

$$\frac{d}{ds}\left(\eta(s) e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \right) = e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \left(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s) \right) \leq e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \psi(s), \;\; q.t.p. \text{ em } [0, T].$$

Conseqüentemente, para cada $0 \leq t \leq T$, obtemos que

$$\eta(t) e^{-\int_0^t \phi(r)dr} \leq \eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \psi(s)ds \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds.$$

Isso implica a desigualdade (1.4).

□

Proposição 1.14. ***(Evans [6], Desigualdade de Gronwall - forma integral).***

(i) *Seja* $\xi(t)$ *uma função não negativa e integrável em* $[0, T]$ *que satisfaz a desigualdade integral*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2, \;\; q.t.p. \; em \; [0, T], \tag{1.5}$$

onde $C_1, C_2 \geq 0$ *são constantes. Então,*

$$\xi(t) \leq C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t} \right), \;\; q.t.p. \; em \; [0, T]. \tag{1.6}$$

(ii) *Em particular, se*

$$\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)ds, \ \ q.t.p. \ em \ [0,T],$$

então

$$\xi(t) = 0 \ \ q.t.p. \ em \ [0,T].$$

Demonstração: Seja $\eta(t) := \displaystyle\int_0^t \xi(s)ds$; logo $\eta' \le C_1\eta + C_2$ q.t.p. em $[0,T]$. De acordo com a forma diferencial da desigualdade de Gronwall:

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2 t\right) = C_2 t e^{C_1 t}.$$

Então (1.5) implica

$$\xi(t) \le C_1\eta(t) + C_2 \le C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right),$$

que é a desigualdade (1.6).

□

Definição 1.15. (Kreyszig [9]). Uma seqüência (x_n) em $C([a,b])$ é dita ser eqüicontínua se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, dependendo somente de ϵ, tal que para todo x_n e todo $s_1, s_2 \in [a,b]$ satisfazendo $|s_1 - s_2| < \delta$ temos

$$|x_n(s_1) - x_n(s_2)| < \epsilon.$$

Vemos dessa definição que cada x_n é uniformemente contínua em $[a,b]$ e δ não depende de n.

Teorema 1.16. ***(Kreyszig [9], Teorema de Ascoli).*** *Uma seqüência eqüicontínua limitada (x_n) em $C([a,b])$ possui uma subseqüência que converge na norma de $C([a,b])$.*

Teorema 1.17. ***(Wheeden e Zygmund [19], Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue).*** *Sejam $E \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável e (f_k) uma seqüência de funções mensuráveis sobre E tais que $f_k \to f$ q.t.p. em E. Se existe $\phi \in L^1(E)$ tal que $|f_k| \le \phi$ q.t.p. em E para todo k, então*

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

1.2 Método de "Shooting"

O método de "Shooting" é utilizado para resolver, de forma analítica e também numérica, problemas de valor de fronteira para equações diferenciais.

De acordo com Bailey et al. [2], a idéia desse método para obter solução do seguinte problema de valor de fronteira

$$y''(t) + f(t, y(t), y'(t)) = 0 \tag{1.7}$$

$$y(b) = B, \quad y'(a) = m, \tag{1.8}$$

usando como parâmetro de "shooting" o valor inicial, é tentar encontrar uma altura inicial μ tal que a solução do problema de valor inicial

$$y''(t) + f(t, y(t), y'(t)) = 0 \tag{1.9}$$

$$y(a) = \mu, \quad y'(a) = m \tag{1.10}$$

também satisfaça (1.8). Com esse intuito, devemos escolher um valor teste para μ, integrar (1.9)-(1.10) em (a, t), calcular $y(b)$ e corrigir a altura inicial usando essa informação, até obtermos $y(b) = B$.

Para isso, assumiremos que as soluções de todos os problemas de valor inicial (1.9)-(1.10) existem, são únicas e dependem continuamente de suas condições iniciais.

Para enfatizar a dependência da solução de (1.9)-(1.10) em relação ao seu valor inicial μ, denotamos a solução por $y(t, \mu)$. Um método de "Shooting" para o problema (1.7)-(1.8) é portanto, um procedimento para encontrar uma raiz, considerando a variável μ, da equação

$$y(b, \mu) = B. \tag{1.11}$$

Qualquer técnica padrão para encontrar raízes de (1.11) pode ser usada, observando-se que o problema de valor inicial (1.9)-(1.10) deve ser integrado até $t = b$, para avaliar a função $y(t, \mu)$ nesse ponto.

Capítulo 2

Demonstração do Teorema A

Primeiramente, na seção 2.1, provaremos que o problema $(P)_{r,d}$ tem uma única solução $u \in C^1([0,\infty))$ e em seguida, na seção 2.2, mostraremos que as soluções de $(P)_{r,d}$ dependem continuamente dos dados iniciais.

2.1 Existência e Unicidade de Soluções de $(P)_{r,d}$ para todo $r > 0$

Com o objetivo de analisarmos o problema $(P)_{r,d}$, começaremos esta seção definindo o que é uma solução para tal problema.

Definição 2.1. Uma solução de $(P)_{r,d}$ é uma função $u \in C^1([0,1])$ tal que

(i) $r^{N-1}\,|u'(r)|^{p-2}\,u'(r)$ é diferenciável

(ii) $-r^{N-1}\,|u'(r)|^{p-2}\,u'(r) = \displaystyle\int_0^r s^{N-1}\,|u(s)|^{q-1}\,u(s)ds,\ r > 0$

(iii) $u'(0) = 0$ e $u(0) = d > 0$.

Para determinar a existência de soluções do problema de valor inicial $(P)_{r,d}$, usaremos localmente o teorema do ponto fixo de Banach. Com esse intuito, seguimos o argumento de Saxton e Wei [16].

Defina $\Phi_p(x) = |x|^{p-2}x$, para $x \in \mathbb{R}$ e $p > 1$, e denote sua inversa por $\Phi_{p'}(x)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, isto é, $p' = \frac{p}{p-1}$.

De $(P)_{r,d}$, temos que

$$-(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = r^{N-1}|u(r)|^{q-1}u(r), \; r > 0. \tag{2.1}$$

Integrando (2.1) em $(0, r)$, observamos que precisamos resolver

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds. \tag{2.2}$$

Ou seja,

$$\Phi_p(u'(r)) = -\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds. \tag{2.3}$$

Aplicando $\Phi_{p'}$ na equação (2.3), segue-se que

$$\begin{aligned}
u'(r) &= \Phi_{p'}\left(-\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right) \\
&= \left|-\frac{1}{r^{N-1}}\right|^{p'-2}\left|\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right|^{p'-2}\left(-\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right) \\
&= \frac{1}{r^{(N-1)(p'-2)}}\left(-\frac{1}{r^{N-1}}\right)\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right) \\
&= -\frac{1}{r^{(N-1)\frac{2-p}{p-1}+N-1}}\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right) \\
&= -\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u'(r) = -\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right). \tag{2.4}$$

Integrando (2.4) em $(0, r)$, obtemos que

$$u(r) = d - \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right)dt.$$

Assim, resolveremos $(P)_{r,d}$ encontrando os pontos fixos do seguinte operador

$$T(u(r)) = d - \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \Phi_{p'} \left(\int_0^t s^{N-1} \Phi_{q+1}(u(s)) ds \right) dt. \tag{2.5}$$

Para cada par de números positivos R e ϵ, seja $B_R^\epsilon(d) = \{u \in C([0,\epsilon]) : \|u - d\| \leq R\}$, onde a norma de $C([0,\epsilon])$ é dada por

$$\|f\| = \max_{t\in[0,\epsilon]} |f(t)| .$$

Observamos que $B_R^\epsilon(d)$ é um subconjunto fechado de $C([0,\epsilon])$. De fato, sejam (u_n) uma seqüência em $B_R^\epsilon(d)$ e $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Como $u_n \in C([0,\epsilon])$ e $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, logo $u \in C([0,\epsilon])$. Temos que

$$\|u - d\| = \left\| \lim_{n\to\infty} u_n - d \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} (u_n - d) \right\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n - d\| \leq R,$$

pois $u_n \in B_R^\epsilon(d)$. Assim, $u \in B_R^\epsilon(d)$. Portanto, $B_R^\epsilon(d)$ é um subconjunto fechado de $C([0,\epsilon])$.

Demonstraremos que $T\left(B_R^\epsilon(d)\right) \subseteq B_R^\epsilon(d)$ e que $T : B_R^\epsilon(d) \to B_R^\epsilon(d)$ é uma contração, se R e ϵ são escolhidos apropriadamente.

Primeiramente, mostraremos que $T\left(B_R^\epsilon(d)\right) \subseteq B_R^\epsilon(d)$, ou seja, provaremos que

(i) $T(u) \in C([0,\epsilon])$.

De fato, seja $u \in B_R^\epsilon(d)$. De (2.5), temos que

$$\begin{aligned} T(u(r)) &= d - \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \Phi_{p'} \left(\int_0^t s^{N-1} \Phi_{q+1}(u(s)) ds \right) dt \\ &= d - \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left(\left| \int_0^t s^{N-1} \Phi_{q+1}(u(s)) ds \right|^{p'-2} \int_0^t s^{N-1} \Phi_{q+1}(u(s)) ds \right) dt \\ &= d - \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left(\left| \int_0^t s^{N-1} |u(s)|^{q-1} u(s) ds \right|^{p'-2} \int_0^t s^{N-1} |u(s)|^{q-1} u(s) ds \right) dt, \end{aligned}$$

então $T(u) \in C([0,\epsilon])$, pois $u \in C([0,\epsilon])$, $p' > 1$ e $q > 0$.

(ii) $\|T(u) - d\| \leq R$.

De fato, seja $u \in B_R^\epsilon(d)$ e escolha $R > 0$ tal que $R \leq \dfrac{d}{2}$. Temos que $\|u\| - \|d\| \leq \|u - d\| \leq R$, pois $u \in B_R^\epsilon(d)$. Logo, $\|u\| \leq \|d\| + R = d + R \leq d + \dfrac{d}{2} = \dfrac{3d}{2} \leq 2d$.

Para $0 \leq r \leq \epsilon$, segue-se que

$$
\begin{aligned}
|T(u(r)) - d| &= \left| -\int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left(\left| \int_0^t s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds \right|^{p'-2} \int_0^t s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds \right) dt \right| \\
&\leq \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left| \int_0^t s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds \right|^{p'-2} \left| \int_0^t s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds \right| dt \\
&= \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left| \int_0^t s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds \right|^{p'-1} dt \\
&\leq \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left(\int_0^t \left| s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s) \right| ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&= \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left(\int_0^t s^{N-1}|u(s)|^{q}ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \leq \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left[(2d)^q \int_0^t s^{N-1}ds \right]^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&= \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left[(2d)^q \frac{t^N}{N} \right]^{\frac{1}{p-1}} dt = (2d)^{\frac{q}{p-1}} \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \frac{t^{\frac{N}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}} dt \\
&= \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} (2d)^{\frac{q}{p-1}} \int_0^r t^{\frac{1}{p-1}} dt = \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} (2d)^{\frac{q}{p-1}} \frac{p-1}{p} r^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} (2d)^{\frac{q}{p-1}} \frac{p-1}{p} \epsilon^{\frac{p}{p-1}} \leq R, \ \forall\ 0 \leq r \leq \epsilon,
\end{aligned}
$$

considerando $\epsilon \leq \dfrac{R^{\frac{p-1}{p}}}{(2d)^{\frac{q}{p}}}$.

Então, $\|T(u) - d\| \leq R$ e assim, $T\left(B_R^\epsilon(d)\right) \subseteq B_R^\epsilon(d)$.

Agora, mostraremos que T é uma contração. Sejam $u, v \in B_R^\epsilon(d)$ e, como acima, $0 < R \leq \dfrac{d}{2}$. Então, para $0 \leq r \leq \epsilon$, temos que

$$
\frac{d}{2} \leq |u|\,, |v| \leq 2d. \tag{2.6}
$$

De fato, como $u \in B_R^\epsilon(d)$, temos que $\|u - d\| \leq R$ e então $|u - d| \leq R \leq \dfrac{d}{2}$. Assim, obtemos que

$$
|u| = |d + u - d| \geq d - |u - d| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.
$$

Analogamente, mostra-se que $|v| \geq \dfrac{d}{2}$.

Note que,

$$T(v(r)) - T(u(r)) = \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}[\chi(u(t)) - \chi(v(t))]dt,$$

onde

$$\chi(u(t)) = \Phi_{p'}\left(\int_0^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right).$$

Seja

$$G(h,t) = \chi(hu(t) + (1-h)v(t)).$$

Então $\chi(u(t)) - \chi(v(t)) = G(1,t) - G(0,t)$. Logo, pelo teorema do valor médio,

$$G(1,t) - G(0,t) = \frac{\partial G}{\partial h}(h,t), \text{ para algum } 0 < h < 1.$$

Temos que

$$G(h,t) = \Phi_{p'}\left(\int_0^t s^{N-1}\Phi_{q+1}\left(hu(s) + (1-h)v(s)\right)ds\right).$$

Como

$$\frac{d}{dz}\Phi_{p'}(z) = \frac{d}{dz}\left(|z|^{p'-2}z\right) = (p'-1)|z|^{p'-2} = \frac{1}{p-1}|z|^{\frac{2-p}{p-1}}, \text{ para } z \neq 0\ ,$$

e

$$\frac{d}{dz}\Phi_{q+1}(z) = \frac{d}{dz}\left(|z|^{q-1}z\right) = q|z|^{q-1}, \text{ para } z \neq 0\ ,$$

obtemos, usando a regra de Leibniz, que

$$\frac{\partial G}{\partial h}(h,t) = \frac{q}{p-1}\left|\int_0^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu + (1-h)v)ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}} \int_0^t s^{N-1}\left|hu + (1-h)v\right|^{q-1}[u - v]ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial G}{\partial h}(h,t)\right| &= \left|\frac{q}{p-1}\left|\int_0^t s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\int_0^t s^{N-1}\left|hu+(1-h)v\right|^{q-1}[u-v]ds\right| \\ &= \frac{q}{p-1}\left|\int_0^t s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\left|\int_0^t s^{N-1}\left|hu+(1-h)v\right|^{q-1}[u-v]ds\right| \\ &\leq \frac{q}{p-1}\left|\int_0^t s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\int_0^t s^{N-1}\left|hu+(1-h)v\right|^{q-1}\|u-v\|\,ds.\end{aligned}$$

De (2.6), temos que

$$\frac{d}{2} \leq |hu+(1-h)v| \leq 2d.$$

Considere os seguintes casos:

Caso 1: $1 < q+1 < p \leq 2$

Nesse caso,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial G}{\partial h}(h,t)\right| &\leq \frac{q}{p-1}\left(\int_0^t s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right)^{\frac{2-p}{p-1}}\left(\frac{d}{2}\right)^{q-1}\|u-v\|\int_0^t s^{N-1}ds \\ &\leq \frac{q}{p-1}\left[(2d)^q\frac{t^N}{N}\right]^{\frac{2-p}{p-1}}\left(\frac{d}{2}\right)^{q-1}\|u-v\|\,\frac{t^N}{N} = C_1(d,p,q,N)\,\|u-v\|\,t^{\frac{N}{p-1}},\end{aligned}$$

onde $C_1(d,p,q,N)$ é uma constante.

Caso 2: $1 < q+1 < 2 < p < N$

Temos que

$$\int_0^t s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds \geq \left(\frac{d}{2}\right)^q\frac{t^N}{N}.$$

Então,

$$\left|\int_0^t s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right| \geq \left(\frac{d}{2}\right)^q\frac{t^N}{N}.$$

Assim,

$$\left|\int_0^t s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}} \leq \left[\left(\frac{d}{2}\right)^q\frac{t^N}{N}\right]^{\frac{2-p}{p-1}}.$$

Logo,

$$\left|\frac{\partial G}{\partial h}(h,t)\right| \leq \frac{q}{p-1}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^q \frac{t^N}{N}\right]^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\frac{d}{2}\right)^{q-1} \|u-v\| \frac{t^N}{N} = C_2(d,p,q,N)\|u-v\|\, t^{\frac{N}{p-1}},$$

onde $C_2(d,p,q,N)$ é uma constante.

Caso 3: $2 \leq q+1 < p < N$

Aqui, segue-se que

$$\left|\frac{\partial G}{\partial h}(h,t)\right| \leq \frac{q}{p-1}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^q \frac{t^N}{N}\right]^{\frac{2-p}{p-1}} (2d)^{q-1} \|u-v\| \frac{t^N}{N} = C_3(d,p,q,N)\|u-v\|\, t^{\frac{N}{p-1}},$$

onde $C_3(d,p,q,N)$ é uma constante.

Assim, em cada caso, temos que

$$\begin{aligned}
|T(v(r)) - T(u(r))| &= \left|\int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}[\chi(u(t)) - \chi(v(t))]dt\right| \leq \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|\chi(u(t)) - \chi(v(t))\right| dt \\
&= \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|\frac{\partial G}{\partial h}(h,t)\right| dt \leq C\left(d,p,q,N\right)\|u-v\| \int_0^r \frac{t^{\frac{N}{p-1}}}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} dt \\
&= C(d,p,q,N)\|u-v\| \int_0^r t^{\frac{1}{p-1}} dt = C'(d,p,q,N)\, r^{\frac{p}{p-1}}\|u-v\| \\
&\leq C'(d,p,q,N)\,\epsilon^{\frac{p}{p-1}}\|u-v\|, \forall\ 0 \leq r \leq \epsilon, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

onde $C(d,p,q,N)$ e $C'(d,p,q,N)$ são constantes que dependem somente de p, q, d, e N.

Então, de (2.7), obtemos que

$$\|T(v) - T(u)\| \leq \beta \|u-v\|,$$

onde $\beta < 1$ se escolhemos ϵ suficientemente pequeno. Logo, T é uma contração em $B_R^\epsilon(d)$ e então, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach, T possui um único ponto fixo, $u \in B_R^\epsilon(d)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Conseqüentemente, $u \in C([0,\epsilon])$ e u satisfaz

$$u(r) = d - \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right)dt.$$

Assim, $u(0) = d$, u é diferenciável com $u'(0) = 0$ e u satisfaz

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds.$$

Portanto, $u \in C^1([0,\epsilon])$. Mais regularidade para a solução dependerá do número p. Temos que $u \in C^2$, exceto possivelmente nos pontos onde $u' = 0$. Para verificar esse comentário, obteremos uma expressão para u'' e analisaremos os casos onde $1 < p \leq 2$ e $2 < p < N$.

De (2.4), temos que

$$u'(r) = -\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right),$$

ou seja,

$$u'(r) = -\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|\int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds. \tag{2.8}$$

Seja $F(r) = \displaystyle\int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds$, logo (2.8) torna-se

$$u'(r) = -\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|F(r)\right|^{\frac{2-p}{p-1}}F(r).$$

Então,

$$\begin{aligned}
u''(r) &= -\left(\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\right)'\left|F(r)\right|^{\frac{2-p}{p-1}}F(r) - \frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\left(\left|F(r)\right|^{\frac{2-p}{p-1}}F(r)\right)' \\
&= -\frac{1-N}{p-1}\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\frac{1}{r}\left|F(r)\right|^{\frac{2-p}{p-1}}F(r) - \frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\frac{1}{p-1}\left|F(r)\right|^{\frac{2-p}{p-1}}F'(r) \\
&= \frac{1-N}{p-1}\frac{1}{r}u'(r) - \frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\frac{1}{p-1}\left|F(r)\right|^{\frac{2-p}{p-1}}r^{N-1}\left|u(r)\right|^{q-1}u(r) \\
&= -\frac{1}{p-1}\left(\frac{N-1}{r}u'(r) + \frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}(2-p)}}\left|F(r)\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\left|u(r)\right|^{q-1}u(r)\right) \\
&= -\frac{1}{p-1}\left(\frac{N-1}{r}u'(r) + \left|u'(r)\right|^{2-p}\left|u(r)\right|^{q-1}u(r)\right).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$u''(r) = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{N-1}{r}u'(r) + |u'(r)|^{2-p}\,|u(r)|^{q-1}\,u(r)\right). \tag{2.9}$$

Agora, consideraremos os seguintes casos:

Caso 1: $1 < p \leq 2$

Como $2 - p \geq 0$, obtemos da equação (2.9) que u'' é contínua para $r \geq 0$. Assim, temos que $u \in C^2$, mesmo se $u' = 0$.

Caso 2: $2 < p < N$

De (2.9), temos que

$$|u'(r)|^{p-2}\left[(p-1)u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r)\right] + |u(r)|^{q-1}\,u(r) = 0.$$

Assim, $u \notin C^2$ nos pontos onde $u'(r) = 0$, pois se $u \in C^2$ e $u'(r) = 0$ então teríamos $u(r) = 0$, o que contradiz a Afirmação 2.4.

Mostraremos, agora, que o problema de valor inicial $(P)_{r,d}$ tem uma única solução $u \in C^1([0,\infty))$. Para isso, defina a função "energia" associada a $(P)_{r,d}$ por

$$E(r) = \frac{p-1}{p}\,|u'(r)|^p + \frac{1}{q+1}\,|u(r)|^{q+1}. \tag{2.10}$$

Tal função satisfaz

$$E(0) = \frac{d^{q+1}}{q+1}$$

e

$$\begin{aligned} E'(r) &= (p-1)\,|u'(r)|^{p-2}\,u'(r)u''(r) + |u(r)|^{q-1}\,u(r)u'(r) \\ &= -\frac{N-1}{r}\,|u'(r)|^p,\ \forall\, r \text{ tal que } u'(r) \neq 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde a última igualdade foi obtida usando (2.9). Logo, $E'(r) \leq 0$, $\forall\, r > 0$ tal que $u'(r) \neq 0$. Assim, $E(r) \leq E(0)$ e então

$$\frac{p-1}{p}\,|u'(r)|^p + \frac{1}{q+1}\,|u(r)|^{q+1} = E(r) \leq \frac{d^{q+1}}{q+1}, \forall\, r \geq 0. \tag{2.12}$$

Portanto, $|u|$, $|u'|$ são uniformemente limitadas, ou seja, existem constantes positivas k_1 e k_2 tais que
$$|u(r)| \leq k_1 \text{ e } |u'(r)| \leq k_2.$$

Lema 2.2. *Sejam* $Q(d) = \{r > 0 : (P)_{r,d}$ *tem solução única em* $[0, r)\}$ *e* $S_d = \sup Q(d)$. *Então,* $S_d = +\infty$.

Demonstração: Observe que $S_d \geq \epsilon > 0$, pois $\epsilon \in Q(d)$. Suponha, por absurdo, que $\epsilon_0 = S_d < +\infty$, logo $(P)_{r,d}$ tem solução única u em $[0, \epsilon_0)$.

Afirmação 2.3. A solução de $(P)_{r,d}$ pode ser estendida até ϵ_0 de maneira única.

De fato, mostraremos que existem os seguintes limites
$$\lim_{r \to \epsilon_0} u(r) = d_0 \text{ e } \lim_{r \to \epsilon_0} u'(r) = d_0'.$$

Dados $s, r \in [0, \epsilon_0)$, pelo teorema do valor médio, existe $\theta \in (s, r)$ tal que
$$u(r) - u(s) = u'(\theta)(r - s),$$
logo
$$|u(r) - u(s)| \leq k_2 |r - s|.$$

Seja $r_n \in [0, \epsilon_0)$ uma seqüência qualquer tal que $r_n \to \epsilon_0$ quando $n \to \infty$. Como $|u(r_n)| \leq k_1$, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, $(u(r_n))$ possui uma subseqüência convergente, ou seja,
$$\lim_{j \to \infty} u(r_{n_j}) = u_0, \text{ para algum } u_0 \in \mathbb{R}.$$

Suponha que $u(r_n) \not\to u_0$ quando $n \to \infty$, então existe r_{n_k} tal que $u(r_{n_k}) \not\to u_0$. Logo, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $|u(r_{n_k}) - u_0| \geq \epsilon_0 > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Como
$$\left|u(r_{n_k}) - u(r_{n_j})\right| \leq k_2 \left|r_{n_k} - r_{n_j}\right|,$$
fazendo $j \to \infty$, obtemos que
$$|u(r_{n_k}) - u_0| \leq k_2 |r_{n_k} - \epsilon_0|,$$

daí

$$\lim_{k\to\infty} |u(r_{n_k}) - u_0| = 0,$$

o que contradiz o fato de $u(r_{n_k}) \not\to u_0$. Assim, $u(r_n) \to u_0$ quando $n \to \infty$. Então, tomando $u_0 = d_0$, concluímos que $u(r) \to d_0$ quando $r \to \epsilon_0$.

Provaremos que $\lim\limits_{r\to\epsilon_0} u'(r) = d_0' \in \mathbb{R}$.

Usando a equação (2.2) e fazendo $r \to \epsilon_0$, temos que

$$|u'(r)|^{p-2}\, u'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} \left|u(s)\right|^{q-1} u(s)ds \to -\frac{1}{\epsilon_0^{N-1}} \int_0^{\epsilon_0} s^{N-1} \left|u(s)\right|^{q-1} u(s)ds.$$

Então,

$$\Phi_p(u'(r)) \to -\frac{1}{\epsilon_0^{N-1}} \int_0^{\epsilon_0} s^{N-1} \left|u(s)\right|^{q-1} u(s)ds.$$

Logo,

$$u'(r) \to \Phi_{p'} \left(-\frac{1}{\epsilon_0^{N-1}} \int_0^{\epsilon_0} s^{N-1} \left|u(s)\right|^{q-1} u(s)ds \right).$$

Considerando

$$d_0' = \Phi_{p'} \left(-\frac{1}{\epsilon_0^{N-1}} \int_0^{\epsilon_0} s^{N-1} \left|u(s)\right|^{q-1} u(s)ds \right),$$

obtemos que

$$u'(r) \to d_0' \text{ quando } r \to \epsilon_0.$$

Portanto,

$$u(\epsilon_0) = d_0 \text{ e } u'(\epsilon_0) = d_0'.$$

Conseqüentemente, $(P)_{r,d}$ tem solução única em $[0, \epsilon_0]$.

Afirmação 2.4. Se $u'(r) = 0$ então $u(r) \neq 0$.

De fato, usando (2.11), temos que

$$\left(r^N E(r)\right)' = N r^{N-1} E(r) - r^N \frac{N-1}{r} |u'(r)|^p.$$

Utilizando (2.10), obtemos que

$$\left(r^N E(r)\right)' = N r^{N-1} \frac{p-1}{p} |u'(r)|^p + N r^{N-1} \frac{1}{q+1} |u(r)|^{q+1} - r^{N-1}(N-1)|u'(r)|^p,$$

ou seja,

$$\left(r^N E(r)\right)' = r^{N-1}|u'(r)|^p \left[N\frac{p-1}{p} - (N-1)\right] + N r^{N-1}\frac{1}{q+1}|u(r)|^{q+1}. \tag{2.13}$$

Agora, derivando (2.2) e multiplicando o resultado obtido por $u(r)$, temos que

$$-\left(r^{N-1}\left|u'(r)\right|^{p-2}u'(r)\right)' u(r) = r^{N-1}\left|u(r)\right|^{q+1}.$$

Integrando a equação acima em $(0, r)$, vemos que

$$-\int_0^r \left(s^{N-1}\left|u'(s)\right|^{p-2}u'(s)\right)' u(s)ds = \int_0^r s^{N-1}\left|u(s)\right|^{q+1} ds.$$

Aplicando integração por partes na integral do lado esquerdo dessa equação, obtemos que

$$-\left[r^{N-1}\left|u'(r)\right|^{p-2}u'(r)u(r) - \int_0^r s^{N-1}\left|u'(s)\right|^p ds\right] = \int_0^r s^{N-1}\left|u(s)\right|^{q+1} ds.$$

Como, por hipótese, $u'(r) = 0$, segue-se que

$$\int_0^r s^{N-1}\left|u'(s)\right|^p ds = \int_0^r s^{N-1}\left|u(s)\right|^{q+1} ds. \tag{2.14}$$

Integrando (2.13) em $(0, r)$, temos que

$$r^N E(r) = \frac{(p-N)}{p}\int_0^r s^{N-1}|u'(s)|^p ds + \frac{N}{q+1}\int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q+1} ds$$

Usando (2.14), obtemos que

$$\begin{aligned} r^N E(r) &= \frac{(p-N)}{p}\int_0^r s^{N-1}|u'(s)|^p ds + \frac{N}{q+1}\int_0^r s^{N-1}|u'(s)|^p ds \\ &= \left(\frac{p-N}{p} + \frac{N}{q+1}\right)\int_0^r s^{N-1}|u'(s)|^p ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$r^N\left(\frac{p-1}{p}|u'(r)|^p + \frac{1}{q+1}|u(r)|^{q+1}\right) = \left(\frac{p-N}{p} + \frac{N}{q+1}\right)\int_0^r s^{N-1}|u'(s)|^p ds.$$

Pelo fato de $u'(r) = 0$, vemos que

$$r^N\frac{1}{q+1}|u(r)|^{q+1} = \left(\frac{(q+1)(p-N)+pN}{p(q+1)}\right)\int_0^r s^{N-1}|u'(s)|^p ds.$$

Portanto, $u(r) \neq 0$.

Observação 2.5. Como conseqüência dessa afirmação, concluímos que se $u'(\epsilon_0) = 0$ então $u(\epsilon_0) = d_0 \neq 0$.

Examinaremos dois casos: $u'(\epsilon_0) = 0$ e $u'(\epsilon_0) \neq 0$.

Caso 1: $u'(\epsilon_0) = 0$

De (2.2), temos que

$$-\epsilon_0^{N-1}\left|u'(\epsilon_0)\right|^{p-2}u'(\epsilon_0) = \int_0^{\epsilon_0} s^{N-1}\left|u(s)\right|^{q-1}u(s)ds = 0.$$

Assim, se $(P)_{r,d}$ tiver solução para $r > \epsilon_0$, devemos ter

$$\begin{aligned} -r^{N-1}\left|u'(r)\right|^{p-2}u'(r) &= \int_0^{\epsilon_0} s^{N-1}\left|u(s)\right|^{q-1}u(s)ds + \int_{\epsilon_0}^r s^{N-1}\left|u(s)\right|^{q-1}u(s)ds \\ &= \int_{\epsilon_0}^r s^{N-1}\left|u(s)\right|^{q-1}u(s)ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Phi_p(u'(r)) = -\frac{1}{r^{N-1}}\int_{\epsilon_0}^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds.$$

Então,

$$u'(r) = -\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_{\epsilon_0}^{r} s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right).$$

Integrando em (ϵ_0, r), obtemos que

$$u(r) = d_0 - \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right)dt.$$

Logo, encontrar solução de $(P)_{r,d}$ para $r > \epsilon_0$ equivale a procurar os pontos fixos de

$$\widetilde{T}(u(r)) = d_0 - \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right)dt.$$

Definimos $\widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0) = \{u \in C([\epsilon_0, \epsilon_0+\epsilon]) : \|u - d_0\| \leq R\}$, onde $\|\cdot\|$ é a norma do máximo em $[\epsilon_0, \epsilon_0+\epsilon]$. Através de cálculos simples, obtemos que $\widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)$ é um subconjunto fechado de $C([\epsilon_0, \epsilon_0+\epsilon])$. Mostraremos que $\widetilde{T}(\widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)) \subseteq \widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)$ e que $\widetilde{T} : \widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0) \to \widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)$ é uma contração, se R e ϵ são escolhidos apropriadamente.

Inicialmente, mostraremos que $\widetilde{T}(\widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)) \subseteq \widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)$, ou seja, provaremos que

(i) $\widetilde{T}(u) \in C([\epsilon_0, \epsilon_0+\epsilon])$.

De fato, seja $u \in \widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)$. Como

$$\widetilde{T}(u(r)) = d_0 - \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left(\left|\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}} \int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds\right)dt,$$

então $\widetilde{T}(u) \in C([\epsilon_0, \epsilon_0+\epsilon])$, pois $u \in C([\epsilon_0, \epsilon_0+\epsilon])$, $q > 0$ e $p > 1$.

(ii) $\left\|\widetilde{T}(u) - d_0\right\| \leq R$.

De fato, seja $u \in \widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)$ e escolha $R > 0$ tal que $R \leq \dfrac{|d_0|}{2}$. Temos que $\|u\| - \|d_0\| \leq \|u - d_0\| \leq R$, logo

$$\|u\| \leq \|d_0\| + R = |d_0| + R \leq |d_0| + \frac{|d_0|}{2} = \frac{3\,|d_0|}{2} \leq 2\,|d_0|.$$

Para $\epsilon_0 \leq r \leq \epsilon_0 + \epsilon$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{T}(u(r)) - d_0\right| &= \left| -\int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left(\left| \int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds \right|^{\frac{2-p}{p-1}} \int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds \right) dt \right| \\
&\leq \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left| \int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds \right|^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left(\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|u(s)|^{q}ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \leq \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left[(2\,|d_0|)^q \int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}ds \right]^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&= \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left[(2\,|d_0|)^q \frac{1}{N} \left(t^N - \epsilon_0^N\right) \right]^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&= (2\,|d_0|)^{\frac{q}{p-1}} \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left(t^N - \epsilon_0^N\right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq (2\,|d_0|)^{\frac{q}{p-1}} \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \frac{1}{\epsilon_0^{\frac{N-1}{p-1}}} \left[(\epsilon_0 + \epsilon)^N - \epsilon_0^N \right]^{\frac{1}{p-1}} (r - \epsilon_0) \\
&\leq (2\,|d_0|)^{\frac{q}{p-1}} \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \frac{1}{\epsilon_0^{\frac{N-1}{p-1}}} \left[(\epsilon_0 + \epsilon)^N - \epsilon_0^N \right]^{\frac{1}{p-1}} \epsilon \leq R, \ \forall\, \epsilon_0 \leq r \leq \epsilon_0 + \epsilon,
\end{aligned}$$

considerando $\epsilon \leq \dfrac{R\epsilon_0^{\frac{p-2}{p-1}}}{(2\,|d_0|)^{\frac{q}{p-1}}\, N}$.

Então, $\left\|\widetilde{T}(u) - d_0\right\| \leq R$ e assim, $\widetilde{T}(\widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)) \subseteq \widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)$.

Agora, mostraremos que $\widetilde{T}$ é uma contração. Sejam $u, v \in \widetilde{B}_R^{\epsilon}(d_0)$, $0 < R \leq \dfrac{|d_0|}{2}$ e $\epsilon_0 \leq r \leq \epsilon_0 + \epsilon$, logo

$$\frac{|d_0|}{2} \leq |u|\,, |v| \leq 2\,|d_0|\,. \tag{2.15}$$

Observe que,

$$\widetilde{T}(v(r)) - \widetilde{T}(u(r)) = \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} [\widetilde{\chi}(u(t)) - \widetilde{\chi}(v(t))]dt,$$

onde

$$\widetilde{\chi}(u(t)) = \Phi_{p'} \left(\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1} \Phi_{q+1}(u(s))ds \right).$$

Considere

$$\widetilde{G}(h,t) = \widetilde{\chi}(hu(t) + (1-h)v(t)).$$

Então $\widetilde{\chi}(u(t))-\widetilde{\chi}(v(t)) = \widetilde{G}(1,t)-\widetilde{G}(0,t)$. Pelo teorema do valor médio, $\widetilde{G}(1,t)-\widetilde{G}(0,t) = \dfrac{\partial \widetilde{G}}{\partial h}(h,t)$, para algum $0 < h < 1$.

Temos que

$$\widetilde{G}(h,t) = \Phi_{p'}\left(\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}\left(hu(s)+(1-h)v(s)\right)ds\right).$$

Como

$$\frac{d}{dz}\Phi_{p'}(z) = \frac{d}{dz}\left(|z|^{p'-2}z\right) = (p'-1)|z|^{p'-2} = \frac{1}{p-1}|z|^{\frac{2-p}{p-1}},\ \text{para } z \neq 0\ ,$$

e

$$\frac{d}{dz}\Phi_{q+1}(z) = \frac{d}{dz}\left(|z|^{q-1}z\right) = q|z|^{q-1},\ \text{para } z \neq 0\ ,$$

obtemos, usando a regra de Leibniz, que

$$\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial h}(h,t) = \frac{q}{p-1}\left|\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu+(1-h)v)ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}\left|hu+(1-h)v\right|^{q-1}[u-v]ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial h}(h,t)\right| &= \left|\frac{q}{p-1}\left|\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}\left|hu+(1-h)v\right|^{q-1}[u-v]ds\right| \\
&= \frac{q}{p-1}\left|\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\left|\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}\left|hu+(1-h)v\right|^{q-1}[u-v]ds\right| \\
&\leq \frac{q}{p-1}\left|\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}|hu+(1-h)v|^q ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\int_{\epsilon_0}^{t} s^{N-1}\left|hu+(1-h)v\right|^{q-1}\left\|u-v\right\|ds.
\end{aligned}$$

De (2.15), temos que

$$\frac{|d_0|}{2} \leq |hu+(1-h)v| \leq 2\,|d_0|\,.$$

Agora, consideraremos os seguintes casos:

Caso 1.1: $1 < q+1 < p \leq 2$

Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial h}(h,t)\right| &\leq \frac{q}{p-1}\left[(2\left|d_0\right|)^q \frac{1}{N}\left(t^N-\epsilon_0^N\right)\right]^{\frac{2-p}{p-1}}\left(\frac{|d_0|}{2}\right)^{q-1}\frac{1}{N}\left(t^N-\epsilon_0^N\right)\|u-v\| \\ &= \widetilde{C}_1\left(d_0,p,q,N\right)\|u-v\|\left(t^N-\epsilon_0^N\right)^{\frac{1}{p-1}}, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}_1\left(d_0,p,q,N\right)$ é uma constante positiva.

Caso 1.2: $1<q+1<2<p<N$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial h}(h,t)\right| &\leq \frac{q}{p-1}\left[\left(\frac{|d_0|}{2}\right)^q \frac{1}{N}\left(t^N-\epsilon_0^N\right)\right]^{\frac{2-p}{p-1}}\left(\frac{|d_0|}{2}\right)^{q-1}\frac{1}{N}\left(t^N-\epsilon_0^N\right)\|u-v\| \\ &= \widetilde{C}_2\left(d_0,p,q,N\right)\|u-v\|\left(t^N-\epsilon_0^N\right)^{\frac{1}{p-1}}, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}_2\left(d_0,p,q,N\right)$ é uma constante positiva.

Caso 1.3: $2\leq q+1<p<N$

Aqui, obtemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial h}(h,t)\right| &\leq \frac{q}{p-1}\left[\left(\frac{|d_0|}{2}\right)^q \frac{1}{N}\left(t^N-\epsilon_0^N\right)\right]^{\frac{2-p}{p-1}}(2\left|d_0\right|)^{q-1}\frac{1}{N}\left(t^N-\epsilon_0^N\right)\|u-v\| \\ &= \widetilde{C}_3\left(d_0,p,q,N\right)\|u-v\|\left(t^N-\epsilon_0^N\right)^{\frac{1}{p-1}}, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}_3\left(d_0,p,q,N\right)$ é uma constante positiva.

Da análise dos 3 casos acima, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{T}(v(r))-\widetilde{T}(u(r))\right| &\leq \widetilde{C}\left(d_0,p,q,N\right)\|u-v\|\int_{\epsilon_0}^{r}\frac{\left(t^N-\epsilon_0^N\right)^{\frac{1}{p-1}}}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}dt \qquad (2.16) \\ &\leq \widetilde{C}\left(d_0,p,q,N\right)\|u-v\|\frac{1}{\epsilon_0^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\left(\epsilon_0+\epsilon\right)^N-\epsilon_0^N\right]^{\frac{1}{p-1}}\left(r-\epsilon_0\right) \\ &\leq \widetilde{C}\left(d_0,p,q,N\right)\|u-v\|\frac{1}{\epsilon_0^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\left(\epsilon_0+\epsilon\right)^N-\epsilon_0^N\right]^{\frac{1}{p-1}}\epsilon,\ \forall\ \epsilon_0\leq r\leq\epsilon_0+\epsilon, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}\,(d_0, p, q, N)$ é uma constante que depende somente de p, q, d_0 e N.

Então, de (2.16), temos que

$$\left\|\widetilde{T}(v) - \widetilde{T}(u)\right\| \leq \widetilde{\beta}\,\|u - v\|\,,$$

onde $\widetilde{\beta} < 1$ se escolhemos ϵ suficientemente pequeno. Logo, $\widetilde{T}$ é uma contração em $\widetilde{B}^{\epsilon}_R(d_0)$ e, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach, $\widetilde{T}$ possui um único ponto fixo, $u \in \widetilde{B}^{\epsilon}_R(d_0)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então, $[\epsilon_0, \epsilon_0 + \epsilon] \subset Q(d)$, o que é um absurdo, pois $\epsilon_0 = \sup Q(d)$. Portanto, nesse caso, $S_d = +\infty$.

Caso 2: $u'(\epsilon_0) \neq 0$

Nesse caso, temos que $u'(r) \neq 0$, $\forall\, r \in (\epsilon_0 - \epsilon, \epsilon_0]$, pois $u \in C^1([0, \epsilon_0])$. Por (2.9), em $(\epsilon_0 - \epsilon, \epsilon_0]$, $(P)_{r,d}$ é equivalente à equação

$$u''(r) = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{N-1}{r}u'(r) + |u'(r)|^{2-p}\,|u(r)|^{q-1}\,u(r)\right) = Z(r, u(r), u'(r)),$$

onde

$$Z(r, x(r), y(r)) = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{N-1}{r}y(r) + |y(r)|^{2-p}\,|x(r)|^{q-1}\,x(r)\right).$$

Temos que

$$\begin{cases} u''(r) &= & Z(r, u(r), u'(r)), \quad \epsilon_0 - \epsilon < r < \epsilon_0 \\ u(\epsilon_0) &= & d_0 \\ u'(\epsilon_0) &= & d_0' \neq 0. \end{cases}$$

Seja $\epsilon > 0$ e considere o problema

$$\begin{cases} x''(r) &= & Z(r, x(r), x'(r)), \quad \epsilon_0 < r < \epsilon_0 + \epsilon \\ x(\epsilon_0) &= & d_0 \\ x'(\epsilon_0) &= & d_0' \neq 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Fazendo $x'(r) = y(r)$ temos que (2.17) é equivalente ao seguinte problema

$$\begin{cases} x'(r) &=& y(r), \ \epsilon_0 < r < \epsilon_0 + \epsilon \\ y'(r) &=& Z(r, x(r), y(r)), \ \epsilon_0 < r < \epsilon_0 + \epsilon \\ x(\epsilon_0) &=& d_0 \\ y(\epsilon_0) &=& d_0' \neq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

O problema (2.18) é equivalente a

$$\begin{cases} (x'(r), y'(r)) &=& (y(r), Z(r, x(r), y(r))), \ \epsilon_0 < r < \epsilon_0 + \epsilon \\ (x(\epsilon_0), y(\epsilon_0)) &=& (d_0, d_0'). \end{cases} \tag{2.19}$$

Considerando $X(r) = (x(r), y(r))$, (2.19) torna-se

$$\begin{cases} \dot{X}(r) &=& (y(r), Z(r, x(r), y(r))), \ \epsilon_0 < r < \epsilon_0 + \epsilon \\ X(\epsilon_0) &=& (d_0, d_0'). \end{cases} \tag{2.20}$$

Seja $g(r, X(r)) := (y(r), Z(r, x(r), y(r)))$, então (2.20) fica da forma

$$\begin{cases} \dot{X}(r) &=& g(r, X(r)), \ \epsilon_0 < r < \epsilon_0 + \epsilon \\ X(\epsilon_0) &=& (d_0, d_0'). \end{cases}$$

Assim, temos que $\dot{X}(s) = g(s, X(s)), \ \epsilon_0 < s < \epsilon_0 + \epsilon$. Integrando essa equação em (ϵ_0, r), obtemos que

$$X(r) = X(\epsilon_0) + \int_{\epsilon_0}^{r} g(s, X(s))ds, \tag{2.21}$$

onde $g(s, X) = g(s, x, y) = (y, Z(s, x, y))$.

Afirmação 2.6. Existe $\delta > 0$ tal que $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é contínua em $[\epsilon_0 - \delta, \epsilon_0 + \delta] \times B_\delta(X(\epsilon_0))$.

De fato, como $g(s, X) = g(s, x, y) = \left(y, -\dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{N-1}{s}y + |y|^{2-p}|x|^{q-1}x\right)\right)$, tomando $\delta = \min\left\{\dfrac{|d_0'|}{2}, \dfrac{\epsilon_0}{2}\right\}$, concluímos que g é contínua em $[\epsilon_0 - \delta, \epsilon_0 + \delta] \times B_\delta(X(\epsilon_0))$.

Então, pelo teorema de Peano, existe uma função diferenciável $\psi : [\epsilon_0 - \delta_1, \epsilon_0 + \delta_1] \to \mathbb{R}^2$, com $0 < \delta_1 \leq \delta$, que satisfaz (2.21), isto é,

$$\psi(r) = \psi(\epsilon_0) + \int_{\epsilon_0}^{r} g(s, \psi(s))ds, \tag{2.22}$$

onde $\psi(r) = (x(r), y(r))$ e $\psi(\epsilon_0) = (d_0, d_0')$.

Assim, (2.22) pode ser escrita da seguinte forma

$$(x(r), y(r)) = (d_0, d_0') + \int_{\epsilon_0}^{r} g(s, x(s), y(s))ds.$$

Logo,

$$x(r) = d_0 + \int_{\epsilon_0}^{r} y(s)ds$$

e

$$y(r) = d_0' - \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{1}{p-1}\left(\frac{N-1}{s}y(s) + |y(s)|^{2-p}|x(s)|^{q-1}x(s)\right)ds.$$

Como $x \in C^1$, $x' = y$ e $y \in C^1$, segue-se que $x \in C^2$ e

$$x''(r) = y'(r) = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{N-1}{r}y(r) + |y(r)|^{2-p}|x(r)|^{q-1}x(r)\right).$$

Tomando $\epsilon = \delta_1$, temos que $x(t)$ é solução de $(P)_{r,d}$ em $(\epsilon_0, \epsilon_0 + \epsilon)$.

Agora, provaremos a unicidade. Sejam u_1 e u_2 duas soluções de $(P)_{r,d}$ em $(\epsilon_0, \epsilon_0 + \epsilon)$.

Temos que u_1'' e u_2'' são contínuas próximo de ϵ_0, pois $u \in C^2$. Como u_1, u_2 satisfazem

$$\left(\frac{p-1}{p}|u_i'(r)|^p + \frac{1}{q+1}|u_i(r)|^{q+1}\right)' = -\frac{N-1}{r}|u_i'(r)|^p, \; i = 1, 2,$$

integrando em (ϵ_0, r), obtemos que

$$\frac{p-1}{p}|u_i'(r)|^p + \frac{1}{q+1}|u_i(r)|^{q+1} + \int_{\epsilon_0}^{r} \frac{N-1}{s}|u_i'(s)|^p ds = \frac{p-1}{p}|u_i'(\epsilon_0)|^p + \frac{1}{q+1}|u_i(\epsilon_0)|^{q+1},$$

onde $i = 1, 2$.

Observe que $u_1(\epsilon_0) = u_2(\epsilon_0)$ e $u_1'(\epsilon_0) = u_2'(\epsilon_0) \neq 0$, pois $\epsilon_0 \in Q(d)$. Como $u_1'(\epsilon_0) =$

$u_2'(\epsilon_0)$, usando a equação acima, temos que

$$\begin{aligned}\frac{p-1}{p}\left[|u_1'(r)|^p-|u_2'(r)|^p\right] &+ \int_{\epsilon_0}^{r}\frac{N-1}{s}\left[|u_1'(s)|^p-|u_2'(s)|^p\right]ds+\\ &+ \frac{1}{q+1}\left[|u_1(r)|^{q+1}-|u_2(r)|^{q+1}\right]=0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Defina agora

$$A(r)=\begin{cases}\dfrac{|u_1'(r)|^p-|u_2'(r)|^p}{u_1'(r)-u_2'(r)}, & u_1'(r)\neq u_2'(r)\\ p\,|u_1'(r)|^{p-2}\,u_1'(r), & u_1'(r)=u_2'(r)\end{cases}$$

e

$$B(r)=\begin{cases}\dfrac{|u_1(r)|^{q+1}-|u_2(r)|^{q+1}}{u_1(r)-u_2(r)}, & u_1(r)\neq u_2(r)\\ (q+1)\,|u_1(r)|^{q-1}\,u_1(r), & u_1(r)=u_2(r).\end{cases}$$

Note que A e B são contínuas numa vizinhança de ϵ_0, (cf. Apêndice B). Seja $v(r)=u_1(r)-u_2(r)$. Então, substituindo os valores das funções A e B e utilizando a equação (2.23), vemos que v satisfaz

$$\frac{p-1}{p}A(r)v'(r)+\int_{\epsilon_0}^{r}\frac{N-1}{s}A(s)v'(s)ds+\frac{1}{q+1}B(r)v(r)=0 \tag{2.24}$$

$$v(\epsilon_0)=0, v'(\epsilon_0)=0.$$

Como u_1'' e u_2'' são contínuas próximo de ϵ_0, A é diferenciável próximo de ϵ_0, (cf. Apêndice B). Também $A(\epsilon_0)=p\,|u_1'(\epsilon_0)|^{p-2}\,u_1'(\epsilon_0)\neq 0$ e assim $1/A$ é limitada e contínua próximo de ϵ_0. Então, aplicando integração por partes no termo da integral em (2.24), obtemos que

$$\frac{p-1}{p}A(r)v'(r)+(N-1)\left(\frac{A(s)}{s}v(s)\bigg|_{\epsilon_0}^{r}-\int_{\epsilon_0}^{r}v(s)\left(\frac{A(s)}{s}\right)'ds\right)+\frac{1}{q+1}B(r)v(r)=0.$$

Daí,

$$v'(r)+\frac{p(N-1)}{p-1}\frac{1}{A(r)}\left(\frac{A(r)}{r}v(r)-\int_{\epsilon_0}^{r}v(s)\left(\frac{A(s)}{s}\right)'ds\right)+\frac{p}{p-1}\frac{1}{A(r)}\frac{1}{q+1}B(r)v(r)=0.$$

Então,

$$v'(r) + \frac{p}{p-1}\left[\frac{N-1}{r} + \frac{1}{q+1}\frac{B(r)}{A(r)}\right]v(r) = \frac{p(N-1)}{p-1}\frac{1}{A(r)}\int_{\epsilon_0}^{r}\left(\frac{A(s)}{s}\right)' v(s)ds,$$

ou seja,

$$v'(r) = C(r)v(r) + D(r)\int_{\epsilon_0}^{r} P(s)v(s)ds, \tag{2.25}$$

onde $C(r)$, $D(r)$ e $P(r)$ são funções contínuas próximo de ϵ_0. Logo, tais funções são limitadas próximo de ϵ_0, isto é, $|C(r)| \leq C_1$, $|D(r)| \leq C_2$ e $|P(r)| \leq C_3$, para todo r próximo de ϵ_0.

Integrando (2.25) em (ϵ_0, r) e observando que $v(\epsilon_0) = 0$, obtemos que

$$v(r) = \int_{\epsilon_0}^{r} C(s)v(s)ds + \int_{\epsilon_0}^{r}\left(D(t)\int_{\epsilon_0}^{t} P(s)v(s)ds\right)dt.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
|v(r)| &\leq \left|\int_{\epsilon_0}^{r} C(s)v(s)ds\right| + \left|\int_{\epsilon_0}^{r}\left(D(t)\int_{\epsilon_0}^{t} P(s)v(s)ds\right)dt\right| \\
&\leq \int_{\epsilon_0}^{r} |C(s)|\,|v(s)|\,ds + \int_{\epsilon_0}^{r} |D(t)|\left|\int_{\epsilon_0}^{t} P(s)v(s)ds\right|dt \\
&\leq C_1\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,ds + C_2\int_{\epsilon_0}^{r}\int_{\epsilon_0}^{t} |P(s)|\,|v(s)|\,dsdt \\
&\leq C_1\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,ds + C_2C_3\int_{\epsilon_0}^{r}\int_{\epsilon_0}^{t} |v(s)|\,dsdt \\
&\leq C_1\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,ds + C_2C_3\int_{\epsilon_0}^{r}\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,dsdt \\
&= C_1\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,ds + C_2C_3(r-\epsilon_0)\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,ds \\
&= [C_1 + C_2C_3(r-\epsilon_0)]\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,ds \\
&\leq (C_1 + C_2C_3\epsilon)\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,ds \\
&= C_4\int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\,ds,
\end{aligned}$$

onde $C_4 = C_1 + C_2C_3\epsilon$.

Portanto,

$$|v(r)| \leq C_4 \int_{\epsilon_0}^{r} |v(s)|\, ds,$$

para r próximo de ϵ_0. Pela desigualdade de Gronwall, segue-se que $v(r) = 0$. Conseqüentemente, $u_1 = u_2$ numa vizinhança de ϵ_0. Logo, $[\epsilon_0, \epsilon_0 + \epsilon) \subset Q(d)$, o que é um absurdo, pois $\epsilon_0 = \sup Q(d)$. Então, $S_d = +\infty$.

Portanto, concluímos que $(P)_{r,d}$ tem solução única em $[0, \infty)$.

$\square$

2.2 Dependência Contínua dos Dados Iniciais

Também precisamos mostrar que a solução depende continuamente dos dados iniciais. Seja u_0 uma solução do problema de valor inicial abaixo

$$\begin{cases} -r^{N-1} |u'(r)|^{p-2} u'(r) = \displaystyle\int_0^r s^{N-1} |u(s)|^{q-1} u(s) ds, \ r > 0 \\ u(0) = d \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

com valor inicial $d_0 \geq 0$. Além disso, seja (d_k), com soluções correspondentes (u_k), uma seqüência de números reais positivos convergindo para d_0. Provaremos que a seqüência (u_k) converge para u_0 uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$.

Primeiramente, como $d_k \to d_0$, existe uma constante $C > 0$ tal que $|d_k| \leq C$. Além disso, de (2.12), temos que

$$\frac{p-1}{p} |u_k'(r)|^p + \frac{1}{q+1} |u_k(r)|^{q+1} \leq \frac{|d_k|^{q+1}}{q+1} \leq C'.$$

Assim, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|u_k(r)| \leq c_1 \text{ e } |u_k'(r)| \leq c_2, \forall\, r \in [0, \infty), \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Isto é, (u_k) é uniformemente limitada e eqüicontínua em $[0, \infty)$. Portanto, pelo teorema de Ascoli, existe uma subseqüência $\left(u_{k_j}\right)$ de (u_k), tal que $u_{k_j} \to u$ uniformemente em subconjuntos compactos de $[0,\infty)$. Mostraremos agora que $u \equiv u_0$. Note que u_{k_j} satisfaz

$$-u'_{k_j}(r) = \frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u_{k_j}(s))ds\right).$$

Como $u_{k_j} \to u$ uniformemente, o lado direito da equação acima converge para

$$\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right).$$

Assim, vemos que a subseqüência u'_{k_j} converge pontualmente para a função

$$v(r) = -\frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right).$$

Por outro lado,

$$u_{k_j}(r) - d_{k_j} = \int_0^r u'_{k_j}(s)ds. \tag{2.26}$$

O lado esquerdo de (2.26) converge para $u(r) - d_0$ e, pelo teorema da convergência dominada, o lado direito converge para $\int_0^r v(s)ds$. Assim, fazendo $j \to \infty$ em (2.26) encontramos

$$u(r) - d_0 = \int_0^r v(s)ds.$$

Derivando, obtemos que

$$u'(r) = v(r).$$

Logo, temos que

$$\begin{cases} -u'(r) = \frac{1}{r^{\frac{N-1}{p-1}}}\Phi_{p'}\left(\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))ds\right) \\ u(0) = d_0 \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Pela unicidade de soluções estabelecida anteriormente, segue-se que

$$u(r) \equiv u_0(r).$$

Assim, mostramos que $u_{k_j} \to u_0$ uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$. Para completar a prova, precisamos mostrar que isso é verdadeiro para a seqüência (u_k). Suponha, por absurdo, que o resultado não é verdadeiro. Logo, deve existir um conjunto compacto $K \subset [0, M]$, uma seqüência $(r_j) \in K \subset [0, M]$ e alguma subseqüência $\left(u_{l_j}\right)$ tal que

$$\left|u_{l_j}(r_j) - u_0(r_j)\right| \geq \epsilon > 0, \tag{2.27}$$

$\forall\ j \geq 1$ e para algum $\epsilon > 0$. Mas como acima, poderíamos encontrar uma subseqüência de $\left(u_{l_j}\right)$ que converge uniformemente para u_0 em $[0, M]$ e portanto violar (2.27). Então, a seqüência (u_k) converge uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$ para u_0. Isso mostra que as soluções de $(P)_{r,d}$ dependem continuamente dos dados iniciais.

Portanto, o Teorema A está demonstrado.

Capítulo 3

Existência de Múltiplas Soluções para $(P)_{u,r}$

Inicialmente, enunciaremos e demonstraremos alguns lemas básicos que serão utilizados na demonstração do Teorema B.

3.1 Resultados Auxiliares

Lema 3.1. *Para cada $d > 0$, a solução $u(r,d)$ de $(P)_{r,d}$ possui uma quantidade infinita de zeros.*

Demonstração: Suponha que temos uma solução de $(P)_{r,d}$, a qual denotaremos por $u(r,d)$. Como $u(0) = d > 0$ e $u \in C^1$, segue-se que para $r > 0$ suficientemente pequeno tem-se $u(r,d) > 0$. Assim, considere $u(r,d) > 0$ em $(0, r_0)$. De (2.2), com $r < r_0$, obtemos que

$$|u'(r)|^{p-2}\, u'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1}\,(u(s))^q\, ds. \tag{3.1}$$

Como $u > 0$ em $(0, r_0)$, temos que o lado direito de (3.1) é negativo. Assim, $u' < 0$ em $(0, r_0)$, isto é, u é decrescente em $(0, r_0)$. Conseqüentemente, podemos estimar o termo integral e obter

$$(-u'(r))^{p-1} = \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1}\,(u(s))^q\, ds \geq \frac{(u(r))^q}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} ds = \frac{(u(r))^q}{r^{N-1}} \frac{r^N}{N} = \frac{(u(r))^q\, r}{N},$$

em $(0, r_0)$.

Logo,

$$(-u'(r))^{p-1}(u(r))^{-q} \geq \frac{r}{N} \text{ em } (0, r_0),$$

ou seja,

$$-u'(r)(u(r))^{-\frac{q}{p-1}} \geq \frac{r^{\frac{1}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}} \text{ em } (0, r_0).$$

Integrando em $(0, r)$, segue-se que

$$-\frac{p-1}{p-(1+q)}(u(s))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}}\bigg|_0^r \geq \frac{p-1}{pN^{\frac{1}{p-1}}} r^{\frac{p}{p-1}}.$$

Como $p > q+1$, então

$$(u(r))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \leq d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - \frac{p-(1+q)}{pN^{\frac{1}{p-1}}} r^{\frac{p}{p-1}}. \tag{3.2}$$

Assim, não podemos ter $u(r, d) > 0$, para todo r, pois o lado direito torna-se negativo quando $r \to \infty$. Logo, existe um número $z_1(d) > 0$ tal que $u(z_1(d), d) = 0$ e $u(r, d) > 0$ em $(0, z_1(d))$.

Integrando (2.1) em $(0, z_1)$, obtemos que

$$|u'(z_1)|^{p-2} u'(z_1) = -\frac{1}{z_1^{N-1}} \int_0^{z_1} r^{N-1}(u(r))^q \, dr < 0.$$

Logo,

$$u'(z_1) < 0. \tag{3.3}$$

Portanto, z_1 não é um extremo local.

Mostraremos agora que existe $m_1 > z_1$ tal que $u'(m_1) = 0$.

Temos $u > 0$ em $(0, z_1)$. Suponha, por contradição, que não exista $m_1 > z_1$ tal que $u'(m_1) = 0$, ou seja, suponha que $u'(r) < 0$ para todo $r > z_1$, isto é, u é uma função decrescente. De (2.12), temos que

$$\frac{|u(r)|^{q+1}}{q+1} \leq E(r) \leq \frac{d^{q+1}}{q+1}, \text{ para } r \geq 0,$$

ou seja, $|u(r)| \leq d$, para $r \geq 0$. Logo, u é limitada inferiormente. Assim, $\lim\limits_{r\to\infty} u(r) = L_1$, para algum número real $-d \leq L_1 < 0$.

Usando (3.1), obtemos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|u'(r)|^{p-2} u'(r)}{r} = -\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^N} \int_0^r s^{N-1} |u(s)|^{q-1} u(s) ds.$$

Temos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|u'(r)|^{p-2} u'(r)}{r} = 0, \tag{3.4}$$

pois, de (2.12), segue-se que $|u'(r)|^{p-2} u'(r)$ é limitada. Por outro lado,

$$\begin{aligned} -\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^N} \int_0^r s^{N-1} |u(s)|^{q-1} u(s) ds &\overset{\text{L' Hôpital}}{=} -\lim_{r\to\infty} \frac{r^{N-1} |u(r)|^{q-1} u(r)}{N r^{N-1}} \\ &= -\frac{1}{N} \lim_{r\to\infty} |u(r)|^{q-1} u(r) \\ &= -\frac{1}{N} |L_1|^{q-1} L_1 \\ &= \frac{|L_1|^q}{N} > 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

Logo, de (3.4) e (3.5), obtemos um absurdo.

Portanto, existe um $m_1 > z_1$ com $u'(m_1) = 0$.

Agora, provaremos que existe um $z_2(d) > m_1(d)$ tal que $z_2(d)$ é um zero de $u(r, d)$.

Suponha, por contradição, que não exista $z_2(d)$ tal que $u(z_2(d), d) = 0$. Assim, $u(r) < 0$ para todo $r > m_1$. Integrando (2.1) em (m_1, r), obtemos que

$$|u'(r)|^{p-2} u'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_{m_1}^r s^{N-1} |u(s)|^{q-1} u(s) ds, \tag{3.6}$$

pois $u'(m_1) = 0$. Logo, $u'(r) > 0$ para todo $r > m_1$, ou seja, u é crescente em (m_1, r).

Estimando o termo integral de (3.6) e observando que $u < 0$ e $u' > 0$ em (m_1, r), segue-se que

$$\begin{aligned}
(u'(r))^{p-1} &= \frac{1}{r^{N-1}}\int_{m_1}^{r} s^{N-1}(-u(s))^q ds \\
&\geq \frac{1}{r^{N-1}}(-u(r))^q \int_{m_1}^{r} s^{N-1} ds \\
&= \frac{(-u(r))^q}{r^{N-1}N}\left(r^N - m_1^N\right) \text{ em } (m_1, r)\,.
\end{aligned}$$

Então, vemos que

$$(u'(r))^{p-1}\,(-u(r))^{-q} \geq \frac{r^N - m_1^N}{r^{N-1}N} \text{ em } (m_1, r)\,,$$

ou seja,

$$u'(r)(-u(r))^{-\frac{q}{p-1}} \geq \frac{\left(r^N - m_1^N\right)^{\frac{1}{p-1}}}{r^{\frac{N-1}{p-1}} N^{\frac{1}{p-1}}} \text{ em } (m_1, r)\,.$$

Escolhendo r suficientemente grande tal que $r^N - m_1^N \geq \frac{1}{2}r^N$, isto é, $r \geq 2^{\frac{1}{N}} m_1$, temos que

$$u'(r)(-u(r))^{-\frac{q}{p-1}} \geq \frac{r^{\frac{N}{p-1}}}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}\, r^{\frac{N-1}{p-1}}} = \frac{r^{\frac{1}{p-1}}}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}} \text{ para } r \geq 2^{\frac{1}{N}} m_1.$$

Integrando em (r_0, r), onde $r_0 \geq 2^{\frac{1}{N}} m_1$, segue-se que

$$\int_{r_0}^{r} u'(s)(-u(s))^{-\frac{q}{p-1}} ds \geq \frac{1}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}} \int_{r_0}^{r} s^{\frac{1}{p-1}} ds,$$

ou seja,

$$-\frac{p-1}{p-(1+q)}\left(-u(r)\right)^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} + \frac{p-1}{p-(1+q)}\left(-u(r_0)\right)^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \geq \frac{1}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}}\frac{p-1}{p}\left(r^{\frac{p}{p-1}} - r_0^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

Logo,

$$\left(-u(r)\right)^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - \left(-u(r_0)\right)^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \leq -\frac{p-(1+q)}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}\, p}\left(r^{\frac{p}{p-1}} - r_0^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

Assim,

$$(-u(r))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \leq (-u(r_0))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - \frac{p-(1+q)}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}\, p}(r^{\frac{p}{p-1}} - r_0^{\frac{p}{p-1}}). \tag{3.7}$$

Como $u < 0$ para $r > m_1$, então $(-u(r))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} > 0$. Mas, o lado direito de (3.7) tende para $-\infty$ quando $r \to \infty$, o que é um absurdo. Portanto, existe um $z_2 > m_1$ tal que $u(z_2) = 0$.

Para completar a prova do lema, precisamos mostrar que $u(r,d)$ tem um número infinito de zeros. Suponha que $u(r,d)$ possui k zeros, onde $k \geq 1$, demonstraremos que $u(r,d)$ tem $k+1$ zeros. Denote os zeros de $u(r,d)$ por $z_1(d) < z_2(d) < \cdots < z_k(d)$. Temos que $z_1(d) < m_1(d) < z_2(d) < m_2(d) < \cdots < m_{k-1}(d) < z_k(d)$, onde os $m_j(d)$ são os extremos locais de $u(r,d)$.

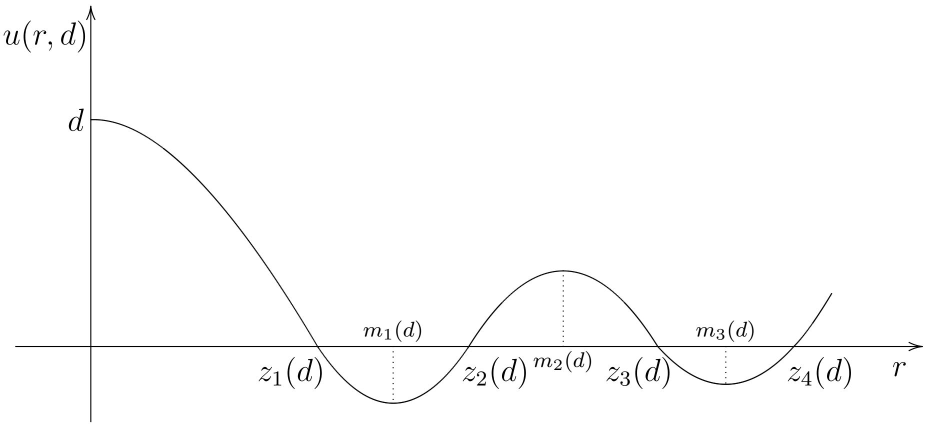

Figura 1

Os $m_{j-1}(d)$ são os únicos extremos locais. De fato, se $u(r) > 0$ em (z_{j-1}, z_j) segue-se de (2.1) que $\left(r^{N-1}\,|u'(r)|^{p-2}\,u'(r)\right)' < 0$ em (z_{j-1}, z_j). Assim, se m_{j-1} é o primeiro máximo local de u nesse intervalo, então integrando a desigualdade acima em (m_{j-1}, r), onde $m_{j-1} < r < z_j$, temos que $u'(r) < 0$ para $m_{j-1} < r < z_j$, isto é, m_{j-1} é o único máximo local de u em (z_{j-1}, z_j). De maneira semelhante, se $u(r) < 0$ em (z_{j-1}, z_j), obtemos que m_{j-1} é o único mínimo local de u em (z_{j-1}, z_j). Além disso, integrando (2.1) em (m_{j-1}, z_j) e usando o fato que $u > 0$ ou $u < 0$ em (m_{j-1}, z_j), obtemos que

$$|u'(z_j)|^{p-2}\,u'(z_j) = -\frac{1}{z_j^{N-1}} \int_{m_{j-1}}^{z_j} s^{N-1}\,|u(s)|^{q-1}\,u(s)ds \not\equiv 0.$$

Assim, $u'(z_j) \neq 0$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $u(r) < 0$ em (z_{k-1}, z_k). Mostraremos, inicialmente, que existe um $m_k > z_k$ no qual u tem um máximo local estrito. Por contradição, suponha que $u'(r) > 0$ para todo $r > z_k$, visto que $u'(z_k) > 0$. Logo, u é uma função crescente em $[z_k, \infty)$. Além disso, u é limitada superiormente, pois temos de (2.12) que

$$\frac{|u(r)|^{q+1}}{q+1} \leq E(r) \leq \frac{d^{q+1}}{q+1}.$$

Assim, obtemos que $\lim\limits_{r\to\infty} u(r) = L$, onde $L > 0$.

De (3.1), temos que

$$0 = \lim_{r\to\infty} \frac{|u'(r)|^{p-2}\, u'(r)}{r} = -\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^N} \int_0^r s^{N-1}\, |u(s)|^{q-1}\, u(s) ds, \tag{3.8}$$

pois $\dfrac{p-1}{p} |u'(r)|^p \leq E(r) \leq E(0) = \dfrac{d^{q+1}}{q+1}$. Por outro lado, aplicando o limite no lado direito, segue-se que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^N} \int_0^r s^{N-1}\, |u(s)|^{q-1}\, u(s) ds = \frac{L^q}{N} > 0,$$

pois $\lim\limits_{r\to\infty} u(r) = L$, o que contradiz (3.8). Portanto, existe um $m_k > z_k$ com $u'(m_k) = 0$.

Sabemos que $u'(r) > 0$ para $z_k < r < m_k$. De (2.1), temos que

$$-(r^{N-1}\, |u'(r)|^{p-2}\, u'(r))' = r^{N-1}\, |u(r)|^{q-1}\, u(r).$$

Integrando em (m_k, r), obtemos que

$$-r^{N-1}\, |u'(r)|^{p-2}\, u'(r) = \int_{m_k}^r s^{N-1}\, |u(s)|^{q-1}\, u(s) ds > 0.$$

Assim, $u'(r) < 0$ para $r > m_k$. Logo, m_k é um máximo local estrito.

Agora, procuraremos um $(k+1)$-ésimo zero, z_{k+1} de u com $z_{k+1} > m_k$. Suponha que u não possua um $(k+1)$-ésimo zero. Assumimos, sem perda de generalidade, que $u > 0$

para $r > m_k$. Integrando (2.1) em (m_k, r), temos que

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_{m_k}^{r} s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds.$$

Isso implica que $u' < 0$ em (m_k, r), isto é, u é decrescente em (m_k, r). Estimando a integral acima como no início da prova desse lema, segue-se que

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) \geq |u(r)|^{q-1}u(r)\frac{(r^N - m_k^N)}{N}.$$

Escolhendo r grande de modo que $r^N - m_k^N \geq \frac{1}{2}r^N$, isto é, $r \geq 2^{\frac{1}{N}}m_k$ temos que

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) \geq \frac{r^N|u(r)|^{q-1}u(r)}{2N}.$$

Visto que $u' < 0$ e $u > 0$ em (m_k, r), obtemos que

$$-u'(r)\,(u(r))^{\frac{-q}{p-1}} \geq \frac{r^{\frac{1}{p-1}}}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}} \text{ para } r \geq 2^{\frac{1}{N}}m_k.$$

Integrando em (r_0, r), onde $r_0 \geq 2^{\frac{1}{N}}m_k$, segue-se que

$$(u(r))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \leq (u(r_0))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - \frac{p-(1+q)}{p\,(2N)^{\frac{1}{p-1}}}(r^{\frac{p}{p-1}} - r_0^{\frac{p}{p-1}}),$$

o que é um absurdo, pois o lado esquerdo é positivo e o lado direito tende para $-\infty$ quando $r \to \infty$. Assim, existe um $z_{k+1} > m_k$ tal que $u(z_{k+1}) = 0$.

Isso completa a prova do Lema 3.1.

□

Lema 3.2. *Se $d > 0$ é escolhido suficientemente grande, então a solução $u(r, d)$ não tem zeros em $[0, 1]$.*

Demonstração: Fixe k, onde $0 < k < 1$, e sejam k e $r_k(d)$ tais que

$$u(r_k(d)) = kd \text{ e } u(r) > kd \text{ em } (0, r_k(d)).$$

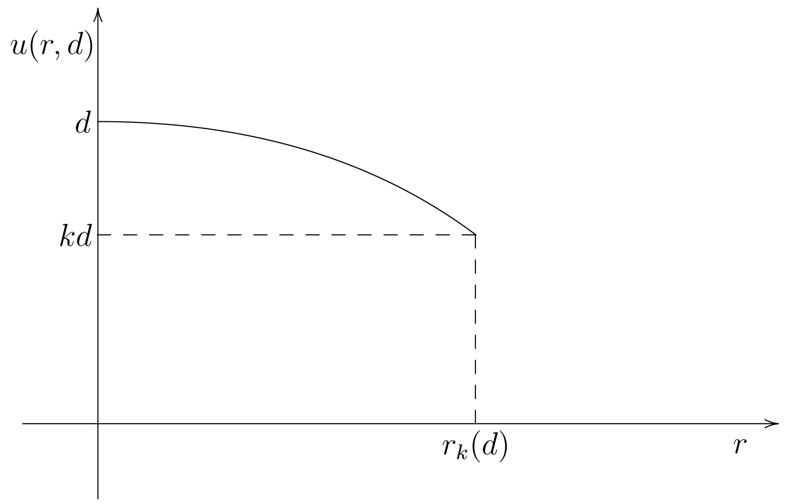

Figura 2

Mostraremos que

$$(1-k)^{1-\frac{1}{p}} d^{1-\frac{q+1}{p}} \leq C(p,N) r_k(d), \tag{3.9}$$

onde $C(p,N)$ é uma constante dependendo somente de p e N.

De (3.1), temos que

$$|u'(r)|^{p-2} u'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} |u(s)|^{q-1} u(s) ds.$$

Em $(0, r_k(d))$ temos que $u' < 0$ e então $0 < kd \leq u(r) \leq d$. Portanto, a igualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$|u'(r)|^{p-1} = \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} (u(s))^q ds.$$

Logo,

$$|u'(r)|^{p-1} \leq \frac{d^q}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} ds = \frac{d^q}{N} r.$$

Assim,

$$-u'(r) \leq \frac{d^{\frac{q}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}} r^{\frac{1}{p-1}}.$$

Então,

$$(1-k)d = -\int_0^{r_k(d)} u'(r)dr \le \frac{d^{\frac{q}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}} \int_0^{r_k(d)} r^{\frac{1}{p-1}} dr = \frac{(p-1)d^{\frac{q}{p-1}}}{pN^{\frac{1}{p-1}}} (r_k(d))^{\frac{p}{p-1}},$$

ou seja,

$$(1-k)d^{\frac{p-1-q}{p-1}} \le \frac{(p-1)}{pN^{\frac{1}{p-1}}} (r_k(d))^{\frac{p}{p-1}},$$

que é equivalente à estimativa (3.9).

Como $q+1 < p$, segue-se de (3.9) que $r_k(d) \to \infty$ quando $d \to \infty$. Assim, para d escolhido suficientemente grande temos que $u(r,d) > 0$ em $[0,1]$.

Portanto, o Lema 3.2 está demonstrado.

□

Lema 3.3. *Suponha que $u(r,d^*)$ satisfaz $(P)_{r,d}$, possui k zeros interiores em $[0,1]$ e $u(1,d^*) = 0$. Então para d ligeiramente menor do que d^*, $u(r,d)$ possui no máximo $k+1$ zeros interiores em $[0,1]$.*

Demonstração: Suponha que $u(r,d)$ possui pelo menos $k+1$ zeros interiores. Precisamos mostrar que $u(r,d)$ não tem um $(k+2)$-ésimo zero interior. Suponha, sem perda de generalidade, que $m_k(d^*)$ é mínimo local. Seja $m_k(d^*) < r < 1 = z_{k+1}(d^*)$, temos que

$$-r^{N-1} |u'(r,d^*)|^{p-2} u'(r,d^*) = \int_{m_k(d^*)}^{r} s^{N-1} |u(s,d^*)|^{q-1} u(s,d^*)ds.$$

Pela continuidade de $(P)_{r,d}$ em relação aos dados iniciais, sabemos que $u(r,d) \to u(r,d^*)$ uniformemente em conjuntos compactos quando $d \to d^*$.

Afirmação 3.4. Quando $d \to d^*$ segue-se que:

(i) $z_k(d) \to z_k(d^*)$, $k = 1, 2, \ldots$,

(ii) $m_k(d) \to m_k(d^*)$, $k = 1, 2, \ldots$,

(iii) $u'(r,d) \to u'(r,d^*)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $(0,1]$.

Observe que

$$|u'(1,d^*)|^{p-2}\, u'(1,d^*) = -\int_{m_k(d^*)}^{1} s^{N-1}\, |u(s,d^*)|^{q-1}\, u(s,d^*) ds = c > 0.$$

Logo, existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$u'(1,d^*) \geq \epsilon > 0.$$

Pela continuidade de $u'(r,d^*)$ em r, para algum $0 < r_0 < 1$, temos que

$$u'(r,d^*) \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para } r_0 \leq r \leq 1.$$

Como $u'(r,d) \to u'(r,d^*)$ uniformemente no conjunto $[r_0, 1]$, segue-se que

$$u'(r,d) \geq \frac{\epsilon}{4},$$

para $r_0 \leq r \leq 1$ e d suficientemente próximo de d^*. Também, temos que $r_0 < z_{k+1}(d)$ para d próximo de d^*, pois $z_{k+1}(d) \to 1$ quando $d \to d^*$. Assim, para d suficientemente próximo de d^*, temos que $u'(r,d) > 0$ em $[z_{k+1}(d), 1]$. Logo, $u(r,d)$ é crescente no conjunto $[z_{k+1}(d), 1]$. Então, é impossível $u(r,d)$ possuir outro zero para d suficientemente próximo de d^*. □

Demonstração da Afirmação 3.4:

Demonstração de (i): Usaremos o princípio de indução. Primeiro, mostraremos que $z_1(d) \to z_1(d^*)$ quando $d \to d^*$. Seja $d \to d^*$, então $u(r,d) \to u(r,d^*)$ uniformemente para todo $r \in [0, z_1(d^*) + 1]$. Assim, para $\epsilon > 0$ pequeno, temos que

$$u(z_1(d^*) - \epsilon, d) \to u(z_1(d^*) - \epsilon, d^*) > 0$$

e

$$u(z_1(d^*) + \epsilon, d) \to u(z_1(d^*) + \epsilon, d^*) < 0$$

quando $d \to d^*$. Logo, para algum $i = 1, 2, \ldots$, existe $z_i(d)$ tal que

$$z_1(d^*) - \epsilon < z_i(d) < z_1(d^*) + \epsilon. \tag{3.10}$$

Se $r < z_1(d^*) - \epsilon$ então $u(r,d) \to u(r,d^*) > 0$. Assim, pela continuidade de u, obtemos que $u(r,d) > 0$, $\forall\, r \in (0, z_1(d^*) - \epsilon)$. Daí, $z_i(d) = z_1(d)$. Portanto, de (3.10), $z_1(d) \to z_1(d^*)$.

Agora, suponha que $z_k(d) \to z_k(d^*)$ quando $d \to d^*$, provaremos que $z_{k+1}(d) \to z_{k+1}(d^*)$ quando $d \to d^*$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $u(r,d^*) < 0$ em $(z_k(d^*), z_{k+1}(d^*))$.

Para $\forall\, \epsilon > 0$ pequeno, temos que

$$u(z_{k+1}(d^*) - \epsilon, d) \to u(z_{k+1}(d^*) - \epsilon, d^*) < 0$$

e

$$u(z_{k+1}(d^*) + \epsilon, d) \to u(z_{k+1}(d^*) + \epsilon, d^*) > 0.$$

Então, para algum $i = 1, 2, \ldots$, existe $z_i(d)$ tal que

$$z_{k+1}(d^*) - \epsilon < z_i(d) < z_{k+1}(d^*) + \epsilon. \tag{3.11}$$

Se $r \in (z_k(d^*), z_{k+1}(d^*))$ temos que $u(r,d) \stackrel{d \to d^*}{\longrightarrow} u(r,d^*) < 0$. Assim, pela continuidade de u, $u(r,d) < 0$, $\forall\, r \in (z_k(d^*), z_{k+1}(d^*))$. Como $z_k(d) \to z_k(d^*)$ quando $d \to d^*$, obtemos que $z_i(d) = z_{k+1}(d)$. Daí, de (3.11), $z_{k+1}(d) \to z_{k+1}(d^*)$ quando $d \to d^*$. Portanto, o item (i) está provado.

Demonstração de (ii): Suponha, sem perda de generalidade, que $u(r,d^*) > 0$ em $(z_k(d^*), z_{k+1}(d^*))$. Então, para $\forall\, \epsilon > 0$ pequeno, temos que

$$u(m_k(d^*) - \epsilon, d^*) < u(m_k(d^*), d^*) \tag{3.12}$$

$$u(m_k(d^*) + \epsilon, d^*) < u(m_k(d^*), d^*).$$

Como $u(r,d) \to u(r,d^*)$ uniformemente em conjuntos compactos quando $d \to d^*$, temos que

$$\begin{gathered} u(m_k(d^*) - \epsilon, d) \to u(m_k(d^*) - \epsilon, d^*), \\ u(m_k(d^*), d) \to u(m_k(d^*), d^*), \\ u(m_k(d^*) + \epsilon, d) \to u(m_k(d^*) + \epsilon, d^*). \end{gathered} \tag{3.13}$$

Afirmação 3.5. Existe $\eta > 0$ tal que se $|d - d^*| < \eta$, então

(1) $u(m_k(d^*) - \epsilon, d) < u(m_k(d^*), d)$,

(2) $u(m_k(d^*) + \epsilon, d) < u(m_k(d^*), d)$.

Demonstração de (1): Suponha, por contradição, que existe uma seqüência $d_n \to d^*$ de modo que $u(m_k(d^*) - \epsilon, d_n) \geq u(m_k(d^*), d_n)$, logo $\lim_{n\to\infty} u(m_k(d^*) - \epsilon, d_n) \geq \lim_{n\to\infty} u(m_k(d^*), d_n)$, então, de (3.13), $u(m_k(d^*) - \epsilon, d^*) \geq u(m_k(d^*), d^*)$, o que contradiz (3.12). Portanto, existe $\eta > 0$ tal que $|d - d^*| < \eta \Rightarrow u(m_k(d^*) - \epsilon, d) < u(m_k(d^*), d)$.

Analogamente, demonstra-se o item (2).

Então, pela Afirmação 3.5, para algum $i = 1, 2, \ldots$, existe $m_i(d)$ tal que

$$m_i(d) \in [m_k(d^*) - \epsilon, m_k(d^*) + \epsilon]\,. \tag{3.14}$$

Como $z_k(d) \to z_k(d^*)$, para todo k, quando $d \to d^*$, segue-se que $m_i(d) = m_k(d)$. Assim, de (3.14), obtemos que

$$m_k(d^*) - \epsilon \leq m_k(d) \leq m_k(d^*) + \epsilon.$$

Portanto, $m_k(d) \to m_k(d^*)$ quando $d \to d^*$, o que conclui a demonstração do item (ii).

Demonstração de (iii): De (2.2), temos que

$$-\left|u'(r,d)\right|^{p-2} u'(r,d) = \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} \left|u(s,d)\right|^{q-1} u(s,d)ds.$$

Seja $A\left(u(r,d)\right) := -\left|u'(r,d)\right|^{p-2} u'(r,d)$ e $B\left(u(s,d)\right) := \left|u(s,d)\right|^{q-1} u(s,d)$, logo

$$A\left(u(r,d)\right) - A\left(u(r,d^*)\right) = \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} \left[B\left(u(s,d)\right) - B\left(u(s,d^*)\right)\right] ds.$$

Como $u(r,d) \to u(r,d^*)$ uniformemente em conjuntos compactos quando $d \to d^*$, temos que

$$\begin{aligned} |A(u(r,d)) - A(u(r,d^*))| &\leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} |B(u(s,d)) - B(u(s,d^*))| \, ds \\ &\leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r r^{N-1} |B(u(s,d)) - B(u(s,d^*))| \, ds \\ &= \epsilon r \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Daí, $u'(r,d) \to u'(r,d^*)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $(0,1]$ quando $d \to d^*$. Portanto, o item (iii) está provado.

Lema 3.6. *Seja $z_k(d)$ o k-ésimo zero de $u(r,d)$. Então $z_k(d) \to 0$ quando $d \to 0$.*

Demonstração: Mostramos no Lema 3.1 que a solução de $(P)_{r,d}$ possui um número infinito de zeros $z_1, z_2, \cdots$ em $[0,\infty)$. Também, no intervalo (z_k, z_{k+1}) uma solução possui exatamente um extremo local o qual denotamos por m_k. Assim, temos que

$$0 < z_1 < m_1 < z_2 < m_2 < \cdots .$$

Mostraremos que quando $d \to 0$, $z_k(d) \to 0$ e $m_k(d) \to 0$. Na demonstração do Lema 3.1, obtemos a desigualdade (3.2) em $(0, z_1)$

$$(u(r))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \leq d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - \frac{p-(1+q)}{pN^{\frac{1}{p-1}}} r^{\frac{p}{p-1}}.$$

Aplicando limite quando $r \to z_1^-$, temos que

$$(u(z_1(d)))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \leq d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - \frac{p-(1+q)}{pN^{\frac{1}{p-1}}} (z_1(d))^{\frac{p}{p-1}} .$$

Logo,

$$0 < (z_1(d))^{\frac{p}{p-1}} \leq \frac{pN^{\frac{1}{p-1}}}{p-(1+q)} d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}}.$$

Assim, vemos que $z_1(d) \to 0$ quando $d \to 0$.

Assuma que $z_k(d) \to 0$ quando $d \to 0$, para $k \geq 1$. Primeiramente, mostraremos que $m_k(d) \to 0$ quando $d \to 0$ e então que $z_{k+1}(d) \to 0$ quando $d \to 0$.

Seja

$$y(r) = |u(r)|^{\alpha}, \text{ para } z_k < r < m_k,$$

onde $\alpha = \dfrac{p-(1+q)}{p-1}$. Note que $0 < \alpha < 1$, pois $1 < q+1 < p$. Diferenciando $y(r)$, obtemos que

$$y'(r) = \alpha\, |u(r)|^{\alpha-2}\, u(r)u'(r).$$

Como $0 < \alpha < 1$, segue-se que

$$y''(r) = \alpha\, |u(r)|^{\alpha-2}\, u(r)u''(r) + \alpha(\alpha-1)\, |u(r)|^{\alpha-2}\, (u'(r))^2 \leq \alpha\, |u(r)|^{\alpha-2}\, u(r)u''(r).$$

Reescrevendo (2.1), obtemos que

$$|u'(r)|^{p-2} \left[(p-1)u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r)\right] + |u(r)|^{q-1}\, u(r) = 0.$$

Assim,

$$|u'(r)|^{p-2} \left[(p-1)u(r)u''(r) + \frac{N-1}{r}u(r)u'(r)\right] + |u(r)|^{q+1} = 0.$$

Substituindo y e suas derivadas na equação acima e usando o fato que

$$|u(r)| = (y(r))^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{e} \quad |u'(r)| = \frac{|y'(r)|}{\alpha\, (y(r))^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}},$$

obtemos que

$$|y'(r)|^{p-2} \left[(p-1)y''(r) + \frac{N-1}{r}y'(r)\right] + \alpha^{p-1}\, (y(r))^{\frac{\alpha(p-1)-p+q+1}{\alpha}} \leq 0.$$

Como $\alpha = \dfrac{p-(1+q)}{p-1}$, segue-se que o expoente de y é zero. Portanto,

$$(p-1)\, |y'(r)|^{p-2}\, y''(r) + \frac{N-1}{r}\, |y'(r)|^{p-2}\, y'(r) + \alpha^{p-1} \leq 0. \tag{3.15}$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $u' < 0$ em (z_k, m_k). Então, $u < 0$ em (z_k, z_{k+1}). Portanto, vemos que $y' > 0$ em (z_k, m_k) e assim, $y'(r) = |y'(r)|$.

Considere

$$v(r) = |y'(r)|^{p-1} \text{ em } (z_k, m_k).$$

Então,

$$v'(r) = (p-1)\,|y'(r)|^{p-2}\, y''(r).$$

Assim, a desigualdade (3.15) torna-se

$$v'(r) + \frac{N-1}{r} v(r) + \alpha^{p-1} \leq 0.$$

Logo,

$$v'(r) r^{N-1} + (N-1)\, r^{N-2} v(r) + \alpha^{p-1} r^{N-1} \leq 0,$$

ou seja,

$$\left(r^{N-1} v(r)\right)' + \alpha^{p-1} r^{N-1} \leq 0.$$

Integrando em (r, m_k), onde $z_k < r$, obtemos que

$$-r^{N-1} v(r) + \frac{\alpha^{p-1}}{N}\left(m_k^N - r^N\right) \leq 0,$$

pois $v(m_k) = 0$. Assim,

$$v(r) \geq \frac{\alpha^{p-1}}{N}\left(\frac{m_k^N}{r^{N-1}} - r\right).$$

Então, como $r < m_k$,

$$\frac{\alpha^{p-1}}{N}(m_k - r) \leq \frac{\alpha^{p-1}}{N}\left(\frac{m_k^N}{r^{N-1}} - r\right) \leq v(r) = |y'(r)|^{p-1}.$$

Usando o fato que $|y'| = y'$ em (z_k, m_k), temos que

$$\frac{\alpha}{N^{\frac{1}{p-1}}}(m_k - r)^{\frac{1}{p-1}} \leq y'(r).$$

Integrando em (z_k, m_k), segue-se que

$$0 < \frac{\alpha(p-1)}{N^{\frac{1}{p-1}} p}(m_k - z_k)^{\frac{p}{p-1}} \leq y(m_k) - y(z_k) = y(m_k) \leq d^{\alpha}.$$

Assim,

$$m_k(d) - z_k(d) \to 0 \text{ quando } d \to 0$$

e visto que $z_k(d) \to 0$ quando $d \to 0$, temos que

$$m_k(d) \to 0 \text{ quando } d \to 0.$$

Agora, podemos mostrar, usando um argumento semelhante como no Lema 3.1, que $z_{k+1}(d) \to 0$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $u < 0$ em (z_k, z_{k+1}). Integrando (2.1) em (m_k, r), onde $r < z_{k+1}$, obtemos que

$$-\left|u'(r)\right|^{p-2} u'(r) = \frac{1}{r^{N-1}} \int_{m_k}^{r} s^{N-1} \left|u(s)\right|^{q-1} u(s) ds,$$

pois $u'(m_k) = 0$. Logo, $u' > 0$ em (m_k, r). Assim, u é crescente em (m_k, r). Conseqüentemente,

$$(u'(r))^{p-1} = \frac{1}{r^{N-1}} \int_{m_k}^{r} s^{N-1} (-u(s))^q \, ds \geq \frac{(-u(r))^q}{r^{N-1}} \frac{r^N - m_k^N}{N} = \frac{(-u(r))^q}{N} \left(r - \frac{m_k^N}{r^{N-1}}\right).$$

Logo,

$$(u'(r))^{p-1} (-u(r))^{-q} \geq \frac{1}{N} \left(r - \frac{m_k^N}{r^{N-1}}\right),$$

isto é,

$$u'(r) (-u(r))^{-\frac{q}{p-1}} \geq \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \left(r - \frac{m_k^N}{r^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Integrando em (m_k, r), temos que

$$\int_{m_k}^{r} u'(s) (-u(s))^{-\frac{q}{p-1}} \, ds \geq \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \int_{m_k}^{r} \left(s - \frac{m_k^N}{s^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds.$$

Portanto,

$$-\frac{p-1}{p-(1+q)} (-u(r))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} + \frac{p-1}{p-(1+q)} (-u(m_k))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \geq \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \int_{m_k}^{r} \left(s - \frac{m_k^N}{s^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(-u(r))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} &\leq (-u(m_k))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - \frac{p-(1+q)}{(p-1)N^{\frac{1}{p-1}}}\int_{m_k}^{r}\left(s-\frac{m_k^N}{s^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\ &\leq d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - \frac{p-(1+q)}{(p-1)N^{\frac{1}{p-1}}}\int_{m_k}^{r}\left(s-\frac{m_k^N}{s^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds.\end{aligned}$$

Fazendo $r = z_{k+1}$, obtemos que

$$\int_{m_k}^{z_{k+1}}\left(s-\frac{m_k^N}{s^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds \leq \frac{(p-1)N^{\frac{1}{p-1}}}{p-(1+q)} d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}}.$$

Temos que o lado direito da desigualdade acima tende para zero quando $d \to 0$. Como $m_k \leq r$, segue-se que

$$r - \frac{m_k^N}{r^{N-1}} = \frac{r^N - m_k^N}{r^{N-1}} \geq r - m_k.$$

Assim,

$$\int_{m_k}^{z_{k+1}}\left(r-\frac{m_k^N}{r^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr \geq \int_{m_k}^{z_{k+1}} (r-m_k)^{\frac{1}{p-1}} dr = \frac{p-1}{p}\left(z_{k+1}(d) - m_k(d)\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Observe que o lado esquerdo tende para zero quando $d \to 0$, pois o integrando é não negativo. Como $m_k(d) \to 0$ quando $d \to 0$, concluímos que $z_{k+1}(d) \to 0$ quando $d \to 0$.

□

3.2 Demonstração do Teorema B

Esse resultado segue-se dos Lemas 3.2, 3.3 e 3.6.

Teorema B: *Sejam $N \geq 2$ e $1 < q+1 < p < N$. Então existe uma seqüência decrescente de números positivos $d_0 > d_1 > \cdots > d_{k-1} > d_k > \cdots > 0$ com $u(0) = d_k$ tal que $u(1, d_k) = 0$ e u possui exatamente k zeros interiores em $[0,1]$.*

Demonstração: Para $k \geq 0$, defina

$$A_k = \{d > 0 : u(r,d) \text{ tem exatamente } k \text{ zeros interiores em } [0,1]\}.$$

Pelo Lema 3.2, seja $\bar{d} > 0$ tal que $u(r,\bar{d})$ não tem zeros em $[0,1]$. Logo, $\bar{d} \in A_0$ e, portanto, $A_0 \neq \emptyset$. Seja $d_0 := \inf A_0$. Temos que $d_0 \leq \bar{d}$. Por outro lado, pelo Lema 3.6, $z_1(d) \to 0$ quando $d \to 0$. Assim, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $d < \delta \Rightarrow z_1(d) < 1$. Logo, $d \notin A_0$. Então, $d_0 \geq \delta > 0$. Tome $d^j \in A_0$ tal que $d^j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} d_0$. Então, $z_1(d^j) \geq 1$ e, pela continuidade de $z_k(d)$, temos que $z_1(d_0) \geq 1$.

Afirmação 3.7. $z_1(d_0) = 1$.

De fato, se $z_1(d_0) > 1$, tome $d^j \to d_0$, onde $d^j < d_0$. Logo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_1(d^{j_0}) > 1$. Então, $d^{j_0} \in A_0$. Assim, $d^{j_0} \geq d_0$, o que é um absurdo. Portanto, $z_1(d_0) = 1$.

Considere agora,

$$A_1 = \{d > 0 : u(r,d) \text{ tem exatamente 1 zero interior em } [0,1]\}.$$

Pelo Lema 3.3, se $d < d_0$ e $d \approx d_0$ então $u(r,d)$ tem no máximo um zero interior em $[0,1]$. Se $u(r,d)$ não tivesse zeros interiores em $[0,1]$, assim $d \in A_0$, logo $d \geq d_0$, o que é um absurdo. Assim, $u(r,d)$ tem exatamente um zero interior em $[0,1]$, isto é, $d \in A_1$. Conseqüentemente, $A_1 \neq \emptyset$. Seja $d_1 := \inf A_1$. Temos que $0 < d_1 < d_0$. Tome $d^j \in A_1$ tal que $d^j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} d_1$. Então,

$$z_1(d^j) < 1 \Rightarrow z_1(d_1) \leq 1$$

$$z_2(d^j) \geq 1 \Rightarrow z_2(d_1) \geq 1.$$

Afirmação 3.8. $z_1(d_1) < 1$.

Caso contrário, se $z_1(d_1) = 1$ então pelo Lema 3.3, para todo $d < d_1$ com $d \approx d_1$, $u(r,d)$ teria no máximo um zero interior em $[0,1]$. Logo, $d \in A_0$ ou $d \in A_1$. Assim, $d \geq d_1$, o que é um absurdo. Portanto, $z_1(d_1) < 1$.

Afirmação 3.9. $z_2(d_1) = 1$.

Suponha por contradição, que $z_2(d_1) > 1$. Tome $d^j \to d_1$, onde $d^j < d_1$. Logo, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $z_1(d^{j_1}) < 1$ e $z_2(d^{j_1}) > 1$. Então, $d^{j_1} \in A_1$. Assim, $d^{j_1} \geq d_1$, o que é um absurdo. Portanto, $z_2(d_1) = 1$.

Por indução, suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$0 < d_k < d_{k-1} < \cdots < d_2 < d_1 < d_0 \leq \bar{d}, \text{ com } z_{j+1}(d_j) = 1;\ j = 0, 1, \cdots, k.$$

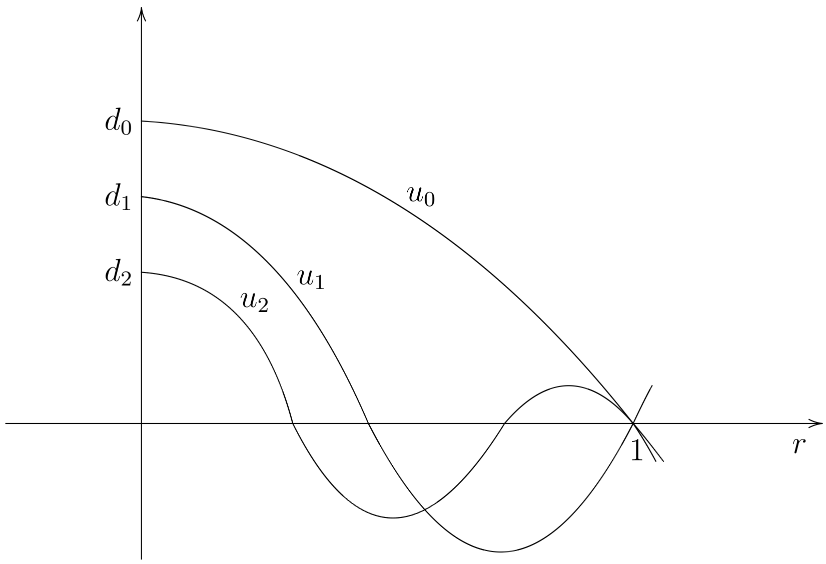

Figura 3

Considere,

$$A_{k+1} = \{d > 0 : u(r,d) \text{ tem exatamente } k+1 \text{ zeros interiores em } [0,1]\}.$$

Como $0 < d_k \leq \bar{d}$ e $z_{k+1}(d_k) = 1$, segue-se que $d_k \in A_k$. Portanto $u(r, d_k)$ possui exatamente k zeros interiores em $[0,1]$ e $u(1, d_k) = 0$. Então, pelo Lema 3.3, para $d < d_k$ com $d \approx d_k$, $u(r,d)$ possui no máximo $k+1$ zeros interiores em $[0,1]$.

Afirmação 3.10. $u(r,d)$ tem exatamente $k+1$ zeros interiores em $[0,1]$.

De fato, se $u(r,d)$ tivesse exatamente i zeros interiores em $[0,1]$, onde $0 \leq i \leq k$, logo $d \in A_i$, então $d \geq d_i \geq d_k$, assim $d \geq d_k$, o que é um absurdo. Conseqüentemente, $d \in A_{k+1}$. Portanto, $A_{k+1} \neq \emptyset$.

Seja $d_{k+1} := \inf A_{k+1}$. Logo,

$$0 < d_{k+1} < d_k < d_{k-1} < \cdots < d_2 < d_1 < d_0 \leq \bar{d}.$$

Considere $d^j \in A_{k+1}$ tal que $d^j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} d_{k+1}$. Então,

$$z_{k+1}(d^j) < 1 \Rightarrow z_{k+1}(d_{k+1}) \leq 1$$

$$z_{k+2}(d^j) \geq 1 \Rightarrow z_{k+2}(d_{k+1}) \geq 1.$$

Afirmação 3.11. $z_{k+1}(d_{k+1}) < 1$.

Suponha, por contradição, que $z_{k+1}(d_{k+1}) = 1$. Então, pelo Lema 3.3, para todo $d < d_{k+1}$ com $d \approx d_{k+1}$, $u(r,d)$ tem no máximo $k+1$ zeros interiores em $[0,1]$. Logo,

$$d \in A_l \text{ para algum } 0 \leq l \leq k+1 \Rightarrow d \geq d_l \geq d_{k+1},$$

o que é um absurdo. Assim, $z_{k+1}(d_{k+1}) < 1$.

Afirmação 3.12. $z_{k+2}(d_{k+1}) = 1$.

Caso contrário, se $z_{k+2}(d_{k+1}) > 1$, tome $d^j \to d_{k+1}$, onde $d^j < d_{k+1}$. Logo, existe $j_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $z_{k+1}(d^{j_{k+1}}) < 1$ e $z_{k+2}(d^{j_{k+1}}) > 1$. Então, $d^{j_{k+1}} \in A_{k+1}$. Assim, $d^{j_{k+1}} \geq d_{k+1}$, o que é um absurdo. Conseqüentemente, $z_{k+2}(d_{k+1}) = 1$.

Portanto, existe uma seqüência

$$d_0 > d_1 > \cdots > d_{k-1} > d_k > \cdots > 0$$

tal que $u(1, d_k) = 0$ e u possui exatamente k zeros interiores em $[0,1]$. Assim, concluímos a demonstração desse teorema.

$\square$

Usando o Teorema B, provaremos o seguinte resultado:

Teorema C: *Sejam $N \geq 2$, $1 < q+1 < p < N$ e $\Omega = B_1(0)$. Então o problema de valor de fronteira $(P)_p$ tem um número infinito de soluções radiais, $v \in C^1(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Como para $d_k \neq d_j$ as respectivas soluções $u(r,d_k)$ e $u(r,d_j)$ são distintas e $u(r,d_k)$ é solução de $(P)_{u,r}$ com $u(0) = d_k$, segue-se que $(P)_{u,r}$ tem infinitas soluções. Observe que u é solução de $(P)_{u,r}$ e portanto $v(x) = u(|x|)$ é solução de $(P)_p$. Conseqüentemente, o Teorema C está demonstrado.

$\square$

Apêndice A

Afirmação 3.13. Seja v uma solução radial de $(P)_p$, ou seja, $v(x) = u(|x|)$, onde $r = |x|$. Então, $(P)_p$ torna-se

$$(P)_{u,r}: \qquad \begin{cases} -(r^{N-1}\,|u'(r)|^{p-2}\,u'(r))' = r^{N-1}\,|u(r)|^{q-1}\,u(r), \ \ 0 < r < 1 \\ \quad u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

De fato, temos que

(i) Como $v(x) = u(|x|)$, onde $r = |x|$, então

$$u(r) = v(r, 0, \ldots, 0) = v(-r, 0, \ldots, 0).$$

Assim,

$$u'(0) = \lim_{r\to 0} \frac{u(r) - u(0)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{v(r, 0, \ldots, 0) - v(0, \ldots, 0)}{r} = \frac{\partial v}{\partial x_1}(0, \ldots, 0).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} u'(0) = \lim_{r\to 0} \frac{u(r) - u(0)}{r} \quad &= \quad \lim_{r\to 0} \frac{v(-r, 0, \ldots, 0) - v(0, \ldots, 0)}{r} \\ &\overset{-r=s}{=} \quad -\lim_{s\to 0} \frac{v(s, 0, \ldots, 0) - v(0, \ldots, 0)}{s} \\ &= \quad -\frac{\partial v}{\partial x_1}(0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(0, \ldots, 0) = -\frac{\partial v}{\partial x_1}(0, \ldots, 0).$$

Daí,

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(0,\ldots,0)=0.$$

Então,

$$u'(0)=0.$$

(ii) Como $\Omega = B_1(0)$ e $v(x)=0$ para $x\in\partial\Omega$, temos que $v(x)=0$ quando $|x|=1$, ou seja, $u(1)=0$.

(iii) Temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_p v &= div\left(|\nabla v(x)|^{p-2}\nabla v(x)\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla v(x)|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{|u'(r)|^{p-2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial r}{\partial x_N}\right)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}u'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\right\}\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{|u'(r)|^{p-2}u'(r)\left[\left(\frac{x_1}{r}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_N}{r}\right)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}\frac{x_i}{r}\right\}\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{x_i}{r}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)'\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{x_i}{r}+|u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)'\frac{{x_i}^2}{r^2}+|u'(r)|^{p-2}u'(r)\left(r-\frac{{x_i}^2}{r}\right)\frac{1}{r^2}\right]\\
&= \frac{\left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)'}{r^2}\sum_{i=1}^{N}{x_i}^2+|u'(r)|^{p-2}u'(r)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{r}-\frac{{x_i}^2}{r^3}\right)\\
&= \left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)'+|u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{N-1}{r}\\
&= \frac{r^{N-1}\left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)'}{r^{N-1}}+\frac{|u'(r)|^{p-2}u'(r)\,(N-1)\,r^{N-2}}{r^{N-1}}\\
&= \frac{1}{r^{N-1}}\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)'.
\end{aligned}$$

Como $v(x)=u(|x|)$, onde $r=|x|$, e

$$-\Delta_p v(x)=|v(x)|^{q-1}v(x),\ \ x\in\Omega,$$

segue-se que

$$-(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = r^{N-1}|u(r)|^{q-1}u(r),\ 0 < r < 1.$$

Portanto, a afirmação está provada.

Agora, provaremos a não existência de soluções não triviais, no caso radial, para o problema $(P)_p$ quando $1 < p < N$ e $q+1 \geq p^*$ (cf. Saxton e Wei [16]). Para isso, precisaremos do seguinte resultado, o qual é uma versão radial da identidade de Pohozaev extendida (cf. Ni e Serrin [11]).

Lema 3.14. *Seja $u(r)$ satisfazendo $(P)_{r,d}$. Então,*

$$\frac{1}{N}r^N E(r) = \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*}\right)\int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q+1}\,ds - \frac{1}{p^*}r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)u(r),$$

onde $r \in [0,1]$.

Demonstração: Temos que

$$E(r) = \frac{p-1}{p}|u'(r)|^p + \frac{1}{q+1}|u(r)|^{q+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(r^N E(r)\right)' &= N r^{N-1}E(r) + r^N E'(r) \\
&= r^{N-1}\left(NE(r) + rE'(r)\right) \\
&\overset{(2.11)}{=} r^{N-1}\left[N\left(\frac{p-1}{p}|u'(r)|^p + \frac{1}{q+1}|u(r)|^{q+1}\right) - (N-1)|u'(r)|^p\right] \\
&= -r^{N-1}\left(\frac{N-p}{p}|u'(r)|^p - \frac{N}{q+1}|u(r)|^{q+1}\right).
\end{aligned}$$

Por (2.1), obtemos que

$$(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))'u(r) = -r^{N-1}|u(r)|^{q+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)u(r))' &= -r^{N-1}|u(r)|^{q+1}+r^{N-1}|u'(r)|^{p}\\ &= r^{N-1}\left(|u'(r)|^{p}-|u(r)|^{q+1}\right).\end{aligned}$$

Então,

$$\left(\frac{1}{N}r^{N}E(r)+\frac{1}{p^{*}}r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)u(r)\right)'=$$

$$=r^{N-1}E(r)-\frac{1}{N}r^{N}\left(\frac{N-1}{r}|u'(r)|^{p}\right)+\frac{1}{p^{*}}r^{N-1}\left(|u'(r)|^{p}-|u(r)|^{q+1}\right)=$$

$$=r^{N-1}\left(\frac{p-1}{p}|u'(r)|^{p}+\frac{|u(r)|^{q+1}}{q+1}\right)+\left(\frac{1}{p^{*}}-\frac{N-1}{N}\right)r^{N-1}|u'(r)|^{p}-\frac{r^{N-1}}{p^{*}}|u(r)|^{q+1}=$$

$$=r^{N-1}|u'(r)|^{p}\left(\frac{p-1}{p}-\frac{N-1}{N}+\frac{1}{p^{*}}\right)+r^{N-1}|u(r)|^{q+1}\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p^{*}}\right).$$

Como $p^{*}=\dfrac{Np}{N-p}$, logo $\dfrac{p-1}{p}-\dfrac{N-1}{N}+\dfrac{1}{p^{*}}=0$. Daí,

$$\left(\frac{1}{N}r^{N}E(r)+\frac{1}{p^{*}}r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)u(r)\right)'=r^{N-1}|u(r)|^{q+1}\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p^{*}}\right). \tag{3.16}$$

Integrando (3.16) em $(0,r)$, implica que

$$\frac{1}{N}r^{N}E(r)+\frac{1}{p^{*}}r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)u(r)=\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p^{*}}\right)\int_{0}^{r}s^{N-1}|u(s)|^{q+1}\,ds.$$

Portanto,

$$\frac{1}{N}r^{N}E(r)=\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p^{*}}\right)\int_{0}^{r}s^{N-1}|u(s)|^{q+1}\,ds-\frac{1}{p^{*}}r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)u(r),$$

que é a igualdade desejada.

□

Suponha, por contradição, que existem soluções radiais não triviais para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v(x) = |v(x)|^{q-1} v(x), \; x \in B_R(0) \\ \quad v(x) = 0, \; x \in \partial B_R(0), \end{cases}$$

onde $1 < p < N$ e $q + 1 \geq p^*$. Logo, existe uma função $u : [0, R] \to \mathbb{R}$ solução de

$$\begin{cases} -(r^{N-1} |u'(r)|^{p-2} u'(r))' = r^{N-1} |u(r)|^{q-1} u(r), \; 0 < r < R \\ \quad u'(0) = u(R) = 0. \end{cases}$$

Fazendo $r = R$ e usando o Lema 3.14, obtemos que

$$\frac{1}{N} R^N E(R) = \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*} \right) \int_0^R r^{N-1} |u(r)|^{q+1} \, dr. \tag{3.17}$$

Assim, se $q + 1 = p^*$ segue-se que $E(R) = 0$ e conseqüentemente $u'(R) = 0$. Mas, por (3.3), temos que $u'(R) \neq 0$, o que é um absurdo. E, se $q + 1 > p^*$ então, por (3.17), $E(R) < 0$ para u não trivial, o que é uma contradição pela positividade de $E(r)$ para soluções não triviais. Logo, $u(r) \equiv 0$.

Apêndice B

Sejam u_1 e u_2 soluções de $(P)_{r,d}$ em $(\epsilon_0, \epsilon_0 + \epsilon)$. Sabemos que $u_1'(\epsilon_0) = u_2'(\epsilon_0) \neq 0$ e $u_1(\epsilon_0) = u_2(\epsilon_0)$. Considere as funções $A(r)$ e $B(r)$ definidas, no capítulo 2, por

$$A(r) = \begin{cases} \dfrac{|u_1'(r)|^p - |u_2'(r)|^p}{u_1'(r) - u_2'(r)}, & u_1'(r) \neq u_2'(r) \\ p\,|u_1'(r)|^{p-2}\,u_1'(r), & u_1'(r) = u_2'(r) \end{cases}$$

e

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{|u_1(r)|^{q+1} - |u_2(r)|^{q+1}}{u_1(r) - u_2(r)}, & u_1(r) \neq u_2(r) \\ (q+1)\,|u_1(r)|^{q-1}\,u_1(r), & u_1(r) = u_2(r). \end{cases}$$

Afirmação 3.15. *A e B são contínuas numa vizinhança de ϵ_0.*

Primeiramente, mostraremos que A é contínua numa vizinhança de ϵ_0.

Considere os seguintes casos:

Caso 1: $r < \epsilon_0$

Pela unicidade de soluções em $[0, \epsilon_0]$ segue-se que $A(r) = p\,|u_1'(r)|^{p-2}\,u_1'(r)$. Logo, A é contínua.

Caso 2: $\epsilon_0 < r < \epsilon_0 + \epsilon$

Temos as seguintes situações:

(i) $u_1'(r) \neq u_2'(r)$.

Temos que existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) \neq u_2'(s)$, $\forall\, s \in (r - \delta_r, r + \delta_r)$. Assim,

$$A(s) = \frac{|u_1'(s)|^p - |u_2'(s)|^p}{u_1'(s) - u_2'(s)}.$$

Logo, A é contínua.

(ii) $u_1'(r) = u_2'(r)$.

Se existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) = u_2'(s)$, $\forall\, s \in (r - \delta_r, r + \delta_r)$, temos que

$$A(s) = p\,|u_1'(s)|^{p-2}\,u_1'(s).$$

Então, A é contínua em r.

Se existe $r_n \to r$ tal que $u_1'(r_n) \neq u_2'(r_n)$, usando o teorema do valor médio, obtemos que

$$A(r_n) = \frac{|u_1'(r_n)|^p - |u_2'(r_n)|^p}{u_1'(r_n) - u_2'(r_n)} = p\,|\theta(r_n)|^{p-2}\,\theta(r_n),$$

onde

$$\min\{u_1'(r_n), u_2'(r_n)\} < \theta(r_n) < \max\{u_1'(r_n), u_2'(r_n)\}.$$

Fazendo $n \to \infty$, segue-se que $\theta(r_n) \to u_1'(r)$. Logo,

$$A(r_n) \to p\,|u_1'(r)|^{p-2}\,u_1'(r) = A(r),$$

ou seja, A é contínua em r.

Note que $\theta(r) \to u_1'(\epsilon_0)$ quando $r \to \epsilon_0$. Assim, $A(r) \to A(\epsilon_0)$. Logo, $A \in C([0, \epsilon_0 + \delta))$ para algum $\delta > 0$. Portanto, A é contínua numa vizinhança de ϵ_0. De forma análoga, mostra-se que B é contínua numa vizinhança de ϵ_0.

Afirmação 3.16. A é diferenciável numa vizinhança de ϵ_0.

Para demonstrarmos essa afirmação precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.17. *Sejam $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, f e g funções de classe C^1 em (b, c) com $f(a) = g(a) \neq 0$ e $f(x) \neq g(x)$, $\forall\, x \in (b, c) \setminus \{a\}$, para algum $a \in (b, c)$. Então a função $h : (b, c) \to \mathbb{R}$, dada por*

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|^p - |g(x)|^p}{f(x) - g(x)}, & x \neq a \\ p\,|f(a)|^{p-2}\, f(a), & x = a \end{cases}$$

é de classe C^1 em (b, c) com

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\left[(p-1)\,|f(x)|^p + |g(x)|^p - p\,|f(x)|^{p-2}\, f(x)g(x)\right]}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} f'(x) + \\ &+ \frac{\left[(p-1)\,|g(x)|^p + |f(x)|^p - p\,|g(x)|^{p-2}\, g(x)f(x)\right]}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} g'(x), \ \textit{se } x \neq a \end{aligned}$$

e

$$h'(a) = \frac{(p-1)p}{2}\,|f(a)|^{p-2}\left(f'(a) + g'(a)\right).$$

Demonstração: Seja $x \neq a$, calcularemos $h'(x)$. Temos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\left(p\,|f(x)|^{p-2}\, f(x)f'(x) - p\,|g(x)|^{p-2}\, g(x)g'(x)\right)\left(f(x) - g(x)\right)}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} - \\ &- \frac{\left(|f(x)|^p - |g(x)|^p\right)\left(f'(x) - g'(x)\right)}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} \\ &= \frac{\left[p\,|f(x)|^{p-2}\, f(x)\left(f(x) - g(x)\right) - \left(|f(x)|^p - |g(x)|^p\right)\right]}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} f'(x) + \\ &+ \frac{\left[-p\,|g(x)|^{p-2}\, g(x)\left(f(x) - g(x)\right) + \left(|f(x)|^p - |g(x)|^p\right)\right]}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} g'(x) \\ &= \frac{\left[p\,|f(x)|^p - p\,|f(x)|^{p-2}\, f(x)g(x) - |f(x)|^p + |g(x)|^p\right]}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} f'(x) + \\ &+ \frac{\left[-p\,|g(x)|^{p-2}\, g(x)f(x) + p\,|g(x)|^p + |f(x)|^p - |g(x)|^p\right]}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} g'(x) \\ &= \frac{\left[(p-1)\,|f(x)|^p + |g(x)|^p - p\,|f(x)|^{p-2}\, f(x)g(x)\right]}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} f'(x) + \\ &+ \frac{\left[(p-1)\,|g(x)|^p + |f(x)|^p - p\,|g(x)|^{p-2}\, g(x)f(x)\right]}{\left(f(x) - g(x)\right)^2} g'(x). \end{aligned}$$

Agora, considere as seguintes funções definidas por

$$\gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{(p-1)\,|f(x)|^p + |g(x)|^p - p\,|f(x)|^{p-2}\, f(x)g(x)}{(f(x)-g(x))^2}, \ x \neq a \\ \dfrac{(p-1)p}{2}\,|f(a)|^{p-2}, \ x = a \end{cases}$$

e

$$\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{(p-1)\,|g(x)|^p + |f(x)|^p - p\,|g(x)|^{p-2}\, g(x)f(x)}{(f(x)-g(x))^2}, \ x \neq a \\ \dfrac{(p-1)p}{2}\,|f(a)|^{p-2}, \ x = a. \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\gamma(x) &= \lim_{x\to a}\frac{(p-1)\,|f(x)|^p + |g(x)|^p - p\,|f(x)|^{p-2}\, f(x)g(x)}{(f(x)-g(x))^2} \\
&= \lim_{x\to a}|f(x)|^{p-2}\,\frac{(p-1)\,(f(x))^2 + \left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|^{p-2}(g(x))^2 - pf(x)g(x)}{(f(x)-g(x))^2} \\
&= \lim_{x\to a}|f(x)|^{p-2}\,\frac{(p-1)\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^2 + \left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|^{p-2} - p\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right)^2} \\
&= \lim_{x\to a}|f(x)|^{p-2}\lim_{t\to 1}\frac{(p-1)t^2 + t^{2-p} - pt}{(t-1)^2} \\
&\overset{\text{L' Hôpital}}{=} \lim_{x\to a}|f(x)|^{p-2}\lim_{t\to 1}\frac{2(p-1)t - (p-2)t^{1-p} - p}{2(t-1)} \\
&\overset{\text{L' Hôpital}}{=} \lim_{x\to a}|f(x)|^{p-2}\lim_{t\to 1}\frac{2(p-1) + (p-2)(p-1)t^{-p}}{2} \\
&= |f(a)|^{p-2}\,\frac{(p-1)p}{2} = \gamma(a).
\end{aligned}$$

E, de maneira análoga, mostra-se que

$$\lim_{x\to a}\tau(x) = |f(a)|^{p-2}\,\frac{(p-1)p}{2} = \tau(a).$$

Logo, γ e τ são contínuas em (b,c), pois $f, g \in C^1((b,c))$.

Assim,

$$\begin{aligned}
h'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{|f(x)|^p-|g(x)|^p}{f(x)-g(x)} - p\,|f(a)|^{p-2}\,f(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{p\,|\theta(x)|^{p-2}\,\theta(x) - p\,|f(a)|^{p-2}\,f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{|f(x)|^p-|g(x)|^p}{f(x)-g(x)}\right)' \\
&= \lim_{x\to a}\left(\gamma(x)f'(x)+\tau(x)g'(x)\right) = \frac{(p-1)p}{2}\,|f(a)|^{p-2}\left(f'(a)+g'(a)\right),
\end{aligned}$$

onde $\min\{f(x),g(x)\} < \theta(x) < \max\{f(x),g(x)\}$.

Portanto, $h \in C^1((b,c))$.

$\square$

Demonstração da afirmação (3.16):

Seja $\delta > 0$ tal que $u_1'(s), u_2'(s) \neq 0$, $\forall\ s \in (\epsilon_0-\delta, \epsilon_0+\delta)$.

Se $r \in (\epsilon_0-\delta, \epsilon_0)$ temos que A é diferenciável em r com

$$A'(r) = (p-1)p\,|u_1'(r)|^{p-2}\,u_1''(r).$$

Se $r \in (\epsilon_0, \epsilon_0+\delta)$, temos os seguintes casos:

Caso 1: $u_1'(r) \neq u_2'(r)$

Assim, existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) \neq u_2'(s)$, $\forall\ s \in (r-\delta_r, r+\delta_r)$. Portanto, A é diferenciável em r, pois $\forall\ s \in (r-\delta_r, r+\delta_r)$ temos que

$$A(s) = \frac{|u_1'(s)|^p - |u_2'(s)|^p}{u_1'(s)-u_2'(s)}$$

e que $u \in C^2$.

Caso 2: $u_1'(r) = u_2'(r)$

Temos as seguintes situações:

(i) Existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) = u_2'(s)$, $\forall\ s \in (r-\delta_r, r+\delta_r)$. Então,

$$A(s) = p\,|u_1'(s)|^{p-2}\,u_1'(s)$$

é diferenciável em r.

(ii) Existem seqüências:

$$r_n \to r,\ \ r_n \neq r \text{ tal que } u_1'(r_n) \neq u_2'(r_n)$$

e

$$t_n \to r,\ \ t_n \neq r \text{ tal que } u_1'(t_n) = u_2'(t_n).$$

Nesse caso, pelo teorema do valor médio, temos que

$$A(r_n) = p\,|\theta(r_n)|^{p-2}\,\theta(r_n),$$

onde

$$\min\{u_1'(r_n), u_2'(r_n)\} < \theta(r_n) < \max\{u_1'(r_n), u_2'(r_n)\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A'(r) &= \lim_{n\to\infty} \frac{A(r_n) - A(r)}{r_n - r} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{p\,|\theta(r_n)|^{p-2}\,\theta(r_n) - p\,|u_1'(r)|^{p-2}\,u_1'(r)}{r_n - r} \\ &= pg'(r), \end{aligned}$$

onde $g(s) = |\theta(s)|^{p-2}\,\theta(s)$.

Observe que θ é diferenciável em r. De fato, seja $s_n \to r$, então

$$\frac{u_1'(s_n) - u_1'(r)}{s_n - r} \leq \frac{\theta(s_n) - \theta(r)}{s_n - r} \leq \frac{u_2'(s_n) - u_2'(r)}{s_n - r} \tag{3.18}$$

ou

$$\frac{u_2'(s_n) - u_2'(r)}{s_n - r} \leq \frac{\theta(s_n) - \theta(r)}{s_n - r} \leq \frac{u_1'(s_n) - u_1'(r)}{s_n - r}. \tag{3.19}$$

Como
$$u_1''(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1'(t_n) - u_1'(r)}{t_n - r} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_2'(t_n) - u_2'(r)}{t_n - r} = u_2''(r),$$
de (3.18) ou (3.19), obtemos que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(s_n) - \theta(r)}{s_n - r} = u_1''(r) = u_2''(r).$$

Assim, $\theta'(r) = u_1''(r) = u_2''(r)$. Logo, $g'(r) = (p-1)\left|u_1'(r)\right|^{p-2} u_1''(r)$. Então,
$$A'(r) = (p-1)p\left|u_1'(r)\right|^{p-2} u_1''(r).$$

Portanto, A é diferenciável em r.

(iii) Existe $\delta_r > 0$ tal que $u_1'(s) \neq u_2'(s)$, $\forall\ s \in (r-\delta_r, r) \cup (r, r+\delta_r)$. Assim,
$$A(s) = \begin{cases} \dfrac{|u_1'(s)|^p - |u_2'(s)|^p}{u_1'(s) - u_2'(s)}, & s \in (r-\delta_r, r) \cup (r, r+\delta_r) \\ p\left|u_1'(r)\right|^{p-2} u_1'(r), & s = r \end{cases}$$

Então, usando o lema (3.17), concluímos que A é diferenciável em r com
$$A'(r) = \frac{(p-1)p}{2}\left|u_1'(r)\right|^{p-2}\left(u_1''(r) + u_2''(r)\right).$$

Analogamente, mostramos que A é diferenciável em ϵ_0. Portanto, A é diferenciável numa vizinhança de ϵ_0.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces.* New york: Academic Press, 1975.

[2] BAILEY, P.B.; SHAMPINE, L.F.; WALTMAN, P.E. *Nonlinear two point boundary value problems.* New york: Academic Press Inc., 1968.

[3] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications.* Paris: Masson, 1983.

[4] CASTRO, A. and KUREPA, A. *Infinitely many radially symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 101, No. 1, 57-64, 1987.

[5] CHENG, Y. *On the existence of radial solutions of a nonlinear elliptic equation on the unit ball.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 24, No. 3, 287-307, 1995.

[6] EVANS, L.C. *Partial differential equations.* Providence, RI: American Mathematical Society, 2002.

[7] GONÇALVES, J.V. and MELO, A.L. *Multiple sign changing solutions in a class of quasilinear equations.* Differential and Integral Equations, Vol. 15, 147-165, 2002.

[8] IAIA, J.A. *Radial solutions to a p-Laplacian Dirichlet problem.* Applicable Analysis, Vol. 58, 335-350, 1995.

[9] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications.* New york: J Wiley, 1989.

[10] LIMA, E.L. *Espaços métricos.* Rio de janeiro: Impa, 1977.

[11] NI, W. and SERRIN, J. *Nonexistence theorems for singular solutions of quasilinear partial differential equations.* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 39, 379-399, 1986.

[12] NIRENBERG, L. *Variational and topological methods in nonlinear problems.* Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 4, No. 3, 267-302, 1981.

[13] PERAL, I. *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian.* Spain: Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, 1997.

[14] PICCININI, L.C.; STAMPACCHIA, G.; VIDOSSICH, G. *Ordinary differential equations in* $\mathbb{R}^N$*: Problems and methods.* New york: Springer, 1984.

[15] ROBERTS, S.M. and SHIPMAN, J.S. *Two-point boundary value problems: Shooting Methods.* New york: American Elsevier, 1972.

[16] SAXTON, R. and WEI, D. *Radial solutions to a nonlinear p-Harmonic.* Applicable Analysis, Vol. 51, 59-80, 1993.

[17] STRAUSS, W.A. *Existence of solitary waves in higher dimensions.* Communications in Mathematical Physics, Vol. 55, 149-162, 1977.

[18] TESCHL, G. *Ordinary differential equations and dynamical systems.* Wien, 2007.

[19] WHEEDEN, R.L.; ZYGMUND, A. *Measure and integral, an introduction to real analysis.* New york: Marcel Dekker, 1977.