Universidade de Brasília

# Equação logística com condições de contorno de Robin e coeficientes indefinidos

**Vitória Henrylla Pinheiro Souza**

Dr. Willian Cintra da Silva

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestra em Matemática*

Brasília, 21 de Agosto de 2023

Dedico este trabalho a minha mãe e avó.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pois Ele não coloca sonhos em nosso corações que não possamos realizar.

Seguidamente, agradeço a minha família, pois tê-los em minha mente e coração me deu forças. Em especial, a minha mãe Idara que sempre fez tudo que lhe era possível para que eu viesse à Brasília, juntamente do meu padrasto Márcio e minha avó Gecina que sempre incentivaram meus estudos. Também sou grata ao meu pai Evangelista, devido o suporte que me forneceu no início do mestrado.

Aos meus amigos mais próximos do Acre, meu muito obrigada, pois o apoio de vocês foi além de palavras de incentivo. Agradeço em especial aos amigos Adna, Tiago, Keila, Sidney, Raylane, Leôncio, Francisco, Carlos, Tauane, Magliel, Roselie, Gabriely F., Thaine e Camila B.

Agradeço a Talita e Jônatas por tornarem essa trajetória mais leve tendo vocês ao meu lado desde o início. Em especial, agradeço a Talita pois foi a pessoa com a qual mais compartilhei e que mais me ajudou em relação aos anseios que surgiam a cada novo obstáculo. Ao Tharles e Gabriela Souza por toda paciência que tiveram para tirarem minhas dúvidas iniciais de mestranda. Aos meus demais conterrâneos acreanos, por nos mantermos unidos durante nossos estudos na pós-graduação. Ao Gabriel M., Ismael e Rodolfo por tirarem minhas dúvidas durante a pesquisa e por sempre estarem dispostos a me ajudar.

Aos amigos Millena, Jadde, Marcio, Saulo, Daniel, Deyfila e Joyce que Brasília me presenteou, obrigada por de alguma forma cuidarem do meu bem estar e me darem proteção, conselhos, abrigo e colo, este apoio foi crucial para que eu não desistisse.

A avó de Millena que fez eu me sentir mais próxima da minha família, com todo carinho que me tratou, assim como, agradeço a dona Claudinha que fora uma sábia senhora enviada por Deus a minha vida.

Aos demais amigos do curso como Débora, Felipe, Katianny, Ayana, Flávia, Manoel, Maristela, Vitor M., Ângelo e Edna que me ajudaram de diversas formas, seja com dúvidas de análise, de látex ou emocionalmente, pois foram pessoas com quem tive a honra de compartilhar momentos de muita alegria.

Agora, destaco o agradecimento ao meu orientador Willian Cintra, por toda a sua sabedoria, paciência e habilidade para ensinar. Além de ser um excelente professor, pesquisador e orientador, também fora um ser humano empático e serei sempre muita grata por todo conhecimento adquirido.

Aos professores Ricardo Ruviaro e João Rodrigues, minha sincera gratidão por terem contribuído de forma tão significativa para a conclusão deste trabalho.

Agradeço a FAPDF e ao CNPq pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

# Resumo


Neste trabalho, nos baseamos no artigo de Umezu [22] e estudamos existência e unicidade de soluções para a seguinte equação logística estacionária

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(g(x) - cu)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x)u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$ regular, $\lambda$ um parâmetro real, $g \in C^{\theta}(\overline{\Omega})$ e $h \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, ambas podem mudar de sinal, $c$ é uma constante não negativa e $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$. Salientamos que a equação (1) provém de um modelo de dinâmica de populações, e portanto, nos interessa encontrar as soluções positivas para $\lambda > 0$.

Com o auxílio de métodos variacionais (Multiplicadores de Lagrange e Minimização), estudamos o problema de autovalor, isto é, o problema (1) com $c = 0$. Em seguida, via método de sub e supersolução estabelecemos a existência, não existência e unicidade das soluções positivas do problema (1) com $c > 0$. Por fim, obtemos estimativas a priori e analisamos o comportamento assintótico das soluções com respeito ao parâmetro $\lambda$.

# Abstract

In this work, we follow the paper of Umezu [22] and we study existence and uniqueness of solutions for the following stationary logistic equation

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(g(x) - cu)u & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x)u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $\Omega$ is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, with smoth boundary $\partial\Omega$, $\lambda$ is a real parameter, $g \in C^\theta(\overline{\Omega})$ e $h \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, both functions can change sign, $c$ is a non-negative constant and $\eta = \eta(x)$ denotes the unit exterior normal at $x \in \partial\Omega$. We emphasize that the equation (2) arising from a population dynamics model and, therefore, we are interested in searching positive solutions for $\lambda > 0$.

Using tools from variational method (Lagrange Multipliers and Minimization), we study the eigenvalue problem, that is, the problem (2) with $c = 0$. Then, applying the sub and supersolution methods we establish the existence, non-existence and uniqueness of the positive solutions for (2) with $c > 0$. Finally, we prove a priori bounds and study the asymptotic behavior of the solutions with respect to $\lambda$.

# Conteúdo

# Notações

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}^N$ | Espaço euclidiano $N$-dimensional. |
| $B_r(x)$ | Bola aberta de centro $x$ e raio $r$. |
| $\Omega$ | Domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira regular. |
| $\overline{\Omega}$ | Fecho do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. |
| $\partial\Omega$ | Fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. |
| $\eta$ | Vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$. |
| $\hookrightarrow$ | Imersão contínua. |
| $\hookrightarrow\hookrightarrow$ | Imersão compacta. |
| $\rightharpoonup$ | Convergência fraca. |
| $N = N[\cdot]$ | Núcleo de um operador. |
| $R = R[\cdot]$ | Imagem de um operador. |
| $C(X,Y)$ | Espaço das funções contínuas de $X$ em $Y$. |
| $C^k(\overline{\Omega})$ | Espaço das funções de classe $C^k$ em $\overline{\Omega}$. |
| $C_c^\infty(\Omega)$ | Espaço das funções de classe $C^\infty$ de suporte compacto. |
| $C^{k+\theta}(\overline{\Omega})$ | Espaço de Hölder. |
| $W^{k,p}(\Omega)$ | Espaço de Sobolev. |
| $L^1_{loc}(\Omega)$ | Espaço das funções localmente integráveis em $\Omega$. |

| | |
|---|---|
| $\partial u/\partial x_i$ ou $\partial_i u$ | Derivada parcial de $u$ com respeito à $i$-ésima coordenada. |
| $\nabla u$ | $(\partial_1 u, \cdots, \partial_n u)$ para $u \in W^{1,2}(\Omega)$. |
| $u^+(x)$ | Para $u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in W^{1,p}(\Omega)$ é definido como $\max_{x\in\Omega}\{u(x), 0\}$. |
| $u^-(x)$ | Para $u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in W^{1,p}(\Omega)$ é definido como $\max_{x\in\Omega}\{-u(x), 0\}$. |
| $(u)_\Omega$ | Média de $u$, definido como $(1/\|\Omega\|)\int_\Omega u \, dx$. |
| $\mathcal{X}_{U_\delta}$ | Função característica no conjunto $U_\delta$. |
| $\|\cdot\|$ | Norma da soma em $\mathbb{R}^N$. |
| $\\|\cdot\\|_{C^{k+\theta}(\overline{\Omega})}$ | Norma usual do espaço $C^{k+\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \theta \leq 1$. |
| $\\|\cdot\\|_{L^p(\Omega)}$ | Norma usual do espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. |
| $\\|\cdot\\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ | Norma usual do espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. |
| $(\cdot,\cdot)_E$ | Produto interno usual de um espaço de Hilbert $E$. |
| $d\sigma$ | Elemento de área na integral de superfície. |
| $\operatorname{div} u$ | Divergente da função $u$. |
| $\oplus$ | Soma direta. |
| $D^\perp$ | Ortogonal de um subespaço vetorial $D$. |
| $2^*$ | Expoente crítico de Sobolev, isto é, $2^* = 2N/N-2$. |
| $\operatorname{supp} u$ | Suporte da função $u$. |
| $E'$ | Espaço dual do espaço $E$. |

# Lista de Figuras

# Introdução

A Ecologia é um ramo da biologia que estuda a interação entre os seres vivos de um determinado ambiente. Dinâmica de populações é a parte da ecologia que estuda a variação na quantidade dos indivíduos da mesma espécie, e que habitam o mesmo ambiente. Para este trabalho, é relevante que saibamos ao que se refere um efeito de dispersão. Conforme mencionado no trabalho de Cosner [11], este é um mecanismo que permite que os indivíduos encontrem recursos para sua sobrevivência, ou seja, ele influencia na persistência da população, inclusive em relações como predação e competição. Além disso, possibilita a interação com a própria espécie e com outras, pois cria meios de que a população possa se distribuir pelo ambiente.

Existem abordagens diferentes na Ecologia para o estudo do efeito de dispersão, assim como para estudar a dinâmica da espécie. Neste trabalho tratamos de um modelo de reação-difusão, que fornece uma maneira de interpretar suposições locais referentes aos dados sobre o movimento, a mortalidade e a reprodução dos indivíduos e assim obter conclusões globais sobre a sobrevivência ou extinção de populações.

O objetivo principal é estudar uma equação que modela um problema em dinâmica de populações. Mais precisamente, estudar a existência de solução não-negativa e não trivial para a seguinte equação logística com coeficientes indefinidos

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(g(x) - cu)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x)u & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Sendo $\Omega$ um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$ regular, $\lambda$ um parâmetro real, $g \in C^{\theta}(\overline{\Omega})$ e $h \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, ambas podendo mudar de sinal, $c$ é uma constante não negativa e $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$.

O Problema (3) denota o estado estacionário da densidade populacional de uma espécie, governada pelo problema parabólico abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (1/\lambda)\nabla u + (g(x) - cu)u & \text{em } (0,\infty) \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \\ (1/\lambda)\nabla u \cdot \eta = h(x)u & \text{sobre } (0,\infty) \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Observe que o estudo do modelo estacionário (3) nos permite responder a questões de Ecologia, como sobre a sobrevivência da espécie. Por exemplo, se mostramos existência de solução positiva para (3), em certos casos, isso significará que a espécie governada pelo modelo (4) irá sobreviver a longo prazo. Similarmente, se não há solução positiva para (3), então a espécie modelada por (4) tenderá à extinção.

Primeiramente, é interessante entender o significado de cada termo desta equação do ponto de vista de dinâmica de populações. Assim, vamos analisar o que representa cada termo presente no Problema (3). Neste contexto, $\Omega$ representa o habitat de uma espécie cuja densidade populacional em cada ponto $x \in \overline{\Omega}$ e em cada instante $t > 0$ é dada por $u(t,x)$. $-\Delta u$ modela o movimento espacial da espécie no habitat, pois segundo a 1ª Lei de Fick a espécie se difunde em direção à região de menor concentração. Relacionado ao movimento espacial, temos que $1/\lambda$ denota a velocidade que a espécie se move no habitat. Também temos que a função $g$ é referente a taxa de decaimento ou crescimento populacional. A constante $c$ representa o efeito de aglomeração, por isso, esta não pode ser considerada negativa. De modo mais específico, $c$ representa a capacidade de carga, e serve para descrever a limitação espacial, ou seja, mostrar a capacidade limite da região dentro desse habitat. Por exemplo, quanto mais próximo de 0 é o valor de $c$, mais indivíduos essa região suporta, mas quanto maior o valor de $c$, menos indivíduos podem viver nesta região. Com respeito aos termos que aparecem sobre $\partial\Omega$, temos que $\partial u/\partial \eta$ modela o fluxo populacional através da fronteira e a função $h$ mede a taxa desse fluxo.

Chamamos atenção para o fato de que as funções $g$ e $h$ poderem mudar de sinal no Problema (3) representa um fato relevante, visto que, funções mudando de sinal possuem significado biológico. Um dos trabalhos pioneiros na introdução de funções com sinal indefinido em modelos biológicos foi o artigo de W. H. Fleming (ver [13]), onde o autor associou problemas não lineares ao estudo de genética de populações.

No caso de (3), quando $g(x) > 0$ para $x \in \Omega$, temos zonas favoráveis para a espécie, onde a taxa de natalidade é positiva. Caso, $g(x) < 0$ para $x \in \Omega$, então temos a situação contrária. Em contra partida, se $h(x) > 0$ para $x \in \partial\Omega$ temos que está ocorrendo um fluxo de entrada no habitat, enquanto em $h(x) < 0$ para $x \in \partial\Omega$ ocorre a saída do habitat (maiores detalhes ver [9, Section 1.5.4]). Enfatizamos que as funções $g$ e $h$ poderem mudar de sinal também é interessante do ponto de vista matemático, pois acarreta em dificuldade técnicas na análise de soluções positivas, conforme será visto, por exemplo, no Capítulo 2.

Vejamos alguns trabalhos que estão relacionados ao artigo de Umezu (ver [22]), ao qual se fundamenta essa dissertação.

Com respeito ao problema de autovalor, mencionamos os seguintes trabalhos. O artigo de Brown e Lin (ver [8]) e o artigo de Afrouzi e Brown (ver [2]), em que nos dois trabalhos fora estudado um problema de autovalor com peso indefinido sobre $\Omega$. No primeiro trabalho tinha-se um problema de Neumann, e no segundo havia uma condição de contorno de Robin. Com respeito ao problema logístico, no artigo de Cantrell, R. S. e Cosner, C. (ver [10]) analisam o problema (3) com a condição de contorno de Dirichlet, entre outros resultados, os autores provam existência e unicidade de solução, desde que

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\lambda_1^+(g)},$$

onde $\lambda_1^+(g)$ denota o autovalor principal positivo de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora, iremos descrever como está organizado este trabalho. No Capítulo 1, o objetivo é estabelecer a existência de autovalor principal para o Problema (3) com $c = 0$, ou seja, estudamos o seguinte problema de autovalor com pesos indefinidos

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x)u & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Para isso, se fez necessário estudarmos primeiro o problema de autovalor auxiliar para $\mu = \mu(\lambda)$,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u + \mu(\lambda)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x)u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ dado.

O primeiro resultado demonstrado neste capítulo estabelece a existência e unicidade de autovalor principal do Problema (6). A prova baseou-se no método desenvolvido por Hess e Kato (ver [15]).

**Teorema 0.1.** *Assuma que $g \not\leq 0$ em $\Omega$, ou $h \not\leq 0$ sobre $\partial\Omega$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, existe um único autovalor principal de* (6)*, que será denotado por $\mu_1(\lambda)$. Além disso, este autovalor satisfaz*

$$\mu_1(\lambda) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega} hu^2 \,d\sigma; u \in W^{1,2}(\Omega), \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x = 1\right\}.$$

*E ainda, $\mu_1(\lambda)$ admite uma autofunção $\phi_1(\lambda)$ de classe $C^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_1(\lambda) > 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Em seguida, estudamos algumas propriedades da aplicação $\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \mu_1(\lambda)$. Precisamente, obtemos o seguinte.

**Teorema 0.2.** *Sob as hipóteses do Teorema* 0.1 *considere a aplicação $\mu_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $\lambda \in \mathbb{R}$, associa $\mu_1(\lambda)$ o único autovalor principal de* (6)*. Então esta aplicação possui as seguintes propriedades:*

*(i)* *$\mu_1$ é côncava e verifica $\mu_1(\lambda) \to -\infty$ se $\lambda \to \infty$;*

*(ii)* *$\mu_1$ possui um máximo (global) em $\lambda \geq 0$ se $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,d\sigma \leq 0$. Além disso, o máximo é positivo se $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,d\sigma < 0$ e é zero se $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,d\sigma = 0$.*

Após obtermos estes dois resultados a respeito do Problema (6), passamos a estudar o caso $\mu_1(\lambda) = 0$ para estendermos estes resultados para o problema de autovalor com pesos indefinidos, pois conforme veremos, o único autovalor principal positivo de (5) será na verdade o zero da aplicação $\mu_1$. Assim, passamos a usar os resultados encontrados para obtermos a existência, unicidade e comportamento do autovalor principal positivo do Problema (5). Fazemos isso, no seguinte resultado.

**Teorema 0.3.** *Assuma que $g \not\leq 0$ em $\Omega$ ou $h \not\leq 0$ sobre $\partial\Omega$, então o Problema* (5) *possui um único autovalor principal positivo (denotado por $\lambda_1(g,h)$) se, somente se, $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma < 0$. Além disso, nesse caso o único autovalor principal positivo tem a seguinte caracterização*

$$\lambda_1(g,h) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x}{\int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma}; u \in W^{1,2}(\Omega), \int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma > 0\right\}.$$

Como já temos a existência, unicidade e caracterização variacional do único autovalor principal positivo do Problema (5), também nos interessa obter uma cota inferior para este autovalor em termos da quantidade $\left|\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma\right|$.

**Teorema 0.4.** *Assuma que* $g \not\leq 0$ *em* $\Omega$ *ou* $h \not\leq 0$ *sobre* $\partial\Omega$*. Então, existe uma constante* $C > 0$*, tal que*

$$\lambda_1(g,h) \geq C \left( \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} + \frac{\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{\left| \int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right|} \right)^{-1}$$
$$=: \underline{\lambda}(g,h).$$

Assim, finalizamos o capítulo e o estudo do Problema (5).

O Capítulo 2 tem como objetivo principal, enunciar e demonstrar o método de sub e supersolução para o problema não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

em que

$$\mathcal{B} = \beta(\cdot) + \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta},$$

com $\beta \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$. Método este, que será usado para provar a existência de solução para o Problema logístico (3) no capítulo seguinte. Precisamente, o Capítulo 2 tem como objetivo provar o resultado a seguir.

**Teorema 0.5.** *Suponha* $f(x,s)$ *uma função Hölder contínua na variável* $x \in \Omega$*, e de classe* $C^1$ *na variável* $s \in \mathbb{R}$*. Se o problema* (7) *admite um par* $(\underline{u}, \overline{u})$ *de sub e supersoluções ordenadas, então existe uma solução* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *de* (7) *que verifica*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

Por fim, no Capítulo 3 provamos o resultado principal da dissertação. Onde estudamos a existência de soluções positivas para o Problema (3). Aqui se entende que $\lambda_1(g,h) = 0$, para $\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \geq 0$ e assim, provamos o teorema da condição de existência e não existência de solução.

**Teorema 0.6.** *Assuma que* $g \not\leq 0$ *em* $\Omega$ *ou* $h \not\leq 0$ *sobre* $\partial\Omega$*. Então o conjunto de soluções positivas do Problema* (3) *com* $c > 0$ *verifica as seguintes afirmações:*

*(i) existe uma única solução positiva* $u_\lambda$ *de* (3) *para todo* $\lambda > \lambda_1(g,h)$*;*

*(ii)* $u_\lambda$ *satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|u_\lambda\|_{L^3(\Omega)} \leq c^{-1}\left(-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)|\Omega|^{1/3}, \quad \forall\, \lambda > \lambda_1(g,h);$$

*(iii) a solução* $u_\lambda$ *satisfaz o comportamento assintótico,*

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1(g,h)} u_\lambda = \frac{\max\left\{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma, 0\right\}}{c|\Omega|}\ \text{em}\ C^2(\overline{\Omega});$$

*(iv) caso* $\lambda_1(g,h) > 0$ *não existe solução positiva para* $0 < \lambda \leq \lambda_1(g,h)$.

Por fim, recapitulamos que o estudo da equação logística fora dividida nos casos $c = 0$ e $c > 0$. No estudo do problema quando $c = 0$, notamos que este estava em condições de utilizar métodos variacionais. Assim, conseguimos associar um funcional ao problema, e através do método de minimização obtivemos um ponto crítico que é a solução exata deste. Dessa forma, estudamos o problema de autovalor auxiliar, para o qual utilizamos a técnica clássica presente em [15], e que consiste em aplicar Multiplicadores de Lagrange.

Por outro lado, para o caso $c > 0$, embora o problema possuísse estrutura variacional, utilizaremos o método de sub e supersolução, haja visto que, essa técnica fornecera limitações importantíssimas sobre as soluções encontradas, como por exemplo, estimativas que foram usadas para o estudo do comportamento assintótico das soluções.

Após analisarmos os resultados obtidos neste trabalho do ponto de vista matemático, também compreendemos seu significado diante da interpretação que há em dinâmica de populações. Biologicamente, temos que a sobrevivência da espécie será afetada pela existência de zonas onde há crescimento populacional $(g > 0)$, das regiões onde há entrada de indivíduos $(h > 0)$.

Precisamente, temos que se a presença desses fatores favoráveis forem de tal modo que $\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma \geq 0$, teremos que a espécie sobrevive independente da velocidade. Caso contrário, quando há poucas zonas favoráveis ou quando as zonas com alta taxa de mortalidade de indivíduos $(g < 0)$ e/ou um fluxo muito grande de saída do habitat $(h < 0)$, de tal modo que $\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma < 0$. Teremos que a sobrevivência da espécie dependerá da velocidade.

Em síntese, os resultados de existência fornecidos pelo Teorema 0.6 podem ser interpretados do ponto de vista do modelo do seguinte modo:

- Caso ocorra
$$\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma < 0,$$

teremos que a velocidade influência na sobrevivência da espécie. Isto pois, se a velocidade for grande de modo que,

$$\frac{1}{\lambda_1(g,h)} \leq \frac{1}{\lambda},$$

então a espécie não sobrevive (Teorema 0.6 itens (i) e (iv)).

- Por outro lado, caso

$$\int_{\Omega} g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \geq 0,$$

a espécie irá persistir, independente da velocidade $1/\lambda$ (Teorema 0.6 (iii)).

# Capítulo 1

# Problema de autovalor com pesos indefinidos

Neste capítulo, nosso objetivo é estabelecer a existência de autovalor principal do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x)u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

sendo $\Omega$ um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$ regular, $\lambda$ um parâmetro real, $g \in C^\theta(\overline{\Omega})$ e $h \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, ambas podem mudar de sinal, e $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$. Para isso, se faz necessário estudarmos primeiro o seguinte problema de autovalor auxiliar para $\mu = \mu(\lambda)$,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u + \mu(\lambda)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x)u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, o capítulo inicia no estudo do problema de autovalor auxiliar (1.2), em seguida, estudamos o caso $\mu(\lambda) = 0$ para estendermos os resultados para o problema (1.1). Para tanto, dividimos o capítulo do seguinte modo. Na Seção 1.1 temos as preliminares, dividida em duas subseções, sendo a Subseção 1.1.1 destinada a motivar a definição de solução fraca para o problema (1.2), e na Subseção 1.1.2 veremos duas decomposições que serão muito importantes na prova de um dos teoremas principais do capítulo. Na Seção 1.2 enunciamos e provamos o método dos Multiplicadores de Lagrange, método que será utilizado na Seção 1.3 para estabelecer existência e unicidade do autovalor principal do problema (1.2), além de obter sua caracterização variacional. Na Seção 1.3 também estabelecemos diversas propriedades da aplicação que a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ associa $\mu_1(\lambda)$ o único autovalor principal de (1.2). A Seção 1.4, é dedicada a obter a unicidade do autovalor principal positivo do problema (1.1) que, como veremos, serão os zeros de $\mu_1$. Além disso, também obtemos uma estimativa e à caracterização variacional para este autovalor principal.

# 1.1 Noções preliminares

Esta seção se dividirá em duas partes. Na Subseção 1.1.1 iremos fazer a motivação da definição de solução fraca do problema (1.2). Na Subseção 1.1.2 faremos o estudo de duas decomposições que serão cruciais em um dos principais resultados deste capítulo, e que será visto na Seção 1.4.

## 1.1.1 Soluções fracas

Primeiramente, vamos motivar a noção de solução fraca para um problema elíptico. Para isso, considere inicialmente o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x) u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

em que $\Omega$ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$ regular, $\lambda$ é um parâmetro real e $h \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, sendo $h$ uma função que pode mudar de sinal, e $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$.

**Exemplo 1**. Vamos supor que $f(x,s)$ é uma função $H\ddot{o}lder$ contínua em $x \in \overline{\Omega}$ e de classe $C^1$ na variável $s \in \mathbb{R}$. Observe que sendo $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ solução clássica de (1.3), então multiplicando a primeira equação de (1.3) por $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e integrando sobre $\Omega$, encontramos

$$-\int_\Omega \Delta u \phi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u)\phi \, \mathrm{d}x.$$

Com isso, usando o Teorema da Divergência (Teorema A.4), temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,u)\phi \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h(x) u \phi \, \mathrm{d}\sigma. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Observe que a equação (1.4) pode ser estendida a todo elemento de $W^{1,2}(\Omega)$.

De fato, seja $v \in W^{1,2}(\Omega)$, como $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{1,2}(\Omega)$, então existe uma sequência $(v_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que

$$v_m \to v \quad \text{em} \quad W^{1,2}(\Omega).$$

Como as funções $v_m$ são regulares, temos

$$\int_\Omega f(x,u)v_m \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_m \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h(x)uv_m \, \mathrm{d}\sigma. \tag{1.5}$$

A convergência de $v_m$ em $W^{1,2}(\Omega)$ implica que,

(i) $v_m \to v$ em $L^2(\Omega)$;

(ii) $\nabla v_m \to \nabla v$ em $L^2(\Omega)$;

(iii) $v_m(x) \to v(x)$ e $\nabla v_m(x) \to \nabla v(x)$ q.t.p em $\Omega$;

(iv) $|v_m(x)|, |\nabla v_m| \leq k(x)$ q.t.p em $\Omega$, para alguma $k \in L^2(\Omega)$.

Desse modo, observe

$$\lim_{m\to\infty} \nabla u(x) \cdot \nabla v_m(x) = \nabla u(x) \cdot \nabla v(x), \quad q.t.p \text{ em } \Omega,$$

e

$$|\nabla u(x) \cdot \nabla v_m(x)| \leq |\nabla u(x)||k(x)|, \quad q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Uma vez que $|\nabla u|, k \in L^2(\Omega)$ temos $|\nabla u(x)||k(x)| \in L^1(\Omega)$. Então podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2), e assim, obtemos

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_m \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \nabla u \cdot \nabla v_m \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

Observe que $f(x,u) \in L^2(\Omega)$, pois sendo $u \in C^1(\overline{\Omega})$ garantimos a existência de $M > 0$ de modo que, $-M \leq u(x) \leq M$. Logo, $(x,u(x)) \in \overline{\Omega} \times [-M,M]$, então $|f(x,u(x))| < +\infty$. Consequentemente, $\int_\Omega |f(x,u)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$. Daí, provém da Desigualdade de $H\ddot{o}lder$ e da imersão contínua de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ que

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega f(x,u)v_m - f(x,u)v \, \mathrm{d}x \right| &\leq \int_\Omega |f(x,u)v_m - f(x,u)v| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \|f(x,u)\|_{L^2(\Omega)} \|v_m - v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f(x,u)\|_{L^2(\Omega)} K_1 \|v_m - v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0,\end{aligned}$$

quando $m \to +\infty$. Analogamente, temos

$$\begin{aligned}\left|\lambda \int_{\partial\Omega} h(x)uv_m - \lambda \int_{\partial\Omega} h(x)uv \, d\sigma\right| &\leq |\lambda| \int_{\partial\Omega} |h(x)||u||v_m - v| \, d\sigma \\ &\leq |\lambda| \|h(x)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v_m - v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |\lambda| \|h(x)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} K_2 \|v_m - v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0,\end{aligned}$$

quando $m \to +\infty$. Passando a igualdade (1.5) ao limite, concluímos que a mesma vale para toda função em $W^{1,2}(\Omega)$. Isso nos motiva a seguinte definição.

**Definição 1.1.** *Dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de* (1.3) *quando*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} h(x)u\phi \, d\sigma = \int_{\Omega} f(x,u)\phi \, dx, \quad \forall \, \phi \in W^{1,2}(\Omega). \tag{1.6}$$

Observe que a Definição 1.1 se aplica para o nosso Problema de autovalor auxiliar (1.2). Como neste capítulo vamos iniciar estudando a existência de autovalor principal para o Problema (1.2), então precisaremos das seguintes definições.

**Definição 1.2.** *Fixado $\lambda \in \mathbb{R}$, um número $\mu \in \mathbb{R}$ será dito autovalor de* (1.2) *se esta equação admite solução fraca não trivial.*

**Definição 1.3.** *Fixado $\lambda \in \mathbb{R}$, um autovalor $\mu \in \mathbb{R}$ de* (1.2)*, será chamado de autovalor principal se possui uma autofunção que não muda de sinal.*

Vamos também definir supersolução de um operador, pois será um conceito utilizado diversas vezes neste trabalho.

**Definição 1.4.** *Dizemos que $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma supersolução de $(-\Delta + K, \mathcal{B}, \Omega)$ se*

$$\begin{cases} (-\Delta + K)\overline{u} \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}\overline{u} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

*Em que*

$$\mathcal{B} = \beta(\cdot) + \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta},$$

*com $\beta \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$. Além disso, se alguma das desigualdades é estrita, dizemos que $\overline{u}$ é supersolução estrita de $(-\Delta + K, \mathcal{B}, \Omega)$.*

### 1.1.2 Decomposições

Esta subseção é dedicada a estudar dois operadores específicos e as decomposições que eles produzem, pois estas serão usadas posteriormente para obter estimativas do autovalor principal positivo do problema (1.1).

Iniciamos considerando os conjuntos,

$$X = W^{2,2}(\Omega),\ W = \left\{ u \in W^{2,2}(\Omega), \int_\Omega u \ \mathrm{d}x = 0 \right\} \text{ e } Z = \{u \in W^{2,2}(\Omega), u \text{ constante}\}.$$

Assumindo que $\displaystyle\int_\Omega g \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \ \mathrm{d}\sigma \neq 0$, iremos estudar os operadores

$$\begin{aligned} Q : L^2(\Omega) &\to \left\{ v \in L^2(\Omega) : \int_\Omega v \ \mathrm{d}x = 0 \right\} \\ v &\longmapsto Q(v) = v - \frac{\displaystyle\int_\Omega v \ \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \ \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \ \mathrm{d}\sigma \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P : X &\to W \\ u &\longmapsto P(u) = u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Os primeiros resultados que veremos são referentes ao estudo das propriedades do operador $P$.

**Proposição 1.1.** *O operador P satisfaz as seguintes propriedades:*

*(i) P é linear;*

*(ii) P é contínuo;*

*(iii) P é autoadjunto;*

*(iv) P é fechado;*

*(v) R[P]= W;*

*(vi) N[P] = Z.*

***Demonstração***. O item (i) segue diretamente da linearidade da integral. Para provar o item (ii), observe que temos

$$
\begin{aligned}
\|Pu\|_X &= \left\| u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \, \mathrm{d}x \right\|_X \\
&\leq \|u\|_X + \frac{1}{|\Omega|}\left\| \int_\Omega u \, \mathrm{d}x \right\|_X \\
&\leq \|u\|_X + \frac{1}{|\Omega|}\left| \int_\Omega u \, \mathrm{d}x \right| |\Omega|^{1/2} \\
&= \|u\|_X + k\|u\|_{L^1(\Omega)}, \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

sendo $k = |\Omega|^{-1/2}$, e usando a imersão de $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que existe $c > 0$ de modo que, a desigualdade (1.8) se torna

$$\|Pu\|_X \leq \|u\|_X + kc\|u\|_X = (1+kc)\|u\|_X.$$

Portanto, $P$ é contínuo.

Provaremos agora o item (iii). Com efeito,

$$(Pu,v)_{W^{2,2}(\Omega)} = \left( u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \, \mathrm{d}x, v \right)_{W^{2,2}(\Omega)} = (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - \left( \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \, \mathrm{d}x, v \right)_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Denotando por $w = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u \, \mathrm{d}x$, temos

$$
\begin{aligned}
(Pu,v)_{W^{2,2}(\Omega)} &= (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - (w,v)_{W^{2,2}(\Omega)} \\
&= (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - \left( \int_\Omega wv \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla w \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - \int_\Omega wv \, \mathrm{d}x \\
&= (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \, \mathrm{d}x \int_\Omega v \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, denotando por $w' = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega v \, \mathrm{d}x$, temos

$$
\begin{aligned}
(u,Pv)_{W^{2,2}(\Omega)} &= (u, v-w')_{W^{2,2}(\Omega)} = (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - (u,w')_{W^{2,2}(\Omega)} \\
&= (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - \left( \int_\Omega uw' \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \nabla w' \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 w'}{\partial x_i \partial x_j} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - \int_\Omega uw' \, \mathrm{d}x \\
&= (u,v)_{W^{2,2}(\Omega)} - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v \, \mathrm{d}x \int_\Omega u \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

logo, $(Pu,v)_{W^{2,2}(\Omega)} = (u,Pv)_{W^{2,2}(\Omega)}$, mostrando que, $P$ é autoadjunto.

Para provarmos o item (iv), basta usarmos que $W^{2,2}(\Omega)$ é Hilbert e $P$ é autoadjunto densamente definido, assim, aplicamos a Proposição A.3 e garantimos que $P$ é fechado.

Iremos provar o item (v). Afirmamos que $R[P] = W$. De fato, dado $P(u) \in R[P]$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega P(u) \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \left( u - \int_\Omega \frac{1}{|\Omega|} u \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega u \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|\Omega|} \, \mathrm{d}x \int_\Omega u \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega u \, \mathrm{d}x - \frac{1}{|\Omega|} |\Omega| \int_\Omega u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u \, \mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}
$$

portanto $P(u) \in W$. Por outro lado, se $w \in W$ então $\displaystyle\int_\Omega w = 0$ e assim,

$$
P(w) = w - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega w \, \mathrm{d}x = w,
$$

então $w \in R[P]$. Concluímos que $R[P] = W$.

Para finalizar, provaremos o item (vi), ou seja, que $N[P] = Z$. A princípio, considere $u \in N[P]$, então

$$
\begin{aligned}
P(u) &= 0 \\
u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, \mathrm{d}x &= 0 \\
\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, \mathrm{d}x &= u,
\end{aligned}
$$

logo, $u = c.t.e$, o que implica que $u \in Z$. Considere agora $u \in Z$, assim

$$
P(u) = u - \frac{1}{|\Omega|} u \int_\Omega \, \mathrm{d}x = u - u = 0,
$$

então, $u \in N[P]$. Portanto, $N[P] = Z$. Com isso, concluímos a prova da proposição. $\square$

Vamos ao último resultado referente ao operador $P$.

**Proposição 1.2.** *O operador $P$ produz uma decomposição única, definida como $X = W \oplus Z$.*

***Demonstração***. A prova consiste em mostrar que $W^{\perp} = Z$. Para tanto, observamos primeiro que devido $P$ ser um operador linear, fechado, limitado e densamente definido, então $P$ satisfaz as condições do Teorema A.15 e Corolário A.1. Com isso, provando que $W$ é um conjunto fechado, teremos que as demais afirmações do Teorema A.15 serão válidas. Provaremos que $W$ é fechado. Com efeito, seja $u \in W^{2,2}(\Omega)$ e $u_n \subset W$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } W^{2,2}(\Omega),$$

isto é,

$$\|u_n - u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \to 0, \tag{1.9}$$

quando $n \to +\infty$. Devido a imersão $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que existe uma constante $c > 0$, de modo que

$$\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \leq c\|u_n - u\|_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Usando (1.9) temos

$$u_n \to u \text{ em } L^1(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\int_{\Omega} |u_n| \, \mathrm{d}x \to \int_{\Omega} |u| \, \mathrm{d}x.$$

Porém, como $u_n \in W$, isso resulta que

$$\int_{\Omega} |u| \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} |u_n| \, \mathrm{d}x = 0.$$

Assim, $u \in W$, mostrando que $W$ é fechado. Daí, usando o Teorema A.15 e Corolário A.1 temos que $W^{\perp} = Z$. Portanto, podemos escrever $X = W \oplus Z$. Concluímos a prova do resultado. $\square$

Agora, veremos resultados referentes ao operador $Q$. Afirmamos que o operador $Q$ produz uma decomposição única, dada por $L^2(\Omega) = Q[L^2(\Omega)] \oplus (1 - Q)[L^2(\Omega)]$. Para provarmos isso, não podemos usar os mesmos argumentos que usamos para o caso do operador $P$, isto pois $Q$ não é autoadjunto. Então, para a prova dessa afirmação, primeiro vamos mostrar o seguinte resultado referente as propriedades que o operador $Q$ possui.

**Proposição 1.3.** *O operador $Q$ satisfaz as seguintes propriedades:*

*(i)* *$Q$ é linear;*

*(ii)* *$Q$ é contínuo;*

*(iii)* $N[Q] = (1-Q)[L^2(\Omega)]$*;*

*(iv)* *$Q$ é uma projeção.*

***Demonstração***. O item (i) segue diretamente da linearidade da integral. Provaremos o item (ii). Com efeito, note que

$$
\begin{aligned}
\|Qv\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| v - \frac{\displaystyle\int_\Omega v \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\displaystyle\int_\Omega v \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|v\|_{L^2(\Omega)} + \left| \frac{\displaystyle\int_\Omega v \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \right| \left\| g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\displaystyle\int_\Omega |v| \, \mathrm{d}x}{\left|\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma\right|} \left( \|g\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma |\Omega|^{1/2} \right),
\end{aligned}
$$

definindo $k_1 = \left| \int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right|$ e $k_2 = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma$, então temos

$$
\|Qv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\|v\|_{L^1(\Omega)}}{k_1} (\|g\|_{L^2(\Omega)} + k_2).
$$

Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, existe $k_3 > 0$, tal que,

$$
\|v\|_{L^1(\Omega)} \leq k_3 \|v\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\|Qv\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{k_3 \|v\|_{L^2(\Omega)}}{k_1} (\|g\|_{L^2(\Omega)} + k_2) \\
&= (1 + k_4) \|v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

sendo $k_4 = k_3/k_1(\|g\|_{L^2(\Omega)} + k_2)$. Ou seja, $Q$ é contínuo,

Agora provaremos o item (iii), isto é, $N[Q] = (1-Q)[L^2(\Omega)]$. Primeiro, considere a função $v \in N(Q)$, consequentemente $Q(v) = 0$. Assim,

$$(1-Q)(v) = v - Q(v) = v.$$

Logo,

$$v = (1-Q)(v) \in (1-Q)(L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$N(Q) \subseteq (1-Q)(L^2(\Omega)).$$

Por outro lado, provaremos também que $(1-Q)[L^2(\Omega)] \subseteq N[Q]$. Para isso, mostraremos a seguinte igualdade

$$\int_\Omega Q(v)\ \mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, v \in L^2(\Omega).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_\Omega Q(v)\ \mathrm{d}x &= \int_\Omega v\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \left( \frac{\int_\Omega v\ \mathrm{d}x}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma} \right) \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma \right)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega v\ \mathrm{d}x - \frac{\int_\Omega v\ \mathrm{d}x}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma} \left( \int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma \right) = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Considere agora $v \in (1-Q)[L^2(\Omega)]$, então existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} v &= u - Q(u) \\ u - v &= Q(u). \end{aligned}$$

Integrando sobre $\Omega$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (u-v)\ \mathrm{d}x &= \int_\Omega Q(u)\ \mathrm{d}x \\ \int_\Omega (u-v)\ \mathrm{d}x &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Porém, também temos

$$v = (1-Q)(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega u\ \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma \right). \tag{1.12}$$

Além disso, pela definição do operador $Q$ e utilizando a igualdade (1.12), encontramos

$$\begin{aligned}
Q(v) &= v - \frac{\displaystyle\int_\Omega v \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma \right) \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega u \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma \right) - \frac{\displaystyle\int_\Omega v \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma \right) \\
&= \int_\Omega (u - v) \,\mathrm{d}x \left( \frac{1}{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma \right) \right) = 0,
\end{aligned}$$

a ultima igualdade obtivemos usando (1.11). Logo, $Q(v) = 0$ e portanto $v \in N[Q]$.

Iremos provar o item (iv). Pelos itens anteriores já temos que o operador $Q$ é linear e contínuo, então resta mostrar que $Q = Q^2$. Para isso, considere $u \in L^2(\Omega)$. Pelo item (iii) temos $u - Q(u) \in N[Q]$, consequentemente,

$$\begin{aligned}
Q(u - Q(u)) &= 0 \\
Q(u) - Q(Q(u)) &= 0 \\
Q(u) &= Q^2(u), \quad \forall\ u \in L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Portanto o operador $Q$ é uma projeção. Finalizamos a demonstração da proposição. □

Agora podemos provar que $Q$ produz uma decomposição única, conforme veremos no próximo resultado.

**Proposição 1.4.** *O Operador $Q$ produz uma decomposição única, dada por*

$$L^2(\Omega) = (1 - Q)[L^2(\Omega)] \oplus Q[L^2(\Omega)].$$

***Demonstração***. Como $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e $Q$ é uma projeção, segue da teoria de Análise Funcional (ver [6, p.477]) que $Q$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $N[I - Q] = R[Q]$;

(ii) $L^2(\Omega) = N[Q] + N[I - Q]$.

Daí, substituindo (i) no item (ii), temos

$$L^2(\Omega) = N[Q] + R[Q].$$

Como na Proposição 1.3 (item (iii)) provamos que $N[Q] = (1-Q)[L^2(\Omega)]$, e sabemos também que $R[Q] = Q[L^2(\Omega)]$, então

$$L^2(\Omega) = (1-Q)[L^2(\Omega)] + Q[L^2(\Omega)].$$

Afirmamos que essa soma é direta. De fato, veremos que $N[Q] \cap R[Q] = 0$. Seja a função $v \in N[Q] \cap R[Q]$. Assim, $Q(v) = 0$ e existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que $Q(u) = v$. Com isso,

$$Q(Q(u)) = Q(v) = 0.$$

Lembre que $Q = Q^2$. Daí,

$$v = Q(u) = Q(Q(u)) = Q(v) = 0,$$

isto é, $v = 0$. Portanto, $L^2(\Omega) = (1-Q)(L^2(\Omega)) \oplus Q(L^2(\Omega))$, e isso encerra a prova. $\square$

## 1.2 Multiplicadores de Lagrange

Esta seção se destina a provar o Teorema de Multiplicadores de Lagrange, visto que, será o Método utilizado para provarmos a existência de autovalor principal do problema (1.2). Iniciamos recordando as definições de derivadas em espaços de Banach.

**Definição 1.5.** *Dado um espaço de Banach $X$ e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que $I$ possui derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existir um funcional linear $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{\|v\|} = 0.$$

*A derivada de Fréchet no ponto $u$, quando existir, é única. Vamos denotá-la simplesmente por $I'(u)$. Ver [3, p.14].*

**Definição 1.6.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $U \subset X$ um conjunto aberto. Dizemos que o funcional $I : X \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1$ em $U$ ou que $I \in C^1(U, \mathbb{R})$ quando a derivada de Fréchet de $I$ existir em todo ponto $u \in A$ e a aplicação $I' : U \to X'$ for contínua.*

**Definição 1.7.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $U \subset X$ um conjunto aberto e seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $I$ é Gâteaux diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X'$ tal que, para todo $v \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = Av. \tag{1.13}$$

*Se $I$ é Gâteaux diferenciável em $u$, então existe um único funcional linear $A \in X'$ satisfazendo* (1.13). *Este é chamado diferencial de Gâteaux de $I$ em $u$ e é denotado por $DI(u)v$. Além disso, a aplicação $DI : U \to X'$ que associa para cada $u \in U$ na direção $v$ $DI(u)v \in I'$ é chamada de derivada de Gâteaux de $I$.*
*A derivada de Gâteaux no ponto $u$, quando existir, é única. Vamos denotá-la por $DI(u)v$. Ver [3, p.16].*

**Definição 1.8.** *Seja $X$ um espaço de Banach e $U$ um conjunto aberto em $X$. Dizemos que o funcional $I : X \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1$ em $U$ quando a derivada de Gâteaux de $I$ em $U$ e o operador $DI : U \to X'$ existirem e $DI$ for contínuo.*

Agora, veremos um resultado que garante que se o funcional $I$ é Gâteaux diferenciável, então será Fréchet diferenciável, e suas derivadas coincidem.

**Proposição 1.5.** *Assuma que $U \subseteq X$ é um conjunto aberto, $I$ é Gâteaux diferenciável em $U$ e $DI(u)v$ é contínuo em $u \in U$. Então $I$ também é Fréchet diferenciável em $u$, e $DI(u)v = I'(u)$.*

***Demonstração.*** Ver [3, Proposição 1.3.8]. □

Também precisaremos do seguinte resultado de Análise no $\mathbb{R}^N$.

**Teorema 1.1.** *(Teorema da Aplicação Inversa) Sejam $f : U \to \mathbb{R}^N$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^N$, fortemente diferenciável no ponto $a \in U$ e $f'(a) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um isomorfismo. (Equivalentemente: o determinante jacobiano $\det Jf(a) = \det(\partial f_i(a)/\partial x_j)$ é diferente de zero). Então $f$ é um homeomorfismo de um aberto $V$ contendo a sobre um aberto $W$ contendo $f(a)$. O homeomorfismo inverso $f^{-1} : W \to V$ é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$ e sua derivada nesse ponto é $[f'(a)]^{-1}$. Se $f \in C^k (k \geq 1)$ então $V$ pode ser tomado de modo que $f$ seja um difeomorfismo de classe $C^k$ de $V$ sobre $W$.*

***Demonstração.*** Ver [17, Teorema da Aplicação Inversa, p.287]. □

Já enunciamos os conceitos necessários para esta seção, agora vamos demonstrar um resultado que é fundamental para provar o Teorema de Multiplicadores de Lagrange.

**Lema 1.1.** *Seja $X$ um espaço de Banach e $I, G \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que existam $x_0, v, w \in X$ tais que*

$$I'(x_0)vG'(x_0)w \neq I'(x_0)wG'(x_0)v.$$

*Então o ponto $x_0$ não é extremo local de $I$ restrita ao conjunto $M = \{x \in X : G(x) = G(x_0)\}$.*

***Demonstração***. Considere $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(s,t) = (i(s,t), g(s,t))$, sendo

$$i(s,t) = I(x_0 + sv + tw) \quad \text{e} \quad g(s,t) = G(x_0 + sv + tw), \quad \forall\ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Note que $\psi$ é de classe $C^1$, pois $I$ e $G$ também são.

Por definição $\psi(0,0) = (i(0,0), g(0,0)) = (I(x_0), G(x_0))$. Então,

$$detJ\psi(0,0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial i}{\partial s}(0,0) & \dfrac{\partial i}{\partial t}(0,0) \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial s}(0,0) & \dfrac{\partial g}{\partial t}(0,0) \end{vmatrix}.$$

Calculando, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial s}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{i(h,0) - i(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{I(x_0 + hv) - I(x_0)}{h} = I'(x_0)v. \\ \frac{\partial g}{\partial s}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{G(x_0 + hv) - G(x_0)}{h} = G'(x_0)v. \\ \frac{\partial i}{\partial t}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{i(0,h) - i(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{I(x_0 + hw) - I(x_0)}{h} = I'(x_0)w. \\ \frac{\partial g}{\partial t}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{G(x_0 + hw) - G(x_0)}{h} = G'(x_0)w. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} detJ\psi(0,0) &= \begin{vmatrix} I'(x_0)v & I'(x_0)w \\ \\ G'(x_0)v & G'(x_0)w \end{vmatrix} \\ &= I'(x_0)vG'(x_0)w - I'(x_0)wG'(x_0)v, \end{aligned}$$

pois por hipótese $I'(x_0)vG'(x_0)w \neq I'(x_0)wG'(x_0)v$. Então estamos nas condições do Teorema da Aplicação Inversa. Portanto, existem vizinhanças abertas V e W de (0,0) e $\psi(0,0) = (I(x_0), G(x_0))$, respectivamente, tais que $\psi : V \to W$ é um difeomorfismo de classe $C^1$.

Mostraremos que dado $\delta > 0$ qualquer, existe $y_0 = y_0(\delta) \in M \cap B_\delta(x_0)$ de modo que, $I(y_0) < I(x_0)$. Com isso, provaremos que $x_0$ não pode ser um mínimo local de $I$ restrita à $M$. Observe ainda que $M \cap B_\delta(x_0) \neq \emptyset$, pois $x_0 \in M \cap B_\delta(x_0)$. Para obter $y_0$ como acima, vamos considerar $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(0,0) \subset V$ e, além disso, $\delta' < (\delta/\|v\|_X + \|w\|_X)$.

Com essa escolha, temos que $\psi$ é um difeomorfismo de $B_{\delta'}(0,0)$ em $\hat{W} = \psi(B_{\delta'}(0,0))$. Observe também que $\hat{W}$ é aberto, pois é a imagem de um aberto por difeomorfismo.

Note que $(F(x_0), G(x_0)) = \psi(0,0) \in \hat{W} = \psi(B_{\delta'}(0,0))$. Então, como $\hat{W}$ é aberto, podemos tomar $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $(I(x_0) - \varepsilon, G(x_0)) \in \hat{W}$. Devido $\psi$ ser uma bijeção de $B_{\delta'}(0,0)$ em $\hat{W}$, existe $(s_0, t_0) \in B_{\delta'}(0,0)$, tal que

$$\psi(s_0, t_0) = (I(x_0) - \varepsilon, G(x_0)). \tag{1.14}$$

Por outro lado, pela definição da função $\psi$ temos

$$\psi(s_0, t_0) = (I(x_0 + s_0 v + t_0 w), G(x_0 + s_0 v + t_0 w)). \tag{1.15}$$

Logo, por (1.14) e (1.15) valem as seguintes igualdades

$$\begin{cases} I(x_0 + s_0 v + t_0 w) = I(x_0) - \varepsilon < I(x_0), \\ G(x_0 + s_0 v + t_0 w) = G(x_0). \end{cases} \tag{1.16}$$

Defina $y_0 = x_0 + s_0 v + t_0 w$. Devido a primeira equação de (1.16) temos $I(y_0) < I(x_0)$. Agora pela segunda equação de $(1.16)$, temos $G(y_0) = G(x_0)$, portanto $y_0 \in M$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|y_0 - x_0\|_X &= \|x_0 + s_0 v + t_0 w - x_0\|_X \\ &= \|s_0 v + t_0 w\|_X \\ &\leq \|s_0 v\|_X + \|t_0 w\|_X \\ &\leq |s_0|\|v\|_X + |t_0|\|w\|_X. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Como $(s_0, t_0) \in B_{\delta'}(0,0)$, então $|(s_0, t_0)| \leq \delta' < \delta/(\|v\|_X + \|w\|_X)$. Uma vez que temos, $|s_0| \leq |(s_0, t_0)|$ e $|t_0| \leq |(s_0, t_0)|$, substituindo essas estimativas em $(1.17)$, encontramos

$$\begin{aligned} \|y_0 - x_0\|_X &\leq |(s_0, t_0)|(\|v\|_X + \|w\|_X) \\ &\leq \delta'(\|v\|_X + \|w\|_X) \\ &< \frac{\delta}{\|v\|_X + \|w\|_X}(\|v\|_X + \|w\|_X) \\ &= \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que $y_0 \in B_\delta(x_0)$. Logo, $x_0$ não pode ser um mínimo local de $I$ restrita a $M$. De maneira análoga, para mostrar que $x_0$ não pode ser ponto de máximo local de $I$ restrita a $M$, basta tomar $\varepsilon > 0$ pequeno tal que $I((x_0) + \varepsilon, G(x_0)) \in \hat{W}$. Isso completa a demonstração. $\square$

Agora vamos provar o método de Multiplicadores de Lagrange em Espaços de Banach, que se trata do objetivo desta seção.

**Teorema 1.2.** *(Multiplicadores de Lagrange) Sejam $X$ um espaço de Banach, $I, G \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $x_0 \in X$ um extremo local de $I$ restrita ao conjunto $M = \{x \in X : G(x) = G(x_0)\}$. Caso $G'(x_0) \neq 0$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que*

$$I'(x_0)w = \lambda G'(x_0)w, \quad \forall\, w \in X.$$

*O número real $\lambda$ é chamado multiplicador de lagrange.*

***Demonstração***. Suponha que as hipóteses do Teorema sejam satisfeitas. Como $x_0 \in X$ é um extremo local de $I$ restrita a $M$, então a contra positiva do Lema 1.1 nos fornece a seguinte igualdade

$$I'(x_0)vG'(x_0)w = I'(x_0)wG'(x_0)v, \quad \forall\, v, w \in X.$$

Por hipótese temos $G'(x_0) \neq 0$, então existe $w_0 \in X$ tal que $G'(x_0)w_0 \neq 0$. Assim, substituindo $w = w_0$ na equação acima, obtemos

$$I'(x_0)v = \frac{I'(x_0)w_0}{G'(x_0)w_0} G'(x_0)v, \quad \forall\, v \in X.$$

Logo, tomando $\lambda = \dfrac{I'(x_0)w_0}{G'(x_0)w_0}$ o resultado segue. □

Na próxima seção usaremos o Método de Multiplicadores de Lagrange para mostrar a existência de autovalores para o problema (1.2).

## 1.3 Problema de autovalor auxiliar

Nesta seção estudamos o problema de autovalor auxiliar (1.2). Nosso objetivo é o seguinte: provar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado, existe $\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ autovalor principal de (1.2), além de obter uma caracterização variacional para tal autovalor. Vamos iniciar provando uma proposição que nos auxiliará a obter os resultados desejados e que será utilizada muitas vezes no decorrer deste trabalho. A demonstração dela também pode ser encontrada no artigo de G. A. Afrouzi e K. J. Brown [2].

**Proposição 1.6.** *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\int_{\partial\Omega} u^2 \, d\sigma \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + C(\varepsilon) \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x, \quad \forall\, u \in W^{1,2}(\Omega).$$

***Demonstração***. Suponha que o resultado seja falso. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade: qualquer que seja $c > 0$, existe $v = v_c \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} v^2 \, d\sigma > \varepsilon_0 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + c \int_{\Omega} v^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.18}$$

Em particular, tomando $c = n$, obtemos uma sequência $(v_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$, que verifica

$$\int_{\partial\Omega} v_n^2 \, d\sigma > \varepsilon_0 \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, \mathrm{d}x + n \int_{\Omega} v_n^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.19}$$

Analisando (1.19) tem-se $\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, \mathrm{d}x \neq 0$, para $n$ suficientemente grande. De fato, supondo $\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ isso implica que $\nabla v_n = 0$ q.t.p em $\Omega$, e assim obtemos da Proposição A.2 que $v_n \equiv k_n$ em $\Omega$, sendo $k_n$ constante não nula (caso contrário a desigualdade (1.19) não seria satisfeita). Assim, (1.19) implicaria que

$$k_n^2 \int_{\partial\Omega} d\sigma > n k_n^2 \int_{\Omega} \mathrm{d}x$$
$$\int_{\partial\Omega} d\sigma > n \int_{\Omega} \mathrm{d}x.$$

Ou seja, $|\partial\Omega| > n|\Omega|$, um absurdo para $n$ suficientemente grande. Portanto, passando a uma subsequência, podemos supor que $\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)} \neq 0$, então dividindo (1.19) por $T = \displaystyle\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, \mathrm{d}x$, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{v_n}{T^{1/2}}\right)^2 d\sigma > \varepsilon_0 + n \int_{\Omega} \left(\frac{v_n}{T^{1/2}}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Além disso,

$$\int_{\Omega} \left|\nabla \left(\frac{v_n}{T^{1/2}}\right)\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{T} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, \mathrm{d}x = 1.$$

Ou seja, a sequência $u_n = v_n / T^{1/2}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x = 1; \tag{1.20}$$

$$\int_{\partial\Omega} u_n^2 \, d\sigma \geq \varepsilon_0 + n \int_{\Omega} u_n^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.21}$$

Agora, vamos analisar $\left(\int_\Omega u_n^2\, \mathrm{d}x\right)$.

Suponhamos inicialmente que $\left(\int_\Omega u_n^2\, \mathrm{d}x\right)$ é ilimitada. Consideremos a sequência normalizada $w_n = u_n/\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$. Note que $(w_n)$ é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$, pois

$$
\begin{aligned}
\|w_n\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} &= \|\nabla w_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_n\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + 1 \\
&= \frac{1}{\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right) + 1 \\
&= \frac{1}{\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}} + 1.
\end{aligned}
$$

Obtivemos a última igualdade usando (1.20).

Como $\int_\Omega u_n^2\, \mathrm{d}x$ é ilimitada por hipótese, então existe $M > 0$ tal que $\int_\Omega u_n^2\, \mathrm{d}x > M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$
\|w_n\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{1}{M} + 1,
$$

o que mostra que $(w_n)$ é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Além disso, da continuidade do operador traço, segue que $w_n$ também é limitada em $L^2(\partial\Omega)$. Porém, notemos que multiplicando (1.21) por $1/\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} w_n^2\, d\sigma &\geq \frac{1}{\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}}\left(\varepsilon_0 + n\int_\Omega u_n^2\, \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\varepsilon_0}{\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}} + \frac{n\int_\Omega u_n^2\, \mathrm{d}x}{\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&\geq 0 + n\cdot 1 = n,
\end{aligned}
$$

o que é impossível, visto que $\|w_n\|_{L^2(\partial\Omega)}$ é limitada. Portanto, chegamos a uma contradição, o que nos garante que $\left(\int_\Omega u_n^2\, \mathrm{d}x\right)$ não pode ser ilimitada.

Uma vez que $(u_n)$ é limitada em $L^2(\Omega)$ e satisfaz (1.20), segue que $(u_n)$ também é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$, então a menos de subsequência temos:

(i) $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, (pois $W^{1,2}(\Omega)$ é Banach Reflexivo);

(ii) $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, (devido a imersão compacta $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$);

(iii) $u_n \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$, (devido a compacidade do operador traço, Teorema A.7).

Então como $u_n$ é limitada em $L^2(\partial\Omega)$ e vale (1.21), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n^2 \, \mathrm{d}x = 0,$$

ou seja, $(u_n)$ converge para 0 em $L^2(\Omega)$, consequentemente, pela unicidade do limite $u = 0$, então $(u_n)$ converge para 0 em $L^2(\partial\Omega)$. Mas isso é impossível, devido (1.21), logo a sequência $\left(\int_\Omega u_n^2 \, \mathrm{d}x\right)$ não é limitada. Portanto, não existe $\varepsilon_0$ que seja verdadeira a afirmativa (1.19), e concluímos a demonstração do resultado. □

Como mencionado anteriormente, nossa intenção nesta seção é usar o método de Multiplicadores de Lagrange para provar a existência do autovalor principal de (1.2). Iniciamos associando os funcionais $I_\lambda, G : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g u^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h u^2 \, d\sigma \tag{1.22}$$

e

$$G(u) = \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x. \tag{1.23}$$

Além disso, definimos os conjuntos

$$M = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega); \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x = 1 \right\} \text{ e } S_\lambda = \{I_\lambda(u) : u \in M\}. \tag{1.24}$$

No próximo resultado vamos demonstrar que $S_\lambda$ é limitado inferiormente, pois servirá para nos assegurar que $I_\lambda$ restrito a $M$ possui um mínimo local.

**Lema 1.2.** *$S_\lambda$ é limitado inferiormente.*

***Demonstração***. Vamos analisar os termos do funcional $I_\lambda$. Notemos inicialmente que

$$\left| \lambda \int_{\partial\Omega} h u^2 \, d\sigma \right| \leq |\lambda| \|h\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u^2 \, d\sigma.$$

Usando a Proposição 1.6 nesta desigualdade, garantimos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ de modo que

$$\left|\lambda \int_{\partial\Omega} hu^2 \, d\sigma\right| \leq \varepsilon|\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + |\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)} C(\varepsilon),$$

onde usamos que $\displaystyle\int_{\Omega} u^2 \, \mathrm{d}x = 1$. Portanto,

$$-\lambda \int_{\partial\Omega} hu^2 \, d\sigma \geq -\varepsilon|\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - |\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)} C(\varepsilon). \tag{1.25}$$

Além disso,

$$\left|\lambda \int_{\Omega} gu^2 \, \mathrm{d}x\right| \leq |\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})} \int_{\Omega} u^2 \, \mathrm{d}x = |\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Logo,

$$-\lambda \int_{\Omega} gu^2 \, \mathrm{d}x \geq -|\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})}. \tag{1.26}$$

Substituindo as estimativas (1.25) e (1.26) na expressão $I_\lambda(u)$ temos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - |\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})} - \varepsilon|\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - |\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)} C(\varepsilon) \\ &= \left(1 - \varepsilon|\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)}\right) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x\right) - |\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})} - |\lambda| C(\varepsilon)\|h\|_{C(\partial\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Tomando $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon|\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)} < 1$, encontramos

$$I_\lambda(u) \geq -|\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})} - |\lambda| C(\varepsilon)\|h\|_{C(\partial\Omega)}.$$

Portanto, o conjunto $S_\lambda$ é limitado inferiormente. □

Agora vamos provar que os funcionais $I_\lambda, G$ possuem a regularidade requerida pelo Teorema de Multiplicadores de Lagrange.

**Lema 1.3.** *Os funcionais* $I_\lambda, G : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *são de classe* $C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

***Demonstração***. Vamos provar que $I_\lambda$ e $G$ são de classe $C^1(W^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$ usando a Proposição 1.5. Inicialmente provaremos que $G \in C^1(W^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$, para isso, note que

$$\begin{aligned}
\frac{G(u+tv)-G(u)}{t} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega (u+tv)^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x}{t} \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega utv \,\mathrm{d}x + t^2 \int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x}{t} \\
&= \frac{\displaystyle 2\int_\Omega utv \,\mathrm{d}x + t^2 \int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x}{t} \\
&= 2\int_\Omega uv \,\mathrm{d}x + t\int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$DG(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{G(u+tv)-G(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(2\int_\Omega uv \,\mathrm{d}x + t\int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x\right) = 2\int_\Omega uv \,\mathrm{d}x.$$

Provaremos a continuidade de $DG$. Seja $(u_m)$ uma sequência em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, pela imersão contínua de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ temos para $c > 0$ que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\ \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ e como $u_m \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_0 > 0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > m_0$ implica $\|u_m - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} < \varepsilon$, logo,

$$\|u_m - u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u_m - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} < c.\varepsilon = \overline{\varepsilon}.$$

Ou seja, $u_m \to u$ em $L^2(\Omega)$. Daí, utilizando a Desigualdade de $H\ddot{o}lder$ para todo $v \in W^{1,2}(\Omega)$ com $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned}
|[DG(u_m)-DG(u)]v| &= 2\left|\int_\Omega (u_m v - uv)\mathrm{d}x\right| \leq 2\int_\Omega |u_m v - uv| \mathrm{d}x \\
&\leq 2\int_\Omega |u_m - u|.|v| \mathrm{d}x \\
&= 2\|u_m - u\|_{L^2(\Omega)}.\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2\|u_m - u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|DG(u_m)-DG(u)\|_{(W^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\|\leq 1} |[DG(u_m)-DG(u)]v| \leq 2\|u_m - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

quando $m \to +\infty$. Logo, pela Proposição 1.5 concluímos que $G \in C^1(X,\mathbb{R})$ e ainda a derivada de Gateaux e de Frécheat coincidem.

Mostraremos que $I_\lambda \in C^1(W^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$. Para isso, consideramos $I_\lambda(u) = I_1(u) - I_2(u) - I_3(u)$, sendo

$$I_1(u) = \int_\Omega |\nabla u| \, \mathrm{d}x, \;\; I_2(u) = \lambda \int_\Omega gu^2 \, \mathrm{d}x, \;\; I_3(u) = \lambda \int_{\partial\Omega} hu^2 \, d\sigma.$$

Em seguida, provaremos que $I_1, I_2, I_3 \in C^1(W^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$ com

$$I_1'(u)v = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x, \; I_2'(u)v = 2\lambda \int_\Omega gvu \, \mathrm{d}x \text{ e } I_3'(u)v = 2\lambda \int_{\partial\Omega} huv \, d\sigma, \; \forall \; u,v \in W^{1,2}(\Omega).$$

A princípio vamos calcular a derivada de Gateaux de $I_1$. Para isso, notemos que

$$\frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla(u+tv)|^2 \, \mathrm{d}x \; - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{t},$$

e como $\nabla(u+tv) = \nabla u + t\nabla v$, então,

$$|\nabla(u+tv)|^2 = \langle \nabla u + t\nabla v, \nabla u + t\nabla v\rangle = |\nabla u|^2 + t^2|\nabla v|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla v.$$

Assim,

$$\frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{t}.$$

Portanto,

$$DI_1(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

Mostraremos agora a continuidade do operador $DI_1$. Analogamente, considere $(u_m)$ uma sequência em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, assim para cada $v \in W^{1,2}(\Omega)$ com $\|v\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |[DI_1(u_m) - DI_1(u)]v| &= 2\left|\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla v - \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x\right| \leq 2\int_\Omega |\nabla u_m \cdot \nabla v - \nabla u \cdot \nabla v| \, \mathrm{d}x \\ &\leq 2\int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u||\nabla v| \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Das desigualdades de Cauchy-Schwarz e de *Hölder* (Teorema A.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
|[DI_1(u_m) - DI_1(u)]v| &\leq 2\left(\int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}x \\
&\leq 2\|\nabla(u_m - u)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2\|\nabla(u_m - u)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
||DI_1(u_m) - DI_1(u)||_{(W^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v\in W^{1,2}(\Omega)}} |[DI_1(u_m) - DI_1(u)]v| \leq \|\nabla(u_m - u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0,
$$

quando $m \to +\infty$. Portanto, $I_1 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e $DI_1 = I_1'$.

Cálculos análogos nos mostram a igualdade

$$
DI_2(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{I_2(u+tv) - I_2(u)}{t} = 2\lambda \int_\Omega gvu \,\mathrm{d}x,
$$

e que o operador $DI_2 = I_2'$ é contínuo.

Agora vamos considerar $I_3(u) = \lambda \int_{\partial\Omega} hu^2 \, d\sigma$ e calcular a derivada de Gateaux. Observe inicialmente que

$$
\begin{aligned}
I_3(u+tv) &= \lambda \int_{\partial\Omega} h(u+tv)^2 \, d\sigma = \lambda \int_{\partial\Omega} h(u^2 + 2utv + (tv)^2) \, d\sigma \\
&= \lambda \left[\int_{\partial\Omega} hu^2 \, d\sigma + 2t \int_{\partial\Omega} huv \, d\sigma + t^2 \int_{\partial\Omega} hv^2 \, d\sigma\right].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{I_3(u+tv) - I_3(u)}{t} &= \frac{\lambda \left[\int_{\partial\Omega} hu^2 \, d\sigma + 2t \int_{\partial\Omega} huv \, d\sigma + t^2 \int_{\partial\Omega} hv^2 \, d\sigma - \int_{\partial\Omega} hu^2 \, d\sigma\right]}{t} \\
&= \frac{2\lambda t \int_{\partial\Omega} huv \, d\sigma + \lambda t^2 \int_{\partial\Omega} hv^2 \, d\sigma}{t} \\
&= 2\lambda \int_{\partial\Omega} huv \, d\sigma + \lambda t \int_{\partial\Omega} hv^2 \, d\sigma.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$DI_3(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{I_3(u+tv) - I_3(u)}{t} = 2\lambda \int_{\partial\Omega} huv\, d\sigma.$$

Provaremos que $DI_3(u)$ é contínua. De fato, pela continuidade do operador traço $T: W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ temos que $u_m \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$. Assim, para todo $v \in W^{1,2}(\Omega)$, com $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|[DI_3(u_m) - DI_3(u)]v| &= 2\left|\lambda \int_{\partial\Omega} (hu_m v - huv) d\sigma\right| \\
&\leq 2|\lambda| \int_{\partial\Omega} |hu_m - hu||v| d\sigma \\
&\leq 2|\lambda| \|hu_m - hu\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq 2|\lambda| \|h\|_{C(\partial\Omega)} \|u_m - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $m \to +\infty$, pois $h$ é contínua e $u_m \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$.

Portanto, como provamos que $I_1, I_2, I_3 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, então $I_\lambda \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$. Isso finaliza a prova do lema. $\square$

Vamos obter outro importante resultado, este futuramente será usado no estudo da autofunção associada ao autovalor principal de (1.2).

**Proposição 1.7.** *Se $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução não negativa e não-trivial de* (1.2)*, então $u_0(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.*

***Demonstração***. A prova da proposição segue como consequência do Corolário A.2. Com efeito, primeiro recordamos que $g$ e $h$ definidas em $\Omega$ e sobre $\partial\Omega$, respectivamente, podem mudar de sinal, por isso, consideramos $g = g^+ + g^-$ e $h = h^+ + h^-$.

Seja $u_0$ solução de (1.2), então $u_0$ verifica

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \lambda(g^+ + g^-)(x)u_0 + \mu(\lambda)u_0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta} = \lambda(h^+ + h^-)(x)u_0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.28}$$

Vamos analisar (1.28) considerando os 3 casos possíveis referentes ao sinal de $\mu$ e de $\lambda$, e verificaremos que em todos os casos possíveis estamos nas condições do Corolário A.2.

1º Caso: $\mu \geq 0$ e $\lambda > 0$.

Tome $\gamma > 0$ a ser escolhido, e considere os operadores $\mathcal{L} = -\Delta - \lambda g^- + \gamma$ em $\Omega$ e $\mathcal{B} = \partial \cdot / \partial \eta - \lambda h^-$ sobre $\partial\Omega$. Então, podemos reescrever (1.28) como

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_0 = \lambda g^+(x)u_0 + \mu u_0 + \gamma u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u_0 = \lambda h^+(x)u_0 \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.29}$$

Temos que (1.29) possui supersolução estrita. De fato, considere a função $\psi \equiv K$, sendo $K$ uma constante positiva. Escolhendo $\gamma$ tal que $-\lambda g^+ + \gamma > 0$ em $\Omega$. Assim, um cálculo direto nos mostra

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi = -\Delta K - \lambda g^-(x)K + \gamma K = -\lambda g^-(x)K + \gamma K > 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}\psi = \dfrac{\partial K}{\partial \eta} - \lambda h^-(x)K = -\lambda h^-(x)K \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Isto é, $\psi$ é uma supersolução estrita para todo $x \in \overline{\Omega}$.

2º Caso: $\mu < 0$ e $\lambda > 0$.

Considere os operadores $\mathcal{L} = -\Delta - \lambda g^- - \mu$ em $\Omega$ e $\mathcal{B} = \partial \cdot / \partial \eta - \lambda h^-$ sobre $\partial\Omega$. Com isso, podemos reescrever (1.28) como sendo o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_0 = \lambda g^+(x)u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u_0 = \lambda h^+(x)u_0 \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Considerando a mesma função $\psi$ definida no 1º Caso, obtemos

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi = -\Delta K - \lambda g^-(x)K - \mu K = -\lambda g^-(x)K - \mu K > 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}\psi = \dfrac{\partial K}{\partial \eta} - \lambda h^-(x)K = -\lambda h^-(x)K \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Novamente, encontramos que $\psi$ é supersolução estrita para todo $x \in \overline{\Omega}$.

3º Caso: $\mu < 0$ e $\lambda < 0$.

Considere os operadores $\mathcal{L} = -\Delta - \lambda g^+ - \mu$ em $\Omega$ e $\mathcal{B} = \partial \cdot / \partial \eta - \lambda h^+$ sobre $\partial\Omega$. Com isso, temos

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_0 = \lambda g^-(x)u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u_0 = \lambda h^-(x)u_0 \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Novamente a mesma função $\psi$ definida nos casos anteriores é uma supersolução estrita, pois $\mathcal{L}u_0 = -\lambda g^+(x)u_0 - \mu u_0 > 0$ em $\Omega$.

Portanto, em todos os casos conseguimos uma supersolução estrita de (1.28), e consequentemente pelo Corolário A.2, temos para todo $x \in \overline{\Omega}$, vale que $u_0(x) > 0$. Finalizamos a prova. $\square$

O próximo resultado se trata do teorema que prova a existência de autovalores principais para o problema (1.2).

**Teorema 1.3.** *Assuma que $g \not\leq 0$ em $\Omega$, ou $h \not\leq 0$ sobre $\partial\Omega$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, existe um único autovalor principal de (1.2), que será denotado por $\mu_1(\lambda)$. Além disso, este autovalor satisfaz*

$$\mu_1(\lambda) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g u^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h u^2 \, d\sigma : u \in W^{1,2}(\Omega), \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x = 1\right\}.$$

*E ainda, $\mu_1(\lambda)$ admite uma autofunção $\phi_1(\lambda)$ de classe $C^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_1(\lambda) > 0$ em $\overline{\Omega}$.*

***Demonstração***. A primeira parte da demonstração consiste em mostrar a existência de autovalor principal para o problema (1.2), para isso usaremos o Método de Multiplicadores de Lagrange visto na Seção 1.2. A segunda parte consiste em provar que a autofunção principal é regular e estritamente positiva. Por último mostraremos a unicidade do autovalor principal.

Iniciamos provando que o ínfimo de $I_\lambda(u)$ em $M$ existe e é atingido. De fato, provém do Lema 1.2 que $I_\lambda(u)$ é limitado inferiormente, logo possui ínfimo. Vamos provar que ele é atingido. Denote

$$\alpha = \inf_{u \in M}\{I_\lambda(u)\}.$$

Para $M$ definido em (1.24). Considere uma sequência $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ minimizante, ou seja,

$$u_n \in M \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} I(u_n) = \alpha.$$

Notemos que $(u_n)$ é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Com efeito, usando a desigualdade (1.27) para $u = u_n$ encontramos

$$I_\lambda(u_n) \geq (1 - |\lambda|\varepsilon\|h\|_{C(\partial\Omega)})\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - |\lambda|\|h\|_{C(\partial\Omega)}C(\varepsilon) - |\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})},$$

e tomando $\varepsilon = \overline{\varepsilon}$ de modo que $|\lambda|\overline{\varepsilon}\|h\|_{C(\partial\Omega)} = 1/2$, temos

$$I_\lambda(u_n) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - |\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})} - |\lambda|C(\overline{\varepsilon})\|h\|_{C(\partial\Omega)}.$$

Então,

$$I_\lambda(u_n) + |\lambda|\|g\|_{C(\overline{\Omega})} + |\lambda|C(\overline{\varepsilon})\|h\|_{C(\partial\Omega)} \geq \frac{1}{2}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.30}$$

Como $I(u_n)$ é limitada (pois é convergente), a equação (1.30) nos garante que $(\nabla u_n)$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Como $u_n \in M$, temos que $(u_n)$ também é limitada em $L^2(\Omega)$. Consequentemente, $(u_n)$ é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$.

A limitação de $u_n$ em $W^{1,2}(\Omega)$ implica que, a menos de subsequência:

(i) $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,2}(\Omega)$, (pois $W^{1,2}(\Omega)$ é Banach Reflexivo);

(ii) $u_n \to u_0$ em $L^2(\Omega)$, (devido a imersão compacta $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$);

(iii) $u_n(x) \to u_0(x)$ q.t.p em $\Omega$, (provém do Teorema $A.11$);

(iv) Existe $w \in L^2(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq w(x)$ q.t.p em $\Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$, (provém do Teorema $A.11$).

Como $u_n \in M$ e (ii) ocorre, segue que $u_0 \in M$. Afirmamos que $I(u_0) = \alpha$, ou seja, o ínfimo é atingindo em $u_0$. Vamos provar analisando cada integral de $I(u_0)$ separadamente. Recordamos que $g$ é $H\ddot{o}lder$ contínua em $\overline{\Omega}$. Como por (iv) $w \in L^2(\Omega)$ e $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ então $gw^2 \in L^1(\Omega)$, e ainda $|gu_n^2(x)| \leq gw^2(x)$ q.t.p em $\Omega$. Além disso, por (iii) temos

$$gu_n^2(x) \to gu_0^2(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Portanto, estamos nas condições do Teorema A.2 (Convergência Dominada de Lebesgue), logo

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega gu_n^2 \ \mathrm{d}x = \int_\Omega gu_0^2 \ \mathrm{d}x. \tag{1.31}$$

Além disso, a limitação de $u_n$ em $W^{1,2}(\Omega)$ implica que, a menos de subsequência:

(i)' $u_n \to u_0$ em $L^2(\partial\Omega)$; (devido a imersão compacta $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$)

(ii)' $u_n(x) \to u_0(x)$ q.t.p em $\partial\Omega$; (devido o Teorema A.11)

(iii)' Existe $f \in L^2(\partial\Omega)$, tal que $|u_n(x)| \leq f(x)$ q.t.p sobre $\partial\Omega$. (devido o Teorema A.11)

Recordamos também que a função $h$ é $H\ddot{o}lder$ contínua sobre $\partial\Omega$. Como por (iii)' a função $f$ pertencem a $L^2(\partial\Omega)$ e $L^2(\partial\Omega) \subset L^1(\partial\Omega)$, então $h(f(x))^2 \in L^1(\partial\Omega)$, e ainda $|hu_n^2(x)| \leq h(f(x))^2$ q.t.p sobre $\partial\Omega$. Usando (ii)' segue que

$$hu_n^2(x) \to hu_0^2(x), \ \text{q.t.p} \ \text{sobre } \partial\Omega.$$

Novamente estamos nas condições do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, assim temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial\Omega} hu_n^2 \ d\sigma = \int_{\partial\Omega} hu_0^2 \ d\sigma. \tag{1.32}$$

Resta analisar $\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x$. Para isso, defina o funcional

$$\begin{aligned} \psi : W^{1,2}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \psi(u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Afirmação: $\psi$ é fracamente semicontínua inferiormente, visto que $\psi$ satisfaz o Teorema A.14. De fato, sabemos que $\psi$ é contínua, então resta mostrar a convexidade, para isso considere $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ e $t \in [0,1]$, assim sendo temos

$$\begin{aligned} \psi(ut + (1-t)v) &= \|\nabla(ut + (1-t)v)\|_{L^2(\Omega)} = \|t\nabla u + (1-t)\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|t\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|(1-t)\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq t\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + (1-t)\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= t\psi(u) + (1-t)\psi(v). \end{aligned}$$

Portanto, $\psi$ é uma função convexa e logo é fracamente semicontínua inferiormente. Com isso, pela propriedade de função fracamente semicontínua inferiormente temos que,

$$\psi(u_0) \leq \liminf_n \psi(u_n),$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, \mathrm{d}x \leq \liminf_n \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.33}$$

Daí como

$$I_\lambda(u_0) = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g u_0^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h u_0^2 \, d\sigma,$$

provém de (1.31), (1.32) e (1.33) que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_0) &\leq \liminf_n \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x - \lim \lambda \int_\Omega g u_n^2 \, \mathrm{d}x - \lim \lambda \int_{\partial\Omega} h u_n^2 d\sigma \\ &= \liminf_n \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x - \limsup_n \lambda \int_\Omega g u_n^2 \, \mathrm{d}x - \limsup_n \lambda \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, d\sigma \\ &\leq \liminf_n \left( \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g u_n^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, d\sigma \right) \\ &= \liminf_n I_\lambda(u_n) \\ &= \lim I_\lambda(u_n) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\alpha = \inf\limits_{M} I_\lambda(u)$ e $u_0 \in M$ então por definição do ínfimo, tem-se $I_\lambda(u_0) \geq \alpha$. Portanto garantimos $I_\lambda(u_0) = \alpha$, isto é, o ínfimo é atingido em $u_0$.

Para aplicar Multiplicadores de Lagrange e provar que existe autovalor para o problema (1.2), vamos considerar o funcional $G$ definido em (1.23). Usando o Lema 1.3 temos que $I_\lambda, G$ são de classe $C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ com as seguintes derivadas, para todo $\phi, u \in W^{1,2}(\Omega)$,

$$I'_\lambda(u)\phi = 2\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \,\mathrm{d}x - 2\lambda \int_\Omega gu\phi \,\mathrm{d}x - 2\lambda \int_{\partial\Omega} hu\phi \, d\sigma \quad \text{e} \quad G'(u)\phi = 2\int_\Omega u\phi \,\mathrm{d}x.$$

Notemos ainda que $G'(u) \neq 0$ para todo $u \in M$, visto que,

$$G'(u)u = 2\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x = 2 \neq 0,$$

para todo $u \in M$. Então, para aplicar os Multiplicadores de Lagrange resta lembrarmos que o funcional $I_\lambda|_M$ possui mínimo local, sendo este $u_0$. Assim, garantimos a existência de $\mu \in \mathbb{R}$, que denotaremos por $\mu_1(\lambda)$, verificando a seguinte igualdade

$$I'_\lambda(u_0)\phi = \mu_1(\lambda) G'(u_0)\phi, \quad \forall\, \phi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega gu_0\phi \,\mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} hu_0\phi \, d\sigma = \mu_1(\lambda) \int_\Omega u_0\phi \,\mathrm{d}x.$$

Em outras palavras, $u_0$ é solução fraca de (1.2). Além disso, fazendo $\phi = u_0$ na igualdade acima e lembrando que $u_0 \in M$, segue

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega gu_0^2 \,\mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} hu_0^2 \, d\sigma = \mu_1(\lambda) \int_\Omega u_0^2 \,\mathrm{d}x = \mu_1(\lambda),$$

isto é,

$$\mu_1(\lambda) = I_\lambda(u_0),$$

e como já provamos que $I_\lambda(u_0) = \alpha$, então $\mu_1(\lambda)$ é caracterizado da seguinte forma,

$$\mu_1(\lambda) = \inf S_\lambda = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} hu^2 \, d\sigma : u \in M \right\}.$$

Mostraremos agora que $|u_0|$ também é solução do problema (1.2). Com efeito, basta observar que

$$I_\lambda(|u_0|) = \int_\Omega |\nabla |u_0||^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g|u_0|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h|u_0|^2 \, d\sigma.$$

Usando as propriedades de derivada fraca tem-se

$$I_\lambda(|u_0|) = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g u_0^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h u_0^2 \, d\sigma = I_\lambda(u_0) = \alpha,$$

e ainda,

$$G(|u_0|) = \int_\Omega |u_0|^2 \, \mathrm{d}x = 1.$$

Equivalentemente, $|u_0| \in M$ e atinge o mínimo, logo também é solução de $(1.2)$. Isso mostra que a autofunção pode ser tomada com sinal definido, consequentemente, $\mu_1(\lambda)$ é autovalor principal de $(1.2)$.

Denotaremos agora por $\phi_1(\lambda)$ a autofunção não-negativa associada a $\mu_1(\lambda)$, vamos provar que $\phi_1(\lambda)$ é de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Sendo $\phi_1(\lambda)$ uma solução fraca de (1.2), temos do Teorema A.20 a imersão contínua $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)(p \in [1, 2^*])$, logo $\phi_1(\lambda)$ verifica

$$\begin{cases} \mathcal{L}\phi_1(\lambda) = f & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}\phi_1(\lambda) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.34}$$

Sendo os operadores $\mathcal{L} = -\Delta - \lambda g(x)$ e $\mathcal{B} = (\partial \cdot / \partial \eta) - \lambda h(x)$ e a função $f = \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda) \in L^p(\Omega), p \in [1, 2^*]$. Por regularidade elíptica em espaço de Sobolev (Teorema A.17), segue que $\phi_1(\lambda) \in W^{2,p}(\Omega)$, para todo $p \in [1, 2^*]$. Ora, novamente $\phi_1(\lambda)$ é solução fraca de (1.34) com $f = \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda) \in W^{2,p}(\Omega)$. Aplicando novamente o mesmo resultado de regularidade, temos que $\phi_1(\lambda) \in W^{4,p}(\Omega)$, para todo $p \in [1, 2^*]$. Repetindo esse procedimento, concluímos que $\phi_1(\lambda) \in W^{k,p}(\Omega)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, 2^*]$. Em particular, para $K_0$ suficientemente grande tal que $p > N/K_0$, obtemos da imersão contínua $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{K_0-2+\theta}(\overline{\Omega})(K_0 \geq 2)$, que $\phi_1(\lambda) \in C^{K_0-2+\theta}(\overline{\Omega})$, para um certo $\theta \in (0,1)$. Então passamos a ter $\phi_1(\lambda)$ é solução de (1.34) com $f = \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda) \in C^{K_0-2+\theta}(\overline{\Omega})$. Pela regularidade elíptica em espaços de *Hölder* (Teorema A.18), temos que $\phi_1(\lambda) \in C^{K_0+\theta}(\overline{\Omega})$. Mas agora $\phi_1(\lambda)$ é solução de (1.34) com $f = \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda) \in C^{K_0+\theta}(\overline{\Omega})$, novamente pelo Teorema A.18 (Schauder), temos que $\phi_1(\lambda) \in C^{K_0+2+\theta}(\overline{\Omega})$. Repetindo esse procedimento, concluímos que $\phi_1(\lambda) \in C^{K+\theta}(\overline{\Omega})$ para todo $K \in \mathbb{N}$. Em particular, como $C^{K+\theta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^K(\overline{\Omega})$ garantimos que $\phi_1(\lambda) \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Pela Proposição 1.7, $\phi_1(\lambda) > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Agora provaremos a unicidade do autovalor principal. Assuma que $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\lambda)$ é um autovalor principal de (1.2) cuja autofunção $\phi$ é positiva em $\overline{\Omega}$ (conforme Proposição 1.7). Mostraremos que $\overline{\mu} = \mu_1(\lambda)$.

De fato, como $\phi$ é solução fraca de (1.2), tomando $\phi_1$ como função teste, temos

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla\phi_1 \ \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h\phi\phi_1 \ d\sigma = \lambda \int_\Omega g\phi\phi_1 \ \mathrm{d}x + \overline{\mu}(\lambda) \int_\Omega \phi\phi_1 \ \mathrm{d}x. \tag{1.35}$$

Por outro lado, como $\mu_1(\lambda)$ é autovalor principal de (1.2) com autofunção $\phi_1(\lambda)$ positiva em $\overline{\Omega}$. Tomando $\phi$ como função teste, temos

$$\int_\Omega \nabla\phi_1\nabla\phi \ \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h\phi_1\phi \ d\sigma = \lambda \int_\Omega g\phi_1\phi \ \mathrm{d}x + \mu_1(\lambda) \int_\Omega \phi_1\phi \ \mathrm{d}x. \tag{1.36}$$

Igualando (1.35) e (1.36) verificamos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(\lambda) \int_\Omega \phi\phi_1 \ \mathrm{d}x &= \mu_1(\lambda) \int_\Omega \phi_1\phi \ \mathrm{d}x \\ (\overline{\mu}(\lambda) - \mu_1(\lambda)) \int_\Omega \phi\phi_1 \ \mathrm{d}x &= 0. \end{aligned}$$

Porém $\phi > 0$ e $\phi_1 > 0$ em $\overline{\Omega}$, logo $\displaystyle\int_\Omega \phi_1\phi \ \mathrm{d}x > 0$. Portanto, a igualdade acima implica em $\overline{\mu}(\lambda) = \mu_1(\lambda)$. Assim a unicidade foi verificada e a prova do Teorema está completa. □

*Observação* 1.1. Observe que $\mu_1(0) = 0$. De fato, considerando $\lambda = 0$, então pelo Teorema 1.3 existe um único autovalor principal $\mu_1(0)$ de (1.2) que associa a autofunção $\phi_1(0) > 0$ em $\overline{\Omega}$. Substituindo $\lambda = 0$ em (1.2) temos

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1(0) = \mu_1(0)\phi_1(0) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi_1(0)}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, notemos que a equação

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1(0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi_1(0)}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.37}$$

admite constantes positivas como solução. Logo, pela unicidade do autovalor principal, segue que $\mu_1(0) = 0$.

Agora vamos estudar algumas propriedades da aplicação $\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \mu_1(\lambda)$. Isto será feito através do próximo resultado.

**Teorema 1.4.** *Sob as hipóteses do Teorema* 1.3 *considere a aplicação* $\mu_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que a cada* $\lambda \in \mathbb{R}$, *associa* $\mu_1(\lambda)$ *o único autovalor principal de* (1.2). *Então esta aplicação possui as seguintes propriedades:*

*(i)* $\mu_1$ *é côncava e verifica* $\mu_1(\lambda) \to -\infty$ *se* $\lambda \to \infty$;

*(ii)* $\mu_1$ *possui um máximo (global) em* $\lambda \geq 0$ *se* $\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma \leq 0$. *Além disso, o máximo é positivo se* $\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma < 0$ *e é zero se* $\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma = 0.$

***Demonstração***. Provaremos a afirmação (i). Para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixado, a função

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \beta(\lambda) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g u^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h u^2 \, d\sigma, \end{aligned}$$

é côncava. Observe que $\mu_1$ também é côncavo. De fato, como já sabemos que $\beta$ é côncavo, então para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$, temos

$$\beta(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) \geq t\beta(\lambda_1) + (1-t)\beta(\lambda_2).$$

Logo,

$$\mu_1(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) = \inf_{u \in M}(\beta(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)) \geq \inf_{u \in M}(t\beta(\lambda_1) + (1-t)\beta(\lambda_2)).$$

Usando as propriedades de ínfimo, obtemos

$$\mu_1(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) \geq t \inf_{u \in M} \beta(\lambda_1) + (1-t) \inf_{u \in M} \beta(\lambda_2) = t\mu_1(\lambda) + (1-t)\mu_1(\lambda).$$

Isto prova que $\mu_1$ também é côncavo. Agora, vamos analisar o comportamento de $\mu_1(\lambda)$ com respeito a $\lambda \to \infty$, para tanto observamos que existem dois casos possíveis, pois $g \not\leq 0$ em $\Omega$ ou $h \not\leq 0$ sobre $\partial\Omega$.

Suponha primeiro que $g \not\leq 0$ em $\Omega$. Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $g(x_0) > 0$. Consequentemente, pela continuidade de $g$, existe $r > 0$, tal que

$$g(x) > 0, \quad \forall \ x \in B_r(x_0).$$

Como $\Omega$ é aberto e $x_0 \in \Omega$, podemos considerar $B_r(x_0) \subset \Omega$. Além disso, é possível escolher uma função não nula (Mollifier), que denotaremos por $\hat{u} \in C^1(\overline{\Omega})$, satisfazendo $\displaystyle\int_\Omega \hat{u} \, \mathrm{d}x = 1$, com suporte compacto em $B_r(x_0)$. Devido a caracterização de $\mu_1$ no Teorema 1.3, segue que

$$\mu_1(\lambda) \leq \int_\Omega |\nabla \hat{u}|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g\hat{u}^2 \,\mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h\hat{u}^2 \, d\sigma.$$

Porém,

$$\int_{\partial\Omega} h\hat{u}^2 \, d\sigma = 0 \ \text{ e } \ \int_\Omega g\hat{u}^2 \,\mathrm{d}x = \int_{B_r(x_0)} g\hat{u}^2 \,\mathrm{d}x > 0.$$

Então, fazendo $\lambda \to \infty$ encontramos

$$\mu_1(\lambda) \leq \int_{B_r(x_0)} |\nabla \hat{u}|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda \int_{B_r(x_0)} g\hat{u}^2 \,\mathrm{d}x \to -\infty.$$

Analisando a segunda possibilidade, suponha agora que $h \not\leq 0$ sobre $\partial\Omega$. Então existe $x_1 \in \partial\Omega$ tal que, $h(x_1) > 0$. Portanto, pela continuidade de $h$, existe $r' > 0$, tal que

$$h(x) > 0, \quad \forall \ x \in B_{r'}(x_1) \cap \partial\Omega.$$

Considere $\Omega_\delta = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) < \delta\}$ (ver Figura 1.1) e uma função não nula (Mollifier) $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ cujo $\operatorname{supp} \overline{u} \subset (\Omega_\delta \cap B_{r'}(x_1))$. Pelo Teorema A.10, como $|\Omega_\delta \cap B_{r'}(x_1)| \to 0$ quando $\delta \to 0$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\int_{\Omega_\delta \cap B_{r'}(x_1)} g\overline{u}^2 \,\mathrm{d}x < \int_{\partial\Omega \cap B_{r'}(x_1)} h\overline{u}^2 \,\mathrm{d}\sigma. \tag{1.38}$$

Consequentemente,

$$\mu_1(\lambda) \leq \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda \left( \int_{\Omega_\delta \cap B_{r'}(x_1)} g\overline{u}^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega \cap B_{r'}(x_1)} h\overline{u}^2 \, d\sigma \right).$$

Portanto, tendo em vista (1.38) e fazendo $\lambda \to \infty$, encontramos $\mu_1(\lambda) \to -\infty$.

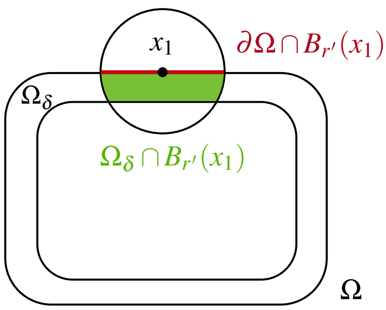


Figura 1.1 Conjunto $\Omega_\delta \cap B_{r'}(x_1)$.

Agora vamos verificar a afirmação (ii). Primeiro observamos que as aplicações $\phi_1$ e $\mu_1$ são diferenciáveis conforme estudo de Kato [16, Chapter 7] (veja também [18, Chapter 9]). Observamos que nos interessa provar que se $\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma \leq 0$ então para $\lambda \geq 0$ a função $\mu_1$ possui máximo local. Para isso, vamos iniciar calculando a derivada de $\mu_1(\lambda)$. Notemos que substituindo $u$ por $\phi_1(\lambda)$ e $\mu(\lambda)$ por $\mu_1(\lambda)$ no problema (1.2), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1(\lambda) = \lambda g\phi_1(\lambda) + \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi_1(\lambda)}{\partial\eta} = \lambda h\phi_1(\lambda) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.39}$$

Derivando (1.39) em relação a $\lambda$, encontramos

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1'(\lambda) = g\phi_1(\lambda) + \lambda g\phi_1'(\lambda) + \mu_1'(\lambda)\phi_1(\lambda) + \mu_1(\lambda)\phi_1'(\lambda) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi_1'(\lambda)}{\partial\eta} = \lambda h\phi_1'(\lambda) + h\phi_1(\lambda) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.40}$$

Para simplificar notação, vamos ocultar o termo $\lambda$ a partir de agora. Por integração por partes (Teorema A.3), temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1'\ \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \Delta\phi_1\phi_1'\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\phi_1'\ \mathrm{d}\sigma, \\ \int_\Omega \nabla\phi_1' \cdot \nabla\phi_1\ \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \Delta\phi_1'\phi_1\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_1'}{\partial\eta}\phi_1\ \mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta\phi_1\phi_1'\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\phi_1'\ \mathrm{d}\sigma &= -\int_\Omega \Delta\phi_1'\phi_1\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_1'}{\partial\eta}\phi_1\ \mathrm{d}\sigma \\ -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\phi_1'\ \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_1'}{\partial\eta}\phi_1\ \mathrm{d}\sigma &= -\int_\Omega \Delta\phi_1\phi_1'\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \Delta\phi_1'\phi_1\ \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Substituindo (1.39) e (1.40) em (1.41), obtemos do lado direito

$$\begin{aligned} -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\phi_1'\ \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_1'}{\partial\eta}\phi_1\ \mathrm{d}\sigma &= -\int_{\partial\Omega} \lambda h\phi_1\phi_1'\mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\Omega} \phi_1(\lambda h\phi_1' + h\phi_1)\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} h\phi_1^2\mathrm{d}\sigma. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Do lado esquerdo de (1.41), encontramos

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \Delta\phi_1\phi_1' \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \Delta\phi_1'\phi_1 \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega (\lambda g\phi_1 + \mu_1\phi_1)\phi_1' - \phi_1(g\phi_1 + \lambda g\phi_1' + \mu_1'\phi_1 + \mu_1\phi_1') \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega g\phi_1^2 \, \mathrm{d}x - \mu_1' \int_\Omega \phi_1^2 \, \mathrm{d}x. \qquad (1.43)
\end{aligned}$$

Combinando (1.41), (1.42) e (1.43), concluímos que

$$-\int_\Omega g\phi_1^2 \, \mathrm{d}x - \mu_1' \int_\Omega \phi_1^2 \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} h\phi_1^2 \mathrm{d}\sigma$$

$$\mu_1'(\lambda) = -\frac{\displaystyle\int_\Omega g\phi_1(\lambda)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\phi_1(\lambda)^2 \mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_\Omega \phi_1(\lambda)^2 \, \mathrm{d}x}. \qquad (1.44)$$

Agora que encontramos a derivada de $\mu_1(\lambda)$, temos por (1.44) que $\lambda_0$ é ponto crítico de $\mu_1$, se somente se,

$$\int_\Omega g(\phi_1(\lambda_0))^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h(\phi_1(\lambda_0))^2 \mathrm{d}\sigma = 0.$$

Analisando o caso em que $\lambda = 0$, temos que $\phi_1(0)$ é uma função constante positiva, conforme visto na Observação 1.1. Temos ainda que a igualdade (1.44) para $\lambda = 0$ se torna

$$\begin{aligned}
\mu_1'(0) &= -\frac{\displaystyle\int_\Omega g(\phi_1(0))^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h(\phi_1(0))^2 \mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_\Omega (\phi_1(0))^2 \, \mathrm{d}x} \\
&= \frac{(\phi_1(0))^2 \left( -\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} h \mathrm{d}\sigma \right)}{(\phi_1(0))^2 \displaystyle\int_\Omega \mathrm{d}x} \\
&= -\frac{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma}{|\Omega|}. \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda = 0$ é ponto crítico se $\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma = 0$. Agora se $\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma < 0$, então para $\lambda = 0$ teremos $\mu_1'(0) > 0$, ou seja, neste ponto $\mu_1$ é crescente. Como já sabemos que $\mu_1(\lambda)$ é côncava e que $\mu_1(\lambda) \to -\infty$ quando $\lambda \to +\infty$, segue então que esta função possui um máximo (global) em algum $\lambda > 0$. Em síntese, temos que $\mu_1$ possui máximo local em $\lambda \geq 0$ se $\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \leq 0$. As possibilidades de gráficos da função $\mu_1$ podem ser vistos na Figura 1.2.

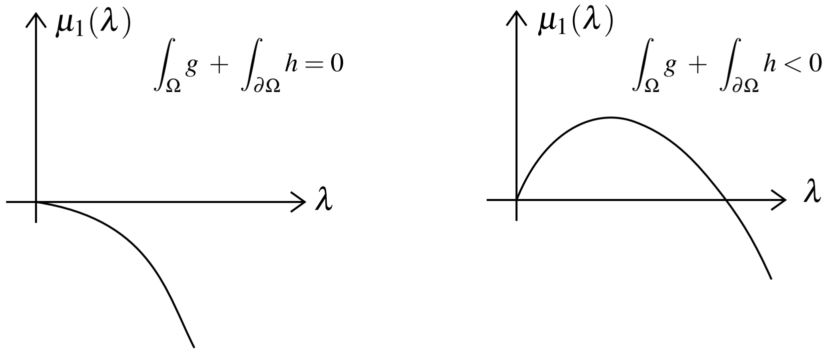


Figura 1.2 Possíveis gráficos de $\mu_1$.

Resta obter a unicidade do ponto crítico. Seja $\lambda_0$ tal que $\mu_1'(\lambda_0) = 0$. Então, por (1.44) necessariamente temos que

$$\int_\Omega g(\phi_1(\lambda_0))^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h(\phi_1(\lambda_0))^2 \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{1.46}$$

Aqui, a autofunção positiva $\phi_1(\lambda_0)$ é normalizada com $\int_\Omega (\phi_1(\lambda_0))^2 \, \mathrm{d}x = 1$. Então, devido a concavidade de $\mu_1$, para provarmos que $\lambda_0$ é o único ponto crítico é suficiente provar que $\mu_1(\lambda) < \mu_1(\lambda_0)$ para $\lambda \neq \lambda_0$. Uma vez que $\lambda_0$ é máximo local e por $\mu_1$ ser côncava, então vale para qualquer $\lambda \neq \lambda_0$ a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\mu_1(\lambda) &\leq \int_\Omega |\nabla(\phi_1(\lambda_0))|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g(\phi_1(\lambda_0))^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} h(\phi_1(\lambda_0))^2 \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_\Omega |\nabla(\phi_1(\lambda_0))|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \mu_1(\lambda_0).
\end{aligned}$$

Assuma, por contradição, que existe $\lambda_1 \neq \lambda_0$, tal que, $\mu_1(\lambda_1) = \mu_1(\lambda_0)$. Consequentemente, pela caracterização de $\mu_1$, vista no Teorema 1.3, temos que $\inf S_{\lambda_1} = \inf S_{\lambda_0}$. Então como $\phi_1(\lambda_0)$ atinge o ínfimo de $S_{\lambda_0}$, também atingirá o ínfimo de $S_{\lambda_1}$. Assim sendo, aplicando $\phi_1(\lambda_0)$ na equação (1.39) temos

$$\begin{cases}
-\Delta\phi_1(\lambda_0) = \lambda_1 g \phi_1(\lambda_0) + \mu_1(\lambda_1)\phi_1(\lambda_0) & \text{em } \Omega, \\
\dfrac{\partial \phi_1(\lambda_0)}{\partial \eta} = \lambda_1 h \phi_1(\lambda_0) & \text{sobre } \partial\Omega.
\end{cases}$$

Logo,

$$\mu_1(\lambda_1) = \frac{-\Delta\phi_1(\lambda_0) - \lambda_1 g \phi_1(\lambda_0)}{\phi_1(\lambda_0)}, \qquad \forall \ x \in \Omega.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1(\lambda_0) = \lambda_0 g\phi_1(\lambda_0) + \mu_1(\lambda_0)\phi_1(\lambda_0) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi_1(\lambda_0)}{\partial\eta} = \lambda_0 h\phi_1(\lambda_0) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$\mu_1(\lambda_0) = \frac{-\Delta\phi_1(\lambda_0) - \lambda_0 g\phi_1(\lambda_0)}{\phi_1(\lambda_0)}, \quad \forall\ x \in \Omega.$$

Como vale que $\mu_1(\lambda) = \mu_1(\lambda_0)$, temos para todo $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} -\lambda_1 g\phi_1(\lambda_0) &= -\lambda_0 g\phi_1(\lambda_0) \\ (\lambda_1 - \lambda_0)(g\phi_1(\lambda_0)) &= 0. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Ainda, sobre $\partial\Omega$ temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 h\phi_1(\lambda_0) &= \lambda_0 h\phi_1(\lambda_0) \\ \lambda_1 h\phi_1(\lambda_0) - \lambda_0 h\phi_1(\lambda_0) &= 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_0)h\phi_1(\lambda_0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Porém $\lambda_0 \neq \lambda_1$ então $(\lambda_1 - \lambda_0) \neq 0$, e como $\phi_1(\lambda_0) > 0$ em $\overline{\Omega}$, segue de (1.47) e (1.48) que $g \equiv 0$ em $\Omega$ e $h \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, uma contradição com a hipótese inicial do Teorema 1.4. Logo, a unicidade do ponto de máximo global foi verificada.

Portanto, a afirmação (ii) foi demonstrada e a prova do Teorema está completa. □

*Observação* 1.2. No Teorema 1.4 analisamos a aplicação $\mu_1$ apenas para o caso em que $\displaystyle\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ d\sigma \leq 0$. Porém, de (1.45) conseguimos ter o possível gráfico de $\mu_1$ para $\displaystyle\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\mathrm{d}\sigma > 0$, veja a Figura 1.3.

## 1.4 Problema (1.1)

Nesta seção vamos estudar a existência e unicidade de autovalor principal do problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta} = \lambda h(x)u & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Primeiramente vamos provar o seguinte resultado técnico.

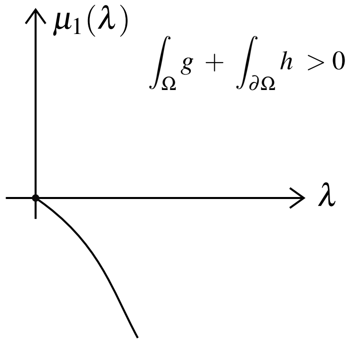


Figura 1.3 Possível gráfico de $\mu_1$.

**Lema 1.4.** *Suponha que* $\displaystyle\int_\Omega g\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\,\mathrm{d}\sigma < 0$. *Então, existe uma constante* $c_0 > 0$*, com a seguinte propriedade:*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \geq c_0,$$

*para todo* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *que satisfaz*

$$\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2\,\mathrm{d}\sigma = 1 \text{ e } \int_\Omega gu^2\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2\,\mathrm{d}\sigma > 0.$$

***Demonstração***. Suponha por contradição que para todo $c_0 > 0$, existe $u \in W^{1,2}(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x < c_0, \quad \int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2\,\mathrm{d}\sigma = 1 \quad \text{e} \quad \int_\Omega gu^2\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2\,\mathrm{d}\sigma > 0.$$

Em particular, tomando $c_0 = 1/n$ obtemos uma sequência $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$, de modo que:

$$\int_\Omega u_n^2\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u_n^2\,\mathrm{d}\sigma = 1; \tag{1.49}$$

$$\int_\Omega gu_n^2\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu_n^2\,\mathrm{d}\sigma > 0; \tag{1.50}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x < \frac{1}{n}. \tag{1.51}$$

Devido as estimativas (1.49) e (1.51) temos que $(u_n)$ é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Provaremos que $(u_n)$ é convergente em $W^{1,2}(\Omega)$. De fato, pela imersão compacta de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ temos a menos de subsequência que $u_n \to \hat{u}$ em $L^2(\Omega)$. Mostremos agora que $(u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $W^{1,2}(\Omega)$. Com efeito, note que

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} &= \|u_n - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_n - u_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \int_\Omega |u_n - u_m|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla(u_n - u_m)|^2 \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular, a estimativa do Lema A.1 e a afirmação (1.51), respectivamente, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^2 \, \mathrm{d}x\\ &= 2\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + |\nabla u_m|^2) \, \mathrm{d}x\\ &< 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right),\end{aligned}$$

e ainda como $(u_n)$ é convergente em $L^2(\Omega)$ então temos que $(u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Portanto,

$$\|u_n - u_m\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \int_\Omega |u_n - u_m|^2 \, \mathrm{d}x + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \to 0,$$

com $n, m \to \infty$. Como $(u_n)$ é uma sequência de Cauchy e $W^{1,2}(\Omega)$ é espaço de Banach então existe $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ de modo que $u_n \to \bar{u}$ em $W^{1,2}(\Omega)$, conforme queríamos provar. Mostraremos que $u_n \to \hat{u}$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e em $L^2(\partial\Omega)$. Com efeito, segue da imersão contínua de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ que

$$u_n \to \bar{u} \quad em \;\; L^2(\Omega).$$

Mas, como $u_n \to \hat{u}$ em $L^2(\Omega)$, então pela unicidade do limite temos $\bar{u} = \hat{u}$, ou seja, $u_n \to \hat{u}$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Em particular,

$$\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \to \|\nabla \hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

e por (1.51), temos

$$\int_\Omega |\nabla \hat{u}|^2 \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1.52}$$

Devido a continuidade do operador traço podemos tomar a mesma sequência $(u_n)$ de modo que $u_n \to \hat{u}$ em $L^2(\partial\Omega)$. Como $u_n \to \hat{u}$ em $L^2(\Omega)$ e em $L^2(\partial\Omega)$ então

$$\int_\Omega \hat{u}^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega {u_n}^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\partial\Omega} \hat{u}^2 \, \mathrm{d}\sigma = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} {u_n}^2 \, \mathrm{d}\sigma. \tag{1.53}$$

Nosso objetivo agora é analisar o termo $\int_\Omega g\hat{u}^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\hat{u}^2 \, \mathrm{d}\sigma$, para tanto vamos começar descobrindo quem é a função $\hat{u}$. Veja que, usando as informações de (1.53) em (1.49) temos

$$\int_\Omega \hat{u}^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \hat{u}^2 \, \mathrm{d}\sigma = \lim_{n\to\infty} \left( \int_\Omega {u_n}^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} {u_n}^2 \, \mathrm{d}\sigma \right) = 1. \tag{1.54}$$

Devido (1.52) temos $\|\nabla \hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$, então $\nabla \hat{u} \equiv 0$ q.t.p em $\Omega$ e pela Proposição A.2 temos $\hat{u} \equiv k$ q.t.p em $\Omega$, sendo $k$ uma constante. Por (1.54) garantimos que $\hat{u}$ não pode ser nula. Sabendo disso, então vale o seguinte resultado

$$\int_\Omega g\hat{u}^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\hat{u}^2 \, \mathrm{d}\sigma = \hat{u}^2 \left( \int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right) < 0. \tag{1.55}$$

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega g u_n^2 + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 - \left( \int_\Omega g\hat{u}^2 + \int_{\partial\Omega} h\hat{u}^2 \right) \right| &= \left| \int_\Omega g(u_n^2 - \hat{u}^2) + \int_{\partial\Omega} h(u_n^2 - \hat{u}^2) \right| \\ &\leq \int_\Omega |g(u_n^2 - \hat{u}^2)| + \int_{\partial\Omega} |h(u_n^2 - \hat{u}^2)|. \end{aligned}$$

Como $g$ é contínua em $\overline{\Omega}$ e $h$ é contínua sobre $\partial\Omega$, respectivamente, então elas são limitadas. Logo, existem constantes $M_1, M_2 > 0$ tais que

$$|g(x)| \leq M_1 \text{ para } x \in \Omega \quad \text{e} \quad |h(x)| \leq M_2, \text{ para } x \in \partial\Omega.$$

Consequentemente,

$$\left| \int_\Omega g u_n^2 + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, \mathrm{d}\sigma - \left( \int_\Omega g\hat{u}^2 + \int_{\partial\Omega} h\hat{u}^2 \, \mathrm{d}\sigma \right) \right| \leq M_1 \int_\Omega (u_n^2 - \hat{u}^2) + M_2 \int_{\partial\Omega} (u_n^2 - \hat{u}^2).$$

Porém, usando (1.53) temos

$$M_1 \int_\Omega (u_n^2 - \hat{u}^2) \, \mathrm{d}x + M_2 \int_{\partial\Omega} (u_n^2 - \hat{u}^2) \, \mathrm{d}\sigma \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Logo,

$$\int_\Omega g u_n^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, \mathrm{d}\sigma \to \int_\Omega g\hat{u}^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\hat{u}^2 \, \mathrm{d}\sigma, \qquad \text{quando } n \to \infty.$$

Portanto, para $n$ suficientemente grande temos de (1.55) que $\int_\Omega g u_n^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, \mathrm{d}\sigma < 0$, o que gera uma contradição com (1.50). A prova do lema está completa. $\square$

Destacamos que a existência de um autovalor principal positivo para o problema (1.1), está totalmente relacionada com a aplicação $\mu_1$. De forma mais clara, existirá autovalor principal positivo de (1.1) se, somente se, este for zero de $\mu_1$. Esta afirmação será vista no próximo teorema, e este também nos dará a caracterização variacional do único autovalor principal positivo do problema (1.1).

**Teorema 1.5.** *Assuma que $g \nleq 0$ em $\Omega$ ou $h \nleq 0$ sobre $\partial\Omega$, então o problema* (1.1) *possui um único autovalor principal positivo (denotado por $\lambda_1(g,h)$) se, somente se, $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma < 0$. Além disso, nesse caso o único autovalor principal positivo tem a seguinte caracterização*

$$\lambda_1(g,h) = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x}{\int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma}; u \in W^{1,2}(\Omega), \int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma > 0 \right\}. \tag{1.56}$$

***Demonstração***. A primeira parte da demonstração seguirá dos resultados vistos ao longo da Seção 1.3, e que estão relacionados com a aplicação $\mu_1$.

Suponha inicialmente $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma < 0$. Temos ciência que $\mu_1(0) = 0$, devido a Observação 1.1. Daí, tendo em mente o comportamento da aplicação $\mu_1$, visto no Teorema 1.4, temos para $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma < 0$ que existe um único $\lambda = \lambda_1(g,h) > 0$ que verifica $\mu_1(\lambda_1(g,h)) = 0$. Consequentemente, substituindo $\mu_1(\lambda_1(g,h))$ no problema (1.2), encontramos

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = \lambda_1(g,h)g(x)\phi_1 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\eta} = \lambda_1(g,h)h(x)\phi_1 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja, $\lambda_1(g,h)$ é autovalor principal do problema (1.1).

Por outro lado, suponha que o problema (1.1) possui um único autovalor principal positivo, que iremos denotar por $\lambda_1(g,h)$. Se $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma \geq 0$, então, teremos de $\mu_1$ ser côncava e (1.45) que $\mu_1(\lambda) < 0$, para todo $\lambda > 0$. Isso implica que $\mu_1$ não possui zero. Portanto, $\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma < 0$. Assim, concluímos a primeira parte da demonstração do teorema.

Vamos para a segunda parte da demonstração, que consiste em provar que o autovalor principal positivo do problema (1.1) é caracterizado pela fórmula (1.56). Para tanto, primeiro mostraremos que o ínfimo (1.56) é positivo. Tal resultado seguirá da aplicação do Lema 1.4. Em sequência, mostraremos que a constante positiva $\lambda_*$ dada pelo ínfimo (1.56), satisfaz $\mu_1(\lambda_*) = 0$, ou seja, usando o que já sabemos da primeira parte da demonstração que

$\lambda_1(g,h)$ coincide com o zero da aplicação $\mu_1$, e este é único, então necessariamente vale a caracterização (1.56) para $\lambda_1(g,h)$.

Seja $\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma < 0$. Considere $u \in W^{1,2}(\Omega)$ de modo que

$$\int_\Omega gu^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \, \mathrm{d}\sigma > 0.$$

Afirmamos ser válida a seguinte desigualdade

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega gu^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \, \mathrm{d}\sigma} > 0. \tag{1.57}$$

Para provar (1.57) encontraremos uma função $v \in W^{1,2}(\Omega)$ que satisfaz o Lema 1.4, e que por consequência verifica (1.57). Para isso, primeiro observamos que $\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\sigma > 0$, caso contrário teríamos

$$\begin{aligned}
0 &= \left( \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\sigma \right) (\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)}) \\
&\geq \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\sigma \\
&\geq \int_\Omega gu^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \, \mathrm{d}\sigma \\
&> 0,
\end{aligned}$$

um absurdo. Considere a seguinte constante

$$\delta = \left( \frac{1}{\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\sigma} \right)^{1/2} > 0,$$

e definimos a função $v = \delta u$. Vamos verificar que $v$ satisfaz as condições do Lema 1.4. Com efeito, claramente $v = \delta u \in W^{1,2}(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v^2 \, \mathrm{d}\sigma &= \int_\Omega (\delta u)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\delta u)^2 \, \mathrm{d}\sigma = \delta^2 \left( \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\sigma \right) \\
&= \frac{1}{\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\sigma} \left( \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\sigma \right) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Ainda, temos também

$$0 < \int_\Omega gu^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} g \frac{v^2}{\delta^2} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \frac{v^2}{\delta^2} \, \mathrm{d}\sigma$$
$$= \frac{1}{\delta^2} \left( \int_\Omega gv^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hv^2 \, \mathrm{d}\sigma \right).$$

O que nos garante que

$$\int_\Omega gv^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hv^2 \, \mathrm{d}\sigma > 0. \tag{1.59}$$

Por (1.58) e (1.59) confirmamos que $v$ está nas condições do Lema 1.4. Logo, existe uma constante $c_0 > 0$ tal que,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x \geq c_0. \tag{1.60}$$

Observamos por (1.58), que $\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 1$ e $\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq 1$. Consequentemente,

$$\int_\Omega gv^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hv^2 \, \mathrm{d}\sigma \leq \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} \int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}x + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} v^2 \, \mathrm{d}\sigma$$
$$\leq \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)}. \tag{1.61}$$

Devido (1.60) e (1.61) obtemos

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega gv^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hv^2 \, \mathrm{d}\sigma} \geq \frac{c_0}{\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)}} > 0. \tag{1.62}$$

Agora, resta notarmos que temos a validade da seguinte igualdade

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega gu^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \, \mathrm{d}\sigma} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla \left(\frac{v}{\delta}\right)|^2 \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \left(\frac{v}{\delta}\right)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \left(\frac{v}{\delta}\right)^2 \, \mathrm{d}\sigma} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega gv^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hv^2 \, \mathrm{d}\sigma}.$$

Logo de (1.62), temos o desejado, isto é

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega gu^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \, \mathrm{d}\sigma} > 0.$$

Portanto, o ínfimo (1.56) é positivo. Agora vamos estabelecer a fórmula (1.56) como sendo a própria caracterização do autovalor principal positivo do problema (1.1). Para isso, consideremos o conjunto

$$A = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega), \int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma > 0 \right\},$$

e seja $\lambda_*$ uma constante positiva dada pelo ínfimo (1.56). Assim,

$$0 < \lambda_* \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma}, \quad \forall\ u \in A. \tag{1.63}$$

Para estabelecermos a fórmula (1.56) é suficiente mostrar que $\mu_1(\lambda_*) = 0$. Pois assim, estaremos provando que $\lambda_*$ é o único autovalor principal positivo de (1.1).

Com efeito, considere $u \in A$. A partir da desigualdade (1.63), encontramos

$$-\lambda_* \left( \int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma \right) \geq -\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda_* \left( \int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma \right) = 0. \tag{1.64}$$

Observe que, para $\int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma \leq 0$ ainda vale a desigualdade (1.64). Por consequência, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda_* \int_\Omega gu^2 \,\mathrm{d}x - \lambda_* \int_{\partial\Omega} hu^2 \,\mathrm{d}\sigma \geq 0, \quad \forall\ u \in W^{1,2}(\Omega). \tag{1.65}$$

Segue de (1.65) e da definição de $\mu_1$ que $\mu_1(\lambda_*) \geq 0$.

Por outro lado, também provaremos que $\mu_1(\lambda_*) \leq 0$. Observe que pela definição de ínfimo existe uma sequência $(v_n)$ em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega gv_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hv_n^2 \,\mathrm{d}\sigma > 0; \tag{1.66}$$

$$0 < \lambda_* \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega gv_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} hv_n^2 \,\mathrm{d}\sigma} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lambda_*. \tag{1.67}$$

Assim, definindo a sequência $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ dada por $u_n = v_n/\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}$, vamos encontrar as propriedades que $(u_n)$ satisfaz e verificar que ela também é minimizante. Para isso, observe

$$\begin{aligned}\int_\Omega g v_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h v_n^2 \,\mathrm{d}\sigma &= \int_\Omega g\left(u_n\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\left(u_n\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^2 \,\mathrm{d}\sigma \\ &= \|v_n\|^4_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega g u_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \,\mathrm{d}\sigma\right). \qquad (1.68)\end{aligned}$$

Portanto, segue de (1.66) e (1.68) que,

$$\int_\Omega g u_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \,\mathrm{d}\sigma > 0.$$

Também temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g v_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h v_n^2 \,\mathrm{d}\sigma} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla (u_n\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)})|^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g (u_n\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)})^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h (u_n\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)})^2 \,\mathrm{d}\sigma} \\ &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g u_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \,\mathrm{d}\sigma}. \qquad (1.69)\end{aligned}$$

Daí, como vale (1.69), então por (1.67) temos

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g u_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \,\mathrm{d}\sigma} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\lambda_*.$$

Concluímos que, $u_n = v_n/\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\int_\Omega u_n^2 \,\mathrm{d}x = 1; \qquad (1.70)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\lambda_* \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g u_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \,\mathrm{d}\sigma}; \qquad (1.71)$$

$$\int_\Omega g u_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \,\mathrm{d}\sigma > 0. \qquad (1.72)$$

Agora, vamos provar que $(u_n)$ é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Para isso, primeiro limitaremos as integrais $\displaystyle\int_{\partial\Omega} h u_n^2 \,\mathrm{d}\sigma$ e $\displaystyle\int_\Omega g u_n^2 \,\mathrm{d}x$, pois usaremos para provarmos que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x$ é limitada.

Com efeito, lembremos que graças à Proposição 1.6, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C(\varepsilon) > 0$ que satisfaz

$$\int_{\partial\Omega} u_n^2 \, d\sigma \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + C(\varepsilon) \int_{\Omega} u_n^2 \, dx.$$

Daí, usando esta desigualdade, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, d\sigma &\leq \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u_n^2 \, d\sigma \leq \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \left( \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + C(\varepsilon) \int_{\Omega} u_n^2 \, dx \right) \\ &\leq \varepsilon \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + C(\varepsilon) \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\Omega} u_n^2 \, dx. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Substituindo (1.70) em (1.73), temos

$$\int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, d\sigma \leq \varepsilon \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + C(\varepsilon) \|h^+\|_{C(\partial\Omega)}. \tag{1.74}$$

Novamente devido (1.70), concluímos que

$$\int_{\Omega} g u_n^2 \, dx \leq \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} \int_{\Omega} u_n^2 \, dx = \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}. \tag{1.75}$$

Observe que manipulando (1.71), e usando o fato de que $(1 + 1/n) \leq 2$ para todo $n \geq 1$, temos

$$2\lambda_* \geq \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{\Omega} g u_n^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, d\sigma}.$$

Como temos a validade da inequação (1.72), obtemos

$$2\lambda_* \left( \int_{\Omega} g u_n^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} h u_n^2 \, d\sigma \right) \geq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx. \tag{1.76}$$

Usando as desigualdades (1.74) e (1.75) em (1.76), encontramos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx \leq 2\lambda_* \left( \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \varepsilon \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + C(\varepsilon) \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} \right).$$

Manipulando, temos

$$-2\lambda_*\left(\varepsilon\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)+\int_\Omega|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\leq 2\lambda_*(\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}+2\lambda_*C(\varepsilon)\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}$$
$$\left(1-2\lambda_*\varepsilon\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\right)\int_\Omega|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\leq 2\lambda_*\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}+2\lambda_*C(\varepsilon)\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}. \tag{1.77}$$

Tomando $\varepsilon>0$ tão pequeno que $1-2\lambda_*\varepsilon\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}>1/2$, segue de (1.77) que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\leq 2\lambda_*\left(\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}+C(\varepsilon)\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\right)$$
$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\leq 4\lambda_*\left(\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}+C(\varepsilon)\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\right)<+\infty. \tag{1.78}$$

Logo, temos por (1.70) e (1.78) que $(u_n)$ é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$, conforme queríamos mostrar. Daí, pela continuidade do operador traço de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$, temos que $(u_n)$ é limitada em $L^2(\partial\Omega)$. Assim, a desigualdade (1.71) implica que

$$\lambda_*\int_\Omega gu_n^2\,\mathrm{d}x+\lambda_*\int_{\partial\Omega}hu_n^2\,\mathrm{d}\sigma+\frac{\lambda_*}{n}\left(\int_\Omega gu_n^2\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}hu_n^2\,\mathrm{d}\sigma\right)\geq\int_\Omega|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{\lambda_*}{n}\left(\int_\Omega gu_n^2\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}hu_n^2\,\mathrm{d}\sigma\right)\geq\int_\Omega|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x-\lambda_*\int_\Omega gu_n^2\,\mathrm{d}x-\lambda_*\int_{\partial\Omega}hu_n^2\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\frac{\lambda_*}{n}\left(\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}+\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\int_{\partial\Omega}u_n^2\,\mathrm{d}\sigma\right)\geq\int_\Omega|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x-\lambda_*\int_\Omega gu_n^2\,\mathrm{d}x-\lambda_*\int_{\partial\Omega}hu_n^2\,\mathrm{d}\sigma. \tag{1.79}$$

Porém, em decorrência de $(u_n)$ ser limitada em $L^2(\partial\Omega)$ temos

$$\frac{\lambda_*}{n}\left(\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}+\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\int_{\partial\Omega}u_n^2\,\mathrm{d}\sigma\right)\to 0,\ \text{ quando }\ n\to\infty. \tag{1.80}$$

Daí por (1.79) e (1.80) obtemos $\mu_1(\lambda_*)\leq 0$.

Portanto, concluímos que $\mu_1(\lambda_*)=0$. Finalizamos a demonstração do Teorema.

□

Agora, faremos uma observação referente as limitações das normas em $L^2(\Omega)$ e em $L^2(\partial\Omega)$.

*Observação* 1.3. Considerando as hipóteses do Teorema A.9, temos para o conjunto

$$W'=\left\{w\in W^{1,2}(\Omega):\int_\Omega w\,\mathrm{d}x=0\right\},$$

que vale a Desigualdade de Poincaré (Teorema A.6), ou seja, existe uma constante $c_1 > 0$, tal que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, w \in W'.$$

Durante toda esta seção teremos que a constante $c_1$ será sempre mencionada se referindo a esta observação. Além disso, a constante $c_2$ será se referindo a constante obtida pela continuidade do operador traço de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$.

Vamos para o último resultado desta seção. Como já temos a existência, unicidade e caracterização variacional do único autovalor principal positivo do problema (1.1), agora nos interessa obter uma cota inferior para este autovalor em termos da quantidade $\left|\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right|$. Faremos isso no próximo resultado.

**Teorema 1.6.** *Assuma $g \nleq 0$ em $\Omega$ ou $h \nleq 0$ sobre $\partial\Omega$, e $\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma < 0$. Então, existe uma constante $C(c_1, c_2) > 0$, dependendo apenas das constantes $c_1$ e $c_2$, tal que*

$$\begin{aligned}\lambda_1(g,h) \geq C(c_1,c_2)&\left(\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} + \frac{\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{\left|\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right|}\right)^{-1}\\ &=: \underline{\lambda}(g,h). \end{aligned} \tag{1.81}$$

***Demonstração***. Para provarmos o teorema será crucial usarmos as decomposições vistas na Subseção 1.1.2, por isso, recordaremos brevemente dos operadores $P$ e $Q$ e das decomposições que eles produzem. Consideramos

$$\begin{aligned} P : X = W^{2,2}(\Omega) \to W &= \left\{u \in W^{2,2}(\Omega), \int_\Omega u\ \mathrm{d}x = 0\right\}\\ u \mapsto P(u) &= u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Conforme provamos na Proposição 1.2, o operador $P$ produz uma decomposição única $X = W \oplus Z$, onde

$$Z = \{u \in W^{2,2}(\Omega),\ u \text{ constante}\}.$$

Em relação ao operador $Q$, definido como

$$\begin{aligned} Q : L^2(\Omega) &\to \left\{ v \in L^2(\Omega) : \int_\Omega v \, \mathrm{d}x = 0 \right\} \\ v \mapsto Q(v) &= v - \frac{\displaystyle\int_\Omega v \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right), \end{aligned}$$

provamos na Proposição 1.4 que o operador $Q$ também produz uma decomposição única, dada por $L^2(\Omega) = Q[L^2(\Omega)] \oplus (1-Q)[L^2(\Omega)]$.

Seja $u \in C^{2+\theta}(\overline{\Omega})$ uma solução de (1.1) para $\lambda > 0$, temos pela decomposição de $P$, que podemos escrever de forma única $u = \alpha + w$ para algum $\alpha \in Z$ e $w \in W$. A ideia da demonstração é provar que para $\lambda$ pequeno existe apenas a solução trivial, isto é, que para todo $\lambda$ positivo, tal que $\lambda < \underline{\lambda}(g,h)$ temos $u \equiv 0$.

Primeiro, descobriremos quem seriam as funções $\alpha$ e $w$. Como $u = \alpha + w$ é solução de (1.1), temos que esta função satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta(\alpha + w) = \lambda g(x)(\alpha + w) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial(\alpha + w)}{\partial\eta} = \lambda h(x)(\alpha + w) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Consequentemente, devido $\partial\alpha/\partial\eta = 0$ e $\Delta\alpha = 0$, encontramos

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda g(x)(\alpha + w) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial\eta} = \lambda h(x)(\alpha + w) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.82}$$

Notemos ainda, como $u \in C^{2+\theta}(\overline{\Omega})$ então suas derivadas de segunda ordem existem e são contínuas, logo $-\Delta u \in L^2(\Omega)$. Por consequência, podemos escrever de forma única

$$-\Delta u = Q(-\Delta u) \oplus (1-Q)(-\Delta u).$$

O que nos motiva a calcular $Q(-\Delta u)$ e $(1-Q)(-\Delta u)$. Começaremos obtendo $Q(-\Delta u)$, e disso encontraremos que para $\lambda$ pequeno temos $w = 0$. Em seguida, vamos calcular $(1-Q)(-\Delta u)$ onde veremos que, para o mesmo $\lambda$ pequeno temos $\alpha = 0$.

Com efeito, pela definição do operador $Q$ e sabendo que $\Delta u = \Delta(\alpha + w) = \Delta w$, temos

$$Q(-\Delta u) = -\Delta w + \frac{\displaystyle\int_\Omega \Delta w \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right). \tag{1.83}$$

Observe que, aplicando a Fórmula de Green (Teorema A.3, item (iii)) e usando (1.82), obtemos

$$\int_\Omega \Delta w \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta} \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} \lambda h(x)(\alpha + w) \, \mathrm{d}\sigma,$$

daí substituindo em (1.83) encontramos

$$Q(-\Delta u) = -\Delta w + \frac{\displaystyle\lambda \int_{\partial\Omega} h(\alpha + w) \, \mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right). \tag{1.84}$$

Por outro lado, $g \in C^\theta(\overline{\Omega})$ e $u \in C^{2+\theta}(\overline{\Omega})$, então $\lambda gu \in L^2(\Omega)$. Como $u$ é solução de (1.1), então em $\Omega$ temos $-\Delta u = \lambda g(x)u$. Consequentemente, $Q(-\Delta u) = Q(\lambda gu)$. Assim sendo, obtemos

$$\begin{aligned} Q(\lambda gu) &= \lambda gu - \frac{\displaystyle\lambda \int_\Omega \lambda gu \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right) \\ &= \lambda g(\alpha + w) - \frac{\displaystyle\lambda \int_\Omega g(\alpha + w) \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right). \end{aligned} \tag{1.85}$$

Com isso, de (1.84) e (1.85) concluímos que

$$\begin{aligned} -\Delta w + \frac{\displaystyle\lambda \int_{\partial\Omega} h(\alpha + w) \, \mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right) = \\ \lambda g(\alpha + w) - \frac{\displaystyle\lambda \int_\Omega g(\alpha + w) \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma} \left( g + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \right). \end{aligned} \tag{1.86}$$

Nossa intenção é manipular (1.86) e analisar quem limita $\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x$. Posteriormente, usaremos essa limitação para encontrarmos $\alpha$ e $w$. Para isso, faremos uma série de cálculos.

Inicialmente, note que (1.86) pode ser reescrito como

$$-\Delta w+\frac{\lambda g\displaystyle\int_{\partial\Omega}h(\alpha+w)\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\lambda\displaystyle\int_{\partial\Omega}h(\alpha+w)\,\mathrm{d}\sigma\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}=$$

$$\lambda g(\alpha+w)-\frac{\lambda g\displaystyle\int_{\Omega}g(\alpha+w)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}-\frac{1}{|\Omega|}\frac{\lambda\displaystyle\int_{\Omega}g(\alpha+w)\,\mathrm{d}x\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}.$$

Multiplicando por $w$ e integrando, temos

$$\int_{\Omega}-\Delta w\cdot w\,\mathrm{d}x+\lambda\int_{\Omega}gw\,\mathrm{d}x\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega}h(\alpha+w)\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}+\frac{\lambda\displaystyle\int_{\Omega}w\,\mathrm{d}x}{|\Omega|}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega}h(\alpha+w)h\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}=$$

$$\lambda\int_{\Omega}g(\alpha+w)w\,\mathrm{d}x-\frac{\lambda\displaystyle\int_{\Omega}gw\,\mathrm{d}x\int_{\Omega}g(\alpha+w)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}-\frac{\lambda\displaystyle\int_{\Omega}w\,\mathrm{d}x}{|\Omega|}\frac{\displaystyle\int_{\Omega}g(\alpha+w)\,\mathrm{d}x\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}. \tag{1.87}$$

Como $\displaystyle\int_{\Omega}w\,\mathrm{d}x=0$, pois $w\in W$, a equação (1.87) se reduz a

$$\int_{\Omega}-\Delta w\cdot w\,\mathrm{d}x=-\frac{\lambda\displaystyle\int_{\Omega}gw\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{\Omega}g\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\,\mathrm{d}\sigma}\left(\int_{\partial\Omega}h(\alpha+w)\,\mathrm{d}\sigma+\int_{\Omega}g(\alpha+w)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$+\lambda\int_{\Omega}g(\alpha+w)\cdot w\,\mathrm{d}x.$$

Pela Fórmula de Green (Teorema A.3, item (iv)) sabemos que

$$-\int_{\Omega}\Delta w\cdot w\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial w}{\partial\eta}\cdot w\,\mathrm{d}\sigma,$$

logo

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{\lambda \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma}\left(\int_{\partial\Omega} h(\alpha+w) \, \mathrm{d}\sigma + \int_\Omega g(\alpha+w) \, \mathrm{d}x\right)$$
$$+\lambda \int_\Omega g(\alpha+w)\cdot w \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta}\cdot w \, \mathrm{d}\sigma. \tag{1.88}$$

Usando (1.82) temos que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta}\cdot w \, \mathrm{d}\sigma = \lambda \int_{\partial\Omega} h(\alpha+w)w \, \mathrm{d}\sigma.$$

Substituindo em (1.88), encontramos

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{\lambda \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma}\left(\int_{\partial\Omega} h(\alpha+w) \, \mathrm{d}\sigma + \int_\Omega g(\alpha+w) \, \mathrm{d}x\right) \tag{1.89}$$
$$+\lambda \int_\Omega g\alpha w \, \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega gw^2 \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} h(\alpha+w)w \, \mathrm{d}\sigma$$
$$= -\frac{\lambda \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma}\left(\int_\Omega g\alpha \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\alpha \, \mathrm{d}\sigma\right)$$
$$-\frac{\lambda \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma}\left(\int_{\partial\Omega} hw \, \mathrm{d}\sigma + \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x\right)$$
$$+\lambda \int_{\partial\Omega} h(\alpha+w)w \, \mathrm{d}\sigma + \lambda\alpha \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega gw^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.90}$$

Note que,

$$\lambda\alpha \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x = \frac{\lambda \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma}\left(\alpha \int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \alpha \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma\right),$$

e substituindo em (1.89), ela se resume a seguinte igualdade

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} h(\alpha + w)w \,\mathrm{d}\sigma + \lambda \int_\Omega g w^2 \,\mathrm{d}x \\ - \frac{\lambda \displaystyle\int_\Omega gw \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}\left(\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega gw \,\mathrm{d}x\right). \tag{1.91}$$

Vamos obter a caracterização de $\alpha$. Pela Fórmula de Green (item (iii)), segue de (1.82) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \lambda g(\alpha + w) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega -\Delta w \,\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta} \,\mathrm{d}\sigma &= -\int_{\partial\Omega} \lambda h(\alpha + w) \,\mathrm{d}\sigma \\
\lambda\alpha \int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega gw \,\mathrm{d}x &= -\lambda\alpha \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma - \lambda \int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma \\
\lambda\alpha \int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \lambda\alpha \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma &= -\lambda \int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma - \lambda \int_\Omega gw \,\mathrm{d}x \\
\lambda\alpha \left(\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma\right) &= -\lambda \left(\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega gw \,\mathrm{d}x\right) \\
\alpha &= -\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega gw \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}.
\end{aligned} \tag{1.92}$$

Substituindo (1.92) em (1.91), temos

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} h \left( -\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega gw \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma} \right) \cdot w \,\mathrm{d}\sigma + \lambda \int_{\partial\Omega} hw^2 \,\mathrm{d}\sigma + \lambda \int_\Omega gw^2 \,\mathrm{d}x \\ - \frac{\lambda \displaystyle\int_\Omega gw \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}\left(\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega gw \,\mathrm{d}x\right). \tag{1.93}$$

Notemos que, podemos simplificar a primeira soma do lado direito da equação (1.93). De fato,

$$
\begin{aligned}
&-\lambda\left(\int_{\partial\Omega} hw\left(\frac{\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma+\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x}{\int_{\Omega} g \,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma+\frac{\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x}{\int_{\Omega} g \,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}\left(\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma\right)\right)\\
&=-\lambda\left(\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma+\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma+\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x}{\int_{\Omega} g \,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}\right)\\
&=-\frac{\lambda}{\int_{\Omega} g \,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}\left(\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma+\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x\right)^2. \qquad (1.94)
\end{aligned}
$$

Daí, substituindo (1.94) em (1.93), segue que

$$
\int_{\Omega}|\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x=\lambda\int_{\partial\Omega} hw^2 \,\mathrm{d}\sigma+\lambda\int_{\Omega} gw^2 \,\mathrm{d}x-\frac{\lambda\left(\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma+\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_{\Omega} g \,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}. \qquad (1.95)
$$

Agora, vamos estimar cada termo do lado direito de (1.95) que está dependente de $w$. Pela Observação 1.3, obtemos

$$
\int_{\Omega} gw^2 \,\mathrm{d}x \le \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}\int_{\Omega} w^2 \,\mathrm{d}\sigma=\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}\|w\|^2_{L^2(\Omega)}\le \|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}c_1^2\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (1.96)
$$

devido a continuidade do operador traço de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$. Novamente pela Observação 1.3, encontramos a seguinte limitação

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} hw^2 \,\mathrm{d}\sigma &\le \|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\int_{\partial\Omega} w^2 \,\mathrm{d}\sigma\le \|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\|w\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\le c_2^2\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\|w^+\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}\\
&= c_2^2\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\left(\|w^+\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\le c_2^2\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\left(c_1^2\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&= c_2^2(1+c_1^2)\|h^+\|_{C(\partial\Omega)}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (1.97)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, usando a estimativa do Lema A.1, temos

$$
\left(\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma+\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x\right)^2\le 2\left(\left(\int_{\partial\Omega} hw \,\mathrm{d}\sigma\right)^2+\left(\int_{\Omega} gw \,\mathrm{d}x\right)^2\right).
$$

Porém, usando a Observação 1.3, e a desigualdade de *Hölder* obtemos

$$\left(\int_\Omega gw\ \mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\|g\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \leq \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}c_1^2,$$

e ainda,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\partial\Omega} hw\ \mathrm{d}\sigma\right)^2 &\leq \left(\|h\|_{L^2(\partial\Omega)}\|w\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)^2 \leq \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\|w\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\\ &\leq \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\|w\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}c_2^2 \leq \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}c_2^2\left(\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\leq \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}c_2^2\left(c_1^2\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left(\int_\Omega gw\ \mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} hw\ \mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq 2\left[c_1^2\|g\|^2_{L^2(\Omega)}+c_2^2(1+c_1^2)\|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right]\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad (1.98)$$

Finalmente, encontraremos a limitação de $\int_\Omega |\nabla w|^2\ \mathrm{d}x$ que precisamos para obter (1.81). Combinando (1.95) e as estimativas (1.96), (1.97), (1.98), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w|^2\ \mathrm{d}x &\leq \lambda c_1^2\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}+\lambda c_2^2(1+c_1^2)\|h^+\|^2_{C(\partial\Omega)}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\quad-\frac{\lambda\left[2\left(c_1^2\|g\|^2_{L^2(\Omega)}+c_2^2(1+c_1^2)\|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\right]}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\\ &=\lambda\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\left(c_1^2\|g^+\|^2_{C(\overline{\Omega})}+c_2^2(1+c_1^2)\|h^+\|^2_{C(\partial\Omega)}\right)\\ &\quad-2\lambda\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\frac{c_1^2\|g\|^2_{L^2(\Omega)}+1/2c_2^2(1+c_1^2)\|h^+\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\right).\end{aligned}$$

Tomando a constante $c_3 > 0$, tal que $c_3 = \max\{c_1, c_2^2(1+c_1^2)\}$ então

$$\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_3\lambda\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\left[\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} + \frac{\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{\left|\displaystyle\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right|}\right]$$

$$\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\left\{1 - \lambda c_3\left[\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} + \frac{\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{\left|\displaystyle\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right|}\right]\right\} \leq 0. \quad (1.99)$$

Como nossos cálculos foram para um $\lambda$ arbitrário, podemos tomar $\lambda$ pequeno de modo que

$$0 < \lambda \leq \left\{c_3\left[\|g^+\|_{C(\overline{\Omega})} + \|h^+\|_{C(\partial\Omega)} + \frac{\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{\left|\displaystyle\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right|}\right]\right\}^{-1}. \quad (1.100)$$

Daí, para $\lambda$ que satisfaz (1.100) temos de (1.99), que necessariamente $\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$, logo, $\nabla w = 0$ q.t.p em $\Omega$, e assim, pela Proposição A.2 temos $w = c$ q.t.p em $\Omega$, onde $c$ é uma constante. Mas, como $w \in W$, então $\displaystyle\int_\Omega w\ \mathrm{d}x = 0$, consequentemente $w = 0$.

Agora, nos falta saber quem é $\alpha$ para $\lambda$ que satisfaz a desigualdade (1.100). Para encontrarmos $\alpha$ novamente usaremos que podemos escrever de forma única

$$-\Delta u = Q(-\Delta u) \oplus (1-Q)(-\Delta u).$$

Porém, dessa vez iremos calcular $(1-Q)(-\Delta u)$, que como já sabemos é o mesmo que calcular $(1-Q)(\lambda g u)$, pois $u$ é solução de (1.2). Vejamos,

$$\begin{aligned}(1-Q)(-\Delta u) &= -\Delta u + Q(\Delta u)\\ &= -\Delta(\alpha + w) + \Delta w - \frac{\lambda\displaystyle\int_{\partial\Omega} h(\alpha + w)\ \mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\left(g + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right)\\ &= -\frac{\lambda\displaystyle\int_{\partial\Omega} h(\alpha + w)\ \mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\left(g + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right), \quad (1.101)\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(1-Q)(\lambda gu) &= \lambda gu + \frac{\lambda \int_\Omega g(\alpha+w)\ \mathrm{d}x}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\left(g+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right) - \lambda g(\alpha+w) \\
&= \frac{\lambda \int_\Omega g(\alpha+w)\ \mathrm{d}x}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\left(g+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right). \qquad (1.102)
\end{aligned}
$$

Logo, para $\lambda$ que está nas condições de (1.100), já sabemos que $w=0$. Assim, igualando (1.101) e (1.102), obtemos a seguinte igualdade

$$
\begin{aligned}
-\frac{\lambda \int_{\partial\Omega} h\alpha\ \mathrm{d}\sigma}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\left(g+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right) &= \frac{\lambda \int_\Omega g\alpha\ \mathrm{d}x}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\left(g+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right) \\
\frac{\lambda\alpha}{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma}\left(g+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right)\left(\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right) &= 0 \\
\lambda\alpha\left(g+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right) &= 0. \qquad (1.103)
\end{aligned}
$$

Recorde que $\lambda > 0$ e

$$
\int_\Omega\left(g+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma\right)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\ \mathrm{d}x = \int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma < 0.
$$

Com isso e tendo em vista (1.103), só resta que $\alpha = 0$. Resumindo: O problema (1.1) só admite a solução trivial quando $\lambda \in (0, \underline{\lambda}(g,h))$. Como (1.1) admite solução não-trivial com $\lambda = \lambda_1(g,h) \geq 0$, isso nos garante que $\lambda_1(g,h) \geq \underline{\lambda}(g,h)$. Isso finaliza a prova. $\square$

# Capítulo 2

# O método de sub e supersolução

O objetivo principal deste capítulo é enunciar e demonstrar o método de sub e supersolução para o problema não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que

$$\mathcal{B} = \beta(\cdot) + \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta},$$

com $\beta \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$. Método este, que será usado para provar a existência de solução para o problema logístico no capítulo seguinte. Para tanto, dividiremos este capítulo da seguinte maneira. Na Seção 2.1, iremos estudar o problema linear

$$\begin{cases} (-\Delta + K)u = q(x) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e estabeleceremos a unicidade da solução analisando dois casos: $\beta \geq 0$ e $\beta$ qualquer. Na Seção 2.2 provaremos o método de sub e supersolução usando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

## 2.1 Estudo do problema linear

Nesta seção, vamos provar existência e unicidade de solução para o seguinte problema linear:

$$\begin{cases} (-\Delta + K)u = q(x) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Para tanto, seguindo as ideias de López-Gómez [18], faremos a análise considerando dois casos: $\beta \geq 0$ e $\beta$ qualquer. O caso $\beta \geq 0$ será estudado na Subseção 2.1.1, e provado diretamente com a aplicação do Teorema de Lax-Milgram. O caso $\beta$ qualquer será analisado na Subseção 2.1.2, e a prova ocorrerá através da construção de um novo problema relacionado a (2.1), de modo que nele obteremos um novo $\tilde{\beta}$ positivo. Com isso, usaremos os resultados da Subseção 2.1.1 nesse novo problema. Em seguida, provaremos que existe uma bijeção entre as soluções desse novo problema e do problema com $\beta$ qualquer. Em síntese, esta seção se destina a provar o seguinte resultado.

**Teorema 2.1.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $\mathcal{B}$ um operador como da forma* (2.1)*, então existe $K_0 > 0$, tal que, para todo $K \geq K_0$ e $q \in L^2(\Omega)$ o problema*

$$\begin{cases} (-\Delta + K)u = q(x) & em\ \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & sobre\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*admite uma única solução $u \in W^{2,2}(\Omega)$.*

### 2.1.1 Caso $\beta \geq 0$

Nesta subseção iremos provar o Teorema 2.1 considerando apenas o caso $\beta \geq 0$. O resultado seguirá usando o Teorema de Lax-Milgram (Teorema A.16).

Iniciamos considerando $K$ um número real. Com isso, observe que a forma bilinear associada ao problema (2.1) é definida por

$$\begin{aligned} B : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto B(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega K uv \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta uv \,\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Conforme visto na Definição 1.1, a formulação fraca de (2.1) é uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que,

$$B(u,v) = \int_\Omega q(x) v \,\mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in W^{1,2}(\Omega). \tag{2.2}$$

Vamos provar que $B$ satisfaz as condições do Teorema de Lax-Milgram (Teorema A.16) através dos próximos resultados.

**Lema 2.1.** *Para todo $K \in \mathbb{R}$, existe uma constante $C := C(K) > 0$ tal que*

$$|B(u,v)| \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

*para todo $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$. Isto é, a forma bilinear $B(u,v)$ é contínua.*

***Demonstração***. Com efeito, sejam $u,v \in W^{1,2}(\Omega)$. Pela Desigualdade de *Hölder* (Teorema A.1), temos

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega K uv \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta uv \, \mathrm{d}\sigma \right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |K||u||v| \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |\beta||u||v| \, \mathrm{d}\sigma \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |K| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|_{C(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} + |K| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|_{C(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela continuidade do operador traço de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$, existe uma constante $c_1 > 0$, tal que $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$, e pela imersão contínua de $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, existe uma constante $c_2 > 0$, tal que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$, logo

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} + c_2 |K| \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&\quad + c_1 \|\beta\|_{C(\partial\Omega)} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&= \left(1 + |K| c_2 + c_1 \|\beta\|_{C(\partial\Omega)}\right) \left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Considerando $C := C(K) = (1 + |K|c_2 + c_1\|\beta\|_{C(\partial\Omega)}) > 0$, temos

$$|B(u,v)| \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Portanto, $B$ é contínua. □

Para provarmos a coercividade vamos considerar o seguinte resultado.

**Lema 2.2.** *Suponha $\beta \geq 0$. Para todo $K \geq 1$, temos*

$$|B(u,u)| \geq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W^{1,2}(\Omega). \tag{2.3}$$

***Demonstração***. Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Como $\beta \geq 0$ e $K \geq 1$, segue que

$$B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega K u^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta u^2 \, \mathrm{d}\sigma \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Estabelecemos que $B$ é coerciva. □

Agora que estudamos $B(\cdot,\cdot)$ podemos estabelecer a existência de solução fraca para (2.1).

**Teorema 2.2.** *Seja $K \geq 1$. Então,* (2.1) *possui uma única solução fraca $u \in W^{2,2}(\Omega)$.*

***Demonstração***. Considere a forma bilinear $B(\cdot,\cdot)$ associada a (2.1), já provamos que $B$ é contínua e coerciva para $K \geq 1$. Além disso, é claro que dado $q \in L^2(\Omega)$ o funcional $F : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$F(v) = (q,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega qv \, \mathrm{d}x,$$

é linear e contínuo.

Então, aplicando o Teorema de Lax-Milgram (Teorema A.16), para todo $q \in L^2(\Omega)$, existe um único $u = u_q \in W^{1,2}(\Omega)$, satisfazendo

$$B(u_q, v) = \int_\Omega qv \, \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Portanto, $u$ é a única solução de (2.1). Por regularidade elíptica (Teorema A.17) temos que $u = u_q \in W^{2,2}(\Omega)$. Isso finaliza a demonstração para o caso $\beta \geq 0$.

□

### 2.1.2 $\beta \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$ qualquer

Nesta seção vamos retirar a condição $\beta \geq 0$ que estudamos anteriormente. Porém, recordando que nosso objetivo é demonstrar o Teorema 2.1, nossa ideia se baseia em construir um novo problema relacionado a (2.1) e nele vamos obter um novo $\tilde{\beta} \geq 0$. Vejamos os primeiros resultados desta seção.

**Lema 2.3.** *Suponha $\Omega$ de classe $C^2$. Então, existem $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $\gamma > 0$ tais que*

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \geq \gamma, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

***Demonstração***. Ver [18, Lemma 2.2.]. □

Necessitaremos relembrarmos da Definição 1.4 para provarmos o seguinte resultado.

**Lema 2.4.** *Considere $\Omega$ de classe $C^2$. Então existe $K_0 > 0$ de modo que $(-\Delta + K, \mathcal{B}, \Omega)$ admite uma supersolução estrita positiva $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\zeta(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $K \geq K_0$.*

***Demonstração***. Seja $\zeta(x) = e^{M\psi(x)}$, $x \in \overline{\Omega}$ e $M > 0$, sendo $\psi$ a função obtida pelo Lema 2.3. Como $\zeta(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, em particular $\zeta(x) > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Além disso, devido o Lema 2.3, temos sobre $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\zeta &= \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}+\beta\zeta = \frac{\partial(e^{M\psi(x)})}{\partial\eta}+\beta\zeta = e^{M\psi(x)}M\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\beta\zeta \\ &= \zeta M\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\beta\zeta = \zeta\left(M\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\beta\right) \geq \zeta\,(M\gamma+\beta) > 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

para M suficientemente grande. Ora, uma vez que $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, existe $K_1 > 0$ tal que $|-\Delta\zeta| \leq K_1$. Daí, tomando $K_0 > 0$ de modo que $K_0\zeta > K_1$, temos em $\Omega$

$$(-\Delta+K_0)\zeta > 0.$$

Isto nos garante que $\zeta$ é uma supersolução estrita de $(-\Delta+K_0,\mathcal{B},\Omega)$, então

$$(-\Delta+K)\zeta \geq (-\Delta+K_0)\zeta > 0.$$

Com isso, finalizamos a demonstração. $\square$

Agora, vamos a construção do novo problema. Seja $\zeta$ como no Lema 2.4 e defina para $u \in W^{2,p}(\Omega)$ uma função

$$v := \frac{u}{\zeta} \in W^{2,p}(\Omega), \quad p > N.$$

Assim,

$$\begin{aligned}-\Delta u &= -\Delta(\zeta v) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2(\zeta v)}{\partial x_i^2} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(\zeta v)}{\partial x_i}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\zeta\frac{\partial v}{\partial x_i}+v\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\right] \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left[\zeta\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}+v\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_i^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] \\ &= \zeta\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}-\frac{2}{\zeta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}-\frac{v}{\zeta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_i^2}\right] \\ &= \zeta\left[-\Delta v-\frac{2}{\zeta}\langle\nabla\zeta,\nabla v\rangle-\frac{v}{\zeta}\Delta\zeta\right].\end{aligned}$$

Ou seja, para todo $x \in \Omega$ temos

$$-\Delta u = -\zeta\Delta_\zeta v \tag{2.5}$$

para,

$$-\Delta_\zeta = -\Delta(\cdot)+\langle\vec{b}_\zeta,\nabla(\cdot)\rangle+c_\zeta,$$

com
$$\vec{b}_\zeta := -\frac{2}{\zeta}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right) = -\frac{2}{\zeta}\nabla\zeta \quad \text{e} \quad c_\zeta := \frac{-\Delta\zeta}{\zeta}.$$
Vale notar que $b_\zeta$ e $c_\zeta \in L^\infty(\Omega)$. Denotaremos
$$\mathcal{B}_\zeta := \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta} + \beta_\zeta, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega,$$
com $\beta_\zeta := \mathcal{B}\zeta/\zeta$. Assim, usando (2.4) temos
$$\begin{aligned}
\beta_\zeta &= \left(M\zeta\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \beta\zeta\right)\cdot\frac{1}{\zeta} \\
&= M\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \beta \\
&\geq M\gamma + \beta > 0,
\end{aligned}$$
para $M$ suficientemente grande. Ou seja, escolhendo $M$ desta maneira, obtemos $\beta_\zeta > 0$ sobre $\partial\Omega$. Como $\beta \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$ e $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, temos $\beta_\zeta \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$. Por fim, vale observar que para todo $u \in C^1(\overline{\Omega})$,
$$\begin{aligned}
\zeta\mathcal{B}_\zeta\frac{u}{\zeta} &= \zeta\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta}\left(\frac{u}{\zeta}\right) + \beta_\zeta\frac{u}{\zeta}\right) \\
&= \zeta\left[\left(\frac{\zeta\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}}{\zeta^2}\right) + \frac{\mathcal{B}\zeta}{\zeta}\frac{u}{\zeta}\right] \\
&= \frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{u}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \beta\zeta\right)\frac{u}{\zeta} \\
&= \frac{\partial u}{\partial\eta} + \beta u.
\end{aligned}$$
Isto é,
$$\mathcal{B}u = \zeta\mathcal{B}_\zeta\frac{u}{\zeta}, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{2.6}$$
Isso nos diz que se tomarmos $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$ que seja solução forte de (2.1) e realizarmos a mudança de variável $v := u/\zeta$, então por (2.5) segue que $v$ é solução forte de
$$\begin{cases} (-\Delta_\zeta + K)v = \dfrac{q}{\zeta} & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}_\zeta v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Analise que a recíproca é verdadeira, ou seja, dada $v$ solução de (2.7) obtemos que $u = \zeta v$ é solução de (2.1), o que nos faz estabelecer uma bijeção entre as soluções fortes destes problemas. Como $\beta_\zeta \geq 0$ podemos usar os resultados encontrados na Subseção 2.1.1 para $(-\Delta, \mathcal{B}, \Omega)$. Vamos mostrar também que existe uma relação entre as soluções fracas destes problemas. Para isso considere $B, B_\zeta : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ as formas bilineares associadas a (2.1) e (2.7), respectivamente. Assim, para todos $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, tem-se que

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega Kuv \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta uv \, \mathrm{d}\sigma,$$

e

$$B_\zeta(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega v(Ku + \langle b_\zeta, \nabla u\rangle + c_\zeta u) \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\beta_\zeta u \, \mathrm{d}\sigma$$

verificam o seguinte resultado.

**Lema 2.5.** *Para todo $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$,*

$$B(\zeta v, \frac{w}{\zeta}) = B_\zeta(v,w).$$

***Demonstração***. Por definição,

$$B_\zeta(v,w) = \int_\Omega Kvw \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x + \int_\Omega w\langle b_\zeta, \nabla v\rangle \, \mathrm{d}x + \int_\Omega wc_\zeta v \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} w\beta_\zeta v \, \mathrm{d}\sigma. \tag{2.8}$$

Iremos analisar separadamente as 3 últimas integrais de (2.8). Com isso, obtemos as seguintes igualdades

$$\int_\Omega w\langle b_\zeta, \nabla v\rangle \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{2}{\zeta}\langle \nabla\zeta, \nabla v\rangle w \, \mathrm{d}x = -2\int_\Omega \frac{w}{\zeta}\langle \nabla\zeta, \nabla v\rangle \, \mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

Aplicando o Teorema A.3, e as seguintes propriedades de gradiente

$$\nabla(\zeta v) = \zeta\nabla v + v\nabla\zeta, \quad \nabla\left(\frac{w}{\zeta}\right) = \frac{\zeta\nabla w - w\nabla\zeta}{\zeta^2},$$

encontramos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega c_\zeta wv \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega -\frac{\Delta\zeta}{\zeta} vw \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{vw}{\zeta}\Delta\zeta \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla\left(\frac{vw}{\zeta}\right)\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\left(\frac{vw}{\zeta}\right) \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_\Omega \frac{\zeta\nabla(vw) - vw\nabla\zeta}{\zeta^2}\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\nabla(vw)}{\zeta} - \frac{vw\nabla\zeta}{\zeta^2}\right)\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_\Omega \frac{1}{\zeta}\nabla(vw)\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{vw}{\zeta^2}\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_\Omega \frac{1}{\zeta}(v\nabla w + w\nabla v)\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{vw}{\zeta^2}\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_\Omega \frac{v}{\zeta}\nabla w\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{w}{\zeta}\nabla v\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{vw}{\zeta^2}\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Além do mais, devido

$$
\beta_\zeta = \frac{B\zeta}{\zeta} = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \beta\zeta\right)\frac{1}{\zeta},
$$

então temos

$$
\int_{\partial\Omega} \beta_\zeta vw \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \,\mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\beta\zeta \,\mathrm{d}\sigma. \tag{2.11}
$$

Daí, somando as equações (2.9) e (2.10) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \langle b_\zeta, \nabla v\rangle w \,\mathrm{d}x + \int_\Omega c_\zeta wv \,\mathrm{d}x = &-\int_\Omega \frac{w}{\zeta}\nabla\zeta\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{v}{\zeta}\nabla w\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega \frac{vw}{\zeta^2}\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \,\mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}
$$

e por (2.11), encontramos a seguinte igualdade

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \langle b_\zeta, \nabla v\rangle w \,\mathrm{d}x + \int_\Omega c_\zeta wv \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta_\zeta vw \,\mathrm{d}\sigma = &-\int_\Omega \frac{w}{\zeta}\nabla\zeta\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{v}{\zeta}\nabla w\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega \frac{vw}{\zeta^2}\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{vw}{\zeta}\beta_\zeta \,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Por fim, substituindo (2.12) em (2.8),

$$\begin{aligned}
B_\zeta(v,w) &= \int_\Omega Kvw\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{w}{\zeta}\nabla\zeta\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{v}{\zeta}\nabla w\cdot\nabla\zeta\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_\Omega \frac{vw}{\zeta^2}\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\frac{vw}{\zeta}\beta_\zeta\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_\Omega Kvw\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\frac{vw}{\zeta}\beta_\zeta\,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega (\zeta\nabla v + v\nabla\zeta)\left(\frac{\nabla w}{\zeta} - \frac{-w\nabla\zeta}{\zeta^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega K(\zeta v)\frac{w}{\zeta}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\frac{w}{\zeta}\beta(\zeta v)\,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega \nabla(\zeta v)\nabla\left(\frac{w}{\zeta}\right)\mathrm{d}x = B(\zeta v,\frac{w}{\zeta}).
\end{aligned}$$

Isso finaliza a prova do Lema. □

Através do próximo resultado vamos estabelecer uma bijeção entre as soluções fracas de (2.1) e (2.7).

**Teorema 2.3.** *Considere $\zeta$ como no Lema 2.4. Então uma função $v \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca de* (2.7) *se, e somente se, $u := \zeta v \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca de* (2.1).

***Demonstração***. Suponha que $v = u/\zeta$ é uma solução fraca de (2.7). Assim, vale que

$$B_\zeta(v,\phi) = (\frac{q}{\zeta},\phi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{2.13}$$

Pelo Lema 2.5, isso é equivalente a

$$B(u,\frac{\phi}{\zeta}) = B(\zeta v,\frac{\phi}{\zeta}) = (q,\frac{\phi}{\zeta})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Vamos usar a densidade de $C^\infty(\Omega)$ em $W^{1,2}(\Omega)$ (ver Teorema A.8) para mostrar que

$$B(u,\psi) = (q,\psi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \psi \in C^\infty(\Omega). \tag{2.14}$$

Para tanto, considere $\psi \in C^\infty(\Omega), \phi = \zeta\psi \in C^2(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$. Pela densidade de $C^\infty(\Omega)$ em $W^{1,2}(\Omega)$, existe uma sequência $\phi_n \subset C^\infty(\Omega), n \geq 1$, tal que

$$\phi_n \to \zeta\psi \quad \text{em} \quad W^{1,2}(\Omega).$$

Usando (2.13) com $\phi_n$ temos,

$$B(u,\frac{\phi_n}{\zeta}) = (q,\frac{\phi_n}{\zeta})_{L^2(\Omega)}.$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando a continuidade de $B$, obtemos (2.14). O que nos mostra que $u = \zeta v \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (2.1).

Por outro lado, suponha que $u = \zeta v$ é solução fraca de (2.1). Temos então

$$B(u,\phi) = B(\zeta v,\phi) = (q,\phi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{2.15}$$

Assim, dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$, temos que $\phi/\zeta \in C^2(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$. Usando novamente a densidade de $C^\infty(\Omega)$ em $W^{1,2}(\Omega)$, existe uma sequência $\psi_n \subset C^\infty(\Omega)$, tal que

$$\psi_n \to \frac{\phi}{\zeta}, \quad \text{em} \quad W^{1,2}(\Omega).$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando a continuidade de $B$, obtemos

$$B(\zeta v, \frac{\phi}{\zeta}) = (g, \frac{\phi}{\zeta})_{L^2(\Omega)} = (\frac{g}{\zeta},\phi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{2.16}$$

Pelo Lema 2.5, isso é equivalente a

$$B\zeta(v,\phi) = (\frac{g}{\zeta},\phi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Portanto $v$ é solução fraca de (2.7). □

O próximo resultado garante a unicidade da solução fraca associada a (2.1). No entanto observe que não se faz nenhuma exigência sobre o sinal de $\beta$.

**Teorema 2.4.** *Suponha que $\Omega$ seja de classe $C^2$. Então existe $K_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $K \geq K_0$ o problema* (2.1) *possui uma única solução fraca*

$$u := (-\Delta + K)^{-1} q \in W^{1,2}(\Omega).$$

***Demonstração***. Seja $\zeta(x) = e^{M\psi(x)}$, com $M\gamma + \beta > 0$. Então pela escolha de $\zeta$, temos $\beta_\zeta \geq 0$. Assim pelo Teorema 2.2, existe $K_0 > 0$ tal que, para cada $K \geq K_0$ o problema (2.7) possui uma única solução fraca

$$v := (-\Delta\zeta + K)^{-1} \frac{q}{\zeta} \in W^{1,2}(\Omega).$$

Pelo Teorema 2.3, a função

$$u := \zeta v = \zeta(-\Delta\zeta + K)^{-1} \frac{g}{\zeta} \in W^{1,2}(\Omega)$$

nos fornece a única solução fraca de (2.1). Por regularidade elíptica (Teorema A.17) esta função está em $W^{2,2}(\Omega)$. □

*Observação* 2.1. Note que o Teorema 2.4 nos permite definir um operador

$$(-\Delta+K)^{-1}: L^2(\Omega) \to W^{2,2}(\Omega).$$

Da imersão compacta $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que $(-\Delta+K)^{-1} \circ i$ é compacto (i denota a imersão de $W^{2,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$). Com abuso de notação, denotaremos

$$(-\Delta+K)^{-1}: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

sendo este compacto.

Finalizamos o estudo do Problema linear (2.1) e agora estamos aptos a provarmos o método de sub e supersolução, conforme faremos na próxima seção.

## 2.2 Método de sub e supersolução

Nesta seção vamos iniciar o estudo do problema elíptico não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Nosso objetivo é estabelecer o método de sub e supersolução para este problema. Para isso, primeiro iremos definir alguns conceitos e recordar um resultado importante que será utilizado para provar o método.

**Definição 2.1.** *Dizemos que uma função $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma subsolução de* (2.17) *se*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f(x,\underline{u}) & \textit{em } \Omega, \\ \mathcal{B}\underline{u} \leq 0 & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.18}$$

**Definição 2.2.** *Dizemos que uma função $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma supersolução de* (2.17) *se*

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq f(x,\overline{u}) & \textit{em } \Omega, \\ \mathcal{B}\overline{u} \geq 0 & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

Veremos agora um resultado que será fundamental para a prova do método de sub e supersolução.

**Teorema 2.5** (**Ponto Fixo de Schauder**)**.** *Seja $E$ um espaço de Banach e $M \subseteq E$ um conjunto não-vazio, convexo e fechado. Se $T : M \to M$ é uma aplicação contínua e compacta, então $T$ admite um ponto fixo.*

***Demonstração***. Ver [14, Corolário 11.2]. □

Agora, vamos ao resultado principal desta seção, que demonstra o método de sub e supersolução para o Problema (2.17).

**Teorema 2.6.** *Suponha $f(x,s)$ uma função holder contínua na variável $x \in \Omega$, e de classe $C^1$ na variável $s \in \mathbb{R}$. Se o problema* (2.17) *admite um par $(\underline{u},\overline{u})$ de sub e supersoluções ordenadas, então existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ de* (2.17) *que verifica*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

***Demonstração***. A prova seguirá através da aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Inicialmente, defina o conjunto

$$I = [\underline{u},\overline{u}] := \{u \in L^2(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}.$$

Desse modo, $I$ é não vazio $(\underline{u},\overline{u} \in I)$ e ainda goza da convexidade, pois, para quaisquer funções $\upsilon$, $\psi \in I$ e $t \in [0,1]$, definindo $z = t\psi + (1-t)\upsilon$ temos

$$\begin{cases} \underline{u}(1-t) \leq (1-t)\upsilon \leq (1-t)\overline{u} \\ t\underline{u} \leq t\psi \leq t\overline{u}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Somando as equações de (2.20) encontramos

$$\underline{u} \leq (1-t)\upsilon + t\psi \leq \overline{u},$$

o que nos garante a convexidade de $I$. Além disso, $I$ é fechado. Com efeito, considere $u \in \overline{I}$. Então, existe uma sequência $(u_m) \in I$, tal que

$$u_m \to u \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Aplicando o Teorema A.11 segue que existe uma subsequência de $(u_m)$ que denotaremos da mesma forma, tal que

$$u_m(x) \to u(x), \quad q.t.p \ \text{em}\ \Omega.$$

Como $u_m \in I$, vale que

$$\underline{u}(x) \leq u_m(x) \leq \overline{u}(x), \quad q.t.p \text{ em } \Omega,$$

ou seja, existe um conjunto $M \subset \Omega$ para $|M| = 0$, e

$$\underline{u}(x) \leq u_m(x) \leq \overline{u}(x), \quad em \quad \Omega \setminus M,$$

então, fazendo $m \to +\infty$ concluímos que

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \quad \text{em} \quad \Omega \setminus M,$$

portanto $u \in I$, mostrando que $I$ é fechado. Agora, vamos construir o operador $T : I \to I$. Para isso, procedemos como segue. Considere $K$ um número real. Conforme vimos no Teorema 2.1 o Problema (2.1) possui uma única solução $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Por consequência, dada $w \in I$, particularizando para $q(x) = f(x, w(x)) + Kw(x)$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + Ku = f(x,w) + Kw & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.21}$$

possui uma única solução. Definimos o operador solução $T : I \to I$ que para cada $w \in I$, é associado à função $T(w) := u$, sendo $u$ a única solução de (2.21). Desde que $f(x,t)$ é de classe $C^1$ na variável $t \in \mathbb{R}$, então sua derivada $f_t(x,t)$ atinge mínimo no compacto

$$\overline{\Omega} \times \left[\min_{\overline{\Omega}} \underline{u}(x), \max_{\overline{\Omega}} \overline{u}(x)\right].$$

Assim, podemos obter $K > 0$ suficientemente grande de modo que $t \longmapsto f(x,t) + Kt$ seja crescente em $\overline{\Omega} \times \left[\min_{\overline{\Omega}} \underline{u}(x), \max_{\overline{\Omega}} \overline{u}(x)\right]$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Para isso, basta impormos a seguinte condição

$$\frac{\partial (f(x,t) + Kt)}{\partial t} > 0,$$

o que ocorre se

$$K > -\frac{\partial (f(x,t))}{\partial t}, \quad \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\min \underline{u}, \max \overline{u}].$$

Provaremos que $T$ está bem definido, ou seja, $T(I) \subset I$. Com efeito, para cada $u \in T(I)$ existe $w \in I$, tal que $T(w) = u$, onde $u$ é solução de (2.21). Mostraremos que $u \in I$. Como

$w \in I$, então $\underline{u} \leq w \leq \overline{u}$. Ainda, sabemos que em $\Omega$

$$-\Delta u + Ku = f(x,w) + Kw, \tag{2.22}$$

e por $\underline{u}$ ser subsolução de (2.17), então

$$\begin{aligned} f(x,\underline{u}) &\geq -\Delta \underline{u} \\ \Delta \underline{u} - K\underline{u} &\geq -f(x,\underline{u}) - K\underline{u}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Somando as equações (2.22) e (2.23), encontramos

$$\begin{aligned} -\Delta(u-\underline{u}) + K(u-\underline{u}) &\geq f(x,w) - f(x,\underline{u}) + K(w-\underline{u}) \\ &= f(x,w) + Kw - (f(x,\underline{u}) + K\underline{u}) \geq 0, \quad \forall\, x \in \Omega. \end{aligned}$$

A ultima desigualdade provém de $w \in I$ e $t \longmapsto f(x,t) + Kt$ ser crescente. Analogamente, sobre $\partial\Omega$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}u &= \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta(x)u = 0 \\ -\mathcal{B}\underline{u} &= -\frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} - \beta(x)\underline{u} \geq 0, \end{aligned}$$

portanto, $\mathcal{B}(u-\underline{u}) \geq 0$. Aplicando o princípio do máximo (Ver Proposição A.4) segue que $u - \underline{u} \geq 0$, ou seja, $u \geq \underline{u}$. De maneira análoga prova-se que $u \leq \underline{u}$. Temos também que $T$ é contínuo. Com efeito, considere a sequência $(w_n) \subset I$, de modo que

$$w_n \to w \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Pela definição do operador $T$, temos $T(w_n) = u_n$, de modo que $u_n$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n + Ku_n = f(x,w_n) + Kw_n & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Isso nos diz que,

$$T(w_n) = u_n = (-\Delta + K)^{-1}(f(x,w_n) + Kw_n). \tag{2.24}$$

Afirmamos que $v_n =: f(x,w_n) + Kw_n$ é limitada em $L^2(\Omega)$. De fato, como $w_n \subset I$, então $Kw_n$ é limitado em $L^2(\Omega)$. Além disso, como por hipótese $f$ é contínua, segue que existe

$c > 0$, tal que

$$|f(x,s)| \leq c, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}, \quad s \in [\min \underline{u}, \max \overline{u}],$$

em particular,

$$\int_\Omega |f(x,w_n)|^2 \, \mathrm{d}x \leq c^2 |\Omega|.$$

Ou seja, $v_n \in L^2(\Omega)$ e ainda, $v_n$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Além disso, como visto na Observação 2.1 o operador $(-\Delta + K)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é compacto, consequentemente $u_n$ é limitada. Então, a menos de subsequência

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Resta mostrar que $u = T(w)$, para concluir a continuidade do operador $T$. Fazendo $n \to +\infty$ em (2.24) encontramos

$$u = (-\Delta + K)^{-1}(f(x,w) + Kw).$$

Isto é, $T(w_n) \to T(w)$ e, portanto, $T$ é contínuo.

Por último, concluímos que o operador $T$ é compacto. Para tanto, basta considerarmos uma sequência $(w_n)$ limitada, daí, pela definição do operador $T$, temos

$$T(w_n) = u_n = (-\Delta + K)^{-1}(f(x,w_n) + Kw_n),$$

e por raciocínio análogo ao anterior, temos que a menos de subsequência $u_n$ é convergente. Segue então que $T$ também é compacto.

Por fim, estamos nas condições do Teorema 2.5 (Ponto Fixo de Schauder) então existe $u \in I$ tal que $T(u) = u$, isto é, $u$ verifica

$$\begin{cases} -\Delta u + Ku = f(x,u) + Ku & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e portanto $u$ é solução de (2.17). Por regularidade elíptica (Ver Teorema A.17 e Teorema A.18) temos que $u$ é solução clássica de (2.17). □

Com isso, finalizamos a seção.

# Capítulo 3

# O problema logístico com coeficientes indefinidos

Neste capítulo, nosso objetivo é estabelecer existência e unicidade de solução positiva para o problema elíptico não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(g(x) - cu)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x)u & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Sendo $\Omega$ um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ com fronteira $\partial\Omega$ regular, $\lambda$ um parâmetro real, $g \in C^\theta(\overline{\Omega})$ e $h \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, ambas podem mudar de sinal, $c > 0$, e $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$.

Vamos ao resultado principal da dissertação.

Adotaremos a seguinte convenção

$$\lambda_1(g,h) = 0, \text{ caso } \int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \geq 0.$$

**Teorema 3.1.** *Assuma que $g(x) \nleq 0$ em $\Omega$ ou $h(x) \nleq 0$ sobre $\partial\Omega$. Então, o conjunto de soluções positivas do Problema* (3.1) *com $c > 0$ verifica as seguintes afirmações:*

*(i) existe uma única solução positiva $u_\lambda$ de* (3.1) *para todo $\lambda > \lambda_1(g,h)$;*

*(ii) $u_\lambda$ satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|u_\lambda\|_{L^3(\Omega)} \leq c^{-1}\left(-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)|\Omega|^{1/3}, \qquad \forall\, \lambda > \lambda_1(g,h); \tag{3.2}$$

*(iii) a solução $u_\lambda$ satisfaz o comportamento assintótico,*

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1(g,h)} u_\lambda = \frac{\max\left\{ \int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma, 0 \right\}}{c|\Omega|}, \quad em\, C^2(\overline{\Omega}); \tag{3.3}$$

*(iv) caso $\lambda_1(g,h) > 0$, então não existe solução positiva para $0 < \lambda \leq \lambda_1(g,h)$.*

***Demonstração***. A demonstração do item (i) ocorrerá da seguinte maneira. Primeiro mostraremos a existência e depois a unicidade de solução positiva (denotada por $u_\lambda$). Para tanto, construiremos sub e supersoluções adequadas e usaremos o Teorema 2.6.

Usaremos a autofunção positiva $\phi_1(\lambda)$ definida no Teorema 1.3, que corresponde ao autovalor principal $\mu_1(\lambda)$. Por toda a demonstração $\phi_1(\lambda)$ será normalizada com $\|\phi_1(\lambda)\|_{C(\overline{\Omega})} = 1$.

Para obtermos o resultado desejado, devemos recordar que $\phi_1(\lambda) > 0$ em $\overline{\Omega}$ e $\mu_1(\lambda) < 0$ para $\lambda > \lambda_1(g,h)$ devido os Teoremas 1.3 e 1.4. Iniciamos encontrando a supersolução $\overline{u}$, sendo a candidata dada por $\overline{u} = K\phi_1(\lambda)$, para $K > 0$ a ser escolhido de modo que verifique

$$-\Delta\overline{u} \geq \lambda(g(x) - c\overline{u})\overline{u}, \quad \text{em } \Omega, \tag{3.4}$$

ou seja,

$$-\Delta(K\phi_1(\lambda)) \geq \lambda K g(x)\phi_1(\lambda) - \lambda c(K\phi_1(\lambda))^2, \quad \text{em } \Omega. \tag{3.5}$$

Desde que $\phi_1(\lambda)$ é autofunção de (1.2), temos que

$$\mu_1(\lambda)K\phi_1(\lambda) = -\Delta(K\phi_1(\lambda)) - \lambda g(x)\phi_1(\lambda)K, \quad \text{em } \Omega.$$

Por consequência, (3.5) é equivalente a

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda)K\phi_1(\lambda) &\geq -\lambda c(K\phi_1(\lambda))^2 \\ \mu_1(\lambda) &\geq -\lambda c K\phi_1(\lambda) \\ K &\geq \frac{-1}{c}\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda\phi_1(\lambda)}, \qquad \text{em } \Omega. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Também sabemos que

$$\frac{\partial(K\phi_1(\lambda))}{\partial\eta} \geq \lambda h(K\phi_1(\lambda)), \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Assim, para que a desigualdade (3.6) ocorra, basta tomar

$$K = \frac{-1}{c} \frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda \min\limits_{\overline{\Omega}} \phi_1(\lambda)}.$$

Com isso, obtemos a supersolução sendo

$$\overline{u} = \frac{-1}{c} \frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda \min\limits_{\overline{\Omega}} \phi_1(\lambda)} \phi_1(\lambda).$$

Analogamente, considere a candidata a subsolução $\underline{u} = \varepsilon\phi_1(\lambda)$, com $\varepsilon > 0$ a ser escolhido. Neste caso, queremos que seja verdadeira a seguinte desigualdade

$$-\Delta\underline{u} \leq \lambda(g(x) - c\underline{u})\underline{u}, \quad \text{em } \Omega,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\Delta(\varepsilon\phi_1(\lambda)) &\leq \lambda(g(x) - c(\varepsilon\phi_1(\lambda)))\varepsilon\phi_1(\lambda) \\ -\Delta\phi_1(\lambda) &\leq \lambda g(x)\phi_1(\lambda) - \lambda c\varepsilon(\phi_1(\lambda))^2, \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Porém, do problema (1.2) temos a igualdade

$$-\Delta\phi_1(\lambda) - \lambda g(x)\phi_1(\lambda) = \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda), \quad \text{em } \Omega.$$

Então, (3.7) é equivalente a

$$\begin{aligned} -\lambda c\varepsilon(\phi_1(\lambda))^2 &\geq \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda) \\ -\lambda c\phi_1(\lambda)\varepsilon &\geq \mu_1(\lambda) \\ \frac{1}{c}\left(-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda\phi_1(\lambda)}\right) &\geq \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Também sabemos que

$$\frac{\partial(\varepsilon\phi_1(\lambda))}{\partial\eta} \leq \lambda h(\varepsilon\phi_1(\lambda), \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Desde que $\|\phi_1(\lambda)\|_{C(\overline{\Omega})} = 1$, para que a desigualdade (3.8) ocorra basta tomar

$$\varepsilon = \frac{-1}{c}\left(\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right).$$

Desse modo, a subsolução é

$$\underline{u} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)\phi_1(\lambda).$$

Nos resta verificar se as sub e super soluções encontradas são ordenadas. Com efeito, uma vez que $\mu_1(\lambda) < 0$, temos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned}
\underline{u} &\leq \overline{u} \\
-\frac{1}{c}\left(\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)\phi_1(\lambda) &\leq -\frac{1}{c}\left(\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda \min\limits_{\overline{\Omega}}\phi_1(\lambda)}\right)\phi_1(\lambda) \\
\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda \min\limits_{\overline{\Omega}}\phi_1(\lambda)} &\leq \left(\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right) \\
1 &\leq \frac{1}{\min\limits_{\overline{\Omega}}\phi_1(\lambda)} \\
\min_{\overline{\Omega}}\phi_1(\lambda) &\leq 1.
\end{aligned}$$

A última desigualdade ocorre pois $\|\phi_1(\lambda)\|_{C(\overline{\Omega})} = 1$. Com isso, concluímos que $(\underline{u},\overline{u})$ é uma par de sub e supersoluções ordenadas. Então, estamos nas condições do Teorema 2.6, portanto concluímos que existe uma solução positiva $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ de (3.1) com $c > 0$ que verifica

$$-\frac{1}{c}\left(\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)\phi_1(\lambda) \leq u \leq \frac{-1}{c}\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda \min\limits_{\overline{\Omega}}\phi_1(\lambda)}\phi_1(\lambda). \tag{3.9}$$

Resta provarmos que essa solução é única. A unicidade da solução seguirá baseada no artigo de H. Brezis e L. Oswald [7].

Suponha que o Problema (3.1) admite duas soluções $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, com $u(x) > 0$ e $v(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$. Então, em $\Omega$ vale que

$$-\frac{\Delta u}{u} = \lambda g - \lambda c u \quad \text{e} \quad -\frac{\Delta v}{v} = \lambda g - \lambda c v.$$

Daí,

$$-\frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v} = -\lambda c u + \lambda c v - \lambda c(v - u).$$

Multiplicando por $(u^2 - v^2)$ e integrando em $\Omega$, temos

$$\int_\Omega \left( -\frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v} \right) (u^2 - v^2)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \lambda c(v-u)(u^2-v^2)\ \mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Agora, vamos manipular o lado esquerdo de (3.10). Primeiramente, observe que

$$\int_\Omega \left( -\frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v} \right) (u^2 - v^2)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega -\Delta u \cdot u\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{v^2}{u} \Delta u\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{u^2}{v} \Delta v\ \mathrm{d}x - \int_\Omega v \Delta v\ \mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Vamos calcular separadamente cada integral dessa expressão, usando as Fórmulas de Green (Teorema A.3). Assim, temos

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot u\ \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot u\ \mathrm{d}\sigma; \tag{3.12}$$

$$\int_\Omega -\Delta v \cdot v\ \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla v|^2\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot v\ \mathrm{d}\sigma; \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{v^2}{u} \Delta u\ \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \nabla \left( \frac{v^2}{u} \right) \nabla u\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \frac{v^2}{u} \right)\ \mathrm{d}\sigma \\
&= -\int_\Omega \left( \frac{u \nabla v^2 - v^2 \nabla u}{u^2} \right) \nabla u\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{v^2}{u}\ \mathrm{d}\sigma \\
&= -\int_\Omega \left( \frac{1}{u} \nabla v^2 \cdot \nabla u - \frac{v^2}{u^2} |\nabla u|^2 \right)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{v^2}{u} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ \mathrm{d}\sigma \\
&= -\int_\Omega \left( \frac{2v}{u} \nabla v \cdot \nabla u - \frac{v^2}{u^2} |\nabla u|^2 \right)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{v^2}{u} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ \mathrm{d}\sigma;
\end{aligned} \tag{3.14}$$

analogamente,

$$\int_\Omega \frac{u^2}{v} \Delta v\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega \left( \frac{2u}{v} \nabla u \cdot \nabla v - \frac{u^2}{v^2} |\nabla v|^2 \right)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{v} \frac{\partial v}{\partial \eta}\ \mathrm{d}\sigma. \tag{3.15}$$

Agora, iremos somar apenas os termos que obtivemos sobre $\partial\Omega$. Usando a condição de contorno que $u$ e $v$ verificam, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot u\,\mathrm{d}\sigma-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\eta}\cdot v\,\mathrm{d}\sigma+\int_{\partial\Omega}\frac{v^2}{u}\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma+\int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{v}\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma &= -\lambda\int_{\partial\Omega}u^2h(x)\,\mathrm{d}\sigma \\ &-\lambda\int_{\partial\Omega}h(x)v^2\,\mathrm{d}\sigma+\lambda\int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{v}h(x)v\,\mathrm{d}\sigma+\lambda\int_{\partial\Omega}\frac{v^2}{u}h(x)u\,\mathrm{d}\sigma \\ &= -\lambda\int_{\partial\Omega}h(x)(u^2+v^2)\,\mathrm{d}\sigma+\lambda\int_{\partial\Omega}h(x)(u^2+v^2)\,\mathrm{d}\sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí, nos resta da equação (3.10) apenas os termos em $\Omega$. Assim, substituindo (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15) em (3.11) concluímos

$$\begin{aligned} \int_\Omega\left(-\frac{\Delta u}{u}+\frac{\Delta v}{v}\right)(u^2-v^2)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(\frac{2v}{u}\nabla v\cdot\nabla u-\frac{v^2}{u^2}|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x \\ &-\int_\Omega\left(\frac{2u}{v}\nabla u\cdot\nabla v-\frac{u^2}{v^2}|\nabla v|^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega\left|\nabla u-\frac{u}{v}v\right|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left|\nabla v-\frac{v}{u}u\right|^2\mathrm{d}x\geq 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, retomando em (3.10), temos

$$\int_\Omega\lambda c(v-u)(u^2-v^2)\,\mathrm{d}x\geq 0.$$

Como $c>0$ e $\lambda>0$, isto implica que

$$0\geq\int_\Omega(u-v)^2(u+v)\,\mathrm{d}x.$$

Como o integrando é positivo, então só nos resta que $(u-v)^2(u+v)=0$ em $\Omega$. O que implica que $u=v$ em $\Omega$. Portanto, concluímos que o Problema (3.1) possui uma única solução positiva $u_\lambda$ para todo $\lambda>\lambda_1(g,h)$.

Vamos provar o item (ii). Para isso, será necessário uma série de cálculos para obtermos a estimativa (3.2). Primeiro, vamos observar que por integração por partes (Teorema A.3), temos a seguinte igualdade

$$\int_\Omega w\,\mathrm{div}(F)\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega\nabla wF\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}F\eta w\,\mathrm{d}\sigma, \tag{3.16}$$

para $F=(v_1,...,v_n)$. Agora, vamos substituir as integrais para o nosso caso. Vejamos,

$$v_j=\phi_1(\lambda)^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right) \quad \text{e} \quad w=\frac{u}{\phi_1(\lambda)},$$

o que nos diz que

$$\operatorname{div} F=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right).$$

Consequentemente, através de cálculos diretos temos as seguintes igualdades:

$$\int_\Omega w\ \operatorname{div}(F)\ \mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right)\ \mathrm{d}x; \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \nabla w F\ \mathrm{d}x &= -\int_\Omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\ \mathrm{d}x\\ &= -\int_\Omega \phi_1(\lambda)^2\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right]^2\ \mathrm{d}x\\ &= -\int_\Omega \phi_1(\lambda)^2\left|\nabla\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right|^2\ \mathrm{d}x; \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} F\eta w\ \mathrm{d}\sigma &= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\phi_1(\lambda)^2\eta^i\ \mathrm{d}\sigma\\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\phi_1(\lambda)^2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\eta^i\ \mathrm{d}\sigma\\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\phi_1(\lambda)^2\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{\partial u}{\partial x_j}\phi_1(\lambda)-\frac{\partial\phi_1(\lambda)}{\partial x_j}u}{\phi_1(\lambda)^2}\eta^i\ \mathrm{d}\sigma\\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\left[\phi_1(\lambda)\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial\phi_1(\lambda)}{\partial\eta}\right]\ \mathrm{d}\sigma. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Substituindo (3.17), (3.18) e (3.19) em (3.16), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right) \mathrm{d}x = &-\int_\Omega \phi_1(\lambda)^2 \left|\nabla\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\left[\phi_1(\lambda)\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial \phi_1(\lambda)}{\partial \eta}\right] \mathrm{d}\sigma \\
=&-\int_\Omega \phi_1(\lambda)^2 \left|\nabla\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&+\int_{\partial\Omega}\frac{u}{\phi_1(\lambda)}(\lambda h(x)u\phi_1(\lambda) - \lambda h(x)\phi_1(\lambda)u)\,\mathrm{d}\sigma \\
=&-\int_\Omega \phi_1(\lambda)^2 \left|\nabla\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right|^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\int_\Omega \left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right) \mathrm{d}x \leq 0. \tag{3.20}
$$

Por outro lado, temos também que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)^2 \frac{\phi_1(\lambda)\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial \phi_1(\lambda)}{\partial x_j}}{\phi_1(\lambda)^2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial \phi_1(\lambda)}{\partial x_j}\right).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Daí, multiplicando (3.21) por $u/\phi_1(\lambda)$ e integrando em $\Omega$, também encontramos que (3.17) satisfaz a igualdade

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right) \mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial \phi_1(\lambda)}{\partial x_j}\right) \\
&= \int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)}\left(\nabla\phi_1(\lambda)\cdot\nabla u + \phi_1(\lambda)\Delta u\right) \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)}\left(\nabla u\cdot\nabla\phi_1(\lambda) - u\Delta\phi_1(\lambda)\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Porém, $u$ é solução de (3.1) e $\phi_1(\lambda)$ é autofunção principal positiva de (1.2), então

$$
-\Delta u = \lambda(g(x) - cu)u \quad \text{e} \quad -\Delta\phi_1(\lambda) = \lambda g\phi_1(\lambda) + \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda).
$$

Substituindo essas igualdades em (3.22), encontramos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_1(\lambda)^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\phi_1(\lambda)}\right)\right) \mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)} (-\phi_1(\lambda)\lambda(g-cu)u)\ \mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)} u(\lambda g\phi_1(\lambda)+\mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda))\ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)} (-\lambda gu\phi_1(\lambda)+\lambda cu^2\phi_1(\lambda))\ \mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \frac{u}{\phi_1(\lambda)} (u\lambda g\phi_1(\lambda)+u\mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda))\ \mathrm{d}x \\
&= \lambda c \int_\Omega u^3\ \mathrm{d}x + \mu_1(\lambda)\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Por (3.20), temos

$$
\lambda c \int_\Omega u^3\ \mathrm{d}x + \mu_1(\lambda)\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x \leq 0. \tag{3.23}
$$

Iremos manipular (3.23), e assim encontraremos a estimativa (ii). Para tanto, observe que pela Desigualdade de *Hölder* (Teorema $A.1$), para $p = 3/2$ e $q = 3$, obtemos a seguinte estimativa

$$
\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |u^2|^{3/2}\ \mathrm{d}x\right)^{2/3}\left(\int_\Omega 1^3\ \mathrm{d}x\right)^{1/3} = \left(\int_\Omega u^3\ \mathrm{d}x\right)^{2/3}|\Omega|^{1/3}. \tag{3.24}
$$

Substituindo (3.24) em (3.23), encontramos

$$
\int_\Omega u^3\ \mathrm{d}x \leq c^{-1}\left(-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)\left(\int_\Omega u^3\ \mathrm{d}x\right)^{2/3}|\Omega|^{\frac{1}{3}},
$$

consequentemente,

$$
\left(\int_\Omega u^3\ \mathrm{d}x\right)^{1/3} \leq c^{-1}\left(-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)|\Omega|^3, \quad \forall\, \lambda > \lambda_1(g,h).
$$

O que nos permite concluir a estimativa (3.2). Com isso, finalizamos a demonstração do item (ii).

Vamos provar o item (iii). Para tanto, devemos calcular o limite da solução $u_\lambda$ quando $\lambda \to \lambda_1(g,h)$, onde temos dois casos possíveis a serem considerados. Pois, sabemos que se $\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma < 0$, então $\lambda_1(g,h) > 0$ e daí $\lambda \to \lambda_1(g,h)$. Por outro lado, se $\int_\Omega g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}\sigma \geq 0$, então por convenção temos $\lambda_1(g,h) = 0$, e assim $\lambda \to \lambda_1(g,h) = 0$.

Iniciamos lembrando que

$$\lambda \in [0,+\infty) \longmapsto \phi_1(\lambda) \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Além disso, $\phi_1(\lambda)$ é normalizada como $\|\phi_1(\lambda)\|_{C(\overline{\Omega})} = 1$, consequentemente,

$$\lim_{\lambda \to 0} \|\phi_1(\lambda)\|_{C(\overline{\Omega})} = 1. \tag{3.25}$$

Como $\phi_1(\lambda)$ é autofunção associada ao autovalor $\mu_1(\lambda)$ de (1.2), temos

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1(\lambda) = \lambda g\phi_1(\lambda) + \mu_1(\lambda)\phi_1(\lambda) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi_1(\lambda)}{\partial\eta} = \lambda h\phi_1(\lambda) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

Ao passar o limite com $\lambda \to 0^+$ em (3.26), isso produz a equação

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1(0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi_1(0)}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

O que nos mostra que $\phi_1(0) \equiv K$, onde $K$ é uma constante. Porém, como sabemos que vale a igualdade (3.25), então necessariamente $K = 1$ e assim temos

$$\phi_1(\lambda) \to 1 \quad \text{em} \quad C^2(\overline{\Omega}) \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0^+. \tag{3.27}$$

Além disso, também sabemos que

$$-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda} \to -\mu_1'(0) = \frac{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma}{|\Omega|} \tag{3.28}$$

quando $\lambda \to 0^+$.

Agora, vamos obter o limite da solução $u_\lambda$ quando $\lambda \to \lambda_1(g,h)$. Primeiro, considere $\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma \geq 0$. Daí, aplicando em (3.9) o limite com $\lambda \to 0$, encontramos

$$\frac{1}{c}\left(-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)\phi_1(\lambda) \to \frac{1}{c}\frac{\displaystyle\int_\Omega g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\sigma}{|\Omega|}$$

e,

$$\frac{1}{c\min_{\overline{\Omega}}\phi_1(\lambda)}\left(-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)\phi_1(\lambda)\to\frac{1}{c}\frac{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\ \mathrm{d}\sigma}{|\Omega|}.$$

Pelo Teorema do Confronto,

$$u_\lambda(x)\to\frac{\int_\Omega g\ \mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}h\ \mathrm{d}\sigma}{c|\Omega|},\quad \forall\, x\in\overline{\Omega}. \tag{3.29}$$

Sabemos de (3.9), (3.27) e (3.28) que a função $u_\lambda$ é limitada em $C(\overline{\Omega})$ próximo de $\lambda=0$. Como $u_\lambda$ é solução de (3.1), então por regularidade elíptica (Teorema A.17) temos que existe uma constante $c>0$, tal que

$$\|u_\lambda\|_{W^{2,p}(\Omega)}\le c\|\lambda g(x)u-cu^2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Porém, pela imersão contínua de $C(\overline{\Omega})$ em $L^2(\Omega)$ existe uma constante $\bar{c}>0$ de modo que

$$\|\lambda g(x)u-cu^2\|_{L^2(\Omega)}\le\bar{c}\|\lambda g(x)u-cu^2\|_{C(\overline{\Omega})},$$

e como

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|\lambda g(x)u-cu^2|\le K_1,$$

obtemos

$$\|u_\lambda\|_{W^{2,p}(\Omega)}\le cK_1.$$

Além do mais, $W^{2,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0+\theta}(\overline{\Omega})$ (para todo $p>N$). Então, existe $K_2>0$ de modo que

$$\|u_\lambda\|_{C^{0+\theta'}(\overline{\Omega})}\le K_2\|u_\lambda\|_{W^{2,p}(\Omega)}<cK_2K_1.$$

Também temos para algum $\theta'$ que $\|\lambda g(x)u-cu^2\|_{C^{0+\theta'}(\overline{\Omega})}\le K_3$. Portanto, pela regularidade de Schauder (Teorema A.18) encontramos

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\theta'}(\overline{\Omega})}\le cK_3.$$

Ora, pela imersão compacta de $C^{2+\theta'}(\overline{\Omega})\hookrightarrow\hookrightarrow C^2(\Omega)$, temos a menos de subsequência que

$$u_\lambda\to u,\quad \text{em}\quad C^2(\Omega).$$

O que implica que $u_\lambda(x) \to u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Por fim, pela unicidade do limite, e usando (3.29) notamos

$$u_\lambda \to \frac{\displaystyle\int_\Omega g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma}{|\Omega|}, \quad \text{em } C^2(\overline{\Omega}) \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0. \tag{3.30}$$

Agora, analisaremos o que acontece com a solução $u_\lambda$ quando ocorre o caso $\displaystyle\int_\Omega g \;\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma < 0$. Pelo Teorema 1.5 e todo estudo realizado no Capítulo 1 referente a aplicação $\mu_1$, sabemos que nesse caso $\mu_1(\lambda_1(g,h)) = 0$, assim,

$$-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda} \to 0, \qquad \text{quando} \quad \lambda \to \lambda_1(g,h).$$

Com isso, aplicando em (3.9) o limite com $\lambda \to \lambda_1(g,h)$ obtemos

$$u_\lambda \to 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Novamente por regularidade elíptica, obtemos de modo análogo à (3.30) que

$$u_\lambda \to 0 \text{ em } C^2(\overline{\Omega}), \qquad \text{quando } \lambda \to \lambda_1(g,h). \tag{3.31}$$

Assim, de (3.30) e (3.31) concluímos a prova do item (iii).

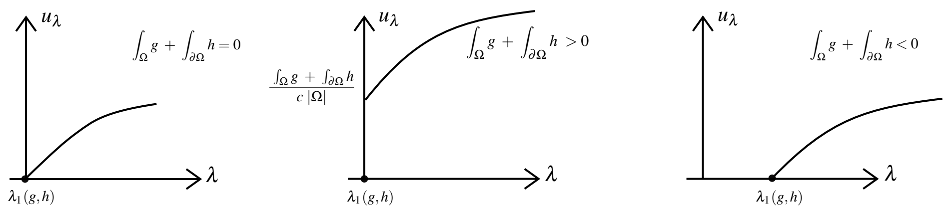


Figura 3.1 Gráfico da solução $u_\lambda$.

Por fim, mostraremos o item (iv). Suponha que para $0 < \lambda \leq \lambda_1(g,h)$ o Problema (3.1) com $c > 0$ possui solução positiva. Repetindo as contas realizadas para obter a equação (3.23) na demonstração do item (ii), concluímos que $u$ deve verificar

$$\lambda c \int_\Omega u^3 \,\mathrm{d}x + \mu_1(\lambda) \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x \leq 0. \tag{3.32}$$

Porém, pelos Teoremas 1.4 e 1.5, se $\displaystyle\int_\Omega g \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \ \mathrm{d}\sigma < 0$ temos que $\mu_1(\lambda) \geq 0$ para $0 < \lambda \leq \lambda_1(g,h)$. Isso implica em uma contradição com a desigualdade (3.32). Portanto, a prova do Teorema está completa. $\square$

Com o esboço dos gráficos da Figura 3.1 conseguimos visualizar os resultados que obtemos pelo Teorema 3.1.

# Apêndice A

# Definições básicas e resultados auxiliares

O objetivo deste apêndice é enunciar e referenciar os resultados usados ao longo deste trabalho. Para tanto, dividimos o apêndice do seguinte modo: na Seção A.1 definimos os espaços de Banach em que trabalhamos frequentemente; na Seção A.2 designamos para ser referente a resultados que são vistos comumente em cursos de Equações Diferenciais Parciais; na Seção A.3 apresentamos lemas, teoremas e proposições vistos em cursos de Análise Funcional; por ultimo, na Seção A.4 trataremos de resultados de regularidade elíptica em espaços de Hölder e de Sobolev, além dos princípios do máximo utilizados nesta dissertação.

## A.1 Espaços de Banach

Nesta seção iremos apresentar os espaços de Banach que foram usados neste trabalho. As principais referências usadas foram [5], [6] e [12].

**Definição A.1.** *Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável.*
*(a) Dizemos que duas funções $f, g \in L(E)$ são equivalentes $(f \sim g)$ se $f(x) = g(x)$ $q.t.p$ em $E$.*
*(b) Se $f \in L(E)$, a classe de equivalência definida por $f$ em $L(E)$ (que será denotada por $[f]$) é o conjunto de todas as funções $g \in L(E)$ tais que $g(x) = f(x)$ $q.t.p$ em $E$ (ou seja, $f \sim g$). Neste caso temos que $\int_E |f(x)|\, \mathrm{d}x = \int_E |g(x)|\, \mathrm{d}x$.*
*(c) O Espaço de Lebesgue $L^1(E)$ consiste de todas as classes de equivalência em $L(E)$. Se $[f]$ pertence a $L^1(E)$, definimos a norma por:*

$$\|[f]\|_1 = \int_E |f(x)|\, \mathrm{d}x.$$

**Definição A.2.** *Seja $E$ um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ e $0 < p < \infty$.*

*(i) Indicaremos por $\mathcal{L}^p(E)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f$ tal que $|f|^p \in L(E)$, ou seja,*

$$\mathcal{L}^p(E) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\},$$

*onde* $\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.

*(ii) O espaço $L^p(E)$ é a coleção de todas as classes de equivalência $[f]$ de funções mensuráveis $f$ definidas em $E$ tal que* $\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$.

*Observação* A.1. Observe que, se $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável tal que $\|f\|_p < \infty$, então temos que $|\{x \in E : |f(x)| = \infty\}| = 0$. Definindo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } |f(x)| < \infty, \\ 0, \text{ se } |f(x)| = \infty, \end{cases}$$

temos que $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(E)$ e $\|\tilde{f} - f\|_p = 0$. Portanto para definir $L^p(E)$ podemos considerar apenas as funções finitas.

Como anteriormente, dada a classe de equivalência $[f] \in L^p(E)$ da função $f \in \mathcal{L}^p(E)$, vamos escrever $\|f\|_{L^p(E)}$ em vez de $\|[f]\|_p, f$ em vez de $[f]$.

Vamos denotar $\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$ $(0 < p < \infty)$. Assim, $L^p(E)$ é classe das funções mensuráveis $f$ tais que $\|f\|_{L^p(E)} < \infty$.

**Definição A.3.** *Dado $0 < \theta \leq 1$ e uma função $u \in C(\overline{\Omega})$, dizemos que $u$ é Hölder contínua com expoente $\theta$ se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\theta, \quad \forall\, x, y \, \in \, \Omega.$$

*Para uma tal função definimos o quociente de Hölder por:*

$$H_\theta[u] := \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\theta} < \infty.$$

**Definição A.4.** *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice $\alpha$, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma $\alpha$-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

**Definição A.5.** *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \theta \leq 1$. O espaço de Hölder $C^{k+\theta}(\Omega)$ é definido por*

$$C^{k+\theta}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : H_\theta[D^\alpha u] < \infty, \text{ para todo multi- índice} |\alpha| \leq k\}.$$

**Definição A.6.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 < p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } |\alpha| \leq k\},$$

*com as derivadas $D^\alpha u$ acima sendo tomada no sentido fraco.*

*Observação* A.2. Quando $p = 2$, temos que $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. Em particular, se $k = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 1, ..., n \right\}.$$

**Proposição A.1.** *Sejam $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\alpha$ um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$. Então*

*(i)* $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$;

*(ii)* $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, *para todo* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

*(iii)* $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ *sempre que* $|\beta| + |\alpha| \leq k$;

*(iv) Se $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ é um aberto, então $u \in W^{k,p}(\tilde{\Omega})$;*

*(v) Se $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ então $\omega u \in W^{k,p}(\Omega)$ e vale*

$$D^\alpha(\omega u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \omega D^{\alpha-\beta} u,$$

*onde $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$ e $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \cdots, \alpha_n - \beta_n)$ é um multi-índice de ordem menor ou igual a k.*

## A.2 Resultados clássicos de EDP

Nesta seção, iremos recordar resultados clássicos vistos em um curso de Equações Diferenciais Parciais e que usamos frequentemente por todo o trabalho. As principais referências para essa seção foram [12], [20] e [6].

**Proposição A.2.** *Se $\Omega$ é um domínio limitado e $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é tal que $\nabla u = 0$ q.t.p em $\Omega$, então $u$ é constante q.t.p em $\Omega$.*

***Demonstração***. Considere $x \in \Omega$ e um raio $r > 0$ de forma que $B_r(x) \subset \Omega$. Fixemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\mathrm{dist}(\partial B_r(x), \partial\Omega) > \varepsilon$. Considere a convolução

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u,$$

onde $p_\varepsilon \in C_c^\infty(B_r(x))$. Afirmamos que a derivada regular de $u_\varepsilon$ é igual a convolução de $p_\varepsilon$ com a derivada fraca de $u$, ou seja,

$$\nabla u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \nabla u.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\nabla u_\varepsilon(x) &= \nabla \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega \nabla_x \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y \\
&= -1 \int_\Omega \nabla_y \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y \\
&= (-1)(-1) \int_\Omega \nabla_y \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y \\
&= (\rho_\varepsilon * \nabla u)(x).
\end{aligned}$$

Como por hipótese $\nabla u = 0$ q.t.p em $\Omega$, temos que $\nabla u_\varepsilon(x) = 0$. Logo, $u_\varepsilon$ é constante q.t.p em $B_r(x)$. Portanto $u$ também é constante q.t.p em $B_r(x)$ pois $u_\varepsilon \to u$ em $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Por fim, a conexidade de $\Omega$ implica que quaisquer dois pontos de $\Omega$ podem ser conectados por um caminho e este caminho pode ser coberto por um número finito de bolas abertas, de modo que cada bola intersecte a bola vizinha em pelo menos um ponto, desta forma como $u$ é constante q.t.p em bolas, então $u$ é constante q.t.p em $\Omega$. □

**Teorema A.1.** *(Desigualdade de Hölder) Seja $E \subset \mathbb{R}$ um subconjunto mensurável e sejam $p$ e $p'$ expoentes conjugados (ou seja, $1 \leq p, p' \leq \infty$, com $1/p + 1/p' = 1$). Se $f \in L^p(E)$ e*

*$g \in L^{p'}(E)$, então $fg \in L^1(E)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^{p'}(E)},$$

*ou seja,*

*(i) se $1 < p < \infty$*

$$\int_E |f(x)g(x)|\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_E |f(x)|^p\ \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^{p'}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p'};$$

*(ii) se $p = \infty$,*

$$\int_E |f(x)g(x)|\ \mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^\infty(E)} \int_E |g(x)|\ \mathrm{d}x.$$

***Demonstração***. Ver [5, Teorema 1.2.1] ou [6, Theorem 4.6]. □

*Observação* A.3. No caso particular $p = p' = 2$ temos a desigualdade de Schwarz

$$\int_E |f(x)g(x)|\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_E |f(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_E |g(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

**Teorema A.2.** *(Convergência Dominada de Lebesgue) Seja $(f_n), f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, uma sequência de funções mensuráveis e $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em $E$ para todo $n$, onde $g$ é integrável sobre $E$. Se $f_n \to f$ q.t.p em $E$, então*

$$\int_E f(x)\ \mathrm{d}x = \lim \int_E f_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

***Demonstração***. Ver [4, Theorem 5.6]. □

**Definição A.7.** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que $X$ está imerso continuamente em $Y$ se existe $c > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X, \ \ \forall\, x \in X.$$

*Neste caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.*

**Definição A.8.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados com $X \hookrightarrow Y$. Dizemos que a imersão de $X$ em $Y$ é compacta se a aplicação identidade $i : X \to Y$ for compacta. Nesse caso, dizemos que $X$ está imerso compactamente em $Y$ e escrevemos $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.*

**Teorema A.3.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe $C^1$, $\eta(x) = (\eta^1(x), ..., \eta^n(x))$ o vetor unitário normal exterior em um ponto $x \in \partial\Omega$ e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

*(i)* $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x;$

*(ii)* $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i}v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega uv_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x;$

*(iii)* $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x;$

*(iv)* $\displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x;$

*(v)* $\displaystyle\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial\eta} - v\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\sigma_x.$

***Demonstração***. Ver [12, Appendix C, Theorem 1,2 and 3]. □

**Teorema A.4.** *(Teorema da Divergência) Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe $C^1$ e $F = (F_1, ..., F_n)$ um espaço vetorial tal que cada função coordenada $F^i \in C^1(\overline{\Omega}), i = 1, ..., n$. Então,*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F(x)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma_x.$$

**Teorema A.5.** *(Teorema do Traço). Suponha que $\Omega$ é um aberto limitado de classe $C^1$e que $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

*tal que,*

*(i)* $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;

*(ii) existe* $C = C(p,\Omega) > 0$ *tal que, para toda* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *vale*

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

***Demonstração***. Ver [12, Theorem 1, chapter 5.5.]. □

**Teorema A.6.** *(Desigualdade de Poincaré) Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C = C(p,q,n,|\Omega|)$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \ \forall\, q \in [1,p^*].$$

*Em particular, para todo $1 \leq p \leq \infty$, segue que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

***Demonstração***. Ver [12, Section 5.3 Theorem 3 ]. □

**Teorema A.7.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, com $N \geq 2$. A aplicação*

$$T : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega),$$

*que define o traço é compacta.*

***Demonstração***. Para o caso $N \geq 3$ veja [20, Theorem 6.2]. Para o caso $N = 2$ veja [20, p.104]. □

**Teorema A.8.** *Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $C^1$. Suponha $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então existe funções $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$, tal que*

$$u_m \to u, \quad em \quad W^{k,p}(\Omega).$$

***Demonstração***. Ver [12, Theorem 3, section 5.3.3]. □

**Teorema A.9.** *Seja $\Omega$ limitado, conexo e aberto de $\mathbb{R}^N$, com fronteira de classe $C^1$, então existe uma constante $C$ que depende apenas de $m, p$ e $\Omega$ tal que*

$$\|u-(u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{A.1}$$

***Demonstração***. Suponhamos por contradição que não exista constante $C$ satisfazendo a equação (A.1). Assim, para cada $k = 1,2,...$ inteiro existe uma sequência $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$, tal que,

$$\|u_k-(u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > k\,\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)}. \tag{A.2}$$

Defina, a seguinte sequência

$$v_k = \frac{u_k-(u_k)_\Omega}{\|u_k-(u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Claramente, $\|v_k\|_{L^p(\Omega)}$=1, mostraremos que $(v_k)_\Omega = 0$. Com efeito, por definição

$$(v_k)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{(u_k-(u_k)_\Omega)}{\|u_k-(u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}(y)dy = \frac{(u_k)_\Omega}{\|u_k-(u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} - \frac{(u_k)_\Omega}{\|u_k-(u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} = 0.$$

Além disso, note que

$$1 = \|v_k\|_{L^p(\Omega)} = \left\|\frac{u_k-(u_k)_\Omega}{\|u_k-(u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}\right\| > k\left\|\frac{\nabla(u_k)-\nabla(v_k)}{\|u_k-(u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}\right\|_{L^p(\Omega)} = k\,\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Portanto,

$$\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k} \quad \text{para } k = 1,2,...$$

Em particular, temos que $v_k$ é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Assim, como $W^{1,p}(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$, existe uma subsequência $(v_{kj})$ de $(v_k)$, tal que

$$v_{kj} \to v \quad \text{em } L^p(\Omega),$$

com $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $(v)_\Omega = 0$. Por outro lado,

$$\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k},$$

implica que, para cada $i = 1,...,n$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega v\phi_{x_i}\,\mathrm{d}x = \lim_{kj\to\infty}\int_\Omega v_{kj}\phi_{x_i}\,\mathrm{d}x = -\lim_{kj\to\infty}\int_\Omega (v_{kj})_{x_i}\phi\,\mathrm{d}x = 0. \tag{A.3}$$

Consequentemente,

$$\left|\int_\Omega (v_{kj}\phi_{x_i} - v\phi_{x_i})\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |v_{kj}-v|\,\phi_{x_i}\,\mathrm{d}x \le \Big(\int_\Omega |v_{kj}-v|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega |\phi_{x_i}|^{p'}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}} \to 0.$$

De maneira análoga, prova-se que

$$\left|\int_\Omega (v_{kj})_{x_i}\phi\,\mathrm{d}x\right| \to 0.$$

Assim sendo, a igualdade (A.3) fora justificada. Consequentemente, $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla(v) = 0$ q.t.p em $\Omega$. Pela Proposição A.2, temos que $v = c.t.e.$ Porém, como $(v)_\Omega = 0$, tem-se também que $v = 0$, mas, isto é uma contradição, pois $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Portanto, a prova do Teorema está completa. □

**Teorema A.10.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ e $U_\delta \subset A, \delta > 0$, aberto com $\lim\limits_{\delta \to 0} |U_\delta| = 0$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função integrável e limitada, então*

$$\int_{U_\delta} f \, \mathrm{d}x = \int_A \mathcal{X}_{U_\delta} f \, \mathrm{d}x \to 0,$$

*quando $\delta \to 0$.*

***Demonstração***. A prova do Teorema é obtida de forma direta. Como $f$ é limitada, então, para $c > 0$ temos,

$$\int_{U_\delta} f \;\; \mathrm{d}x < \left| \int_{U_\delta} f \;\; \mathrm{d}x \right| \leq \int_{U_\delta} |f| \;\; \mathrm{d}x < c \int_{U_\delta} \;\; \mathrm{d}x = c|U_\delta| \to 0,$$

quando $\delta \to 0$. □

## A.3 Resultados clássicos de Análise Funcional

Nessa seção relembramos resultados de Análise Funcional que foram usados frequentemente neste trabalho.

**Teorema A.11.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e seja $(u_k)_k \subset L^p(\Omega), p \in [1, +\infty]$, uma sequência tal que $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$ se $k \to \infty$. Então existe uma subsequência $(u_{k_j})_j$ e uma função $v \in L^p(\Omega)$ tais que*

*(i) $u_{k_j}(x) \to u(x)$, q.t.p em $\Omega$ se $j \to \infty$;*

*(ii) para todo $j, |u_{k_j}(x)| \leq v(x)$, q.t.p em $\Omega$.*

***Demonstração***. Ver [6, Theorem 4.9]. □

**Teorema A.12.** *Assuma que $E$ é um espaço Banach reflexivo e seja $(x_n)$ uma sequência limitada em $E$. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})$ que converge na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$.*

***Demonstração***. Ver [6, Theorem 3.18]. □

**Teorema A.13.** *(Egorov) Assuma que $\Omega$ é um espaço mensurável de dimensão finita mensurável. Seja $(f_n)$ uma sequência de funções mensuráveis de $\Omega$ tal que*

$$f_n(x) \to f(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega \;\; (\text{com } |f(x)| < \infty, \;\; \text{q.t.p. em } \Omega).$$

*Então $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A \subset \Omega$ mensurável tal que $|\Omega \setminus A| < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente em $A$.*

***Demonstração***. Ver [4, Theorem 7.12]. □

**Lema A.1.** *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $a \geq 0, b \geq 0$, *então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

***Demonstração***. Ver [1, Lemma 2.24]. □

**Definição A.9.** *Seja X um Espaço Topológico. Uma função* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *é um funcional semicontínuo inferiormente quando o conjunto* $\Phi^{-1}(a, +\infty)$ *é aberto em X, para qualquer* $a \in \mathbb{R}$.

**Teorema A.14.** *Seja* $J : E \to \mathbb{R}$ *um funcional linear contínuo. Se J é convexo, ou seja,*

$$J(ut + (t-1)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v), \quad \forall\, u, v \in E, t \in [0,1],$$

*então J é fracamente semicontínuo inferiormente. Em particular, se a sequência* $(u_n)$ *em E converge fraco para* $u_0 \in E$, *vale que*

$$J(u_0) \leq \liminf J(u_n).$$

***Demonstração***. Ver [6, Corollary 3.9]. □

**Proposição A.3.** *Seja* $A : D(A) \subset E \to F$ *um operador linear não necessariamente limitado que é densamente definido. Então* $A^*$ *é fechado, isto é,* $G(A^*)$ *é fechado em* $F^* \times E^*$.

***Demonstração***. Ver [6, Proposition 2.17]. □

**Teorema A.15.** *Seja* $A : D(A) \subset E \to F$ *um operador linear não necessariamente limitado que é densamente definido e fechado. As seguintes propriedades são equivalentes:*

*(i)* $R[A]$ *é fechado;*

*(ii)* $R[A^*]$ *é fechado;*

*(iii)* $R[A] = N[A^*]$;

*(iv)* $R[A] = N[A]$.

***Demonstração***. Ver [6, Theorem 2.19]. □

**Corolário A.1.** *Seja* $A : D(A) \subset E \to F$ *um operador linear não necessariamente limitado que é densamente definido e fechado. Então,* *(i)* $N[A] = R[A^*]^\perp$;

*(ii)* $N[A^*] = R[A]^\perp$;

*(iii)* $N[A]^\perp \supset \overline{R[A^*]}$;

*(iv)* $N[A^*]^\perp = \overline{R[A]}$.

***Demonstração***. Ver [6, Corollary 2.18]. □

**Teorema A.16.** *(Lax-Milgram) Seja $H$ um espaço de Hilbert. Assuma que $a : H^2 \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear contínua e coerciva em $H$. Então, para todo $\psi \in H'$, então existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \psi(v), \quad \forall\, v \in H.$$

***Demonstração***. Ver [6, Corollary 5.8]. □

## A.4 Resultados de regularidade elíptica e princípio do máximo

Considere o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.4}$$

Sendo,

- $\mathcal{B}u \equiv \partial u/\partial\eta + \beta(x)u$;
- $\beta \in C^{1+\theta}(\Omega)$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular.

**Teorema A.17.** *(Agmon - Douglis - Nirenberg) Para $1 < p < +\infty$, suponha que $f \in L^p(\Omega)$ e $\beta \in L^p(\partial\Omega)$. Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (A.4), então $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ (que não depende de $u$), tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

*Mais ainda, se $f \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\beta \in W^{k,p}(\partial\Omega)$, então $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

***Demonstração***. Ver [6, Theorem 9.32], [14, Theorem 9.11 and Theorem 9.13] e [21, Theorem B2]. $\square$

**Teorema A.18.** *(Regularidade de Schauder) Para* $0 < \alpha < 1$*, suponha que* $f \in C^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $\beta \in C^{0+\alpha}(\partial\Omega)$*. Se* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *é solução fraca de* (A.4)*, então* $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$*. Além disso, existe uma constante* $C > 0$ *(que não depende de* $u$*), tal que*

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0+\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

*Mais ainda, se tivermos também* $f \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $\beta \in C^{k+\alpha}(\partial\Omega)$ *então* $u \in C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *e*

$$\|u\|_{C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

***Demonstração***. Ver [6, Theorem 9.33], [14, Theorem 6.2 and Theorem 6.6] e [21, Theorem B1]. $\square$

**Teorema A.19.** *(Imersões em Espaços de Hölder) As seguintes imersões são compactas para* $k$ *inteiro não negativo e* $0 < \alpha' < \alpha \leq 1$*:*

$$\begin{aligned} &C^{k+\alpha}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k}(\Omega);\\ &C^{k+\alpha}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k+\alpha'}(\Omega);\\ &C^{k+1+\alpha}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k+\alpha}(\Omega). \end{aligned}$$

*A seguinte imersão é contínua:*

$$C^{k+1}(\Omega) \hookrightarrow C^{k}(\Omega).$$

***Demonstração***. Ver [1, Theorem 1.31]. $\square$

**Teorema A.20.** *(Imersões de Sobolev) As seguintes imersões são contínuas para* $k \in \mathbb{N}$ *e* $1 < p < \infty$*:*

*(i) Se* $p < \dfrac{n}{k}$*, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*],$$

*onde* $p^* = \dfrac{Np}{N-kp}$*. Em particular, para* $N > 2$ *e* $k = 1$*, temos que* $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ *e*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, 2^*];$$

*(ii) Se* $p = \dfrac{n}{k}$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, +\infty)\,;$$

*(iii) Se* $p > \dfrac{n}{k}$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\nu}(\overline{\Omega}),$$

*onde:*

$$\nu = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p}, & se \left[\dfrac{n}{p}\right] < \dfrac{n}{p}, \\ \alpha\ \forall\, \alpha \in (0,1)\,, & se \left[\dfrac{n}{p}\right] = \dfrac{n}{p}. \end{cases}$$

*e* $[\cdot]$ *denota a parte inteira. Em particular, se* $p > N$, *então* $\left[\dfrac{n}{p}\right] = 0$ *e*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}).$$

***Demonstração***. Ver [19, Theorem 4.15] ou [1, Theorem 5.4]. □

**Teorema A.21.** *(Rellich-Kondrachov) As seguintes imersões são compactas para* $k \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < \infty$*:*

*(i) Se* $p < \dfrac{n}{k}$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*).$$

*Em particular, se* $N > 2$ *e* $k = 1$, *temos que*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, 2^*);$$

*(ii) Se* $p = \dfrac{n}{k}$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, +\infty)\,;$$

*(iii) Se* $p > \frac{n}{k}$*, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1+\beta}(\overline{\Omega}), \quad \forall\, \beta < \nu.$$

*Em particular, se* $p > N$*, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k-1+\beta}(\overline{\Omega}), \quad \forall\, \beta < 1 - \frac{n}{p}.$$

***Demonstração***. Ver [19, Theorem 4.19] ou [1, Theorem 6.2]. □

Veremos agora alguns resultados do princípio do máximo que usamos neste trabalho.

**Corolário A.2.** *Suponha que* $(-\Delta, \mathcal{B}, \Omega)$ *possui supersolução estrita* $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $h(x) > 0$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$*. Então, qualquer supersolução* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), u \neq 0$*, de* $(-\Delta, \mathcal{B}, \Omega)$ *(em particular qualquer supersolução estrita) satisfaz* $u(x) > 0$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$ *e* $\partial u / \partial \eta < 0$*, para todo* $x \in u^{-1}(0) \cap \partial\Omega$*.*

***Demonstração***. Ver [18, Corollary 2.1.2]. □

**Proposição A.4.** *Considere* $c \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ *com* $c(x) \geq 0$*. Então toda supersolução* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *de* $(-\Delta + c(x), \mathcal{B}, \Omega)$ *satisfaz* $u \geq 0$ *em* $\overline{\Omega}$*.*

***Demonstração***. Segue como consequência direta de [18, Theorem 7.5.2]. □

# Bibliografia


[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.

[2] G. A. Afrouzi and K. J. Brown. On principal eigenvalues for boundary value problems with indefinite weight and Robin boundary conditions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(1):125–130, 1999.

[3] M. Badiale and E. Serra. *Semilinear elliptic equations for beginners*. Universitext. Springer, London, 2011. Existence results via the variational approach.

[4] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995. Containing a corrected reprint of the 1966 original [*The elements of integration*, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication.

[5] G. Botelho, D. Pellegrino, and E. Teixeira. *Fundamentos de análise funcional*. SBM, 2012.

[6] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[7] H. Brezis and L. Oswald. Remarks on sublinear elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 10(1):55–64, 1986.

[8] K. J. Brown and S. S. Lin. On the existence of positive eigenfunctions for an eigenvalue problem with indefinite weight function. *J. Math. Anal. Appl.*, 75(1):112–120, 1980.

[9] R. S. Cantrell and C. Cosner. *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2003.

[10] C. Cosner. Positive solutions for superlinear elliptic systems without variational structure. *Nonlinear Anal.*, 8(12):1427–1436, 1984.

[11] C. Cosner. Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34(5):1701–1745, 2014.

[12] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, 2010.

[13] W. H. Fleming. A selection-migration model in population genetics. *J. Math. Biol.*, 2(3):219–233, 1975.

[14] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. ACTA Neurochirurgica. Springer Berlin Heidelberg, 1983.

[15] P. Hess and T. Kato. On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function. *Comm. Partial Differential Equations*, 5(10):999–1030, 1980.

[16] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[17] E. Lages Lima. *Curso de Análise Vol. 2*. Projeto Euclides. IMPA, 2014.

[18] J. Lopéz-Gómez. The strong maximum principle. In *Mathematical analysis on the self-organization and self-similarity*, volume B15 of *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, pages 113–123. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2009.

[19] J. Lopéz-Gómez. *Linear second order elliptic operators*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.

[20] J. Necas. *Direct methods in the theory of elliptic equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012. Translated from the 1967 French original by Gerard Tronel and Alois Kufner, Editorial coordination and preface by Šárka Nečasová and a contribution by Christian G. Simader.

[21] M. Struwe. *Variational methods*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.

[22] Kenichiro Umezu. On eigenvalue problems with Robin type boundary conditions having indefinite coefficients. *Appl. Anal.*, 85(11):1313–1325, 2006.