



**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DA ABERTURA DE DESLOCAMENTO
NORMAL (MODO I) EM ESTRUTURAS DE CONCRETO SIMPLES USANDO
O BEMCRACKER2D**

RENATA DE OLIVEIRA MARINHO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DA ABERTURA DE DESLOCAMENTO
NORMAL (MODO I) EM ESTRUTURAS DE CONCRETO SIMPLES USANDO
O BEMCRACKER2D**

RENATA DE OLIVEIRA MARINHO

ORIENTADOR: GILBERTO GOMES, Dr.

COORIENTADOR: RAUL DURAND, Dr.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

BRASÍLIA/DF – JULHO/2024
RENATA DE OLIVEIRA MARINHO

ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DA ABERTURA DE DESLOCAMENTO
NORMAL (MODO I) EM ESTRUTURAS DE CONCRETO SIMPLES USANDO O
BEMCRACKER2D

Dissertação de Mestrado submetida ao Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Estruturas e Construção Civil do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil.

APROVADO POR:

Prof. Gilberto Gomes, Dr. (ENC-UnB)
(Orientador)

Prof. Raúl Darío Durand Farfan, Dr. (ENC-UnB)
(Coorientador)

Prof. Artur António de Almeida Portela, Dr. (ENC-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Pedro Cláudio S Vieira, Dr. (UFOB)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF – JULHO/2024

*“Quando se deseja muito alguma coisa,
o universo inteiro conspira para que seu
desejo se realize.”*

O Alquimista.

Dedico este trabalho com meu imenso amor aos meus pais, Adalcy Marinho e Márcia Verônica, por toda batalha enfrentada para proporcionar uma educação de qualidade, assim como, ao meu companheiro Luiz Felipe que sempre fez com que eu acreditasse mais em mim e a todos os docentes e discentes que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por conceder forças e estabilidade para prosseguir com a pesquisa e por me ajudar a nunca desistir dos meus objetivos.

Ao professor orientador, Gilberto Gomes, por toda sua ajuda, orientação, esforço e paciência para que o trabalho fosse realizado como planejado.

Ao meu companheiro de vida, Luiz Felipe, que me apoiou em cada etapa, que durante o tempo distante e todas as dificuldades suportadas, segurou a minha mão. Amo você!

À minha família que sempre foi e será a base para minhas conquistas, meu pai, Adalcy Marinho, minha irmã, Fernanda Marinho, aos meus avós, Edmilson Oliveira e Ilza Alves, aos meus tios, Elan e Didi, que sempre estiverem comigo se esforçando junto a mim para que tudo ocorresse bem e estimulando a alcançar meus planos.

Um agradecimento especial para minha mãe, Márcia Verônica, que é o meu elo maior e me segura em todos os momentos dessa vida. Brinca, chora, sorrir e briga para que eu siga sempre o meu coração.

À minha família de Caraúbas que sempre me apoia em todas as minhas jornadas, em especial, minha sogra, Fátima Barreto, e minhas cunhadas, Rafaela Sales e Lígia Barreto.

Aos meus amigos do PECC, Lucas Pessoa, Maurício Prado e, em especial, Aparecida Cartaxo e Mara Monalisa que sempre me ajudaram em tudo que precisei e tornaram essa jornada mais leve.

Aos meus amigos e amigas da Paraíba e do Rio Grande do Norte, que me apoiaram e incentivaram durante essa jornada. Em especial, Rennan Linhares, que escutou todas as minhas aflições com muita paciência.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos os docentes e discentes que de forma direta ou indireta contribuíram em todo o meu caminhar. De coração, agradeço a todos!

A todos vocês, meu muito obrigado!

RESUMO

ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DA ABERTURA DE DESLOCAMENTO NORMAL (MODO I) EM ESTRUTURAS DE CONCRETO SIMPLES USANDO O BEMCRACKER2D

Autor: Renata de Oliveira Marinho

Orientador: Gilberto Gomes

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, julho de 2024

O estudo de trincas e de como ocorre sua propagação se faz cada vez mais necessário para que seja possível entender da melhor forma possível o comportamento das estruturas. A análise de trinca para os materiais que apresentam um comportamento linear, como os dúcteis, pode ser avaliada pela Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e, no caso do concreto, considerado um material quase-frágil, adentra-se no estudo da não linearidade e, assim, poder-se avaliar o processo de abertura de fissura, o comportamento das tensões, dentre outros parâmetros, por meio dos modelos coesivos desenvolvidos. Por outro lado, o uso de técnicas numéricas na análise estrutural tem se mostrado cada vez mais eficiente no campo da Mecânica da Fratura, como o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), uma técnica bastante robusta para o tratamento de problemas envolvendo trincas. Neste aspecto, este trabalho objetiva analisar trincas em materiais quase-frágeis, especificamente o concreto, onde a Zona de Fratura é substituída por forças coesivas e o modelo de trinca fictícia é adotado. Além disso, a simulação da propagação de trincas em Modo I é considerada neste estudo. A metodologia adotada consiste na implementação de modelos coesivos em materiais quase-frágeis, junto aos *softwares* BEMLAB2D – para modelagem com elementos de contorno, e BemCracker2D, na análise numérica do problema. O pacote computacional acadêmico BEMLAB2D-BEMCRACKER2D para modelagem e análise elastostática bidimensional foram desenvolvidos no PECC/UnB. Para consolidar a implementação, serão avaliados problemas com trincas em vigas de concreto simples e validados a partir de comparações com casos clássicos da literatura. Foram considerados 5 modelos clássicos da literatura para verificação e validação das implementações realizadas, nos quais apresentaram resultados coerentes com o esperado, tendo os resultados numéricos obtidos demonstrado uma boa aproximação aos valores de referência e validado a eficácia dos modelos.

Palavras-chaves: Fratura coesiva; Trincas fictícias; Materiais frágeis; Elementos de contorno dual; BemCracker2D.

ABSTRACT

STUDY AND IMPLEMENTATION OF MODE I NORMAL DISPLACEMENT OPENING IN PLAIN CONCRETE STRUCTURES USING BEMCRACKER2D

Author: Renata de Oliveira Marinho

Advisor: Gilberto Gomes

Postgraduate Program in Structures and Civil Construction

Brasília, July de 2024

The study of cracks and how they propagate is becoming increasingly necessary to better understand the behavior of structures. Crack analysis for materials that exhibit linear behavior, such as ductile materials, can be evaluated by Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM). In the case of concrete, considered a quasi-brittle material, nonlinearity is studied, allowing the crack opening process, stress behavior, and other parameters to be evaluated using the cohesive models developed. On the other hand, the use of numerical techniques in structural analysis has proven to be increasingly efficient in the field of Fracture Mechanics, such as the Dual Boundary Element Method (DBM), a very robust technique for treating problems involving cracks. In this regard, this work aims to analyze cracks in quasi-brittle materials, specifically concrete, where the Fracture Zone is replaced by cohesive forces and the fictitious crack model is adopted. Furthermore, the simulation of crack propagation in Mode I is considered in this study. The adopted methodology consists of implementing cohesive models in quasi-brittle materials, together with the software BEMLAB2D – for modeling with boundary elements, and BemCracker2D, in the numerical analysis of the problem. The academic computational package BEMLAB2D-BEMCRACKER2D for two-dimensional elastostatic modeling and analysis was developed at PECC/UnB. To consolidate the implementation, problems with cracks in simple concrete beams will be evaluated and validated from comparisons with classic cases from the literature. Five classic models from the literature were considered for verification and validation of the implementations performed, in which results were consistent with the expected, with the numerical results obtained demonstrating a good approximation to the reference values and validating the effectiveness of the models.

Keywords: Cohesive fracture; Fictitious cracks; Brittle materials; Dual boundary elements; BemCracker2D.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	17
1.1. GENERALIDADES	17
1.2. MOTIVAÇÃO	19
1.3. OBJETIVOS	20
1.3.1. Objetivo geral	20
1.3.2. Objetivos específicos	20
1.4. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	21
2. MECÂNICA DA FRATURA	23
2.1. CONTEXTO E EVOLUÇÃO HISTÓRICA	25
2.2. MECANICA DA FRATURA: LINEAR ELÁSTICA X ELASTOPLÁSTICA	28
2.3. FUNDAMENTOS E CONCEITOS PRIMORDIAIS	30
2.3.1. Falha e Fratura	30
2.3.2. Mecanismos de abertura de trincas	33
2.3.3. Fatores de Intensidade de Tensão (FIT)	35
2.3.4. Integral J	37
2.3.5. Critérios de direção de propagação	39
2.3.6. Campos de tensão e deslocamento na ponta da trinca	43
3. MODELO DE TRINCA COESIVA	47
3.1. COMPORTAMENTO DO CONCRETO	48
3.1.1. Tração	50
3.1.2. Compressão	51
3.1.3. Cíclico	53
3.2. ZONA DE FRATURAMENTO	54
3.3. MODELO DE FRATURA COESIVA	56
3.4. MODELOS DE TRINCA FICTÍCIA	57
3.5. MODELOS DE CURVAS DE ABRANDAMENTO	59
3.5.1. Modelo linear	59
3.5.2. Modelo bi-linear	60
3.5.3. Modelo exponencial	62
4. FORMULAÇÃO MECD PARA TRINCAS	63
4.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO CONVENCIONAL	63
4.2. FORMULAÇÃO DO MEC DUAL (MECD)	65
4.2.1. Equações Duais para os termos Coesivos	69
4.2.2. Estratégia de modelagem	70

4.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA TRINCA FICTÍCIA	73
5. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	75
5.1. METODOLOGIA.....	75
5.2. INTERAÇÃO COM OS PROGRAMAS	76
5.3. ALGORITMO INCREMENTAL.....	78
5.4. SOBRE O BEMCRACKER2D E SUA GUI.....	81
6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	83
6.1. ESTUDO NUMÉRICO 1: Viga de Concreto VC1	85
6.2. ESTUDO NUMÉRICO 2: Viga de Concreto VC2	90
6.3. ESTUDO NUMÉRICO 3: Viga de Concreto VC3	91
6.4. ESTUDO NUMÉRICO 4: Viga de Concreto VC4	95
6.5. ESTUDO NUMÉRICO 5: Viga de Concreto VC5	98
7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES FUTURAS	102
7.1. CONCLUSÕES	102
7.2. SUGESTÕES FUTURAS	103
APÊNDICE A1	112
APÊNDICE A2	114

Lista de Figuras

Figura 2.1. Processo de falha em metais: (a) formação de microcavidades, (b) expansão e deformação entre as cavidades, (c) coalescência e ruptura (Rodrigues, 2018).....	24
Figura 2.2. Mecanismos de fratura em metais: (a) fratura dúctil, (b) clivagem, e (c) fratura intergranular (Anderson, 2017).....	24
Figura 2.3. Triângulo da Mecânica da Fratura (Adaptado de Medina, 2014).	25
Figura 2.4. Falhas estruturais em diferentes tipos de materiais: (a) Falha frágil, (b) Falha plástica e (c) Falha quase frágil (Adaptado de Surenda, Swartz e Ouyang, 1995 apud Cordeiro, 2015).....	29
Figura 2.5. Curva “tensão versus deformação” geral para material dúctil (Boeira e Beck, 2007).....	31
Figura 2.6. (a) Fratura altamente dúctil na qual a amostra forma um pescoço até um único ponto. (b) Fratura moderadamente dúctil com algum empescoamento (estrangulamento). (c) Fratura frágil sem nenhuma deformação plástica (Callister e Rethwisch, 2016).....	32
Figura 2.7. (a) Fratura do tipo taça e cone no alumínio. (b) Fratura frágil em um aço doce (Callister e Rethwisch, 2016).....	33
Figura 2.8. Modos de fraturamento (Figueiredo, 2008).	34
Figura 2.9. Problemas fundamentais de Griffith de fraturamento: (a) Modo I, (b) Modo II e (c) Modo III (Cordeiro, 2015).....	34
Figura 2.10. A placa de Inglis (Anderson, 2017).	36
Figura 2.11. Definição do eixo de coordenada polar na ponta da trinca. Direção Z é normal à página (Anderson, 2017).	36
Figura 2.12. (a) Contorno de integração fechado anti-horário para determinação da Integral J (b) Independência do caminho da Integral J (Anderson, 2005 apud Barbosa, 2020).....	38
Figura 2.13. Campo de tensões na ponta da trinca (Teixeira, 2006).	40
Figura 2.14: (a) Placa idealizada infinita com um furo elíptico, submetida à tração, (b) sistema de coordenadas polares e componentes de tensão à frente de uma trinca (modo I de deslocamento) (Mindess et al., 2003 adaptado por Silva, 2017).....	43
Figura 2.15: Concentração de tensão em um furo elíptico. (Mindess et al., 2003 adaptado por Silva, 2017).....	45

Figura 2.16: Placa infinita com furo elíptico submetida à cisalhamento (Cordeiro, 2015).	45
Figura 3.1. Modelos Coesivos de Dugdale (a) e de Barrenblat (b) (Shi, 2009 apud Neto, 2015).	47
Figura 3.2. Danificação em tração com início na zona de interface (Mazars, 1984).	49
Figura 3.3. Comportamento da tração uniaxial do concreto (Proença, 1988).	50
Figura 3.4. Curvas típicas de tensão (f_c) – deformação (ϵ_c) de compressão para concretos de densidade normal (Darwin, Dolan e Nilson, 2016).	51
Figura 3.5. Curva de tensão-deformação na compressão (Moura, 2023 adaptado de Mehta e Monteiro, 2008).	52
Figura 3.6. Crescimento de fissuras no concreto submetido à fadiga (Felix, 2022).	53
Figura 3.7: Mecanismos da Zona de Processo de Fratura (Adaptada de SHAH et al., 1995).	54
Figura 3.8: (a) Zona de Processo de Fratura em materiais quase frágeis e (b) Distribuição da tensão coesiva (Adaptado Durand e Silva, 2019 apud Moura, 2023)...	55
Figura 3.9: Tipos de zonas não lineares em diferentes tipos de materiais (Kumar e Barai, 2011 adaptado por Silva, 2019).	55
Figura 3.10: Modelo de fratura fictícia para um material quase frágil no modo I (Silva, 2017 adaptado de Bazanta e Planas, 1998).	57
Figura 3.11. Classificação da interface em relação ao comportamento mecânico (Cordeiro, 2015).	58
Figura 3.12: Curvas strain-softening para o concreto (Gálvez et al., 2002 adaptada por SHZU, 2006).	59
Figura 3.13: Representação do modelo linear (Bueno et al., 2000).	60
Figura 3.14: Relação tensão-deslocamento para materiais quase-frágeis, modelo de Hilleborg. (a) Modelo real aproximado e (b) modelo bi-linear (SHZU, 2006 apud Petersson, 1981).	61
Figura 3.15: Representação do modelo exponencial (Bueno et al., 2000).	62
Figura 4.1. Tipos de elementos de contorno (Delgado Neto, 2017).	64
Figura 4.2: Região arbitrária composta de dois estados autoequilibrados (Scuciato, 2007).	64
Figura 4.3: Exemplo de singularidade (Rodrigues, 2018 apud Fernández, 2012).	66
Figura 4.4. Elementos de contorno contínuo/descontínuo (Delgado Neto, 2023).	71

Figura 4.5. Modelagem dos elementos de trinca (Gomes, Delgado Neto e Wrobel, 2016).....	72
Figura 5.1. Metodologia Adotada.....	76
Figura 5.2: Esquema de implementação proposta.....	77
Figura 5.3. Esquema do processo de iteração para o cálculo de tensões para a ponta da trinca inicial (Adaptado de Aliabadi e Saleh, 2002).....	78
Figura 5.4. Esquema do processo de iteração para o primeiro incremento (Adaptado de Aliabadi e Saleh, 2002).	80
Figura 5.5. Esquema do processo de iteração para quando $\Delta ucr > \Delta uc$ e alguns elementos da ponta da trinca fictícia serão completamente separados (Adaptado de Aliabadi e Saleh, 2002).	80
Figura 5.6. Esquema do processo de interação final, onde $\Gamma ta, \Gamma tr$ e Γe , representam o limite da fissura aberta, o limite da fissura fictícia e o limite elástico, respectivamente (Adaptado de Aliabadi e Saleh, 2002).....	81
Figura 5.7: Interface do software BEMLab2D.....	82
Figura 6.1. Modelo discreto da trinca com elemento quadrático descontínuo.....	85
Figura 6.2. Modelo físico de aplicação 01 – viga de três pontos (adaptada de Mojiri, 2010).....	85
Figura 6.3. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.	86
Figura 6.4. Malha MEC 4 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.	87
Figura 6.5. Malha MEC 8 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.	87
Figura 6.6. Curva carga x deflexão no meio do vão (normalizada).	88
Figura 6.7. Curva carga x deflexão no meio do vão (normalizada).	88
Figura 6.8. Semi-abertura de deslocamento da trinca ($utr/2$).....	89
Figura 6.9. Tensão normal.....	89
Figura 6.10. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.	90
Figura 6.11. Malha MEC 10 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.	90
Figura 6.12. Curva carga x deflexão no meio do vão (normalizada).	91
Figura 6.13. Modelo físico de aplicação 03 (Adaptada de Petersson, 1981).	91
Figura 6.14. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.	92
Figura 6.15. Malha MEC 8 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.	93
Figura 6.16. Curva carga x deflexão no meio do vão.....	93

Figura 6.17. Semi-abertura de deslocamento da trinca ($utr/2$).....	94
Figura 6.18. Tensão normal.....	94
Figura 6.19. Modelo físico do exemplo 04 aplicado (Adaptado de Bosco et al., 1990).	95
Figura 6.20. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.	95
Figura 6.21. Curvas carga x deflexão no meio do vão para vários GF.	96
Figura 6.22. Semi-abertura de deslocamento da trinca ($utr/2$).....	97
Figura 6.23. Tensão normal.....	97
Figura 6.24. Modelo físico: a) Roesler et al. (2007); b) Adaptado.....	98
Figura 6.25. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.	99
Figura 6.26. Malha MEC 8 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.	99
Figura 6.27. Curva carga x abertura de deslocamento (COD).	100
Figura 6.28. Curva carga x abertura de deslocamento (COD).	100
Figura 6.29. Semi-abertura de deslocamento da trinca ($u^T/2$).....	101
Figura 6.30. Tensão normal.....	101

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1. Parâmetros do material e dados de entrada.....	86
Tabela 6.2. Parâmetros do material e dados de entrada.....	92
Tabela 6.3. Parâmetros do material e dados de entrada.....	96
Tabela 6.4. Parâmetros do material e dados de entrada.....	99

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>G</i>	Taxa de Liberação de Energia
<i>GUI</i>	Interface Gráfica de Usuário
<i>K, FIT</i>	Fatores de Intensidade de Tensão
<i>MATLAB</i>	<i>Matrix Laboratory</i> - Linguagem de Programação Utilizada
<i>MDED</i>	Mínima Densidade da Energia de Deformação
<i>MEC</i>	Método dos Elementos de Contorno
<i>MECD</i>	Método dos Elementos de Contorno Dual
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>MFEP</i>	Mecânica da Fratura Elastoplástica
<i>MFLE</i>	Mecânica da Fratura Linear Elástica
<i>MTC</i>	Máxima Tensão Circunferencial
<i>MTLEP</i>	Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial
<i>XFEM</i>	Método dos Elementos Finitos Estendidos
<i>ZPI</i>	Zona de Processos Inelásticos

1. INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES

A mecânica da fratura é o estudo sistemático da propagação de fissuras em sólidos. O estabelecimento da mecânica da fratura está intimamente relacionado a desastres catastróficos ocorridos na história recente. Durante a Segunda Guerra Mundial, muitos dos navios da liberdade se partiram mesmo em duas partes devido à escolha de materiais frágeis para a construção e também às concentrações de tensões nas falhas existentes nas soldas. Em julho de 1962, a ponte Kings em Melbourne falhou repentinamente devido à propagação da fratura em quatro vigas. Os estudos sobre as causas de tais fenômenos levaram a desenvolvimentos progressivos na mecânica da fratura (Kzam, 2009).

O estudo da existência e propagação de fissuras em elementos de aço e concreto em estruturas de engenharia civil é muito importante, pois as fissuras afetam muito a resistência mecânica e a resistência final da estrutura. O estudo da propagação de fissuras é bastante relevante para estimar a resistência final e os procedimentos de falha em tais estruturas, especialmente durante terremotos.

A mecânica da fratura evoluiu agora para um campo da ciência e da engenharia. Um de seus maiores impactos é no desenvolvimento de uma nova metodologia de projetos de tolerância a danos, que agora é utilizada nos padrões de projetos de aeronaves. Materiais frágeis como aço de alta resistência, vidro, concreto, etc., sofrem fratura frágil, cujo estudo está no domínio da Mecânica de Fratura Linear Elástica (MFLE). A principal hipótese da MFLE é que a plasticidade não desempenha um papel importante durante a fratura.

A hipótese da MFLE é bastante restritiva para certos tipos de falha em materiais como os aços estruturais. Embora tais materiais possam ser propensos à fratura frágil, o que levou a uma série de falhas catastróficas, tais materiais apresentam um comportamento semi-frágil ou dúctil, para o qual a plasticidade desempenha um papel importante durante a propagação da fissura e a fratura (Oliveira, 2019).

Materiais quase-frágeis e dúcteis também apresentam comportamentos especiais, como efeitos de tamanho estrutural nas propriedades do material, abrandamento por deformação e a mudança de comportamento dúctil para frágil das estruturas. Esses

comportamentos são devidos à localização do dano na área em frente à ponta da trinca, chamada zona de processo, cuja previsão requer a consideração dos estados de tensão na zona de processo (Metha e Monteiro, 2008).

Os fatos mencionados acima tornaram-se a principal motivação para o desenvolvimento de um novo campo na mecânica da fratura levando em conta a plasticidade na zona de processo, chamado Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP). O mais simples desses modelos é o modelo de trinca coesiva.

Ao longo dos anos, métodos numéricos têm sido empregados e considerados ferramentas adequadas para prever a fratura e falha de estruturas de engenharia, levando à criação de um campo científico chamado mecânica da fratura computacional. Com os grandes avanços no campo da ciência e engenharia, a necessidade de analisar estruturas maiores e mais complicadas numericamente tornou-se uma questão importante, para a qual o desenvolvimento de ferramentas numéricas e algoritmos mais eficientes em relação aos custos computacionais e à precisão dos resultados é bastante essencial.

Uma das dificuldades mais importantes na mecânica da fratura computacional é o fato de que, em métodos numéricos baseados em malha, a malha precisa se conformar à geometria da trinca, o que requer um procedimento de remalhagem durante a propagação da trinca, causando um alto custo computacional para estruturas grandes e complicadas. Outra dificuldade é aumentar a precisão dos resultados perto da ponta da trinca, o que produz um comportamento singular (Gomes, 2006).

O modelo de trinca coesiva foi incluído em vários métodos numéricos, como o método dos elementos de contorno (MEC), métodos sem malha e o método dos elementos finitos (MEF). Neste aspecto, diferentes algoritmos foram propostos para resolver a não-linearidade do problema proveniente da zona de processo. O MEC vem se mostrando um excelente meio para os estudos numéricos, apresentando boa precisão em seus resultados para diversos tipos de problemas, em particular, da mecânica da fratura, mostrando-se bastante eficiente e confiável (Delgado Neto, 2017).

Com o avanço na análise de problemas com trincas, o Método dos Elementos de Contorno Dual (Portela *et al.*, 1992), tem se destacado, uma vez que trata as superfícies da trinca com equações integrais distintas com elementos descontínuos, fugindo da singularidade e sem necessidade de remalhamento. Essas propriedades podem ser melhor utilizadas na mecânica da fratura com o objetivo de propagar a trinca sem

remalhagem e também para aumentar a precisão numérica dos resultados ao redor da ponta da trinca.

Neste sentido, o objetivo deste trabalho é implementar e analisar trincas em materiais quase-frágeis, especificamente o concreto, onde a zona de fratura é substituída por forças coesivas e sua aplicação é restrita à abertura normal de deslocamento (Modo I). A implementação, por sua vez, será feita no BemCracker2D (Gomes et al, 2016), um software desenvolvido em linguagem C++ e orientado a objeto, cuja finalidade é modelar e analisar problemas elastostáticos com o MEC padrão, para discretização do contorno usando elementos contínuos, ou MECD, para discretização da trinca usando elementos descontínuos. O BemCracker2D possui uma interface gráfica com o usuário, denominada BEMLAB2D, para desenho e geração de malha de elementos de contorno (Delgado Neto, 2017).

1.2. MOTIVAÇÃO

Uma das principais causas de acidentes de engenharia são as pequenas falhas na integridade estrutural dos materiais. A concepção de projetos estruturais se beneficia da compreensão dos mecanismos subjacentes a essas falhas. O campo da ciência que estuda as deficiências na integridade do material é conhecido como mecânica da fratura e se preocupa em analisar os esforços realizados próximos às falhas e seus efeitos no comportamento geral da estrutura (Lens, 2009; Assis, 2023).

Entender esse fenômeno não é uma tarefa trivial, seja pela complexidade matemática da questão ou pelas limitações físicas de reproduzir os problemas em laboratório. A utilização de métodos numéricos, cujas soluções fornecem uma ideia do comportamento do sistema físico, é utilizada para estudar esse fenômeno qualitativa e quantitativamente e um dos métodos eficientes para se realizar essa análise é o Método dos Elementos de Contorno e, essencialmente, para problemas com trinca o Método dos Elementos de Contorno Dual (Portela et al., 1992; Moura, 2023).

Para compreender o comportamento de uma estrutura, se faz necessário conhecer as características dos materiais que a compõe. Os materiais podem ser do tipo dúcteis, frágeis e quase-frágeis, onde a MFLE permite analisar materiais que possuam comportamento linear, com pequenas parcelas não-lineares e, devido a isso, não abrange os materiais quase frágeis adequadamente (Araújo, 1999).

O processo de fraturamento nos materiais apresenta uma zona coesiva no início da formação da trinca. Sabendo a importância da análise de problemas com trincas para as estruturas e, apesar do BemCracker2D já ser capaz de analisar modelos com trincas, este não possui implementado a avaliação de modelos constitutivos que solucionem problemas com trincas que envolvam elementos coesivos, nos quais proporcionariam melhorias na capacidade do *software* BemCracker2D para simular problemas reais.

A implementação ocorrerá por meio do Método dos Elementos de Contorno Dual. Vale ressaltar, que a análise de problemas por meio dos elementos de contorno, possibilita um menor esforço computacional e aprimora a solução de problemas complexos.

Além disso, o estudo proporcionará o aumento do acesso a softwares gratuitos de código aberto e difundir conhecimento acerca do Método dos Elementos de Contorno atrelado ao estudo da mecânica da fratura.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é implementar a modelagem e simulação da fratura do concreto simples utilizando o modelo de trinca fictícia baseado em forças coesivas no software BemCracker2D, considerando a abertura de deslocamento normal da trinca (Modo I).

1.3.2. Objetivos específicos

Como objetivos específicos, visando o desenvolvimento, implementação, simulação, avaliação e validação, bem como fornecer uma estrutura completa para o estudo proposto, podemos descrever os seguintes:

- Desenvolver e adaptar no BEMLAB2D as propriedades do concreto e os modelos coesivos necessários para a geração do arquivo padrão;
- Implementar no BemCracker2D os modelos de forças coesivas clássicos, como LINEAR e BILINEAR, para a curva tensão-deformação normal (Modo I);
- Desenvolver a funcionalidade de abertura de deslocamento da trinca (COD) no BemCracker2D para relacionar com a tensão e os respectivos modelos coesivos.

- Avaliar a eficiência e a precisão do Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) na simulação da propagação de trincas em concreto;
- Comparar os resultados das simulações numéricas com casos clássicos da literatura para validar a implementação dos modelos coesivos;
- Investigar a influência de diferentes parâmetros materiais e geométricos nos modelos coesivos sobre o comportamento das trincas em concreto;

1.4. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No primeiro capítulo, realiza-se uma breve análise da literatura referente aos métodos fundamentais para embasar a dissertação. São expostos conceitos introdutórios e trabalhos pioneiros que envolvem a mecânica da fratura e método dos elementos de contorno padrão (MEC) e dual (MECD). Na sequência, são discutidos os principais motivos que validam o estudo a ser realizado. Por fim, delinea-se o objetivo deste estudo, no qual se destacam a implementação dos modelos de forças coesivas clássicos, linear e bilinear, envolvendo apenas o estudo no modo de fraturamento I.

No Capítulo 2, são abordados os conceitos fundamentais da Mecânica da Fratura Linear Elástica e Elastoplástica, elucidando suas particularidades e expondo suas aplicações. Também são explorados os distintos modos de fratura, a utilização da integral J em materiais inelásticos e o comportamento da trinca atrelado ao seu modo de propagação. Além disso, também são vistos os campos de tensão e deformação das trincas.

No capítulo 3 são apresentados os conceitos que envolvem o modelo de fratura coesiva. Inicialmente, há uma breve explicação sobre o comportamento do concreto quando submetido a alguns tipos de esforços e, posteriormente, tem-se a abrangência do modelo de trinca fictícia que serve de base para o estudo da fratura coesiva. Por fim, há uma breve explicação de modelos clássicos para o estudo de trinca coesiva, onde o linear e bilinear serão abordados neste trabalho.

No capítulo 4, é discutido o Método dos Elementos de Contorno padrão, apresentando sua essência e base para o MECD. Logo após, são apresentadas as equações fundamentais do MECD e suas respectivas técnicas de aplicação, seguidas pela explanação detalhada das equações integrais do MECD. Por fim, há uma

explicação do software BemCracker2D e sua Gui, o BEMLAB2D, que serão utilizados na pesquisa.

No capítulo 5, estão explicadas as implementações computacionais e as estratégias de modelagem realizadas. Inicialmente é apresentado a sequência lógica do funcionamento do pré-processamento e pós-processamento utilizando o BEMLAB2D. Em seguida, tem-se as interações realizadas entre os programas, BEMCRACKER2D e o BEMLAB2D, com as implementações a serem realizadas. Posteriormente, há a apresentação do algoritmo incremental relacionado a fratura coesiva e, por fim, uma explicação sobre as funcionalidades e utilização do BEMCRACKER2D.

No capítulo 6, são apresentados e discutidos cinco exemplos de aplicação. Os quatro primeiros exemplos envolvem vigas de três pontos com variações nos parâmetros do material e nos dados de entrada, além de diferenças na distribuição dos elementos de contorno e na quantidade de interações. Essas variações são avaliadas em termos de abertura de trinca e tensão normal. O último exemplo também se trata de uma viga sujeita à flexão de três pontos e com um deslocamento no meio do vão (entalhe central), com o objetivo de avaliar seu comportamento quanto à abertura de trinca e tensão normal. Todos os exemplos utilizados são baseados em estudos disponíveis na literatura.

No capítulo 7, apresenta as conclusões derivadas dos resultados alcançados, bem como as limitações do estudo abordado nesta pesquisa e propõe sugestões para direcionar futuras pesquisas.

2. MECÂNICA DA FRATURA

Os vários desastres trágicos impulsionaram o avanço no estudo da Mecânica da Fratura, um campo desenvolvido para análise de falhas por fratura. As causas das falhas estruturais nesses eventos se enquadram em uma das duas categorias que podem ser, primariamente, a negligência durante o projeto, construção ou operação da estrutura e, conseqüentemente, a execução de um modelo autêntico e diferenciado ou o uso de um material novo, o que resulta em um desfecho inesperado e indesejável (Rodrigues, 2018; Anderson, 2017).

A fratura pode ser descrita como o processo de formação de novas superfícies em um material. Em um nível elementar, isso ocorre devido à quebra das ligações interatômicas no sólido. Em uma perspectiva macroscópica, a fratura pode ser visualizada como a separação de um componente em uma ou várias partes, resultante da propagação de uma ou mais trincas (Silva, 2017).

Uma estrutura ou parte dela é considerada em falha quando a sua integridade é comprometida, seja tornando-se inutilizável ou incapaz de desempenhar sua função com eficácia. O processo de falha de um material ou estrutura geralmente tem origem no acúmulo de danos, levando à formação de uma ou mais trincas que, por sua vez, propagam-se até culminar no evento derradeiro: a fratura (vide Figura 2.1) (Callister e Rethwisch, 2016).

Visto isso, de acordo com Rodrigues (2018), a mecânica da fratura emerge dentro das ciências mecânicas com o intuito de mensurar as circunstâncias em que uma peça ou estrutura, sujeita a uma carga, entra em colapso devido à propagação de uma fissura presente na estrutura.

Ainda de acordo com o mesmo autor, este campo de estudo busca descobrir respostas acerca da presença e disseminação de fissuras em elementos ou estruturas, que revelem o tamanho tolerado de uma fissura no Ponto Crítico de Utilização, – como normatizado no Brasil, Estado Limite de Utilização – a duração para que a fissura alcance o tamanho crítico partindo de um comprimento inicial, a frequência em que deve ocorrer inspeção ou o tamanho permitido de uma falha existente em uma estrutura no início da sua vida útil.

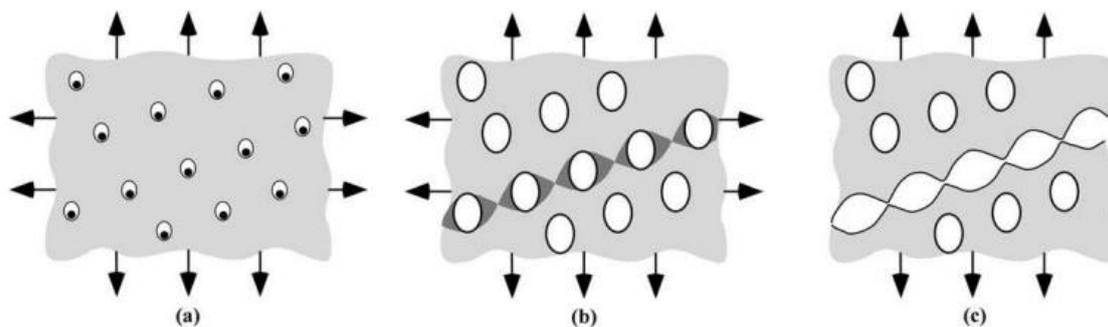


Figura 2.1. Processo de falha em metais: (a) formação de microcavidades, (b) expansão e deformação entre as cavidades, (c) coalescência e ruptura (Rodrigues, 2018).

Callister e Rethwisch (2016) retrata que as vias de propagação de fissuras são: fadiga devido ao carregamento cíclico, corrosão sob tensão causada pelo carregamento constante, fluência, fissura induzida por hidrogênio e fissura devido ao metal líquido. Dentre estas, as duas primeiras apresentam maior probabilidade de ocorrência, enquanto a última acarreta em baixo risco. Além disso, tem-se os mecanismos de fraturamento, que podem ser representados por fratura dúctil e fratura frágil, onde esta última abrange a fratura por clivagem ou transgranular – ocorre na maioria dos metais cristalinos frágeis – e intergranular.

Vale salientar que a fratura transgranular é aquela que ocorre por entre os grãos e a intergranular a que ocorre no contorno dos grãos. Na Figura 2.2 podemos observar os mecanismos de fratura citados.

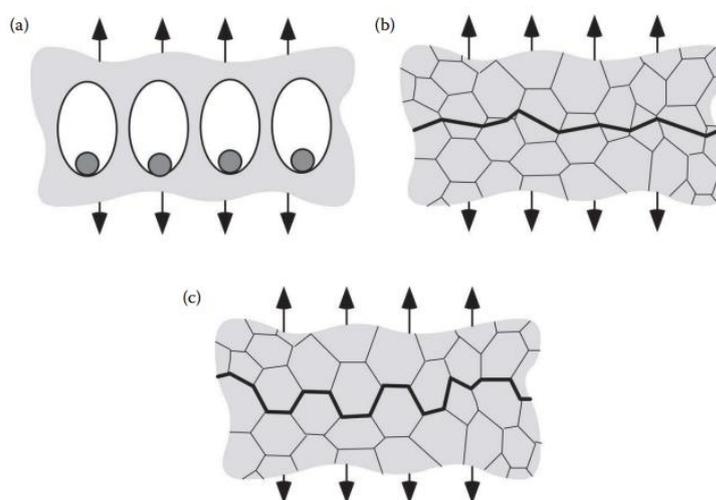


Figura 2.2. Mecanismos de fratura em metais: (a) fratura dúctil, (b) clivagem, e (c) fratura intergranular (Anderson, 2017).

Na Figura 2.3, observa-se o conhecido triângulo da Mecânica da Fratura, no qual apresenta como deve ser analisada uma estrutura no que se refere à fratura. No canto esquerdo superior, encontram-se as tensões no componente, derivadas da análise estrutural. No canto superior direito, situam-se as características relacionadas à fratura do material, obtidas por meio de experimentação. No canto inferior direito, são consideradas as imperfeições presentes na estrutura. Com o entendimento desses cantos, é possível examinar a resistência do material à fratura e o impulso que conduz à formação da trinca (Medina, 2014).

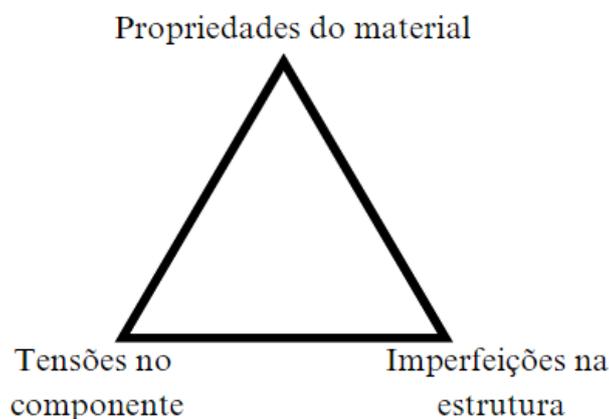


Figura 2.3. Triângulo da Mecânica da Fratura (Adaptado de Medina, 2014).

A Mecânica da Fratura possui duas ramificações de estudo: a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP). De maneira breve, a Mecânica da Fratura Linear Elástica surgiu para amplificar o estudo da teoria da elasticidade no tocante ao comportamento dos materiais com descontinuidades. Já a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica, foi desenvolvida para complementar o estudo da MFLE no que diz a respeito dos materiais dúcteis (Pereira, 2018).

2.1. CONTEXTO E EVOLUÇÃO HISTÓRICA

As antigas estruturas que permanecem de pé até hoje claramente representam projetos bem-sucedidos. Sem dúvida, houve inúmeros outros projetos mal sucedidos que tiveram uma vida útil muito mais curta. Uma vez que o conhecimento da mecânica era limitado antes da época de Isaac Newton, os projetos viáveis foram provavelmente alcançados principalmente por tentativa e erro. Supostamente, os romanos testavam cada nova ponte exigindo que o engenheiro responsável pelo projeto ficasse embaixo

dela enquanto carruagens passavam por cima, fazendo uma seleção natural de engenheiros bons e ruins. Além disso, as estruturas antigas, principalmente devido a disponibilidade limitada dos materiais, eram desenvolvidas para sofrer esforços de compressão e só após a revolução industrial veio a utilização em abundância do aço e sua aplicação em estruturas (Anderson, 2017).

Ainda de acordo com o mesmo autor, o início da mecânica da fratura pode ser descrito através dos estudos realizados por Leonardo da Vinci e Galileu Galilei por volta do século XV e XVII, onde Leonardo da Vinci apresentou o ponta pé inicial quando realizou um ensaio de fratura para fios metálicos.

Em 1872, Betti foi o pioneiro no estudo da teoria da elasticidade com equações integrais que relacionam as forças de superfície e os deslocamentos aplicados no contorno. Já em 1886, Somigliana introduziu a equação integral que estabelece uma conexão entre as forças e os deslocamentos no contorno de um corpo e seus deslocamentos internos. Esse relacionamento é conhecido como identidade de Somigliana (Figueiredo, 2008).

Logo após, os estudos da mecânica da fratura começaram a evoluir e um outro grande registro foi feito em 1898, onde Kirsch, um engenheiro alemão, deduziu analiticamente a solução de um problema envolvendo uma chapa plana tracionada com um orifício circular no centro. Ele observou que a placa apresentava uma concentração de tensão na região próxima ao furo, onde a intensidade atingia três vezes o valor da tensão aplicada (Timoshenko e Goodier, 1980).

Inglis (1913) também realizou um estudo semelhante ao de Kirsch e examinou uma chapa plana tracionada, agora com um orifício elíptico em seu centro. Verificou-se o mesmo fenômeno de concentrações de tensões, porém com maior intensidade. Observa-se que a redução do raio da elipse, tendendo a zero, faz com que a geometria do furo se assemelhe fisicamente a uma fissura, tornando o estado de tensão cada vez mais singular (Rodrigues, 2018; Anderson, 2017).

Em uma data posterior, especificamente em 1920, Griffith baseou-se nos estudos anteriores de Inglis para, com base nas Leis da Termodinâmica, elaborar um critério de energia capaz de prever se a propagação de fraturas ocorreria de maneira instável em um material idealmente frágil, resultando em falhas.

Ele empregou uma metodologia de energia, abandonando a abordagem de tensões de Inglis, uma vez que esta não conseguia explicar de forma física a singularidade das tensões na extremidade da fratura. De acordo com Griffith, considerando uma placa fraturada de um material específico, se a taxa de variação da energia elástica armazenada nesta placa igualasse ou ultrapassasse o trabalho necessário para criar uma superfície de fratura, então o crescimento da fratura ocorreria. O modelo proposto por Griffith foi capaz de prever de maneira precisa a relação quantitativa entre a resistência do material e o tamanho das fraturas em corpos de prova de vidro. No entanto, essa abordagem não fornecia resultados satisfatórios para materiais mais dúcteis, como os metais (Rodrigues, 2018; Figueiredo, 2008).

A abordagem da Mecânica da Fratura recebeu um impulso significativo apenas após o término da Segunda Guerra Mundial e em resposta a várias catástrofes que careciam de uma solução direta. Foi somente em 1960 que George Irwin, baseando-se na teoria desenvolvida por Griffith, fez três contribuições fundamentais para este campo de estudo, que ele próprio propôs como uma nova disciplina. Tais contribuições foram: a Formulação Modificada de Griffith, que passou a considerar metais e o comportamento de escoamento na extremidade da trinca; a introdução do Fator de Intensidade de Tensão (K); e a proposição da Taxa de Liberação de Energia (G) (Irwin, 1960; Kumar, 2009).

De acordo com Rodrigues (2018), posteriormente foi desenvolvida a Lei de Paris que representa um modelo de crescimento de trincas, estabelecendo a relação entre a variação do fator de intensidade de tensão e a taxa de crescimento subcrítico de trincas, especialmente sob cargas cíclicas. Este modelo foi proposto por Paris (1962), cujos estudos resultaram na formulação inicial que conecta essas duas variáveis.

Posteriormente, foi introduzido o conceito da Integral J, que representa a taxa de variação da energia potencial em um corpo sólido elástico não linear ao longo do contorno da trinca. Devido a essa integração de linha, torna-se possível calcular o fator de intensidade de tensão com base nos campos de tensões e deslocamentos das regiões adjacentes à fissura (Figueiredo, 2008).

A partir deste ponto, segue-se com diversos trabalhos específicos das ramificações existentes dentro da mecânica da fratura, onde cada vez mais há o desenvolvimento de novas metodologias como, por exemplo, o trabalho de Prado (2004) que retrata sobre a influência da estrutura interna do material na simulação

computacional de elementos estruturais do concreto e discute abordagens de fratura coesiva.

2.2. MECANICA DA FRATURA: LINEAR ELÁSTICA X ELASTOPLÁSTICA

Os primeiros estudos da Mecânica da Fratura iniciaram ao analisar o fenômeno de quebra em materiais frágeis. Ao considerar um material perfeitamente quebradiço, nota-se que, para uma trinca real (vide Figura 2.4a), em que geometricamente temos $a_2 \rightarrow 0$, o estado de tensão na ponta da mesma tende a ser singular, $\sigma_{máx} \rightarrow \infty$. Partindo da premissa de que nenhum material é capaz de suportar uma sollicitação infinita, nenhum material real se mostra completamente frágil e, em virtude disso, sempre haverá uma Zona Plástica Inicial (ZPI) presente na extremidade das trincas (Cordeiro, 2015).

Contudo, em relação a diversos materiais como vidros e certos metais, a Zona Plástica Inicial (ZPI) apresenta uma dimensão tão reduzida que os impactos dessa área podem ser negligenciados durante a avaliação. Desse modo, para esses materiais, a fratura pode ser estimada por meio dos princípios da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE).

Surgindo com os estudos pioneiros de Griffith em 1920, que foram posteriormente enriquecidos pelas contribuições de Williams e Irwin em 1957 e de Rice em 1968, a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) representa uma disciplina essencial no âmbito da análise de materiais frágeis. Sua abordagem, embora simplificada, é notavelmente aprimorada, superando as limitações dos conceitos convencionais de resistência dos materiais no que tange à presença de descontinuidades (Moura, 2023; Cordeiro, 2015; Anderson, 2017).

Nessa perspectiva, a avaliação de uma fissura utilizando a abordagem da MFLE visa identificar seu comportamento, severidade e os campos de tensão e deslocamento adjacente à sua extremidade. Esse campo de tensões pode ser mensurado em relação ao coeficiente de intensidade de tensão. Para determinar se uma estrutura com fissura irá se romper sob uma carga, considerando que o campo de tensões permaneça predominantemente linear e elástico no momento da fratura, compara-se o coeficiente com a tenacidade do material à fratura. Questões relacionadas ao tamanho da fissura, taxa de crescimento da fissura, frequência de inspeção da estrutura e outros tópicos são abordados no estudo da Mecânica da Fratura (Pereira, 2018; Moura, 2023; Miranda, 2003).

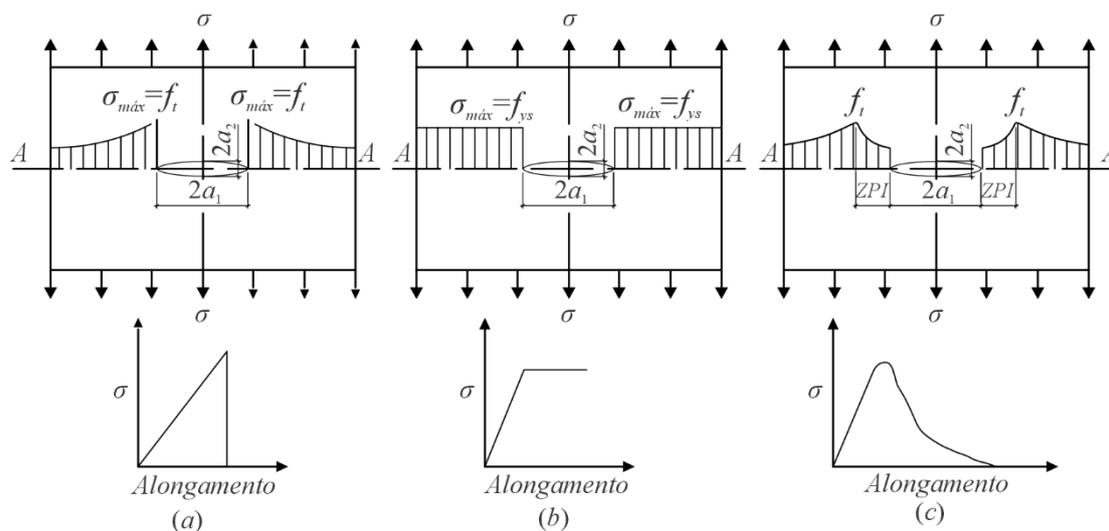


Figura 2.4. Falhas estruturais em diferentes tipos de materiais: (a) Falha frágil, (b) Falha plástica e (c) Falha quase frágil (Adaptado de Surenda, Swartz e Ouyang, 1995 apud Cordeiro, 2015).

A Mecânica da Fratura Elástica linear discrimina bem sobre as fraturas em materiais com o comportamento elástico linear, no qual a zona não linear da fratura é irrisória, isto é, a MFLE não se aplica adequadamente para a análise de materiais quase frágeis como o concreto. Partindo disso, fez-se necessário ampliar os estudos e através da fratura não linear é possível analisar materiais não lineares.

Dias (1983) retrata sobre algumas limitações da MFLE, tais como: efeito da temperatura de operação, tratamento térmico, características de resistência, variação das dimensões geométricas, modos de aplicação de carga, dentre outros. Dessa forma, adentra-se no estudo da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica, onde o autor esclarece que a MFEP tem como seu *modus operandi* a presença de um campo de tensões ocasionado pelo acúmulo de discordâncias.

Essas discordâncias, por sua vez, dão origem aos campos contínuos de discordâncias Somigliana, associadas às singularidades nos meios contínuos provenientes de imperfeições e falhas internas nos sólidos. O desenvolvimento da teoria da plasticidade proporcionou o aparecimento da teoria das discordâncias, tornando-a o seu principal micromecanismo operante a nível cristalino.

2.3. FUNDAMENTOS E CONCEITOS PRIMORDIAIS

2.3.1. Falha e Fratura

Nicolas *et al.* (2006) *apud* Souza e Machado (2013), retrata que a falha de um material específico é compreendida como a manifestação de qualquer interrupção na resposta do material aos estímulos mecânicos.

Medina (2014), fala que a ocorrência de uma falha em uma estrutura ou elemento é caracterizada por qualquer situação que invalide o elemento de cumprir sua função de transmissão de cargas ou esforços, conforme projetado, ou seja, a falha é manifestada quando o elemento não consegue resistir às forças ou esforços previstos no projeto. Ainda de acordo com o mesmo autor, tal ocorrência pode derivar de diversos fatores, incluindo sobrecarga, deficiência de material, execução inadequada da construção, adversidades ambientais, entre outros. Identificar e mitigar as possíveis fontes de falha durante o projeto e a construção de estruturas é fundamental para garantir sua segurança e durabilidade.

Há algumas causas que podem ser ditas como as mais corriqueiras para insucessos em componentes estruturais, como: esgotamento, deslocamento excessivo, instabilidade por flexão, fadiga, ruptura, deformação plástica ao longo do tempo, deterioração ambiental, vibração em frequência natural, colisão e atrito (Moura, 2023).

Estas causas, quando negligenciadas ou subestimadas, podem comprometer severamente a integridade e a eficácia de uma estrutura, resultando em falhas prematuras ou mesmo em acidentes catastróficos. Assim, é imperativo considerar e mitigar os potenciais riscos associados a cada uma dessas formas de falha durante o processo de projeto, construção e manutenção de estruturas.

Além das causas já citadas, há também problemas relacionados a execução e/ou que estão atrelados a ações antropogênicas, relacionado a isso, Anderson (2005) destaca que tais causas de falhas podem ser agrupadas em duas categorias distintas:

- Falta de atenção, imprudência ou falta de habilidade durante a fase de projeto, execução ou durante o uso e operação da estrutura; e
- Alterações no design ou no material original da estrutura.

Segundo sua análise, a primeira categoria se aplica a circunstâncias em que a tecnologia e as metodologias necessárias estão disponíveis, porém não são devidamente

utilizadas devido a falhas humanas. Já a segunda categoria, em concordância com o que também é mencionado por Carasek et al (2018), abrange falhas muito mais imprevisíveis, uma vez que, por melhor que seja o projeto de alteração, sempre haverá aspectos não contemplados pelo projetista. Segundo ele, embora não possa ser prevista ou eliminada, a segunda categoria de falhas pode ser minimizada submetendo os novos projetos e/ou materiais a extensos testes e análises.

O comportamento mecânico dos materiais é uma resposta à carga aplicada sobre eles, podendo resultar em deformação ou fratura. A fratura consiste na perda da integridade do corpo sólido e na sua possível separação em duas ou mais partes. A Figura 2.5 de "tensão versus deformação" ilustra os momentos de deformação e fratura do material de forma abrangente (Lawn, 2010).

Comumente, este fenômeno ocorre em uma membrana fina do material, posicionada ao longo da trajetória da trinca, podendo manifestar-se tanto no domínio elástico quanto no domínio plástico. A distinção principal reside no fato de que, na fratura elástica, a maior parte da zona de deformação plástica é incorporada à falha, enquanto na fratura plástica, mesmo que não determine diretamente a ruptura, são formados extensos arcos sobre o material que está em processo de escoamento, até que o material na superfície de fratura esteja pronto para se separar (Broek, 1984; Broek, 1988).

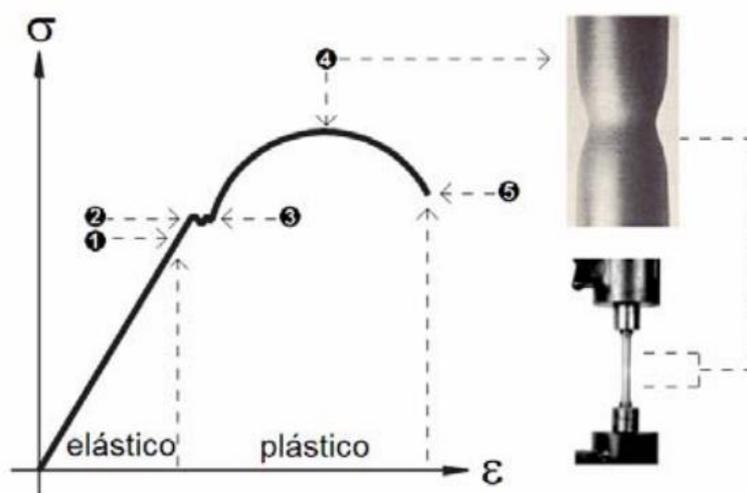


Figura 2.5. Curva “tensão versus deformação” geral para material dúctil (Boeira e Beck, 2007).

Na figura 2.5. a numeração indica: 1. Limite Elástico; 2. Limite de Proporcionalidade; 3. Fim do Escoamento; 4. Limite de Resistência e início da Estricção; 5. Limite de Ruptura.

Como já dito, em termos conceituais, uma falha estrutural implica na perda de capacidade de um componente, ou até mesmo de toda a estrutura, para suportar os carregamentos aos quais está sujeita. Essa perda pode ser categorizada como falha frágil (associada à fratura) ou falha dúctil (associada ao escoamento). Considerando que as estruturas são compostas por uma variedade de componentes e sistemas interconectados, uma das duas condições descritas a seguir pode ocorrer (Vitório, 2021).

Qualquer fenômeno de fratura passa por duas fases distintas – formação e propagação de trincas – como resposta à aplicação de tensão. O tipo de fratura está fortemente relacionado ao mecanismo de propagação da trinca. A fratura dúctil é caracterizada por uma extensa deformação plástica nas proximidades da trinca em progressão. Além disso, o processo ocorre de maneira progressivamente mais lenta à medida que o comprimento da trinca se estende (Callister e Rethwisch, 2016).

Ainda de acordo com o autor, as características das fraturas dúcteis apresentam distinções marcantes, tanto em nível macroscópico quanto em nível microscópico. A Figura 2.6 ilustra esquematicamente perfis de fratura macroscópica característicos tanto para fratura dúctil, quanto para fratura frágil. A configuração mostrada na Figura 2.6a. é comum em metais altamente dúcteis, como ouro puro e chumbo puro em temperatura ambiente. Esses materiais altamente dúcteis sofrem um estreitamento até uma fratura pontual, exibindo uma redução de área praticamente total.

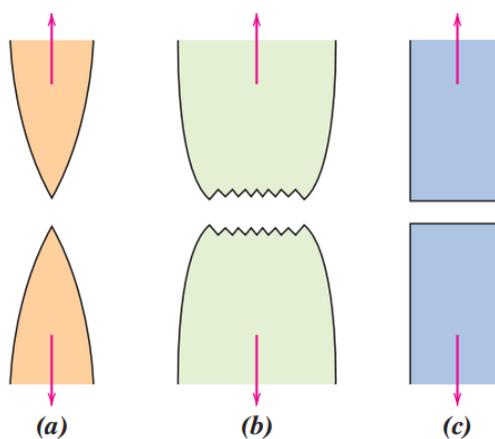


Figura 2.6. (a) Fratura altamente dúctil na qual a amostra forma um pescoço até um único ponto. (b) Fratura moderadamente dúctil com algum empescoamento

(estrangulamento). (c) Fratura frágil sem nenhuma deformação plástica (Callister e Rethwisch, 2016).

Callister e Rethwisch (2016) ainda retratam que, dúctil e frágil são termos relativos, já que a classificação de uma fratura específica como um ou outro depende do contexto. A fratura frágil ocorre sem nenhuma deformação apreciável e através da rápida propagação de uma trinca. O movimento da trinca ocorre aproximadamente perpendicular à direção da tensão de tração aplicada, resultando em uma superfície de fratura relativamente plana, conforme ilustrado na Figura 2.6.c. As superfícies de fratura dos materiais que falharam de maneira frágil exibirão padrões característicos próprios; não serão observados sinais de deformação plástica generalizada. Na Figura 2.7, podemos notar os dois tipos de fratura: frágil e dúctil.



Figura 2.7. (a) Fratura do tipo taça e cone no alumínio. (b) Fratura frágil em um aço doce (Callister e Rethwisch, 2016).

2.3.2. Mecanismos de abertura de trincas

De acordo com Cordeiro (2015), a mecânica da fratura é entendida como uma ciência na qual analisa defeitos nas estruturas por fraturamento devido a propagação de fissuras, onde tais fissuras possuem diversos modos de propagação nas estruturas. Apesar dos infinitos modos, toda propagação se compõe, basicamente, de três modos básicos de fraturamento, sendo eles: modo I, II e III, no qual variam conforme as solicitações aplicadas a estrutura como pode ser visto na Figura 2.8.

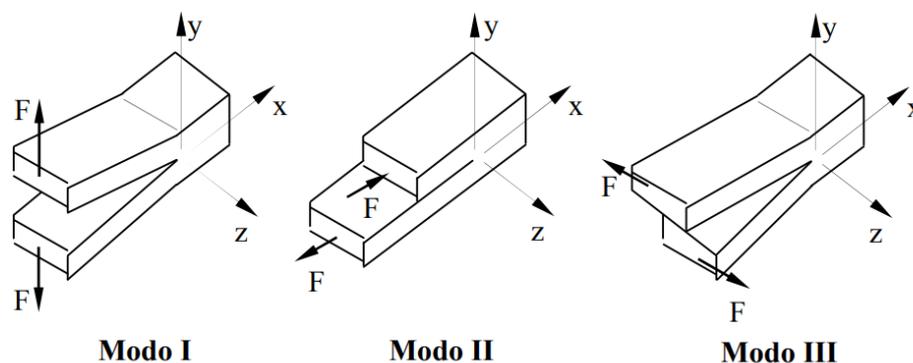


Figura 2.8. Modos de fraturamento (Figueiredo, 2008).

O modo I é representado pela abertura normal das faces da fissura no plano, isto é, quando as solicitações na estrutura forçam essa abertura normal das faces e o mesmo é conhecido como modo de abertura ou *opening mode*. Já o modo II é caracterizado pelo deslizamento entre as faces da fissura na direção do seu comprimento, sendo conhecido como modo de cisalhamento ou *shear mode*. O modo III é associado ao modo de rasgamento ou *tearing mode*, no qual se caracteriza como a propagação devido ao deslizamento entre as faces da fissura na direção normal ao comprimento da mesma (FIGUEIREDO, 2008). Vale salientar que, em problemas planos, só pode ocorrer os modos de fraturamento I e II.

As soluções desenvolvidas para o campo de tensão próximo à ponta da trinca serão retratadas posteriormente, onde as mesmas se baseiam nos problemas fundamentais de Griffith que se trata de uma chapa homogênea isotrópica de dimensões infinitas e possuindo uma trinca de comprimento 2.9.a. submetida puramente aos três modos básicos de fraturamento conforme a Figura 2.9.

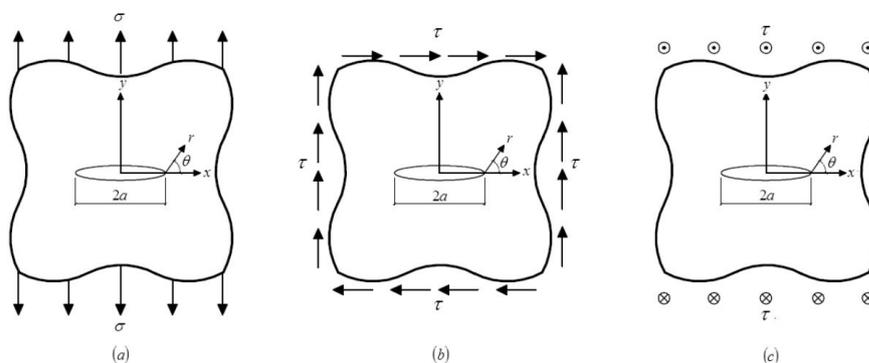


Figura 2.9. Problemas fundamentais de Griffith de fraturamento: (a) Modo I, (b) Modo II e (c) Modo III (Cordeiro, 2015).

2.3.3. Fatores de Intensidade de Tensão (FIT)

O Fator de Intensidade de Tensão, denotado por K , emerge como o parâmetro de maior relevância na mecânica da fratura linear elástica, proporcionando uma análise detalhada do campo de tensões nas imediações de uma trinca. Essencialmente, o coeficiente K fornece *insights* fundamentais acerca da origem e da propagação da trinca (Anderson, 2017; Medina, 2014; Moura, 2019).

O coeficiente em questão está vinculado ao método de abertura da fissura e há três métodos distintos: modo I, modo II e modo III, nos quais foram explanados no tópico 2.3.2. Isso quer dizer que teremos um K respectivo para cada modo de abertura.

Ao examinar uma placa infinita com uma abertura elíptica, conforme ilustrado na Figura 2.10, Charles Edward Inglis evidenciou que o índice de concentração de tensões aumenta à medida que o raio ρ da extremidade do entalhe diminui e que a máxima tensão que atua na margem da abertura elíptica é expressa por (Medina, 2014; Moura, 2019):

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} = 1 + 2 \frac{a}{b} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2.1)$$

onde $\rho = b^2/a$ é o menor raio de curvatura da elipse, e a e b os semieixos da elipse.

A expressão acima quer dizer que o K_t é definido pela razão entre a máxima tensão ocorrida no extremo do entalhe e a tensão nominal (Mafra, 1980).

Se um sistema de coordenadas polares for estabelecido na extremidade da fissura (vide Figura 2.11) de um corpo linear elástico e isotrópico, para configurações de fissuras sob ação de forças externas, pode-se comprovar que o campo de tensões é expresso por:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cdot r^{\frac{m}{2}} \cdot g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.2)$$

Onde σ_{ij} é o tensor tensão; r e θ são mostrados na Figura 2.11; k é uma constante; f_{ij} é uma função adimensional de θ para o primeiro termo (Mafra, 1980; Anderson, 2017).

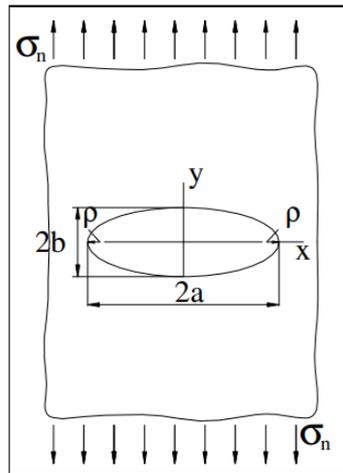


Figura 2.10. A placa de Inglis (Anderson, 2017).

Quando se consideram termos de alta ordem, A_m representa a amplitude e $g_{ij}^{(m)}(\theta)$ é uma função adimensional de θ para o m-ésimo termo, ambos dependentes da geometria. Entretanto, ao observar o primeiro termo da equação, percebe-se que para qualquer solução, o termo \sqrt{r} é inversamente proporcional. Dessa forma, se r se aproxima de zero, o tensor tende ao infinito. Portanto, quanto mais próxima da ponta da trinca, maior a tendência do campo de tensões em direção ao infinito.

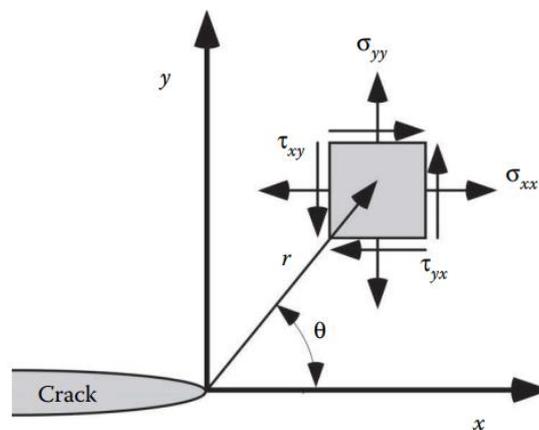


Figura 2.11. Definição do eixo de coordenada polar na ponta da trinca. Direção Z é normal à página (Anderson, 2017).

Mafrá (1980) diz que, na mecânica da fratura, uma adição significativa foi feita para representar a magnitude das tensões próximas à extremidade da trinca: o Fator de Intensidade de Tensões, K_m , onde:

$$K_m = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.3)$$

onde $m = I, II$ e III indica o modo de abertura, σ é a tensão nominal, a é uma dimensão característica da trinca e Y é o fator geométrico, introduzido por Irwin como fator de correção, que depende da forma e proporções do componente sob estudo, bem como, do carregamento e orientação da trinca. Assim, é possível obtermos os campos singulares de tensão e deformação nas adjacências da ponta da trinca para os três modos de abertura de trinca, conforme ilustrados no Apêndice A1.

2.3.4. Integral J

A Mecânica da Fratura Linear Elástica se mostra bastante restrita, uma vez que só permite pequenas deformações não-lineares ao redor da trinca. Em várias circunstâncias e com diferentes materiais, torna-se inviável caracterizar o comportamento da fratura. Para esses casos, surgem alternativas como a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica, que se aplica a materiais independentes do tempo e com características não-lineares, ou seja, que apresentam deformação plástica, como retratado anteriormente. Dentro desse campo, destaca-se um parâmetro fundamental: a Integral J.

A Integral J, concebida por Rice (1968) e conhecida como integral de Rice, está baseada na lei da conservação de energia e constitui uma integração de linha que mantém um valor constante para qualquer trajetória em torno da extremidade da trinca em um campo de deformação bidimensional de um corpo elástico ou elastoplástico.

Barbosa (2020), diz que a integral J pode ser compreendida como uma extensão da taxa de liberação de energia potencial. Ela descreve a fratura em materiais não lineares, modelando a deformação elastoplástica como "elástica não linear" através de uma integral de linha que independe do caminho de integração (Figura 2.12).

A integral delinea um percurso em torno da extremidade da fissura, começando na parte inferior e finalizando na parte superior (Pereira, 2018). Sua formulação é expressa por:

$$J = \int_{\Gamma} \left[W n_x - \sigma_{ij} \eta_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] \partial \Gamma \quad (2.4)$$

Onde u_i simboliza o vetor de deslocamentos, η_j são os cossenos diretores do caminho Γ e W é a energia de deformação por unidade de volume. Os componentes da integral J , J_I e J_{II} , relativos, respectivamente, aos Modos I e II, são:

$$J_I = - \int_A \left[W(u_i^I) \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij}(u_i^I) \frac{\partial u_i^I}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] dA - \int_S t_i \frac{\partial u_i^I}{\partial x_k} q ds \quad (2.5)$$

$$J_{II} = - \int_A \left[W(u_i^{II}) \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij}(u_i^{II}) \frac{\partial u_i^{II}}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] dA - \int_S t_i \frac{\partial u_i^{II}}{\partial x_k} q ds \quad (2.6)$$

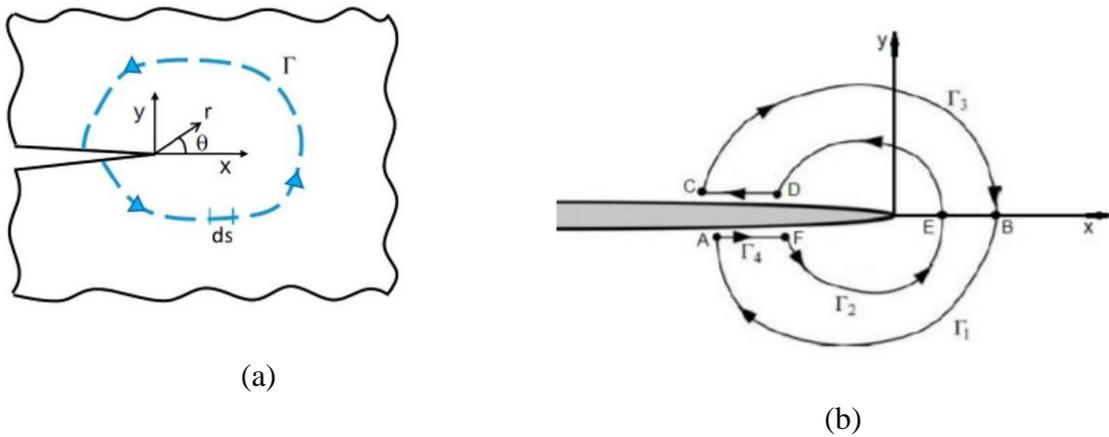


Figura 2.12. (a) Contorno de integração fechado anti-horário para determinação da Integral J (b) Independência do caminho da Integral J (Anderson, 2005 *apud* Barbosa, 2020).

Na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), a integral equivale à taxa de liberação de energia \mathcal{G} . Seus elementos, J_I e J_{II} , podem ser empregados no cálculo dos coeficientes de intensidade de tensão (K_I e K_{II}) das seguintes equações:

$$J = - \int_A \left[W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} \right] dA - \int_A \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] \right\} q dA - \int_S t_i \frac{\partial u_i^{II}}{\partial x_k} q ds \quad (2.7)$$

Onde t_i representa uma carga de pressão na face da trinca e q simboliza uma função contínua que permite a integral de domínio equivalente ser considerada na formulação dos elementos finitos.

Gonçalves (2015), retrata que para o estado plano de deformação, a integral relaciona-se com o FIT quando ocorre escoamento em pequena escala, e é representada pela expressão:

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.8)$$

em que E é o módulo de elasticidade, “ K_I ” é o Fator de Intensidade de Tensão no modo de fratura I e refere-se à aplicação de um carregamento de tração perpendicular ao eixo da trinca e “ K_{II} ” é o Fator de Intensidade de Tensão no modo de fratura II e refere-se à análise da fratura submetida a cisalhamento puro (verificar Apêndice A1).

A integral J é um método eficaz para a determinação de fatores de intensidade de tensão, porque o campo elástico interno pode ser determinado com precisão ao longo do caminho de contorno no método dos elementos de contorno, uma vez que a variação exata do campo elástico interno está incorporada no campo da solução fundamental. Este procedimento já se encontra implementada no programa BemCracker2D para o cálculo dos FITs de forma direta, sendo definido um caminho de contorno circular ao redor da ponta da trinca, automaticamente, com um conjunto de pontos internos em posições simétricas em relação ao eixo da trinca, como ilustrado na figura 2.12a). Para maiores detalhes ver os trabalhos de Moura (2019), Rodrigues (2018) e Leite (2017).

2.3.5. Critérios de direção de propagação

De acordo com Teixeira (2006), em situações de carregamento no modo misto, a direção de propagação da trinca não necessariamente segue a direção original do eixo da trinca. Diversos critérios são sugeridos na literatura para determinar essa direção.

Os critérios mais frequentemente empregados para determinar a direção de propagação de trincas são os critérios da Máxima Tensão Circunferencial (MTC), da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial (MTLEP) e da Mínima Densidade de Energia de Deformação (MDED) (Moura, 2019). Estes critérios serão aqui resumidos de forma a apresentarmos suas ideias, uma vez que os mesmos estão implementados no programa BemCracker2D e detalhes de implementação, portanto, não serão discutidos por fugirem do escopo do trabalho (o leitor deve se reportar ao trabalho de Moura, 2019).

2.3.5.1. Critério MTC – Máxima Tensão Circunferencial

O critério da Máxima Tensão Circunferencial se baseia em um conceito fundamental da Resistência dos Materiais. Nesse conceito, reconhecemos que as tensões

normais máxima e mínima ocorrem em planos nos quais a tensão cisalhante é nula. A direção da trinca é então estabelecida perpendicularmente ao plano da máxima tensão normal (Erdogan e Sih, 1963; Leite, 2017).

Através do Princípio da Superposição Linear e as equações dos FITs no modo I e II, em coordenadas polares:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ K_I \left[1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta - 2K_{II} \tan \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right\} \quad (2.10)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ K_I \sin \theta - K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right\} \quad (2.11)$$

onde K_I e K_{II} representam os Coeficientes de Intensidade de Tensão (vide Apêndice A1) nos modos de fratura I e II, respectivamente. O modo de fratura I refere-se à aplicação de uma carga de tração perpendicular ao eixo da trinca, enquanto o modo II diz respeito à análise da fratura sujeita a cisalhamento puro, como ilustrado na Figura 2.13. A combinação dos dois modos é denominada modo misto.

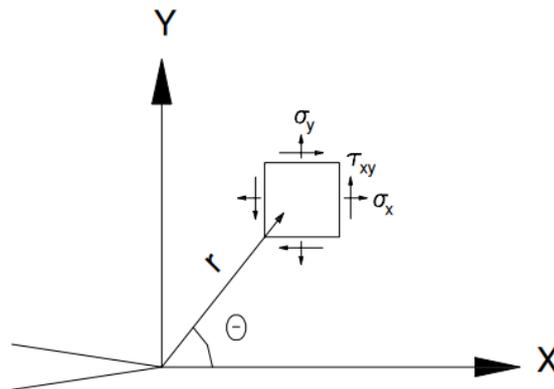


Figura 2.13. Campo de tensões na ponta da trinca (Teixeira, 2006).

O Critério da Máxima Tensão Circunferencial estipula que a trinca irá se expandir no plano ortogonal onde σ_θ atinge seu máximo. Para isso, é necessário impor a condição de que a tensão $\tau_{r\theta}$ seja igual a zero:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \{K_I \sin \theta - K_{II}(3 \cos \theta - 1)\} \quad (2.12)$$

Tem-se duas soluções para expressão apresentada:

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0 \therefore \theta = \pm\pi \quad (2.13)$$

$$\{K_I \sin \theta - K_{II}(3 \cos \theta - 1)\} = 0 \quad (2.14)$$

Analisando a Equação 2.14 para os modos I e II separadamente, pode-se notar que para o modo I puro ($K_{II} = 0$):

$$K_I \sin \theta = 0 \therefore \theta_t = 0 \quad (2.15)$$

Já para o modo II puro ($K_I = 0$), tem-se que:

$$K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \therefore \theta_t = \pm 70,5^\circ \quad (2.16)$$

2.3.5.2. Critério de MTLEP – Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial

Este critério fundamenta-se na taxa de alívio de energia, \mathcal{G} , que mede a quantidade de energia potencial liberada durante o processo de fraturamento. Essa medida pode ser diretamente relacionada ao Fator de Intensidade de Tensão (FIT), quando a trinca segue propagações colineares e está situada em um regime elástico linear (Miranda, 2003).

Ainda de acordo com o mesmo autor, em situações de trincamento em modo misto, o caminho de propagação é determinado pela taxa máxima de liberação de energia, $\mathcal{G}_{\theta_{m\acute{a}x}}$, obtida pela aplicação da equação \mathcal{G} , derivada de uma função de mapeamento com variáveis complexas, em que θ representa a direção radial da ponta da trinca atual.

Com o uso dos FIT, essa técnica resulta em:

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{4}{E} \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \left(K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \quad (2.17)$$

$$K_I(\theta) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \left(K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \quad (2.18)$$

$$K_{II}(\theta) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \left(K_{II} \cos \theta - \frac{1}{2} K_I \sin \theta \right) \quad (2.19)$$

Essas formulações concedem a instrumentação necessária para estabelecer uma relação entre \mathcal{G} e os Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) em termos de θ , culminando na determinação de que a taxa global de liberação de energia será:

$$\mathcal{G}(\theta) = \mathcal{G}(\theta)_I + \mathcal{G}(\theta)_{II} \quad (2.20)$$

onde:

$$\mathcal{G}(\theta)_I = \frac{K_I^2(\theta)}{E'} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{G}(\theta)_{II} = \frac{K_{II}^2(\theta)}{E'} \quad (2.22)$$

2.3.5.3. Critério MDED – Mínima Densidade de Energia de Deformação

Este princípio estipula que a fissura avança, partindo do seu ponto de origem, na direção em que a densidade de energia de deformação atinge seu nível mínimo, e a fratura ocorre quando esse fator atinge um limiar crítico (Teixeira, 2006). As componentes dos deslocamentos na direção radial e circunferencial são dadas por (Anderson, 2017):

$$u_r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{r}{2\mu}} \{ K_I [(2k - 1) \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2)] - K_{II} [(2k - 1) \sin(\theta/2) - 3 \sin(3\theta/2)] \} \quad (2.23)$$

$$v_\theta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{r}{2\mu}} \{ K_I [-(2k - 1) \sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2)] - K_{II} [(2k - 1) \cos(\theta/2) - 3 \cos(3\theta/2)] \} \quad (2.24)$$

em que θ é o mesmo apresentado na Figura 2.11.

Onde a energia de deformação do elemento infinitesimal de área $dA = rd\theta dr$ é fornecida por meio de uma equação de dW , resultando na seguinte expressão:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{r}(a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \quad (2.25)$$

Por meio de fórmulas específicas para calcular os coeficientes a_{11} , a_{12} e a_{22} que podem ser encontradas em Silveira (2003), a expressão acima descreve, dentro de parênteses, a expressão do conceito S , como delineado na Equação 2.26. Dessa forma, torna-se claro que a trinca se propaga somente em circunstâncias onde $S(\theta)$ atinge ou excede um valor crítico, designado por S_{cr} e avança na direção de menor densidade de energia de deformação.

$$S(\theta) = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \quad (2.26)$$

2.3.6. Campos de tensão e deslocamento na ponta da trinca

Segundo Mindess et al. (2003), baseado no problema fundamental de Griffith, para entendimento dos campos de tensão e deslocamentos na ponta da trinca, analisou-se uma fissura no modo I com uma placa idealizada infinita na qual possuía um material elástico e um furo elíptico, além disso, a mesma estava submetida à tração, como pode-se observar na Figura 2.14.

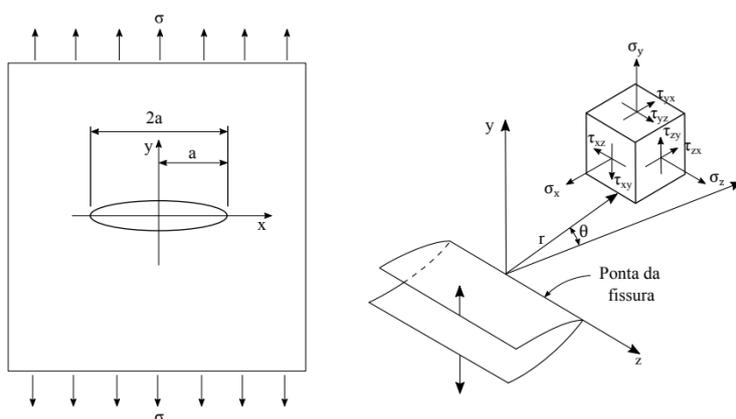


Figura 2.14: (a) Placa idealizada infinita com um furo elíptico, submetida à tração, (b) sistema de coordenadas polares e componentes de tensão à frente de uma trinca (modo I de deslocamento) (Mindess et al., 2003 adaptado por Silva, 2017).

A partir da análise do problema exposto na Figura 2.14, foi possível determinar as componentes de tensão apresentadas na expressão a seguir.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

onde r e ν são, respectivamente, a distância do ponto onde se deseja obter as tensões em relação à ponta da fissura e o coeficiente de Poisson. O θ é a inclinação desse ponto em relação ao eixo x e K_I representa o fator de intensidade de tensão para o modo I de fissuração. Já para σ_{ii} e τ_{ij} são as tensões normais e de cisalhamento, respectivamente, nas direções apresentadas se correlacionando com a Figura 2.14.

De acordo com Ferreira (2018), devido o K ser uma propriedade intrínseca do material, o valor do mesmo pode ser utilizado no estudo de qualquer geometria e possibilita o cálculo do tamanho crítico de trincas em projetos de estruturas. Há diversas soluções desenvolvidas para o parâmetro K e para o problema apresentado na Figura 2.14 o K é expresso como:

$$K_I = \sigma(\pi a)^{0,5} \quad (2.28)$$

onde σ é a tensão nominal e a é o comprimento da trinca e tem como unidades $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$.

As componentes do deslocamento na ponta da trinca para condições de tensões plana, são observadas na expressão:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1 + \mu) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\mu + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ 2(1 + \mu) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\mu - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

O fator de intensidade de tensão foi desenvolvido por Williams e Irwin em 1957 com o intuito de quantificar o campo de tensões em volta de uma trinca em uma peça que se comporta de maneira linear elástica (PINTO, 2018).

De acordo com Silva (2017), através das equações do campo de tensões próximo a ponta da trinca pode-se subentender que esse campo possui variação singular

fundamental, isto é, a tensão próxima da ponta da trinca tende ao infinito e diminui em proporção à raiz quadrada da distância r até a ponta da trinca, como observado na Figura 2.15.

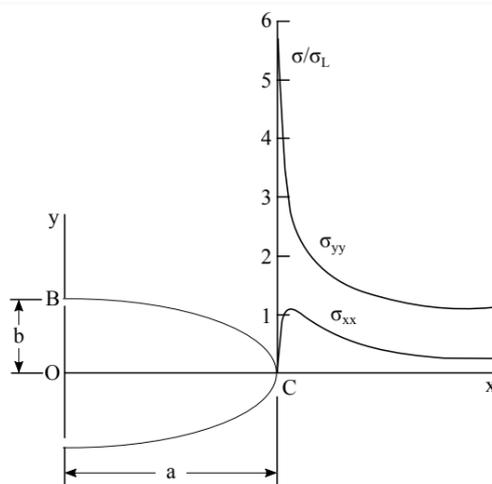


Figura 2.15: Concentração de tensão em um furo elíptico. (Mindess et al., 2003 adaptado por Silva, 2017).

Além disso, a partir das formulações dos campos de tensão e deslocamento para as trincas no modo I, é possível deduzir as formulações respectivas a trinca no modo II para o mesmo caso, uma placa idealizada infinita com um furo elíptico submetida ao cisalhamento (Figura 2.16).

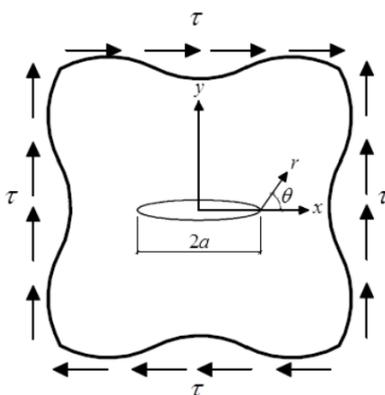


Figura 2.16: Placa infinita com furo elíptico submetida à cisalhamento (Cordeiro, 2015).

Para o modo II, cisalhamento, as componentes do deslocamento na ponta da trinca (vide Figura 2.14 e 2.16) são obtidas através da expressão:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Para o problema apresentado na Figura 2.16, o fator de intensidade (K) é dado por:

$$K_{II} = \tau(\pi a)^{0,5} \quad (2.31)$$

em que $\tau = \tau_{xy}$ é o cisalhamento que pode ser calculado como apresentado na equação 2.31.

Tais fatores de intensidade de tensão também podem ser utilizados como critério de fratura. Quando um material resiste ao aparecimento de uma trinca sem ocorrer uma fratura frágil, isso indica que o K está abaixo do seu valor crítico K_c , conhecido como tenacidade da fratura. Os valores de K_c variam para diversos tipos de materiais e sofrem influência da temperatura, taxa de carregamento e espessura do elemento (PINTO,2018).

3. MODELO DE TRINCA COESIVA

O modelo de trinca coesiva, também conhecida como trinca fictícia, é uma metodologia eficaz para elucidar os mecanismos de dissipação de energia em materiais que apresentam certa fragilidade ao longo do processo de fissuração (Assis, 2023). Através dessa abordagem, é possível compreender como a energia é absorvida e dispersa quando ocorre a abertura de uma fissura em materiais que, apesar de não serem totalmente frágeis, ainda manifestam comportamentos que os tornam suscetíveis a rachaduras e rupturas (Yang e Chen, 2005). Um dos materiais mais utilizados e que apresentam esse tipo de comportamento, é o concreto.

De acordo com Lens (2009), o concreto é um composto quase-frágil, caracterizado por uma alta resistência à compressão e uma resistência à tração consideravelmente baixa. O ciclo de falha do concreto pode ser segmentado em três etapas distintas:

- A formação, expansão e união de microfissuras;
- A conexão das faces da fissura por meio dos grânulos de agregados;
- O surgimento de uma fissura macroscópica, com a possibilidade de interligação dos agregados.

Uma das metodologias de análise de fratura em concreto são os modelos coesivos, nos quais foram desenvolvidos a partir das pesquisas de Dugdale (1960) e Barrenblat (1962), onde Dugdale aplicou os modelos coesivos para análise de fraturas dúcteis e Barrenblat os utilizou para estudar fraturas frágeis. Nessas abordagens, a região coesiva é representada como uma fissura fictícia sujeita a tensões de compressão ou coesão (vide Figura 3.1).

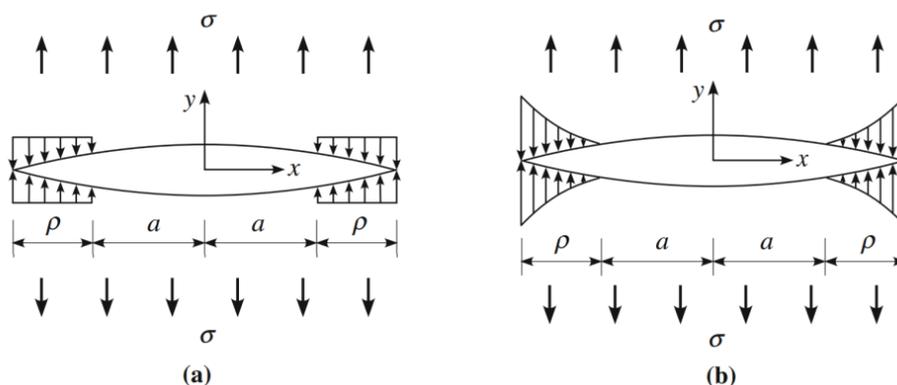


Figura 3.1. Modelos Coesivos de Dugdale (a) e de Barrenblat (b) (Shi, 2009 apud Neto, 2015).

em que a é metade do comprimento da fenda e ρ é a distribuição de tensões conhecida ao longo da zona plástica.

Com os avanços científicos, a mecânica da fratura evoluiu com a teoria dos modelos de fissura fictícia. Nestes modelos, admite-se a existência de uma fissura fictícia à frente da fissura real presente na estrutura. Esses conceitos iniciais da mecânica da fratura foram desenvolvidos para materiais frágeis, como vidros, e receberam o nome de Mecânica da Fratura Elástico Linear. Nessa teoria, pressupõe-se a presença de uma Zona de Processos Inelásticos ou Zona de Processos (ZP) à frente da fissura real, que, para materiais frágeis, tem comprimento desprezível (Avid *et al.*, 2023).

Compreender as particularidades inerentes ao material é fundamental para entender como estas afetam o seu desempenho mecânico, no qual está primordialmente associado aos processos de fissuração e fraturamento, desencadeados sobretudo pela formação de microfissuras (Rots *et al.*, 1985; Leonel, 2009; Cordeiro, 2015).

3.1. COMPORTAMENTO DO CONCRETO

Em uma análise de escala média, o concreto é visto como um material bifásico, constituído por uma fase de agregados e outra de matriz de cimento ou argamassa. A argamassa, por sua vez, é composta por partículas de agregados finos e cimento como aglutinante. A heterogeneidade dessa estrutura, associada às variações volumétricas decorrentes do processo de cura, causa danos iniciais de caráter irreversível no material (Pituba, 2003).

Ainda de acordo com Pituba (2003), de modo geral, o dano inicial é composto por defeitos na região de interface entre as fases e por vazios ou poros na argamassa. A presença, por um lado, de uma fase estável (os agregados) e, por outro, de uma fase em evolução (a pasta de cimento, que sofre retração e expansão durante a cura, quando sua resistência ainda é baixa) leva à formação de uma área de baixa resistência ao redor dos agregados, conhecida como "zona de transição". Nesta zona, surgem defeitos de aderência e vazios, quase sempre relacionados à direção do processo de moldagem.

O processo de evolução do dano, ou seja, a danificação (Figura 3.2), varia conforme o tipo de solicitação a que o material é submetido. Os principais mecanismos de danificação, comuns a todos os estados de solicitação, podem ser identificados ao se

observar como o material reage em estados uniaxiais de tração e compressão (Cordeiro, 2015; Leonel, 2009).

Considerando que os agregados têm uma forma circular, no concreto sujeito à tração, a evolução das fissuras ocorre em duas etapas distintas e pode ser observada na Figura 3.2.

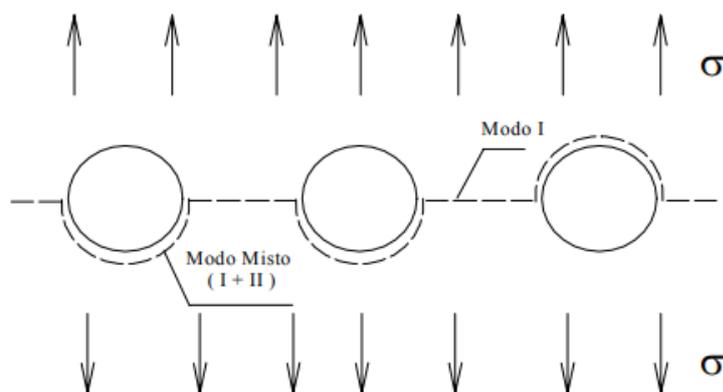


Figura 3.2. Danificação em tração com início na zona de interface (Mazars, 1984).

No início, a evolução ocorre em um modo misto de abertura e deslizamento (modos I e II, respectivamente) ao longo de um hemisfério dos agregados; isso pode acontecer tanto no hemisfério superior quanto no inferior, dependendo da distribuição dos defeitos iniciais. Depois, uma vez completada a progressão pelo hemisfério, a propagação instável em modo I começa levando a uma fratura que se estende perpendicularmente à direção da carga (Mazars, 1984).

De acordo com Rots et al. (1985), compreender as singularidades do material é crucial para entender como elas impactam seu comportamento mecânico, o qual está intimamente relacionado com os processos de fissura e fratura, desencadeados pelo surgimento de microfissuras. Quando se aplica tensão a um corpo de prova de concreto, algumas fissuras se formam em pontos aleatórios. No entanto, se a tensão de tração em algum desses pontos exceder um certo limite de resistência, toda a deformação subsequente decorrente das microfissuras se concentrará na chamada zona de processo.

3.1.1. Tração

Embora o concreto seja frequentemente utilizado devido à sua impressionante resistência à compressão, sua resposta à tração também é de grande importância. As circunstâncias em que ocorrem e se propagam as fissuras no lado tensionado de elementos de concreto armado são fortemente influenciadas tanto pela resistência à tração quanto pelas propriedades de fratura do material, esta última relacionada à facilidade com que uma fissura avança uma vez iniciada. Além disso, os esforços de tração no concreto também surgem devido à ação de cisalhamento, torção e outras forças, alterando frequentemente o comportamento da estrutura após o surgimento de fissuras. Portanto, é crucial poder prever, com precisão razoável, a resistência à tração do concreto e entender os fatores que influenciam a propagação de fissuras (Darwin, Dolan e Nilson, 2016).

Proença (1988) retrata que na tração a microfissuração assume uma característica ainda mais relevante que na compressão. Analisando a curva típica de tração do concreto da Figura 3.3, para tensões inferiores a 60% de f_t , é notório que o surgimento de novas microfissuras é insignificante. Em relação à direção de propagação da fissura, observa-se que ela é perpendicular à direção da tensão.

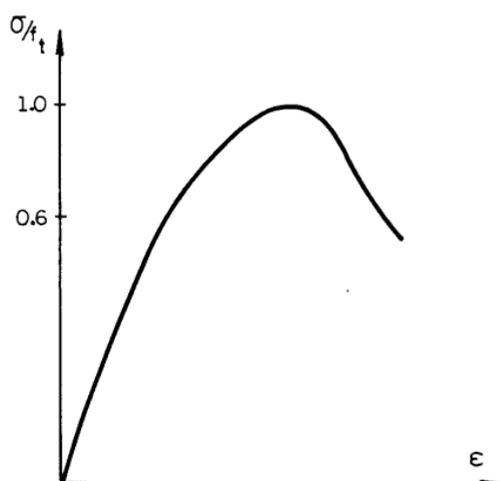


Figura 3.3. Comportamento da tração uniaxial do concreto (Proença, 1988).

Na tração, a falha decorre da fusão de um pequeno conjunto de fissuras, ao contrário da compressão, onde a falha resulta da conexão de um grande número delas. A porção descendente da curva é desafiadora de ser acompanhada devido à rápida disseminação das fissuras nessa fase.

Vale salientar que, a relação entre as forças de resistência à tração e compressão uniaxiais oscila entre 0.05 e 0.1. O módulo de elasticidade à tração é superior e o coeficiente de Poisson inferior, em comparação com a compressão uniaxial (Proença, 1988).

3.1.2. Compressão

Darwin, Dolan e Nilson, 2016 retratam que o comportamento estrutural está intrinsecamente ligado à resposta tensão-deformação do material utilizado, especialmente sob o tipo de tensão ao qual é submetido na estrutura. No caso do concreto, amplamente empregado em compressão, sua curva tensão-deformação nesse contexto é de suma importância. Essa característica é determinada por meio de análises de deformação em testes específicos, como os ensaios de cilindro ou na compressão lateral em vigas. Na Figura 3.4, são apresentadas representações típicas dessas curvas para o concreto de peso normal, obtidas a partir de testes de compressão uniaxial realizados em diferentes velocidades em amostras de concreto com 28 dias de idade.

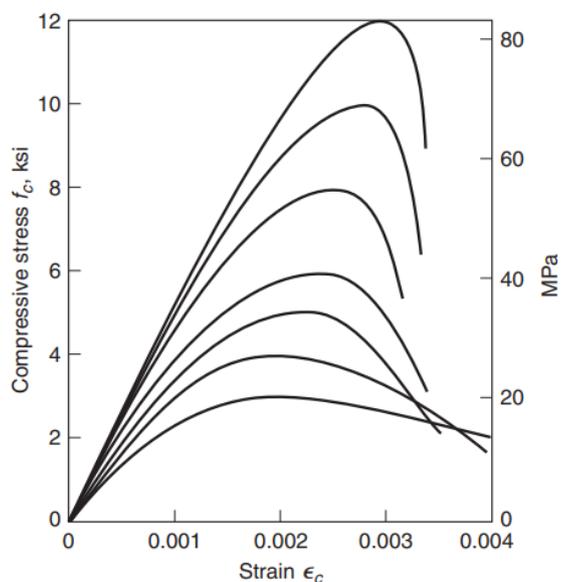


Figura 3.4. Curvas típicas de tensão (f_c) – deformação (ϵ_c) de compressão para concretos de densidade normal (Darwin, Dolan e Nilson, 2016).

O concreto exibe uma notável disparidade em sua resistência quando submetido a tensões de tração ou compressão, o que leva a uma incidência maior de falhas por tração do que por compressão, mesmo em contextos de carregamentos mistos. Além disso, observa-se uma distinção na orientação das fissuras conforme o tipo de esforço aplicado: as fissuras ocorrem perpendicularmente à tensão aplicada no caso do esforço

de tração axial puro, enquanto ocorrem paralelamente à tensão aplicada no caso do esforço de compressão axial puro (Cordeiro, 2015).

Segundo Mehta e Monteiro (2008), na avaliação dos esforços axiais de compressão pura, pode-se subdividir o comportamento do concreto em cinco fases distintas (vide Figura 3.5). A primeira etapa, que abrange desde o ponto inicial até o ponto A, é caracterizada por um comportamento linear-elástico. Nesse estágio, aproximadamente 30% da resistência à compressão do material (f_c) é absorvida. Esse comportamento surge como resposta à aplicação de uma carga de curto prazo, gerando microfissuras na zona de transição da interface em regime inalterado.

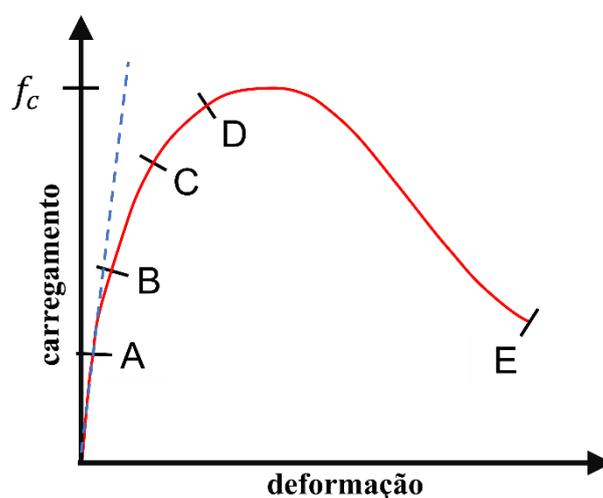


Figura 3.5. Curva de tensão-deformação na compressão (Moura, 2023 adaptado de Mehta e Monteiro, 2008).

Ainda de acordo com Mehta e Monteiro (2008), na segunda etapa, entre os pontos A e B, há um aumento gradual na curvatura, indicando um leve estiramento das microfissuras na zona de transição, sem fissuração na matriz da argamassa. Na terceira fase, entre os pontos B e C, o concreto apresenta instabilidades crescentes com a propagação das fissuras na região de transição. Na quarta fase, entre os pontos C e D, há uma intensificação notável na curvatura, indicando uma aceleração abrupta da fissuração do elemento, próxima a 75% da f_c . A tensão crítica, representada pela letra D na curva tensão-deformação, corresponde ao limite máximo de deformação volumétrica. Na fase seguinte, entre os pontos D e E, o material responde à fissuração instável até a fratura.

3.1.3. Cíclico

Sob a ação de cargas cíclicas em um sólido, nucleações a nível microscópico surgem com um número diminuto de repetições, decorrentes do efeito da fadiga no material (vide Figura 3.6). A evolução das fissuras até sua percepção em escala macroscópica é gradual, quando considerada a durabilidade à fadiga do sólido, comumente expressa pela quantidade de ciclos necessários para culminar na falha do material (N_f) (Felix, 2022).

A vida útil à fadiga, geralmente subdividida em duas fases principais, abrange tanto o surgimento das nucleações no material quanto a propagação das fissuras. Durante a fase de iniciação, também ocorre o crescimento microestrutural das fissuras, embora em dimensões tão diminutas que não são consideradas na representação ou quantificação do nível de dano do material (Felix, 2022).

De acordo com Mehta e Monteiro (2008), desde o surgimento da primeira microfissura até a ruptura completa do material, o dano por fadiga no concreto pode ser delineado em três estágios distintos, conforme os níveis de deformação (Figura 3.6): (i) iniciação da fissura, momento em que microfissuras emergem devido à alta concentração de tensões em pontos de descontinuidades na estrutura cristalina ou em regiões com descontinuidades pré-existentes no material; (ii) propagação da fissura, ocasionada pelo acúmulo de energia nas extremidades das fissuras já presentes; e (iii) colapso do material, que se manifesta de maneira abrupta em virtude da natureza quase-frágil do concreto.

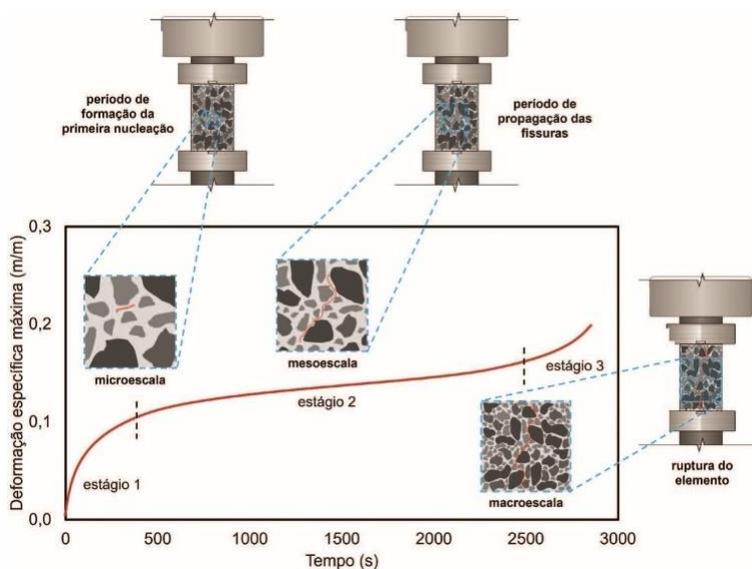


Figura 3.6. Crescimento de fissuras no concreto submetido à fadiga (Felix, 2022).

Para prever ou monitorar a durabilidade de um elemento de concreto sob fadiga, é imperativo compreender o comportamento mecânico do material quando exposto a ciclos de carga e descarga. As propriedades do concreto relacionadas à fadiga são determinadas através de ensaios laboratoriais rigorosos, cujos dados são frequentemente apresentados por meio de gráficos de tensão ou de deformação específica em função do número de ciclos até a falha, conhecidos como curvas S-N e ϵ -N, respectivamente (Mehta e Monteiro, 2008; Felix, 2022).

3.2. ZONA DE FRATURAMENTO

Conforme Lens (2009), a Zona de Processo de Fratura (ZPF) consome boa parte da energia derivada do carregamento aplicado na estrutura e a mesma é governada por mecanismos complexos. Dentre os mecanismos que envolvem a ZPF, temos: microfissuras, mudança de direção de propagação da fissura, costura das faces da fissura pela presença do agregado, rugosidade das superfícies da fissura, alargamento da ponta da fissura devido à presença de vazios e por último, ramificação da fissura. Os mecanismos citados podem ser observados na Figura 3.7.

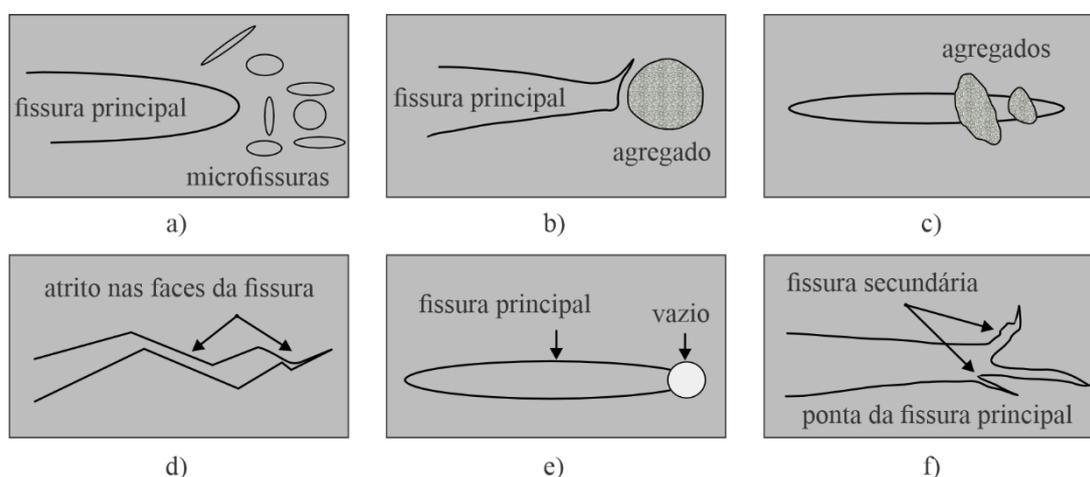


Figura 3.7: Mecanismos da Zona de Processo de Fratura (Adaptada de SHAH et al., 1995).

Essa Zona de Processo de Fratura encontra-se à frente da trinca e também é entendida como zona de dano, na qual compreende uma capacidade de transferência de tensão que propende a unir as faces da fratura (KUMAR E BARAI, 2011). Tal capacidade tende a diminuir à medida que as faces vão se distanciando, como pode ser visto na Figura 3.8.

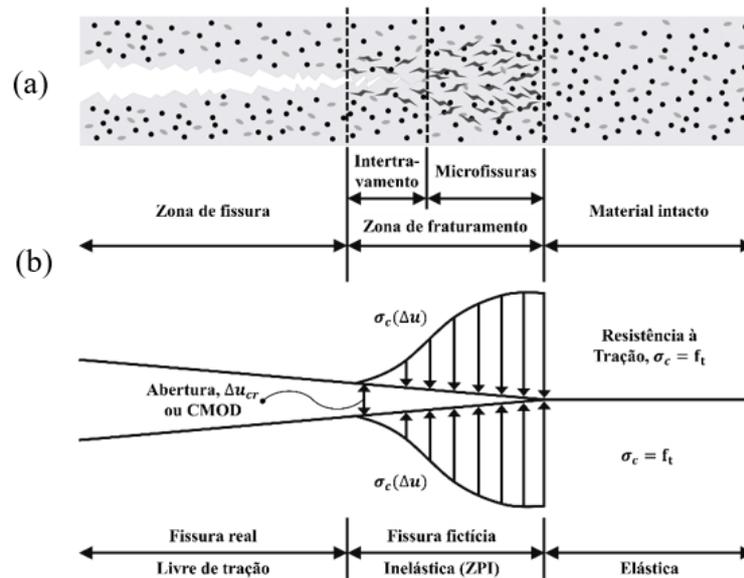


Figura 3.8: (a) Zona de Processo de Fratura em materiais quase frágeis e (b) Distribuição da tensão coesiva (Adaptado Durand e Silva, 2019 *apud* Moura, 2023).

A principal divergência entre os princípios da mecânica da fratura aplicados a diferentes tipos de materiais é observada na Figura 3.9.

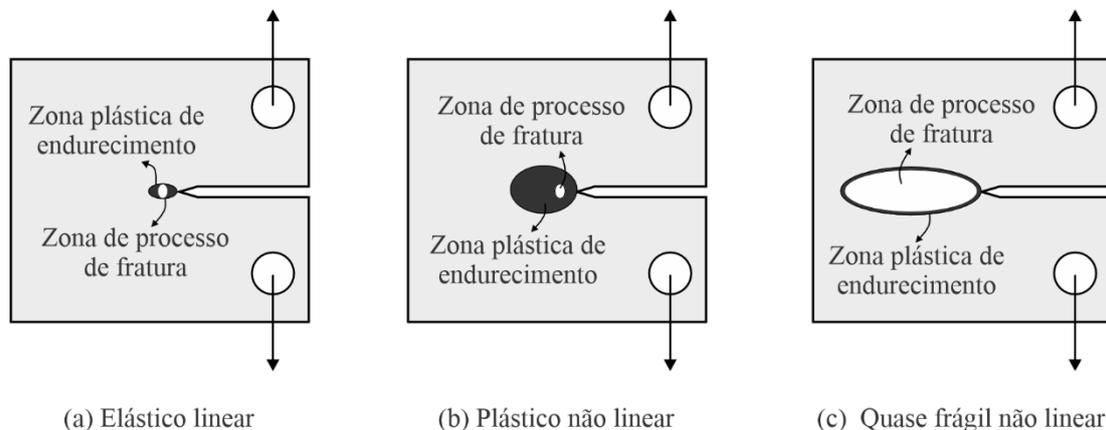


Figura 3.9: Tipos de zonas não lineares em diferentes tipos de materiais (Kumar e Barai, 2011 adaptado por Silva, 2019).

A região não linear à frente da ponta da trinca é constituída pela zona de processo de fratura e pela zona plástica de endurecimento. Como já retratado, a Mecânica da Fratura Elástico Linear aplica-se em materiais frágeis onde a região não linear é muito pequena. Enquanto que para materiais dúcteis o comportamento não linear é representado por uma grande zona de endurecimento plástico e uma pequena ZP. Já materiais quase-frágeis, como os cimentícios, possuem uma grande zona de

fratura e uma pequena zona de endurecimento plástico (SILVA, 2019 *apud* KUMAR E BARAI, 2011).

3.3. MODELO DE FRATURA COESIVA

O tratamento do fraturamento em materiais quase frágeis, como o concreto, pode ser representado por dois modelos numéricos: o modelo de dano e o modelo coesivo. O modelo de dano pressupõe que o material experimenta transformações em suas características mecânicas na região próxima à ponta da fratura, como a redução do módulo de elasticidade (Carpinteri, 1986). Já o modelo coesivo postula a transferência de forças entre as superfícies da fratura, derivadas do efeito mecânico de aderência e atrito entre partículas, efeito de ponte, na região de processamento (Yang e Chen, 2005). O modelo coesivo é o mais utilizado na análise de fraturas em materiais quase frágeis.

O fraturamento coesivo surgiu com o objetivo de representar o comportamento de fissuras que mostram uma região capaz de transmitir esforços entre suas faces, onde tais esforços reduzem gradualmente até ocorrer a anulação da transmissão de esforços entre as faces da trinca (Souza, 2001).

Conforme Figueiredo (2008), a região coesiva é o comprimento ao longo da fratura que existe transmissão de esforços. Nesta região há comportamentos não lineares como, por exemplo, o efeito ponte entre grãos e fibras. Vale salientar, que materiais quase frágeis possuem um comportamento de fraturamento coesivo. O grande salto no estudo de fraturas coesivas, se deu com o desenvolvimento de fissura fictícia (“Fictitious Crack Model”) realizado por Hillerborg et al. (1976), onde através de ensaios de tração uniaxial em corpos de prova de concreto, observou-se que após a carga máxima, surgia numa pequena região da fissura iniciais deformações.

Segundo Silva (2017) a técnica de fissuração fictícia prevê que a energia necessária para desenvolver novas superfícies é pequena se confrontado com a energia necessária para separá-las e, devido a isso, não se leva em consideração a parcela da taxa de liberação de energia crítica. Essa técnica é ilustrada na Figura 3.10, na qual as superfícies iniciais da fissuração e a zona de processo de fratura análoga são simuladas por meio de uma zona coesiva, que se encontra na região frontal da ponta da trinca. Como resultado, a dissipação da energia para a propagação da fissura pode ser completamente caracterizada pela relação tensão-deslocamento.

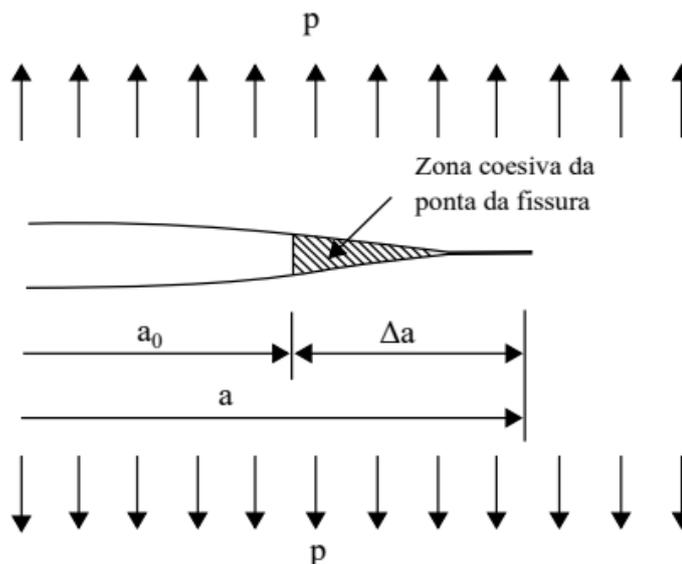


Figura 3.10: Modelo de fratura fictícia para um material quase frágil no modo I (Silva, 2017 adaptado de Bazanta e Planas, 1998).

Na Figura 3.10, “a” representa o comprimento da fenda, “p” a carga aplicada, Δa é a zona coesiva localizada na parte da frente da ponta da fenda inicial e a_0 é a região livre de tração.

3.4. MODELOS DE TRINCA FICTÍCIA

Dugdale (1960) e Barenblatt (1962), no início da década de 60, desenvolveram um modelo de fratura fundamentado no conceito de fissura fictícia. Esse modelo ficou conhecido como "Strip Yield Model", onde procurava simplificar a compreensão da zona de processos, uma pequena região onde fenômenos inelásticos ocorrem na ponta da fissura. O modelo foi inicialmente desenvolvido para simular o comportamento de fraturas em chapas delgadas de materiais dúcteis, mas foi posteriormente aplicado com sucesso a outros materiais, como polímeros, cerâmicas, metais e geomateriais. Estudos experimentais demonstraram que o raio da zona plastificada em torno da fissura é aproximadamente igual à espessura da chapa (Souza, 2001).

Posteriormente, no final da década de 70, Hillerborg et al. (1976) criaram o modelo de fissura coesiva chamado "Modelo de Fissura Fictícia" (onde há transmissão de esforços entre as superfícies da fissura, com uma diminuição gradual dessa transmissão até que não haja mais transferência de carga entre as faces) por meio de experimentos de tração uniaxial em corpos de prova de concreto.

A região coesiva da fissura é a porção ao longo da qual ainda há transferência de forças entre suas superfícies. Nessa região, manifestam-se fenômenos associados ao comportamento não linear, como o intertravamento de partículas, o efeito de ponte entre agregados e a presença de fibras, elementos característicos do fraturamento coesivo. Esse tipo de processo de fissura é observado em materiais quase-frágeis como concreto, rochas, cerâmicas e compósitos reforçados com fibras, entre outros (Bittencourt et al., 1992).

Nas análises, as interfaces onde não há disjunção de deslocamento são conhecidas como Interfaces Elásticas (IE). Em contraste, as áreas em que o comportamento das tensões normais segue a lei coesiva são chamadas de Zonas Coesivas (ZC), também conhecidas como fissura fictícia. Por fim, as interfaces sem tensões, onde há uma separação real, são referidas como Interfaces Livres (IL) ou fissura verdadeira (vide Figura 3.11) (Cordeiro, 2015).

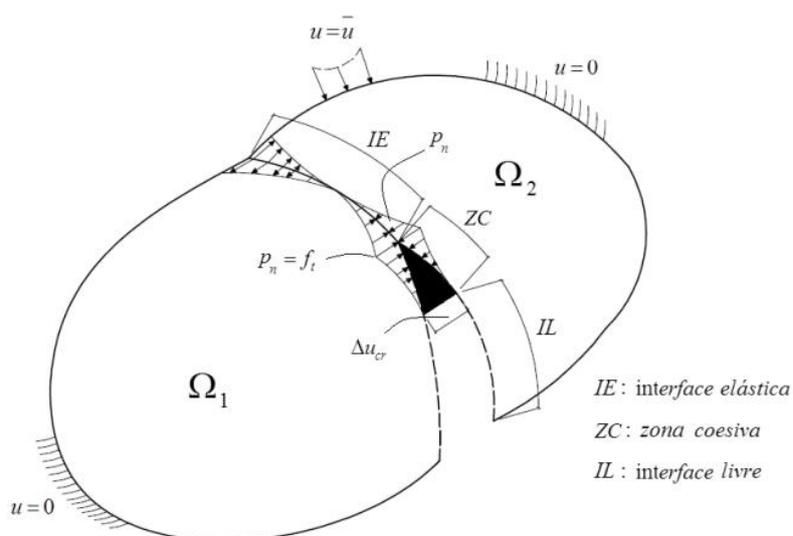


Figura 3.11. Classificação da interface em relação ao comportamento mecânico (Cordeiro, 2015).

Com isso, o modelo de fissura fictícia é um sistema capaz de explicar a dissipação de energia em materiais quase frágeis durante o processo de fraturamento. Neste modelo, parte-se do princípio de que existe uma zona de processo de fratura que é encarregada de transmitir tensões até que a abertura da fissura atinja um nível crítico. Uma outra premissa é que a região do concreto que não está fissurada apresenta

comportamento elástico, o que significa que não há dissipação de energia nesta área que permanece intacta (Assis, 2023).

3.5. MODELOS DE CURVAS DE ABRANDAMENTO

Como entendido nos tópicos anteriores, na zona de fratura, a tensão decresce gradativamente com o aumento da descontinuidade. Tal efeito é conhecido como *strain-softening* ou abrandamento do material, onde a representação apropriada deste efeito irá proporcionar resultados confiáveis na determinação da propagação da trinca (SHZU, 2006).

Ainda de acordo com SHZU (2006), foram desenvolvidos diversos modelos de curvas *strain-softening* para simular o comportamento da fratura e para o caso do concreto há, basicamente, três curvas: as curvas lineares, bi-lineares e as exponenciais ou quase-exponenciais (esta última não será objeto deste trabalho). A representação dessas curvas pode ser vista na Figura 3.12.

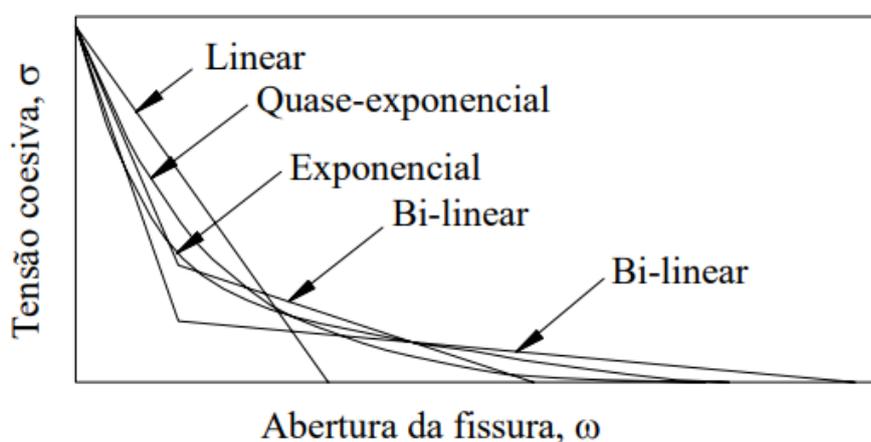


Figura 3.12: Curvas strain-softening para o concreto (Gálvez et al., 2002 adaptada por SHZU, 2006).

3.5.1. Modelo linear

Segundo Bueno et al. (2000), o modelo de suavização linear apresenta uma função linear na qual representa a relação entre tensão e abertura do elemento de interface (Figura 3.13).

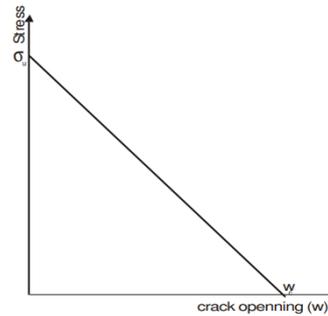


Figura 3.13: Representação do modelo linear (Bueno et al., 2000).

O modelo apresentado a seguir foi desenvolvido por Peterson em 1981, onde o mesmo retrata que o modelo constitutivo linear no trecho pós-pico da curva é a forma mais simplificada da representação do abrandamento do material. A forma é dada em função da abertura de fissura, conforme a expressão:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} f_t \left(1 - \frac{\omega}{\omega_f}\right) & \text{se } 0 \leq \omega \leq \omega_f \\ 0 & \text{se } \omega > \omega_f \end{cases} \quad (3.1)$$

onde,

$$\omega_f = \frac{2 \cdot G_f}{f_t} \quad (3.2)$$

Tem-se que:

ω : abertura de trinca

ω_f : abertura de trinca crítica

G_f : energia de fratura

f_t : tensão resistente

Para o concreto ordinário, $\frac{G_f}{f_t}$ é da ordem de 0,005 e 0,01mm.

Consequentemente, ω_f está na ordem de 0,01 e 0,002mm (Hillerborg et al, 1976).

3.5.2. Modelo bi-linear

SHUZ (2006) retrata que nesta aproximação, o efeito strain-softening é modelado por uma curva bi-linear que possui uma declividade negativa, conforme Figura 3.14. Bueno et al. (2000), diz que a relação entre a tensão e abertura do elemento na interface é caracterizada por uma função bi-linear.

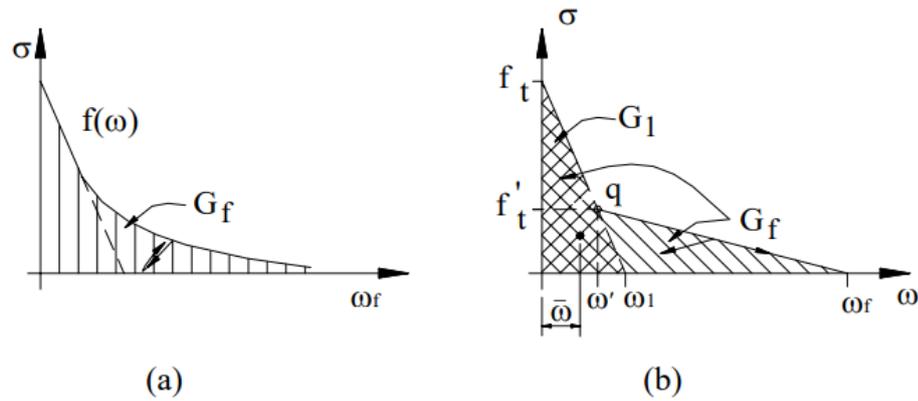


Figura 3.14: Relação tensão-deslocamento para materiais quase-frágeis, modelo de Hilleborg. (a) Modelo real aproximado e (b) modelo bi-linear (SHZU, 2006 apud Petersson, 1981).

A curva determinada por Petersson (1981) para o modelo bi-linear é expressa na equação:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} f_t(1 - \omega/\omega_1) & \text{se } 0 \leq \omega \leq \omega' \\ f'_t(1 - \omega/\omega_f) & \text{se } \omega' \leq \omega \leq \omega_f \\ 0 & \text{se } \omega > \omega_f \end{cases} \quad (3.3)$$

Tem-se que:

ω : abertura de trinca;

ω' : abertura da trinca no ponto q que é estimado em $\frac{2}{9}\omega_f$ (Petersson, 1981);

ω_f : abertura de trinca crítica;

G_f : energia de fratura total dissipada pela fratura por unidade de área;

G_1 : energia que corresponde a área sob o primeiro segmento até o eixo ω .

f_t : tensão resistente;

Na Figura 3.14, podemos observar também a abscissa do centróide correspondente à área sob a curva *strain-softening*, $\bar{\omega}$, e a medida onde a primeira declividade intercepta o eixo horizontal do gráfico, ω_1 . Já f'_t e ω' são as coordenadas do ponto onde a declividade da curva bi-linear muda.

3.5.3. Modelo exponencial

Segundo SZHU (2006), no modelo não linear o amolecimento é descrito como uma curva exponencial ou quase-exponencial, onde sua resistência decresce em relação à abertura de fissura (Figura 3.15).

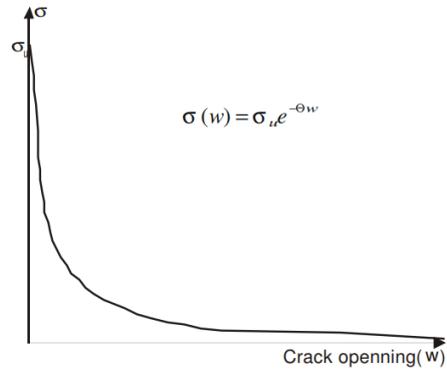


Figura 3.15: Representação do modelo exponencial (Bueno et al., 2000).

Há diversas propostas de modelos não lineares encontradas na literatura e uma delas é a formulação desenvolvida por Bueno (1999), conforme equação apresentada a seguir, e pode ser observada também na Figura 26.

$$\sigma(\omega) = \sigma_u e^{-\theta \omega} \quad (3.4)$$

onde θ é a relação entre a tensão máxima e a energia de fratura, $\theta = f_t/G_f$.

4. FORMULAÇÃO MECD PARA TRINCAS

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) ganhou relevância nas últimas décadas como um instrumento eficaz para a análise de problemas relacionados à elasticidade, especialmente no campo da mecânica da fratura. Ingraffea et al. (1983), Becker (1986) e Bush (1999), entre outros, foram pioneiros na aplicação da equação integral de contorno para deslocamentos, uma equação fundamental do MEC, que se baseia na Identidade de Somigliana para calcular deslocamentos.

O MEC tem como um de seus fundamentos a avaliação de equações integrais nos pontos de contorno, utilizando elementos estabelecidos apenas no limite do domínio. Contudo, esse procedimento pode se complicar com a presença de integrais de domínio. Para contornar esse desafio, tem-se dado especial atenção à conversão das integrais de domínio para integrais de contorno, o que evita a necessidade de uma segunda discretização (Gomes, 2006).

Para resolver problemas envolvendo fissuras, a abordagem convencional do Método dos Elementos de Contorno (MEC) não é suficiente, pois as superfícies das fissuras são coincidentes, o que resultaria em um sistema de equações algébricas singular. Nesses casos, as pesquisas de Blandford et al. (1981) e Portela et al. (1992) são referências notáveis.

Blandford et al. (1981), utilizam do método das sub-regiões, no qual um contorno artificial é traçado para conectar-se ao contorno da fissura, dividindo o domínio em duas sub-regiões distintas, cada uma sem fissuras. Já o estudo de Portela et al. (1992) utilizam tanto a equação integral de contorno para deslocamento (que é a base do MEC) quanto a equação de tração, também conhecida como equação hipersingular, para modelar o contorno da fissura, aplicando cada uma de forma independente em cada lado da fissura.

4.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO CONVENCIONAL

De acordo com Brebbia e Dominguez (1992), o Método dos Elementos de Contorno é um método no qual usa-se integrais de contorno derivadas das equações diferenciais que governam o problema e o mesmo discretiza o problema apenas no contorno reduzindo a ordem de dimensão do estudo, o que é considerado uma das grandes vantagens do MEC.

O método permite analisar um problema diminuindo sua dimensão em um, isto é, se o problema for bidimensional, apenas o contorno (unidimensional) precisa ser discretizado; se o problema for tridimensional, somente a superfície do contorno necessita ser analisada (PEREIRA, 2018).

De acordo com Oliveira (2019), a aplicação do MEC inicia-se com a discretização do contorno do objeto em segmentos conhecidos por elementos. Quando há apenas um nó no elemento, o mesmo é chamado de constante e suas incógnitas também são constantes. Os elementos que possuem dois nós localizados nas extremidades, ditos como elementos lineares, têm suas incógnitas variando linearmente. E para discretização de modelos curvos usam-se elementos quadráticos que possuem três nós e suas incógnitas variam de acordo com uma função de segundo grau ou quadrática. Na Figura 4.1 observa-se a representação desses elementos de contorno.

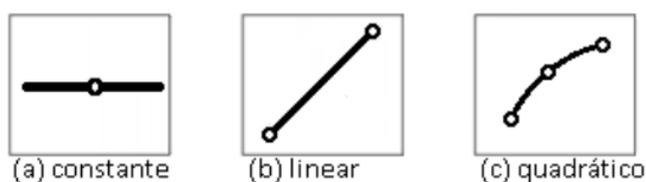


Figura 4.1. Tipos de elementos de contorno (Delgado Neto, 2017).

A formulação do MEC para a elastostática pode ser oriunda do teorema do trabalho recíproco de Betti, do princípio do Trabalho Virtual, do Método dos Resíduos Ponderados ou da terceira identidade de Green.

Conforme Delgado Neto (2017), seguindo o trabalho recíproco de Betti, para dois estados autoequilibrados e representados por (u_i, t_i, b_i) e (u_i^*, t_i^*, b_i^*) , onde u_i e u_i^* são deslocamentos, t_i e t_i^* são forças de superfícies e, por fim, b_i e b_i^* são forças de corpo, como pode ser visto na Figura 4.2.

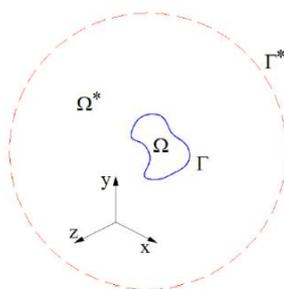


Figura 4.2: Região arbitrária composta de dois estados autoequilibrados (Scuciato, 2007).

em que Ω denota o domínio e Γ o contorno do problema.

Para isso, temos as equações de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{onde } i, j = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

Com isso, obtém-se a relação

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

onde Γ e Ω são, respectivamente, o contorno e o domínio do problema. Tem-se que b_i e b_i^* , t_i e t_i^* , u_i e u_i^* , $\sigma_{ij,j}$ são as forças de corpo e de superfície, os deslocamentos e as tensões estão em função de $X \equiv (x, y)$ e $X \equiv (x, y, z)$ para corpos bi e tridimensionais ($X \in \Omega$), respectivamente. O procedimento descrito é uma ponderação da equação diferencial governante e assumindo as considerações necessárias, a expressão do Teorema do Trabalho Recíproco de Betti é:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (4.3)$$

Vale salientar que o MEC convencional não pode ser usado diretamente em problemas de trinca devido a uma inconsistência no sistema algébrico que provocava uma singularidade. Para solucionar essa singularidade, Portela, Aliabadi e Rooke (1992) desenvolveram o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD). O MECD transforma as equações integrais de contorno em um sistema de equações algébricas lineares, por meio da colocação nodal e integração ao longo dos elementos de contorno. Dessa forma, as trações e os deslocamentos desconhecidos do contorno são obtidos pelas resoluções do sistema de equações e imposição das equações de contorno.

4.2. FORMULAÇÃO DO MEC DUAL (MECD)

O Método dos Elementos de Contorno é uma técnica numérica amplamente reconhecida para resolver problemas de engenharia, apresentando resultados confiáveis para problemas linear-elásticos em domínios contínuos. No entanto, a presença de fissuras matemáticas, que são trincas sem área ou volume, mas que exibem campos de deslocamento descontínuos complica a situação. Quando essas fissuras são simétricas,

apenas um lado da fissura pode ser modelado, o que limita a análise a uma abordagem de região única com o MEC (Rodrigues e Gomes, 2018).

Com isso, para resoluções envolvendo problemas com trincas, não dá para utilizar o Método dos Elementos de Contorno padrão, já que as superfícies da trinca são coincidentes, o que levaria a um sistema de equações algébricas singular. Na Figura 4.3, pode-se observar um exemplo de singularidade no sistema.

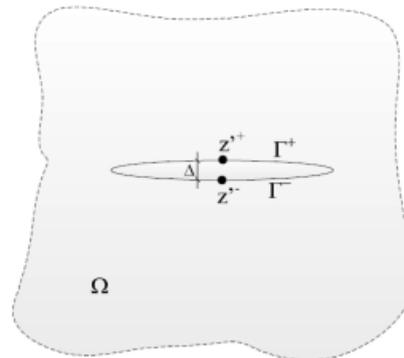


Figura 4.3: Exemplo de singularidade (Rodrigues, 2018 apud Fernández, 2012).

Na Figura 4.3 tem-se a representação de um sólido com uma fissura na região central, em que Γ^+ representa a face superior e Γ^- a face inferior da fissura. Quando Δ tende a zero, os pontos z^+ e z^- irão se aproximar até se situarem em uma mesma coordenada, gerando equações idênticas.

Para isso, Blandford et al. (1981) e Portela et al. (1992) estão entre os principais pesquisadores que desenvolveram estudos sobre os problemas com trincas e solucionaram a singularidade existente no sistema. Portela et al. (1992), desenvolveu o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) que se baseia em equações integrais de contorno para deslocamentos, u_i , e para trações, t_i . Na ausência de forças de volume, a primeira equação é dada por:

$$u_i(X') + \int_{\Gamma} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.4)$$

onde i, j e k são a representação das coordenadas cartesianas; U_{ij} e T_{ij} são as respectivas soluções fundamentais de Kelvin para deslocamento e tração sobre um ponto x locado sob o contorno; r é a distância entre os pontos X' e x .

Para isso, as integrais presentes na equação acima permanecem regulares

somente enquanto $r \neq 0$. Para casos em que a distância entre os pontos tende à zero ($X' \rightarrow x'$), o valor de r também tende à zero ($r \rightarrow 0$), decorrendo em uma singularidade na solução. Considerando a continuidade dos deslocamentos sobre o ponto x' , para um dado ponto que faz parte do contorno, temos:

$$C_{ij}(x')u_j(x') + CPV \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.5)$$

onde $C_{ij}(x')$ é um coeficiente dado por uma relação do Delta de Kronecker, $\delta_{ij}/2$, para um contorno suave sobre o ponto x' ; e $CPV \int_{\Gamma}$ representa a integral de valor principal de Cauchy. Sem forças de superfície atuando, é possível derivar as componentes de tensão, σ_{ij} , e depois aplicar a lei de Hooke para os cálculos subsequentes:

$$\sigma_{ij}(X') + \int_{\Gamma} S_{ijk}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(X', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (4.6)$$

Os termos $S_{ijk}(X', x)$ e $D_{ijk}(X', x)$, gerados na equação acima, são respectivas combinações lineares dos termos $T_{ij}(x', x)$ e $U_{ij}(x', x)$. Adotando a mesma linha de pensamento da primeira equação apresentada, a expressão acima permanece regular somente enquanto $r \neq 0$, expressando singularidades, agora em $S_{ijk}(X', x)$ e $D_{ijk}(X', x)$, para casos em que a distância entre os pontos tende à zero ($X' \rightarrow x'$) e o valor de r também tende à zero ($r \rightarrow 0$). Dessa vez, assumindo a continuidade da deformação e da tração sobre o ponto x' , para um dado ponto pertencente ao contorno, tem-se que:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(x') + HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = CPV \int_{\Gamma} D_{ijk}(X', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (4.7)$$

Na expressão apresentada acima, o termo $HPV \int_{\Gamma}$ é a integral de valor principal de Handamard. Com isso, de maneira semelhante, obtém-se as componentes de tensão:

$$\frac{1}{2}t_{ij}(x') + n_{ij}(x') HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = n_{ij}(x') \int_{\Gamma} D_{ijk}(X', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (4.8)$$

Com $n_{ij}(x')$ representando o i -ésimo componente da unidade normal externa ao limite, no ponto x' . Para as equações que representam o MECD, em uma trinca livre de trações, pode-se simplificar para as seguintes expressões:

$$c_{ij}(x')u_j(x') + CPV \int_{\Gamma_c} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (4.9)$$

$$n_i(x')HPV \int_{\Gamma_c} S_{ijk}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (4.10)$$

Com isso, Γ_c caracteriza o contorno de uma trinca. Tanto as integrais de valor principal de Cauchy quanto as de Hadamard são segmentos finitos de integrais impróprias.

De acordo com Scuciato (2007), a geometria do contorno é dividida em Ne elementos retos, e os valores das incógnitas e as condições de contorno $u_j(x)$ e $t_j(x)$ são reforçados como constantes ao longo do comprimento de cada elemento, sendo iguais aos valores dessas incógnitas nos pontos centrais dos elementos, conhecidos como pontos nodais ou nós funcionais. Com isso, pode-se reescrever a equação 4.5. como

$$C_{ij}^c u_j^c + \sum_{n=1}^{Ne} u_j^n \int_{\Gamma_n} T_{ij}^c d\Gamma_n = \sum_{n=1}^{Ne} t_j^n \int_{\Gamma_n} U_{ij}^c d\Gamma_n \quad (4.11)$$

onde u_j^n e t_j^n são os valores dos deslocamentos e forças de superfície nos pontos centrais dos elementos de contorno; u_j^c , $C_{ij}^c u_j^c$, T_{ij}^c e U_{ij}^c são os valores dos deslocamentos, termos livres e soluções fundamentais para o ponto fonte $x' = x^c$.

Aplica-se a equação 4.11 a cada ponto fonte (nó) e, em forma matricial, temos a seguinte notação:

$$C^n = \begin{bmatrix} C_{11}^n & C_{12}^n \\ C_{21}^n & C_{22}^n \end{bmatrix} \quad u^n = \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \quad t^n = \begin{Bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \quad U^n = \begin{bmatrix} U_{11}^n & U_{12}^n \\ U_{21}^n & U_{22}^n \end{bmatrix} \quad T^n = \begin{bmatrix} T_{11}^n & T_{12}^n \\ T_{21}^n & T_{22}^n \end{bmatrix}$$

onde n é o nó analisado (ponto fonte). Com isso, as mesmas podem ser reescritas como

$$C^c u^c + \sum_{n=1}^{Ne=n} \int_{\Gamma_n} T^c d\Gamma_n u^n = \sum_{n=1}^{Ne=n} \int_{\Gamma_n} U^c d\Gamma_n t^n \quad c = 1, 2, \dots, Ne = n \quad (4.12)$$

Denotando as integrais das soluções fundamentais por

$$\bar{H}^{cn} = \int_{\Gamma_n} T^c d\Gamma_n \quad G^{cn} = \int_{\Gamma_n} U^c d\Gamma_n \quad (4.13)$$

tem-se que

$$C^c u^c + \sum_{n=1}^{Ne=n} \bar{H}^{cn} u^n = \sum_{n=1}^{Ne=n} G^{cn} t^n \quad c = 1, 2, \dots, Ne = n \quad (4.14)$$

Definindo

$$\begin{cases} H^{cn} = \bar{H}^{cn} & \text{quando } c \neq n \\ H^{cn} = \bar{H}^{cn} + C^c & \text{quando } c = n \end{cases} \quad (4.15)$$

resulta em

$$\sum_{n=1}^{Ne=n} \bar{H}^{cn} u^n = \sum_{n=1}^{Ne=n} G^{cn} t^n \quad c = 1, 2, \dots, Ne = n \quad (4.16)$$

A equação anterior, reescrita em forma matricial, produz o sistema algébrico a seguir.

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (4.17)$$

onde, quando reordenado através da aplicação das condições de contorno prescritas para o problema, produz o sistema algébrico final

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{F} \quad (4.18)$$

onde o vetor \mathbf{Y} contém todas as incógnitas (deslocamentos ou forças de superfície) do problema; a matriz de coeficientes \mathbf{A} é formada de colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} ; o vetor \mathbf{F} é formado de colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} multiplicadas pelas condições de contorno prescritas.

4.2.1. Equações Duais para os termos Coesivos

Como visto na seção anterior, as equações duais, nas quais o MECD se baseia, são as equações integrais de contorno de deslocamento e tração. Assim, considerando as parcelas de deslocamentos e forças coesivas em uma das superfícies da trinca Γ_{tr} , respectivamente u^{tr} e t^{tr} , a Equação 4.5 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma-\Gamma_{tr}} T_{ij}(x', x)u_{ij}(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_{tr}} T_{ij}(x', x)u_j^{tr}(x)d\Gamma_{tr}(x) \\
- \int_{\Gamma_{tr}} U_{ij}(x', x)t_j^{tr}(x)d\Gamma_{tr}(x) = \int_{\Gamma-\Gamma_{tr}} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde os termos da equação já foram descritos na seção anterior.

A representação integral de contorno das componentes de tração, t_j podem ser obtidas, conforme explicado na seção anterior pelas Equações 4.7 e 4.8 e para um ponto sobre um contorno suave, como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}t_j(x') + n_i(x') \int_{\Gamma-\Gamma_{tr}} S_{kij}(x', x)u_k(x)d\Gamma(x) + n_i(x') \int_{\Gamma_{tr}} S_{kij}(x', x)u_k^{tr}(x)d\Gamma_{tr}(x) - \\
n_i(x') \int_{\Gamma_{tr}} D_{kij}(x', x)t_k^{tr}(x)d\Gamma_{tr}(x) = n_i(x') \int_{\Gamma-\Gamma_{tr}} D_{kij}(x', x)t_k(x)d\Gamma(x)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

As funções $u_k^{tr}(x)$ e $t_k^{tr}(x)$ são os deslocamentos e forças coesivas, respectivamente em cada lado da trinca, Γ_{tr} . No caso de trincas livre de tração temos que $t_j^{tr} = t_k^{tr} = 0$. Assim, a partir das equações duais, podemos expressar na forma matricial como,

$$[A \ [H_{tr}] \ [G_{tr}]] \begin{Bmatrix} X \\ \{u_{tr}\} \\ \{t_{tr}\} \end{Bmatrix} = \{F\} \tag{4.21}$$

em que A = coeficiente correspondente ao vetor X contendo incógnitas u e t ; e $\{F\}$ contém os valores conhecidos de u e t nos nós de contorno diferentes do contorno da trinca. Enquanto os arranjos $[H_{tr}]$ e $[G_{tr}]$ são constituídos de coeficientes correspondentes aos nós sobre o contorno da trinca.

4.2.2. Estratégia de modelagem

Portela et. al (1992), destaca que uma abordagem específica deve ser adotada na região em torno da trinca, quando a obtenção das Equações Integrais de Contorno (EIC) duais indica a existência das condições essenciais para os valores principais de Cauchy e Hadamard, os quais se equiparam a integrais finitas de primeira e segunda ordem, respectivamente.

Para a integral de primeira ordem em partes finitas, na qual é caracterizada por $CPV \int_{\Gamma}$ na Equação 4.5, onde os resultados demonstram sua eficácia quando se contempla uma discretização, seja ela contínua ou descontínua, dos elementos de contorno no ponto de colocação. Contudo, é importante notar que a integral de segunda ordem, de natureza finita e representada por $HPV \int_{\Gamma}$ na Equação 4.8, demanda uma suavização que somente os elementos quadráticos descontínuos podem prover. Dessa forma, a opção mais eficaz para a discretização reside na adoção de elementos quadráticos descontínuos para a modelagem da trinca (vide Figura 4.4).

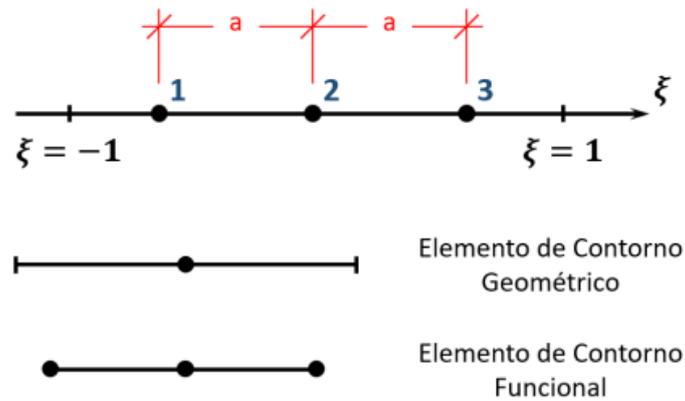


Figura 4.4. Elementos de contorno contínuo/descontínuo (Delgado Neto, 2023).

No contexto do programa BemCracker2D, são elaboradas duas malhas que abrangem inteiramente o contorno, bem como as faces das trincas, sendo caracterizadas como a malha geométrica e a malha funcional. A geométrica é composta por nós geométricos situados estritamente no perímetro dos elementos. Já a malha funcional é definida pelos nós funcionais posicionados nos elementos que compõem as faces da trinca, assim como nos elementos adjacentes à abertura da trinca (Delgado Neto, 2023).

De acordo com Portela, Aliabadi e Rooke (1992), nos elementos descontínuos, o primeiro e o último nó do elemento funcional estão situados equidistantemente em relação ao nó original da malha geométrica. As funções de forma/interpolação para este grupo de elementos são apresentadas a seguir:

$$\phi_1 = \xi \left(-\frac{1}{2a} + \xi \frac{1}{2a^2} \right), \quad \phi_2 = 1 - \xi^2 \frac{1}{a^2}, \quad \phi_3 = \xi \left(\frac{1}{2a} + \xi \frac{1}{2a^2} \right) \quad (4.22)$$

onde “ a ” é a distância entre os nós do elemento nas funções de forma, “ ξ ” variável inteira podendo assumir o valor (-1,0,1).

Com isso, a abordagem geral de modelagem desenvolvida neste estudo pode ser dita da seguinte maneira:

- O contorno é segmentado por elementos quadráticos contínuos, com exceção dos elementos adjacentes à falha e os elementos nas imediações da extremidade da trinca de borda, os quais são quadráticos e apresentam descontinuidades ou semidescontinuidades, como apresentado na Figura 4.5;
- A EIC de deslocamento apresentada na Equação 4.5, é aplicada para a colocação em uma das faces da trinca;
- A EIC de tração apresentada na Equação 4.8, é aplicada para colocação na face oposta da trinca.

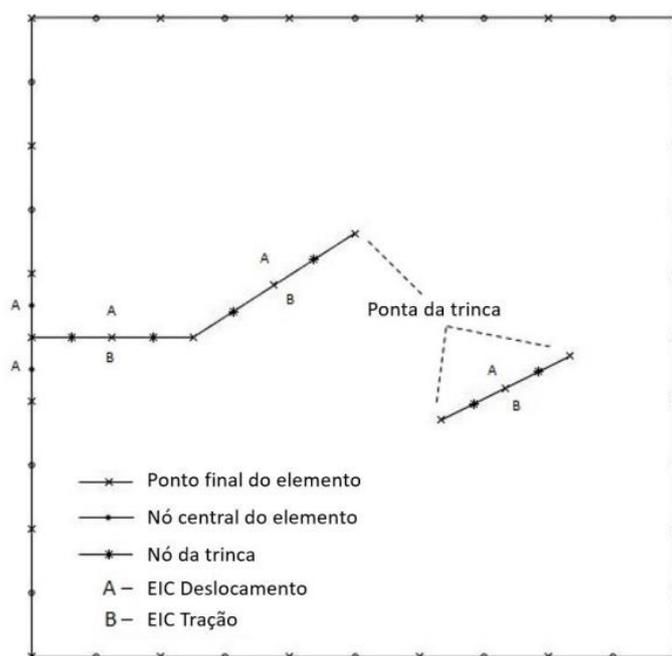


Figura 4.5. Modelagem dos elementos de trinca (Gomes, Delgado Neto e Wrobel, 2016).

A Equação 4.5, que representa a equação de deslocamento, é empregada na colocação em uma das faces da trinca e no restante do contorno. Por outro lado, a Equação 4.8, refere-se à equação de tração e é aplicada à outra face da trinca.

4.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA TRINCA FICTÍCIA

As forças coesivas nas superfícies fictícias da fissura, ou seja, na zona de fratura, podem ser derivadas pela relação entre tração e abertura da fissura no sistema de coordenadas local (n, t). A lei constitutiva de amolecimento linear pode ser escrita como

$$t_n^{tr} = ft \left(1 - \frac{\Delta u_n^{tr}}{\Delta u_c^{tr}} \right), \quad t_{nt}^{tr} = 0 \quad (4.23)$$

onde $\Delta u_n^{tr} = u_n^b - u_n^a$ é uma descontinuidade de deslocamento normal à fissura, em que u_n^a é o deslocamento em uma das superfícies da fissura e u_n^b é o deslocamento na superfície oposta da fissura. Δu_c^{tr} e ft são os parâmetros do material. Na interface da zona de fratura, para manter o equilíbrio, as seguintes condições são impostas

$$u_n^a = u_n^b; \quad t_n^a = -t_n^b; \quad t_t^a = -t_t^b \quad (4.24)$$

A combinação das equações integrais de contorno e a condição de contorno da trinca fictícia, pode ser expressa na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} A & [H_{tr}] & [G_{tr}] \\ 0 & [C_{tr}] & [D_{tr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \{u_{tr}\} \\ \{t_{tr}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ \{S_{tr}\} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

onde $[C_{tr}]$ e $[D_{tr}]$ são arranjos que contém as condições de contorno para trinca fictícia correspondente aos vetores $\{u_{tr}\}$ e $\{t_{tr}\}$, respectivamente e, o vetor $\{S_{tr}\}$ contém os parâmetros do material. Para todos os casos, o subscrito tr representa o contorno da trinca fictícia.

Para a relação linear tensão x deformação, ou σ x Δu_n^{tr} , as matrizes $[C_{tr}]$ e $[D_{tr}]$ contém submatrizes de ordem 4, dadas por

$$[C_{tr}] = \begin{bmatrix} -\frac{ft}{\Delta u_c^{tr}} & 0 & \frac{ft}{\Delta u_c^{tr}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$[D_{tr}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

E vetores $\{u_{tr}\}$, $\{t_{tr}\}$ e $\{S_{tr}\}$ dados por,

$$\{u_{tr}\} = [N] \begin{Bmatrix} u_x^a \\ u_y^a \\ u_x^b \\ u_y^b \end{Bmatrix}; \quad \{t_{tr}\} = [N] \begin{Bmatrix} t_x^a \\ t_y^a \\ t_x^b \\ t_y^b \end{Bmatrix}; \quad \{S_{tr}\} = \begin{Bmatrix} ft \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

onde $[N]$ é a matriz de transformação do sistema global para o sistema de referência local, variando nó a nó sobre as superfícies da trinca (Saleh e Aliabadi, 1998).

Os contornos da trinca são modelados com elementos quadráticos descontínuos, conforme descrito na seção anterior (ver Figura 4.5). Isso se deve à eficiência e para manter a simplicidade dos elementos de contorno padrão. Elementos quadráticos contínuos são usados ao longo dos contornos restantes do corpo, exceto na interseção entre uma fissura e uma aresta, onde elementos descontínuos são necessários na aresta para evitar um nó comum na interseção.

5. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Este capítulo aborda a definição do problema e o algoritmo a ser implementado para fins de cumprimento dos objetos descritos anteriormente. Trata-se inicialmente de simular a fratura do concreto usando o modelo de trinca fictícia, onde a zona de fratura é substituída por forças coesivas que atuam em ambas as superfícies da trinca. O método dos elementos de contorno dual é usado para simular a trinca, sendo que o caminho de propagação é calculado durante o processo de iteração e não requer qualquer remalhamento.

5.1. METODOLOGIA

O objetivo principal deste trabalho é encontrar o estado crítico da estrutura usando o modelo de trinca coesiva, o que significa encontrar os valores de carga para os quais o estado da trinca é crítico, isto é, a trinca está no seu estado de propagação não definido. Para um problema com geometria e condições de contorno específicas, o problema se resume a encontrar valores de carga e comprimento coesivo para os quais o critério de propagação da trinca será atendido.

Neste contexto, será desenvolvido um algoritmo baseado no modelo de trinca fictícia e aplicado a problemas de modo I puro, onde a direção de propagação da trinca é conhecida, a priori, e a trinca é linear. Basicamente, a trinca fictícia é adicionada na malha de elementos de contorno e é permitido que ela se abra em conformidade com a carga aplicada, simulando assim o processo de propagação de trincas reais. Aqui, serão abordadas apenas as forças normais na face da trinca e, portanto, o deslocamento de abertura normal em Modo I, não sendo objeto de estudo as de cisalhamento ou Modo II.

Durante a análise, são consideradas as interações entre os elementos de contorno adjacentes à trinca fictícia, incluindo a distribuição de tensões ao redor da ponta da trinca e o comportamento da fratura do material. A modelagem, geração de malha em elementos de contorno e visualização de resultados (deformada e caminho de propagação) serão realizadas pelo BEMLAB2D GUI e, a análise incremental de carga, bem como a interação com o algoritmo de trinca fictícia, serão implementadas junto ao programa BemCracker2D.

Resumidamente, a metodologia adotada consiste no desenvolvimento das etapas apresentadas na Figura 5.1.

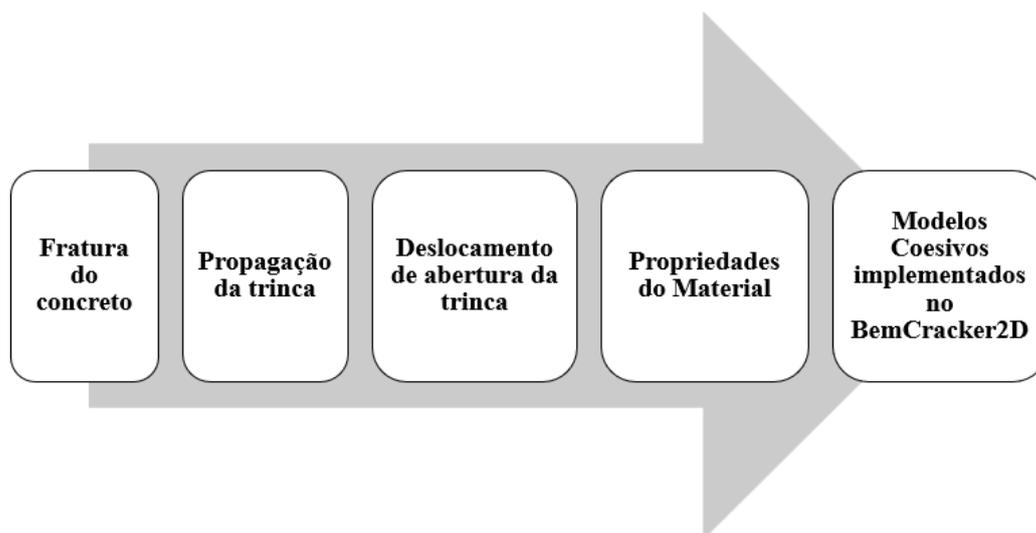


Figura 5.1. Metodologia Adotada.

A descrição das etapas a serem seguidas, pode ser observada a seguir:

- 1) Fratura do concreto: simulada pelo modelo de trinca fictícia, no qual a zona de fratura é substituída por forças coesivas que atuam em ambas as superfícies da trinca;
- 2) Propagação da trinca: quando a tensão na ponta da trinca fictícia excede a tensão máxima do concreto (tensão de resistência), a trinca propagará perpendicular à tensão principal máxima;
- 3) Deslocamento de abertura da trinca (COD): a trinca fictícia se torna uma trinca aberta, isto é, livre de tração, quando o COD é maior do que o COD crítico;
- 4) Propriedades do material: energia de fratura, resistência do concreto, modelos coesivos, entre outros, serão adaptados junto ao BEMLAB2D;
- 5) Modelos coesivos e os principais métodos serão implementados no programa BemCracker2D.

5.2. INTERAÇÃO COM OS PROGRAMAS

O esquema apresentado na Figura 5.1 ilustra a proposta de implementação nos respectivos programas.

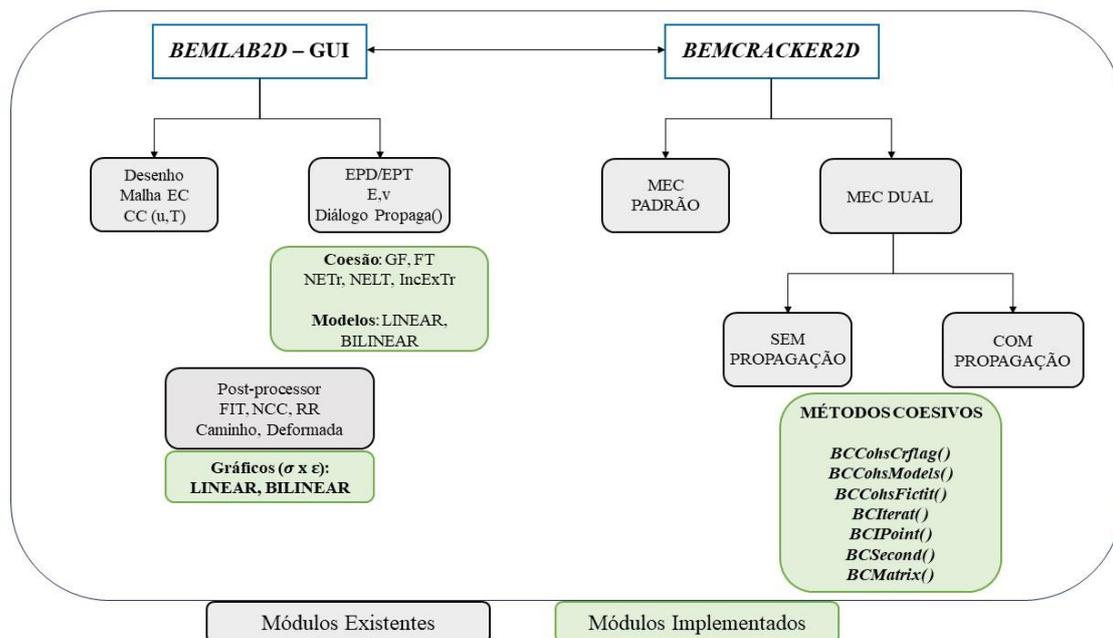


Figura 5.2: Esquema de implementação proposta.

Principais Métodos implementados e suas funcionalidades:

- *BCCohsCrflag()* – Método para ativação de identificação do tipo de trinca: se FICTÍCIA ou, se LIVRE DE TRAÇÃO;
- *BCCohsFictit()* – Método para atualização da matriz [A] do sistema de equações lineares. Forma a matriz [GW] para as condições de trinca fictícia.
- *Métodos do Processo Iterativo:*
 - *BCIterat()* – Método incremental para avaliar a carga final, tendo como parâmetro condicional o fato de que a tração na ponta das trincas fictícias é igual a resistência máxima à tração do concreto;
 - *BCIPoint()* – Método para obter as componentes de tensão no elemento (3 nós) na frente da ponta da trinca, bem como a direção do caminho da trinca;
- *Métodos para monitorar a abertura de deslocamento normal (COD) com os valores prescritos.*
 - *BCSecond()* – Checa COD normal
 - *BCMatrix()* – Corrige [A] e {f} quando há mudança de COD

Os principais scripts acerca dos métodos elencados anteriormente se encontram no Apêndice A2. Tendo em vista o programa BemCracker2D ter sido implementado em

linguagem C++ e de forma orientada a objeto, estes scripts seguem a mesma formatação. Já para os métodos inseridos dentro do BEMLAB2D utilizou-se do MATLAB no seu desenvolvimento.

5.3. ALGORITMO INCREMENTAL

O procedimento numérico incremental da propagação de trincas, descrito abaixo, envolve os métodos $BCIterat()$ e $BCIPoint()$, cujas funções são a avaliação da carga final e a definição do caminho de propagação, respectivamente. Vale salientar, que os procedimentos que se seguem, foram adaptados de Aliabadi e Saleh (2002).

1. **A carga inicial P_0 é fornecida para calcular as componentes de tensão na ponta da trinca inicial**, como ilustrado na Figura 5.2.

$$P_0 \xrightarrow[\text{inicial}]{} \langle \sigma_n | \sigma_t | \tau_{nt} \rangle \quad (5.1)$$

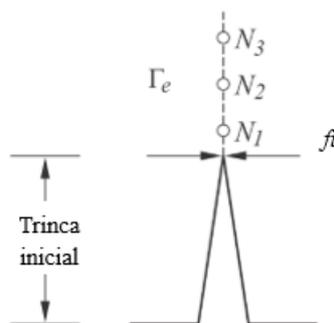


Figura 5.3. Esquema do processo de iteração para o cálculo de tensões para a ponta da trinca inicial (Adaptado de Aliabadi e Saleh, 2002).

onde ft é a resistência máxima à tração e Γ_e representa o limite elástico.

2. **Um aumento na carga por uma certa quantidade ΔP** , tal que $P_1 = P_0 + \Delta P$ e, calculando as componentes de tensão na ponta da trinca inicial para P_1 (no passo atual). Neste passo, é possível determinar as características Ccf da carga final P_3 , seja no ramo ascendente quando $Ccf < 0$ ou no ramo descendente quando $Ccf > 0$, da seguinte maneira:

$$Ccf = \frac{P_0 - P_1}{\sigma_{n0} - \sigma_{n1}} \quad (5.2)$$

3. **Uma vez que a característica Ccf da carga final tenha sido calculada, P_3** pode ser calculado usando extrapolação linear entre os pares de carga e de tensão normal, como,

$$Ccf < 0$$

$$P_3 = P_0 + \left[(f_t - \sigma_{n0}) \frac{P_0 - P_1}{\sigma_{n0} - \sigma_{n1}} \right], \quad \text{para } \sigma_{n1} > f_t \quad (5.3)$$

$$P_3 = P_0 + \left[(f_t - \sigma_{n1}) \frac{P_0 - P_1}{\sigma_{n0} - \sigma_{n1}} \right], \quad \text{para } \sigma_{n1} < f_t \quad (5.4)$$

$$Ccf > 0$$

$$P_3 = P_0 - \left[(f_t - \sigma_{n0}) \frac{P_0 - P_1}{\sigma_{n0} - \sigma_{n1}} \right], \quad \text{para } \sigma_{n1} > f_t \quad (5.5)$$

$$P_3 = P_0 - \left[(f_t - \sigma_{n1}) \frac{P_0 - P_1}{\sigma_{n0} - \sigma_{n1}} \right], \quad \text{para } \sigma_{n1} < f_t \quad (5.6)$$

onde f_t é a resistência máxima a tração.

Novamente, calculam-se as componentes de tensão na ponta da trinca inicial, e agora a tensão normal é igual à máxima resistência à tração do material, ou seja, $\sigma_{n3} = f_t$. Após obter as componentes finais de tensão, é possível calcular a direção da propagação da trinca fictícia ϕ_0 pelo critério da tensão principal máxima (vide seção 2.3.5.1) implementado no programa BemCracker2D. Este é o passo final para a primeira iteração e, portanto, P_3 torna-se a carga final para esta iteração.

4. **Aumenta-se o comprimento da trinca** por uma quantidade especificada na direção perpendicular a ϕ_0 . Repete os passos (1-3) para obter a carga final para este incremento e, P_3 se torna a direção ϕ_m , conforme ilustrado na Figura 5.3.

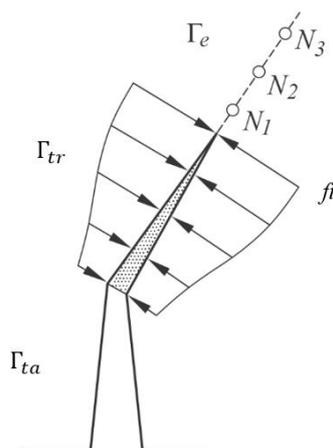


Figura 5.4. Esquema do processo de iteração para o primeiro incremento (Adaptado de Aliabadi e Saleh, 2002).

onde Γ_{ta} representa o limite da abertura da fissura, Γ_{tr} é o limite da fissura fictícia e Γ_e o limite elástico.

5. **Verificar o deslocamento normal de abertura da trinca, Δu_n^{tr} , na ponta real da trinca.** No caso em que Δu_n^{tr} é maior do que o valor crítico, Δu_c , a ponta real da trinca move-se para o elemento adjacente e a trinca fictícia se separará completamente, tornando-se uma trinca livre de tração, conforme visto na Figura 5.4. Neste caso, o sistema de equações algébricas lineares será alterado. Repetir os passos (1-3) novamente para calcular a nova carga final e o caminho.

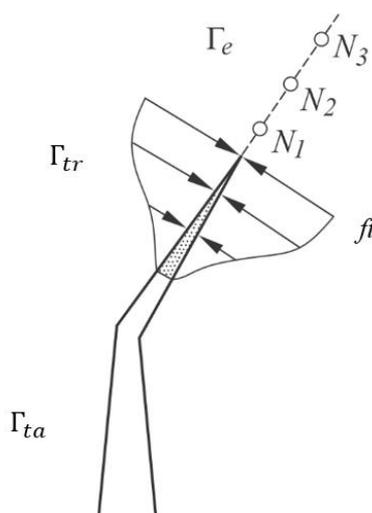


Figura 5.5. Esquema do processo de iteração para quando $\Delta u^{cr} > \Delta u_c$ e alguns elementos da ponta da trinca fictícia serão completamente separados (Adaptado de Aliabadi e Saleh, 2002).

6. Se o passo (5) não se aplicar, a trinca se propagará perpendicular a ϕ_m com uma extensão de comprimento de trinca especificada.
7. Repita os passos (1-6) para a próxima extensão da trinca. A Figura 5.5 ilustra o esquema final.

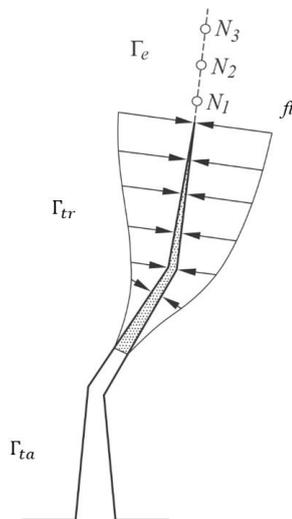


Figura 5.6. Esquema do processo de interação final, onde Γ_{ta} , Γ_{tr} e Γ_e , representam o limite da fissura aberta, o limite da fissura fictícia e o limite elástico, respectivamente (Adaptado de Aliabadi e Saleh, 2002).

5.4. SOBRE O BEMCRACKER2D E SUA GUI

O BEMCracker é um programa concebido em C++ e desenvolvido por Gomes et al (2016), que permite analisar problemas elastostáticos bidimensionais utilizando o Método dos Elementos de Contorno. O programa possui três módulos de processamento, sendo eles:

- MEC padrão – Módulo I;
- MECD sem propagação – Módulo II;
- MECD com propagação – Módulo III.

No Módulo III, onde há a análise de trincas com propagação, é realizada uma análise de tensões com o MEC, a avaliação com os Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) pela Integral-J, avaliação da direção do crescimento da trinca seguindo os três critérios citados no capítulo anterior, a avaliação de vida a fadiga (realizada de acordo

com a Lei de Paris), análise de coalescência em cenários de múltiplas trincas, entre outros. A implementação proposta neste trabalho será feita neste módulo, conforme descrito no próximo capítulo, na qual desenvolveremos vários métodos para simular a fratura coesiva no concreto.

O BEMCracker2D se utiliza de uma GUI chamada BEMLAB2D que é uma interface gráfica concebida em MATLAB, no qual tem a função de pré-processamento e pós-processamento. O mesmo foi desenvolvido por Delgado Neto (2017), visando gerar dados de entrada por meio da modelagem do problema com o auxílio de caixas de diálogo, assim como, proporcionar a visualização de elementos bidimensionais. Na Figura 5.6 podemos observar a interface do BEMLab2D.

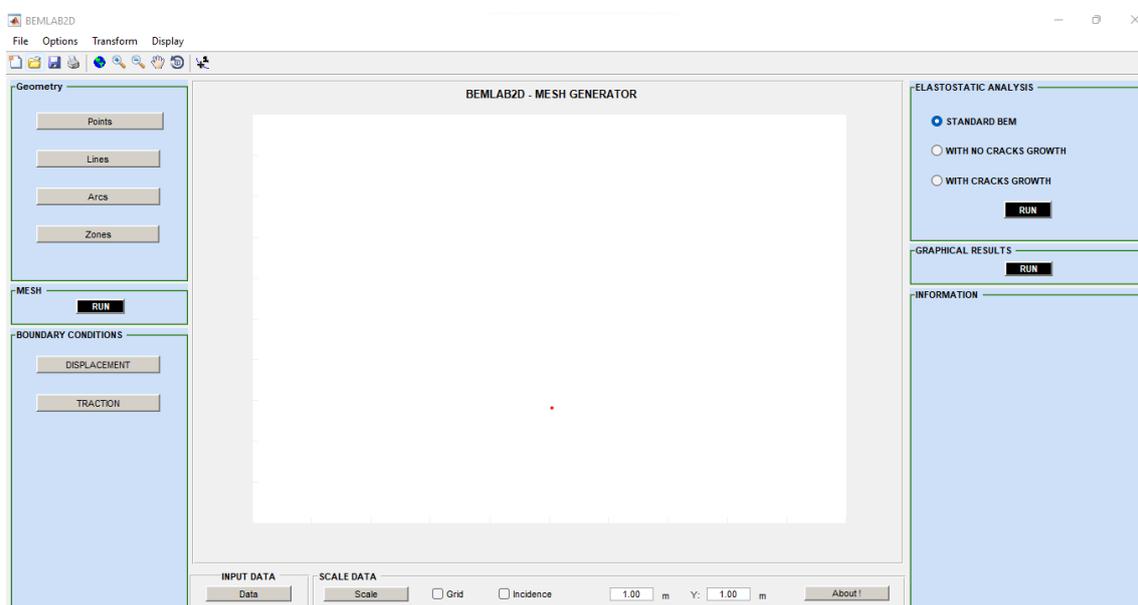


Figura 5.7: Interface do software BEMLab2D.

O pré-processamento do programa é realizado por meio da captação da geometria, malha, condições de contorno, propriedades do material e etc. através da modelagem do problema e isso gera um arquivo com os dados de entrada necessários para o processamento no BEMCracker2D, para que seja realizada a análise do problema. No pós-processamento do BEMLab, com o arquivo gerado no processamento, pode ser visto as malhas deformadas, caminhos de trincas, gráficos de fatores de intensidade de tensão, dentre outros.

6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo, apresentamos uma série de exemplos práticos que ilustram a aplicação do modelo de trinca coesiva desenvolvido neste trabalho. A metodologia descrita no capítulo anterior foi projetada para identificar o estado crítico de estruturas utilizando o modelo de trinca fictícia. Através deste modelo, determinamos os valores de carga para os quais a trinca se encontra em um estado crítico de propagação, ou seja, quando a trinca está prestes a se propagar de forma indefinida.

Para demonstrar a eficácia e a precisão do nosso algoritmo, aplicamos a metodologia a diversos problemas de vigas de concreto simples com geometrias e condições de contorno específicas. Cada exemplo é analisado considerando o modo I puro de fratura, onde a direção de propagação da trinca é previamente conhecida e a trinca é linear. A simulação é realizada adicionando a trinca fictícia na malha de elementos de contorno e permitindo que esta se abra conforme a carga aplicada, mimetizando o processo de propagação real das trincas.

Utilizando as ferramentas BEMLAB2D GUI para modelagem, geração de malha e visualização dos resultados, e o programa BemCracker2D para a análise incremental de carga e interação com o algoritmo de trinca fictícia, exploramos diversos cenários para validar nossa abordagem. Os exemplos a seguir evidenciam as interações entre os algoritmos e o comportamento da fratura do material por meio das curvas carga x deflexão (LINEAR e/ou BILINEAR), bem como a propagação e sua deformada, proporcionando uma visão detalhada e prática da aplicação da nossa metodologia.

Todos os exemplos aplicados são de vigas de concreto simples, considerando cargas ou deslocamentos para controle da fissura. Adotaremos, quando possível, o seguinte padrão de apresentação para todos os estudos numéricos:

1) Descrição do Problema

- **Objetivo:** Descrever o problema.
- **Modelo Físico e Discreto:** Breve explicação do modelo de trinca coesiva e da configuração da malha de elementos de contorno.

2) Parâmetros de Entrada

- **Tipo de Problema:** Estado Plano de Deformação (EPD)/Tensão (EPT)

- **Material:** Listar os parâmetros de material relevantes: Módulo de Elasticidade (E), Coeficiente de Poisson (ν), Energia de Fratura (GF) e Resistência Máxima à Tração (FT).

- **Tipos de Curvas Tensão-Deformação:** LINEAR e BILINEAR

- **Dados da Trinca:** Número total de elementos de trinca (NETr), Número total de elementos livres de tração (NELT) e Incremento da extensão da trinca (IncExTr).

3) Resultados

- **Propagação da trinca:** Plotar caminho

- **Forma Deformada:** Apresentar a forma deformada da estrutura.

- **Curvas Experimentais de GF:** Exibir as curvas experimentais de Energia de Fratura (GF).

- **Curvas Numéricas:** Mostrar as curvas de carga x deflexão para os modelos coesivos: LINEAR e BILINEAR.

Considere para todos os exemplos que, inicialmente, não há nenhuma fissura na viga. À medida que a força aumenta, o valor da tensão no ponto de iniciação da fissura aumentará linearmente até atingir a resistência à tração do material. Depois disso, a zona coesiva começa a se desenvolver neste ponto até que a abertura da fissura ultrapasse seu valor crítico. O comportamento da viga torna-se não linear nesse estágio e, aumentar a carga nesse estado, causará a propagação real da fissura.

Para validação das ferramentas utilizadas (BEMLAB2D GUI e BemCracker2D), o leitor deve se reportar aos seguintes trabalhos: Sá, Gomes e Silva (2023); Gomes, Lustosa e Moura (2023); Delgado Neto et al. (2023); Moura e Gomes (2022); Gomes, Oliveira e Delgado Neto (2021); Delgado Neto (2019); Gomes e Leite (2019); Gomes e Miranda (2018); Pereira e Gomes (2017). Em particular, Moura (2023) avaliou diversos modelos quanto ao caminho de propagação de múltiplas trincas críticas, aos Fatores de Intensidade de Tensão e deformada, dos quais alguns serão considerados aqui especificamente para o estudo da fratura coesiva. Por fim, todas as trincas simuladas com o BemCracker2D neste trabalho são constituídas de 4 elementos quadráticos descontínuos, por face, cuja razão é 0.3-0.3-0.3-0.1, conforme detalhe da Figura 6.1. E ainda, o avanço ou extensão da trinca é simulado usando elementos lineares.

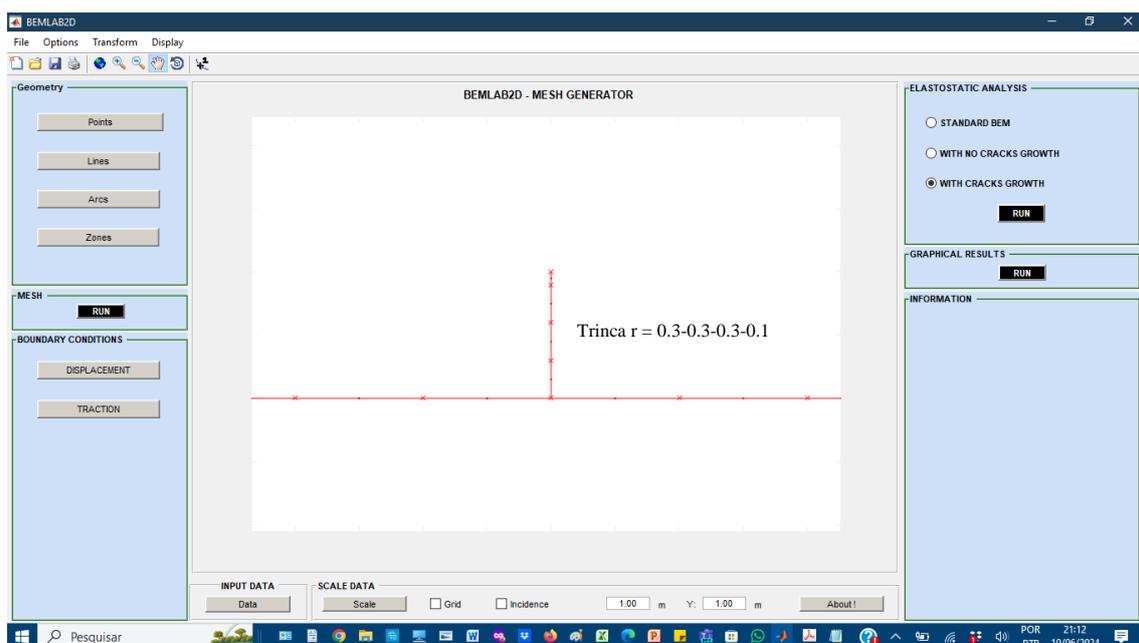


Figura 6.1. Modelo discreto da trinca com elemento quadrático descontínuo.

6.1. ESTUDO NUMÉRICO 1: Viga de Concreto VC1

Trata-se de uma viga de concreto em três pontos com uma trinca centrada inferior e uma carga pontual também centrada no contorno superior, conforme ilustrado no modelo físico da Figura 6.2.

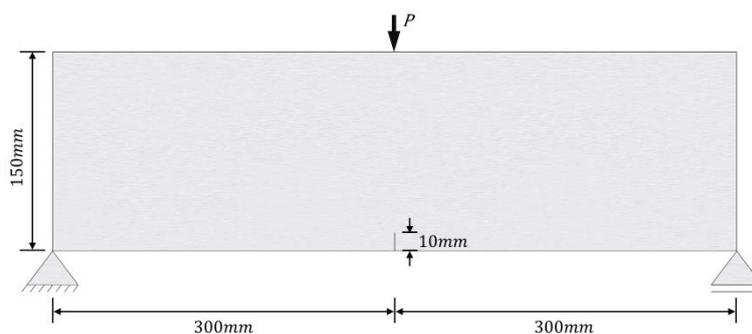


Figura 6.2. Modelo físico de aplicação 01 – viga de três pontos (adaptada de Mojiri, 2010).

A Figura 6.3 ilustra o modelo discreto em elementos de contorno, tendo sido considerados 76 elementos quadráticos contínuos no contorno e 8 elementos quadráticos descontínuos na trinca, sendo 4 por face, totalizando 168 nós.

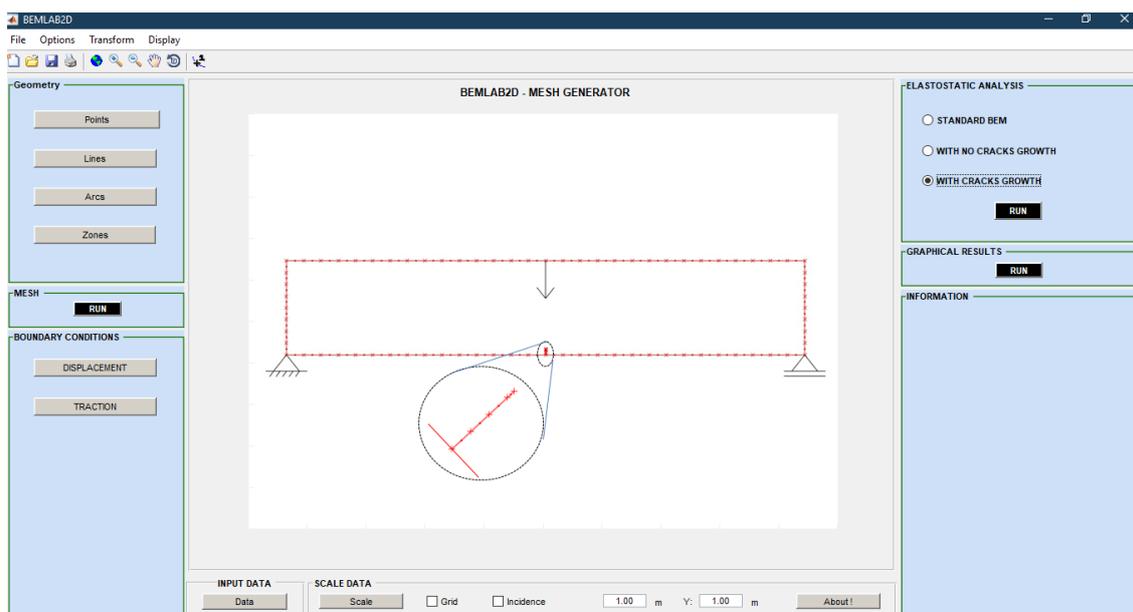


Figura 6.3. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.

Os parâmetros de entrada e do material estão descritos na Tabela 6.1.

Tipo	Valor	Unidade
Problema	EPT	
E, ν, P	36500, 0.1, 1.5	MPa, -, kN
GF, FT	variado, 3.19	Nm ⁻¹ , MPa
NETr, NELT, IncExtTr	4, 4, 10	-, -, mm

Tabela 6.1. Parâmetros do material e dados de entrada.

Os parâmetros E, ν, P representam o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e a carga aplicada, respectivamente. Já o GF representa a energia de fratura e FT resistência máxima à tração.

As Figuras 6.4 e 6.5 mostram a malha de elementos de contorno com o caminho de propagação da fissura e sua forma deformada da viga para 4 e 8 incrementos, respectivamente.

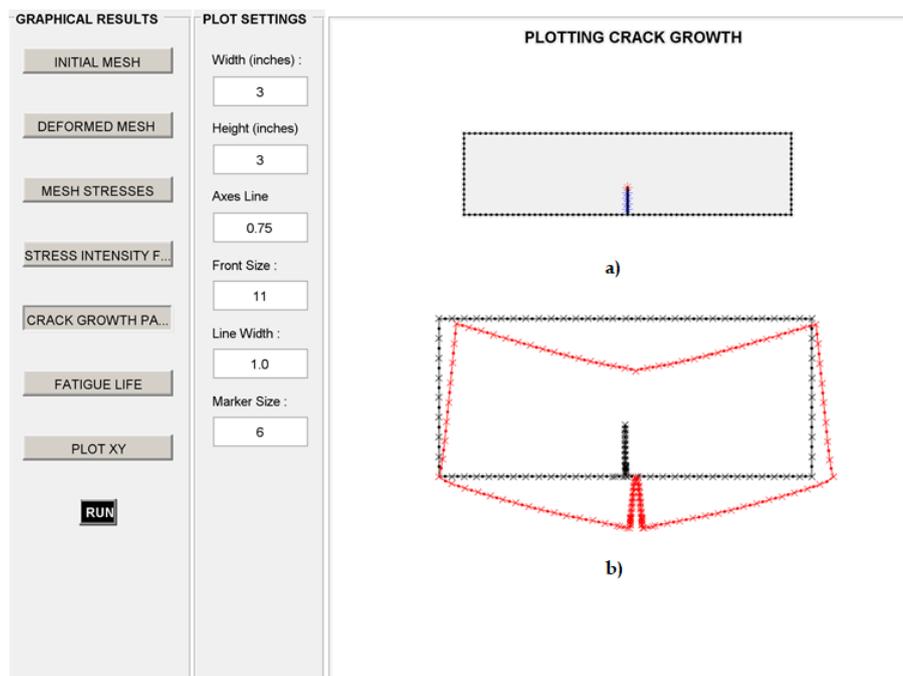


Figura 6.4. Malha MEC 4 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.

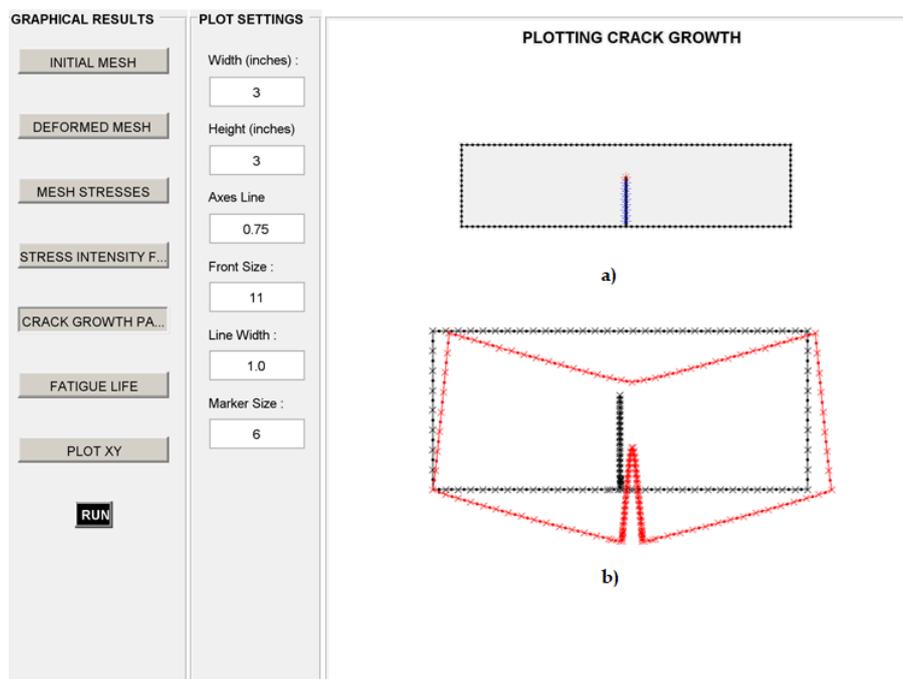


Figura 6.5. Malha MEC 8 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.

A viga é analisada para os dois valores de $GF = 5$ e 50 Nm^{-1} , respectivamente, considerando o estado plano de tensão (EPT) e uma carga pontual. Na Figura 6.6 temos as curvas carga x deflexão no meio do vão, normalizada, para $GF = 5 \text{ N.m}^{-1}$, na qual observamos uma boa convergência para àquela devido a Carpinteri e Colombo (1989).

Nesta, podemos destacar que foram usados 40 elementos para simular o caminho de propagação no meio do vão, contra 10 elementos lineares do BemCracker2D.

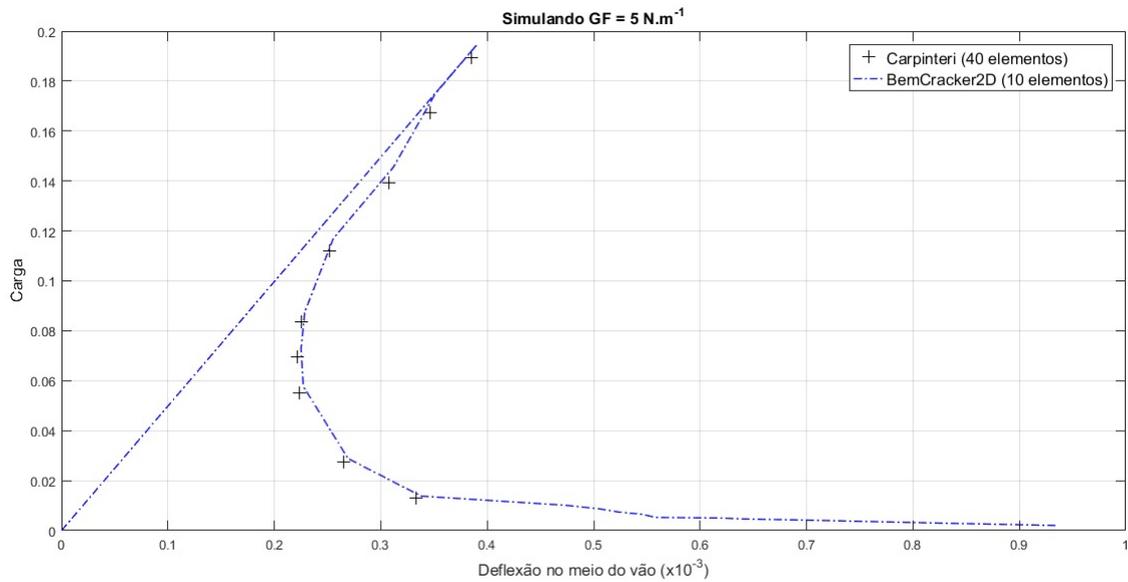


Figura 6.6. Curva carga x deflexão no meio do vão (normalizada).

Na Figura 6.7, temos a mesma análise considerando $GF = 50 \text{ N.m}^{-1}$ e novamente uma boa convergência com o resultado numérico.

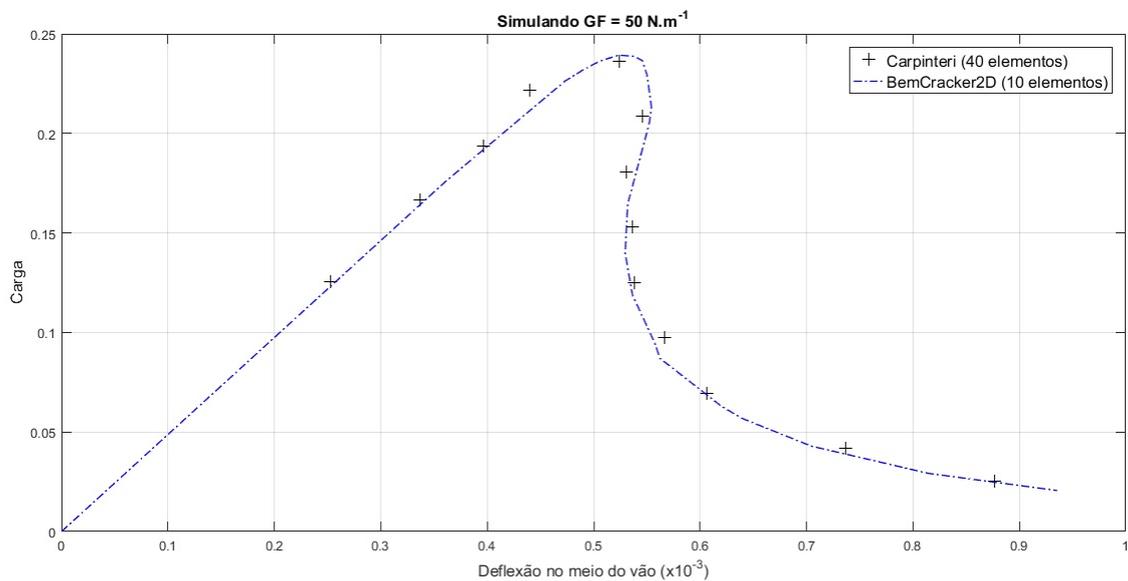


Figura 6.7. Curva carga x deflexão no meio do vão (normalizada).

Na Figura 6.8 apresentamos a abertura de deslocamento da trinca (COD) ao longo do eixo de simetria da viga, $u^{tr}/2$ para cada avanço (coordenada Y) com 4 e 8 iterações, respectivamente, considerando $GF = 50 \text{ Nm}^{-1}$.

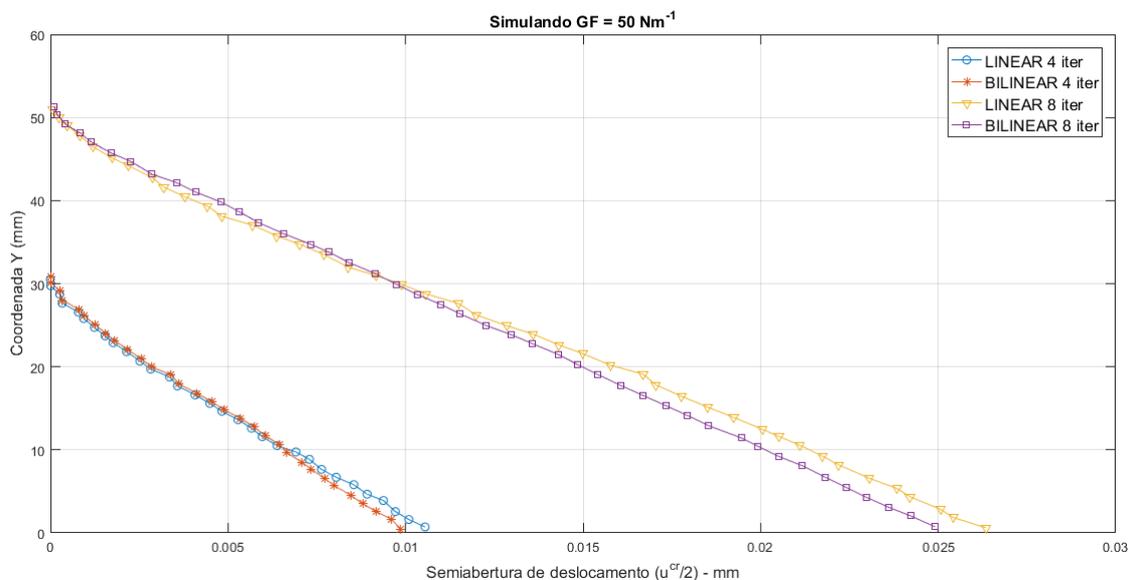


Figura 6.8. Semi-abertura de deslocamento da trinca ($u^{tr}/2$).

Na Figura 6.9 apresentamos a tensão normal ao longo do eixo de simetria da viga para cada avanço (coordenada Y) com 4 e 8 iterações, respectivamente, considerando $GF = 50 \text{ Nm}^{-1}$.

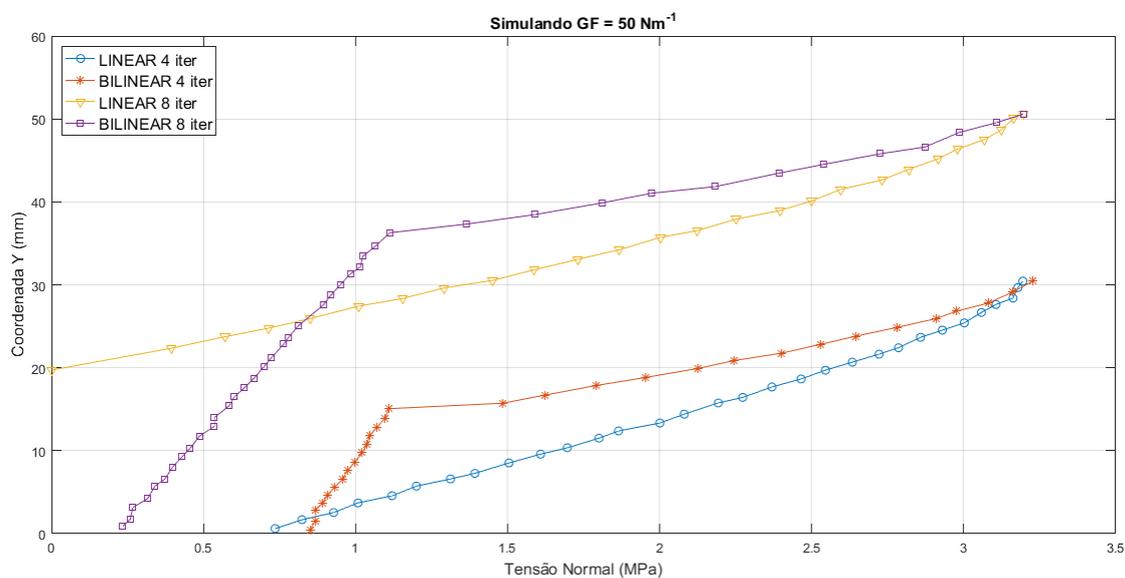


Figura 6.9. Tensão normal.

Esta análise mostra que a fissura é completamente carregada na iteração 4 para ambos os modelos, mas na iteração 8, a fissura livre de tração aparece somente no modelo LINEAR, o que indica que a predição do comportamento de fratura do concreto é mais confiável quando usamos o modelo BILINEAR.

6.2. ESTUDO NUMÉRICO 2: Viga de Concreto VC2

A mesma viga do exemplo 1 é analisada, considerando agora uma carga distribuída centrada e deformação plana para comparar com Mojiri (2010), conforme modelo discreto de elementos de contorno ilustrado na Figura 6.10. Neste, foram considerados 77 elementos quadráticos contínuos no contorno e 8 elementos quadráticos descontínuos na trinca, sendo 4 por face, totalizando 170 nós.

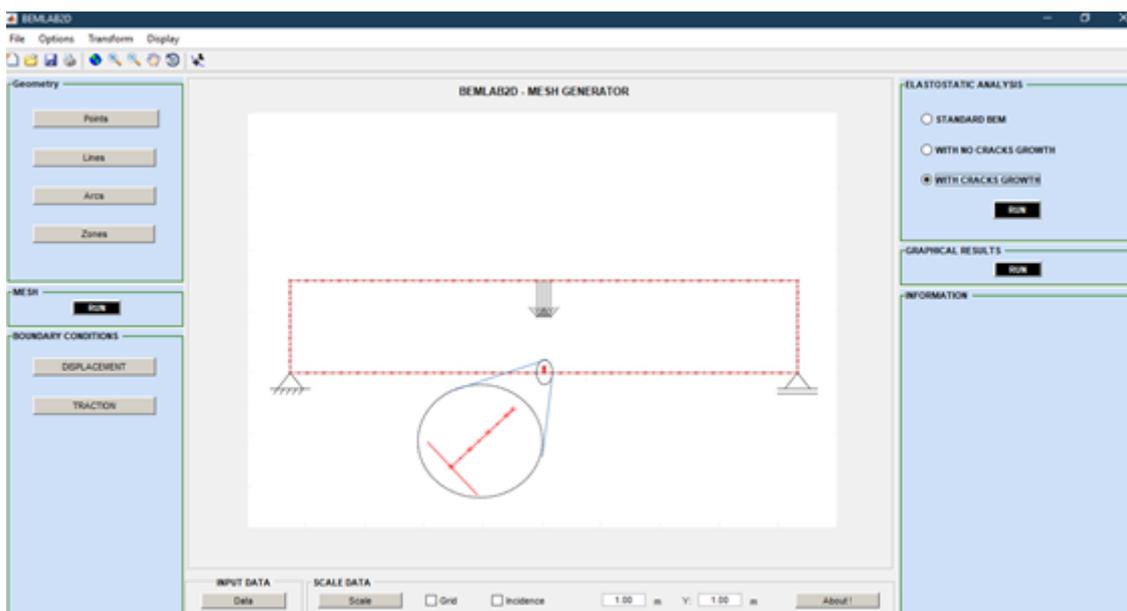


Figura 6.10. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.

A Figura 6.11 mostra a malha de elementos de contorno com o caminho de propagação da fissura e a forma deformada da viga para 10 iterações.

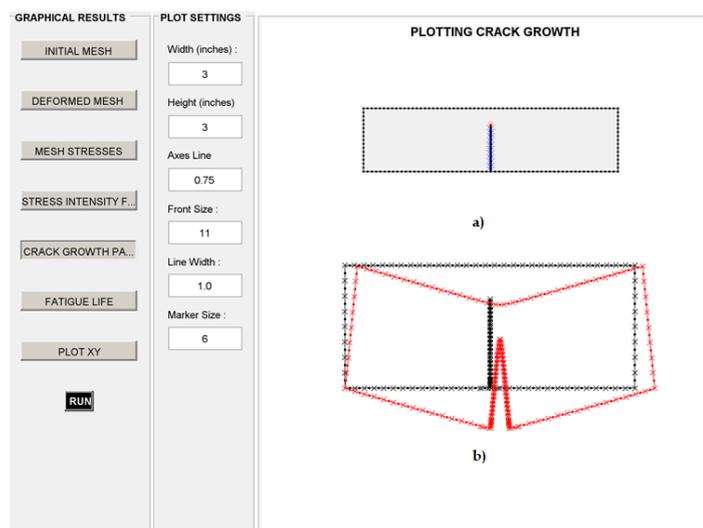


Figura 6.11. Malha MEC 10 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.

Na Figura 6.12 temos as curvas carga x deflexão normalizada, na qual observamos uma boa convergência para àquelas devido a Mojiri (2010) usando o Método Estendido dos Elementos Finitos (XFEM) e para $GF = 50 \text{ N.m}^{-1}$. Nesta, podemos destacar que eles usaram 19 elementos para simular o caminho de propagação no meio do vão, contra 10 elementos lineares do BemCracker2D.

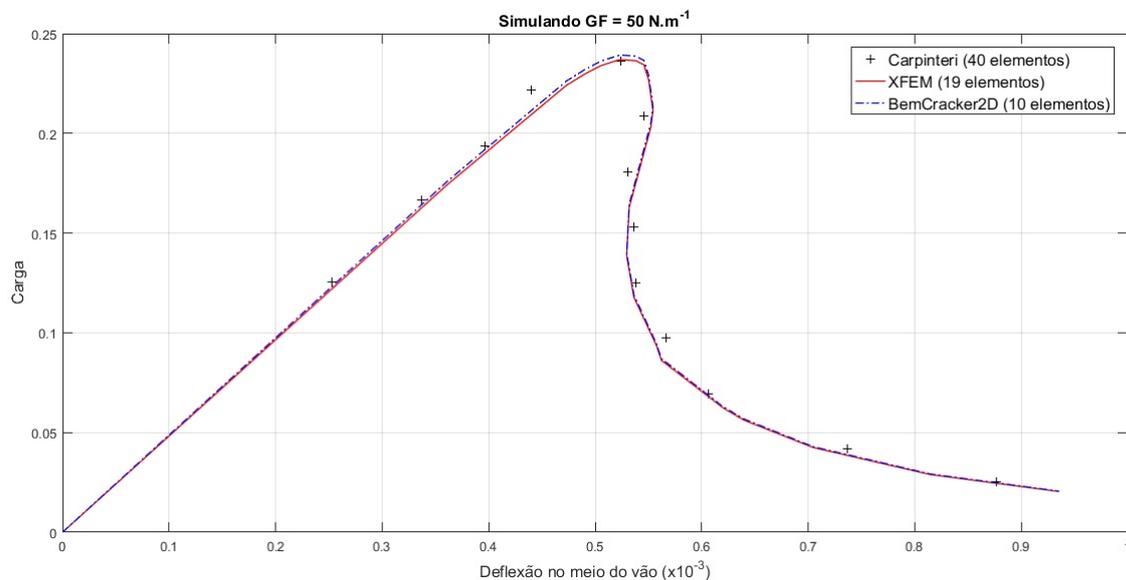


Figura 6.12. Curva carga x deflexão no meio do vão (normalizada).

6.3. ESTUDO NUMÉRICO 3: Viga de Concreto VC3

Trata-se de uma viga de concreto fissurada e submetida à flexão em três pontos, ensaiada experimental e numericamente por Petersson (1981). O Tamanho da pré-trinca (100 mm) é metade da altura da viga conforme ilustrado no modelo físico da Figura 6.13.

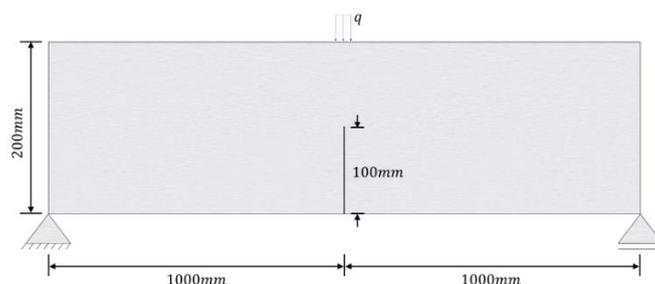


Figura 6.13. Modelo físico de aplicação 03 (Adaptada de Petersson, 1981).

A Figura 6.14 ilustra o modelo discreto em elementos de contorno, tendo sido considerados 76 elementos quadráticos contínuos no contorno e 8 elementos quadráticos descontínuos na trinca, sendo 4 por face, totalizando 168 nós.

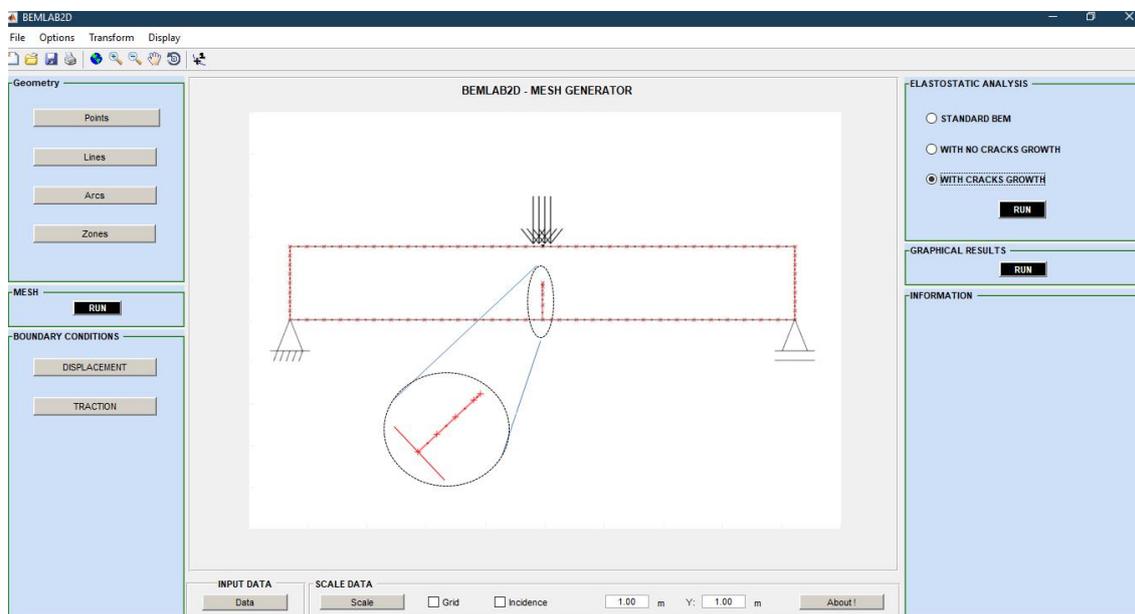


Figura 6.14. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.

Os parâmetros de entrada e do material estão descritos na Tabela 6.2.

Tipo	Valor	Unidade
Problema	EPT	
E, ν , q	30000, 0.2, 100	MPa, -, kN
GF, FT	variado, 3.33	Nm ⁻¹ , MPa
NETr, NELT, IncExtTr	4, 4, 10	-, -, mm

Tabela 6.2. Parâmetros do material e dados de entrada.

A Figura 6.15 mostra a malha de elementos de contorno com o caminho de propagação da fissura e a forma deformada da viga para 8 incrementos.

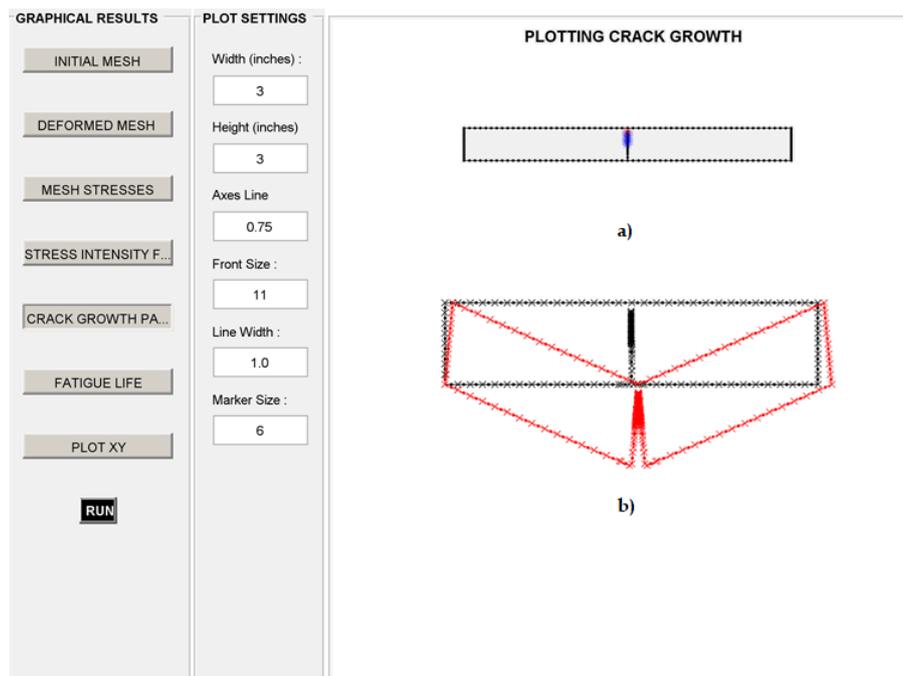


Figura 6.15. Malha MEC 8 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.

A viga é analisada para os valores mínimos e máximos de GF (115 e 137 Nm^{-1}) obtidos experimentalmente e devido a Petersson (1981), considerando o estado plano de tensão (EPT). Na Figura 6.16 temos as curvas carga x deflexão LINEAR e BILINEAR para GF igual a 124 Nm^{-1} , das quais observamos que a BILINEAR apresenta melhor resultado em comparação à média (126 Nm^{-1}), encontrando-se inserida no envelope experimental.

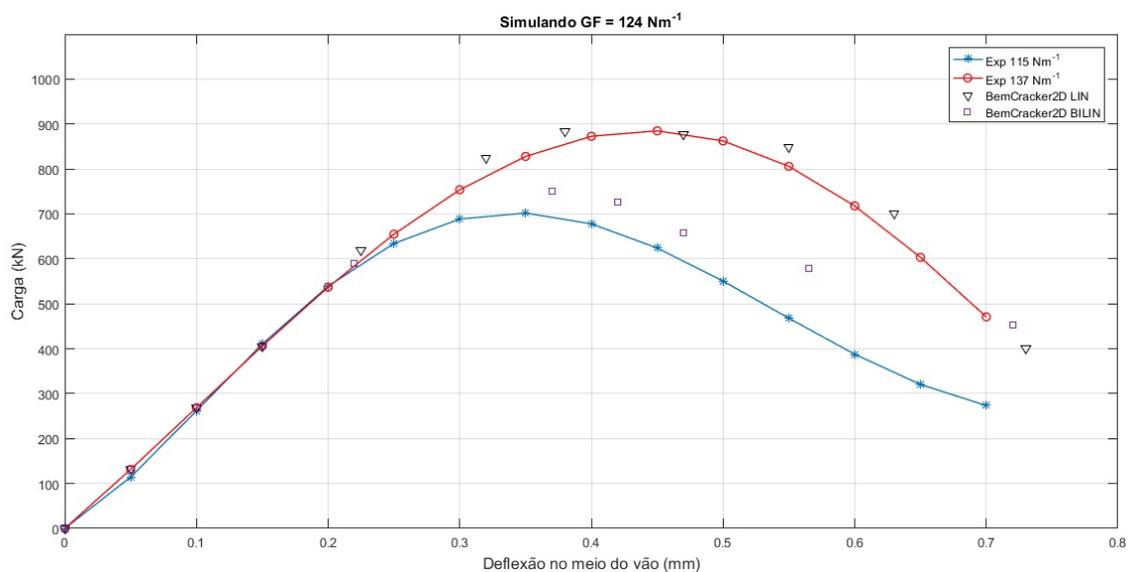


Figura 6.16. Curva carga x deflexão no meio do vão.

Na Figura 6.17 apresentamos a abertura de deslocamento da trinca (COD) ao longo do eixo de simetria da viga, portanto, $u^{tr}/2$ para cada avanço (coordenada Y) com 4 e 8 iterações, respectivamente, considerando $GF = 124 \text{ Nm}^{-1}$.

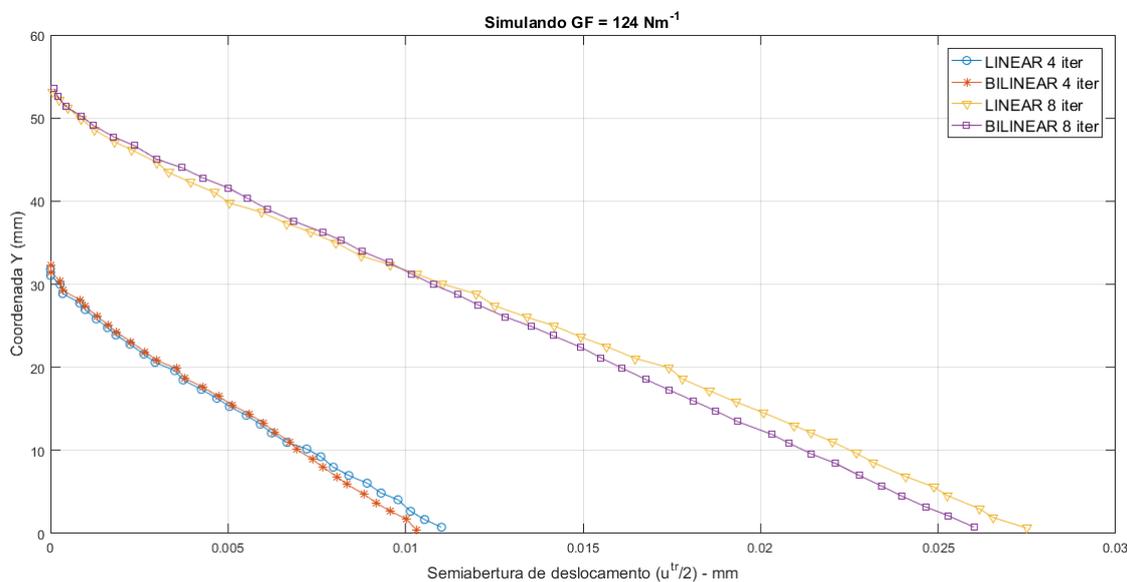


Figura 6.17. Semi-abertura de deslocamento da trinca ($u^{tr}/2$).

Na Figura 6.18 temos a tensão normal ao longo do eixo de simetria da viga confrontando com a coordenada Y a cada avanço para 4 e 8 iterações, respectivamente, considerando $GF = 124 \text{ Nm}^{-1}$, que foi o valor mais próximo da curva experimental.

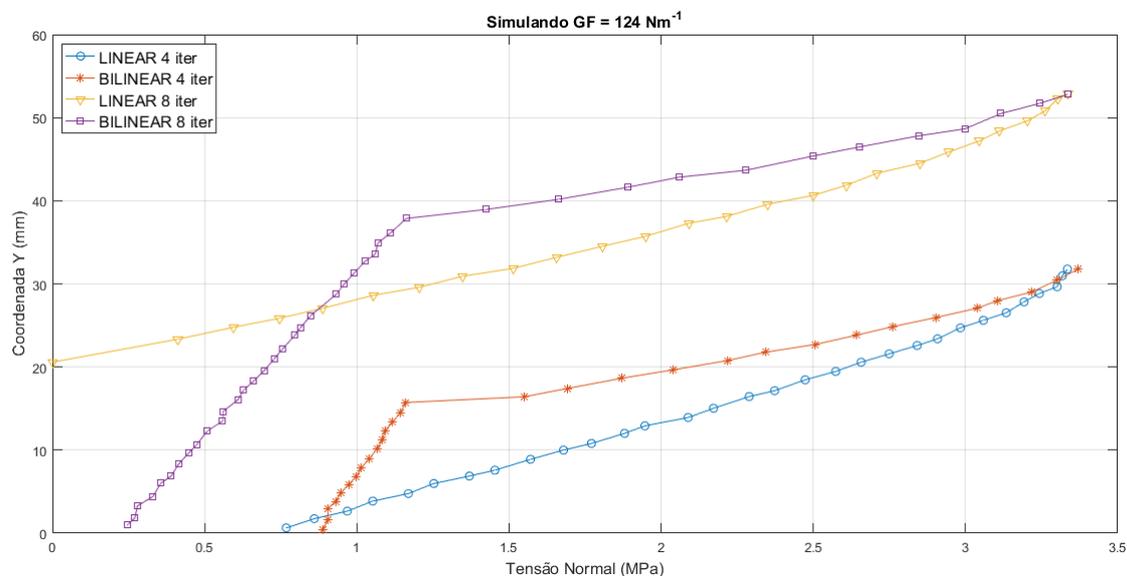


Figura 6.18. Tensão normal.

Verifica-se na Figura 6.18 acima, que a fissura é carregada completamente na iteração 4 para ambos os modelos, mas na iteração 8 a fissura livre de tração aparece somente no modelo LINEAR.

6.4. ESTUDO NUMÉRICO 4: Viga de Concreto VC4

Trata-se de uma viga de concreto fissurada e submetida à flexão em três pontos, ensaiada experimental e numericamente por Bosco et al. (1990), conforme ilustrado no modelo físico da Figura 6.19.

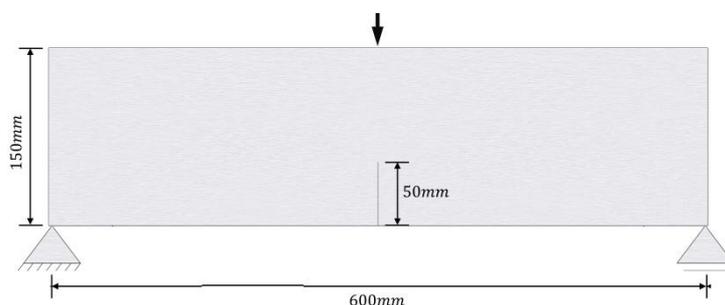


Figura 6.19. Modelo físico do exemplo 04 aplicado (Adaptado de Bosco et al., 1990).

A Figura 6.20 ilustra o modelo discreto em elementos de contorno, tendo sido considerados 76 elementos quadráticos contínuos no contorno e 8 elementos quadráticos descontínuos na trinca, sendo 4 por face, totalizando 168 nós.

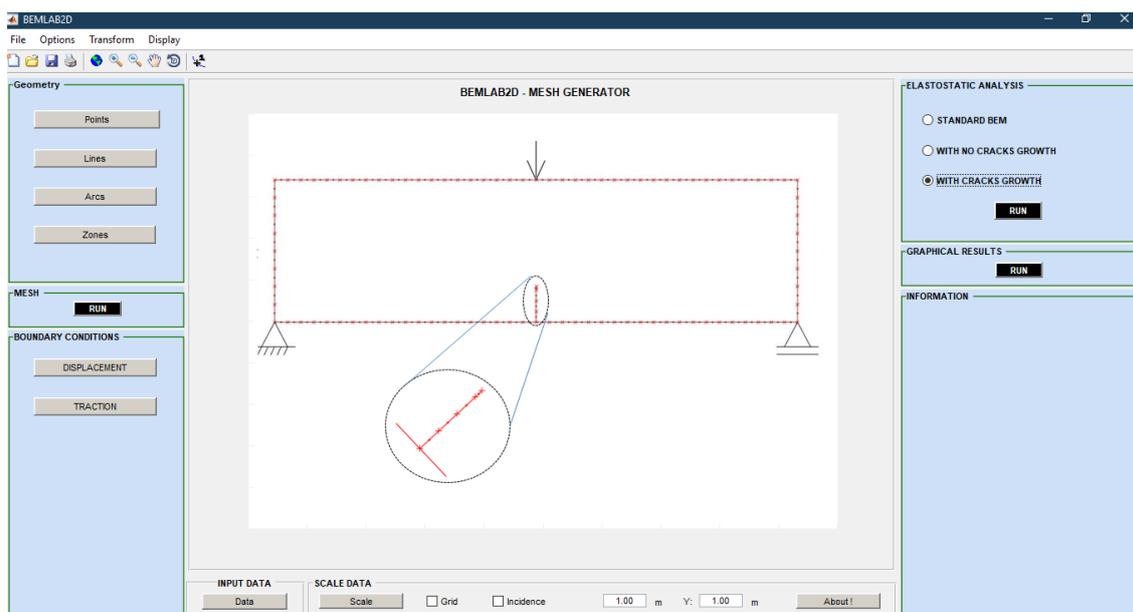


Figura 6.20. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.

Os parâmetros de entrada e do material estão descritos na Tabela 6.3.

Tipo	Valor	Unidade
Problema	EPT	
E, v, q	34300, 0.2, 2	MPa, -, kN
GF, FT	variado, 5.30	Nm ⁻¹ , MPa
NETr, NELT, IncExtTr	4, 4, 10	-, -, mm

Tabela 6.3. Parâmetros do material e dados de entrada.

Na análise a seguir, usaremos a curva BILINEAR de Petersson (1981) considerando uma faixa de valores de energia de fratura para fins de comparação com o resultado de Bosco et al. (1990). A Figura 6.21 apresenta as curvas carga x deflexão no meio do vão para diferentes valores de GF [90 – 110 – 130 – 150] Nm⁻¹. Nesta, destacamos melhores resultados para àquela com maior valor de GF em relação à curva experimental.

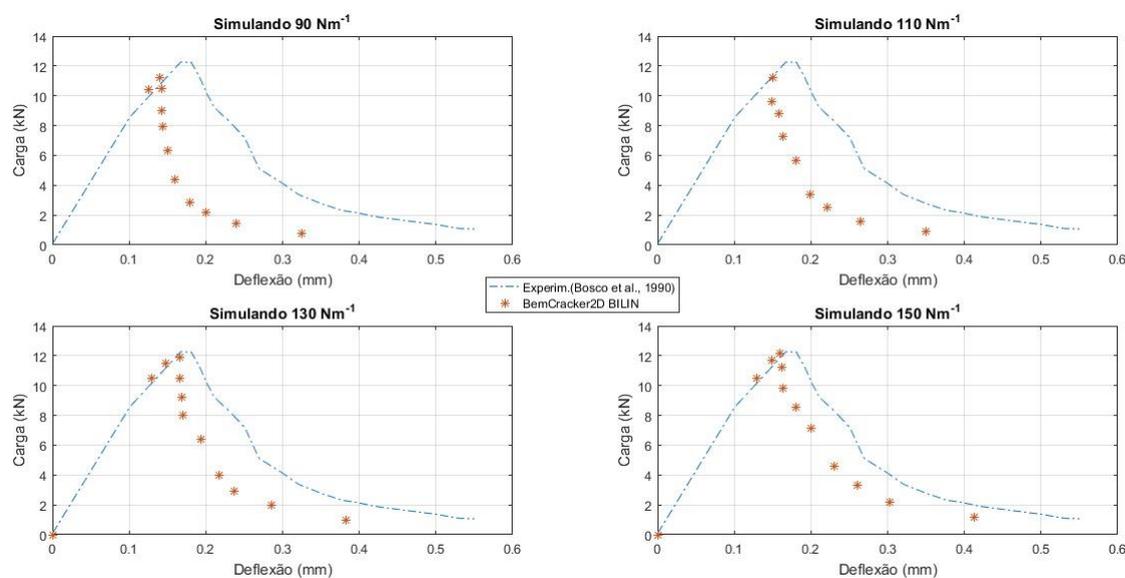


Figura 6.21. Curvas carga x deflexão no meio do vão para vários GF.

Na Figura 6.22 apresentamos a abertura de deslocamento da trinca ao longo do eixo de simetria da viga, portanto, $u^{tr}/2$ para cada avanço (coordenada Y) com 4 e 8 iterações, respectivamente, considerando $GF = 150 \text{ Nm}^{-1}$, que foi o valor mais próximo da curva experimental.

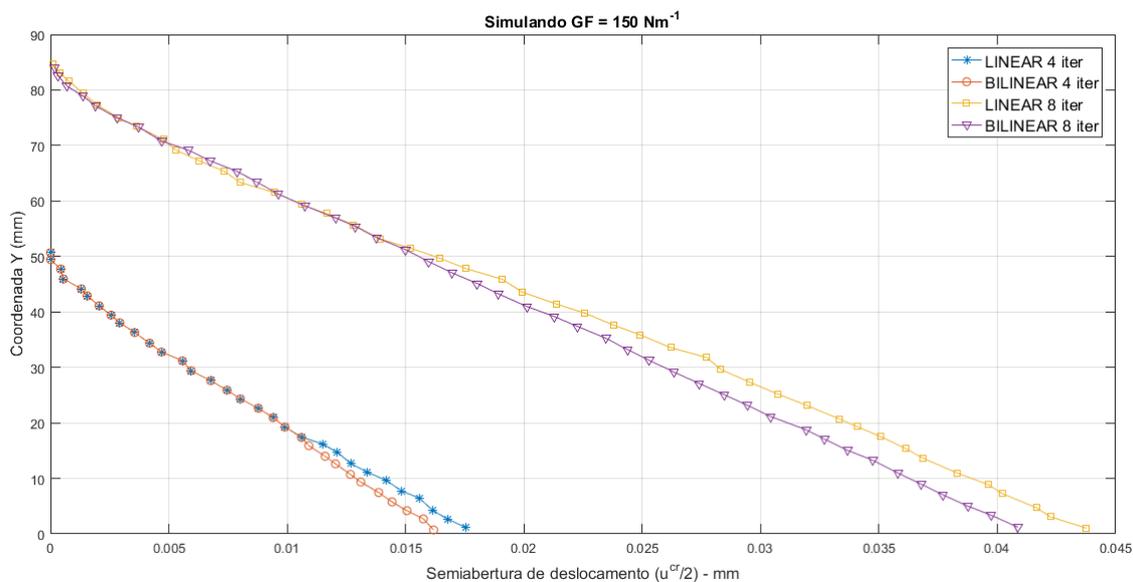


Figura 6.22. Semi-abertura de deslocamento da trinca ($u^{tr}/2$).

Na Figura 6.23 apresentamos a tensão normal ao longo do eixo de simetria da viga para cada avanço (coordenada Y) com 4 e 8 iterações, respectivamente, considerando $GF = 150 \text{ Nm}^{-1}$, que foi o valor mais próximo da curva experimental.

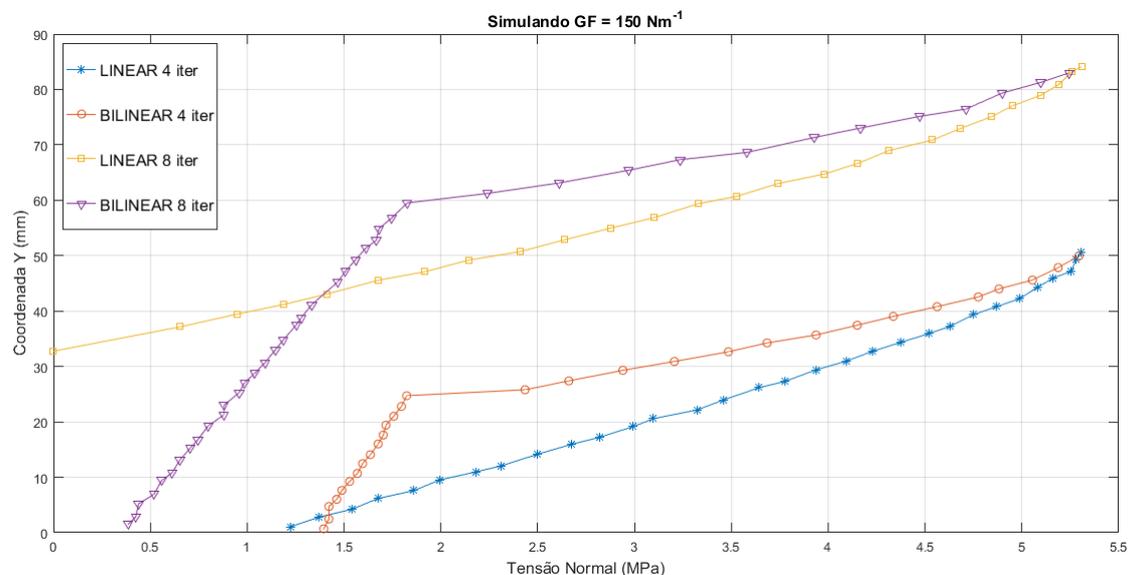


Figura 6.23. Tensão normal.

Esta análise mostra que a fissura é completamente carregada na iteração 4 para ambos os modelos, mas na iteração 8 a fissura livre de tração aparece somente no modelo LINEAR.

6.5. ESTUDO NUMÉRICO 5: Viga de Concreto VC5

Trata-se de uma viga de concreto com entalhe central e submetida à flexão em três pontos, devido a Roesler et al. (2007), conforme ilustrado no modelo físico da Figura 6.24(a) e adaptado em 6.24(b). Para esta análise foi considerado aplicado um deslocamento controlado δ_v no meio do vão superior da viga.

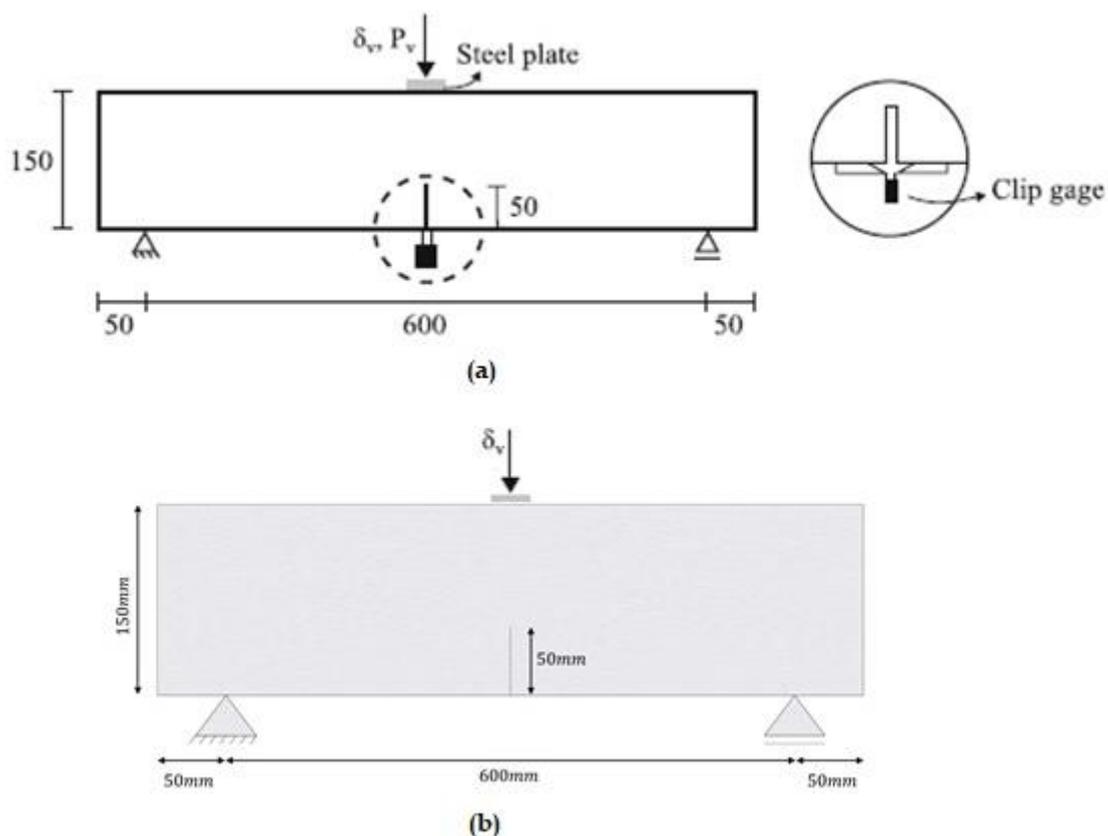


Figura 6.24. Modelo físico: a) Roesler et al. (2007); b) Adaptado.

A Figura 6.25 ilustra o modelo discreto em elementos de contorno, tendo sido considerados 96 elementos quadráticos contínuos no contorno e 8 elementos quadráticos descontínuos na trinca, sendo 4 por face, totalizando 208 nós.

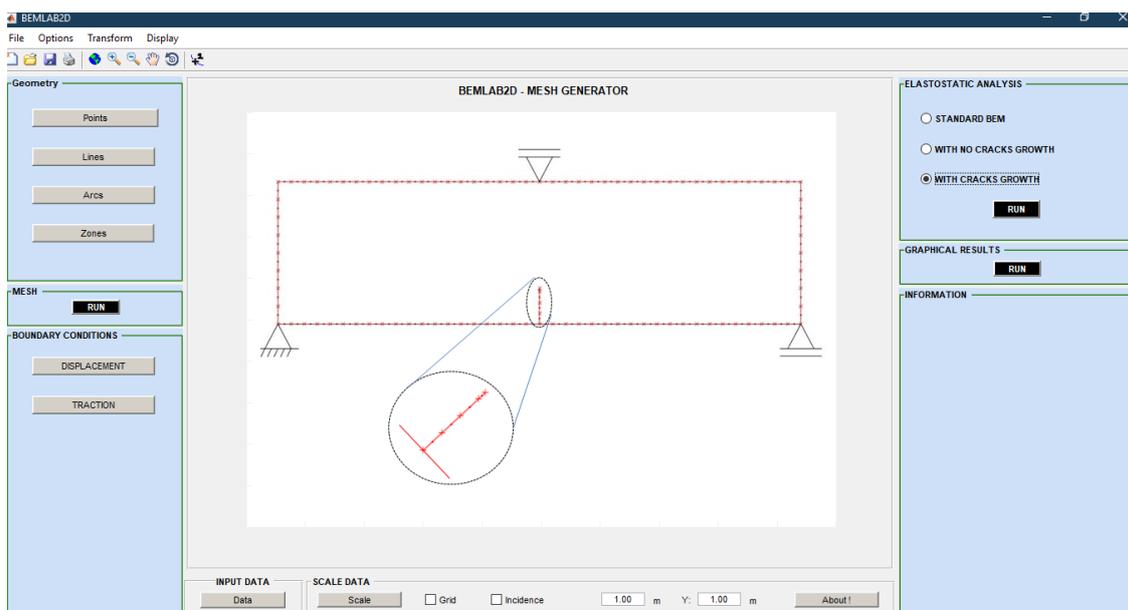


Figura 6.25. Modelo discreto de MEC com condições de contorno.

Os parâmetros de entrada e do material estão descritos na Tabela 6.4.

Tipo	Valor	Unidade
Problema	EPT	
E, ν, δ_v	32000, 0.2, 0.22	MPa, -, mm
GF, FT	variado, 4.15	Nm^{-1} , MPa
NETr, NELT, IncExtTr	4, 4, 10	-, -, mm

Tabela 6.4. Parâmetros do material e dados de entrada.

A Figura 6.26 mostra a malha de elementos de contorno com o caminho de propagação da fissura e a forma deformada da viga para 4 incrementos.

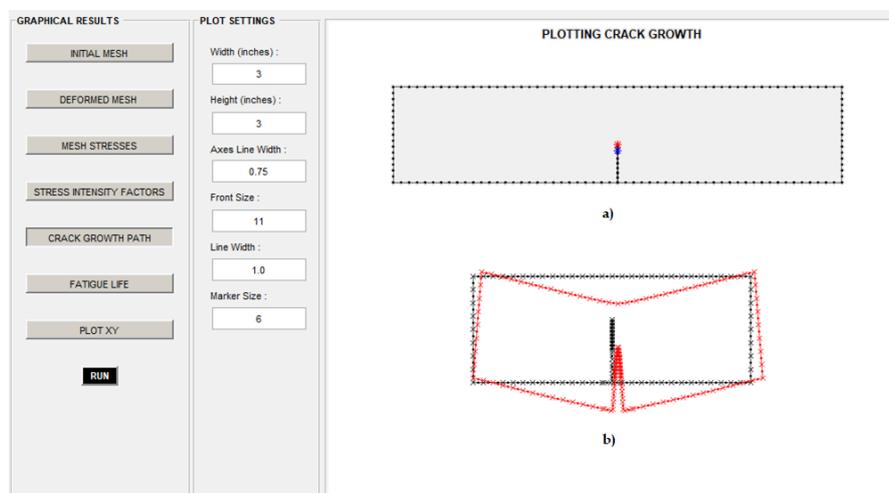


Figura 6.26. Malha MEC 8 iterações: a) caminho de propagação; b) forma deformada.

A viga analisada é devido a Roesler et al. (2007), considerando o estado plano de tensão (EPT). Nas Figuras 6.27 e 6.28, temos as curvas carga x abertura de deslocamento (COD) para valores mínimos e máximos de GF igual a 159 e 170 Nm^{-1} , respectivamente, sendo confrontado com o BemCracker2D BILINEAR para GF igual a 164 Nm^{-1} , que é o valor médio do experimento.

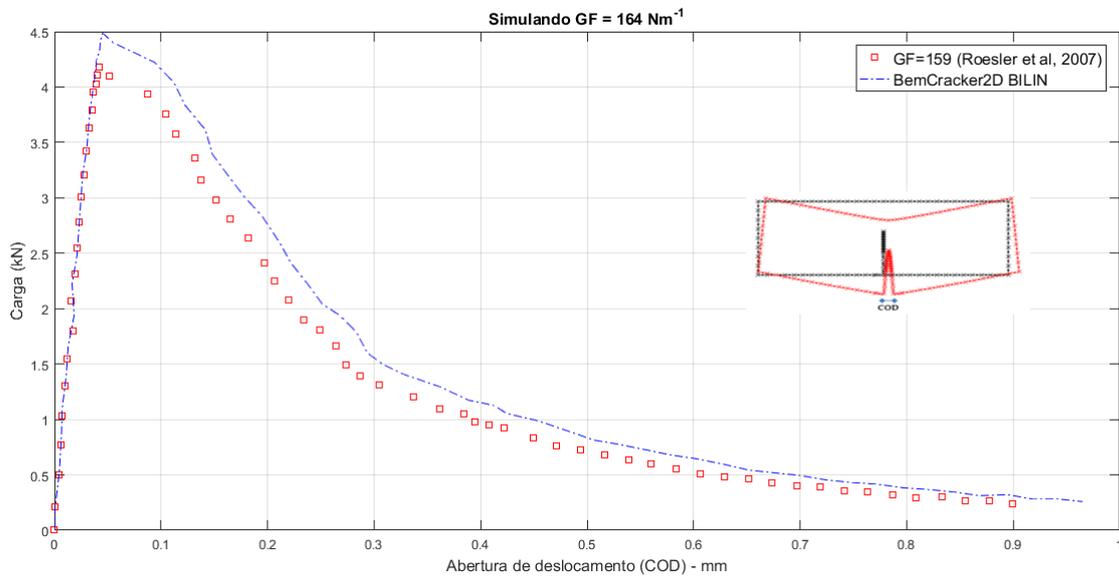


Figura 6.27. Curva carga x abertura de deslocamento (COD).

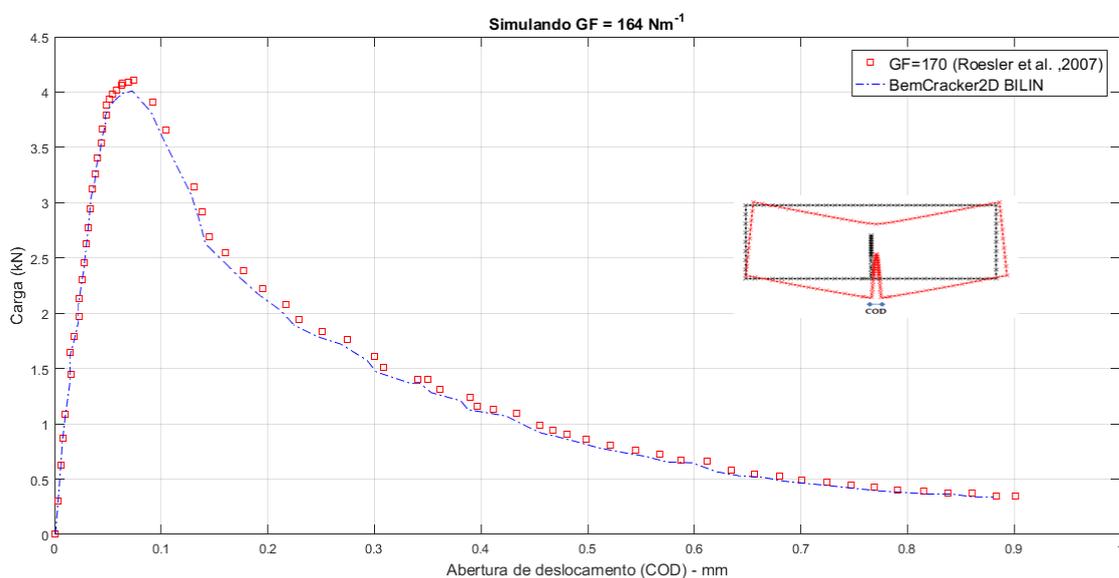


Figura 6.28. Curva carga x abertura de deslocamento (COD).

Na Figura 6.29 apresentamos a abertura de deslocamento da trinca (COD) ao longo do eixo de simetria da viga, portanto, $u^{tr}/2$ para cada avanço (coordenada Y) com 4 e 6 iterações, respectivamente, considerando $GF = 164 \text{ Nm}^{-1}$.

Na Figura 6.30 temos a tensão normal ao longo do eixo de simetria da viga confrontando com a coordenada Y a cada avanço para 4 e 6 iterações, respectivamente, considerando $GF = 164 \text{ Nm}^{-1}$, que foi o valor mais próximo da curva experimental.

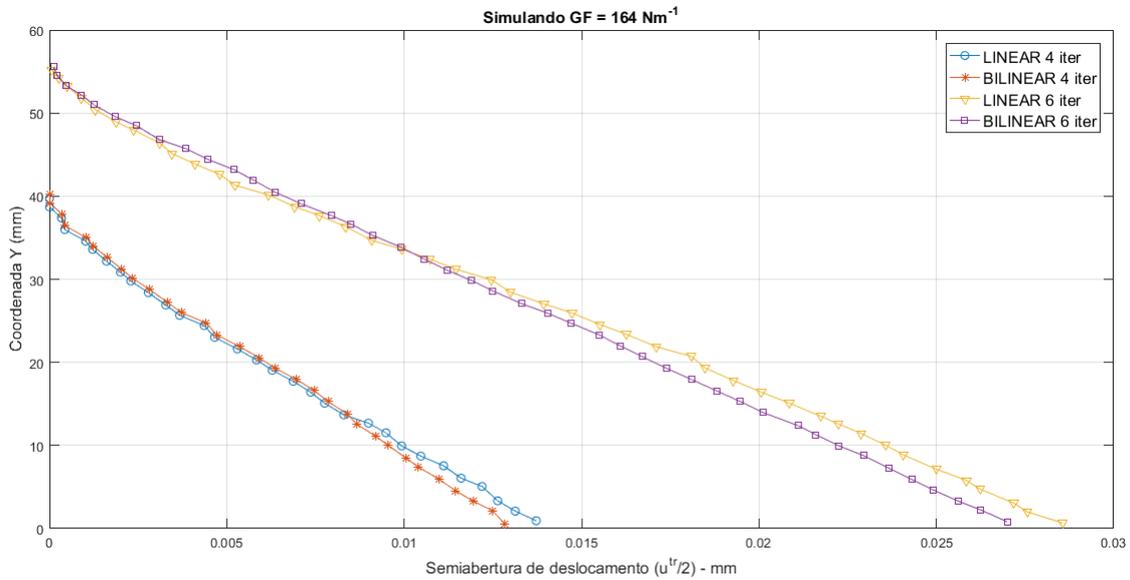


Figura 6.29. Semi-abertura de deslocamento da trinca ($u^{tr}/2$).

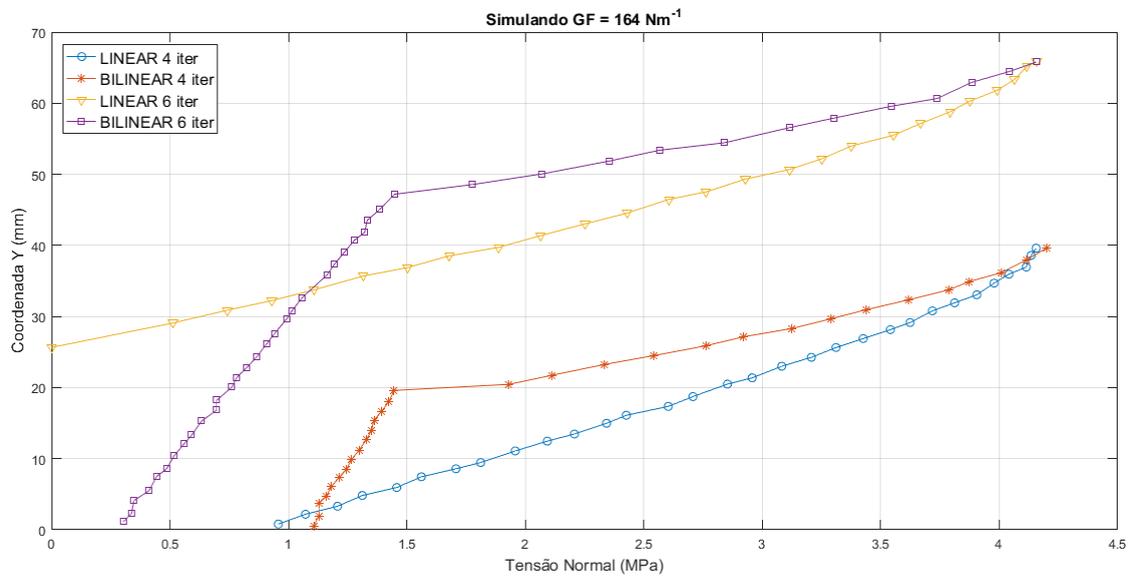


Figura 6.30. Tensão normal.

Verifica-se na Figura 6.30 acima, que a fissura é carregada completamente na iteração 4 para ambos os modelos, mas na iteração 6 a fissura livre de tração aparece somente no modelo LINEAR.

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES FUTURAS

7.1. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados e as discussões pertinentes conduziram às seguintes conclusões:

- **Caminho de propagação e deformada da malha:** A simulação mostrou que o BemCracker2D é eficaz na modelagem do caminho de propagação de trincas, com alguns exemplos utilizando 40 (tal como o exemplo VC1) ou 19 (exemplo VC2) elementos para simular o caminho de propagação no meio do vão, em contraste com os 10 elementos lineares utilizados pelo BemCracker2D. Esse resultado destaca a eficiência do BemCracker2D em obter resultados precisos com um menor número de elementos.
- **Curvas carga x deflexão LINEAR e BILINEAR para diversos GF (energia de fratura):** As análises indicaram que, em todas as avaliações da tensão normal (gráficos das figuras 6.9, 6.18, 6.23, 6.30), a fissura estava completamente carregada na iteração 4 para ambos os modelos. Contudo, na iteração 8 (para os exemplos VC1, VC3 e VC4) e na iteração 6 (Exemplo VC5), a fissura livre de tração apareceu somente no modelo LINEAR, sugerindo que a predição do comportamento de fratura do concreto é mais confiável quando se utiliza o modelo BILINEAR.
- **Abertura de deslocamento da trinca (COD) para várias iterações:** As análises de COD ao longo das iterações permitiram uma melhor compreensão da evolução da trinca e da abertura de deslocamento, confirmando a precisão do modelo coesivo implementado.
- **Tensão normal ao longo do eixo de simetria da viga:** A distribuição da tensão normal ao longo do eixo de simetria da viga foi consistente com os resultados teóricos e experimentais disponíveis na literatura, validando a eficácia do BemCracker2D na simulação de tensões em materiais quase-frágeis.

Ademais, os resultados mostraram que o modelo BILINEAR apresenta um desempenho superior em comparação à média dos valores de GF, inserindo-se dentro do envelope experimental. Isso confirma que o modelo BILINEAR proporciona uma melhor aproximação aos resultados esperados, validando a sua eficácia na predição do comportamento de fratura do concreto.

Em resumo, o BemCracker2D se mostrou uma ferramenta robusta para a análise de trincas em materiais quase-frágeis, especialmente no concreto, com a capacidade de fornecer resultados precisos com um menor número de elementos.

7.2.SUGESTÕES FUTURAS

Embora os resultados deste estudo tenham sido promissores, há diversas áreas que podem ser exploradas em pesquisas futuras para aprimorar e expandir o conhecimento sobre a análise de trincas em materiais quase-frágeis:

- **Desenvolvimento de Novos Modelos Coesivos:** Implementar e validar novos modelos coesivos que possam capturar melhor a complexidade do comportamento de materiais quase-frágeis e a interação entre trincas múltiplas, considerando a possibilidade de utilizar curvas exponenciais para esses modelos.
- **Estudo e Implementação para Modo II e Modo Misto:** Aplicar o estudo e a implementação para a análise de trincas sob Modo II (cisalhamento) e modos mistos, aproveitando a natureza orientada a objetos do BemCracker2D para facilitar a expansão e adaptação do software a esses modos de fratura.
- **Análise de Trincas em Condições Diferentes:** Investigar o comportamento de trincas sob diferentes condições de carga e ambientes, como em situações de fadiga, corrosão e temperaturas extremas.
- **Modelagem de Trincas em Estruturas Complexas:** Expandir a aplicação do BemCracker2D para a análise de trincas em estruturas mais complexas, como edificações e pontes, para avaliar a sua eficácia em contextos mais diversos.
- **Integração com Outros Métodos Numéricos:** Combinar o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) com outros métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), para melhorar a precisão das simulações e analisar problemas multidisciplinares.
- **Validação Experimental:** Realizar ensaios experimentais adicionais para validar os resultados das simulações numéricas e ajustar os parâmetros dos modelos para uma melhor concordância com os dados experimentais.

REFERÊNCIAS

ALIABADI, M.H.; SALEH, A.L. Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, [S.L.], v. 69, n. 2, p. 267-280, jan. 2002. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/s0013-7944\(01\)00089-3](http://dx.doi.org/10.1016/s0013-7944(01)00089-3).

ARAÚJO, T. D. P. D. **Análise elasto-plástica adaptativa de estruturas com trincas**. 1999. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro Rio de Janeiro.

ASSIS, N. O. de. **Implementação de um modelo de trinca discreta com redefinição da malha associado a modelos de dano escalar**. 2023. 86 f. Dissertação (Mestrado) – Mestre em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Belo Horizonte, 2023.

BARENBLATT, G.I. **Mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture**. **Advances in Applied Mechanics**, Volume 7, pp.55-129, Academic Press, New York. 1962.

BECKER, A. A. **The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems**. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

BETTI E., **Teoria dell'elasticità**, Il Nuovo Cimento, pp.7-10, 1872.

BITTENCOURT, T.; INGRAFFEA, A.; LLORCA, J. **Computer simulation of arbitrary, cohesive crack propagation in concrete**. **Fracture mechanics of concrete structures**. (1992)

BLANDFORD, G. E; INGRAFFEA, A. R; LIGGET, J. A. (1981). **Two-dimensional Stress Intensify Factor computations using the Boundary Element Method**. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, V.17, 387-404.

BOSCO, C.; CARPITINERI, A.; DEBERNARDI, P. G. Minimum reinforcement in high-strength concrete. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 116, No. 2, pp. 427-437, 1990.

BOEIRA, Alexandre Pitol; BECK, Daniel. Tecnologia dos Materiais. **Passo Fundo, outubro-2007**. Disponível em: <http://docente.ifsc.edu.br/claudio>.

[schaeffer/material/2_Mecatr%20C3%B4nica/Materiais_1_Meca_2/Tecnologia%20dos%20Materiais_complementar.pdf](#), 2007.

BREBBIA, C. A. and DOMINGUES, J., **Boundary Elements: An Introductory Course**, McGraw-Hill, 2a ed, New York, USA, 1992.

BUENO, E. M. R.; BITTENCOURT, N. T.; MARTHA, F. L.; CARVALHO, V. A. C. **A graphics and object-oriented system for modeling 2d cohesive crack problems. In: european congress on computational methods in applied sciences and engineering**, 2000. Barcelona: Ecomas, 2000. p. 1-18.

BUENO, E.M.R., (1999). **Simulação bidimensional de fraturamento coesivo por meio do método dos elementos finitos**. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 162 p.

BUSH, M. B. **Simulation of contact-induced fracture. Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, p. 59-66, 1999.

CALLISTER, W.; RETHWISCH J. **Ciência e Engenharia dos materiais: Uma Introdução**. 9. ed. - Rio de Janeiro: LTC, 2016.

CARPINTERI, A. **Mechanical damage and crack growth in concrete: Plastic collapse to brittle fracture**. 1986.

CORDEIRO, Sérgio Gustavo Ferreira. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**. 2015. 266 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2015.

DELGADO NETO, A. M.; OLIVEIRA, T. A. A.; GOMES, G. Uma atualização GUI eficiente para geração de malha mista BEM-FEM. **Revista Internacional de Métodos Computacionais em Ciências da Engenharia e Mecânica**, v. 3, pág. 256-267, 2019.

DELGADO NETO, Alvaro M. (2017). **BEMLAB2D: Interface Gráfica de Modelagem, Visualização e Análise com Elementos de Contorno – Uma Aplicação em Problemas Elastostáticos**. Dissertação de Mestrado, Publicação 005A/2017, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 113p.

DELGADO NETO, Álvaro Martins et al. Metodologia para simulação do comportamento elastoplástico em problemas de propagação de fissuras utilizando

formulações duais do método dos elementos de contorno. **Caderno Pedagógico**, v. 3, pág. 1296-1322, 2023.

DUGDALE, D. S. **Yielding of Sheets Containing Slits**. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, 1960, pp. 100-104.

DURAND, Raul; SILVA, Fernando Hipólito Barros Trindade da. A Coulomb-based model to simulate concrete cracking using cohesive elements. **International Journal of Fracture**, [S.L.], v. 220, n. 1, p. 17-43, nov. 2019. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s10704-019-00395-5>.

FELIX, Emerson Felipe; CARRAZEDO, Rogério; POSSAN, Edna. Análise experimental da vida útil à fadiga de concretos submetidos à compressão cíclica de baixa frequência. **Matéria (Rio de Janeiro)**, v. 27, p. e202145017, 2022.

FIGUEIREDO, Luiz Gustavo de. **O Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) incorporando um modelo de zona coesiva para análise de fraturas**. 2008. 164 f. Tese (Doutorado) - Curso de Mestrado em Estruturas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

GOMES, G. **Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em Problemas de Plasticidade 2D Orientada à Objeto**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 2-5, 21, 27-p, 2006.

GOMES, G.; OLIVEIRA, T. A. A.; DELGADO NETO, A. M. Uma nova metodologia para prever a tolerância a danos com base na conformidade por meio de análise global-local. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 58, pág. 211-230, 2021.

GOMES, G.; DELGADO NETO, A. M; WROBEL, L. C. Modelagem e visualização de trincas 2D usando equação integral de contorno dual. In: **Proceedings Of The Xxxvii Iberian Latin-American Congress On Computational Methods In Engineering**, 37., 2016, Brasília. p. 1-14.

GOMES, G.; LUSTOSA, I. A. A.; MOURA, A. S. BemLab2D & BemCracker2D: Um pacote computacional para modelagem e análise de problemas de mecânica de fratura com elementos de contorno. In: **XLIV Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**. 2023.

GOMES, G.; MIRANDA, A. C. O. Análise de problemas de crescimento de fissuras utilizando o programa orientado a objetos bemcracker2D. **Fratura e Integridade Estrutural**, [S. l.], v. 45, pág. 67–85, 2018. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.45.06. Disponível em:

<https://www.fracturae.com/index.php/fis/article/view/2003>. Acesso em: 18 jun. 2024.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSON, P. **Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements**. Cement Concrete Res 6:773–782, 1976.

INGRAFFEA, A. R.; BLANDFORD, G. E.; LIGGET, J. A. **Automatic Modelling of Mixed-Mode Fatigue and Quasi-Static Crack Propagation Using the Boundary Element Method**. Proc. of Fracture Mechanics: Fourteenth Symposium. ASTM STP 791: ASTM. 1983. p. 407-426.

IRWIN, G. R. **Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness**. Proc. 7th Sagamore Conf., p.IV-63, 1960.

KUMAR, S. e S. V. Barai (2011). **Concrete Fracture Models and Applications**. 1a ed. Berlin: Springer.

KZAM, Aref Kalilo Lima. **Formulação dual em Mecânica da Fratura utilizando Elementos de Contorno curvos de ordem qualquer**. 2009. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. KZAM, Aref Kalilo Lima. **Formulação dual em Mecânica da Fratura utilizando Elementos de Contorno curvos de ordem qualquer**. 2009. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

LAWN, B. **Fracture of brittle solids**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

LEITE, P. G. P. (2017). **Simulação Numérica de Propagação de Trinca por Fadiga em Modo Misto (I+II) utilizando o BemCracker2D**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM 23A/17, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 124 p.

LEITE, P. G. P.; GOMES, G. Numerical simulation of fatigue crack propagation in mixed-mode (I+ II) using the program BemCracker2D. **International Journal of Structural Integrity**, v. 10, n. 4, p. 497-514, 2019.

LENS, L. N. **Modelos para Análise de Fratura do Concreto Simples Empregando Interfaces Coesivas**. 2009. 114 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

LEONEL, E. D. **Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, 42-51p, 2009.

MAZARS, J. (1984). **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure**. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6.

MEDINA, J. A. H. **Avaliação de Previsões e Fratura Elastoplástica**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, 19, 26-33, 57-60p, 2014.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, propriedades e materiais**. IBRACON, terceira edição, Volume 1, São Paulo, SP, 21p, 2008.

MINDESS, S.; YOUNG, J. F.; e DARWIN, D. (2003). **Concrete**. 2a ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.

MIRANDA, A. C. de O. **Propagação de trincas por fadiga em geometrias 2D complexas sob cargas cíclicas variáveis**. 2003. 106 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

MOJIRI, S. **Numerical Analysis of Cohesive Crack Growth Using Extended Finite Element Method (X-FEM)**. Master of Science Thesis, Ecole Centrale de Nantes, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, The International Center for Numerical Methods in Engineering, Nantes, FR, 35-58p, 2010.

MOURA, A. S.; GOMES, G. Modelagem e Análise de Fraturas em Vigas de Concreto Utilizando DBEM e o Programa BEMCracker2D. In: **XLIII Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**. 2022.

MOURA, D. C. **Caminho de Propagação de Trinca: Modelagem Automática e Comparação de Diferentes Critérios com o Programa BEMCracker2D**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília,

DF, 17-18, 27-32p, 2019.

OLIVEIRA, T. A. A. (2018). **Análise multiescala via Método dos Elementos de Contorno Dual de fuselagem de aeronave submetida à fadiga**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM - 03A/19 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 111 p.

OLIVEIRA, Tiago da Silva. **Método sem malha local: subtração da singularidade em mecânica da fratura linear elástica**. 2019. 129 f. il. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2019.

PEREIRA, S. C. M.; GOMES, G. Estudo e simulação numérica da malha de elementos de limite na trajetória de crescimento da fenda. In: **XXXVIII Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**. 2017.

PEREIRA, Stephanie C. M. (2018). **Estudo, verificação e modelagem do caminho de propagação de trincas discretizado com elementos de contorno**. Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM 06A/18, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 107p.

PETERSSON, P.E. (1981). **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Report TVBM-1006, Div. of Building Materials, Lund Inst. of Tech., Lund, Sweden.

PINTO, André Luis. **Análise numérico/experimental da trajetória da trinca submetida a modos mistos de carregamento**. 2018. 151 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Ciências Mecânicas, Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

PITUBA, J. J. C. **Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto**. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

PORTELA, A., ALIABADI, M. H. e ROOKE, D. P., 1992, **The Dual Boundary Element Method: Effective implementation for crack problems**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pp. 1269-1287.

PRADO, E. P. A Influência da Estrutura Interna do Material na Simulação Computacional de Elementos Estruturais de Concreto. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2004. 253 p. Tese de Doutorado.

PROENÇA, S. P. B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: Análise crítica e contribuições**. Tese de Doutorado, Universidade de São

Paulo, São Carlos, 1988.

RODRIGUES, W. M. (2018). **Estudo, implementação e simulação de coalescência com múltiplas trincas usando o BemCracker2D**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação DM-26A/18, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 130p.

RODRIGUES, W. M.; GOMES, G. **Linkup de múltiplas trincas com elementos de contorno dual usando o programa BEMCRACKER2D**. In: simpósio de mecânica computacional, 8., 2018, Vitória. p. 1-15.

ROESLER, J. et al. **Concrete fracture prediction using bilinear softening**. Cement and Concrete Composites, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 300–312, 2007.

SALEH, A. L.; ALIABADI, M. H. Crack Growth Analysis in Reinforced Concrete Using BEM. **Journal Of Engineering Mechanics**, [S.L.], v. 124, n. 9, p. 949-958, set. 1998. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(1998\)124:9\(949\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(1998)124:9(949)).

SÁ, R.; GOMES, G.; SILVA, R. Detecção de fissuras em estruturas 2D usando transformada wavelet e método dos elementos de contorno. In: **XLIV Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**. 2023.

SHAH, S. P.; SWARTZ, S.E. e OUYANG, C. C. **Fracture mechanics of concrete: applications of fracture mechanics to concrete, rock and Other quase-brittle material**. Wiley-Interscience publication, USA, 1995.

SHZU, M. A. M. (2006). **Avaliação do Processo de Ruptura em Vigas de Concreto Considerando os Aspectos Dinâmicos**. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-003A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 179p.

SILVA, F. H. B. T. (2017). **Análise Numérica da Fratura no Concreto em Modo I e Modo Misto Utilizando Elemento de Junta**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-08A/17, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 106p.

SILVEIRA, N. P. P. **SIMULAÇÃO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS COM O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**. 2003. 87 f. Tese (Doutorado) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

SOUZA, R. A. **Análise de Fraturamento em Estruturas de Concreto Utilizando Programas de Análise Estrutural**. Dissertação de Mestrado. 249 p. Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, SP, 2001.

TEIXEIRA, M. C. **Análise Elastoplástica Da Propagação De Trincas Pelo Método Dos Elementos De Contorno**. 2006. 171 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

YANG, Z. e CHEN, J. (2005), '**Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams**', Engineering Fracture Mechanics vol. 72, 2280–2297.

APÊNDICE A1

Modo I:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$u = \frac{K_I}{\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_I}{\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0$$

• Modo II:

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$u = \frac{K_{II}}{\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_{II}}{\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0$$

- Modo III:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$u = v = 0$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu} \left[2 \frac{r}{\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson; μ é o módulo de elasticidade cisalhante; u , v e w são os deslocamentos em x , y e z , respectivamente. Além disso, o parâmetro K pode ser empregado em duas ocasiões: placa infinita e placa finita (Mafra, 1980; Rodrigues, 2018; Broek, 1984). As expressões a seguir representam cada situação respectivamente.

$$K = \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$K = \sigma_{nom} \sqrt{\pi a} f \left(\frac{a}{W_{pl}} \right)$$

onde σ_{nom} é a tensão nominal da seção bruta; a é o comprimento da trinca; W_{pl} é a largura da placa, tido também como comprimento da fenda possível, e; f é uma função adimensional que correlaciona a geometria, as configurações de carregamento, a orientação e a forma da trinca.

APÊNDICE A2

Método *BCCohsCRFLAG()*

```

void BemCrk_COHSIVE::BCCohsCRFLAG(int ntip, int nel)
{
    int nfc, nopena, nfca;
    int it, m;
    //-----CARACTERIZANDO O ELEMENTO DE TRINCA
    // NEDE = 0 : TRINCA ABERTA - LIVRE DE TRAÇÃO
    // NEDE = 1: TRINCA FICTICIA
    // NEDE = 2: TRINCA FECHADA
    // NEBI = CURVA BILINEAR
    //loop para cada ponta de trinca
    for (it=1;it<=ntip;it++)
    {
        nfc = m_ncrel - m_NOPEN[it-1];
        nopena = m_NOPEN[it-1];
        nfca = nfc;
        //flag do elemento de trinca
        for (m=0;m<=nel;m++)
        {
            if(nopena>0)
            { //TRINCA ABERTA
                for(int i=0;i<3;i++)
                {
                    m_NEDE[i][m] = 0;
                    m_NEBI[i][m] = 0;
                    m_NEDE[i][m_IECR[m]-1] = 0;
                    m_NEBI[i][m_IECR[m]-1] = 0;
                }
                nopena = nopena - 1;
            }
            else if(nfca > 0)
            { //TRINCA FICTICIA
                for(int i=0;i<3;i++)
                {
                    m_NEDE[i][m] = 1;
                    m_NEBI[i][m] = 1;
                    m_NEDE[i][m_IECR[m]-1] = 1;
                    m_NEBI[i][m_IECR[m]-1] = 1;
                }
                nfca = nfca - 1;
            }
            else
            { //TRINCA FECHADA
                for(int i=0;i<3;i++)
                {
                    m_NEDE[i][m] = 2;
                    m_NEBI[i][m] = 2;
                    m_NEDE[i][m_IECR[m]-1] = 2;
                    m_NEBI[i][m_IECR[m]-1] = 2;
                }
            }
        }
    }
}

```

Método *BCCohsModels()*

```

void BemCrk_COHSIVE::BCCohsModels(int ifict)
{
    double fwn, fctb;
    //Dois modelos implementados: LINEAR e BILINEAR
    if(ifict==1)//LINEAR
    {
        m_codcr = 2.*m_gf*1.e-6/m_fct;
        m_cobcr = m_codcr;
        Curve[0] = m_codcr;
        Curve[1] = m_cobcr;
        Curve[2] = 0.;
        Curve[3] = 0.;
    }
    else if(ifict==2)//BILINEAR
    {
        //Modelo de PETERSSON
        m_codcr = 3.6*m_gf*1.e-6/m_fct;
        m_wnb = 2.*m_codcr/9.;
        //Modelo de OHLSSON
        //m_codcr = 4.*m_gf*1.e-6/m_fct;
        //m_wnb = m_codcr/6.;
        //Primeira curva
        fwn = m_fct/3.;
        m_cobcr = m_fct*m_wnb/(m_fct-fwn);
        fctb = fwn*m_codcr/(m_codcr-m_wnb);
        Curve[0] = m_codcr;
        Curve[1] = m_wnb;
        Curve[2] = m_cobcr;
        Curve[3] = fctb;
    }
}

```

Método BCCohsFictit()

```

void BemCrk_BEMSYS::BCCohsFictit(int m, int nr1, int nr2, int n0)
{
    coef = pCohs->m_fct/pCohs->m_cobcr;
    .....
    if(nr1 == lcol && l == 1)
    //matriz diagonal unitaria para U
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol-1] = pQdj->m_UN[0];
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol+1-1] = pQdj->m_UN[1];
    pGrl->m_A[nr2-1][lcol-1] = -pQdj->m_UN[1];
    pGrl->m_A[nr2-1][lcol+1-1] = pQdj->m_UN[0];
    ....
    if(pCohs->m_JCRELM[m-1] == -1)
    //equação deslocamento
    if(pCohs->m_NEDE[i-1][m-1] == 0)//trinca aberta
    {
        pGrl->m_F[nr1-1] = 0.;
        pGrl->m_F[nr2-1] = 0.;
    }
    else if(pCohs->m_NEDE[i-1][m-1] == 1)//trinca ficticia
    // F = resistencia maxima a traçao
    pGrl->m_F[nr1-1] = pCohs->m_fct;
    pGrl->m_F[nr2-1] = 0.;//sem cisalhamento
    pGrl->m_A[nr2-1][lcol-1] = 0.;
    pGrl->m_A[nr2-1][lcol+1-1] = 0.;
    //Un no No A
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol-1] = -coef*pQdj->m_UN[0];
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol+1-1] = -coef*pQdj->m_UN[1];
    //Un no No B
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol+3-1] = coef*pQdj->m_UN[0];
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol+3+1-1] = coef*pQdj->m_UN[1];
    else
    //equação tração
    if(pCohs->m_NEDE[i-1][m-1] == 0)//trinca aberta
    {
        pGrl->m_F[nr1-1] = 0.;
        pGrl->m_F[nr2-1] = 0.;
    }
    else if(pCohs->m_NEDE[i-1][m-1] == 1)//trinca ficticia
    //rotaciona matriz diagonal unitaria para T
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol-1] = pCohs->m_unt1;
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol+1-1] = pCohs->m_unt2;
    pGrl->m_A[nr2-1][lcol-1] = -pCohs->m_unt2;
    pGrl->m_A[nr2-1][lcol+1-1] = pCohs->m_unt1;
    .....
    if(pCohs->m_JCRELM[m-1] == -1)
    //equação deslocamento
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol-1] = pGrl->m_A[nr1-1][lcol-1] - pElem->m_GW1[lc-1];
    pGrl->m_A[nr2-1][lcol-1] = pGrl->m_A[nr2-1][lcol-1] - pElem->m_GW2[lc-1];
    }
    else
    //equação tração
    pGrl->m_A[nr1-1][lcol-1] = pGrl->m_A[nr1-1][lcol-1] - pElem->m_GW1[lc-1];
    pGrl->m_A[nr2-1][lcol-1] = pGrl->m_A[nr2-1][lcol-1] - pElem->m_GW2[lc-1];
    }
}

```

Método *BCIterat()*

```

void BemCrk_BEMSYS::BCIterat(int neq0)
{
    //inicializando carga
    for (m=1;m<=pGrl->nnel;m++)
    {
        if(pCohs->m_VBCF[m-1]!=0. && m1==1)
        {
            vbc1 = pCohs->m_VBCF[m-1]/pCohs->m_PRATIO[m-1];
            m1 = m1 + 1;
        }
    }
    //computando tensoes em pontos internos
    BCpoint(kiter);
    //Computa nova carga e gera nova matriz A e novo vetor F
    .....
    for(k1=1;k1<=pGrl->neqn;k1++)
    {
        pGrl->m_F[k1 - 1] = pGrl->m_FC[k1 - 1]*alfa;
        pGrl->m_FC[k1 - 1] = pGrl->m_F[k1 - 1];
    }
    BCSolver(1,pCohs->m_NNEQN2,2);//resolva o sistema de equações
    //Armazena a carga corrente
    if(pGrl->m_VBC[l-1][ij-1][m-1]!=0. && pCohs->m_ICRELM[m-1]!=-1 && pCohs->m_ICRELM[m-1]!=1)
        pGrl->m_VBC[l-1][ij-1][m-1] = vbc_1ry*pQd->m_UN[l-1]*pCohs->m_PRATIO[m-1];
    //Rearranja valores de contomo
    BCRearranjavC();
    //computando tensoes em pontos internos
    BCpoint(kiter);
    //imprime resultados
    BCTemres();
    //computa nova tração da ponta da trinca ctrr
    //Armazena carga final
    for (m = 1; m <= pGrl->nnel; m++)
    {
        pGrl->m_VBC[l-1][i-1][m-1] = vbc3*pCohs->m_PRATIO[m-1]*pQd->m_UN[l-1];
        pCohs->m_VBCF[m-1] = vbc3*pCohs->m_PRATIO[m-1];
    }
}

```

Metodo *BCIpoint()*

```

void BemCrk_BEMSYS::BCIpoint(int kiter)
{
    //loop sobre as pontas da trinca
    for (it=1;it<=pCrk->ntip;it++)
    { //coordenadas da ponta xtip, ytip
        itp1=pMesh->m_ITIP0[it-1];
        itp2=pMesh->m_ITIP1[it-1];
        .....
        //angulo e matriz de rotacao eixo global X para eixo da trica
        ang=0.5*(a1+a2);
        //define alfa=2*pi(angulo de abertura)
        alfa=pi2-(a2-a1);
        //reajusta a extensão do comprimento da trinca
        cadv1 = pCrk->m_cadv;
        if(pCrk->ntip > 1)
        {
            if(it == (pCrk->ntip+1)/2)
                cadv1 = pCrk->m_cadv;
            else
                cadv1 = 0.5*pCrk->m_cadv;
        }
        //primeiro e ultimo ponto (Nos da trinca) do caminho
        //coordenadas polares do primeiro ponto (ring, ftheta)
        //loop sobre os segmentos do caminho com um passo impar para gerar pontos internos
        //geracao dos pontos internos (simetricos ao eixo da trinca), comecam e findam em ponto do contomo
        //calcula tensao e derivada de deslocamento nos pontos internos
        BCSollnt(nst, nfi, true);
        //Computa tensões principais e outros parâmetros na ponta da trinca
        Sijk[0]=xtip[7];
        Sijk[1]=ytip[7];
        Sijk[2]=ttip[7];
        Par=BCTenPrinc(Sijk);//metodo para calculo das tensoes
        //calculando o caminho correto
        if(abs(degg[7]<1))
        //Modo I puro
        cout << "----> MODO I <----" << endl;
        pCrk->m_THETA[it-1] = 0.;//igual a THETA1
    }
}

```