



**Universidade de Brasília**

**Soluções do Fluxo de Curvatura Média  
sob o Movimento Helicoidal Homotético**

**Jorge Lucas de Azevedo Ribeiro**

Orientador: Dr. Tarcísio Castro  
Silva

Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de  
*Mestre em Matemática*

Brasília, 2024



## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer aos meus familiares que estiveram dispostos a me apoiar quando eu precisasse de ajuda, mesmo não se tratando de contextos acadêmicos. Agradeço principalmente ao meu pai, Jorge, e minha mãe, Valda.

Agradeço a professora e atual tutora do PETMAT Luciana Ávila, pelo programa e me introduzir ao trabalho com pesquisas. Agradeço também, o professor Tarcísio Castro por ter aceitado ser meu orientador e ter me acolhido durante todo o processo desta dissertação.

Quero agradecer aos meus amigos da graduação, Álvaro Sales, Aritane Carvalho, Bárbara Guerra, Guilherme Borges, Manoel Fernando e Thais Regina, nos quais tive a sorte de conviver vários bons momentos na UnB e continuar o contado mesmo depois de ter formado.

Agradeço aos meus amigos mais próximos Ian Marco, Guilherme Santos e Sabrina Lima, pelas motivações, críticas e pelo privilégio de sua companhia. Vossa presença é sempre divertida.

Por fim, agradeço a CAPES por me proporcionar a bolsa de mestrado



## **Resumo**

Motivados pelos resultados obtidos em [7] e [9], fizemos inicialmente um estudo sobre o fluxo de curvatura média (FCM) buscando soluções autossimilares, isto é, soluções invariantes sob um movimento helicoidal homotético, mostrando as possíveis evoluções autossimilares para superfícies imersas no espaço euclidiano, e que essas evoluções dependem apenas de seus respectivos estados iniciais. Posteriormente, fizemos uma classificação de superfícies regradas e de rotação que são soluções não triviais do FCM e mostramos alguns exemplos analíticos e numéricos. Por fim, no último capítulo, estudamos as superfícies helicoidais que são soluções não triviais do FCM estudando propriedades de suas respectivas curvas geradoras.



## **Abstract**

Motivated by the results obtained in [9] and [7], we initially conducted a study on mean curvature flow (MCF), seeking self-similar solutions, that is, solutions invariant under a homothetic helical motion, showing the possible self-similar evolutions for surfaces immersed in Euclidean space, and those evolutions depend only on their respective initial states. Subsequently, we classified ruled and rotational surfaces that are non-trivial solutions of the MCF, providing some analytical and numerical examples. Finally, in the last chapter, we studied helical surfaces that are non-trivial solutions of the MCF studying properties of their respective generating curves.



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos Iniciais</b>	<b>3</b>
1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	3
1.2 Fluxo de Curvatura Média . . . . .	5
<b>2 FCM em Superfícies Regradas e de Rotação</b>	<b>9</b>
2.1 Superfícies Regradas . . . . .	9
2.2 Superfícies de Rotação . . . . .	26
2.3 Exemplos e suas Condições Iniciais . . . . .	29
<b>3 FCM em Superfícies Helicoidais</b>	<b>33</b>
3.1 Superfícies Helicoidais . . . . .	33
3.2 Fluxo Helicoidal . . . . .	36
3.3 Superfícies Helicoidais Mínicas . . . . .	46
3.4 Superfícies Helicoidais com Curvatura Média Constante . . . . .	48
<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>



# Introdução

O Fluxo de Curvatura Média (FCM) é um exemplo de fluxo geométrico de hipersuperfícies  $M^n$  de dimensão  $n$  em uma Variedade Riemanniana  $\bar{M}^{n+1}$  de dimensão  $n + 1$ . Intuitivamente, uma família de superfícies evolui sob fluxo de curvatura média se a componente normal do vetor velocidade com que cada ponto da superfície se move é dada pela curvatura média da superfície.

Este fluxo é estudado desde o século XX no contexto de estudos envolvendo células, grãos, bolhas de sabão, assim como fenômenos físicos e processamento de imagens. W. W. Mullins estudou o fenômeno *coarsening* em metais, que podem não ocorrer necessariamente com o fluxo de curvatura constante, o que possivelmente o faz ser a primeira pessoa a escrever a equação do FCM de forma geral [3].

No plano, o problema do FCM se resume ao Fluxo Redutor de Curvas (FRC) que, por si só, já possui vários estudos a respeito. Em [6], foi mostrado que quando uma curva convexa plana evolui pela equação do calor, ela se mantém convexa e converge para uma singularidade e se torna circular a medida que ela encolhe. Em 1984, Huisken [8], mostrou o FCM para superfícies convexas, nas quais elas convergem para esferas.

Sob o FCM, qualquer hipersuperfície fechada (incluindo curvas) passa por singularidades em uma quantidade finita de tempo. O trabalho [3] justifica essa afirmação e analisa alguns tipos de singularidades e faz uma classificação das mesmas em todas as dimensões, assim como o comportamento do FCM nas vizinhanças dessas singularidades.

Ao tratar-se de uma superfície autossimilar, nos referimos a uma família de superfícies que sofrem um movimento helicoidal homotético  $L(t)$  (definido posteriormente), isto é, estão sob a composição de rotação, translação e dilatação. Por exemplo, uma esfera redonda evolui sob o FCM de forma autossimilar, encolhendo para seu centro uniformemente (veja o Capítulo 2). Angenent [1] mostrou, que superfícies da forma  $S^1 \times S^{n-1}$  imersas no  $\mathbb{R}^{n+1}$  satisfazem o FCM, encolhendo pela dilatação até a origem.

Inspirado pelos trabalhos [9] e [7], estudaremos soluções autossimilares do FCM. Primeiramente, no Capítulo 1 serão feitas algumas abordagens preliminares a respeito de Variedades Diferenciáveis, o FCM e também mostraremos como o movimento helicoidal homotético de

hipersuperfícies evolui ao longo do tempo, assim como essa evolução depende apenas das condições iniciais da própria hipersuperfície e, também, da condição inicial  $L'(0)$ . Portanto, apenas será necessário estudar tais condições iniciais.<sup>1</sup>

No Capítulo 2, estudaremos as superfícies regradas (divididas em não-cilíndricas e cilíndricas) e as superfícies de rotação no  $\mathbb{R}^3$ . Primeiramente, para cada superfície, faremos algumas preliminares e em seguida mostraremos os teoremas principais do capítulo a respeito do FCM. Mostraremos que a única superfície regrada não-cilíndrica que satisfaz o FCM é a trivial, isto é, o helicóide, e que existem soluções não triviais para superfícies cilíndricas e de rotação.

Mostraremos as equações que devem ser satisfeitas para que haja uma solução não trivial a partir da equação do FCM. No caso das superfícies de rotação, a equação depende da curvatura da curva geradora, e no caso das superfícies cilíndricas, apesar da existência de soluções não-triviais, não existem soluções cilíndricas que rotacionam. Ao final, apresentaremos alguns exemplos não triviais dessas superfícies.

No Capítulo 3, estudaremos as superfícies helicoidais, que são superfícies geradas por curvas planas sob o movimento helicoidal, isto é, translação e rotação em direções ortogonais. Utilizaremos uma parametrização não usual com o auxílio de números complexos e, com isso, mostraremos as características das curvas geradoras para o FCM.

Posteriormente, mostraremos uma família a 1-parâmetro de curvas tais que elas geram superfícies helicoidais mínimas e, portanto, são soluções triviais do FCM. Em seguida, analisaremos algumas condições para que a curva geradora nos dê uma superfície cuja a curvatura média seja constante. em [2] foi feita uma classificação dessas superfícies, para concluirmos a existência de uma família dessas tais curvas geradoras.

---

<sup>1</sup>As figuras apresentadas ao longo desta dissertação foram providenciadas a partir do GeoGebra e Maple.

# Capítulo 1

## Conceitos Iniciais

Neste capítulo, introduziremos as definições e conceitos de Variedades Diferenciáveis e do Fluxo de Curvatura Média de maneira mais formalizada. Mostraremos a evolução do FCM, independente da Variedade imersa no  $\mathbb{R}^{n+1}$ , e que essa evolução satisfaz o FCM se, e somente se, sua condição inicial também satisfaz o FCM.

### 1.1 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção iremos introduzir os conceitos a respeito de variedades diferenciáveis, assim como algumas propriedades. Um estudo mais aprofundado, assim como a demonstração de alguns resultados abordados nesta seção, podem ser encontrados em [5].

**Definição 1.1:** [5] Uma *variedade diferenciável* de dimensão  $n$  é um conjunto  $M = M^n$  e uma família de aplicações biunívocas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que:

1.  $\bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ .
2.  $\forall \alpha, \beta$ , com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$  são diferenciáveis.
3. A família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  é máxima relativamente às condições anteriores.

O exemplo mais simples de uma variedade diferenciável é o próprio  $\mathbb{R}^n$ , bastando considerar  $U = \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x} = Id$ , onde  $Id$  é a função identidade. Porém, é possível mostrar que superfícies regulares do  $\mathbb{R}^n$  também são variedades diferenciáveis, isto é, uma aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:

- $X$  é diferencial de classe  $C^\infty$ .

- $\forall q = (u, v) \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora.

**Definição 1.2:** [5] Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\phi : M \rightarrow N$  é uma *imersão* se  $d\phi_p : T_pM \rightarrow T_pN$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se, além disso,  $\phi$  é um homeomorfismo sobre  $\phi(M) \subset N$ , onde  $\phi(M) \subset N$  tem a topologia induzida por  $N$ , diz-se que  $\phi$  é um *mergulho*. Se  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \rightarrow N$  é um mergulho, diz-se que  $M$  é uma *subvariedade* de  $N$ .

Quando uma variedade de dimensão  $n$  está imersa em um espaço ambiente de dimensão  $n + 1$ , isto é, que possui codimensão 1, dizemos que tal variedade é uma *hipersuperfície*. Para o propósito desta dissertação, serão analisadas hipersuperfícies imersas no espaço ambiente euclidiano.

**Definição 1.3:** [5] Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Diz-se que  $M$  é *orientável* se  $M$  admite uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  tal que,  $\forall \alpha, \beta$ , com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , a diferencial da mudança de coordenadas  $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$  tem determinante positivo.

Foi mostrado em [12] que toda hipersuperfície diferenciável fechada em  $\mathbb{R}^n$  é orientável, este fato possibilita garantir a existência de um campo normal unitário a tal hipersuperfície. Quando for explicitado as parametrizações dessas superfícies, também será explicitado o campo normal em função das respectivas parametrizações.

**Definição 1.4** [5] Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma *curva (diferenciável)* em  $M$ . Suponha que  $\alpha(0) = p \in M$ , e seja  $D$  o conjunto das funções diferenciáveis em  $p$ . O *vetor tangente à curva*  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in D.$$

Um *vetor tangente em p* é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p \in M$ . O conjunto dos vetores tangentes de  $M$  em  $p$  é indicado por  $T_pM$ .

Queremos o espaço tangente bem definido para podermos analisar variações em vizinhanças na variedade em um pequeno espaço de tempo e, conseqüentemente, aplicar a operação de derivada na mesma. O espaço tangente também nos permitirá fazer certas medidas na variedade, queremos essas medidas principalmente para determinar suas curvaturas e, para isso, precisaremos da *métrica*.

**Definição 1.5** [5] Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de

coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

Considerando  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  uma imersão. Para cada  $p \in \bar{M}$ , o produto interno de  $T_p\bar{M}$  o decompõe na soma direta, isto é,  $T_p\bar{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$ , onde  $(T_pM)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_pM$  em  $T_p\bar{M}$ . Se  $v \in T_p\bar{M}$ , podemos escrever  $v = v^T + v^N$ , onde  $v^T \in T_pM$  é a componente tangente e  $v^N \in (T_pM)^\perp$  é a componente normal de  $v$ .

Agora seja  $p \in M$  e  $\eta \in (T_pM)^\perp$ . Pode-se definir uma função linear auto-adjunta  $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$  simétrica (veja [5] página 141) tal que, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal de vetores próprios de  $T_pM$ , então existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  valores próprios reais, onde  $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, 1 < i < n$ . Essa função está associada com a segunda forma fundamental.

Se  $M$  e  $\bar{M}$  são ambas orientáveis e estão orientadas, então o vetor  $\eta$  fica univocamente determinado se exigirmos que, sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base na orientação de  $M$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  seja uma base na orientação de  $\bar{M}$ . Neste caso, denominamos os  $e_i$  *direções principais* e os  $\lambda_i$  *curvaturas principais* da imersão  $f$ .

Assim denominaremos  $H = \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{n}$  a *curvatura média* da imersão  $f$ . Futuramente nos capítulos 2 e 3, iremos estudar algumas classes de superfícies imersas no  $\mathbb{R}^3$  com a métrica euclidiana. Assim, a curvatura média  $H$  será calculada utilizando os coeficientes da segunda forma fundamental de forma explícita.

## 1.2 Fluxo de Curvatura Média

O Fluxo de Curvatura Média (FCM) é uma forma de evolução de hipersuperfícies ao longo do tempo e será definido da seguinte forma: Sejam  $M^n$  uma variedade  $n$ -dimensional e a família de imersões  $X = X(\cdot, t) : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  com  $M_t = X(M^n)$ . A família de hipersuperfícies  $(M_t)_{t \in I}$  é dita satisfazer o **fluxo de curvatura média** se

$$\frac{\partial X}{\partial t}(p, t) = H(p, t)N(p, t) \quad (1.1)$$

para todo  $p \in M^n$  e  $t \in I$ , onde  $H = H(p, t)$ ,  $N = N(p, t)$  são, respectivamente a curvatura média e o vetor normal. Dizemos ainda que a família  $(M_t)$  é **autossimilar** se

$$X(p, t) = L(t)X(p) = \sigma(t)\Gamma(t)X(p, 0) + \Theta(t) \quad (1.2)$$

onde  $L(t) = \sigma(t)\Gamma(t) + \Theta(t)$  é dito **movimento helicoidal homotético**, isto é, a composta das aplicações  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$  (dilatação),  $\Gamma : I \rightarrow SO(n+1)$  (rotação) e  $\Theta : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  (translação) tais que,  $\sigma(0) = 1$ ,  $\Gamma(0) = Id$ ,  $\Theta(0) = \vec{0}$  e  $\Gamma(t)\Theta(t) = \Theta(t)$ .

A última afirmação significa que a translação é paralela ao eixo de rotação, e podemos impor essa condição por conta de que podemos decompor uma translação qualquer em duas componentes, uma delas paralelas e a outra perpendicular ao eixo de rotação, e a rotação composta por uma translação perpendicular ao seu eixo é uma rotação com um eixo diferente paralelo ao primeiro.

Se as hipersuperfícies possuem curvatura média nula ( $H(p, t) = 0$ ), obtemos que  $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$ , ou seja, a família de superfícies que satisfazem o FCM é constante e, portanto, os coeficientes constantes relacionados às condições iniciais são todos nulos. Neste caso, dizemos que a família de hipersuperfícies é uma solução *trivial*.

Agora, podemos analisar o fluxo para achar condições necessárias e suficientes para que uma hipersuperfície satisfaça o FCM de forma autossimilar. Usando a notação já estabelecida, uma solução autossimilar do FCM é válida se, e somente se,

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(p, t), N(p, t) \right\rangle = H(p, t) \quad (1.3)$$

que, ao utilizar a equação (1.2), podemos concluir que

$$\langle \sigma'(t)\Gamma(t)X(p) + \sigma(t)\Gamma'(t)X(p) + \Theta'(t), N(p, t) \rangle = H(p, t).$$

Como  $H(p, t) = \frac{H(p)}{\sigma(t)}$  e  $N(p, t) = \Gamma(t)N(p)$ , a equação acima é equivalente a

$$\sigma(t)\sigma'(t)\langle X(p), N(p) \rangle + \sigma^2(t)\langle \Gamma^{-1}(t)\Gamma'(t)X(p), N(p) \rangle + \sigma(t)\langle \Gamma^{-1}(t)\Theta'(t), N(p) \rangle = H(p).$$

Em particular, quando em  $t = 0$ , temos que

$$c\langle X(p), N(p) \rangle + \langle AX(p), N(p) \rangle + \langle b, N(p) \rangle = H(p). \quad (1.4)$$

onde  $A = \Gamma'(0)$ ,  $b = \Theta'(0)$  e  $c = \sigma'(0)$ . Mostraremos que a condição acima é suficiente para o FCM.

**Caso (1):** Suponha que a família  $M_t$  satisfaça (1.4) e que  $c \neq 0$ . Podemos transladar  $M_t$  por um vetor  $\vec{w}$ , assim as hipersuperfícies resultantes  $\hat{M}_t$  satisfazem

$$c\langle X(p), \hat{N}(p) \rangle + \langle AX(p), \hat{N}(p) \rangle + \langle b - (A + cId)\vec{w}, \hat{N}(p) \rangle = \hat{H}(p).$$

Como  $A \in SO(n+1)$ , podemos escolher  $\vec{w}$  como sendo solução de  $(A + cId)\vec{w} = b$ , assim  $\hat{M}_t$  satisfaz

$$c\langle X(p), \hat{N}(p) \rangle + \langle AX(p), \hat{N}(p) \rangle = \hat{H}(p). \quad (1.5)$$

Se as funções  $\sigma$  e  $\Gamma$  satisfazem  $\sigma(t)\sigma'(t) = c$  e  $\sigma^2(t)\Gamma^{-1}(t)\Gamma'(t) = A$ , resolvendo essas equações diferenciais [11], chegamos em

$$\int \sigma(t)\sigma'(t)dt = \int cdt$$

e assim, podemos concluir que  $\sigma^2(t) = 2ct + 1$ . Logo, temos que  $\Gamma'(t) = \frac{A\Gamma(t)}{2ct + 1}$  e, ao integrar,

$$\int \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt = \int \frac{A}{2ct + 1} dt,$$

resultando em  $\ln(\Gamma(t)) = \frac{\ln(2ct + 1)}{2c}A$ . Com isso,

- $\sigma(t) = \sqrt{2ct + 1}$  onde  $c = \sigma'(0)$ ,
- $\Gamma(t) = e^{\frac{\ln(2ct+1)}{2c}A}$  onde  $A = \Gamma'(0)$ ,

ou seja,  $\hat{M}_t$  contrai e rotaciona com velocidade crescente ( $c < 0$ ) até o ponto  $t = \frac{-1}{2c}$  ou dilata indefinidamente e rotaciona com velocidade decrescente ( $c > 0$ ). Assim  $M_t$  se comporta da mesma forma.

**Caso (2):** Suponha agora que a família  $M_t$  satisfaça (1.4) e que  $c = 0$  (i.é.  $\sigma(t) \equiv 1$ ). Temos que

$$\langle AX(p), N(p) \rangle + \langle b, N(p) \rangle = H(p). \quad (1.6)$$

Levando em conta que a rotação e translação de  $X$  estão em direções ortogonais, se as funções  $\Gamma$  e  $\Theta$  satisfazem  $\Gamma^{-1}(t)\Theta'(t) = b$  e  $\Gamma^{-1}(t)\Gamma'(t) = A$ , então podemos concluir de forma análoga ao Caso 1 que  $\Theta'(t) = \Gamma(t)b$  e  $\Gamma'(t) = A\Gamma(t)$ ,

$$\begin{aligned} \int \Theta'(t)dt &= \int bdt \\ \int \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}dt &= \int Adt, \end{aligned}$$

e, com isso,

- $\Gamma(t) = e^{tA}$  onde  $A = \Gamma'(0)$ ,
- $\Theta(t) = bt$  onde  $b = \Theta'(0)$ ,

ou seja,  $M_t$  translada e rotaciona com velocidades constantes.

Portanto, o caso geral pode ser reduzido a um dos dois casos acima. Assim, uma solução autossimilar do FCM é de uma das formas já apresentadas, e podemos apenas focar nas suas condições iniciais.

## Capítulo 2

# FCM em Superfícies Regradas e de Rotação

Neste capítulo, baseado do trabalho [9], apresentaremos alguns resultados do FCM aplicados às superfícies regradadas e de rotação, fornecendo condições necessárias e suficientes para que tais superfícies satisfaçam o FCM de maneira autossimilar. Ao final, também mostraremos alguns exemplos explícitos de superfícies e suas respectivas condições iniciais.

### 2.1 Superfícies Regradas

Em síntese, superfícies regradadas são obtidas pela união de retas, isto é, pode-se conceber uma superfície regradada como composta por múltiplas linhas cuja união forma a própria superfície. Outra forma de determinarmos que uma superfície  $S$  é regradada é pela existência de um caminho contido em  $S$  tal que, para cada ponto desse caminho, existe uma reta também contida em  $S$  passando por aquele ponto. Mais precisamente,

**Definição 2.1:** Uma superfície  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita *regrada* se  $X$  pode ser escrita como

$$X(s, u) = \alpha(s) + uw(s), \quad (2.1)$$

onde a curva  $\alpha(s)$  e o campo vetorial  $w(s)$  (ao longo de  $\alpha$ ) são diferenciáveis. Dizemos ainda que a superfície é *cilíndrica* se  $w'(s) = 0$ , caso contrário dizemos que a superfície é *não-cilíndrica*.

Os exemplos mais comuns e mais fáceis de visualizar são o plano, o cilindro e o cone.

Pode-se mostrar que uma superfície regradada não-cilíndrica pode ser reparametrizada por

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s), \quad (2.2)$$

onde  $|w| = 1 = |w'|$  e  $\langle \beta'; w' \rangle = 0$  para todo  $s$ . A curva  $\beta(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha(s), w'(s) \rangle}{\|w'(s)\|^2} w(s)$ , neste caso, é chamada *curva de estrição* [10]. Por conveniência, ressaltamos a omissão do parâmetro  $(s, u)$  nos cálculos seguintes.

Considere, então,  $X$  uma superfície regradada não-cilíndrica, assim

$$\begin{aligned} X_s &= \beta' + uw', & X_u &= w, & X_s \wedge X_u &= \beta' \wedge w + uw' \wedge w, \\ X_{ss} &= \beta'' + uw'', & X_{su} &= w', & X_{uu} &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\langle w; w' \rangle = 0 = \langle \beta'; w' \rangle$ , temos que  $\beta' \wedge w = \lambda w$  para alguma função real  $\lambda(s)$ . Portanto,  $X_s \wedge X_u = \lambda w + uw' \wedge w$  e, com isso, temos que  $EG - F^2 = |X_s \wedge X_u|^2 = \lambda^2 + u^2$ .

O vetor normal de  $X(s, u)$  é dado por  $N = \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} = \frac{\lambda w + uw' \wedge w}{\lambda^2 + u^2}$ . Calculando os coeficientes da *primeira e segunda* formas fundamentais [4], onde  $J := \langle w \wedge w', w'' \rangle$ , obtemos facilmente que

$$\begin{aligned} E &= |\beta'|^2 + u^2, & F &= \langle \beta', w \rangle, & G &= 1, \\ e &= \frac{\lambda(F - \lambda J) - u\lambda' - u^2 J}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}}, & f &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}}, & g &= 0. \end{aligned}$$

Calculando as curvaturas gaussiana e média, respectivamente, seguem-se que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = - \left( \frac{\lambda F + \lambda^2 J + u\lambda' + u^2 J}{2(\sqrt{\lambda^2 + u^2})^3} \right).$$

Com isso, temos a base necessária para estudar o FCM das superfícies regradadas não-cilíndricas em  $\mathbb{R}^3$ . O Lema a seguir mostrará condições necessárias e suficientes para que uma superfície regradada não cilíndrica seja uma solução autossimilar do FCM.

**Lema 2.2:** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regradada não-cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s),$$

onde  $\beta(s)$  é uma curva em  $\mathbb{R}^3$  e  $w(s) \subset \mathbb{R}^3$  unitário não-constante. Então  $X'(s, u) = L(t)X(s, u)$  é uma solução autossimilar do FCM em  $\mathbb{R}^3$  se, e somente se,

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + \langle \Gamma'(0)\beta, w' \wedge w \rangle + \langle \Theta'(0), w' \wedge w \rangle + \sigma'(0)\langle \beta, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \lambda (\langle \Gamma'(0)\beta, w' \rangle + \langle \Theta'(0), w' \rangle + \sigma'(0)\langle \beta, w' \rangle) + \frac{1}{2}\langle w \wedge w', w'' \rangle = 0, \\ \lambda \langle \beta', w \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $L(t) = \sigma(t)\Gamma(t) + \Theta(t)$  é um movimento helicoidal homotético em  $\mathbb{R}^3$ ;  $\sigma$ ,  $\Gamma$  e  $\Theta$  são, respectivamente, dilatação, rotação e translação. Além disso,  $\lambda = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle$  é necessariamente constante.

**Prova do Lema 2.2:** Considere  $X$  e  $X'$  tal como enunciado. Se  $X$  é uma solução autossimilar do FCM em  $\mathbb{R}^3$ , então temos que, em  $t = 0$ ,

$$\langle \sigma'(0)\Gamma(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle = H,$$

e assim,

$$\langle \sigma'(0)\Gamma(0)X, N \rangle + \langle \Gamma'(0)X, N \rangle + \langle \Theta'(0), N \rangle = H. \quad (2.4)$$

Agora, calculando cada termo da soma temos que, considerando  $|w'(s)| = 1$ ,

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(0)\Gamma(0)X, N \rangle &= \sigma'(0) \left\langle \Gamma(0)(\beta + uw), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\ &= \sigma'(0) \left( \frac{\langle \beta + uw, \lambda w' + uw' \wedge w \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \\ &= \sigma'(0) \left( \frac{\lambda \langle \beta, w' \rangle + u\lambda \langle w, w' \rangle + u \langle \beta, w' \wedge w \rangle + u^2 \langle w, w' \wedge w \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \\ &= \frac{\lambda \sigma'(0) \langle \beta, w' \rangle + u \sigma'(0) \langle \beta, w' \wedge w \rangle}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Gamma'(0)X, N \rangle &= \left\langle \Gamma'(0)(\beta + uw), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \Gamma'(0)(\beta + uw), \lambda w' + uw' \wedge w \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\lambda \langle \Gamma'(0)\beta, w' \rangle + u\lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + u \langle \Gamma'(0)\beta, w' \wedge w \rangle + u^2 \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \Theta'(0), N \rangle &= \left\langle \Theta'(0), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\
&= \frac{\langle \Theta'(0), \lambda w' + u w' \wedge w \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \\
&= \frac{\lambda \langle \Theta'(0), w' \rangle + u \langle \Theta'(0), w' \wedge w \rangle}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}}.
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, escreveremos

$$\begin{aligned}
V &:= \langle \Gamma'(0)\beta, w' \rangle, & W &:= \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle, & Y &:= \langle \Gamma'(0)\beta, w' \wedge w \rangle, \\
Z &:= \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle, & C &:= \langle \Theta'(0), w' \rangle, & D &:= \langle \Theta'(0), w' \wedge w \rangle, \\
A &:= \sigma'(0) \langle \beta, w' \wedge w \rangle, & B &:= \sigma'(0) \langle \beta, w' \rangle.
\end{aligned}$$

Com isso a Equação (2.4) se torna

$$\frac{\lambda B + uA}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} + \frac{\lambda V + u\lambda W + uY + u^2 Z}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} + \frac{\lambda C + uD}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} = - \left( \frac{\lambda F + \lambda^2 J + u\lambda' + u^2 J}{2(\sqrt{\lambda^2 + u^2})^3} \right),$$

que pode se transformar em um polinômio de 4º grau,  $p(u)$ , identicamente nulo da forma

$$\begin{aligned}
p(u) &= 2u^4[Z] + 2u^3[\lambda W + Y + D + A] + 2u^2[\lambda^2 Z + \lambda(V + C + B) + \frac{1}{2}J] \\
&\quad + u[2\lambda^2(\lambda W + Y + D + A) + \lambda'] + [2\lambda^2(\lambda(V + C + B) + \frac{1}{2}J) + \lambda F] \equiv 0,
\end{aligned}$$

ou seja, a superfície em questão satisfaz o FCM se, e somente se, todos os coeficiente em colchetes são nulos, isto é, se e somente se

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 0, \\ \lambda W + Y + D + A = 0, \\ \lambda(V + C + B) + \frac{1}{2}J = 0, \\ \lambda' = 0, \\ \lambda F = 0, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

donde concluimos que

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + \langle \Gamma'(0)\beta, w' \wedge w \rangle + \langle \Theta'(0), w' \wedge w \rangle + \sigma'(0) \langle \beta, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \lambda (\langle \Gamma'(0)\beta, w' \rangle + \langle \Theta'(0), w' \rangle + \sigma'(0) \langle \beta, w' \rangle) + \frac{1}{2} \langle w \wedge w', w'' \rangle = 0, \\ \lambda' = 0, \\ \lambda \langle \beta', w \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

□

Note que (2.6) pode ser reescrita, de forma equivalente, por

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \lambda \langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{1}{2}J = 0, \\ \lambda' = 0, \\ \lambda \langle \beta', w \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Com o lema anterior, será possível analisar mais explicitamente quais propriedades as curvas  $\beta(s)$  e  $w(s)$  devem possuir, assim como quais condições iniciais são necessárias, para determinar, assim, quais superfícies regradas não-cilíndricas satisfazem o FCM de forma autossimilar. Futuramente, mostraremos que, neste caso, a única solução é o helicóide (uma solução trivial).

**Lema 2.3:** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regrada não-cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$ . Então o conjunto de vetores ortonormais  $\{w, w', w \wedge w'\}$  satisfaz:

$$\begin{cases} w'' = Jw' \wedge w - w, \\ (w \wedge w')' = -Jw', \end{cases} \quad (2.8)$$

onde  $J = \langle w \wedge w', w'' \rangle$ .

**Prova do Lema 2.3:** Escrevendo  $w''$  na base  $\{w(s), w'(s), w(s) \wedge w'(s)\}$  temos que

$$w'' = \rho_1 w + \rho_2 w' + \rho_3 w \wedge w'.$$

Como  $\langle w'', w \rangle = -1$ ,  $\langle w'', w' \rangle = 0$  e  $\langle w'', w \wedge w' \rangle = J$ , concluímos a primeira equação de (2.8). Para a segunda equação, note que

$$\begin{aligned} (w \wedge w')' &= w' \wedge w' + w \wedge w'' \\ &= w' \wedge w' + w \wedge (Jw' \wedge w - w) \\ &= Jw \wedge (w \wedge w') - w \wedge w \\ &= Jw \langle w, w' \rangle - Jw' \langle w, w \rangle \\ &= -Jw'. \end{aligned}$$

□

Essas propriedades serão utilizadas futuramente ao final da demonstração do Teorema 2.6. Com o Lemas 2.2 e 2.3, temos o suporte necessário para estudar as soluções autossimilares não-cilíndricas do FCM. O objetivo dos Teoremas 2.5 e 2.6 é mostrar que a única solução para uma superfície regradada não cilíndrica é a solução trivial e, portanto, deve ser o helicóide.

**Teorema 2.4:** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regradada não cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s), \quad (s, u) \in U,$$

onde  $\beta(s)$  é uma curva em  $\mathbb{R}^3$  e  $w(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{R}^3$  unitário não constante. Suponha que  $X^t(s, u) = L(t)X(s, u)$  é uma solução autossimilar do FCM e  $L(t) = \sigma(t)\Gamma(t) + \Theta(t)$  é um movimento homotético helicoidal no  $\mathbb{R}^3$ . Se a curva descrita por  $w$  é uma geodésica, então  $X$  é trivial.

**Prova:** Suponha que  $\lambda = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle = 0$ . Pelo sistema (2.6), obtemos

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \frac{1}{2} \langle w \wedge w', w'' \rangle = \frac{J}{2} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Agora observe que,  $w \subset S^2$  implica que  $k_g = \langle w \wedge w', w'' \rangle = J$  onde  $k_g$  é a curvatura geodésica de  $w(s)$ . Assim, se  $\lambda = 0$  então  $J = 0$  e portanto,  $w$  é uma geodésica. Com isso, obtemos que

$$K(s, u) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2} = 0; \quad H(s, u) = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{\lambda F + \lambda^2 J + u\lambda' + u^2 J}{2(\lambda^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Portanto, as curvaturas anulam-se em todos os pontos de  $U$ , ou seja,  $X$  é um plano.

Suponha  $\lambda \neq 0$ . Com isso,  $w(s)$  geodésica implica que  $J = 0$  e, pelo Lema 2.2,

$$\langle \beta', w \rangle = F = 0 = \lambda',$$

assim

$$H = \frac{\lambda F + \lambda^2 J + u\lambda' + u^2 J}{2(\lambda^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda F}{2(\lambda^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

isto é,  $X$  é uma superfície mínima, portanto,  $X$  é trivial. □

A condição sobre  $w(s)$  de ser uma geodésica, apesar de facilitar a demonstração, é desnecessária, no sentido que é possível generalizar essa hipótese do teorema e ainda sim, chegar na mesma conclusão, como veremos a seguir.

**Teorema 2.5:** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regrada não-cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s), \quad (u, s) \in U,$$

onde  $\beta(s)$  é uma curva em  $\mathbb{R}^3$  e  $w(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{R}^3$  unitário não-constante. Suponha que  $X^t(s, u) = L(t)X(s, u)$  é uma solução autossimilar do FCM e  $L(t) = \sigma(t)\Gamma(t) + \Theta(t)$  é um movimento homotético helicoidal no  $\mathbb{R}^3$ . Então  $X$  é trivial.

**Prova:** Pelo teorema anterior, se  $\lambda = 0$ , então  $X$  é um plano. Consideremos, então,  $\lambda \neq 0$ . Assim, escrevendo

$$w(s) = (y_1(s), y_2(s), y_3(s)), \quad w' \wedge w = (y_2' y_3 - y_3' y_2, y_3' y_1 - y_1' y_3, y_1' y_2 - y_2' y_1),$$

e, sem perda de generalidade,  $\Theta(t) = (0, 0, \zeta(t))$ ,  $\Theta'(0) = b(0, 0, 1)$ , assim como

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon(t)) & -\text{sen}(\varepsilon(t)) & 0 \\ \text{sen}(\varepsilon(t)) & \cos(\varepsilon(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma'(0) = a \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

o que implica que  $\Gamma'(0)w = a(-y_2, y_1, 0)$ , onde  $a = \varepsilon'(0)$  e  $b = \zeta'(0)$ . Podemos concluir, então, que

$$\begin{aligned} \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle &= a[-y_2(y_2' y_3 - y_3' y_2) + y_1(y_3' y_1 - y_1' y_3)] \\ &= a[y_3(-y_2' y_2 - y_1' y_1) + y_3'(y_2^2 + y_1^2)] \\ &= a[y_3(y_3' y_3) + y_3'(1 - y_3^2)] \\ &= ay_3' = 0. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos 3 casos possíveis, a saber: **(I)**  $a \neq 0$  e  $y_3' = 0$ , **(II)**  $a = 0$  e  $y_3' = 0$ , **(III)**  $a = 0$  e  $y_3' \neq 0$ . Seja  $\beta(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ . Vamos avaliar cada caso a seguir.

**Caso (I)**  $a \neq 0$  e  $y_3' = 0$ .

Neste caso,  $y_3$  é constante, logo  $w(s)$  é um paralelo contido em  $S^2$ , que admite a seguinte parametrização:

$$w(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r), \sqrt{1 - r^2}), \quad r = \sqrt{1 - y_3^2} \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Se  $y_3 = 0$ , então  $r = 1$  e temos que  $w$  é um grande círculo, portanto geodésica. Assim, temos pelo Teorema 2.5 que  $X$  é trivial.

Considere então  $y_3 > 0$ , o que resulta em  $r < 1$ . Pelas equações do Lema 2.2, e as parametrizações apresentadas:

$$\begin{aligned} \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle &= (\lambda a - cx_3 - b)r + y_3 \left( \cos\left(\frac{s}{r}\right) (cx_1 - ax_2) + \sin\left(\frac{s}{r}\right) (cx_2 + ax_1) \right), \\ \lambda \langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{\langle w'', w' \wedge w \rangle}{2} &= \lambda [-\sin(s/r)(cx_1 - ax_2) + \cos(s/r)(cx_2 + ax_1)] + \frac{\sqrt{1 - r^2}}{2r}, \\ \langle \beta', w \rangle &= rx_1' \cos(s/r) + rx_2' \sin(s/r) + x_3' \sqrt{1 - r^2}, \\ \langle \beta', w' \rangle &= -rx_1' \sin(s/r) + rx_2' \cos(s/r), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde todas as equações são identicamente nulas, ou seja, equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos(s/r)(cx_1 - ax_2) + \sen(s/r)(cx_2 + ax_1)) = \frac{(cx_3 + b - \lambda a)r}{\sqrt{1-r^2}}, \\ \sen(s/r)(cx_1 - ax_2) - \cos(s/r)(cx_2 + ax_1) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\lambda r}, \\ x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sen(s/r) = -\frac{x'_3 \sqrt{1-r^2}}{r}, \\ -x'_1 \sen(s/r) + x'_2 \cos(s/r) = 0, \end{array} \right.$$

ou então,

$$(c\cos(s/r) + a\sen(s/r))x_1 + (c\sen(s/r) - a\cos(s/r))x_2 = \frac{(cx_3 + b - \lambda a)r}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (2.13)$$

$$(c\sen(s/r) - a\cos(s/r))x_1 - (c\cos(s/r) + a\sen(s/r))x_2 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\lambda r}, \quad (2.14)$$

$$x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sen(s/r) = -\frac{x'_3 \sqrt{1-r^2}}{r}, \quad (2.15)$$

$$-x'_1 \sen(s/r) + x'_2 \cos(s/r) = 0. \quad (2.16)$$

Derivando (2.14) e utilizando (2.13) obtemos

$$(c\sen(s/r) - a\cos(s/r))x'_1 - (c\cos(s/r) + a\sen(s/r))x'_2 + \frac{(cx_3 + b - \lambda a)}{\sqrt{1-r^2}} = 0,$$

e utilizando (2.15) e (2.16) na equação acima, temos que

$$\frac{ax'_3 \sqrt{1-r^2}}{r} + \frac{(cx_3 + b - \lambda a)}{\sqrt{1-r^2}} = 0 \Rightarrow x'_3 = -\frac{r(cx_3 + b - \lambda a)}{a(1-r^2)}. \quad (2.17)$$

Agora, dado que  $\lambda = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle = x'_3 r - \sqrt{1-r^2}(x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sen(s/r))$  é uma constante, pela equação (2.15), segue-se que

$$\begin{aligned} \lambda &= x'_3 r + (\sqrt{1-r^2}) \left[ \frac{x'_3 \sqrt{1-r^2}}{r} \right] \\ &= x'_3 r + \frac{x'_3}{r} - \frac{x'_3 r^2}{r} \\ &= \frac{x'_3}{r}. \end{aligned}$$

Portanto,  $x'_3(s)$  deve ser uma constante não-nula. Logo, por (2.17), temos que  $c = 0$ . Assim, a equação (2.13) se torna,

$$\frac{(b - \lambda a)r}{a\sqrt{1 - r^2}} = \text{sen}(s/r)x_1 - \text{cos}(s/r)x_2$$

e derivando-a e usando (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (1/r)\text{cos}(s/r)x_1 + (1/r)\text{sen}(s/r)x_2 + \text{sen}(s/r)x'_1 - \text{cos}(s/r)x'_2 \\ &= \text{cos}(s/r)x_1 + \text{sen}(s/r)x_2. \end{aligned}$$

Agora, já que  $c = 0$ , (2.14) se torna:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 - r^2}}{2\lambda r} &= -a\text{cos}(s/r)x_1 - a\text{sen}(s/r)x_2 \\ &= -a(\text{cos}(s/r)x_1 + \text{sen}(s/r)x_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que não pode ocorrer, pois foi suposto  $r < 1$ . Isso prova o Caso (I).

**Caso (II)**  $a = 0$  e  $y'_3 = 0$ .

Neste caso, utilizando (2.14), resulta que

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle = (-cx_3 - b)r + c\sqrt{1 - r^2}(\text{cos}(s/r)x_1 + \text{sen}(s/r)x_2) = 0, \\ \lambda \langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{\langle w'', w' \wedge w \rangle}{2} = c\lambda[-\text{sen}(s/r)x_1 + \text{cos}(s/r)x_2] + \frac{\sqrt{1 - r^2}}{2r} = 0, \\ \langle \beta', w \rangle = rx'_1\text{cos}(s/r) + rx'_2\text{sen}(s/r) + x'_3\sqrt{1 - r^2} = 0, \\ \langle \beta', w' \rangle = -x'_1\text{sen}(s/r) + x_2\text{cos}(s/r) = 0. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Portanto, podemos dizer que  $c \neq 0$ , pois da segunda equação,  $c = 0$  resultaria em  $r = 1$ . Assim obtemos:

$$\cos(s/r)x_1 + \sin(s/r)x_2 = \frac{(cx_3 + b)r}{c\sqrt{1-r^2}}, \quad (2.19)$$

$$\sin(s/r)x_1 - \cos(s/r)x_2 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2c\lambda r}, \quad (2.20)$$

$$x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sin(s/r) = -\frac{x'_3 \sqrt{1-r^2}}{r}, \quad (2.21)$$

$$-x'_1 \sin(s/r) + x'_2 \cos(s/r) = 0. \quad (2.22)$$

Derivando (2.20) e usando (2.22) junto com (2.19), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(s/r)x_1 + \sin(s/r)x_2 \\ &= \frac{(cx_3 + b)r}{c\sqrt{1-r^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $x_3 = \frac{-b}{c}$  constante, logo  $x'_3 = 0$ . Com isto, por (2.21) decorre que  $x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sin(s/r) = 0$ , ou seja,

$$\lambda = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle = -\sqrt{1-r^2}(x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sin(s/r)) = 0,$$

o que contradiz a hipótese de que  $\lambda \neq 0$ . Isso prova o caso (II).

**Caso (III)**  $a = 0$  e  $y'_3 \neq 0$ .

Já vimos que, quando  $a = 0$

$$\begin{cases} \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle = 0, \\ \lambda \langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{\langle w'', w' \wedge w \rangle}{2} = 0, \\ \langle \beta', w \rangle = 0, \\ \langle \beta', w' \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Derivando a 1ª equação de (2.23) e usando o Lema 2.3

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds} \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle \\
&= \langle (\sigma'(0)\beta + \Gamma'(0)\beta + \Theta'(0))', w' \wedge w \rangle + \langle L'(0)\beta, (w' \wedge w)' \rangle \\
&= \langle c\beta', w' \wedge w \rangle + \langle L'(0)\beta, -Jw' \rangle \\
&= c\lambda - J \langle L'(0)\beta, w' \rangle,
\end{aligned}$$

isto é,  $c\lambda = -J^2/2\lambda$ , que resulta em  $2c\lambda^2 = -J^2$ . Note que  $J$  é constante e que, se  $c = 0$ , decorre do Teorema 2.4 que  $X$  é trivial.

Suponhamos então  $c < 0$ . Derivando a 2ª equação de (2.23), resulta que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds} \left( \langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{\langle w'', w' \wedge w \rangle}{2\lambda} \right) \\
&= \langle (\sigma'(0)\beta + \Gamma'(0)\beta + \Theta'(0))', w' \rangle + \langle L'(0)\beta, w'' \rangle \\
&= \langle c\beta', w' \rangle + \langle L'(0)\beta, Jw' \wedge w - w \rangle \\
&= J \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle - \langle L'(0)\beta, w \rangle
\end{aligned}$$

donde chegamos em  $\langle L'(0)\beta, w \rangle = 0$ .

Com isso,  $\langle L'(0)\beta, w \rangle = 0$ ,  $c\lambda = J \langle L'(0)\beta, w' \rangle$  e  $\langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle = 0$ . Concluimos, então,

$$L'(0)\beta(s) = \frac{c\lambda}{J} w'(s)$$

que, ao derivar em relação a  $s$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\beta' &= \frac{\lambda}{J} w'' \\
&= \frac{\lambda}{J} (Jw' \wedge w - w) \\
&= \lambda (w' \wedge w) - \frac{\lambda}{J} w.
\end{aligned}$$

Porém, isso implica que

$$\begin{aligned}
0 = \langle \beta', w \rangle &= \lambda \langle w' \wedge w, w \rangle - \frac{\lambda}{J} \langle w, w \rangle \\
&= \frac{-\lambda}{J},
\end{aligned}$$

o que contradiz  $\lambda \neq 0$ . Portanto, em todos os casos, necessariamente  $X$  é trivial.  $\square$

Apesar de apenas existir a solução trivial para o caso das superfícies não-cilíndricas, o mesmo não se pode afirmar para as superfícies cilíndricas. De fato, se  $X$  é uma superfície regrada cilíndrica, obtemos que

$$\begin{aligned} X_s &= \beta', & X_u &= w, & X_s \wedge X_u &= \beta' \wedge w, \\ X_{ss} &= \beta'', & X_{su} &= 0, & X_{uu} &= 0, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} E &= |\beta'|^2, & F &= \langle \beta', w \rangle, & G &= 1, \\ e &= \frac{\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle}{\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2}}, & f &= 0, & g &= 0, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle}{2(\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2})^3}.$$

Agora, veremos as condições que a curva  $\beta(s)$  deve satisfazer, de maneira análoga ao Lema 2.2, para que as superfícies cilíndricas sejam soluções autossimilares do FCM.

**Lema 2.6:** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regrada cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,  $w' = 0$ . Então  $X^t = L(t)X(s, u)$  é uma solução autossimilar do FCM no  $\mathbb{R}^3$  com condição inicial  $X$  se, e somente se,

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle = 0, \\ \langle L'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle = \frac{\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle}{2(|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2)}. \end{cases} \quad (2.24)$$

**Prova:** De forma similar a prova do Lema 2.2, temos que

$$H = \frac{\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle}{2(|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma'(0)\Gamma(0)X, N \rangle &= \sigma'(0) \left\langle \Gamma(0)(\beta + uw), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\
&= \sigma'(0) \langle \beta + uw, \beta' \wedge w \rangle \frac{1}{\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2}} \\
&= \sigma'(0) (\langle \beta, \beta' \wedge w \rangle + u \langle w, \beta' \wedge w \rangle) \frac{1}{\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2}} \\
&= \sigma'(0) \langle \beta, \beta' \wedge w \rangle \frac{1}{\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma'(0)X, N \rangle &= \left\langle \Gamma'(0)(\beta + uw), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\
&= \langle \Gamma'(0)(\beta + uw), \beta' \wedge w \rangle \frac{1}{\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2}} \\
&= (\langle \Gamma'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle + u \langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle) \frac{1}{\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \Theta'(0), N \rangle &= \left\langle \Theta'(0), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\
&= \langle \Theta'(0), \beta' \wedge w \rangle \frac{1}{\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2}}.
\end{aligned}$$

Com isso, decorre que

$$\frac{\sigma'(0) \langle \beta, \beta' \wedge w \rangle + \langle \Gamma'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle + u \langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle + \langle \Theta'(0), \beta' \wedge w \rangle}{\sqrt{|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2}} = \frac{\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle}{2(|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2)^{\frac{3}{2}}},$$

para todo  $(s, u) \in U$ . Em outras palavras,

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle = 0 \\ \langle L'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle = \frac{\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle}{2(|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2)}. \end{cases}$$

□

O Teorema 2.7 a seguir mostrará um sistema de equações em função de  $\beta(s)$  e  $w(s)$  que uma solução deve satisfazer e, na seção seguinte, mostraremos exemplos explícitos de soluções não triviais.

**Teorema 2.7:** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regrada cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$ ,

$$X(s, u) = \beta(s) + uw, \quad (s, u) \in U,$$

onde  $\beta(s)$  é uma curva diferenciável no  $\mathbb{R}^3$  e  $w(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{R}^3$  unitário constante. Então  $X^t(s, u) = L(t)X(s, u)$  é uma solução autossimilar do FCM com condição inicial  $X$  se, e somente se,  $\beta$  é da forma

(I)  $\beta(s) = (\beta_1(s), 0, \beta_3(s))$ , onde

$$\begin{cases} az_0(\beta_1'x_0 + \beta_3'z_0) = 0, \\ cy_0(\beta_3\beta_1' - \beta_1\beta_3') + a\beta_1(\beta_3'x_0 - \beta_1'z_0) + by_0\beta_1' = \frac{y_0(\beta_3''\beta_1' - \beta_1''\beta_3')}{2(\beta_1'^2 + \beta_3'^2 - (\beta_1'x_0 + \beta_3'z_0)^2)}. \end{cases} \quad (2.25)$$

ou

(II)  $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), 0)$ , onde

$$\begin{cases} az_0(\beta_1'x_0 + \beta_2'y_0) = 0, \\ c(\beta_1\beta_2' - \beta_2\beta_1') - a(\beta_1'\beta_1 + \beta_2'\beta_2) + \frac{b}{z_0}(\beta_1'y_0 - \beta_2'x_0) = \frac{\beta_1''\beta_2' - \beta_2''\beta_1'}{2(\beta_1'^2 + \beta_2'^2 - (\beta_1'x_0 + \beta_2'y_0)^2)}. \end{cases} \quad (2.26)$$

onde  $L(t)$  é um movimento homotético helicoidal,  $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s))$  é uma curva do  $\mathbb{R}^3$ ,  $w = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $|w| = 1$ .

**Prova do Teorema 2.7:** Dado as condições acima,  $X$  é uma solução do FCM se e só se,

$$\langle \sigma'(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle = H.$$

Considere  $\Gamma(t)$  e  $\Gamma'(0)$  tais como em (2.10), assim como  $\Theta'(0) = b(0, 0, 1)$ ,  $\sigma'(0) = c$ . Usando que  $\langle x, y \wedge z \rangle = \langle x \wedge y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$  e que

$$\beta' \wedge w = (\beta_2'z_0 - \beta_3'y_0, \beta_3'x_0 - \beta_1'z_0, \beta_1'y_0 - \beta_2'x_0),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle &= a(-y_0(\beta'_2 z_0 - \beta'_3 y_0) + x_0(\beta'_3 x_0 - \beta'_1 z_0)) \\
&= az_0(-\beta'_1 x_0 - \beta'_2 y_0 - \beta'_3 z_0) \\
&= -az_0 \langle \beta', w \rangle = 0; \\
\langle \Gamma'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle &= a(-\beta_2(\beta'_2 z_0 - \beta'_3 y_0) + \beta_1(\beta'_3 x_0 - \beta'_1 z_0)) \\
&= a(x_0(\beta'_3 \beta_1) + y_0(\beta'_3 \beta_2) + z_0(-\beta'_1 \beta_1 - \beta'_2 \beta_2)) \\
&= a(x_0 \beta'_3 \beta_1 + y_0 \beta'_3 \beta_2 + z_0(\beta'_3 \beta_3 - \langle \beta', \beta \rangle)) \\
&= a\beta'_3 \langle \beta, w \rangle - az_0 \langle \beta', \beta \rangle; \\
\langle \Theta'(0), \beta' \wedge w \rangle &= b(\beta'_1 y_0 - \beta'_2 x_0).
\end{aligned}$$

Por outro lado,  $\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle = \langle \beta'' \wedge \beta', w \rangle$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle L'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle &= \frac{\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle}{2(|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2)} \\
&= \langle \sigma'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle + \langle \Gamma'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle + \langle \Theta'(0), \beta' \wedge w \rangle \\
&= c\langle \beta \wedge \beta', w \rangle + a\beta'_3 \langle \beta, w \rangle - z_0 \langle \beta', \beta \rangle + b(\beta'_1 y_0 - \beta'_2 x_0),
\end{aligned}$$

donde

$$c\langle \beta \wedge \beta', w \rangle + a\beta'_3 \langle \beta, w \rangle - az_0 \langle \beta', \beta \rangle + b(\beta'_1 y_0 - \beta'_2 x_0) = \frac{\langle \beta'' \wedge \beta', w \rangle}{2(|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2)}.$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar dois casos, sendo eles **(I)**  $\beta(s) = (\beta_1(s), 0, \beta_3(s))$  e **(II)**  $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), 0)$ .

**(I)**  $\beta(s) = (\beta_1(s), 0, \beta_3(s))$ . Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} az_0(\beta'_1 x_0 + \beta'_3 z_0) = 0, \\ cy_0(\beta_3 \beta'_1 - \beta_1 \beta'_3) + a\beta_1(\beta'_3 x_0 - \beta'_1 z_0) + by_0 \beta'_1 = \frac{y_0(\beta''_3 \beta'_1 - \beta''_1 \beta'_3)}{2(\beta_1'^2 + \beta_3'^2 - (\beta'_1 x_0 + \beta'_3 z_0)^2)}. \end{cases}$$

**(II)**  $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), 0)$ . Assim obtemos

$$\begin{cases} az_0(\beta'_1 x_0 + \beta'_2 y_0) = 0, \\ c(\beta_1 \beta'_2 - \beta_2 \beta'_1) - a(\beta'_1 \beta_1 + \beta'_2 \beta_2) + \frac{b}{z_0}(\beta'_1 y_0 - \beta'_2 x_0) = \frac{\beta''_1 \beta'_2 - \beta''_2 \beta'_1}{2(\beta_1'^2 + \beta_2'^2 - (\beta'_1 x_0 + \beta'_2 y_0)^2)}. \end{cases}$$

Em ambos os casos, temos  $w = (x_0, y_0, z_0)$  e  $|w| = 1$ .

□

Na demonstração do último teorema, escolhamos o eixo-Z como o eixo de rotação, porém, poderíamos escolher outro eixo sem complicações. Neste caso, haveria apenas algumas mudanças nos termos expressados. Por exemplo, se tivéssemos escolhido o eixo-X como nosso eixo de rotação, obteríamos as expressões apresentadas em [9].

Note que não existem superfícies cilíndricas  $X(s, u) = \beta(s) + uw(s)$  não triviais,  $\beta$  p.c.a., que apenas rotacionam, isto é,  $a \neq 0$  e  $b = 0 = c$ . Com efeito, suponha que tal superfície exista e que  $\langle \beta', w \rangle = 0$ . Temos que, pelo FCM,

$$\Gamma'(0)\beta(s) + u\Gamma'(0)w = H(p)N(p) = \frac{\beta''(s)}{2}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Portanto  $w = (0, 0, 1)$ . Agora aplicando as coordenadas  $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s))$ , obtemos

$$2a(-\beta_2, \beta_1, 0) = (\beta_1'', \beta_2'', 0).$$

Assim, o seguinte sistema deve ser satisfeito

$$\begin{cases} \beta_1'' = -2a\beta_2, \\ \beta_2'' = 2a\beta_1. \end{cases}$$

Agora, pelo Teorema 2.7, temos que

$$\begin{aligned} -2a\langle \beta', \beta \rangle &= \langle \beta'' \wedge \beta', w \rangle \\ &= \beta_1''\beta_2' - \beta_2''\beta_1' \\ &= 2a(-\beta_2\beta_2' - \beta_1\beta_1') \\ &= -2a\langle \beta', \beta \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, a solução é independente da curva  $\beta(s)$ , o que contraria o fato de existir superfícies cilíndricas que não satisfazem o FCM.

Podemos ainda, estender essa afirmação ao dizer que não existem superfícies cilíndricas não triviais que rotacionam e transladam, assim como não existem superfícies cilíndricas não triviais que rotacionam e dilatam. De fato, considerando apenas  $c = 0$  obtemos

$$\Gamma'(0)\beta(s) + u\Gamma'(0)w + \Theta'(0) = H(p)N(p) = \frac{\beta''(s)}{2},$$

e analogamente ao caso anterior, chegamos em

$$2a(-\beta_2, \beta_1, 0) + (0, 0, 2b) = (\beta_1'', \beta_2'', 0),$$

o que implica em  $b = 0$ , resultando assim no caso anterior. Por outro lado, considerando apenas  $b = 0$ ,

$$\sigma'(0)\beta(s) + u\sigma'(0)w + \Gamma'(0)\beta(s) + u\Gamma'(0)w = H(p)N(p) = \frac{\beta''(s)}{2},$$

$\forall u \in \mathbb{R}$ , o que implica que  $\sigma'(0)w + \Gamma'(0)w = 0$ . Portanto,

$$(cId + \Gamma'(0))w = 0,$$

que, em termos de matriz, fica

$$\begin{pmatrix} c & -a & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cw_1 - aw_2 \\ aw_1 + cw_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja,  $w = (0, 0, 0)$ . Porém, isso implica que  $X(s, u)$  se degenera a uma curva, o que contradiz o fato de  $X$  ser uma superfície. Com essas afirmações, é possível concluir que  $a = 0$ .

A seguir iremos classificar as soluções onde  $X$  é uma superfície de revolução. O próximo teorema nos dará mais liberdade em achar soluções não-triviais. Inclusive, o cilindro e a esfera são exemplos não-triviais.

## 2.2 Superfícies de Rotação

Mudaremos nosso foco agora, para as superfícies de rotação. Tais superfícies são obtidas ao escolher uma curva, chamada de geratriz, e rotacionar essa curva em torno de um eixo definido. Aqui, chamaremos a curva geratriz de  $\alpha$  e rotacionaremos tal curva em torno do eixo-Z.

**Definição 2.8:** Uma superfície  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita de *rotação* gerada por  $\alpha(s) = (\phi(s), 0, \psi(s))$ , se  $X$  pode ser escrita como

$$X(u, s) = (\phi(s)\cos(u), \phi(s)\sen(u), \psi(s)), \quad (u, s) \in U, \quad (2.27)$$

onde  $\phi(s)$  e  $\psi(s)$  são funções reais diferenciáveis.

Tendo isso, um calculo direto de  $X_u$  e  $X_s$  nos mostra que  $N = \frac{(\psi' \cos(u), \psi' \sin(u), -\phi')}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}$ :

$$\begin{aligned} E &= \phi^2, & F &= 0, & G &= \phi'^2 + \psi'^2, \\ e &= \frac{-\phi\psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}, & f &= 0, & g &= \frac{\phi''\psi' - \phi'\psi''}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}, \end{aligned}$$

e finalmente podemos concluir que  $H(u, s) = \frac{\phi(\phi''\psi' - \phi'\psi'') - \psi'(\phi'^2 + \psi'^2)}{2\phi(\phi'^2 + \psi'^2)}$ .

**Teorema 2.9:** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície de revolução satisfazendo

$$X(u, s) = (\phi(s)\cos(u), \phi(s)\sin(u), \psi(s)),$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  são funções diferenciáveis reais. Considere  $X^t(s, u) = L(t)X(s, u)$  uma solução autossimilar do FCM com condição inicial  $X$  e  $L(t)$  é um movimento homotético helicoidal no  $\mathbb{R}^3$ . Então  $X$  é condição inicial do FCM se, e somente se, a curvatura  $k(s)$  da curva  $\alpha(s) = (\phi(s), 0, \psi(s))$  satisfaz

$$k = \frac{1}{|\alpha'|} \left( 2c(\psi'\phi - \phi'\psi) - 2b\phi' + \frac{\psi'}{\phi} \right). \quad (2.28)$$

**Prova:** Considere  $\alpha(s) = (\phi(s), 0, \psi(s))$ . Assim temos que

$$X(u, s) = (\phi(s)\cos(u), \phi(s)\sin(u), \psi(s)).$$

Então,  $X$  é uma solução do FCM se, e só se,

$$\langle \sigma'(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle = H,$$

onde  $\Gamma(t)$  e  $\Gamma'(0)$  são tais como (2.10), assim como  $\Theta'(0) = b(0, 0, 1)$ ,  $\sigma'(0) = c$ . Assim,

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle &= \langle (c\phi\cos(u) - a\phi\sin(u), c\phi\sin(u) + a\phi\cos(u), c\psi + b), N \rangle \\ &= c(\psi'\phi\cos^2(u) + \psi'\phi\sin^2(u)) - \phi'(c\psi + b) \\ &= c(\psi'\phi(\cos^2(u) + \sin^2(u)) - \phi'\psi) - b\phi' \\ &= c(\psi'\phi - \phi'\psi) - b\phi'. \end{aligned}$$

Portanto, considerando que a curvatura de  $\alpha(s) = (\phi(s), 0, \psi(s))$  é dada por

$$k(s) = \frac{\phi''(s)\psi'(s) - \phi'(s)\psi''(s)}{(\phi'^2(s) + \psi'^2(s))^{\frac{3}{2}}},$$

podemos concluir que

$$c(\psi'\phi - \phi'\psi) - b\phi' = \frac{\phi(\phi''\psi' - \phi'\psi'') - \psi'(\phi'^2 + \psi'^2)}{2\phi(\phi'^2 + \psi'^2)},$$

e ao colocar a curvatura  $k$ , resulta em

$$2\phi[c(\psi'\phi - \phi'\psi) - b\phi'] = \phi(k|\alpha'|) - \psi'.$$

Portanto

$$k = \frac{1}{|\alpha'|} \left( 2c(\psi'\phi - \phi'\psi) - 2b\phi' + \frac{\psi'}{\phi} \right),$$

como queríamos. □

Observe que a solução do FCM não depende do termo “ $a$ ” relacionado com a rotação, o que é coerente com o fato de que se rotacionarmos uma superfície de rotação em torno do próprio eixo ela é invariante, isto é,  $\Gamma(t)X = X$ , onde  $\Gamma(t)$  é dada por (2.10).

Se considerarmos  $\alpha(s) = (\phi(s), 0, \psi(s))$  p.c.a, combinando (2.28) com o fato que  $\phi'^2 + \psi'^2 = 1$  implica em  $k = \frac{\phi''}{\psi} = \frac{-\psi''}{\phi}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \phi'' &= \psi \left( 2c(\psi'\phi - \phi'\psi) - 2b\phi' + \frac{\psi'}{\phi} \right), \\ \psi'' &= -\phi \left( 2c(\psi'\phi - \phi'\psi) - 2b\phi' + \frac{\psi'}{\phi} \right). \end{aligned}$$

Em [9], são apresentados algumas soluções numéricas das duas equações acima, atribuindo condições iniciais de  $\phi(0)$ ,  $\psi(0)$ , suas derivadas, assim como escolhendo  $b$  e  $c$ . Fizemos uma análise semelhante no contexto das superfícies cilíndricas (Figura 2.5 do Exemplo 2.14).

## 2.3 Exemplos e suas Condições Iniciais

Para finalizar o presente capítulo, vamos analisar algumas ocorrências particulares dos Teoremas 2.5, 2.7 e 2.9.

**Exemplo 2.10:** Considerando uma superfície regrada não-cilíndrica, dada pelo Teorema 2.5, temos que  $w(s)$  é uma geodésica de  $S^1$  (o círculo unitário do plano), portanto curva plana, e  $\beta(s)$  é ortogonal e esse plano, donde uma reta. Assim, temos que  $w(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$  e  $\beta(s) = (0, 0, s)$ , o que implica que  $X$  é uma parametrização do helicóide (Figura 2.1). Por consequência, mostramos que o helicóide é uma superfície mínima e além disso a única superfície mínima regrada não cilíndrica.

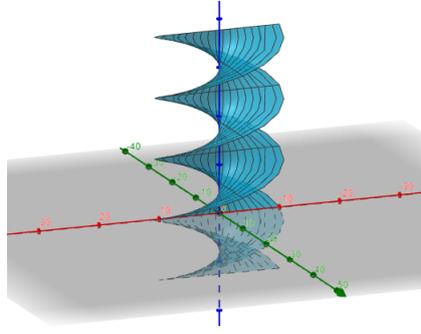


Figura 2.1 Helicóide

**Exemplo 2.11:** Considere agora, a esfera de raio  $r_0$  centrada no ponto  $(0, 0, z_0)$  (Figura 2.2) gerada pela curva  $\alpha(s) = (r_0 \cos(s), 0, r_0 \sin(s) + z_0)$ . Neste caso, a curvatura vale  $k = \frac{-1}{r_0}$ , e portanto, pelo Teorema 2.9, considerando  $\phi(s) = r_0 \cos(s)$  e  $\psi(s) = r_0 \sin(s) + z_0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{1}{|\alpha'|} \left( 2c(\psi' \phi - \phi' \psi) - 2b\phi' + \frac{\psi'}{\phi} \right) \\
 &= \frac{1}{r_0} (2c(r_0^2 \cos^2(s) + r_0^2 \sin^2(s) + z_0 r_0 \sin(s)) + 2b r_0 \sin(s) + 1) \\
 &= \frac{1}{r_0} (2c r_0^2 + 2c z_0 r_0 \sin(s) + 2b r_0 \sin(s) + 1) \\
 &= \frac{1}{r_0} (2c r_0^2 + 2r_0 \sin(s)(b + c z_0) + 1) \\
 &= \frac{-1}{r_0}.
 \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que  $b = -c z_0$  e  $c = \frac{-1}{r_0^2}$ .

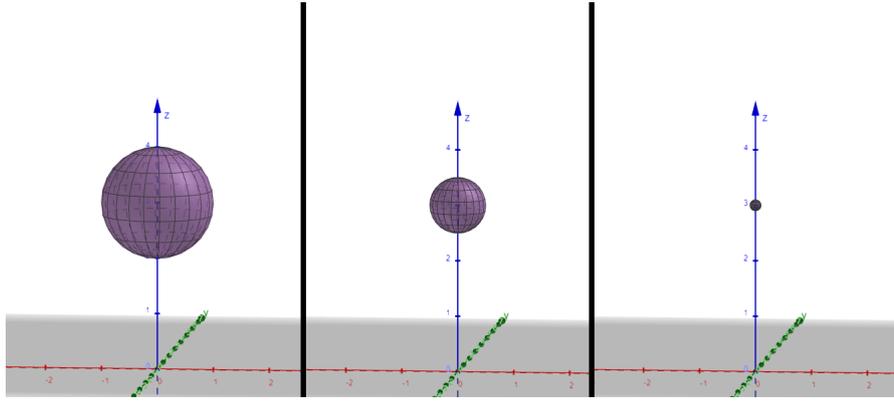


Figura 2.2 Esfera

**Exemplo 2.12:** Como no Exemplo 2.11, o cilindro de raio  $r_0$  (Figura 2.3) é outro bom exemplo, tanto do Teorema 2.9 quanto do Teorema 2.7, por ser uma superfície tanto de rotação quanto regradada cilíndrica.

Pelo Teorema 2.9, podemos considerar  $\alpha(s) = (r_0, 0, s)$ . Por  $\alpha$  ser uma reta, obtemos  $k(s) = 0$ . Portanto, a seguinte equação deve ser satisfeita, onde  $\phi(s) = r_0 \neq 0$ ,  $\psi(s) = s$ ,

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{|\alpha'|} \left( (2c(\psi'\phi - \phi'\psi) - 2b\phi' + \frac{\psi'}{\phi}) \right) \\ &= 2cr_0 + \frac{1}{r_0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que  $c = \frac{-1}{2r_0^2}$ .

Pelo Teorema 2.7, considere  $\beta(s) = (r_0 \cos(s), r_0 \sin(s), 0)$  e  $w = (0, 0, 1)$ . Assim, temos que  $\langle \beta', w \rangle = 0$ . Portanto a primeira equação do teorema é satisfeita e, além disso, vários termos se anulam na segunda equação, resultando em

$$\begin{aligned} c &= \frac{\langle \beta'' \wedge \beta', w \rangle}{2r_0^2 \langle \beta \wedge \beta', w \rangle} \\ &= \frac{-\langle \beta \wedge \beta', w \rangle}{2r_0^2 \langle \beta \wedge \beta', w \rangle} \\ &= \frac{-1}{2r_0^2}, \end{aligned}$$

o que condiz com a aplicação anterior.

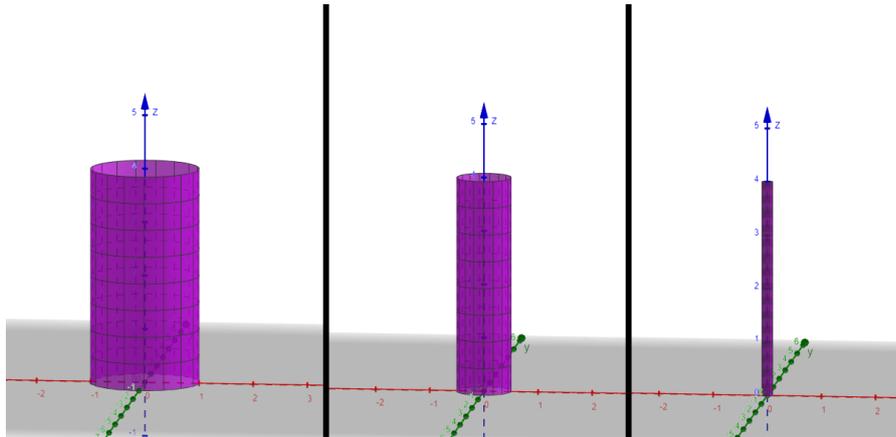


Figura 2.3 Cilindro

**Exemplo 2.13:** Consideremos agora, uma superfície cilíndrica que apenas translada. Seja  $\beta = (s, 0, \beta_3(s))$ ,  $w = (0, 1, 0)$  e  $a = 0 = c$ . Pelo Teorema 2.7, basta satisfazer  $b = \frac{\langle \beta'' \wedge \beta', w \rangle}{2|\beta'|^2}$  que, em coordenadas, resulta em

$$\frac{\beta_3''}{\beta_3'^2 + 1} = 2b.$$

Podemos integrar uma vez para determinar que  $\beta_3'(s) = \operatorname{tg}(2bs + c_1)$ , e integrar novamente para determinarmos que

$$\beta(s) = \frac{\ln(|\cos(2bs + c_1)|)}{2b} + c_2,$$

resultando na parametrização  $X(s, u) = \left( s, u, \frac{\ln(|\cos(2bs + c_1)|)}{2b} + c_2 \right)$  (Figura 2.4). Aqui,  $c_1$  e  $c_2$  são constantes relacionadas às condições iniciais de  $\beta$ , e  $b = \sigma'(0)$  é constante relacionada com a translação do FCM.

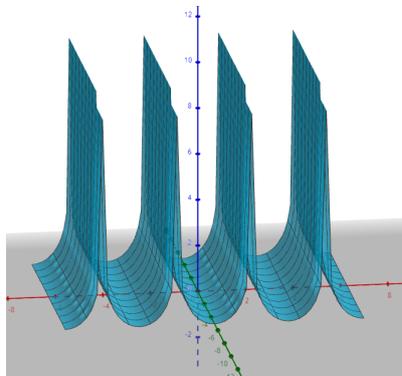


Figura 2.4 Ceifador (Grim Reaper)

**Exemplo 2.14:** Considere uma superfície cilíndrica que apenas dilata ( $a = b = 0$  e  $c \neq 0$ ). Utilizando  $\beta(s) = (f(s), s, 0)$  e  $w = (0, 0, 1)$ , pelo Teorema 2.7, obtemos

$$2c(f(s) - sf'(s)) = \frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2},$$

ou então,

$$2cr(s)^2 = \frac{r''(s)r(s) - 2r'(s)^2 - r(s)^2}{r'(s)^2 + r(s)^2}$$

considerando coordenadas polares  $\beta(s) = (r(s)\cos(s), r(s)\sin(s), 0)$ . Em ambos os casos, escolhendo as condições iniciais  $\beta(0) = (1, 0, 0)$  e  $\beta'(0) = (0, 1, 0)$ , obtemos geometricamente as seguintes representações para  $\beta(s)$ :

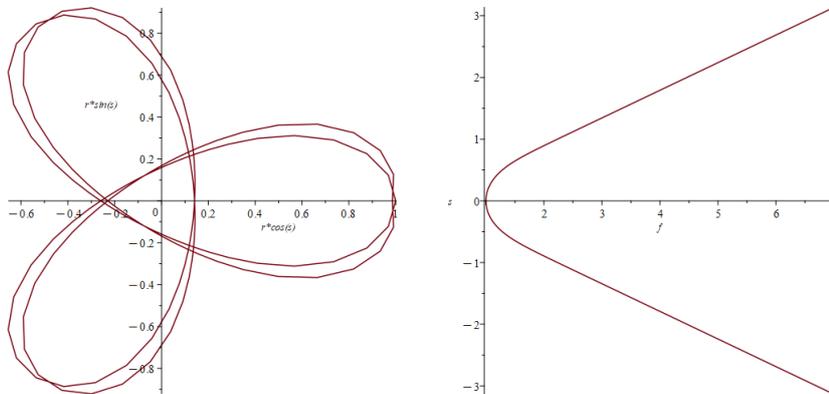


Figura 2.5 Casos onde  $c < 0$  (à esquerda) e  $c > 0$  (à direita)

# Capítulo 3

## FCM em Superfícies Helicoidais

Neste capítulo, estudaremos o FCM aplicado às superfícies helicoidais, que podem ser geradas a partir de uma curva contida no plano-XY. O exemplo mais simples (e que inspira o nome dessa família de superfícies) é o próprio helicóide, visto no capítulo anterior (que é uma superfície mínima).

As propriedades relevantes para o FCM dessas superfícies serão descritas a partir das características de sua curva geradora como, por exemplo, sua curvatura. Primeiramente vamos descrever as superfícies helicoidais em si e, em seguida, sua evolução autossimilar pelo FCM. Posteriormente, veremos alguns casos especiais de quando a superfície possui curvatura média nula e curvatura constante.

### 3.1 Superfícies Helicoidais

Uma superfície helicoidal é gerada ao escolher uma curva plana e aplicar a esta curva um movimento helicoidal, isto é, uma rotação composta de uma translação paralela ao eixo de rotação. Mais precisamente,

**Definição 3.1:** Dado  $I \subset \mathbb{R}$ , intervalo aberto, considere  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(s) = (x(s), y(s), 0)$ ,  $s \in I$ , uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Dizemos que  $X$  é uma *superfície helicoidal de pico*  $h \in \mathbb{R}^+$ , gerada por  $\beta$ , se  $X$  é parametrizada por

$$X(s, t) = (x(s)\cos(t) - y(s)\sin(t), x(s)\sin(t) + y(s)\cos(t), ht), (s, t) \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

onde  $U$  é um subconjunto aberto não-vazio de  $\mathbb{R}^2$ .

Para uma maior simplicidade nos cálculos, utilizaremos a notação de números complexos

$$X(s, t) = (e^{it} \alpha(s), ht), (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.2)$$

onde  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  é tal que,  $e^{it}(x, y) = (x \cos(t) - y \sin(t), x \sin(t) + y \cos(t))$  é a operação de rotação similar a multiplicação de números complexos. Assim, em particular,  $i(x, y) = (-y, x)$ .

Note que, no caso onde  $h = 0$ , obtemos que a superfície  $X$  está contida no plano  $z = 0$ . Por conta disso, sempre estaremos focando no caso  $h > 0$ .

Sejam  $\vec{t}(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds}$  e  $\vec{n}(s) = i\vec{t}(s)$ , onde  $s \in I$ , os vetores tangente e normal a  $\alpha(s)$ , respectivamente. Considere as funções reais,  $\tau(s) = \langle \alpha(s), \vec{t}(s) \rangle$  e  $\nu(s) = \langle \alpha(s), \vec{n}(s) \rangle$ . Temos que, pela regra do produto, tais funções satisfazem

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = 1 + k\nu, \\ \frac{d\nu}{ds} = -k\tau, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $k(s) = \left\langle \frac{d^2\alpha(s)}{ds^2}, \vec{n}(s) \right\rangle$  é a curvatura de  $\alpha$ . Além disso,

$$\alpha = (\tau + i\nu)\vec{t} \quad e \quad r^2 := |\alpha|^2 = \tau^2 + \nu^2. \quad (3.4)$$

Com a notação estabelecida, podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $X$  e, com isso, a curvatura média. Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= (e^{it}\vec{t}, 0), & \frac{dX}{dt} &= (ie^{it}\alpha, h), & N &= \frac{(-he^{it}\vec{n}, \tau)}{\sqrt{h^2 + \tau^2}}, \\ \frac{d^2X}{ds^2} &= (ke^{it}\vec{n}, 0), & \frac{d^2X}{dsdt} &= (e^{it}\vec{n}, 0), & \frac{d^2X}{dt^2} &= (-e^{it}\alpha, 0), \end{aligned} \quad (3.5)$$

assim podemos calcular a curvatura média de  $X$  usando que:

$$\begin{aligned} E &= 1, & F &= -\nu, & G &= r^2 + h^2, \\ e &= \frac{-hk}{\sqrt{h^2 + \tau^2}}, & f &= \frac{-h}{\sqrt{h^2 + \tau^2}}, & g &= \frac{h\nu}{\sqrt{h^2 + \tau^2}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

resultando em

$$H(s, t) = -\frac{h[k(r^2 + h^2) + \nu]}{2(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.7)$$

Tendo isso, podemos afirmar que a curvatura de uma superfície helicoidal pode satisfazer a seguinte propriedade:

**Teorema 3.2:** Para cada função diferenciável  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h > 0$ , existe uma superfície helicoidal completa imersa no  $\mathbb{R}^3$ , de pico  $h$ , tal que a curvatura média satisfaz  $H = \Psi(\tau, \nu)$ .

**Prova:** Inicialmente, observamos que, para cada função diferencial  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^2$  e ângulo  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ , existe uma única curva imersa  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  passando por  $z_0$  e ângulo  $\theta_0$  cuja curvatura satisfaz  $k = \Phi(\tau, \nu)$ .

De fato, considere  $(\tau, \nu, \theta)$  como a única solução do sistema de EDO's

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = 1 + \Phi(\tau, \nu)\nu, \\ \frac{d\nu}{ds} = -\Phi(\tau, \nu)\tau, \\ \theta' = \Phi(\tau, \nu), \end{cases} \quad (3.8)$$

com condições iniciais  $\tau(0) + i\nu(0) = e^{-i\theta_0}z_0$ ,  $\theta = \theta_0$ . Defina  $\alpha = (\tau + i\nu)e^{i\theta}$ . Como

$$\frac{d}{ds}|\alpha| = \frac{d}{ds}\sqrt{\tau^2 + \nu^2} = \frac{\tau\tau' + \nu\nu'}{\sqrt{\tau^2 + \nu^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \nu^2}} \leq 1, \quad (3.9)$$

temos que a solução esta bem definida em todo  $\mathbb{R}$  (a solução não pode explodir “blow up” em tempo finito). Além disso,

$$\alpha' = (\tau' + i\nu')e^{i\theta} + i\theta'(\tau + i\nu)e^{i\theta} = e^{i\theta}, \quad (3.10)$$

assim já temos que  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco,  $\vec{t} = e^{i\theta}$  e  $k = \Phi(\tau, \nu)$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \vec{t} \rangle &= \langle (\tau + i\nu)e^{i\theta}, e^{i\theta} \rangle = \tau, \\ \langle \alpha, \vec{n} \rangle &= \langle (\tau + i\nu)e^{i\theta}, ie^{i\theta} \rangle = \nu, \end{aligned}$$

o que conclui a existência e unicidade dessa curva.

Agora, note que  $k$  pode ser escrito em função de  $\tau$  e  $\nu$ , e  $H$  pode ser escrita em função de  $k$ ,  $\tau$  e  $\nu$ . Assim, a arbitrariedade de  $k$  garante a arbitrariedade de  $H$ , o que conclui o teorema.  $\square$

## 3.2 Fluxo Helicoidal

Nesta seção, iremos estudar o FCM de superfícies helicoidais com o objetivo é encontrar soluções autossimilares. Utilizando a notação estabelecida, mostraremos características que a curva geradora da superfície deve satisfazer para termos o FCM desejado. Primeiramente, olharemos o caso onde a superfície  $X$  apenas dilata, ou seja, estamos considerando (1.4) onde  $b$  e  $A$  são nulos, isto é,  $c\langle X(p), N(p) \rangle = H(p)$ . Assim

$$c \left\langle (e^{it} \alpha, ht), \frac{(-he^{it} \vec{n}, \tau)}{\sqrt{h^2 + \tau^2}} \right\rangle = \frac{-h(k(r^2 + h^2) + v)}{2(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que resulta em

$$\frac{c(-v + t\tau)}{\sqrt{h^2 + \tau^2}} = \frac{-(k(r^2 + h^2) + v)}{2(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

portanto, a constante  $c$  é dada por

$$c = \frac{k(r^2 + h^2) + v}{2(\tau^2 + h^2)(v - t\tau)}.$$

Porém, como  $c$  deve ser uma constante para quaisquer  $s, t$  e os termos  $\tau, v, k$  dependem apenas de  $s$ , podemos concluir que  $t\tau = 0 \forall s$ , e assim  $\tau \equiv 0$ , isto é,  $\langle \alpha, \vec{t} \rangle \equiv 0$ , logo  $|\alpha| = r$  é constante. Portanto,  $\alpha$  é uma circunferência de raio  $r$ , o que implica que  $X$  é um cilindro de raio  $r$ , que já foi estudado anteriormente.

Ao continuar a simplificação, chegamos também que  $r^2 = v^2$  e  $kv = -1$ . Com isso, obtemos que  $c$  é dada por

$$\begin{aligned} c &= \frac{k(v^2 + h^2) + v}{2h^2v} \\ &= \frac{kv^2 + kh^2}{2h^2v} + \frac{v}{2h^2v} \\ &= \frac{-1}{2h^2} - \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{2h^2} \\ &= \frac{-1}{2r^2}, \end{aligned}$$

que é compatível com os resultados anteriores. Analogamente, se uma superfície helicoidal dilata e além disso rotaciona ou translada, também teremos que  $t\tau = 0 \forall s$ , resultando em  $\tau \equiv 0$ , e retornaríamos ao caso anterior.

Quanto à rotação e translação da superfície, por conta da simetria helicoidal da superfície devida a sua construção, essas transformações são equivalentes a menos da constante  $\frac{-1}{h}$  tal que  $h > 0$ . Mais precisamente, se  $X$  é uma superfície helicoidal, então  $X + \Theta(w) = \Gamma\left(\frac{-w}{h}\right)X$ . Para isto, note que

$$X(s, t) + \Theta(w) = (e^{it}\alpha(s); ht + w) = (e^{i(\bar{t} - \frac{w}{h})}\alpha(s); h\bar{t}) = \Gamma\left(\frac{-w}{h}\right)X(s, \bar{t}).$$

Devido a isso, podemos escolher o caso no qual a superfície apenas rotaciona.

Considerando a matriz  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  e aplicando na equação (1.4), obtemos

$\langle AX(p), N(p) \rangle = H(p)$ , isto é,

$$\left\langle \frac{1}{2}(ie^{it}\alpha, 0), \frac{(-he^{it}\vec{n}, \tau)}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} \right\rangle = \frac{-(k(r^2 + h^2) + v)}{2(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que, ao simplificarmos, resulta em

$$\frac{-h\tau}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} = \frac{-(k(r^2 + h^2) + v)}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou seja, a curvatura de  $\alpha$  é dada por

$$k = \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{r^2 + h^2}. \quad (3.11)$$

Por conseguinte, obtemos o seguinte sistema de EDO para  $\tau$  e  $v$

$$\begin{cases} \tau' = \frac{\tau^2 + h^2}{r^2 + h^2}(1 + \tau v), \\ v' = \frac{\tau v - \tau^2(\tau^2 + h^2)}{r^2 + h^2}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Note que  $s \rightarrow -(\tau(-s), v(-s))$  também é uma solução do sistema acima. Essa simetria será utilizada em alguns argumentos abaixo. Além disso, o sistema não possui pontos de equilíbrio. Com efeito, se supormos que existe um ponto de equilíbrio  $(\tau_0, v_0)$ , podemos

concluir de (3.12) que

$$\begin{cases} 0 = (\tau_0^2 + h^2)(1 + \tau_0 v_0) \\ 0 = \tau_0 v_0 - \tau_0^2(\tau_0^2 + h^2). \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos que  $\tau_0 v_0 = -1$ . Com isso, obtemos pela segunda equação que  $-1 = \tau_0^2(\tau_0^2 + h^2) > 0$ , uma contradição.

A seguir, provaremos uma série de lemas (Lemas 3.3.1 – 3.3.9) que comporão a demonstração de um dos principais resultados dessa seção (Teorema 3.3).

**Lema 3.3.1:** As funções  $\tau(s)$  e  $v(s)$  dadas por (3.12) possuem limite (possivelmente infinito) à medida que  $s \rightarrow \pm\infty$ .

**Prova:** Se  $\tau(s) = 0$ , então  $\tau'(s) = \frac{h^2}{v(s)^2 + h^2} > 0$ . Logo  $\tau$  possui, no máximo, uma raiz  $s_\tau$  e, além disso,  $\tau(s) < 0$  quando  $s < s_\tau$ , e  $\tau(s) > 0$  quando  $s > s_\tau$ .

Se  $k(s) = 0$ , derivando a equação (3.11) e usando que  $\tau'(s) = 1$ ,  $v'(s) = 0$  e  $\tau(s)v(s) \geq 0$ , temos que  $k'(s) > 0$ . Portanto,  $k$  também possui, no máximo, uma raiz  $s_k$  e  $k(s) < 0$  quando  $s < s_k$  e  $k(s) > 0$  quando  $s > s_k$ .

Como  $v' = -k\tau$ , então  $v$  tem no máximo dois extremos e, assim, tem um limite (possivelmente infinito) em cada direção.

Se  $\tau'(s) = 0$ , então  $\tau(s)v(s) = -1 = k(s)v(s)$ . Derivando  $\tau' = 1 + kv$ , obtemos que  $\tau''(s) = \frac{-(k'(s) + k^2(s)\tau^2(s))}{\tau(s)}$ . Como  $k'(s) + k^2(s)\tau^2(s) > 0$ ,  $\tau$  tem um mínimo local em  $s$  caso  $\tau(s) < 0$  e um máximo local em  $s$  caso  $\tau(s) > 0$ . Isto significa que  $\tau$  tem no máximo dois extremos e, portanto, tem um limite (possivelmente infinito) em cada direção. □

O Lema 3.3.1 nos garante que podemos aplicar o limite nas funções  $\tau$  e  $v$  sem maiores problemas. O próximo lema analisa o comportamento do quociente  $v/\tau$ .

**Lema 3.3.2:** Sejam  $\tau(s)$  e  $v(s)$  dadas por (3.12). Então razão  $\frac{v(s)}{\tau(s)}$  decresce sempre que  $v(s) > 0$  e  $\tau(s) > 0$  simultaneamente.

**Prova:** Um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \frac{v}{\tau} &= \frac{v'\tau - v\tau'}{\tau^2} \\
&= \frac{\left(\frac{\tau v - \tau^2(\tau^2 + h^2)}{r^2 + h^2}\right)\tau - v\left(\frac{\tau^2 + h^2}{r^2 + h^2}(1 + \tau v)\right)}{\tau^2} \\
&= \frac{(\tau v - \tau^2(\tau^2 + h^2))\tau - v(\tau^2 + h^2)(1 + \tau v)}{\tau^2(r^2 + h^2)} \\
&= -\frac{\tau^5 + \tau^3 v^2 + h^2 \tau^3 + h^2 \tau v^2 + h v^2}{\tau^2(r^2 + h^2)},
\end{aligned}$$

o que justifica a afirmação. □

**Lema 3.3.3:** À medida que o parâmetro  $s$  tende ao infinito a função  $v(s)$  tende ao infinito, isto é, mais precisamente  $\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = -\infty$  e  $\lim_{s \rightarrow -\infty} v(s) = +\infty$ .

**Prova:** Suponhamos que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} v$  seja finito. Então  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau$  não pode ser finito (pois o sistema (3.12) não possui ponto de equilíbrio), mas isso implica que, por (3.11), a curvatura  $k$  vai para o infinito e, por consequência de  $v' = -k\tau$ , segue-se que  $v$  é infinito, uma contradição.

Suponha  $\lim_{s \rightarrow +\infty} v = \infty$ . Se  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau = -\infty$ , então, por (3.11),  $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = -\infty$ , donde

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} v' = \lim_{s \rightarrow +\infty} -k\tau = -\infty,$$

uma contradição. Se  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau$  é finito, então por (3.11) existe  $s_0$  tal que  $k(s_0) < 0$ , e como  $v' = -k\tau > 0$ , temos que  $\tau(s_0) > 0$ . Pelo Lema 3.3.2, existe uma constante  $C$  tal que  $v \leq C\tau$ , portanto, necessariamente  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau = \infty$ , uma contradição. Finalmente, supondo que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau = \infty$ , existe  $s_0$  tal que  $\tau(s_0) > 0$  e  $v(s_0) > 0$  e, pelo Lema 3.3.2, existe uma constante  $C$  tal que  $v \leq C\tau$  que, por (3.11), implica que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = \infty$  e portanto

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} v' = \lim_{s \rightarrow +\infty} -k\tau = -\infty,$$

outra contradição.

Como o limite é garantido pelo Lema 3.3.1, apenas nos resta que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} v = -\infty$ . Pela simetria de  $(\tau, v)$  mencionada, temos que  $\lim_{s \rightarrow -\infty} v = +\infty$ .

□

**Lema 3.3.4:** Os limites  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)$  e  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)$  são finitos.

**Prova:** Se  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau = \infty$ , então pelo Lema 3.3.3, existe  $s_0$  tal que  $1 + \tau(s_0)v(s_0) < 0$ , o que implica  $\tau'(s_0) < 0$  por (3.12), uma contradição. De forma similar, se  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau = -\infty$ , então existe  $s_0$  tal que  $1 + \tau(s_0)v(s_0) > 0$ , o que implica  $\tau'(s_0) > 0$  por (3.12), outra contradição. Portanto, como o limite é garantido pelo Lema 3.3.1, esse limite é finito. Pela simetria de  $(\tau, v)$  mencionada, temos que o limite  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau$  também é finito.

□

**Lema 3.3.5:** A curvatura  $k(s)$  possui os seguintes limites no infinito

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0^+ \quad e \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} k(s) = 0^-.$$

**Prova:** Um cálculo direto utilizando os dois lemas anteriores e (3.11) mostra que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} k &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{r^2 + h^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{\tau(\tau^2 + h^2)}{v} - 1}{\frac{\tau^2}{v} + v + h^2}, \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois o limite de  $\tau$  é finito em ambas as direções, e o limite de  $v$  é infinito em ambas as direções.

□

O lema seguinte afirma que a curva possui um único ponto mais próximo à origem, consistindo de duas componentes partindo desse ponto e tendendo ao infinito.

**Lema 3.3.6:** Os limites  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r(s)$  são infinitos. Além disso,  $r(s)$  possui um único mínimo global.

**Prova:** Os limites são consequências do Lema 3.3.3, pois, como  $r = \sqrt{\tau^2 + v^2}$ , então

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r(s) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\tau^2(s) + v^2(s)} = \infty.$$

Agora, como  $\frac{d}{ds} r^2 = 2\tau$  e, pelo Lema 3.3.1,  $\tau$  possui no máximo uma raiz, temos que  $r^2(s)$ , e portanto  $r(s)$ , possui um único mínimo global.

□

O próximo lema determina que os vetores  $\alpha(s)$  e  $\vec{t}(s)$  tornam-se cada vez mais ortogonais à medida que  $s \rightarrow \pm\infty$ .

**Lema 3.3.7:** O ângulo  $\delta$  entre  $\alpha(s)$  e  $\vec{t}(s)$  tende a  $\frac{\pi}{2}$ .

**Prova:** Note que  $\cos(\delta) = \left\langle \frac{\alpha}{r}, \vec{t} \right\rangle$ , donde segue-se dos Lemas 3.3.4 e 3.3.6 que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \cos(\delta(s)) &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \left\langle \frac{\alpha(s)}{r(s)}, \vec{t}(s) \right\rangle \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau(s)}{r(s)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portando,  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \delta = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \arccos\left(\frac{\tau(s)}{r(s)}\right) = \frac{\pi}{2}$

□

O seguinte lema nos diz que à medida que a curva se afasta da origem ela a espirala infinitas vezes.

**Lema 3.3.8:** Seja  $\phi(s)$  o ângulo de  $\alpha(s)$ , isto é,  $\alpha(s) = r(s)e^{i\phi(s)}$ . Então, o limite  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \phi(s)$  é infinito.

**Prova:** Pela identidade  $\phi = \theta + \arg(\tau + i\nu)$ , temos que  $\phi'(s) = k + \left(\frac{-\nu}{r^2} - k\right)$ . Pondo  $u = \ln(r)$ , obtemos que

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{du} \frac{du}{ds} = \frac{d\phi}{du} \frac{1}{r} \frac{dr}{ds},$$

o que resulta em

$$\frac{d\phi}{du} = r \frac{\frac{d\phi}{ds}}{\frac{dr}{ds}} = r \frac{-\nu}{r^2} = -\frac{\nu}{\tau},$$

que tende ao infinito em cada direção pelos Lemas 3.3.2., 3.3.3 e 3.3.4.

□

**Lema 3.3.9:** Os limites  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s)$  e  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \theta(s)$  são infinitos. Ou seja,  $\int_{s_0}^{\infty} k ds = +\infty$  e  $\int_{-\infty}^{s_0} k ds = -\infty$ .

**Prova:** O resultado segue da identidade  $\phi = \theta + \arg(\tau + i\nu)$ , do Lema 3.3.8 e do fato de que  $\arg(\tau + i\nu)$  possui limite finito em cada direção, pois  $\arg(\tau + i\nu) = \arctg\left(\frac{\nu}{\tau}\right)$  e a função  $\arctg(x)$  é limitada  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

□

Por fim, os Lemas 3.3.1 - 3.3.9 demonstram todas as propriedades descritas no seguinte resultado.

**Teorema 3.3:** Para cada  $h > 0$ , existe uma família a um parâmetro de superfícies helicoidais com pico  $h$ , que giram em torno de seu eixo helicoidal sob o FCM. As curvas geradoras correspondentes possuem um ponto mais próximo da origem e consistem em duas componentes propriamente mergulhadas que emergem desse ponto e se afastam estritamente para o infinito. Cada componente tem curvatura total infinita e espirala em infinitas circunferências ao redor da origem. A curvatura tende a 0 ao longo de cada componente e o limite do ângulo entre os vetores tangente e posição é  $\frac{\pi}{2}$ .

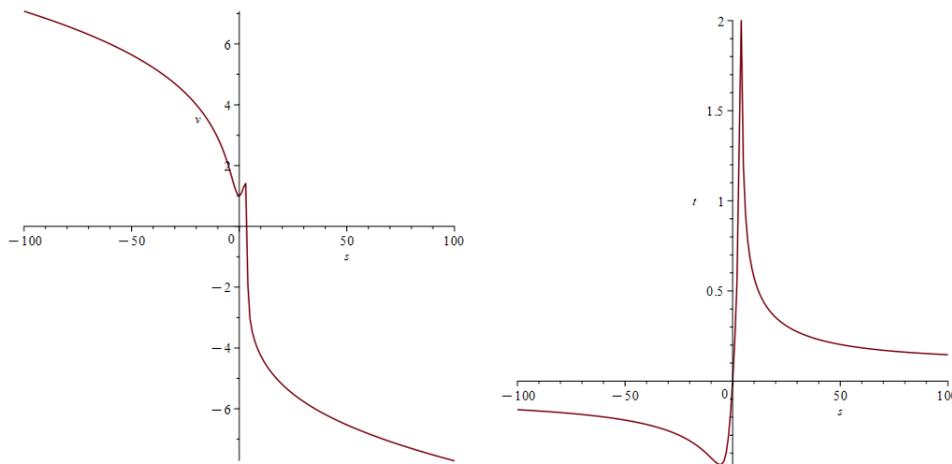


Figura 3.1 Funções solução  $v(s)$  (à esquerda) e  $\tau(s)$  (à direita), donde  $h = 0.5$

Apesar da parametrização não ser válida para o caso  $h = 0$ , podemos analisar o comportamento das curvas solução quando  $h \rightarrow 0$  para saber se existe algum tipo de convergência. De fato, essa convergência existe e será descrita no Teorema a seguir.

**Teorema 3.4:** Seja  $\phi$  uma função suave em  $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$  e  $A \neq 0$ . Para cada  $h \geq 0$ , seja  $(\tau_h, \nu_h)$  a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \tau'_h = 1 + \nu_h \phi(\tau_h, \nu_h, h), \\ \nu'_h = -\tau_h \phi(\tau_h, \nu_h, h), \\ \tau_h(0) = 0, \\ \nu_h(0) = A. \end{cases}$$

Se  $(\tau_0, \nu_0) = (0, A)$  é a solução constante, então a medida que  $h \rightarrow 0$ , tem-se que  $(\tau_h, \nu_h) \rightarrow (0, A)$  no sentido de  $C^k$ -convergência uniforme em conjuntos compactos de  $\mathbb{R}$  para cada  $k$ .

**Prova:** Primeiramente, seja  $K$  a coroa anular no plano formado por  $\tau, \nu$  de raio tal que  $\frac{|A|}{2} \leq r \leq \frac{3|A|}{2}$  e seja  $L$  a bola de raio  $\frac{|A|}{4}$  centrada no ponto  $(0, A)$  (veja a figura 3.2).

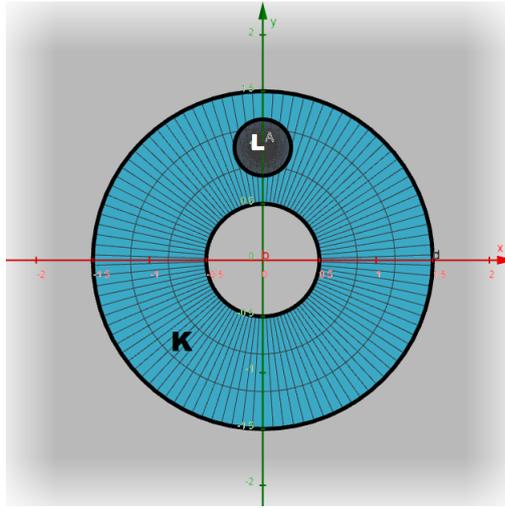


Figura 3.2

Para simplificar a notação, considere

$$F_0(\tau, \nu, h) = 1 + \nu \Phi(\tau, \nu, h) \quad G_0(\tau, \nu, h) = -\tau \Phi(\tau, \nu, h),$$

e para cada  $k \geq 0$

$$F_{k+1} = \frac{\partial F_k}{\partial \tau} F_0 + \frac{\partial F_k}{\partial \nu} G_0, \quad G_{k+1} = \frac{\partial G_k}{\partial \tau} F_0 + \frac{\partial G_k}{\partial \nu} G_0.$$

As funções  $F_k, G_k$  são suaves em  $\mathbb{R}^3 - \{0, 0, 0\}$  e

$$\begin{cases} \tau_h^{(k+1)} = F_k(\tau_h, \mathbf{v}_h, h), \\ \mathbf{v}_h^{(k+1)} = G_k(\tau_h, \mathbf{v}_h, h). \end{cases} \quad (3.13)$$

Defina a constante  $D_0 = 0$  e para  $k \geq 0$

$$D_{k+1} = \sup_{K \times [0,1]} (|\nabla F_k| + |\nabla G_k|).$$

Agora, fixemos  $h \in [0, 1]$  e seja  $I$  um intervalo contendo 0 tal que  $(\tau_h(s), \mathbf{v}_h(s)) \in K$  para todo  $s \in I$ . Assim, pelo teorema fundamental do calculo e (3.13), para  $s \in I$

$$\begin{aligned} |\tau_h^{(k)}(s) - \tau_0^{(k)}(s)| &\leq |\tau_h^{(k)}(0) - \tau_0^{(k)}(0)| + \int_0^s |\tau_h^{(k+1)}(t) - \tau_0^{(k+1)}(t)| dt \\ &\leq hD_k + \int_0^s |F_k(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t), h) - F_k(\tau_0(t), \mathbf{v}_0(t), 0)| dt \\ &\leq hD_k + \int_0^s |F_k(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t), h) - F_k(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t), 0)| dt \\ &\quad + \int_0^s |F_k(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t), 0) - F_k(\tau_0(t), \mathbf{v}_0(t), 0)| dt. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que os limites de integração devem ser invertidos caso  $s < 0$ . Agora, o primeiro integrando é limitado por  $h \sup_{K \times [0,1]} |\nabla F_k|$ . O segundo é limitado por  $|(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t)) - (\tau_0(t), \mathbf{v}_0(t))| \frac{\pi}{2} \sup_{K \times \{0\}} |\nabla F_k|$ , já que quaisquer dois pontos  $p, q \in K$  podem ser ligados por

um caminho diferenciável por partes em  $K$  de comprimento menor ou igual a  $\frac{\pi}{2} |p - q|$ . De forma análoga, pode-se estimar que

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_h^{(k)}(s) - \mathbf{v}_0^{(k)}(s)| &\leq |\mathbf{v}_h^{(k)}(0) - \mathbf{v}_0^{(k)}(0)| + \int_0^s |\mathbf{v}_h^{(k+1)}(t) - \mathbf{v}_0^{(k+1)}(t)| dt \\ &\leq hD_k + \int_0^s |G_k(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t), h) - G_k(\tau_0(t), \mathbf{v}_0(t), 0)| dt \\ &\leq hD_k + \int_0^s |G_k(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t), h) - G_k(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t), 0)| dt \\ &\quad + \int_0^s |G_k(\tau_h(t), \mathbf{v}_h(t), 0) - G_k(\tau_0(t), \mathbf{v}_0(t), 0)| dt, \end{aligned}$$

donde observa-se que o primeiro integrando é limitado por  $h \sup_{K \times [0,1]} |\nabla G_k|$  e o segundo é limitado por  $|(\tau_h(t), \nu_h(t)) - (\tau_0(t), \nu_0(t))| \frac{\pi}{2} \sup_{K \times \{0\}} |\nabla G_k|$ . Portanto, pondo  $C_k = \pi D_{k+1}$  e ao somar as inequações acima,

$$|(\tau_h^{(k)}(s), \nu_h^{(k)}(s)) - (\tau_0^{(k)}(s), \nu_0^{(k)}(s))| \leq 2hD_k + C_k \int_0^s h + |(\tau_h(t), \nu_h(t)) - (\tau_0(t), \nu_0(t))| dt. \quad (3.14)$$

No caso  $k = 0$ , seja  $u(s) = h + |(\tau_h(s), \nu_h(s)) - (\tau_0(s), \nu_0(s))|$ . Assim, a inequação acima se torna

$$u(s) \leq h + C_0 \int_0^s u(t) dt, \quad s \in I,$$

e, pela inequação de Grönwall<sup>1</sup>, decorre que

$$u(s) \leq h e^{C_0|s|}, \quad s \in I,$$

ou de forma equivalente

$$|(\tau_h(s), \nu_h(s)) - (\tau_0(s), \nu_0(s))| \leq h(e^{C_0|s|} - 1), \quad s \in I.$$

Pondo isso em (3.14), temos a seguinte estimativa, válida para todo  $k$

$$|(\tau_h^{(k)}(s), \nu_h^{(k)}(s)) - (\tau_0^{(k)}(s), \nu_0^{(k)}(s))| \leq h \left( 2D_k + \frac{C_k}{C_0} (e^{C_0} - 1) \right), \quad s \in I. \quad (3.15)$$

Para finalizar a demonstração, seja  $I_1$  o intervalo  $\left[ \frac{-|A|}{2}, \frac{|A|}{2} \right]$ . Já que  $|r'_h| \leq 1$ , por (3.9), temos que  $(\tau_h(s), \nu_h(s)) \in K, \forall (s, h) \in I_1 \times [0, 1]$ . Portanto, quando  $h \rightarrow 0$  tem-se que  $(\tau_h^{(k)}, \nu_h^{(k)}) \rightarrow (\tau_0^{(k)}, \nu_0^{(k)})$  uniformemente em  $I_1$ , por (3.15), para cada  $k$ . Pegue  $\delta_1$  suficientemente pequeno tal que  $(\tau_h(s), \nu_h(s)) \in L, \forall (s, h) \in I_1 \times [0, 1]$ .

Continuando por indução, assumamos que para algum  $n \geq 1$  temos que  $(\tau_h(s), \nu_h(s)) \in L, \forall (s, h) \in I_n \times [0, \delta_n]$ . Seja  $I_{n+1}$  o intervalo fechado dado por  $I_n$  estendido em  $\frac{|A|}{4}$  em ambas direções. Como  $|r'_h| \leq 1$ , temos que  $(\tau_h(s), \nu_h(s)) \in K, \forall (s, h) \in I_{n+1} \times [0, \delta_n]$ . Assim,  $h \rightarrow 0$  implica que  $(\tau_h^{(k)}, \nu_h^{(k)}) \rightarrow (\tau_0^{(k)}, \nu_0^{(k)})$  uniformemente em  $I_{n+1}, \forall k$ . Por fim, tome  $\delta_{n+1}$  suficientemente pequeno tal que  $(\tau_h(s), \nu_h(s)) \in L, \forall (s, h) \in I_{n+1} \times [0, \delta_{n+1}]$ . □

<sup>1</sup>Veja *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*, Corolário 3 do Teorema 1

**Corolário 3.4.1:** Sob as hipóteses do Teorema 3.4, seja  $\alpha_h$  a curva correspondente a  $(\tau_h, \nu_h)$  para algum  $\theta_0$ . Então, a medida que  $h \rightarrow 0$ ,  $\alpha_h$  converge para a circunferência de raio  $A$  centrada na origem, no sentido de  $C^k$ -convergência uniforme em conjuntos compactos de  $\mathbb{R}$  para cada  $k$ .

**Prova:** Como  $\alpha_h(s) = (\tau_h(s) + i\nu_h(s))e^{i\theta_h(s)}$ , onde  $\theta_h(s) = \int_0^s k_h(t)dt + \theta_0$  e, também  $k_h(s) = \Phi(\tau_h(s), \nu_h(s), h)$ , pelo Teorema 3.4,  $\alpha_h(s)$  converge uniformemente para  $\alpha(s) = iAe^{-i\frac{s}{A} + i\theta_0}$ , que descreve uma circunferência de raio  $A$  centrada na origem.  $\square$

Alguns exemplos dessa convergência podem ser visto nas figuras 3.3 e 3.4.

### 3.3 Superfícies Helicoidais Mínicas

Nesta seção, trataremos das superfícies helicoidais mínimas. Este caso particular nos permitirá simplificar as equações de  $\tau'$  e  $\nu'$  e, com isso, mostraremos uma família 1-parâmetro de curvas geradoras que resultam nas tais superfícies. Considere, então, que  $H = 0$ . Assim, pela equação (3.7), obtemos

$$k = \frac{-\nu}{r^2 + h^2},$$

e o sistema de EDOs respectivo se torna

$$\begin{cases} \tau' = \frac{\tau^2 + h^2}{r^2 + h^2}, \\ \nu' = \frac{\tau\nu}{r^2 + h^2}. \end{cases}$$

Afirmaremos que  $\frac{\nu}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} = C$  constante. De fato,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\nu}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} \right)' &= \frac{\nu' \sqrt{\tau^2 + h^2} - \frac{\nu\tau\tau'}{\sqrt{\tau^2 + h^2}}}{\tau^2 + h^2} \\ &= \frac{\frac{\tau\nu}{r^2 + h^2} \sqrt{\tau^2 + h^2} - \frac{\nu\tau \frac{\tau^2 + h^2}{r^2 + h^2}}{\sqrt{\tau^2 + h^2}}}{\tau^2 + h^2} \\ &= \frac{\frac{\tau\nu}{r^2 + h^2} (\tau^2 + h^2) - \nu\tau \frac{\tau^2 + h^2}{r^2 + h^2}}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que  $v = C\sqrt{\tau^2 + h^2}$ . Com isso,

$$\begin{aligned}\tau' &= \frac{\tau^2 + h^2}{\tau^2 + C^2(\tau^2 + h^2) + h^2} \\ &= \frac{1}{C^2 + 1},\end{aligned}$$

e assim  $\tau(s) = \frac{s}{C^2 + 1}$ . Portanto, a curvatura é dada por

$$\begin{aligned}k(s) &= \frac{-C\sqrt{\tau^2(s) + h^2}}{\tau^2(s) + C^2(\tau^2(s) + h^2) + h^2} \\ &= \frac{-C}{(C^2 + 1)\sqrt{\tau^2(s) + h^2}}.\end{aligned}$$

Parametrizando  $k, v, \theta$  em função de  $\tau$ , obtemos

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \int k(s) ds \\ &= \int \frac{-C}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} d\tau,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\theta(\tau) = -C \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\tau}{h}\right) + \theta_0$$

que, por consequência, gera uma curva parametrizada pelo comprimento de arco (sem perda de generalidade podemos considerar  $\theta_0 = 0$ ),

$$\alpha(\tau) = (\tau + iC\sqrt{\tau^2 + h^2})e^{-iC \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\tau}{h}\right)}.$$

Reparametrizando usando  $u = \frac{1}{h} \operatorname{arcseh}\left(\frac{\tau}{h}\right)$  e  $A = hC$  chegamos em

$$\alpha(u) = (h \operatorname{senh}(hu) + iA \operatorname{cosh}(hu))e^{-iAu}.$$

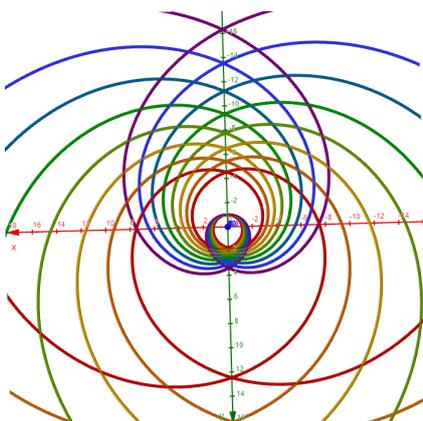


Figura 3.3 Cada curva nesta figura é obtida por um valor diferente para  $h$ . A curva menos densa indica  $h = 0.5$  e cada curva se diminui 0.25 de  $h$  até chegar na curva mais densa indicando  $h = 0.325$

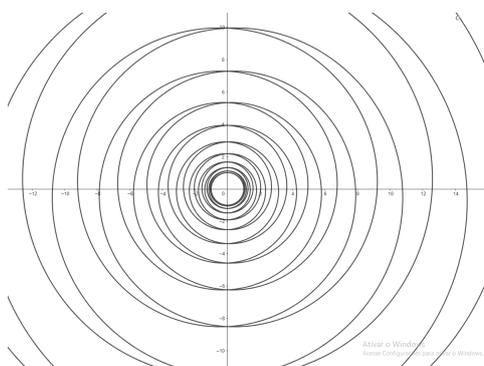


Figura 3.4 Curva geradora donde  $h = 0.05$

### 3.4 Superfícies Helicoidais com Curvatura Média Constante

Nesta seção, consideremos o caso onde a curvatura média  $H \neq 0$  de uma superfície helicoidal é constante. Nosso objetivo será mostrar que, dadas algumas poucas condições, sempre existirá uma curva geradora cuja a superfície helicoidal resultante é uma solução do FCM que evolui rotacionando. Pela equação da curvatura média da superfície apresentada anteriormente, temos que a curvatura da curva geradora é dada por

$$k(s) = \frac{-2H(\tau^2(s) + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h(r^2(s) + h^2)} - \frac{v(s)}{(r^2(s) + h^2)}. \quad (3.16)$$

Se necessário for, podemos assumir que  $H = \frac{-1}{2}$  dilatando ou contraindo a superfície como um todo. Assim, o sistema (3.3) resulta em

$$\begin{cases} \tau' = \frac{(\tau^2 + h^2)(h + v\sqrt{\tau^2 + h^2})}{h(r^2 + h^2)}, \\ v' = \frac{h\tau v - \tau(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h(r^2 + h^2)}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Esse sistema possui um único ponto fixo  $(\tau, v) = (0, -1)$  que corresponde a  $\alpha$  sendo uma circunferência no sentido anti-horário. De fato, considere  $\tau'(s) = 0$  e  $v'(s) = 0$ . Assim, o sistema (3.17) resulta em

$$\begin{cases} 0 = h + v\sqrt{\tau^2 + h^2}, \\ 0 = \tau(hv - (\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}). \end{cases}$$

Como  $h > 0$ , então  $v < 0$  pela 1ª equação e, portanto,  $hv < 0$ , o que implica em

$$hv - (\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} < 0.$$

Assim, concluímos que  $\tau = 0$  pela 2ª equação e, com isso, obtemos  $v = -1$ , pela 1ª equação, como queríamos.

Faremos uma mudança de variáveis para achar outras trajetórias. Considere a seguinte involução:

$$\Phi_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x_1, x_2) \rightarrow \left( \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2}} x_2, \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}} x_1 \right),$$

onde  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Seja  $x, y$  funções dadas por  $(x, y) = \Phi_h(v, \tau)$ , isto é,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} \tau, \\ y = \frac{h}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} v. \end{cases}$$

Temos que  $\Phi_h$  preserva a norma, pois  $x^2 + y^2 = \tau^2 + v^2 = r^2$ . Assim, utilizando o sistema (3.17), podemos calcular que as soluções  $x, y$  satisfazem

$$\begin{cases} x' = \frac{h}{\sqrt{y^2 + h^2}}(y + 1), \\ y' = \frac{-hx}{\sqrt{y^2 + h^2}}. \end{cases}$$

Agora, ao introduzir uma nova variável satisfazendo  $\frac{du}{ds} = \frac{h}{\sqrt{y^2 + h^2}}$ , obtemos um sistema mais simples, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dx}{du} = (y + 1), \\ \frac{dy}{du} = -x, \end{cases}$$

que possui as soluções  $(x, y) = (c_1 \cos(u) + c_2 \sin(u), -c_1 \sin(u) + c_2 \cos(u) - 1)$ , onde  $c_1, c_2$  são constantes relacionadas às condições iniciais das EDOs, que consistem em circunferências concêntricas de centro  $(0, -1)$  que, por sua vez, pode ser parametrizada por  $(x, y) = (R \cos(u), -R \sin(u) - 1)$ , onde  $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ .

As soluções originais  $(v, \tau)$  são também periódicas. Como  $\Phi_h$  preserva norma, cada solução está contida na coroa circular centrada na origem de raios  $|R - 1|$  e  $R + 1$  (interior e exterior, respectivamente) e tangencia cada borda uma vez por período. A curva  $\alpha$  correspondente, portanto, está contida na mesma coroa circular e consiste em órbitas lunares idênticas entre as bordas da coroa ao redor da origem. Além disso,  $\alpha$  passa pela origem se, e somente se,  $R = 1$ .

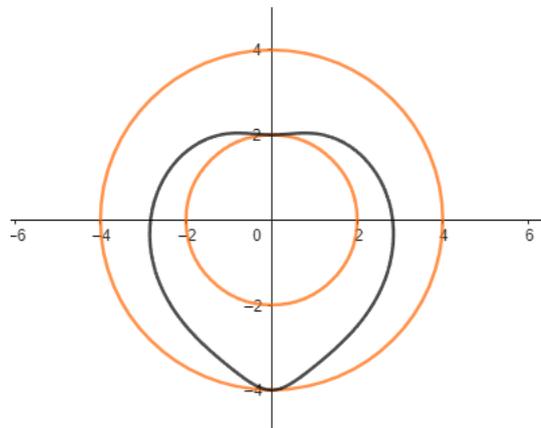


Figura 3.5 Curva solução  $(v, \tau)$  do sistema (3.17) onde  $R = 3$  e  $h = 1$ .

Vamos analisar uma única órbita lunar, correspondente a curva  $(\tau, \nu)$  completando uma volta, isto é,  $\alpha$  começa na borda exterior, toca na borda interior e volta para a exterior. Denote por  $\Delta\theta$  a diferença dos ângulos da tangente antes e após uma órbita. Temos duas possibilidades, a saber,

- $\Delta\theta$  é da forma  $2\pi\frac{p}{q}$  onde  $p, q$  são inteiros coprimos positivos. Isso implica que  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva imersa fechada que se fecha após  $q$  órbitas. Além disso,  $p$  é o número de rotações de  $\alpha$ .
- $\Delta\theta$  não é dessa forma. Assim,  $\alpha$  não se fecha e tem infinitas órbitas lunares e  $\alpha$  também é densa na coroa.

Lembrando que  $\theta$  é o ângulo do vetor tangente  $\vec{t} = e^{i\theta}$  e, portanto,  $d\theta = kds$ . Temos que  $\Delta\theta$  é dado pela integral de  $kds$  no decorrer de um período, isto é,

$$\Delta\theta = \int kds = \int \left( \frac{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h(r^2 + h^2)} - \frac{\nu}{r^2 + h^2} \right) ds,$$

usando as funções  $(x, y) = \Phi_h(\nu, \tau)$  e  $ds = \frac{\sqrt{y^2 + h^2}}{h} du = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} du$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int kds &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\tau^2 + h^2}{h\sqrt{r^2 + h^2}} - \frac{\nu}{\sqrt{r^2 + h^2}\sqrt{\tau^2 + h^2}} \right) du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{y^2 + h^2} - \frac{y}{h\sqrt{r^2 + h^2}} \right) du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{h\sqrt{1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2}}{(1 + R\text{sen}(u))^2 + h^2} + \frac{1 + R\text{sen}(u)}{h\sqrt{1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2}} \right) du. \end{aligned}$$

Por conveniência, iremos trabalhar com  $\Delta\phi$  onde  $\phi$  é o ângulo de  $\alpha$ , isto é,  $\alpha = re^{i\phi} = (\tau + i\nu)e^{i\theta}$ . Com isso chegamos na seguinte relação entre  $\Delta\phi$  e  $\Delta\theta$ , notando que  $(\tau, \nu)$  gira no sentido horário quando  $R > 1$ , passa pela origem quando  $R = 1$  e não ocorre nenhum dos dois quando  $0 \leq R < 1$ :

$$\Delta\phi = \begin{cases} \Delta\theta & \text{se } 0 \leq R < 1, \\ \Delta\theta - \pi & \text{se } R = 1, \\ \Delta\theta - 2\pi & \text{se } R > 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Como  $d\phi = \frac{-\nu}{r^2}$ ,  $\Delta\phi$  é dado pela integração em uma órbita, isto é,

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= - \int \frac{v}{r^2} ds = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v}{r^2} \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} du \\
&= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y\sqrt{r^2 + h^2}}{hr^2} du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (1 + R\text{sen}(u)) \frac{\sqrt{1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2}}{h(1 + R^2 + 2R\text{sen}(u))} du.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Com essa integral, podemos caracterizar a curva  $\alpha$  de uma forma mais explícita, e para nos auxiliar, usaremos o seguinte lema:

**Lema 3.5:** Para cada  $h \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta\phi$  dada por (3.19) é decrescente em  $R$ , isto é,  $\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial R} < 0$ .

**Prova:** Primeiramente, note que o integrando de (3.19) é limitado por  $\frac{\sqrt{h^2 + 1}}{h}$ , portanto, podemos afirmar que, para cada  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta\phi &= \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(1 + R\text{sen}(u))\sqrt{1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2}}{h(1 + R^2 + 2R\text{sen}(u))} du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(u)}{h} du \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que implica que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi = 0$ .

Assim, como precisamos mostrar que  $\frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi < 0$ , pela afirmação acima basta mostrar que  $\frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi > 0$ . Lembrando que  $r^2 = 1 + R^2 + 2R\text{sen}(u)$ , temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi &= \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial}{\partial h} \Delta\phi \\
&= \frac{\partial}{\partial R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + R\text{sen}(u))}{r^2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{h} \right) du \\
&= \frac{\partial}{\partial R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + R\text{sen}(u))}{r^2} \frac{-r^2}{h^2 \sqrt{r^2 + h^2}} du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial R} \frac{-1 - R\text{sen}(u)}{h^2 \sqrt{1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2}} du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\text{sen}(u)(1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2) + R + \text{sen}(u) + R\text{sen}(u)^2 + R^2\text{sen}(u)}{h^2(1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2)^{\frac{3}{2}}} du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R\cos(u)^2 - h^2\text{sen}(u)}{h^2(1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2)^{\frac{3}{2}}} du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R\cos(u)^2}{h^2(1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2)^{\frac{3}{2}}} du + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\text{sen}(u)}{(1 + R^2 + 2R\text{sen}(u) + h^2)^{\frac{3}{2}}} du > 0,
\end{aligned}$$

pois a primeira integral é claramente positiva, e a segunda é positiva já que o denominador é menor quando  $\text{sen}(u) < 0$ .

□

Esse lema nos permite afirmar que, para cada  $h$ , existe uma bijeção suave entre  $R$  e  $\Delta\phi$  e por consequência, entre  $R$  e  $\Delta\theta$ . Assim, considerando (3.18), obtemos

- $R = 0$  implica que  $\Delta\theta = \frac{2\pi\sqrt{h^2 + 1}}{h}$ ,
- $R = 1$  implica que  $\Delta\theta = \frac{2\sqrt{h^2 + 4}}{h} E\left(\frac{2}{\sqrt{h^2 + 4}}\right) + \pi$ ,
- $\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta\theta = 2\pi$ ,

onde  $E$  é a integral elíptica definida por

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(t)} dt,$$

que determina  $\frac{1}{4}$  do perímetro de uma elipse com excentricidade  $k$  e um semieixo maior de valor 1.

Seja  $\gamma_h = \frac{2\sqrt{h^2+4}}{h\pi} E\left(\frac{2}{\sqrt{h^2+4}}\right) + \frac{1}{2}$ . Assim podemos afirmar que

$$2\pi < \Delta\theta < \frac{2\pi\sqrt{h^2+1}}{h}$$

e, com isso, o seguinte teorema:

**Teorema 3.6:** Sejam  $p$  e  $q$  inteiros coprimos tais que  $1 < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{h^2+1}}{h}$ . Então, existe uma única curva imersa  $\alpha$  (a menos de rotação) fechada com número de rotação  $p$  e  $q$ -simetria radial, tal que  $\alpha$  gera uma superfície helicoidal de pico  $h$  e curvatura média constante  $H = \frac{-1}{2}$ . Além disso,

- (i) Se  $\frac{p}{q} > \gamma_h$ ,  $\alpha$  tem índice  $p$  ao redor da origem;
- (ii) Se  $\frac{p}{q} = \gamma_h$ ,  $\alpha$  passa pela origem;
- (iii) Se  $\frac{p}{q} < \gamma_h$ ,  $\alpha$  tem índice  $p - q$  ao redor da origem.

**Prova do Teorema 3.6:** Dados  $p, q$  tal como enunciados, basta escolher  $R > 0$  tal que  $\Delta\theta(R) = 2\pi\frac{p}{q}$ , assim teremos  $\alpha$  uma curva fechada com número de rotação  $p$  e  $q$ -simetria radial. Ela também será única a menos de rotação.

Agora, o índice  $w$  de  $\alpha$  é dado por  $\frac{q\Delta\phi}{2\pi}$ . Portanto, se  $\frac{p}{q} > \gamma_h$  temos  $R < 1$  e, com isso,  $w = \frac{q(2\pi\frac{p}{q})}{2\pi} = p$ . Por outro lado, se  $\frac{p}{q} < \gamma_h$  temos  $R > 1$  e, com isso,  $w = \frac{q(2\pi\frac{p}{q} - 2\pi)}{2\pi} = p - q$ . Finalmente, se  $\frac{p}{q} = \gamma_h$  temos  $R = 1$  e, assim,  $\alpha$  passa pela origem.

Pelas contas mostradas nesta seção, é claro que a superfície  $X(s, t) = (e^{it}\alpha(s), ht)$  possui curvatura média constante  $H = \frac{-1}{2}$ . □

A seguir, temos algumas imagens de curvas geradoras com os respectivos valores de  $h$  e  $R$ .

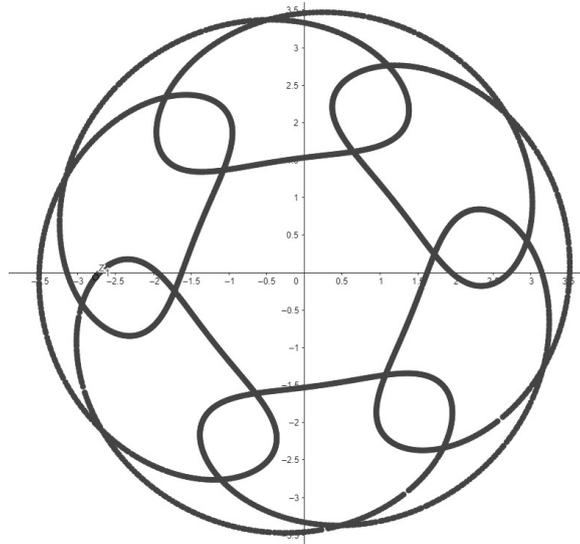


Figura 3.6  $h = 1.1$  e  $R = 2.52$ . ( $p = 7, q = 6$ )

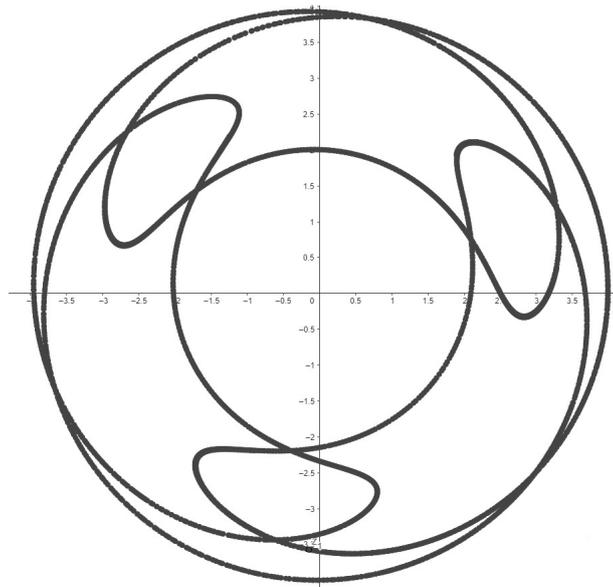


Figura 3.7  $h = 0.5$  e  $R = 3$ . ( $p = 4, q = 3$ )

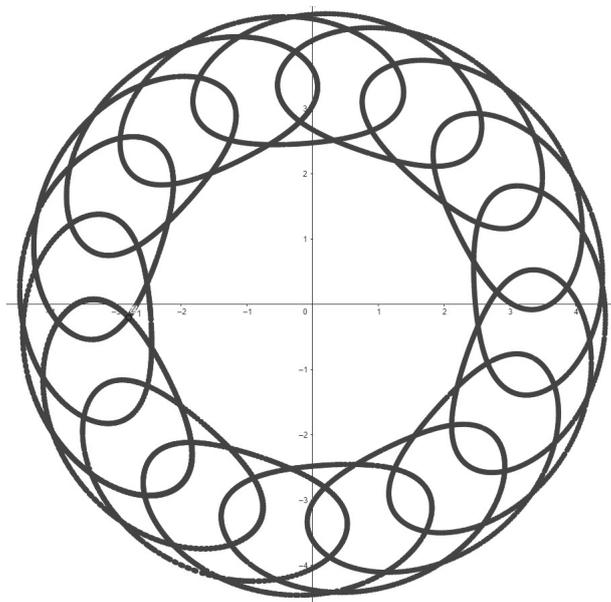


Figura 3.8  $h = 2$  e  $R = 3.47$ . ( $p = 17, q = 16$ )

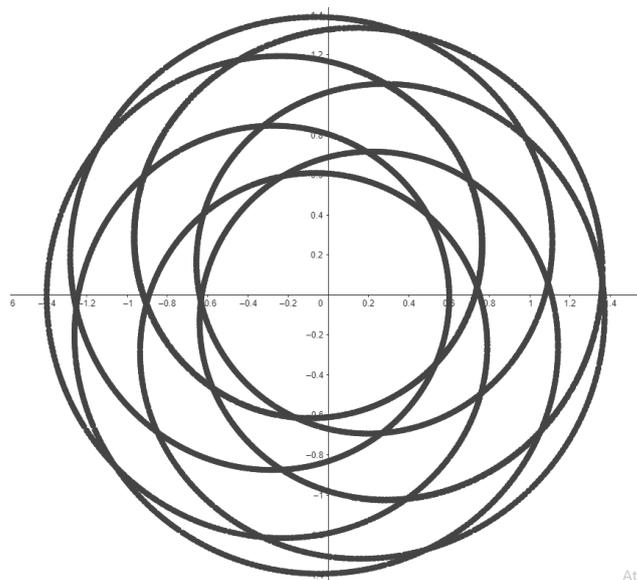


Figura 3.9  $h = 2$  e  $R = 3.47$ . ( $p = 7, q = 5$ )

Ativ

# Bibliografia

- [1] Angenent, S. B. (1989). Shrinking doughnuts. *Proceedings of the Conference on Elliptic and Parabolic Equations*.
- [2] Carmo, M. P. D. and Dajczer, M. (1982). Helicoidal surfaces with constant mean curvature. *Tôhoku Math. Journ.*, 34:425–435.
- [3] Colding, T. H., II, W. P. M., and Pedersen, E. K. (2015). Mean curvature flow. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 52:297–333.
- [4] do Carmo, M. P. (2005). *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, Rio de Janeiro-RJ.
- [5] do Carmo, M. P. (2015). *Geometria Riemmaniana, 5ª edição*. IMPA.
- [6] Gage, M. and Hamilton, R. S. (1986). *The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves*. Journal of Differential Geometry.
- [7] Halldorsson, H. P. (2012). Helicoidal surfaces rotating/translating under the mean curvature flow. *Geom. Dedic.*, 162:45–65.
- [8] Huisken, G. (1984). Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *Journal of Differential Geometry*, 20:237–266.
- [9] Leandro, B., Novais, R., and dos Reis, H. (2023). Self-similar solutions to the mcf in  $\mathbb{R}^3$ . *Differential Geometry and its Applications*.
- [10] Oliveira, F. A. and de Almeida, D. M. (2016). *Superfícies regradas*. Revista Eletrônica Paulista de Matemática.
- [11] Polac, L. G. and Bonfim, L. R. P. (2008). *O Uso da Álgebra Linear nas Equações Diferenciais*. FAMAT em Revista, Uberlândia.
- [12] Samelson, H. (1969). Orientability of hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$ . *Proceedings of the American Mathematical Society*, 22(1):301–302.