As lógicas da justificação e o problema do regresso

Jefferson de Souza

Dissertação apresentada ao PPGFIL/UnB com o propósito de se obter o grau de
Mestre em Filosofia

Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Universidade de Brasília
Brasília
2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Humanas
Departamento de Filosofia
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

As lógicas da justificação e o problema do regresso

Jefferson de Souza

Sob a orientação do
PROF. DR. ALEXANDRE COSTA-LEITE

Brasília
2023

As lógicas da justificação e o problema do regresso

Jefferson de Souza

Resumo

A justificação é uma condição necessária para o conhecimento. Se o objetivo é garantir que sabemos que φ, o nosso sucesso depende então da posse de justificações de que φ. Para tanto, podemos oferecer um argumento com premissas $\psi_1, ..., \psi_n$ e conclusão φ. Esta razão que oferecemos para φ, presumivelmente, só é boa se pudermos obter garantias da verdade das próprias premissas $\psi_1, ..., \psi_n$. Se continuarmos da mesma forma, sempre oferecendo um novo argumento com novas premissas, então teremos uma regressão infinita, e aparentemente nunca conseguiremos obter algo que seja de fato uma garantia última de que φ. Estamos diante de um velho e conhecido obstáculo para a obtenção de todo tipo de conhecimento, o *problema do regresso epistemológico*. Nem todas as regressões infinitas são problemáticas, mas as regressões de justificação são. Por quê? O que torna as regressões epistêmicas viciosas em vez de benignas? Esta dissertação analisa respostas coletadas da literatura. Buscamos também oferecer uma contribuição à discussão, utilizando as lógicas da justificação na construção de um argumento segundo o qual as regressões epistêmicas são viciosas porque são incompletas.

Palavras-chave: problema do regresso; ceticismo; lógicas da justificação; incompletude das regressões.

Justification logics and the regress problem

Jefferson de Souza

Abstract

Justification is a necessary condition for knowledge. If the aim is to guarantee that we know that φ, our success depends on justifications that φ. For this purpose, we can offer an argument with premises $\psi_1, ..., \psi_n$ and conclusion φ. Presumably, this reason we offer for φ is good only if we can obtain guarantees of the truth of the premises $\psi_1, ..., \psi_n$ themselves. If we continue in the same way, always offering a new argument with new premises, then we will have an infinite regress, and apparently we will never be able to obtain something that is indeed an ultimate guarantee that φ. We face an old and well-known obstacle to obtain all kinds of knowledge, the *epistemological regress problem*. Not all infinite regresses are problematic, but justification regresses are. Why? What makes epistemic regresses vicious rather than benign? This master's thesis studies answers collected from the literature. Furthermore, using logics of justification, it is argued that epistemic regresses are vicious because they are incomplete.

keywords: regress problem; skepticism; justification logics; incompleteness of the epistemological regresses.

Agradecimentos

À minha amada mãe, por tudo. Ao prof. Alexandre Costa-Leite, pela orientação, liberdade, confiança, compreensão e generosidade. Aos membros da banca de defesa, a prof.ª Itala D'Ottaviano e o prof. Edgar Luis de Almeida, pelos apontamentos. Aos profs. Fabien Schang e Edgar Luis de Almeida, pelas recomendações oferecidas durante o exame de qualificação. Às secretárias do POSFIL/UnB, Andreia Rezende e Alaídes Melo, pelo apoio administrativo. À CAPES, pela bolsa de pesquisa.

Sumário

Introdução

A justificação epistêmica é um pré-requisito para o conhecimento proposicional. Dessa forma, se colocamos como objetivo conhecer a verdade de uma proposição, φ, o sucesso de nossa empresa estará então condicionado à posse de garantias quanto à verdade de que φ. Como é habitual, a fim de adquirir essas garantias, podemos construir um argumento com premissas $\psi_1, \ldots, \psi_n$ e conclusão φ. Presumivelmente, entretanto, a garantia que agora temos será boa apenas se conseguirmos obter garantias quanto à verdade das próprias premissas $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Para isso, podemos oferecer novos argumentos para cada uma dessas premissas. Para ψ_1, por exemplo, um argumento com premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ e conclusão ψ_1. Outra vez, entretanto, podemos nos perguntar sobre as garantias quanto à verdade das premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, e se prosseguirmos avançando sempre do mesmo modo, oferecendo sempre um novo argumento com novas premissas, iremos a uma regressão que é infinita, e aparentemente nunca estaremos em condições de obter algo que seja de fato uma garantia da verdade da proposição inicial φ. Pela generalidade da proposição φ, essas observações destacam um antigo e já muito conhecido obstáculo para a obtenção de conhecimento, o *problema do regresso*.

Em torno da temática do regresso, no decurso da história da filosofia, um número expressivo de posições já foram avançadas, algumas sobre a natureza da justificação, outras sobre os limites do conhecimento. Os céticos, como Agripa, no segundo de seus cinco tropos ou modos, utiliza o regresso para motivar a *epokhé*[1] (cf. Verdan (1998), [56], pp. 38-39; cf. *Outlines of scepticism*, I, 122, [54]). O fundacionalismo epistêmico, por sua vez, em uma versão de seu argumento do regresso, afirma que se, para cada agente epistêmico S, e para cada proposição φ, a crença de S de que φ está justificada apenas

[1]O termo *epokhé*, no interior do discurso cético, significa *suspensão* ou *retenção* do juízo.

no caso de φ ter sido inferida por S a partir de uma crença justificada ψ de S que resulta distinta da sua crença inicial de que φ, terá de existir então uma regressão infinita de justificações para que alguma das crenças de S termine ao fim justificada. Entretanto, tais cadeias infinitas de justificações não existem, conquanto tenhamos crenças justificadas, de onde deve existir crenças justificadas que não estão justificadas pelo recurso a outras crenças justificadas, isto é, crenças que foram justificadas de modo não inferencial. Dessa maneira, para contornar o problema do regresso, o fundacionalismo afirma a existência de um tipo especial de justificação, a não inferencial. À parte a realidade desses avanços, não parece haver nenhum acordo quanto ao grau de assertividade que se deve associar a eles, e as reais implicações desse problema ainda permanecem, em grande medida, um ponto de disputa filosófica. Apesar disso, a importância e a centralidade da questão do regresso são ambas lugares de consenso.

As regressões epistêmicas costumam ser frequentemente apresentadas como um *obstáculo* ou *empecilho*. Um cético global, por exemplo, pode apresentar regressões como um óbice à obtenção de qualquer espécie de conhecimento proposicional. Para um fundacionalista, as regressões podem ocorrer como dificuldades removíveis apenas pelo reconhecimento da existência de justificações não inferenciais. Nolan (2001) pontua que certos regressos não epistêmicos não são vistos, por boa parte das pessoas, como problemáticos. Como exemplo, Nolan (2001) faz referência ao regresso de verdades que se apresenta quando assumimos que uma proposição qualquer é verdadeira. Se aceitamos que uma proposição, φ, é verdadeira, então devemos aceitar também que a proposição expressada pela frase "φ é uma proposição verdadeira" também é verdadeira, e que a proposição expressada pela frase "'φ é uma proposição verdadeira' é verdadeira" também é verdadeira, e assim por diante, ao infinito. Dessa forma, como sugestiona Nolan (2001), a taxonomia dos regressos parece comportar duas categorias, a dos *problemáticos* ou *viciosos*, e a dos *não problemáticos* ou *benignos*, e uma questão filosoficamente relevante consiste em entender porque certos regressos estão em uma categoria, mas outros não (cf. Nolan (2001), [45]). Neste trabalho, procuramos investigar a questão da viciosidade das regressões infinitas de justificações. Pressupomos sua viciosidade para, a partir disso, investigar os motivos disso.

Talvez a resposta mais imediata à questão da viciosidade das regressões baseia-se na finitude do ser humano. Enquanto agentes epistêmicos temporalmente finitos, não podemos nunca dar conta de uma quantidade infinita de atos de justificação. Se, para justificar uma proposição, φ, temos antes que justificar uma outra proposição, ψ_1, e, antes de justificar ψ_2, temos que justificar ainda uma outra, ψ_3, e assim por diante, *ad infinitum*, então a tarefa será, para nós, sempre inexequível, pois nos faltará tempo para terminá-la. No capítulo 3, procuramos mostrar que outras respostas também são possíveis. A resposta que procuramos defender diz que as regressões epistêmicas são viciosas porque, ainda que, a fim de justificar uma proposição φ, pudéssemos dar conta de uma série infinita de atos de justificação, o saldo dessa tarefa laboriosa não seria senão a garantia de que φ está *condicionalmente* justificada, quer dizer, que, por exemplo, φ está justificada se ψ_1 está justificada, e que ψ_2 está justificada se ψ_3 está justificada, e assim por diante, *ad infinitum* (cf. Dancy (2002), [24], p. 77).

No capítulo 3, apresentamos um argumento a favor dessa resposta. Esse argumento foi construído usando ferramentas teóricas da lógica da justificação. Desse modo, procuramos reunir, no capítulo 2, o conhecimento desses sistemas necessário aos nossos propósitos. A metodologia para o desenvolvimento deste argumento é a seguinte. Utilizando modelos de Fitting, nós formalizamos a noção de retrocesso epistêmico infinito. Na sequência, fazendo o uso da teoria da semântica de Fitting, procuramos mostrar que, de uma teoria que afirma a existência de uma regressão infinita para uma proposição, φ, não se pode, de maneira geral, sempre concluir que a proposição φ está justificada. Dito de outro modo, procuramos mostrar que é possível se ter uma regressão infinita para uma proposição, φ, e ela pode ainda não estar justificada. Acreditamos que esse argumento ofereça razões para pensar que, mesmo que pudéssemos dar conta de uma série infinita de atos de justificação, o nosso regresso infinito não tornaria nossa opinião inicial justificada, o que parece um indício forte a favor da tese de que retrocessos são viciosos porque são incompletos.

As ferramentas formais que utilizamos fazem parte de um programa de pesquisa em lógica da justificação que se desenvolve a partir de Artemov (1995) (cf. [10]).[2] Trata-se de sistemas que oferecem uma linguagem formal na qual as expressões da forma "τ é uma justificação para φ", ou da forma "τ é uma razão para φ", podem ser formalizadas por meio de fórmulas da forma $\tau{:}\varphi$, de modo análogo aos sistemas modais aléticos, que oferecem linguagens formais nas quais expressões da forma "é necessário que φ" e "é possível que φ´´ podem ser formalizadas por meio de fórmulas da forma $\Box\varphi$ e $\Diamond\varphi$. Desse modo, as linguagens justificacionais de nível proposicional são geralmente construídas a partir de um conjunto de variáveis proposicionais $\mathcal{P}$ e de uma coleção de termos $\mathcal{T}$, fazendo-se o uso das cláusulas usuais para os conectivos sentenciais e a seguinte cláusula adicional:

t. Se φ é uma fórmula e τ é um termo, então $\tau{:}\varphi$ também é uma fórmula.

Os membros do conjunto $\mathcal{T}$, que se chamam *termos justificacionais*, são todos símbolos para representar justificações, razões e evidências. Por conta disso, podemos, por exemplo, escolher um símbolo $e \in \mathcal{T}$ para representar a demonstração de Euclides, e uma variável proposicional $p \in \mathcal{P}$ para representar a proposição que afirma a existência de infinitos números primos, e assim a sentença "a demonstração de Euclides é uma razão para a verdade da proposição que afirma a existência de infinitos números primos" pode ser formalizada simplesmente como $e{:}p$.

As lógicas da justificação admitem que os termos justificacionais tenham estrutura e possam ser construídos por meio de uma coleção enumerável $\mathcal{O}$ de símbolos para operações, a partir de um conjunto contável de variáveis $\mathcal{V}$, chamadas *variáveis justificacionais*, e de um conjunto contável de constantes $\mathcal{C}$, chamadas *constantes justificacionais*. Os símbolos para operações mais frequentemente utilizados são o símbolo "+", chamado *soma*, e o símbolo "·", chamado *produto*. O seguinte formalismo de Backus-Naur define um conjunto de termos justificacionais:

$$\mathcal{T} := \mathcal{V} \mid \mathcal{C} \mid (\mathcal{T} + \mathcal{T}) \mid (\mathcal{T} \cdot \mathcal{T})$$

[2]O programa inaugurado por Artemov (1995) diferencia-se, em muitos aspectos, do trabalho em lógica da justificação desenvolvido, de forma independente, por da Costa (1999). O leitor interessado na abordagem de da Costa deve consultar seu livro *O conhecimento científico* (cf. [23], p. 27).

Admitir que termos justificacionais têm estrutura e podem ser construídos por meio de operações, a partir de constantes e variáveis, fornece às lógicas da justificação a capacidade de expressar na linguagem objeto algumas propriedades frequentemente exemplificadas por razões, evidências e justificações. Um exemplo é a propriedade da *monotonicidade*, segundo a qual, se τ é uma razão para a proposição φ, então a razão τ, mesmo na presença de uma outra razão π, ainda permanece uma razão para φ. Dito de outro modo, a monotonicidade exprime o caráter inderrogável de algumas razões, como as demonstrações matemáticas, e deixa-se equacionar pelas instâncias dos seguintes dois esquemas:

$$\tau{:}\varphi \rightarrow [\tau + \pi]{:}\varphi \ \text{ e } \ \tau{:}\varphi \rightarrow [\pi + \tau]{:}\varphi \tag{1}$$

Uma outra propriedade das razões que é susceptível de formalização nas lógicas da justificação é a propriedade do *fecho justificacional*, segundo a qual, se τ é uma razão para φ, e π é uma razão para $(\varphi \rightarrow \psi)$, então τ com π fornece uma razão para ψ. Tal propriedade pode ser equacionada pelas instâncias do seguinte esquema:

$$\tau{:}\varphi \rightarrow (\pi{:}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [\tau \cdot \pi]{:}\psi) \tag{2}$$

A propriedade do fecho justificacional é virtualmente aceita em toda a matemática, onde, para se provar uma proposição ψ, basta ter uma prova de que φ, e uma prova de que ψ é uma consequência de φ. Esta propriedade também tem aceitabilidade na filosofia. Por exemplo, na análise contemporânea do conhecimento, toda a argumentação de Gettier parece depender do princípio do fecho justificacional (cf. Gettier (1963), [33]; cf. Artemov (2008), [9]).

Além da monotonicidade e do fecho justificacional, outras duas propriedades das razões que também são susceptíveis de formalização nas lógicas da justificação são a factividade e a verificabilidade. Segundo a propriedade da *factividade*, se τ é uma razão para φ, então φ é verdadeira. A factividade é uma propriedade comumente aceita das provas matemáticas (para consultar um filósofo que parece defender a factividade das provas matemáticas, o leitor pode conferir Costa-Leite (2014, 2018)). Segundo a *verificabilidade*, outra propriedade frequentemente associada às provas matemáticas, se τ é uma razão para φ, então há uma justificação π para τ ser uma razão para φ. Na lógica da justificação, esta justificação é geralmente representada fazendo-se o uso do símbolo "!", chamado função *certificadora de provas*. Desse modo, na lógica da justificação, se τ é uma razão para φ, então $!(\tau)$ é uma justificação para τ ser uma razão para φ, ou, de modo mais específico, se τ é uma prova de que φ, então $!(\tau)$ é uma prova de que τ é uma prova de que φ. A factividade deixa-se equacionar a partir do esquema $\tau{:}\varphi \rightarrow \varphi$. A verificabilidade a partir do esquema $\tau{:}\varphi \rightarrow !(\tau){:}(\tau{:}\varphi)$.

A partir desta análise preliminar das lógicas da justificação, não é difícil ver, por um lado, que as linguagens justificacionais são algo semelhantes às linguagens aléticas, e, por outro, que os esquemas justificacionais que foram utilizados para equacionar a factividade, a verificabilidade e o fecho justificacional mantêm uma similaridade estrutural com os esquemas aléticos [T], [4] e [K], tomados respectivamente (cf. Carnielli e Pizzi (2008), [16]; Chellas (1980), [18]). Uma vez que as linguagens justificacionais, ao lado desses esquemas, participam da axiomatização de um número expressivo de lógicas da justificação, ocorre que, de uma perspectiva ainda mais geral, muitas das lógicas da justificação acabam por manter fortes relações de similaridade com uma grande quantidade de sistemas modais aléticos (cf. Artemov e Fitting (2019), [8]).

[K] $\Box\varphi \rightarrow (\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box\psi)$

[4] $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

[T] $\Box\varphi \rightarrow \varphi$

As características que as lógicas da justificação compartilham com os sistemas modais aléticos têm motivado o desenvolvimento de um programa de pesquisa interessante e ainda com muitas questões em aberto. Nesse programa, as similaridades entre as lógicas da justificação e os sistemas modais são geralmente estabelecidas por intermédio de teoremas chamados *teoremas de realização*. Coletadas de Goetschia (2012), as definições 0.1, 0.2 e 0.3 fornecem uma visão geral sobre o que são esses teoremas de realização, e também sobre o tipo de similaridade que capturam e estabelecem. Para isso, precisamos antes estabelecer alguma notação. Na sequência, $\mathcal{J}$ denota uma lógica da justificação cuja linguagem é $\mathcal{L}_{\mathcal{J}}$, e $\mathcal{S}$ um sistema modal cuja linguagem é $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. Vamos assumir que $\mathbb{J}$ seja o conjunto dos teoremas da lógica $\mathcal{J}$, e que $\mathbb{S}$ seja o conjunto dos teoremas do sistema $\mathcal{S}$. Por fim, vamos admitir que, se $f : \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ é uma função, e $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$, então $\Gamma^f := \{f(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$.

Definição 0.1 (Função de esquecimento) Uma *função de esquecimento* é uma função $\circ : \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ que a cada fórmula justificacional φ associa uma única fórmula modal $\circ(\varphi) := \varphi^\circ := [\varphi]^\circ$, recursivamente definida, para cada membro do conjunto $\mathcal{L}_{\mathcal{J}}$, segundo a seguinte lista de cláusulas:

a. Para uma variável proposicional p, temos $p^\circ := p$.

b. Para fórmulas justificacionais da forma $\neg\varphi$, temos $[\neg\varphi]^\circ := \neg[\varphi]^\circ$.

c. Para fórmulas justificacionais da forma $(\varphi \vee \psi)$, temos $[(\varphi \vee \psi)]^\circ := (\varphi^\circ \vee \psi^\circ)$.

d. Para fórmulas justificacionais da forma $\tau{:}\varphi$, temos $[\tau{:}\varphi]^\circ := \Box\varphi^\circ$.

$\Box$

Uma função de esquecimento é uma função da linguagem justificacional no conjunto de sentenças modais que troca todas as ocorrências dos termos justificacionais por ocorrências do operador de necessidade, mantendo os demais símbolos inalterados. Por exemplo, se s e t são dois termos justificacionais distintos, as fórmulas $s{:}\varphi \to \varphi$ e $t{:}\varphi \to \varphi$ têm imagem, segundo $\circ$, igual a $\Box\varphi^\circ \to \varphi^\circ$. Desse modo, parece de fato apropriado o emprego da expressão 'esquecimento' para se referir a essa função, uma vez que ela, dados quaisquer dois termos distintos, "esquece" e "ignora" as suas diferenças, por isso eventualmente levando fórmulas justificacionais distintas em sentenças modais idênticas.

Definição 0.2 (Realizar) Dizemos que a lógica da justificação $\mathcal{J}$ *realiza* o sistema modal $\mathcal{S}$ se, e só se, $\mathbb{J}^\circ = \mathbb{S}$, ou seja, se, e só se, a imagem da função esquecimento, quando restrito ao conjunto dos teoremas de $\mathcal{J}$, é exatamente o conjunto dos teoremas de $\mathcal{S}$.

$\square$

Definição 0.3 (Teorema de realização) Um *teorema de realização* para $\mathcal{J}$ e $\mathcal{S}$ é um teorema cujo enunciado afirma que $\mathcal{J}$ *realiza* $\mathcal{S}$. Se há um teorema de realização para $\mathcal{J}$ e $\mathcal{S}$, escreveremos apenas $\mathcal{J} \rightsquigarrow \mathcal{S}$.[3]

$\square$

O primeiro teorema da realização foi demonstrado por Artemov (1995) (cf. [10]). A prova dada por Artemov (1995) é construtiva e estabelece que uma lógica da justificação, LP, realiza o sistema modal S4. Brezhnev (2000) demonstrou que três lógicas da justificação, J, JT e J4, realizam, respectivamente, os sistemas modais K, T e K4 (cf. Brezhnev (2000), [13]). Fitting (2003, 2005, 2014) forneceu uma metodologia não construtiva para a demonstração de teoremas de realização, demonstrando com esta metodologia que um bom número de sistemas modais podem ser realizados por certas lógicas da justificação apropriadas (cf. Fitting (2003), [30]; Fitting (2005), [29]; Fitting (2014), [28]). Goetschi e Kuznets (2012) demonstraram teoremas de realização para todos os sistemas modais do cubo modal (cf. Goetschi e Kuznets (2012), [35]). Artemov e Fitting (2019) demonstraram que todos os membros de uma família infinita de lógicas modais, as lógicas de Geach[4], são realizados por lógicas da justificação apropriadas, obtendo assim, como corolário, que os sistemas modais susceptíveis de serem realizados por alguma lógica da justificação existem em número infinito (cf. Artemov e Fitting (2019), [8]). Na conclusão deste trabalho, consideramos brevemente a possibilidade de se utilizar essa proximidade, entre as lógicas da justificação e os sistemas modais, como instrumento de análise comparativa entre as regressões modais, como os retrocessos aléticos, e os regressos de justificações.

Este trabalho está organizado do seguinte modo. No capítulo 3, falamos sobre modelos epistêmicos para regressões, oferecemos uma revisão de literatura sobre a questão

[3] Sejam $\mathcal{J}$ e $\mathcal{S}$, respectivamente, uma lógica da justificação e um sistema modal. Suponhamos que $\mathcal{J}$ seja finitária e, além disso, que temos um teorema da dedução para ela. Dessa forma, se $\mathcal{J} \rightsquigarrow \mathcal{S}$, então a função de esquecimento é uma *tradução lógica* de $\mathcal{J}$ no sistema $\mathcal{S}$, assumindo-se as noções de tradução e lógica presentes em Feitosa e D'Ottaviano (2001) (cf. [27], pp. 206-208, definições 1.1 e 1.10).

[4] Artemov e Fitting (2019) denominam *lógicas de Geach* os sistemas modais que podem ser axiomatizados adicionando ao sistema **K** uma coleção de esquemas $\Diamond^k \Box^l \varphi \rightarrow \Box^m \Diamond^n \varphi$, onde $k, l, m, n \geq 0$ (cf. [8], p. 142-143, definição 8.2).

da viciosidade e apresentamos nosso argumento a favor da tese de que regressões são viciosas porque são incompletas. No Capítulo 2, dedicamo-nos inteiramente a uma introdução às lógicas da justificação. No capítulo 1, falamos sobre conhecimento, justificações e justificadores.

Esta dissertação pode ser considerada uma tentativa de oferecer uma crítica ao infinitismo, mas também o ensaio de uma contribuição original à doutrina cética. Os dois pontos de vista parecem-me igualmente adequados. Todavia, enquanto a razoabilidade da primeira perspectiva vai se tornando cada vez mais clara à medida que caminhamos, a plausibilidade da segunda, assumindo-se uma certa concepção corrente do ceticismo, corre o risco de percorrer, ao longo do texto, precisamente o caminho oposto. Segundo essa concepção, o cético, sob nenhuma circunstância, dá apoio a uma opinião, seja qual for a finalidade em questão. Assumindo-se esse conceito do ceticismo, pode-se afirmar, por exemplo, que as ferramentas lógico-formais do segundo capítulo têm, ao menos na aparência, a forma de um gênero de componente difícil de se compatibilizar com uma orientação cética. Essa visão não é suficientemente adequada. Se alguém se utiliza da lógica e da matemática com a finalidade de *suspensão do juízo*, e se, como os remédios purgativos, ou como um artefato explosivo, as teses inicialmente levantadas destroem-se a si mesmas, que movimento é esse senão uma expressão genuína do espírito cético?

Capítulo 1

Conhecimento, justificação e argumentos de regressão

O objetivo deste capítulo é duplo. Primeiro, buscamos situar este trabalho no contexto do internismo/externismo. Faremos isso na seção 1.2. Nossa maior preocupação, quanto a isso, é avaliar se podemos trabalhar — com as lógicas da justificação adotadas e a problemática dos retrocessos — mantendo-nos neutros com relação a essa disputa. Segundo, antes de investigar as regressões propriamente ditas, será proveitoso deter-se no gênero de argumento que mais frequemente as utiliza, os argumentos de retrocesso ao infinito para o fundacionalismo epistêmico. Procuramos trabalhar essa questão na seção 1.3. Como começar? Um bom ponto de partida para este trabalho consiste em repassar algumas considerações sobre o conhecimento proposicional, a justificação e o ceticismo. Esta é a tarefa da seção 1.1.

1.1 O conhecimento carece de justificação

Parece razoável a tese segundo a qual *algumas* de nossas opiniões estão erradas. Essa razoabilidade pode ser motivada a partir da história da ciência, onde ideias, de início amplamente aceitas, já se revelaram posteriormente falsas. Pode-se motivá-la ainda a partir de indícios coletados da própria vida cotidiana, pois muito frequentemente nos enganamos a respeito de fatos simples do dia a dia, como o nome de um vizinho, ou o local em que estacionamos o carro. A posição cética[1] obtém desses desacertos alguma plausibilidade e se eles depõem, fazem-no a seu favor, pois nos informam, quando notados, que as nossas expectativas de conhecimento estão algo aquém do que esperávamos. Se testemunham a seu favor, ou contribuem para a sua plausibilidade, não parecem fornecer todavia quaisquer garantias conclusivas à posição, uma vez que casos de desacerto no passado, da ciência ou da vida cotidiana, são sempre inteiramente consistentes com casos de acerto no presente e futuro.

Para boa parte das pessoas, a afirmação de que *todas* as suas opiniões estão erradas, sem espaço para exceções, simplesmente não desfruta, à primeira vista, de nenhuma plausibilidade, sendo a sua negação não apenas preferível, mas também perfeitamente conciliável com as falhas suas e da ciência. Podemos estar errados quanto ao nome de um dos nossos vizinhos, ou mesmo quanto ao local em que estacionamos o carro, no entanto, costuma ser dito, isso não ocorre por fatores que sejam inteiramente intransponíveis, mas, ao contrário, por razões que são circunstanciais e facilmente superáveis, como a falta de atenção, sendo que essas razões, quando afastadas, concedem a possibilidade do conhecimento. Desse modo, se estamos hoje errados quanto à localização do carro, na presença de atenção e cuidado, não cometemos o mesmo erro no dia seguinte, quer dizer, obtemos uma opinião acertada sobre o local em que estacionamos o veículo. E, no caso da ciência, aos desacertos que se originaram da sua prática passada, prosseguem, parece quase um contrassenso afirmar que não se somam a eles uma boa quantidade de acertos, sobretudo à luz da produção tecnológica recente. Desse modo, se se procura defender uma posição cética na qual, de um modo geral, o conhecimento é impossível, ou muitíssimo raro, o cético em questão parece então ter em mãos a tarefa de motivar a sua posição não por meio desses desacertos, circunstanciais e facilmente

[1]Verdan (1998) lembra-nos de que os termos "ceticismo" e "cético", em especial a partir do século XVIII, por vezes receberam conotações que são exageradamente estreitas, e.g., sendo utilizados para designar aquela atitude na qual se colocam em dúvida apenas as práticas e as crenças religiosas. Penso que a situação tenha talvez se estreitado ainda mais, com "cético" passando a funcionar por vezes como um sinônimo de "ateu", quer dizer, referindo-se àquele que crê na inexistência de Deus. Nesta dissertação, não utilizamos as expressões "posição cética", "ceticismo" e "cético" nessa acepção estreita, mas antes para se referir, nas palavras de Verdan (1998, pp. 7-8), àquela posição filosófica marcada pela completa oposição a toda forma de otimismo racionalista, àquela posição que, antes de admitir a razão como critério infalível de verdade, trabalha muito mais para trazer à luz os seus limites.

superáveis, nem por alusão a alguma plausibilidade *prima facie* da sua posição, pois ela não a tem, mas ao contrário por motivos que sejam antes intransponíveis, ou só muito raramente transponíveis, e isso com o uso de alguma argumentação sofisticada.

Um posicionamento desse gênero, segundo o qual o conhecimento é impossível, pode se apoiar na própria noção de conhecimento. A análise tradicional, a *definição tripartida*, decompõe esse conceito em três constituintes, a (C-1) crença[2], a (C-2) verdade e a (C-3) justificação epistêmica, e de modo que, para uma proposição, φ, um agente epistêmico, S, sabe que φ (cf. Gettier (1963)) se, e somente se,

(1) S crê que φ, e

(2) φ, e

(3) A crença de S de que φ está justificada.

A definição tripartida defende uma equivalência extensional entre o conceito de conhecimento e o conceito de crença verdadeira justificada, afirmando, desse modo, as seguintes duas teses (DANCY, 2002, [24], p. 39; RODRIGUES, 2013, [52], p. 6; ROLLA, 2018, [53], p. 35):

1. ***Tese C-CVJ.*** Todo caso de conhecimento é também um caso de crença verdadeira justificada.

2. ***Tese CVJ-C.*** Todo caso de crença verdadeira justificada é também um caso de conhecimento

Tal concepção da natureza do conhecimento parece encontrar seu início já na filosofia antiga, nomeadamente no *Teeteto* de Platão (429?-347 AEC). Assim como outras obras de Platão, o *Teeteto* tem a forma de um diálogo. Seu tema central é a problemática do saber (*episteme*), mormente a investigação da questão da natureza do conhecimento proposicional. No diálogo, o personagem principal, o matemático Teeteto, oferece-nos

[2]Utilizamos os termos "crença" e "opinião" com o mesmo propósito, a saber, para se referir às crenças, itens que, para Branquinho (2005, p. 84), consistem em estados psicológicos paradigmáticos da categoria das atitudes proposicionais (cf. [12]).

uma série de definições para o conhecimento. Sócrates (469-399 AEC), todavia, busca afastar cada uma dessas definições, uma a uma. A primeira é-nos dada em *Teeteto* 146c-d, onde se propõe que o conhecimento seja composto por saberes tais como os da geometria, e os das artes dos sapateiros e demais artesãos. A segunda, em *Teeteto* 151e, onde se propõe que o conhecimento seja identificado com a percepção, ou ainda, como esclarece Kenny (2008, [41], p. 186-7), que saber algo é percebê-lo com algum dos nossos sentidos. Sócrates esforça-se para oferecer argumentos contra cada uma dessas duas definições, levando o jovem Teeteto a mover-se em direção a uma proposta que parece prenunciar a definição tripartida.

Em *Teeteto* 187a-b, Platão propõe a tese de que o conhecimento seja opinião (*doxa*) verdadeira. Sócrates argumentará contra essa definição na sequência, pois parece pensar ser possível para alguém ter uma opinião que é verdadeira, porém que não é conhecimento. Em 201b-c, essas são as suas palavras:

> [. . .] Então, quando os juízes foram justamente persuadidos acerca de assuntos dos quais apenas pode saber aquele que viu e não outro, nesse momento, ao decidir sobre esses assuntos por ouvir dizer e ao adquirir uma opinião verdadeira, ainda que tenham sido correctamente persuadidos, tomaram a sua decisão, sem saber se na realidade julgaram bem, não?
>
> [. . .]
>
> [. . .] Amigo, se a opinião verdadeira e o saber fossem o mesmo, nem sequer o juiz mais competente poderia emitir uma opinião correta sem saber. E, contudo, neste momento cada uma delas parece ser diferente (*Teeteto* 201b-c).[3]

A justificação cumpre, entre outros, o desiderato de afastar a sorte epistêmica. Todavia, ela parece não dar conta da empresa. O trabalho de Gettier (1963) oferece motivos para pensar isso. Para o cético, entretanto, o que está em jogo na justificação talvez não seja tanto a questão da sorte epistêmica, mas, ao que parece, o papel que esse conceito desempenha, no interior da definição tradicional, como elo entre os seus outros

[3]A tradução desse trecho é de Adriana Manuela Nogueira e Marcelo Boeri, conforme Platão (2010, p. 302), tradução do *Teeteto* publicada pela Fundação Calouste Gulbenkian, de onde o retiramos.

dois componentes: a opinião e a verdade. A justificação, nas palavras de Costa-Leite (2014), oferece critérios para dizer a medida em que uma proposição está conectada com a verdade (COSTA-LEITE, 2014, [21], p. 174). E, em um caso extremo, se não temos justificação, se não temos a medida da conexão, não temos também conhecimento.

1.2 Justificações e justificadores

No terceiro capítulo, gostaria de colocar em discussão uma proposta de análise lógico-formal da noção de *regresso infinito de justificações*. Tais cadeias infinitas são compostas, manifestamente, por justificações. Mas o que seria uma justificação? Da forma como a palavra será utilizada no segundo capítulo, onde basicamente seguimos o emprego que ela tradicionalmente recebe nos estudos de lógica da justificação, é muito natural se pensar que, nesse ponto, assumimos uma concepção internista da justificação epistêmica. E isso *não* é verdade. Mas dizer só isso, que não é verdade, é falar muito pouco. Por exemplo, deixa em aberto se somos externistas, ou se procuramos nos manter neutros. Penso ser oportuno, dessa forma, um certo envolvimento preliminar com a busca de uma resposta, ainda que geral e não suficientemente informativa, à questão da natureza dos componentes que, segundo nossa opinião, figuram em tais cadeias. Dessa forma, ao longo desta parte do trabalho, procuro produzir um esforço nesse sentido, colocando em palavras o enquadramento geral que estou assumindo ter tais objetos. Adianto que por "justificação" irei entender o mesmo que "justificador" e que, além disso, penso que nossa posição, pela sua generalidade, mantém-nos neutros com relação à disputa internismo/externismo[4].

No cotidiano da vida comum, o termo "justificação" costuma transportar, por via

[4]Steup (2020, p. 33, [55]) apresenta a disputa internismo/externismo como um debate sobre a natureza dos J-fatores. O estado de justificada, se exibido por uma crença, mantém-se por conta da confluência de certos fatores. Semelhantemente, o estado de injustificada, se exibido por uma opinião, também se mantém por conta de certos fatores. Esses fatores, que tornam crenças justificadas ou injustificadas, são chamados por Steup (2020) de *J-fatores*. A disputa internismo/externismo, como coloca Steup (2020), é uma disputa sobre o que os J-fatores são. Internalistas defendem que *todos* os J-fatores são *internos*. Externalistas, por sua vez, defendem que *alguns* J-fatores *não são* internos. Internalistas podem divergir sobre a maneira como os J-fatores são internos. Por exemplo, *internalistas acessibilistas* sustentam que J-fatores são internos porque são sempre reconhecíveis por reflexão, enquanto *internalistas mentalistas* defendem que J-fatores são internos porque J-fatores são sempre estados mentais.

de regra, um conceito normativo que é utilizado, primordialmente, na caracterização de itens da vida prática, tais como ações, inações, decisões de Estado, leis jurídicas e políticas públicas. No dia a dia, podemos justificar ou colocar em questão a justificação de uma mentira, de um silêncio, da decisão de iniciar uma guerra, da norma que criminaliza um gênero de comportamento, de uma nova política ambiental, etc. Esse uso cotidiano do termo, marcado pela amplitude de seu domínio (que congrega ações, inações, decisões, leis, políticas, etc.) e pelo seu aspecto deontológico, diferencia-se consideravelmente da forma com que costuma ser empregado na ciência e na filosofia do conhecimento, onde, com um espaço de movimento um pouco mais reduzido, diz respeito, primordialmente, não a ações, mas a pessoas e crenças[5]. Os dois usos, apesar das descontinuidades, mantêm, aparentemente, certas relações. Por exemplo, até certo ponto, podemos utilizar a noção de justificação empregue na ciência e na filosofia do conhecimento para obter um maior entendimento da noção de justificação prática, isso porque, muitas vezes, esta só se mantém na existência, em alguma medida, daquela. Considere-se, como exemplo, a decisão de uma juíza de condenar um réu. Essa decisão, intuitivamente, só está justificada, da perspectiva prática, se a juíza toma a sua decisão em um cenário no qual está, para ela, justificada a crença de que o réu é culpado. Dessa maneira, a justificação prática de uma decisão pode, eventualmente, pressupor a justificação de certas crenças. Este trabalho concentra-se na justificação *teorética* ou *epistêmica*. Apesar disso, como se pode entrever, aumentando nossa compreensão sobre este conceito, terminamos também, de certa forma, por expandir o nosso entendimento sobre aquele.

A justificação epistêmica, por vezes, é considerada assumindo-se um ponto de vista doxástico, de onde se apresenta como uma propriedade das crenças de um indivíduo. Outras vezes, costuma ser pensada como uma característica que indivíduos têm em certas circunstâncias e com relação a certas proposições, ainda que não mantenham, nessas circunstâncias, nenhuma crença em tais proposições. No primeiro caso, falamos de justificação doxástica. No segundo, tocamos em um outro gênero de justificação,

[5]Respectivamente, justificação proposicional e justificação doxástica. Voltarei a esse ponto mais adiante.

a proposicional. Do ponto de vista da teoria do conhecimento, não parece existir, no conjunto desses dois tipos, um que seja privilegiado, muito menos alguma concorrência, como se estivéssemos de frente para uma disputa entre duas concepções da natureza da justificação, uma doxástica e outra proposicional. Alguém poderia pensar, não obstante, que, ao trocarmos um tipo de justificação por outro, nós meramente trocamos, como se poderia dizer, um seis pela metade de doze, uma intensão por outra coextensional. O mais frequente, todavia, é encontrar quem tenha em mente a ideia de que, se não é uma troca de seis pela metade de doze, é algo próximo, talvez uma troca de seis por cinco, vez que a diferença de uma para outra, segundo essas pessoas, residiria meramente na crença que é necessária para a primeira, mas não para a segunda. Penso que o mais apropriado seja concordar com os que sustentam que esse tipo de visão está equivocada. Parece-me perfeitamente possível para um sujeito, S, estar em uma situação onde é epistemicamente apropriado crer em uma proposição, φ, e de fato manter, nessa situação, a crença de que φ, mas, ainda assim, não ter a sua crença doxasticamente justificada, vez que a sua crença não vem a ser uma resposta aos aspectos que tornaram φ proposicionalmente justificada para ele. Como já perceberam alguns filósofos do conhecimento, as pessoas podem estar proposicionalmente justificadas a acreditar em uma proposição, φ, mas sustentarem a sua crença pelos motivos errados (cf. Pryor (2005), [51]; Korez (1997), [43]).

O status de justificada doxasticamente, se exibido por uma opinião, φ, *prima facie* mantém-se por conta de certos fatores. De modo semelhante, se exibido por uma opinião, o status de injustificada doxasticamente também se mantém por conta de certos fatores. Dito de outra forma, se acredito que φ, então ou a minha crença de que φ está justificada, ou a minha crença de que φ não está justificada. Se temos o primeiro caso, então *prima facie* existem certos fatores que *tornam* a minha opinião de que φ justificada. De modo análogo, se minha opinião de que φ não está justificada, então existem certos fatores que a *tornam* injustificada. De todo modo, portanto, sempre que acredito em uma proposição, certos fatores se fazem presentes, nomeadamente, os responsáveis pelo status justificada/injustificada da minha opinião em questão.

Esses fatores, que tornam crenças justificadas ou injustificadas, Steup (2020, p. 33, [55]) chama-os de *J-fatores*. Tomarei a liberdade de chamá-los de *J-fatores doxásticos*. Podemos, de maneira análoga, *mutatis mutandis*, oferecer essa discussão para o estado de justificada/injustificada proposicionalmente, obtendo assim uma concepção da noção de *J-fatores proposicionais*.

Se um J-fator doxástico, j, torna justificada a opinião, φ, de um sujeito, S, então podemos dizer que j é um *justificador doxástico* para a opinião de S de que φ. De modo semelhante, se um J-fator, j, torna injustificada a opinião, φ, de um sujeito, S, então podemos falar que j é um *injustificador doxástico*[6] para a opinião de S de que φ. De maneira semelhante, pode-se definir as noções de *justificador proposicional* e *injustificador proposicional*.[7]

Todo justificador proposicional parece ser um exemplo de gerador de justificação (*justification-maker*) proposicional, e vice-versa. Nas palavras de Pryor (2005, p. 182, [51]), um *gerador de justificação proposicional* é um estado ou condição (*condition*) (a) na qual alguém se encontra e (b) *em virtude do/da qual* está proposicionalmente justificado em acreditar em uma proposição φ. Trata-se de uma situação que torna, para os que nela estão, epistemicamente apropriado crer que φ. O correspondente doxástico dessa noção pode ser definido da seguinte maneira. Um *gerador de justificação doxástica*, tal

[6]Uma vez que optamos pela expressão 'justificador doxástico' para fazer referência aos J-fatores que tornam as crenças *justificadas*, pareceu-me natural utilizar a expressão 'injustificador doxástico' para se referir aos J-fatores que tornam crenças *injustificadas*. Não obstante, o termo 'injustificador' é uma "palavra artificial", no sentido de que não poderá ser encontrado em nenhum dos dicionários de língua portuguesa que consultamos. Dessa maneira, o leitor deve ter em mente que, para acomodar a naturalidade mencionada, permitiu-se um desvio lexical.

[7]O termo "justificador", na literatura filosófica, não costuma ser utilizado de uma maneira completa e inteiramente uniforme. Os três usos seguintes oferecem uma ilustração da situação. Alston (1986) parece usar a palavra "justificador" para se referir a estados de coisas e fatos responsáveis pelo status de justificada de crenças (cf. Alston (1986), [4], p. 182). Goldman (2009), por sua vez, utiliza a palavra "justificador" para denotar qualquer propriedade, condição ou estado de coisas que seja positiva ou negativamente relevante para o status de justificada de uma crença e, de maneira mais geral, de qualquer outra atitude doxástica (cf. Goldman (2009), [36], p. 311). Pryor (2005), enfim, parece chamar de "justificador" qualquer estado ou condição na qual um sujeito, S, está e em virtude do qual uma proposição φ está proposicionalmente justificada para S. Para Pryor (2005), um "justificador" é uma condição que torna epistemicamente apropriado (ou mais apropriado) para alguém, S, crer em uma proposição, φ (cf. Pryor (2005), [51], p. 182). Se essa falta de precisão traz consequências ou não, este trabalho não é o local mais adequado para se tentar dar uma resposta. Será suficiente, para os nossos propósitos, comprometer-se e manter-se fiel a algum dos usos da palavra. Dessa forma, seguiremos, de maneira muito próxima, o uso adotado por Pryor (2005). Todavia, o leitor deve estar ciente de que, como procuramos mostrar, ele não é o único que existe.

como um justificador doxástico, é um estado ou condição (a-d) na qual alguém se encontra e (b-d) *em virtude do/da qual* a sua crença está justificada. Como argumenta Pryor (2005, p. 194, [51]), parece existir uma diferença, ao menos no nível conceitual, entre a noção de gerador de justificação doxástica apresentada e o seguinte conceito de mostrador de justificação (*justification-shower*). Um *mostrador de justificação* para φ é (c) algo que alguém tem e (d) que pode utilizar para *provar* ou *mostrar* que a sua crença de que φ está justificada. Se uma combinação de luz e cores torna uma sala bonita, como coloca Pryor (2005, p. 194, [51]), ela não *prova* ou *mostra* que a sala é bonita, mas *a torna* bonita. Analogamente, os geradores de justificação doxástica não tanto provam ou mostram que uma crença está justificada, como faz um mostrador de justificação para ela, mas antes a torna justificada. Reciprocamente, se um termômetro mostra a temperatura da sala, ele não a torna quente ou fria. Similarmente, mostradores de justificação não tanto tornam uma crença justificada, mas antes provam ou mostram que ela está justificada. Se as noções de gerador de justificação doxástica e mostrador de justificação são ou não coextensionais, isso é uma questão filosófica importante e que não deve ser simplesmente presumida.

Como iremos utilizar a palavra "justificação"? Tendo em conta o que falamos no início desta seção, empregaremos o termo "justificação" para falar sobre justificadores. Especificamente, vamos utilizá-lo para nos referir aos justificadores proposicionais. À luz da discussão precedente, isso significa dizer que, por "justificação", entendemos os J-fatores responsáveis por tornar uma proposição, φ, proposicionalmente justificada para alguém, S, ainda que essa pessoa, S, não mantenha efetivamente nenhuma crença em φ. Não assumimos, dessa forma, que as justificações sejam, primordialmente, os mostradores de estado justificacional, mas antes os seus geradores.

Durante a leitura do próximo capítulo, o leitor irá notar, se já não entreveu de nossa introdução, que as lógicas da justificação fazem uso de uma linguagem internista, falando de "razões" e "evidências", por exemplo. É possível, sem essa orientação internista, mas com a concepção de justificação que acabamos de fixar, recuperar os resultados de lógica da justificação do próximo capítulo? Penso que sim. E isso, imagino, pode ser visto ainda neste capítulo.

Um sistema de lógica $\mathbb{L}$, se tem expressão formal, geralmente possui três dimensões, nomeadamente, a sintática, a da semântica, e a da semântica informal. No nível da *sintaxe*, nós podemos falar em axiomas e regras de transformação[8], por exemplo. No plano da *semântica*, por sua vez, estão presentes os modelos do sistema. Por fim, na dimensão da *semântica informal*, encontramos a interpretação informal. Por exemplo, considere o caso da lógica proposicional. Ao nível sintático, podemos encontrar seus axiomas, regras de inferência, variáveis proposicionais e conectivos sentenciais. Por sua vez, na camada semântica, encontramos valores de verdade, tabelas de verdade, etc. Por último, na semântica informal, somos apresentados à interpretação informal de seus conectivos sentenciais e valores de verdade. É na semântica informal, e não na semântica, onde se afirma, por exemplo, que o conectivo sentencial "$\wedge$" significa a conjunção "e" e que o valor de verdade 1 significa "verdadeiro". Como aponta Haack (2002), a semântica da lógica proposicional é suscetível de assumir outras semânticas informais, por exemplo, uma na qual os símbolos 1 e 0 não representam "verdadeiro" e "falso", respectivamente, mas o status "ligado" e "desligado", respectivamente, de um circuito elétrico (cf. Haack (2002), [38], pp. 60 e 251). Quais os efeitos dessas considerações para o caso em questão?

Na lógica da justificação, a expressão $\tau{:}\varphi$ é geralmente utilizada na formalização da afirmação que τ é uma justificação para φ, ou ainda de que τ justifica φ (cf. Artemov (2008), [9], p. 478; Artemov e Fitting (2019), [8], p. xi). Na aparência, o projeto das lógicas da justificação está comprometido com uma concepção internista da justificação, uma vez que, de partida, parece entender por "justificação" o mesmo que "evidência" e "razões". Essa sensação, todavia, só pode ser percebida no nível da semântica informal. Do ponto de vista da semântica formal, ou mesmo da sintaxe, nada do gênero se nos apresenta. E se trocamos essa semântica informal, fazendo com que $\tau{:}\varphi$ passe a formalizar a expressão "τ é um justificador proposicional para φ", o compromisso tácito com o internismo, se é que ele existia, agora parece desaparecer. E, uma vez

[8]O termo "regra de transformação", da maneira como uso, é sinônimo de "regra de inferência". Dessa forma, um exemplo de regra de transformação é o *modus ponens*.

operada essa mudança no nível da semântica informal, obtemos agora uma família de *lógicas do justificador proposicional*, cuja única diferença, em relação à família inicial, reside na camada informal. E, uma vez que resultados técnicos, como de correção e completude, não se apoiam em componentes da dimensão informal, todos os resultados do próximo capítulo são preservados nesta nova concepção. E mesmo a plausibilidade dos esquemas de axioma, como penso, também se mantém.

Consideremos, por exemplo, o seguinte esquema de axioma da lógica da justificação, para o qual buscamos dedicar uma ampla discussão no próximo capítulo.

$$\tau_1{:}\varphi \rightarrow (\tau_2{:}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [\tau_1{\cdot}\tau_2]{:}\psi) \tag{1.1}$$

Em uma leitura internista que se utiliza da noção de evidência, ou do conceito de razão, podemos pensá-lo como afirmando que, se τ_1 é uma razão/evidência para φ, então, se τ_2 é uma razão/evidência para $(\varphi \rightarrow \psi)$, então $[\tau_1{\cdot}\tau_2]$ é uma razão/evidência para ψ. Se, todavia, assumimos uma leitura neutra, utilizando-se da noção de justificador proposicional, esse esquema pode ser tomado como afirmando que, se temos um justificador τ_1 para φ, então, se temos um justificador τ_2 para $(\varphi \rightarrow \psi)$, então temos um justificador $[\tau_1{\cdot}\tau_2]$ para ψ. Quem afirma isso, ao menos na aparência, parece afirmar algo verdadeiro. Por exemplo, se estamos em uma situação epistêmica na qual (i) certa coleção finita e apropriada de axiomas da aritmética está proposicionalmente justificada para nós, e isso se deve a um justificador τ_1, então, (ii) se essa também é uma situação onde nos encontramos proposicionalmente justificados a acreditar que a existência de infinitos números primos é uma consequência dessa coleção de axiomas, e isso por conta de um justificador τ_2, então (iii) essa mesma situação é uma na qual estamos também proposicionalmente justificados a pensar que existem infinitos números primos, e isso por conta de algum justificador $[\tau_1{\cdot}\tau_2]$. O esquema (3.1) é a contraparte justificacional da regra de inferência *modus ponens*.

Desse modo, apesar do fato de que as lógicas da justificação podem ser abordados de um ponto de vista internista, vamos optar por considerá-las, no curso do terceiro capítulo, da perspectiva que introduzimos, mantendo, dessa forma, uma certa neutralidade com respeito à disputa internismo/externismo. No segundo capítulo, para nos mantermos alinhados à linguagem corrente nos estudos de lógica da justificação, falamos de “razões” e “evidências”, por exemplo. Nos termos que adotamos, a lógica da justificação dá conta dos justificadores proposicionais. Se existe uma lógica dos justificadores, é natural pensar na existência de uma *lógica dos injustificadores*. Qual seria esse sistema? Esse tema, até onde sabemos, permanece inexplorado, com nenhum sistema proposto até o momento. Uma vez que estaremos sobretudo preocupados com o status de justificado, com o estado de injustificado recebendo apenas uma atenção secundária, tal lacuna não acabará por representar para nós uma grande dificuldade, de maneira que relegamos a investigação da lógica da injustificação para um momento mais oportuno.

1.3 Argumentos de regressão ao infinito

Uma versão do argumento do regresso ao infinito para o fundacionalismo, referido doravante pelo acrônimo ARf, pode ser resumida do seguinte modo. Se, para cada agente epistêmico, S, e para cada proposição, φ, a crença de S de que φ está justificada apenas no caso de φ ter sido inferida por S de uma crença justificada ψ de S que resulta distinta da sua crença inicial de que φ, terá de existir então uma regressão infinita de justificações para que alguma das crenças de S termine ao fim justificada. Entretanto, tais cadeias infinitas de justificações não existem, conquanto tenhamos crenças justificadas. Portanto, devem existir crenças justificadas que não foram todavia justificadas fazendo apelo a nenhuma outra crença justificada, isto é, crenças que foram justificadas de modo não inferencial. Essa versão do ARf é fundamentalmente a mesma adotada por Post (2010) (cf. [48]). Naturalmente, ela não é a única disponível. Como o próprio Post (2010) lembra, Aristóteles, em seu Órganon,[9], parece formular ARf em termos da noção de conhecimento, e não da noção de crença justificada. Para obter conhecimento da conclusão φ de um argumento com premissas $\psi_1, ..., \psi_n$, parece colocar Aristóteles, devemos conhecer as premissas $\psi_1, ..., \psi_n$. Desse modo, se o conhecimento das pre-

[9] *Analíticos Posteriores* I 3, 72b5-24.

missas $\psi_1, ..., \psi_n$ requeresse um novo argumento para cada uma destas proposições $\psi_1, ..., \psi_n$, e assim *ad infinitum*, então teríamos de conhecer uma quantidade infinita de proposições, o que parece ser, para Aristóteles, algo impossível. Em razão disso, conclui, deve existir algumas proposições que podem ser conhecidas sem o recurso a outras proposições.[10]

Na versão de Post (2010), um aspecto saliente de ARf é o seu propósito de concluir a existência de um gênero de justificação, a não inferencial, a partir da existência de alguma crença justificada, por um lado, e da inexistência de cadeias infinitas de justificações, por outro, e isso intermédio uma sequência de raciocínios válidos. Esse aspecto deixa-se ver mais claramente quando a estrutura do argumento é analisada em pormenor. É possível notar, em primeiro lugar, que suas premissas são, *prima facie*, suscetíveis de serem colocadas nos termos de (P-1), (P-2) e (P-3), sendo que a premissa (P-1) é uma implicação cujo antecedente é a conjunção de (Q-1) e (R-1).

(Q-1) Se a crença de um agente S em uma proposição φ está justificada, então S inferiu φ de uma outra (e distinta) proposição β, e S crê que β, e a crença de S de que β está justificada.

[10] Ao apresentarmos tanto a formulação de Post (2010) quanto a formulação de Aristóteles, deixamos em aberto, respectivamente, os motivos pelos quais não pode existir nenhuma cadeia infinita de justificações, e os motivos pelos quais resulta ser impossível conhecer uma quantidade infinita de proposições. Presumivelmente, entretanto, tais pressupostos carecem sempre de uma fundamentação, uma fundamentação que às vezes tem sido colocada na forma de um argumento auxiliar. Alguns destes argumentos podem avançar explicitamente sobre a finitude da memória ou do tempo de vida de determinados agentes epistêmicos, como veremos adiante. Todavia, parece importante fazer notar que, a depender destas fundamentações, o ARf pode se aplicar também àqueles agentes epistêmicos cuja memória e tempo de vida sejam infinitas, como, por exemplo, a Deus, o que sugere, desse modo, a possibilidade de que, em um tipo apropriado de explicação, o problema do regresso passe a dever o seu status de problema não mais à questão da finitude de certos agentes. Dancy (2002), por exemplo, ao oferecer a sua formulação do ARf, muito semelhante à versão de Post (2010), parece ventilar uma explicação deste tipo. Segundo esta explicação, não existe uma cadeia infinita de justificações antes em razão da justificação inferencial ser precipuamente condicionada, no sentido de que, quando buscamos justificar uma proposição φ recorrendo às proposições $\psi_1, ..., \psi_n$, só garantimos de fato que φ está justificada após mostrar que $\psi_1, ..., \psi_n$ estão justificadas. Ora, mas se a justificação inferencial é sempre condicionada deste modo, e nada mais existe senão justificação inferencial, então nada se pode mostrar estar senão condicionalmente justificado, e esta consequência, como parece colocar Dancy (2002), torna o conhecimento impossível. Note-se que a explicação de Dancy (2002) não faz recurso, ao menos explicitamente, à memória finita dos agentes, ou mesmo à sua finitude temporal. Desse modo, as dificuldades colocadas pelo regresso ao infinito talvez não se devam à impossibilidade de se ter infinitas crenças, ou à inexorabilidade da morte, algo que *ipso facto* parece criar a possibilidade de que o problema do regresso seja não só uma dificuldade para agentes com recursos finitos, como os agentes humanos, mas sim uma dificuldade para todo e qualquer agente.

(R-1) Para alguma proposição φ, a crença de S de que φ está justificada.

(P-1) Se (Q-1) e (R-1), então existe ao menos uma cadeia infinita de justificações.

(P-2) Não existe nenhuma cadeia infinita de justificações.

(P-3) A crença de S de que ψ está justificada.

Se (P-1) e (P-2) são as premissas de um argumento cuja conclusão é a negação do consequente da implicação (P-1), então esse argumento tem a forma de um *modus tollens*. Em razão disso, a negação do consequente da implicação (P-1) é uma consequência lógica de (P-1) e (P-2), de onde se segue que, das proposições (Q-1) e (R-1), ao menos uma tem de ser falsa. Se (R-1) é falsa, então (P-3) também o é. Uma vez que (P-3) é uma das premissas, se novamente raciocinamos, concluímos que (R-1) é verdadeira, de onde (Q-1) resulta falsa. Disto, por conseguinte, segue-se que (Q-1) é falsa, ou seja, que, para algum agente S, e para alguma proposição φ, a crença de S de que φ está justificada, conquanto não seja o caso que S tenha inferido φ de uma outra (e distinta) proposição β, e S crê que β, e que a crença de S de que β esteja justificada. Neste ponto, importa notar, a conclusão que se deseja obter com ARf, a de que existe um outro gênero de justificação para além da inferencial, parece se obter apenas se notamos umas das suas hipóteses implícitas, a saber, aquela segundo a qual o coerentismo não é uma alternativa razoável. Além disso, é preciso observar, esse argumento faz uso explícito do pressuposto de que ao menos alguma crença está justificada. Desse modo, ARf não pode ser utilizado como um argumento contra o ceticismo, nem mesmo contra o coerentismo, pois não elimina sua possibilidade. Qual o papel de ARf, dessa forma?

Se as considerações precedentes estão corretas, o fundacionalista, com ARf, só é capaz de concluir que, se sua posição está correta, então deve existir uma forma de justificação propriamente não inferencial. Pode ser interessante notar que, até certo ponto, com o cético também se passa algo um tanto semelhante, uma vez que ele também só parece ser capaz de oferecer uma conclusão condicional. Um dos pressupostos tácitos do argumento do regresso para o ceticismo, como ficará muito claro ao longo deste trabalho, é a suposição de que não existe forma de justificar uma proposição senão fazendo o uso de outra. Se uma proposição está para mim justificada, afirma o cético, então deve existir uma outra proposição na qual a primeira busca apoio. Ora, mas isso só será sempre verdade, infinitamente, se o que existe é apenas a justificação inferencial. Dessa forma, o cético só é capaz, se é, de concluir que, se não existe justificação não inferencial, então o conhecimento é impossível. Que argumento, entretanto, o cético apresenta a favor desse pressuposto? Nesse sentido, nem ARf nem o argumento do regresso me parecem conclusivos. Penso, desse modo, que nada parece estar ainda definido.

Capítulo 2

Lógicas da justificação: análise e resultados fundamentais

O objetivo deste capítulo é oferecer a análise conceitual e os resultados fundamentais de lógica da justificação necessários aos estudos que serão desenvolvidos posteriormente.[1] A Seção 2.1 trata de uma LJ, a lógica $\mathcal{J}_0$, e sobre como construir outras LJs a partir dela. O sistema $\mathcal{J}_0$ é a menor LJ com a qual trabalharemos, e todas as demais LJs consideradas nesta dissertação podem ser construídas a partir das estratégias apresentadas na Seção 2.1. A Seção 2.2, por sua vez, dedica-se a uma discussão sobre as noções de consequência sintática e teoremicidade quando relativizadas às LJs, para na sequência argumentar que, sem qualquer prejuízo da perspectiva da consequência lógica, uma das regras de inferência apresentada na Seção 2.1, a regra de necessitação para as LJs, pode ser substituída por certas ferramentas conceituais tratadas anteriormente.

A Seção 2.3 aborda alguns resultados fundamentais, nomeadamente o teorema da dedução, o teorema da internalização e o lema do levantamento. O teorema da dedução é necessário à prova do lema do levantamento. A Seção 2.4, por fim, dedica-se aos aspectos gerais da teoria da semântica de Fitting, falando sobre alguns pontos tradicionais, como correção, modelo canônico e completude. Para além da proposta de Fitting, a lógica da justificação dispõe de outras semânticas, como as oferecidas pela

[1]Doravante, os símbolos 'LJ' e 'LJs' são acrônimos para as expressões 'lógica da justificação' e 'lógicas da justificação', respectivamente.

teoria de Mkrtychev e as oferecidas pela teoria dos modelos modulares. A razão para nos concentrarmos na abordagem de Fitting está no fato de que a semântica de Fitting é ela própria uma semântica de mundos possíveis, o que facilita, deste modo, o seu uso no estudo das regressões infinitas.

Desse modo, este capítulo é, em sua quase totalidade, uma revisão narrativa sobre as lógicas da justificação. Em razão disso, seu conteúdo, quase que por inteiro, não é uma contribuição original deste autor, mas antes uma coleção de desenvolvimentos técnicos coletados da literatura. Desse modo, na ausência de referências explícitas à autoria, o leitor não deve tomar o que é dito como contribuição destes autores, mas de início considerar o resultado em questão como mapeável nas fontes que utilizamos (em especial, Artemov (1995), [10]; Artemov (2008), [9]; Artemov e Fitting (2019), [8]; Fitting (2003), [30]; Fitting (2005), [29]; Gödel (1993), [34]).

2.1 $\mathcal{J}_0$ e suas extensões

Para representar razões, ou evidências, ou ainda justificações, a lógica da justificação costuma utilizar-se de certos símbolos (cf. Artemov e Fitting (2019), [8], p. 12). Chamados *termos para justificações*, estes símbolos são construídos a partir de duas coleções contáveis — os conjuntos $\mathcal{V} = \{x, y, x_1, y_1, ...\}$ e $\mathcal{C} = \{a, b, a_1, b_1, ...\}$, cujos membros chamam-se *variáveis para justificações* e *constantes para justificações*, respectivamente — fazendo-se o uso de ao menos dois símbolos para funções de aridade dois, os símbolos $+$ e $\cdot$, chamados *soma* e *produto*, respectivamente. Desse modo, fixado um conjunto s de símbolos para funções (que tenha entre os seus membros ao menos $+$ e $\cdot$), de uma maneira análoga à definição dos termos para a lógica de primeira ordem, pode-se definir então um conjunto $\mathcal{T}_s$ de termos para justificações. No formalismo de Backus-Naur,

$$\mathcal{T}_s := \mathcal{V} \mid \mathcal{C} \mid \; + (\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_s) \mid \; \cdot (\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_s) \mid f({\mathcal{T}_s}^n),$$

onde f é um membro de $s - \{+, \cdot\}$ que tem aridade n, e $\mathcal{T}_s^n$ é o produto cartesiano de $\mathcal{T}_s$ por $\mathcal{T}_s$ n vezes. Adotaremos para os termos as omissões e convenções metateóricas[2] já comuns em álgebra e lógica. Assim, com frequência escreveremos $(\tau_1 + \tau_2)$ em vez de $+(\tau_1, \tau_2)$, e $(\tau_1 \cdot \tau_2)$ em vez de $\cdot(\tau_1, \tau_2)$. Para efeitos de estilização e legibilidade, também com frequência trocaremos os parênteses pelos colchetes (e.g. escrevendo $[\tau_1 + \tau_2]$ em vez de $(\tau_1 + \tau_2)$).

No decorrer desta dissertação, mantemos fixo um conjunto infinito e enumerável $\mathcal{P}$ de variáveis proposicionais p_1, p_2, p_3 etc. Como é habitual, usamos os símbolos $\top$, $\bot$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ para a constante de verdade, a constante de falsidade, a negação, a disjunção, a conjunção, a implicação e a bi-implicação, respectivamente.

Cada lógica da justificação LJ (a ser aqui considerada) tem uma linguagem de nível proposicional. Além disso, se $\mathcal{L}$ for a linguagem de uma lógica da justificação LJ, então sempre se poderá obter $\mathcal{L}$ a partir de um conjunto de termos justificacionais $\mathcal{T}_s$, sendo os membros deste conjunto, nestas circunstâncias, referidos como os termos *de* LJ. Nesse sentido, para uma lógica da justificação LJ, uma vez que seus termos sejam os membros de $\mathcal{T}_s$, a sua linguagem — cujos membros são as *fórmulas justificacionais* de LJ — será então recursivamente perfeitamente caracterizada como o menor conjunto que satisfaz a conjunção das cláusulas usuais para as variáveis proposicionais e conectivos lógicos primitivos com a seguinte cláusula adicional:

T. Se $\tau \in \mathcal{T}_s$ e φ é uma fórmula de LJ, então $(\tau{:}\varphi)$ também é uma fórmula de LJ.

Para uma lógica da justificação LJ, dentro do possível, a questão de quais conectivos lógicos são de fato primitivos, e quais, ao contrário, ocorrem como abreviações de valor prático, será sempre respondida em termos de qual das alternativas figurar como a mais conveniente (por exemplo, em termos de qual opção acabar por tornar mais fácil o trabalho técnico, como a prova de um teorema). Também para as fórmulas adotaremos algumas omissões e convenções metateóricas, as mais comuns, em especial as omissões de parênteses.

[2]Cf. Boolos, Burgess e Jeffrey (2012), [11].

As lógicas da justificação, quando tomadas em conjunto, têm um fator em comum, uma lógica chamada $\mathcal{J}_0$. Este sistema é para a família das lógicas da justificação algo análogo ao que é a lógica modal $\mathcal{K}$ para a família das lógicas modais normais. Se JL é uma lógica da justificação, então JL é uma extensão de $\mathcal{J}_0$ (cf. Artemov e Fitting (2019), [8], pp. 11, 14). A definição 2.1 diz-nos qual é a linguagem, quais são os axiomas e qual é a regra de inferência de $\mathcal{J}_0$.

Definição 2.1 (A lógica $\mathcal{J}_0$) A linguagem $\mathcal{L}_0$ da lógica $\mathcal{J}_0$ é a linguagem que se obtém ao se deixar $s = s_0 := \{+, \cdot\}$. A regra de inferência de $\mathcal{J}_0$ é *modus ponens*. Os axiomas de $\mathcal{J}_0$ são os seguintes:

[TAU] Tautologia: Tautologias da linguagem $\mathcal{L}_0$.[3]

[PRO] Produto: Fórmulas da forma $(\tau{:}(\varphi \to \psi)) \to ((\pi{:}\varphi) \to ([\tau{\cdot}\pi]{:}\psi))$.

[SOD] Soma à direita: Fórmulas da forma $(\tau{:}\varphi) \to ([\tau{+}\pi]{:}\varphi)$.

[SOE] Soma à esquerda: Fórmulas da forma $(\tau{:}\varphi) \to ([\pi{+}\tau]{:}\varphi)$.

□

Há ao menos duas estratégias que podem ser empregadas para se obter novas lógicas da justificação a partir do sistema $\mathcal{J}_0$, ambas frequentemente utilizadas na literatura (e.g., cf. Artemov (2008), [9]). Na primeira delas, inicia-se por adicionar ao conjunto s_0 novos símbolos para funções, de onde se obtém um novo conjunto de símbolos, s', que é na sequência utilizado para se construir o que será a linguagem $\mathcal{L}$ da nova

[3]Sejam $\mathcal{L}$ a linguagem de uma lógica da justificação LJ e φ um membro de $\mathcal{L}$. Dizemos que φ é *atômica no sentido ordinário* se, e só se, φ é uma variável proposicional $p \in \mathcal{L}$. Por sua vez, dizemos que φ é *atômica no sentido justificacional* se, e só se, φ tem a forma $(\tau{:}\psi)$, sendo τ um dos termos de LJ. Por fim, dizemos que φ é *proposicionalmente atômica*, ou simplesmente *atômica*, se, e só se, é atômica no sentido ordinário, ou é atômica no sentido justificacional. O conjunto das fórmulas atômicas de $\mathcal{L}$ será denotado por $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Uma *valoração* para $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ é uma atribuição de valores de verdade para os membros de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, isto é, uma função de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ no conjunto $\{0, 1\}$. Se v é uma valoração para $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, podemos estender v a todas as sentenças de $\mathcal{L}$, de modo que, para cada sentença $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$:

a. $v(\neg\varphi) = 1$ se, e só se, $v(\varphi) = 0$;

b. $v(\varphi \vee \psi) = 1$ se, e só se, $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$.

Diz-se que φ é uma *tautologia* da linguagem $\mathcal{L}$ se, e só se, φ é verdadeira segundo todas as valorações v para $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ (essas definições — de fórmula atômica, de valoração, de verdade e de tautologia — são *mutatis mutandis* as dadas por Chellas (1980) em seu livro sobre lógica modal (cf. Chellas (1980), [18], p. 8).

lógica. Em seguida, após adequações em [TAU], [PRO], [SOD] e [SOE], para permitir que capturem também as fórmulas próprias de $\mathcal{L}$, adiciona-se às cláusulas de $\mathcal{J}_0$ outras cláusulas, cláusulas ao estilo de [TAU], [PRO], [SOD] e [SOE]. Por fim, sobre as regras de inferência da nova lógica, nesta estratégia sempre se mantém ao menos *modus ponens*, eventualmente se juntando a esta regra outras novas. A Lógica das Provas, LP, é um exemplo de sistema justificacional que pode ser obtido através dessa estratégia.

Em um trabalho de 1995, Artemov ofereceu uma apresentação explícita de LP (cf. Artemov (1995), [10]). A linguagem $\mathcal{L}$ de LP é a linguagem que se obtém ao se deixar $s := \{+, \cdot, !\}$, onde "!" é um símbolo para uma função unária, uma função chamada *certificadora de provas* (*proof checker*). As regras de inferência de LP são *modus ponens* e [NLP]. Os axiomas são os dados pelas cláusulas relacionadas logo após [NLP]:

[NLP] Necessitação para LP: Se φ é um axioma de LP e c é uma constante para justificação, então se pode inferir $c{:}\varphi$.

[TAU] Tautologia: Todas as tautologias da linguagem $\mathcal{L}$.

[PRO] Produto: Todos de $\mathcal{L}$ da forma $(\tau{:}(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\pi{:}\varphi) \rightarrow ([\tau{\cdot}\pi]{:}\psi))$.

[SOD] Soma à direita: Todos de $\mathcal{L}$ da forma $(\tau{:}\varphi) \rightarrow ([\tau{+}\pi]{:}\varphi)$.

[SOE] Soma à esquerda: Todos de $\mathcal{L}$ da forma $(\tau{:}\varphi) \rightarrow ([\pi{+}\tau]{:}\varphi)$.

[FAC] Factividade: Todos de $\mathcal{L}$ da forma $\tau{:}\varphi \rightarrow \varphi$.

[CER] Certificador: Todos de $\mathcal{L}$ da forma $\tau{:}\varphi \rightarrow !(\tau){:}(\tau{:}\varphi)$.

Uma concepção razoável sobre a função certificadora de provas afirma que se τ é uma prova da proposição φ, então $!(\tau)$ é a prova de que τ é uma prova de que φ. Desse modo, nessa concepção, [CER] ocorre como um refinamento do esquema modal 4, quando este recebe a leitura dada em (c.).

Uma segunda estratégia que pode ser empregada a fim de se obter novas lógicas da justificação a partir do sistema $\mathcal{J}_0$ faz o uso de uma ferramenta teórica que ainda não foi mencionada: as *especificações de constantes*. Nesta estratégia, grosso modo, dada uma lógica da justificação LJ com linguagem $\mathcal{L}$, o primeiro passo consiste em escolher, entre os membros de $\mathcal{L}$, uma especificação de constantes para LJ, isto é, um conjunto CS $\subset \mathcal{L}$ que goza de algumas propriedades (ver a definição 2.2). Na sequência, os membros deste conjunto CS são todos promovidos ao cargo de axiomas, passando a ser, junto aos axiomas de LJ, os axiomas da nova lógica LJ(CS), que conserva tanto a linguagem quanto as regras de inferência de LJ. Em conjunto, as duas definições seguintes fornecem uma caracterização mais pormenorizada desta estratégia.

Definição 2.2 (Especificação de constantes) Seja LJ uma lógica da justificação cuja linguagem é $\mathcal{L}$. Diz-se que um CS $\subset \mathcal{L}$ é uma *especificação de constantes* para LJ se, e só se, as seguintes afirmações sobre CS são todas verdadeiras:

1. Para cada φ que seja um membro de CS, existem $m > 0$[4] constantes justificacionais $c_1, ..., c_m$ e um axioma A de LJ tais que φ é precisamente $c_m{:}c_{m-1}{:}...{:}c_2{:}c_1{:}A$.

2. Se $c_m{:}...{:}c_1{:}A$ está em CS e $m > 1$, então $c_{m-1}{:}...{:}c_1{:}A$ também está em CS.

Dada uma lógica da justificação LJ, o conjunto vazio sempre será uma especificação de constantes para ela, já que, por vacuidade, sempre se terá tanto a verdade do item (1) quanto a do item (2). Além disso, para todo axioma φ de LJ, e para cada constante justificacional c, o conjunto unitário $\{c{:}\varphi\}$ também sempre contará como um caso de especificação de constantes para LJ. Estas especificações unitárias, ao lado do conjunto vazio, figuram entre os exemplos mais triviais de especificações de constantes, e sempre estarão à disposição, seja qual for a lógica da justificação LJ. Entre os exemplos não triviais, encontramos as especificações totais e as especificações axiomáticas. Diz-se que uma especificação de constantes CS para uma lógica da justificação LJ é *total* se, e só se, a seguinte cláusula adicional é satisfeita:

3. Para cada axioma φ de LJ e cada constante justificacional $c_1, ..., c_m$, ocorre que $c_m{:}...{:}c_1{:}\varphi$ está em CS.

Por sua vez, diz-se que uma especificação de constantes CS para uma lógica da justificação LJ é *axiomática* se, e só se, a seguinte cláusula adicional é satisfeita:

[4]Como é de costume, usaremos as letras 'm' e 'n' para denotar números naturais, isto é, membros do conjunto $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

3′. Para cada axioma φ de LJ e cada $n > 0$, existem n constantes justificacionais $c_1, ..., c_n$ tal que c_n:...:c_1:φ está em CS.

É fácil ver que, seja lá qual for a lógica da justificação LJ, toda especificação total CS para ela será também uma especificação axiomática para ela, bastando tomar, para a prova deste resultado, as n primeiras constantes justificacionais. A recíproca, todavia, é frequentemente falsa, como garante a proposição seguinte.

□

Proposição 2.1 Seja LJ uma lógica da justificação. Se o conjunto $\mathcal{A}$ dos axiomas de LJ não é vazio, então existe ao menos uma especificação de constantes CS para LJ que é axiomática, mas que não é todavia total.[5]

Prova: Antes de demonstrar esta proposição, um comentário é oportuno. A exigência de que o conjunto $\mathcal{A}$ dos axiomas de LJ não seja vazio é de fato necessária, ao menos no estágio de desenvolvimento da teoria em que atualmente nos encontramos. A razão é a seguinte. Se $\mathcal{A}$ é vazio, então a única especificação de constantes para LJ é o conjunto vazio, que é, por vacuidade, tanto uma especificação total quanto uma especificação axiomática. Assim, se $\mathcal{A}$ é vazio, toda especificação axiomática para LJ será também uma especificação total para LJ. Sabemos, entretanto, que nem toda lógica da justificação tem um conjunto vazio de axiomas, por exemplo, a lógica $\mathcal{J}_0$ e a lógica das provas LP tem um conjunto infinito de axiomas. Em verdade, todas as lógicas da justificação conhecidas (por este autor) tem uma quantidade infinita de axiomas. Desse modo, provada esta proposição, temos garantida a alegação anterior, a saber, de que nem sempre toda especificação axiomática é também total, e de que este estado de coisas é na verdade bem frequente. Desse modo, passamos à prova desta proposição.

Sejam LJ uma lógica da justificação e $\mathcal{A} \neq \emptyset$ o conjunto de todos os seus axiomas. Para cada φ em $\mathcal{A}$, seja CS_φ o conjunto cujos únicos membros são a_1:φ, e a_2:a_1:φ, e a_3:a_2:a_1:φ, e a_4:a_3:a_2:a_1:φ, etc. Agora, seja CS o seguinte conjunto:

$$\bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \mathrm{CS}_\varphi \,.$$

[5]Nem o enunciado nem a prova desta proposição foram retirados da literatura.

Da construção de CS, é claro que CS é uma especificação axiomática. Ainda assim, entretanto, CS não é total. Por exemplo, o conjunto $C = \{a, b, a_1, b_1, ...\}$ das constantes justificacionais tem entre seus membros a constante b. Todavia, para cada axioma φ de LJ, $b{:}\varphi$ não é um membro de CS. Obtemos, desse modo, o que queríamos de início.

□

Definição 2.3 (Uma lógica LJ(CS)) Se LJ é uma lógica da justificação e CS é uma especificação de constantes para LJ, então LJ(CS) é a lógica que tem as características que estão relacionadas na sequência:

1. A linguagem de LJ(CS) é a linguagem de LJ, e as regras de inferência de LJ(CS) são as regras de inferência de LJ.

2. Os axiomas de LJ(CS) são os axiomas de LJ e os membros de CS.

É importante notar que esta definição diz que os membros de CS entram como axiomas de LJ(CS), não que os membros de CS passam a ser esquemas de axioma para LJ(CS). É importante notar também que toda lógica da justificação pode ser vista como uma lógica LJ(CS), para alguma especificação de constantes CS, uma vez que sempre se terá ao menos LJ($\emptyset$) = LJ.

□

2.2 Consequência sintática e teoremicidade

A Seção 2.1 forneceu uma apresentação da família das lógicas da justificação. Ela ofereceu informações sobre a linguagem destes sistemas, falou sobre dois dos membros da família, e deu indicações gerais de como uma parte dos demais pode ser obtida.[6]

[6]A caracterização que fornece a Seção 2.1 é, em grande medida, vaga e inexata, e parece susceptível de despertar dificuldades, isto tanto da perspectiva técnica quanto da perspectiva filosófica. Uma destas dificuldades é a seguinte. Como já insistimos, muitas das lógicas da justificação disponíveis na literatura, por exemplo a lógica $\mathcal{J}_0$ e a lógica das provas LP, podem ser obtidas ao se fazer uso das estratégias apresentadas na seção 2.1. Todavia, toda lógica obtida ao se fazer uso destas estratégias contará como uma lógica da justificação genuína? A resposta parece ser positiva para a segunda das estratégias apresentadas, mas não encontramos na literatura uma resposta quanto à primeira estratégia, nem quanto às lógicas que se podem obter ao combinar as duas estratégias. Para clarificar a questão, as estratégias apresentadas na última seção podem ser encaradas como algoritmos. A segunda, por

Desse modo, a Seção 2.1 deixa-nos já em condições de tratar das noções de consequência sintática e teoremicidade quando relativizadas aos sistemas justificacionais.

Definição 2.4 (Consequência sintática, cf. Artemov e Fitting (2019), [8], p. 18) Seja LJ uma lógica da justificação. Se Γ é um conjunto de fórmulas de LJ e φ é uma fórmula de LJ, então dizemos que a fórmula φ é, em LJ, uma *consequência sintática* de Γ, e escrevemos

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$$

se, e só se, existe uma sequência $\psi_1, ..., \psi_n$ de fórmulas de LJ tal que: ψ_n é precisamente φ, e; cada fórmula desta sequência é um axioma de LJ, ou é um membro de Γ, ou pode ser obtido de fórmulas anteriores desta sequência pela utilização da regra *modus ponens*. Se Γ é o conjunto vazio, dizemos que φ é um *teorema* de LJ, e escrevemos apenas $\vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$. □

Dada estas definições de consequência lógica e teoremicidade, temos que, para cada lógica da justificação LJ, a única regra de inferência que resultará por ser realmente importante, das perspectivas da consequência sintática e da teoremicidade, é a regra de *modus ponens*. Do ponto de vista prático, esta estipulação traz muitos ganhos, pois facilita a prova de vários resultados. Por outro lado, entretanto, esta estipulação desperta alguns problemas. Considere, por exemplo, a formulação da lógica das provas LP que foi dada anteriormente. Nesta formulação, LP tem duas regras de inferência: *modus ponens* e a regra de necessitação para LP, NLP. Neste caso, desse modo, a relação de consequência sintática, segundo a definição precedente, quando relativizada à lógica

exemplo, dada uma lógica da justificação LJ e uma especificação de constantes CS, é um algoritmo que produz e retorna um sistema justificacional LJ(CS). Desse modo, à luz da discussão precedente, sabemos que o segundo algoritmo, para toda entrada, sempre retorna uma lógica da justificação, e, além disso, que o primeiro algoritmo, para algumas entradas, retornará um sistema justificacional. O problema, nesse sentido, consiste em saber se, para cada entrada, o primeiro algoritmo sempre retornará (ou não) uma lógica da justificação, e, além disso, se as combinações desses algoritmos também sempre retornarão novos sistemas justificacionais.

De modo mais geral, uma dificuldade filosófica que está em jogo aqui é: o que é, ao fim, uma lógica da justificação? Esta não é uma questão sobre qual é a lógica da justificação *correta*, se ao fim alguma seja, mas antes a questão de como separar as lógicas da justificação das demais lógicas. Por exemplo, pode o sistema S4 contar como uma lógica da justificação? Se tomamos S4 segundo a interpretação de Gödel, parece que sim, já que, nessa interpretação, as fórmulas de S4 passam a falar sobre a noção de prova matemática, e a relação de consequência de S4 passa a tratar sobre os argumentos que requerem esta noção. Por que não, então, dizer que S4 também é uma lógica da justificação?

LP, simplesmente ignora NLP, produzindo assim uma situação inesperada.

No caso específico da lógica das provas, o problema parece advir de um desacordo presente na literatura. Às vezes, o sistema LP é formulado não só com *modus ponens*, mas também com a regra de inferência adicional NLP, tal como fizemos anteriormente. Às vezes, entretanto, a lógica LP é formulada apenas com *modus ponens*, caso onde uma nova cláusula para axiomas é sempre adicionada àquelas cláusulas para LP que citamos anteriormente (para perceber o desacordo, compare, por exemplo, Artemov e Fitting (2019, p. 101), [8], com Artemov (1995, p. 4), [10]). O objetivo, daqui até o final desta seção, é argumentar no sentido de que este desacordo não é suficientemente danoso, e que, em certo sentido, formular LP com ou sem NLP resultará sempre, ao fim, igualmente acertado. Nossa argumentação, entretanto, não foi retirada da literatura.

Para além de mostrar que o desacordo não é de todo um problema, a discussão que se segue revelará também, assim acreditamos, uma estreita relação entre as especificações de constantes e a regra de inferência de necessitação para LP.

Definição 2.5 (A imagem da regra de necessitação para LP) Seja $\mathcal{L}$ a linguagem da lógica das provas LP. A *imagem* da regra de necessitação para LP é o menor subconjunto de $\mathcal{L}$ que goza da seguinte propriedade:

1. Se φ é um axioma de LP e c é uma constante para justificação, então $c{:}\varphi$ é um de seus membros.

Este tal subconjunto terá tanto a existência quanto a unicidade garantidas pela próxima proposição. Em razão disso, podemos nos adiantar, estipulando, desde já, que o símbolo $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$ irá denotá-lo.

□

Proposição 2.2 (Existência e unicidade de $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$) O conjunto $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$ existe e é único.

Prova: Seja $\mathcal{L}$ a linguagem da lógica das provas LP, e seja $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos S de $\mathcal{L}$ tais que:

1. Se φ é um axioma de LP e c é uma constante para justificação, então $c{:}\varphi \in \mathrm{S}$.

Note-se que $\mathcal{F}$ é a família de todos os candidatos à imagem da regra de necessitação para LP, ou seja, $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$ tem de ser algum dos membros de $\mathcal{F}$.

A família $\mathcal{F}$ não é vazia, dado que ao menos a própria linguagem $\mathcal{L}$ é um de seus membros. Desse modo, podemos considerar o conjunto $\bigcap \mathcal{F}$, a interseção de todos os membros de $\mathcal{F}$. Dito de outro modo, temos garantido a existência e a unicidade de $\bigcap \mathcal{F}$. Afirmamos que $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$. Seja φ um axioma de LP e c uma constante para justificação. Logo, para cada $\mathrm{S} \in \mathcal{F}$, $c{:}\varphi \in \mathrm{S}$. Portanto, $c{:}\varphi \in \bigcap \mathcal{F}$. Desse modo, $\bigcap \mathcal{F}$ é o menor subconjunto de $\mathcal{L}$ que goza da propriedade (1). Por absurdo, suponhamos que S' é um menor. Logo, $\mathrm{S}' \subset \bigcap \mathcal{F}$, dado que é menor que $\bigcap \mathcal{F}$, mas como goza de (1), S' está em $\mathcal{F}$, de onde $\bigcap \mathcal{F} \subset \mathrm{S}'$, um absurdo. À luz disso, existe um e apenas um subconjunto de $\mathcal{L}$ que goza da propriedade (1), ou seja, a imagem da regra de necessitação para LP existe e é única. Não só isso, $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}} = \bigcap \mathcal{F}$. Obtemos, desse modo, o que desejávamos.

$\square$

Proposição 2.3 Se $\varphi \in \mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$, então existem $n > 0$ constantes justificacionais $c_1, \ldots, c_n$ e um axioma ψ de LJ tais que φ é precisamente $c_m{:}c_{m-1}{:}\ldots{:}c_2{:}c_1{:}\psi$.

Prova: A prova é por absurdo. Suponhamos que φ é um membro de $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$, mas que todavia não existem $n > 0$ constantes justificacionais $c_1, \ldots, c_n$ e um axioma ψ de LJ tais que φ é precisamente $c_m{:}c_{m-1}{:}\ldots{:}c_2{:}c_1{:}\psi$. Vamos considerar $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}} - \{\varphi\}$. Se φ' é um axioma de LP e c é uma constante para justificação, então $c{:}\varphi' \in \mathrm{I}_{\mathrm{NLP}} - \{\varphi\}$, uma vez que $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$ goza da propriedade (1), e, além disso, $c{:}\varphi'$ não é, evidentemente, φ. Desse modo, $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}} - \{\varphi\}$ resulta ter a propriedade (1) e, além disso, ser menor que $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$, o que é um absurdo. Desse modo, por redução ao absurdo, obtemos o desejado.

$\square$

Proposição 2.4 Seja φ uma fórmula da lógica das provas LP. Se existem um axioma ψ de LP e duas constantes justificacionais c_1, c_2 tais que φ é precisamente $c_2{:}c_1{:}\psi$, então $\varphi \notin \mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$.

Prova: A prova é algo semelhante à anterior. Por absurdo, suponhamos que $\varphi \in \mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$. Agora, novamente, consideremos $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}} - \{\varphi\}$. Ao contrário da primeira prova, todavia, precisamos, antes de seguir, garantir que $c_1{:}\psi$ não é, de nenhum modo, um axioma da lógica LP.

Em primeiro lugar, em razão da nota de rodapé de número 3, $c_1{:}\psi$ é uma fórmula atômica da linguagem $\mathcal{L}$ da lógica das provas. Desse modo, em razão disto e desta mesma nota de rodapé, $c_1{:}\psi$ não é uma tautologia desta linguagem $\mathcal{L}$. Além disso, os esquemas em [PRO], [SOD], [SOE], [FAC] e [CER] definem, juntos, a lista dos axiomas da lógica LP. Nenhuma instância destes axiomas, todavia, resultará ser $c_1{:}\psi$, uma vez que a forma de $c_1{:}\psi$ é diferente da forma de todos estes esquemas. Consideremos, por exemplo, o esquema "$\tau{:}\varphi \rightarrow\ !(\tau){:}(\tau{:}\varphi)$", presente em [CER]. Nenhuma de suas instâncias iniciam por um símbolo para constante justificacional c, que é acompanhado por um símbolo de dois pontos :, que é seguido, ao fim, por uma fórmula α que está no escopo da constante justificacional c. Desse modo, $c_1{:}\psi$ não é, de nenhum modo, um axioma da lógica LP.

Considere, agora, um axioma ψ' da lógica LP e uma constante justificacional c. Logo, por definição, $c{:}\psi' \in \mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$. Se supomos que $c{:}\psi'$ é precisamente $c_2{:}c_1{:}\psi$, obtemos que $c_1{:}\psi$ é um axioma da lógica LP, um absurdo, à luz da discussão levada no último parágrafo. Desse modo, $c{:}\psi'$ não é φ, ou seja, $c{:}\psi'$ é um membro de $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}} - \{\varphi\}$. Desse modo, $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}} - \{\varphi\}$ resulta ter a propriedade (1) da proposição 2.2 e, além disso, ser menor que $\mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$, o que é um absurdo. Desse modo, por redução ao absurdo, obtemos o desejado.

□

Corolário 2.1 Seja φ uma fórmula da lógica das provas LP. Se existem um axioma ψ de LP e $n > 1$ constantes justificacionais $c_1, ..., c_n$ tais que φ é precisamente $c_n{:}...{:}c_1{:}\psi$, então $\varphi \notin \mathrm{I}_{\mathrm{NLP}}$.

Prova: A prova do enunciado deste corolário é um *mutatis mutandis* da prova da última proposição.

□

Definição 2.6 (A lógica LP_0) A lógica LP_0 é a lógica que tem as seguintes características. A linguagem de LP_0 é a linguagem de LP. Os axiomas de LP_0 são os axiomas de LP. A regra de inferência de LP_0 é *modus ponens*.

$\square$

Corolário 2.2 A imagem I_{NLP} é uma especificação de constantes para LP_0.

Prova: Temos que I_{NLP} é um subconjunto da linguagem de LP, que é, ao fim, a linguagem de LP_0. Além disso, pela proposição 2.3, I_{NLP} goza da propriedade (1) da definição 2.2, quando relativo à lógica LP_0, uma vez que os axiomas de LP_0 são, ao fim, exatamente os axiomas de LP. Resta, desse modo, garantir a propriedade (2) da definição 2.2. Dado o corolário 2.1, todavia, esta propriedade (2) segue por vacuidade.

$\square$

Definição 2.7 (Uma consequência sintática estendida) Seja LP a lógica das provas. Se Γ é um conjunto de fórmulas de LP e φ é uma fórmula de LP, então dizemos que a fórmula φ é, em LP, uma *consequência estendida* de Γ, e escrevemos

$$\Gamma \Vdash\!\vdash_{LP} \varphi$$

se, e só se, existe uma sequência $\psi_1, ..., \psi_n$ de fórmulas de LP tal que: ψ_n é precisamente φ, e; cada fórmula desta sequência é um axioma de LP, ou é um membro de Γ, ou pode ser obtido de fórmulas anteriores desta sequência pela utilização da regra *modus ponens*, ou da regra de necessitação para LP.

$\square$

Teorema 2.1 (Eliminação da necessitação para LP) Se Γ é um conjunto de fórmulas de LP e φ é uma fórmula de LP, então

$$\Gamma \Vdash\!\vdash_{LP} \varphi \iff \Gamma \vdash_{LP_0(I_{NLP})} \varphi \,.$$

Prova: Das discussões anteriores, o resultado é imediato. Omitiremos, desse modo, a demonstração.

$\square$

2.3 Propriedades fundamentais

A última seção tratou de apresentar e examinar dois grupos de noções pertencentes à metalógica das lógicas da justificação: o grupo das noções de consequência sintática e o grupo das noções de teoremicidade. Desse modo, a seção precedente deixou-nos já em condições de discutir algumas propriedades comuns a todos os sistemas justificacionais, nomeadamente internalização e levantamento, uma vez que estas propriedades são todas susceptíveis de serem obtidas apenas por meio de considerações sintáticas.

O estudo desses teoremas revela a existência de algumas semelhanças entre, por um lado, as lógicas da justificação, e, por outro, os sistemas modais. A primeira dessas semelhanças será estabelecida pelo Teorema 2.2, o Teorema da Internalização. Em lógica modal, se Σ é um sistema normal, e ocorre que $\vdash_{\Sigma} \varphi$, então também sempre ocorre que $\vdash_{\Sigma} \Box\varphi$. O Teorema da Internalização irá garantir que uma lógica da justificação LJ, dentro de certas condições, e para uma especificação de constantes apropriada CS, tem um comportamento algo semelhante: se $\vdash_{\mathrm{LJ(CS)}} \varphi$, então, para algum termo justificacional τ, irá ocorrer também que $\vdash_{\mathrm{LJ(CS)}} \tau{:}\varphi$. A segunda destas semelhanças será estabelecida pelo Teorema 2.4, o Lema do Levantamento. Se Σ é uma lógica modal normal e ocorre que $\psi_1, ..., \psi_n \vdash_{\Sigma} \varphi$, então também sempre ocorre que $\Box\psi_1, ..., \Box\psi_n \vdash_{\Sigma} \Box\varphi$. O Lema do Levantamento garante propriedade semelhante às lógicas da justificação. Tomando uma lógica da justificação LJ e uma especificação CS apropriada, se $\psi_1, ..., \psi_n \vdash_{\mathrm{LJ(CS)}} \varphi$, então, para alguma sequência de termos justificacionais $\tau_1, ..., \tau_n, \pi$, irá ocorrer também que $\tau_1{:}\psi_1, ..., \tau_n{:}\psi_n \vdash_{\mathrm{LJ(CS)}} \pi{:}\varphi$.

A prova do Lema do Levantamento requer uma versão do teorema da dedução para as lógicas da justificação, para o qual, em razão disso, daremos uma prova. A prova de todos os teoremas é precedida pelas seguintes definições.

Definição 2.8 (Termos fortes) Dizemos que um termo justificacional τ é *forte* se, e só se, não ocorre em τ nem variáveis justificacionais, nem símbolos para funções senão o símbolo "$\cdot$" para a função produto. Em outras palavras, o conjunto dos termos justificacionais fortes é o menor conjunto tal que: (i) todas as constantes justificacionais são seus membros, e; (ii) se τ e π são seus membros, então $[\tau \cdot \pi]$ também é um de seus membros.

□

Exemplo Toda constante justificacional c é um termo justificacional forte. Além disso, são também termos fortes os termos "$[a \cdot b]$" e "$[a \cdot b] \cdot [a \cdot b]$". Não é um termo forte nem a variável justificacional "x", nem "$[x \cdot y]$", nem "$[a + b]$".

□

Definição 2.9 (Internalização) Seja LJ uma lógica da justificação cuja linguagem é $\mathcal{L}$. Se CS é uma especificação de constantes para LJ, então dizemos que LJ *internaliza* CS se, e só se, a seguinte afirmação é verdadeira:

1. Para cada φ em $\mathcal{L}$, se $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \varphi$, então, para algum termo justificacional τ de LJ, $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \tau{:}\varphi$.

Dizemos que LJ internaliza *fortemente* CS se, e só se, a seguinte afirmação é verdadeira:

1′. Para cada φ em $\mathcal{L}$, se $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \varphi$, então, para algum termo justificacional forte τ de LJ, $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \tau{:}\varphi$.

Desse modo, a diferença entre apenas internalizar, por um lado, e internalizar fortemente, por outro, diz respeito apenas às propriedades dos termos responsáveis pela internalização das fórmulas.

□

Definição 2.10 (Axiomaticamente apropriada) Sejam LJ uma lógica da justificação e CS uma especificação de constantes axiomática para LJ. Dizemos que CS é axiomaticamente *apropriada* para LJ se, e só se, para cada φ em CS, existe uma constante justificacional c tal que $c{:}\varphi$ é um membro de CS.

□

Teorema 2.2 (Teorema da Internalização, cf. Artemov e Fitting (2019), [8], p. 21) Se LJ é uma lógica da justificação e CS é uma especificação axiomaticamente apropriada para LJ, então LJ internaliza fortemente CS.

Prova: Sejam LJ uma lógica da justificação, e CS uma especificação axiomaticamente apropriada para LJ. Temos de provar que, para cada fórmula α de LJ tal que $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \alpha$, existe um termo justificacional forte τ de LJ tal que $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \tau{:}\alpha$. Esta prova será dada por indução na complexidade da demonstração.

O caso base. Suponhamos que uma fórmula α de LJ é tal que $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \alpha$ e, além disso, que sua dedução em LJ(CS) tem tamanho 1. Temos, desse modo, que α é um axioma de LJ, ou um membro de CS. Se α é um axioma de LJ, dado que CS é uma especificação axiomática para LJ, temos que, para $n = 1$, existe uma constante justificacional c_1 tal que a fórmula $c_1{:}\alpha$ é um dos membros de CS, de onde $\vdash_{\text{LJ(CS)}} c_1{:}\alpha$, o que garante o resultado desejado. Por outro lado, se α é um membro de CS, dado que CS é uma especificação de constantes axiomaticamente apropriada para LJ, existe uma constante justificacional c tal que $c{:}\alpha$ está em CS, de onde $\vdash_{\text{LJ(CS)}} c{:}\alpha$, de onde novamente obtemos o desejado. O caso base, desse modo, está provado.

Hipótese de indução. Suponhamos que, para qualquer fórmula β de LJ, se $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \beta$ e, além disso, a dedução de β em LJ(CS) tem tamanho menor que k, então existe um termo justificacional forte τ tal que $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \tau{:}\beta$.

Passo indutivo. Suponha que a dedução de α em LJ(CS) tem tamanho k. Se $k = 1$, usando o caso base, obtemos o desejado. Se $k \neq 1$, porém α é um axioma ou um membro de CS, podemos obter uma dedução de α que é mais curta, nomeadamente uma dedução de tamanho 1 na qual apenas o próprio α ocorre, e novamente podemos utilizar o caso base para se obter o desejado. Suponhamos, desse modo, que $k \neq 1$ e, além disso, que α não é nem um axioma de LJ nem um membro de CS. Desse modo, na dedução de α em LJ(CS), α foi obtido de fórmulas β e $(\beta \to \alpha)$ anteriores por meio da regra *modus ponens*. Desse modo, aplicando-se a hipótese de indução às fórmulas β e $(\beta \to \alpha)$, obtemos $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \tau{:}\beta$, por um lado, e $\vdash_{\text{LJ(CS)}} \pi{:}(\beta \to \alpha)$, por outro, sendo tanto τ quanto π termos fortes de LJ. Agora, em razão do esquema de axioma [PROD], temos que:

$$\vdash_{\text{LJ(CS)}} \pi{:}(\beta \to \alpha) \to (\tau{:}\beta \to [\pi \cdot \tau]{:}\alpha)$$

dado que β e $(\beta \to \alpha)$ são fórmulas de LJ e, além disso, τ e π são termos justificacionais de LJ. Desse modo, combinando-se as deduções de $\tau{:}\beta$ e $\pi{:}(\beta \to \alpha)$ com a dedução da instância de [PROD] $\pi{:}(\beta \to \alpha) \to (\tau{:}\beta \to [\pi{\cdot}\tau]{:}\alpha)$, em razão de *modus ponens*, obtemos $\vdash_{LJ(CS)} [\pi \cdot \tau]{:}\alpha$, onde $[\pi \cdot \tau]$ é um termo forte. Desse modo, por indução na complexidade da demonstração, este teorema está provado.

□

Teorema 2.3 (Teorema da Dedução) Seja LJ uma lógica da justificação. Se Γ é um conjunto de fórmulas de LJ, e φ e ψ são fórmulas de LJ, então sempre ocorre que:

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{LJ} \psi \iff \Gamma \vdash_{LJ} (\varphi \to \psi).$$

Prova: Sejam LJ uma lógica da justificação, Γ um conjunto de fórmulas de LJ, e φ e ψ duas fórmulas de LJ. Provaremos primeiro que se $\Gamma \vdash_{LJ} (\varphi \to \psi)$, então $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{LJ} \psi$. Para isso, suponhamos que $\Gamma \vdash_{LJ} (\varphi \to \psi)$, e que

$$\psi_1, \ldots, \psi_{n-2}, (\varphi \to \psi)$$

seja a dedução em LJ de $(\varphi \to \psi)$ a partir de Γ. Naturalmente, isto implica que cada um destes ψ_i, e também o próprio $(\varphi \to \psi)$, sejam todos fórmulas de LJ, e, além disso, que cada um destes ψ_i, e também o próprio $(\varphi \to \psi)$, sejam axiomas de LJ, ou membros de Γ, ou obtidos de fórmulas anteriores por *modus ponens*. Desse modo,

$$\psi_1, \ldots, \psi_{n-2}, (\varphi \to \psi), \varphi, \psi$$

conta como uma dedução de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, de onde $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{LJ} \psi$, o que desejávamos provar. Agora, provaremos que, para cada fórmula α e β de LJ, se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{LJ} \beta$, então $\Gamma \vdash_{LJ} (\alpha \to \beta)$. Daremos esta prova por indução na complexidade da demonstração de β.

Caso base. Suponhamos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{LJ} \beta$ e, além disso, que a dedução de β tem tamanho 1. Desse modo, β é um axioma, ou β é um membro de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Suponhamos que β seja um axioma. Desse modo, $\Gamma \vdash_{LJ} \beta$. Além disso, $\Gamma \vdash_{LJ} \beta \to (\alpha \to \beta)$, pois

$\beta \to (\alpha \to \beta)$ é uma tautologia. Logo, em razão de *modus ponens*, $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} (\alpha \to \beta)$, seguindo-se, portanto, o desejado. Agora, suponhamos que β seja um membro de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Se β for um membro de Γ, então $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \beta$, e, aplicando-se o mesmo raciocínio feito para o caso em que β era um axioma, obtemos novamente o desejado. Resta, deste modo, o caso em que β é o próprio α. Neste caso, entretanto, ocorre $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} (\alpha \to \beta)$, dado que $(\alpha \to \beta)$ é uma tautologia quando o antecedente e o consequente são o mesmo. Está provado, deste modo, o caso base.

Hipótese de indução. Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{LJ}} \beta$, e, além disso, a dedução de β tem tamanho menor que k, então $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} (\alpha \to \beta)$.

Passo indutivo. Suponhamos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{LJ}} \beta$, e, além disso, que a dedução de β tenha tamanho exatamente igual a k, sendo esta dedução precisamente a sequência

$$\psi_1, ..., \psi_{k-1}, \beta.$$

Se β é um axioma ou um membro de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, podemos obter uma demonstração para β que tenha tamanho igual a 1, de onde, aplicando-se o caso base, o resultado irá seguir. Desse modo, sem perda de generalidade, podemos supor que β foi obtido de fórmulas anteriores pela aplicação de *modus ponens*, digamos das fórmulas α_1 e $(\alpha_1 \to \beta)$. Desse modo, $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{LJ}} \alpha_1$, e, além disso, $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{LJ}} (\alpha_1 \to \beta)$. Logo, em razão da hipótese de indução, $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} (\alpha \to \alpha_1)$, e, além disso, $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} (\alpha \to (\alpha_1 \to \beta))$. Agora,

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} (\alpha \to \alpha_1) \to ((\alpha \to (\alpha_1 \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)),$$

já que $(\alpha \to \alpha_1) \to ((\alpha \to (\alpha_1 \to \beta)) \to (\alpha \to \beta))$ é uma tautologia. Desse modo, em razão de *modus ponens*, obtemos $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{LJ}} (\alpha \to \beta)$, o que gostaríamos de provar. Desse modo, por indução na complexidade, este teorema está provado.

□

Teorema 2.4 (Lema do Levantamento) Sejam LJ uma lógica da justificação e CS uma especificação de constantes para LJ. Suponhamos que LJ internaliza CS. Desse modo, para cada $n \geq 0$, se ocorre que $\psi_1, ..., \psi_n \vdash_{\mathrm{LJ(CS)}} \varphi$, então existem $n + 1$ termos de LJ, os termos $\tau_1, ..., \tau_n, \pi$, tais que $\tau_1{:}\psi_1, ..., \tau_n{:}\psi_n \vdash_{\text{LJ(CS)}} \pi{:}\varphi$.

Prova: A prova deste teorema será dada por indução em n. Se $n = 0$, então o resultado segue, em razão da definição de internalização. Provado, deste modo, o caso base. Para hipótese de indução, suponhamos que, se ocorre, para um $n < k$, que $\psi_1, ..., \psi_n \vdash_{\text{LJ(CS)}} \varphi$, então existem n termos de LJ, os termos $\tau_1, ..., \tau_n$, que, juntos a algum termo π de LJ, são tais que $\tau_1{:}\psi_1, ..., \tau_n{:}\psi_n \vdash_{\text{LJ(CS)}} \pi{:}\varphi$. Para o passo indutivo, suponhamos que $n = k$, e, além disso, que $\psi_1, ..., \psi_n \vdash_{\text{LJ(CS)}} \varphi$. Desse modo, pelo teorema da dedução, $\psi_1, ..., \psi_{n-1} \vdash_{\text{LJ(CS)}} (\psi_n \to \varphi)$. Agora, em razão da hipótese de indução,

$$\tau_1{:}\psi_1, ..., \tau_{n-1}{:}\psi_{n-1} \vdash_{\text{LJ(CS)}} \pi{:}(\psi_n \to \varphi).$$

Agora, $(\pi{:}(\psi_n \to \varphi)) \to ((\tau_n{:}\psi_n) \to ([\pi{\cdot}\tau_n]{:}\varphi))$ é um axioma. Em razão disso, e também em razão de *modus ponens*, $\tau_1{:}\psi_1, ..., \tau_{n-1}{:}\psi_{n-1} \vdash_{\text{LJ(CS)}} (\tau_n{:}\psi_n) \to ([\pi{\cdot}\tau_n]{:}\varphi)$. Assim, em razão do teorema da dedução, $\tau_1{:}\psi_1, ..., \tau_n{:}\psi_n \vdash_{\text{LJ(CS)}} [\pi{\cdot}\tau_n]{:}\varphi$. Desse modo, por indução em n, este teorema está provado.

□

2.4 Semântica de Fitting

A teoria da semântica de Fitting é uma extensão natural da semântica de Kripke. Nesta, uma *estrutura* é um par $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, onde $\mathcal{W}$ é um conjunto, cujos membros são chamados de *mundos possíveis*, e $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ é uma relação binária, denominada de *relação de acessibilidade*. Fitting (2005), para uma estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ e uma linguagem justificacional $\mathcal{L}$ com termos $\mathcal{T}$, oferece-nos a noção de uma *função evidencial* baseada em $\mathcal{F}$, que é uma função $\mathcal{E} : \mathcal{T} \times \mathcal{L} \to 2^{\mathcal{W}}$ que toma um termo τ e uma fórmula justificacional φ e informa o conjunto dos mundos possíveis $\mathcal{E}(\tau, \varphi) \subseteq \mathcal{W}$ nos quais τ é uma justificação para φ. Dessa forma, um *modelo de Fitting* para $\mathcal{L}$ é uma quádrupla $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$, onde $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ é uma estrutura, $\mathcal{E} : \mathcal{T} \times \mathcal{L} \to \mathcal{P}(\mathcal{W})$ é uma função evidencial, e $v : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{W}}$ é uma distribuição de conjuntos de mundos possíveis para as variáveis proposicionais. Se $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ é um modelo de Fitting, então dizemos que $\mathcal{M}$ foi *baseado* na estrutura $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$.

A função evidencial tem uma aparência internista. De fato, "evidencial" lembra "evidência", uma nomenclatura associada ao internismo. Todavia, as considerações do capítulo anterior, como penso, aplicam-se aqui também, e julgo que essa aparência é enganadora. Tem a função evidencial algum significado filosófico? Certamente tem um alto valor técnico. Alguns axiomas justificacionais podem ser mais facilmente equacionados, do ponto de vista semântico, empregando-se restrições à relação de acessibilidade. Por exemplo, para um axioma da forma $\tau{:}\varphi \rightarrow \varphi$, usamos a reflexividade da relação (cf. Artemov e Fitting (2019), [8], p. 54). Todavia, outros axiomas já não gozam dessa vantagem, sendo mais naturalmente equacionados com o emprego de funções evidenciais. Considere-se, por exemplo, um axioma da forma $\tau{:}\varphi \rightarrow [\tau + \pi]{:}\varphi$. Parece intuitivo pensá-lo não tanto em termos de relação de acessibilidade, mas como afirmando que o conjunto dos mundos possíveis onde $[\tau + \pi]$ é uma justificação para φ deve conter os mundos possíveis onde τ é uma justificação para φ, quer dizer, como afirmando que:

$$[\mathcal{E}(\tau, \varphi)] \subseteq \mathcal{E}([\tau + \pi], \varphi).$$

Definição 2.11 (Verdade) Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem justificacional que foi construída a partir do conjunto de termos $\mathcal{T}$, e $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ um modelo de Fitting para $\mathcal{L}$. Dizemos que uma fórmula justificacional $\varphi \in \mathcal{L}$ é *verdadeira* em um mundo possível $w \in \mathcal{W}$ do modelo $\mathcal{M}$, e escrevemos $\mathcal{M}, w \models \varphi$, se, e só se, temos que:

a. φ é uma variável proposicional p tal que $w \in v(p)$, ou

b. φ é $\neg\psi \in \mathcal{L}$ e não ocorre que $\mathcal{M}, w \models \psi$, ou

c. φ é $(\psi \vee \psi') \in \mathcal{L}$, e ocorre que $\mathcal{M}, w \models \psi$, ou ocorre que $\mathcal{M}, w \models \psi'$, ou

d. φ é $(\tau{:}\psi) \in \mathcal{L}$ e ocorre que:

    1. Para cada $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}w'$, temos que $\mathcal{M}, w' \models \psi$, e

    2. $w \in \mathcal{E}(\tau, \psi)$.

Se $\mathcal{M}$ é um modelo, então dizemos que φ é *$\mathcal{M}$-válida* se, e só se, para cada mundo possível w de $\mathcal{M}$, temos que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Quando φ é *$\mathcal{M}$-válida*, escrevemos $\mathcal{M} \models \varphi$. Se $\mathfrak{C}$ é uma classe de modelos de Fitting, escrevemos $\models^{\mathfrak{C}} \varphi$ se, e só se, para cada $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$, ocorre que $\mathcal{M} \models \varphi$.

□

Proposição 2.5 Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem justificacional que foi construída a partir do conjunto de termos $\mathcal{T}$, e $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ um modelo para $\mathcal{L}$, e $w \in \mathcal{W}$ um mundo possível deste modelo. Se $\psi \in \mathcal{L}$ é uma tautologia, então $\mathcal{M}, w \models \psi$.

Prova: Para a demonstração desta proposição, devemos considerar a função $g : \mathcal{L} \to \{1, 0\}$ definida pela seguinte regra:

$$g(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{M}, w \models \varphi \\ 0 & \text{se } \mathcal{M}, w \not\models \varphi \end{cases} .$$

Considerada esta função g, podemos considerar agora a sua restrição ao conjunto $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ das fórmulas atômicas da linguagem $\mathcal{L}$, a função $g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$.[7] É imediato que $g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$ é uma valoração (no sentido da nota de rodapé nº 3). Por indução na complexidade das fórmulas de $\mathcal{L}$, mostraremos que, para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$, $g(\varphi) = 1$ se, e só se, φ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$ (novamente, no sentido da nota de rodapé nº 3).

O caso base. Seja φ uma fórmula atômica de $\mathcal{L}$. Logo, em razão de 3, φ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$ se, e só se, $g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}(\varphi) = 1$. Agora, $g(\varphi) = g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}(\varphi)$. Portanto, φ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$ se, e só se, $g(\varphi) = 1$. Provado, deste modo, o caso base.

A hipótese de indução. Para a hipótese de indução, suponhamos que a tese seja verdadeira para as fórmulas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, ou seja, que as seguintes afirmações sejam ambas verdadeiras: (a) $g(\varphi) = 1$ se, e só se, φ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$, e; (b) $g(\psi) = 1$ se, e só se, ψ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$.

Passo indutivo, caso da negação. Suponhamos que $g(\neg\varphi) = 1$. Logo, $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$. Logo, não ocorre que $\mathcal{M}, w \models \varphi$, em razão da definição 2.11. Logo, $g(\varphi) = 0$, em

[7] Se $f : X \to Y$ é uma função de X em Y, e $Z \subseteq X$ é um subconjunto de seu domínio, então a *restrição* de f ao conjunto Z é a função $f|_Z : Z \to Y$ tal que, para cada $z \in Z$, $f|_Z(z) = f(z)$.

razão da definição da g. Desse modo, por hipótese de indução (nomeadamente, da afirmação (a)), φ não é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Logo, por definição (conforme nota de rodapé nº 3), $\neg\varphi$ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Para a recíproca, suponhamos que $\neg\varphi$ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Logo, por definição (conforme nota de rodapé nº 3), φ não é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Logo, por hipótese de indução, $g(\varphi) = 0$. Desse modo, pela definição de g, não é o caso que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Assim, em razão da definição de verdade 2.11, temos que $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$. Portanto, pela definição de g, $g(\neg\varphi) = 1$. Provado, deste modo, o caso da negação.

Passo indutivo, caso da disjunção. Suponhamos que $g(\varphi \vee \psi) = 1$. Em razão da definição de g, desse modo, ocorre que $\mathcal{M}, w \models (\varphi \vee \psi)$. Logo, em razão da definição de verdade 2.11, ocorre que $\mathcal{M}, w \models \varphi$, ou ocorre que $\mathcal{M}, w \models \psi$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que ocorre $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Logo, $g(\varphi) = 1$, e, pela hipótese de indução, φ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Logo, por definição (conforme nota de rodapé nº 3), $(\varphi \vee \psi)$ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Para a recíproca, suponhamos que $(\varphi \vee \psi)$ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Logo, por definição (conforme nota de rodapé nº 3), φ é verdadeira segundo a valoração $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$, ou ψ é verdadeira segundo a valoração $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que ocorre φ é verdadeira segundo a valoração $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Assim, por hipótese de indução, $g(\varphi) = 1$, de onde $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Portanto, pela definição de verdade 2.11, $\mathcal{M}, w \models (\varphi \vee \psi)$, de onde, pela definição de g, temos que $g(\varphi \vee \psi) = 1$. Portanto, provado o caso da disjunção, e, por indução na complexidade das fórmulas de $\mathcal{L}$, provado também que, para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$, $g(\varphi) = 1$ se, e só se, φ é verdadeira segundo $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$.

Por fim, suponhamos que φ seja uma tautologia, e, à fim de redução ao absurdo, que não seja o caso que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Logo, pela definição da função g, temos que $g(\varphi) = 0$. Desse modo, pela discussão precedente, temos que φ não é verdadeira segundo a valoração $g|_{\mathcal{A}_\mathcal{L}}$. Ora, uma tautologia, segundo a nota de rodapé nº 3, é uma fórmula que é verdadeira segundo *toda* valoração. Temos, assim, um absurdo! Provado, desse modo, este teorema.

$\square$

Como é comum, se $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ for uma estrutura, e sua relação $\mathcal{R}$ tiver alguma propriedade P, então nós diremos que a própria estrutura $\mathcal{F}$ tem a propriedade P. Desse modo, se $\mathcal{R}$ for reflexiva, nós diremos que a estrutura $\mathcal{F}$ é reflexiva, e se $\mathcal{R}$ for transitiva, nós diremos que $\mathcal{F}$ é transitiva, e assim sucessivamente. Além disso, assumiremos que cada uma das funções evidenciais $\mathcal{E} : \mathcal{T} \times \mathcal{L} \rightarrow 2^{\mathcal{W}}$ consideradas daqui até o final desta seção gozam de duas propriedades, a condição evidencial para o produto, doravante CEP, e a condição evidencial para a soma, doravamente CES. Estas propriedades afirmam que, para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, e para cada $\tau, \pi \in \mathcal{T}$, as duas seguintes afirmações são verdadeiras.

CEP $[\mathcal{E}(\tau, \varphi \rightarrow \psi) \cap \mathcal{E}(\pi, \varphi)] \subseteq \mathcal{E}([\tau \cdot \pi], \psi)$.

CES $[\mathcal{E}(\tau, \varphi) \cup \mathcal{E}(\pi, \varphi)] \subseteq \mathcal{E}([\tau + \pi], \varphi)$.

Se $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ é um modelo, então falamos que $\mathcal{M}$ é *compatível* com uma especificação de constantes CS se, e só se, para cada $\varphi \in$ CS, ocorre que $\mathcal{M} \models \varphi$. Se LJ(CS) é uma lógica da justificação cuja linguagem é $\mathcal{L}$, e $\mathcal{M}$ é um modelo para $\mathcal{L}$, então falamos que $\mathcal{M}$ é um modelo para LJ(CS) se, e só se, cada um dos axiomas de LJ(CS) são válidos em $\mathcal{M}$, e, além disso, $\mathcal{M}$ é compatível com CS. Na sequência, se LJ é uma lógica da justificação, então $\mathcal{L}_{\text{LJ}}$ denota a sua linguagem, e $\mathcal{T}_{\text{LJ}}$ o conjunto dos seus termos justificacionais.

Teorema 2.5 Seja $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ um modelo de Fitting tal que a função evidencial $\mathcal{E} : \mathcal{T}_{\mathcal{J}_0(\text{CS})} \times \mathcal{L}_{\mathcal{J}_0(\text{CS})} \rightarrow 2^{\mathcal{W}}$ goza de CEP e CES. Se $\mathcal{M}$ é um modelo compatível com a especificação CS, então, para cada $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}_0(\text{CS})}$, temos que:

$$\vdash_{\mathcal{J}_0(\text{CS})} \varphi \implies \mathcal{M} \models \varphi$$

Prova: Seja $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ um modelo de Fitting tal que a sua função evidencial $\mathcal{E} : \mathcal{T}_{\mathcal{J}_0(\text{CS})} \times \mathcal{L}_{\mathcal{J}_0(\text{CS})} \rightarrow 2^{\mathcal{W}}$ goza de CEP e CES. Suponhamos que $\mathcal{M}$ é um modelo compatível com a especificação CS. Devemos provar que, para cada $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}_0(\text{CS})}$, temos:

$$\vdash_{\mathcal{J}_0(\text{CS})} \varphi \implies \mathcal{M} \models \varphi$$

Seja $w \in \mathcal{W}$ um mundo possível qualquer. Dada a generalidade da escolha deste mundo possível, para a prova deste teorema, é suficiente provar que, para cada $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})}$, se $\vdash_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} \varphi$, então $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Desse modo, considere um $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})}$, e suponhamos que $\vdash_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} \varphi$. A prova será dada por indução na complexidade da demonstração deste φ.

O caso base. Se φ é uma tautologia da linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})}$, então, pela proposição 2.5, o resultado segue, isto é, $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Suponhamos, agora, que φ seja uma instância do esquema [PRO], ou seja, que φ tenha a forma $(\tau{:}(\alpha \to \beta)) \to ((\pi{:}\alpha) \to ([\tau{\cdot}\pi]{:}\beta))$, e, além disso, que, por um lado, $\mathcal{M}, w \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} \tau{:}(\alpha \to \beta)$, e, por outro, $\mathcal{M}, w \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} \pi{:}\alpha$. Desse modo, temos que:

i. Para cada $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}w'$, ocorre tanto que $\mathcal{M}, w' \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} (\alpha \to \beta)$, quanto que $\mathcal{M}, w' \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} \alpha$. Portanto, pela definição de verdade, segue que, para cada $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}w'$, ocorre que $\mathcal{M}, w' \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} \beta$.

ii. Ocorre que $w \in \mathcal{E}(\tau, \alpha \to \beta)$, mas também que $w \in \mathcal{E}(\pi, \alpha)$. Assim, em razão de CEP, $w \in \mathcal{E}([\tau \cdot \pi], \beta)$.

Portanto, em razão de (i), (ii), e da definição de verdade, segue que $\mathcal{M}, w \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} [\tau{\cdot}\pi]{:}\beta$, de onde o resultado novamente segue. Suponhamos, agora, que φ seja uma instância do esquema [SOD], ou seja, que φ tenha a forma $\tau{:}\alpha \to [\tau + \pi]{:}\alpha$, e, além disso, que $\mathcal{M}, w \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} \tau{:}\alpha$. Utilizando-se CES e a definição de verdade, o resultado segue. Um *mutatis mutandis* nesta prova para as instâncias do esquema [SOD] garante a prova para as instâncias do esquema [SOE]. Suponhamos, desse modo, que $\varphi \in \mathrm{CS}$. Como CS é uma especificação de constantes compatível com $\mathcal{M}$, o resultado obtém-se trivialmente. Provado, desse modo, o caso base.

A hipótese de indução. Suponhamos que a tese seja verdadeira para cada teorema de $\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})$ que tenha uma dedução de tamanho $< k$.

O passo indutivo. Suponhamos que a dedução de φ tenha prova de tamanho igual a k. Aos casos em que $k = 1$, ou em que φ é um axioma de $\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})$, ou em que φ é um membro de CS, aplica-se o caso base. Desse modo, sem perda de generalidade, podemos supor que φ foi obtido das fórmulas anteriores ψ e $(\psi \to \varphi)$ por meio da regra *modus ponens*. Em razão da hipótese de indução, segue-se que $\mathcal{M}, w \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} \psi$, e também que $\mathcal{M}, w \models_{\mathcal{J}_0(\mathrm{CS})} (\psi \to \varphi)$. Portanto, em razão da definição de verdade, segue-se a tese. Portanto, por indução na complexidade da demonstração de φ, provado este teorema.

□

As considerações precedentes fornecem uma visão geral sobre a semântica de Fitting, e também uma visão geral sobre a metodologia que a lógica da justificação vem empregando a fim de oferecer provas de correção para os seus sistemas. Estas considerações terão seu valor no próximo capítulo, mas também serão necessárias algumas considerações sobre completude. Em razão disso, dedicamos o final desta seção a isso. Dado que a metodologia emprega o método dos modelos canônicos, iniciamos pelas definições de consistência e inconsistência. Seja Γ um conjunto de fórmulas de uma lógica da justificação LJ, ou seja, $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{LJ}}$. Diz-se que Γ é *consistente* em LJ se, e só se, $\Gamma \nvdash_{\mathrm{LJ}} \bot$. Diz-se que Γ é *inconsistente* em LJ se, e só se, $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \bot$. Diz-se que Γ é *máximo* se, e só se, Γ é consistente e, além disso, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente, para cada fórmula φ de LJ que não seja um elemento de Γ.

Teorema 2.6 Se Γ é um conjunto de fórmulas de um sistema LJ, então o seguinte ocorre.

(1) Γ é consistente se, e só se, não existe fórmula φ de LJ tal que $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$ e $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \neg\varphi$.

(2) $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$ se, e só se, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.

Prova: A prova de (1). Suponha-se que Γ é consistente. Se existe fórmula φ de LJ tal que $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$ e $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \neg\varphi$, então $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} (\varphi \wedge \neg\varphi)$, de onde $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \bot$, um absurdo (já que $\Gamma \nvdash_{\mathrm{LJ}} \bot$). Agora, suponha-se que não existe fórmula φ de LJ tal que $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$ e $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \neg\varphi$. Se Γ não é consistente, segue-se que $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \bot$, um absurdo com a hipótese, como $\bot$ é, por definição, $(p \wedge \neg p)$, para alguma variável proposicional p. A prova de (2). Se ocorre que $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$, então ocorre que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$, e ocorre que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathrm{LJ}} \neg\varphi$. Logo, por (1), segue-se que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente. Agora, resta provar que, se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, então $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$. Para isso, suponha-se que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.

Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\text{LJ}} \bot$. Portanto, pelo teorema da dedução, $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} (\neg\varphi \to \bot)$. Agora, $(\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$ é uma tautologia, de onde ocorre que $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$.

□

Teorema 2.7 Seja Γ um conjunto de fórmulas de um sistema LJ. Se Γ é máximo, as seguintes afirmações são verdadeiras.

- (1) $\varphi \in \Gamma$ se, e só se, $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$.
- (2) Se $\vdash_{\text{LJ}} \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.
- (3) $\bot \notin \Gamma$.
- (4) $\neg\varphi \in \Gamma$ se, e só se, $\varphi \notin \Gamma$.
- (5) $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ se, e só se, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Prova: A prova de (1). Se $\varphi \in \Gamma$, como $(\varphi \to \varphi)$ é uma tautologia, ocorre que $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$. Agora, temos de provar que se $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$. Para isso, suponha-se que $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$ e, além disso, que $\varphi \notin \Gamma$. Logo, como Γ é máximo, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente. Logo, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\text{LJ}} \bot$. Assim, pelo teorema da dedução, $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} (\varphi \to \bot)$. Logo, como $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$, segue-se que $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \bot$. Assim, Γ é inconsistente, um absurdo com a hipótese. Provado, desse modo, o item (1). Os item (2), (3), (4) e (5) são corolários imediatos do item (1) e do teorema 2.6. Desse modo, omitiremos a prova.

□

Teorema 2.8 (Lema de Lindenbaum) Se Δ é um conjunto consistente em LJ, então existe um conjunto máximo Γ em LJ tal que $\Delta \subseteq \Gamma$.

Prova: A linguagem $\mathcal{L}_{\text{LJ}}$ é contável. Desse modo, podemos considerar uma das suas enumerações, digamos ξ, onde φ_k é a k-ésima fórmula a ocorrer em ξ. Vamos supor, por conveniência, que ξ é uma lista não prolixa, isto é, que a i-ésima fórmula em ξ é diferente da j-ésima fórmula, sempre que i é diferente de j. Com o ξ em mãos, fixamos a seguinte sequência de conjuntos Δ_k. Colocamos $\Delta_0 := \Delta$, e, para cada inteiro $k \geq 1$, colocamos $\Delta_k := \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}$, quando $\Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}$ é consistente em LJ, e $\Delta_k := \Delta_{k-1}$, caso contrário. Feito isso, reunimos todos os Δ_k em Γ, isto é, $\Gamma := \bigcup \Delta_k$. Afirmamos que Γ é máximo.

É fácil ver que $\Delta_i \subseteq \Delta_{i+1}$, para cada i. Temos $\Delta_0 \subseteq \Delta_1$. Além disso, se $\Delta_k \subseteq \Delta_{k+1}$, então $\Delta_{k+1} \subseteq \Delta_{k+2}$, como $\Delta_{k+2} = \Delta_{k+1} \cup \{\varphi_{k+2}\}$ ou $\Delta_{k+2} = \Delta_{k+1}$. Também é fácil ver que, se $\varphi_k \in \Gamma$, então $\varphi_k \in \Delta_k$. De fato, se $\varphi_k \notin \Delta_k$, então φ_k não é membro de nenhum Δ_i com $i \leq k$, dada a observação anterior. Além disso, supondo-se que $\varphi_k \notin \Delta_j$, com $j > k$, segue-se que $\varphi_k \notin \Delta_{j+1}$, dado que $\Delta_{j+1} = \Delta_j \cup \{\varphi_{j+1}\}$ ou $\Delta_{j+1} = \Delta_j$, e a nossa lista ξ é não prolixa. Estas duas observações, somadas, permite concluir que, se Σ é um subconjunto finito de Γ, então Σ é subconjunto de algum dos Δ_k. Basta notar que, como Σ é finito, pode-se considerar o maior dos inteiros k tal que $\varphi_k \in \Sigma$. Com este k em mãos, Δ_k é o conjunto desejado. Com este resultado garantido, podemos agora demonstrar a afirmação inicial.

Primeiro, provamos que Γ é consistente em LJ. Supondo-se que não, segue-se que $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \perp$. Se é assim porque $\perp$ é um teorema de LJ, segue que $\Delta \vdash_{\text{LJ}} \perp$, um absurdo, pois Δ é, por hipótese, consistente. Portanto, segue-se que existem $\psi_1, ..., \psi_n \in \Gamma$ (com $n \geq 1$) tais que $\vdash_{\text{LJ}} (\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n) \rightarrow \perp$. Como $\psi_1, ..., \psi_n \in \Gamma$, segue-se das observações anteriores que $\psi_1, ..., \psi_n \in \Delta_k$, para algum k, de onde o absurdo ocorre, pois cada Δ_k é consistente por construção. Portanto, por redução ao absurdo, Γ é consistente.

Agora, para garantir por completo o lema, tome um φ_k tal que $\varphi_k \notin \Gamma$. Logo, $\varphi_k \notin \Delta_k$, dado que Δ_k é um subconjunto de Γ. Portanto, $\Delta_k = \Delta_{k-1}$ e $\Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}$ é inconsistente, dado a construção da sequência de Δ_k. Logo, $\Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} \vdash_{\text{LJ}} \perp$. Novamente, não pode ocorrer $\vdash_{\text{LJ}} \perp$, pois isso é contrário à hipótese de que Δ é consistente. Logo, existem $\psi_1, ..., \psi_n \in \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}$ (com $n \geq 1$) tais que $\vdash_{\text{LJ}} (\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n) \rightarrow \perp$. Como $\Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} \subseteq \Gamma \cup \{\varphi_k\}$, segue-se que $\Gamma \cup \{\varphi_k\}$ é inconsistente, o que se queria provar.

Com isso, Γ é máximo, de modo que o Lema de Lindenbaum está provado.

$\square$

Teorema 2.9 Seja LJ uma lógica da justificação cuja linguagem é $\mathcal{L}$, e seja $\varphi \in \mathcal{L}$ uma das suas fórmulas. Desse modo, para cada $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, ocorre que $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$ se, e só se, para cada conjunto $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{L}$ que seja máximo em LJ, ocorre que $\varphi \in \Delta$.

Prova: Da esquerda para a direita, uma vez que $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{L}$, segue-se que $\Delta \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$, de onde, uma vez que Δ é máximo em LJ, segue, pelo item (1) do Teorema 2.7, que $\varphi \in \Delta$. Resta, desse modo, a prova da direita para a esquerda, que daremos por redução ao absurdo. Suponhamos, desse modo, que $\Gamma \nvdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$. Em razão disso, e pelo item (2) do Teorema 2.6, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente. Portanto, pelo Lema de Lindenbaum, existe um conjunto $\Delta \subseteq \mathcal{L}$, máximo em LJ, tal que $\Gamma \subseteq [\Gamma \cup \{\neg\varphi\}] \subseteq \Delta$. Desse modo, $\neg\varphi \in \Delta$, de onde, pelo item (4) do Teorema 2.7, $\varphi \notin \Delta$, um absurdo com a hipótese.

□

Corolário 2.3 Seja LJ uma lógica da justificação cuja linguagem é $\mathcal{L}$, e seja $\varphi \in \mathcal{L}$ uma das suas fórmulas. Desse modo, ocorre que $\vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$ se, e só se, para cada conjunto $\Delta \subseteq \mathcal{L}$ que seja máximo em LJ, ocorre que $\Delta \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$.

Prova: Por definição, $\vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$ se, e só se, $\emptyset \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$. Assim, pelo Teorema 2.9, deixando $\Gamma = \emptyset$, segue-se que $\vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$ se, e só se, para cada conjunto $\Delta \subseteq \mathcal{L}$ que seja máximo em LJ, ocorre que $\varphi \in \Delta$. Agora, pelo item (1) do Teorema 2.7, uma vez que Δ sempre é máximo, o resultado segue.

□

Notação 1 Seja LJ uma lógica da justificação cuja linguagem é $\mathcal{L}$. Se $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, então $\Gamma^\sharp := \{\varphi \in \mathcal{L} \mid (\tau{:}\varphi) \in \Gamma\}$.

□

Definição 2.12 (Modelos Canônicos) O *modelo canônico* de uma lógica da justificação LJ é o modelo de Fitting $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ que goza das seguintes quatro propriedades.

1. O conjunto dos mundos possíveis $\mathcal{W}$ é exatamente a coleção de todos os conjuntos máximos em LJ.

2. Dados dois mundos possíveis $w, w' \in \mathcal{W}$, ocorre que $w\mathcal{R}w'$ se, e só se, também ocorre que $w^\sharp \subseteq w'$.

3. Para cada variável proposicional p, e cada mundo possível $w \in \mathcal{W}$, ocorre que $w \in v(p)$ se, e só se, ocorre que $p \in w$.

4. Para cada $w \in \mathcal{W}$, ocorre $w \in \mathcal{E}(\tau, \varphi)$ se, e só se, $(\tau{:}\varphi) \in w$.

□

Proposição 2.6 Se $\mathcal{M}_{\text{LJ}} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ é o modelo canônico da lógica da justificação LJ, então a sua função evidencial $\mathcal{E}$ goza de CEP e CES.

Prova: Vamos demonstrar apenas que a função $\mathcal{E}$ goza de CEP. A prova de que goza de CES é semelhante, e por isso a omitiremos. Desse modo, suponhamos que seja verdadeiro que $w \in [\mathcal{E}(\tau, \varphi \rightarrow \psi) \cap \mathcal{E}(\pi, \varphi)]$. Desse modo, ocorre que $w \in \mathcal{E}(\tau, \varphi \rightarrow \psi)$, e também que $w \in \mathcal{E}(\pi, \varphi)$. Portanto, em razão da cláusula (4) da Definição 2.12, segue-se que $[\tau{:}(\varphi \rightarrow \psi)] \in w$, e também que $[\pi{:}\varphi] \in w$. Agora, w é um conjunto máximo em LJ. Portanto, pelo item (1) do Teorema 2.7, segue-se que $w \vdash_{\text{LJ}} \tau{:}(\varphi \rightarrow \psi)$, e também que $w \vdash_{\text{LJ}} \pi{:}\varphi$. Portanto, em razão de [PRO] e *modus ponens*, segue-se que $w \vdash_{\text{LJ}} [\tau{\cdot}\pi]{:}\psi$. Desse modo, novamente em razão da cláusula (1) do Teorema 2.7, temos que $[\tau{\cdot}\pi]{:}\psi$ é um membro de w, de onde, pelo item (4) da Definição 2.12, segue que $w \in \mathcal{E}([\tau \cdot \pi], \psi)$, exatamente o que gostaríamos de provar. Demonstrado, desse modo, esta proposição.

□

Teorema 2.10 (Lema da Verdade) Seja $\mathcal{M}_{\text{LJ}} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ o modelo canônico de uma lógica da justificação LJ cuja linguagem é $\mathcal{L}$. Para cada $w \in \mathcal{W}$, e para cada $\varphi \in \mathcal{L}$, a seguinte afirmação é verdadeira:

$$\varphi \in w \iff \mathcal{M}_{\text{LJ}}, w \models \varphi$$

Prova: A prova deste teorema é susceptível de ser dada por indução na complexidade da fórmula φ. No caso base, ou seja, quando a fórmula φ é uma variável proposicional, o resultado obtém-se em razão do item (3) da Definição 2.12. Assuma-se a hipótese de indução. Primeiro, o caso da negação. Como w é um conjunto máximo em LJ, pelo item (4) do Teorema 2.7, temos que $\neg\varphi \in w$ se, e só se, $\varphi \notin w$. Disso, pela hipótese de indução, $\neg\varphi \in w$ se, e só se, $\mathcal{M}_{\text{LJ}}, w \not\models \varphi$, de onde, pela definição de verdade, o resultado segue. Agora, o caso da disjunção. Como w é um conjunto máximo em LJ, pelo item (5) do Teorema 2.7, temos que $(\varphi \vee \psi) \in w$ se, e só se, $\varphi \in w$, ou $\psi \in w$. Assim, pela hipótese de indução, $(\varphi \vee \psi) \in w$ se, e só se, $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}}, w \models \varphi$, ou $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}}, w \models \psi$. Desse modo, pela definição de verdade, o resultado segue. Por fim, assuma-se que $\tau{:}\varphi \in w$. Logo, pelo item (4) da definição de modelos canônicos, segue-se que $w \in \mathcal{E}(\tau, \varphi)$. Assuma que $w' \in \mathcal{W}$ é tal que $w\mathcal{R}w'$. Desse modo, pelo item (2) da definição de modelos canônicos, segue-se que $w^{\sharp} \subseteq w'$. Assim, $\varphi \in w'$. Portanto, pela hipótese de indução, temos que $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}}, w' \models \varphi$, de onde, pela definição de verdade, o resultado segue. Assuma-se, agora, que $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}}, w \models \tau{:}\varphi$. Se $\tau{:}\varphi \notin w$, segue-se, pelo item (4) da definição de modelos canônicos, que $w \notin \mathcal{E}(\tau, \varphi)$, um absurdo com a hipótese de que $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}}, w \models \tau{:}\varphi$. Por indução na complexidade de φ, provado, desse modo, este teorema.

□

Suponhamos que LJ seja uma lógica da justificação. À luz da discussão anterior, se $\vdash_{\mathrm{LJ}}$ é correta com relação a uma classe de modelos $\mathfrak{C}$, então, para garantir um resultado de completude, é suficiente provar que o modelo canônico de LJ, $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}}$, é um membro de $\mathfrak{C}$. Esta conclusão é garantida pelo seguinte corolário.

Corolário 2.4 Seja LJ uma lógica da justificação, e seja $\mathfrak{C}$ uma classe de modelos. Se LJ é correta com relação à classe $\mathfrak{C}$, e, além disso, $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}} \in \mathfrak{C}$, então

$$\vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi \iff \models^{\mathfrak{C}} \varphi$$

Prova: Da esquerda para a direita, trata-se apenas da correção, que, por hipótese, está garantida. Agora, suponhamos que $\models^{\mathfrak{C}} \varphi$. Logo, como $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}} \in \mathfrak{C}$, segue-se então que $\mathcal{M}_{\mathrm{LJ}} \models \varphi$. Disso segue-se, pelo Lema da Verdade, que φ é um membro de cada conjunto máximo de LJ. Assim, pelo Corolário 2.3, segue-se que $\vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$.

□

Capítulo 3

Regressão e viciosidade

O objetivo desta parte do trabalho é oferecer um argumento a favor da tese segundo a qual as regressões de justificações são viciosas porque são incompletas. O argumento propriamente dito será apresentado no final do capítulo, na seção 3.3. Antes, certas questões precisam ser abordadas. O argumento apresentado na seção 3.3 faz uso, de uma maneira crucial, de uma concepção lógico-formal dos retrocessos de justificações[1] desenvolvida na seção 3.1. A conclusão desse argumento responde à questão da viciosidade das cadeias epistêmicas. A apresentação da problemática da viciosidade é o principal objetivo da seção 3.2.

3.1 Modelos epistêmicos para regressos de justificações

Esta seção tem dois objetivos. O primeiro deles consiste em construir um modelo lógico-formal para os regressos infinitos de justificações, os MRIs. Até certo ponto, penso que esses modelos estejam para as descrições informais das regressões da mesma forma que estão as teorias formalizadas para as suas contrapartes informais. O outro objetivo é oferecer uma discussão que, como saldo, inclua a especificação de uma coleção de

[1]Utilizo com frequência as palavras "retrocesso", "regresso" e "regressão", acompanhadas ou não da expressão "infinito". Uso-as sem fazer qualquer distinção. Emprego-as na veiculação de dois conceitos, ora para me referir à noção geral de regressões, cuja extensão inclui não só cadeias de justificações, mas também as progressões geométricas, os regressos veritativos, entre outros (há uma definição mais abaixo, em 3.2); ora para me referir à noção específica de regressão de justificações, que inclui apenas as cadeias de justificações. O contexto irá informar o sentido empregado e, como penso, não há risco de confusões.

requisitos filosóficos que, somados, anime fortemente a visão de regressão substanciada nos MRIs.

Um retrocesso infinito, manifestamente, é um retorno que não tem um término. Portanto, se obtemos uma análise do conceito de regressão finita de justificações, o caso infinito resolve-se de uma maneira mais simples, dizendo-se apenas que são como o caso finito, exceto pelo fato de que não terminam. Dessa forma, minha metodologia, para dar conta de ambos os objetivos desta seção, será a seguinte. Irei, primeiramente, explorar a noção de cadeia finita de justificações oferecida pelo fundacionalismo epistêmico. Dessa noção, pelas considerações precedentes, consegue-se facilmente, como acredito, uma concepção informal das cadeias infinitas de justificações, que procuro formalizar, no interior das lógicas da justificação, fazendo o uso dos modelos de Fitting (2005) e das noções de gatilho e fórmula de regresso, ambas propostas por Gratton (1997).

O fundacionalismo epistêmico[2], na sua versão doxástica, é uma posição filosófica que, ao propor e defender duas teses sobre a estrutura da justificação epistêmica, anima a convicção de que nossas opiniões justificadas unem-se, em certo sentido relevante, para dar ao nosso conhecimento a forma de um edifício ou de uma árvore. Com efeito, segundo a primeira das teses que defende, entre as crenças justificadas que temos, existem algumas, denominadas *básicas* ou *fundacionais*, cujo aspecto distintivo é o fato de que se mantêm justificadas sem fazer recurso a outras crenças. Por sua vez, a segunda advoga que as nossas demais crenças justificadas, chamadas *não básicas*, sustentam a sua condição, em última instância, pelo recurso às crenças básicas.[3] Dessa maneira, a posição muito naturalmente parece levar-nos à imagem do edifício (ou da

[2]Na filosofia, o termo "fundacionalismo" não encontra emprego apenas na teoria do conhecimento. Na filosofia moral, por exemplo, uma teoria T pode ser considerada *fundacionalista* porque (a) afirma a existência de certos itens básicos que mantêm um dado status distintamente moral X sem fazer recurso ao status X de outros itens e (b) afirma que os demais itens, se têm o status X, mantêm-no, em última instância, pelo recurso ao status X dos itens básicos. Nesses termos, como coloca Cameron (2022b, [15]), Aristóteles pode ser considerado um fundacionalista moral. Em *Ética a Nicômacos* I, 1094a, ele afirma que, para as ações que praticamos, deve existir uma finalidade que desejamos por si mesma, o *melhor dos bens*, sendo todas as demais finalidades desejadas por conta dela. Nesse sentido, certas ações são boas porque a sua prática aproxima-nos de um *bem maior* que, *por si mesmo*, é bom.

Por conta da diversidade de empregos que recebe, a fim de garantir a precisão, às vezes tomaremos o cuidado de acompanhar o termo "fundacionalismo" do qualificador "epistêmico", especialmente nas situações em que julgarmos apropriado evidenciar nosso propósito de se referir a um fundacionalismo propriamente epistemológico.

[3]Cf. Dancy (2002, p. 73).

árvore) do conhecimento, com as crenças básicas consubstanciando os alicerces (ou as raízes) a partir dos quais podemos prolongar a superestrutura de nosso saber.

Apresenta-se como verossímil, e, ao que tudo indica, também livre de disputas, a afirmação de que o fundacionalismo epistêmico não propõe uma concepção sobre a maneira como nossas opiniões justificadas encontram-se *espacialmente* dispostas em nossas mentes, se é que elas têm uma existência espaço-temporal, como as imagens de edifícios e árvores poderiam sugerir a alguns, nem mesmo parece falar *precipuamente* sobre uma precedência *temporal* que algumas de nossas crenças justificadas (as básicas) têm sobre outras (as não básicas), mas antes parece que deve ser pensado como uma posição que se levanta, *inter alia*, para oferecer um ponto de vista sobre a estrutura da relação de dependência que o *estado de justificada* das opiniões não básicas mantém, em última instância, com o estado de justificada das opiniões básicas. É verdade que o fundacionalista pode explicar corretamente a sua posição, e às vezes é de fato assim que procede, afirmando que, diante de uma crença justificada, se ela não é básica, *retornando* pela sua cadeia de justificações, *alcançaremos*, cedo ou tarde, alguma opinião básica. Apesar disso, com base no que pontuamos, os termos "retornar" e "alcançar", quando utilizados nesse contexto, não podem ter o mesmo sentido, por exemplo, que têm quando utilizados para falar que, se estamos no quarto andar de um prédio, alcançaremos o segundo após retornarmos dois andares, ou para falar que, se possível, a viagem no tempo poderia permitir o retorno ou regresso ao dia em que nascemos. O fundacionalismo parece ser, *prima facie*, uma teoria suscetível de ser apresentada sem o uso dos conceitos de tempo e de espaço, tratando-se, dessa maneira, de uma posição que não tem em seu escopo relações espaciais e temporais. Entretanto, talvez seja difícil encontrar uma maneira de a formular que desaconselhe por completo o emprego, em sentido conotativo, de termos espaço-temporais para se falar sobre as relações de dependência mantidas entre os estados de justificado de nossas crenças. A doutrina fundacionalista, como penso, está irremediavelmente presa à analogias espaço-temporais. Isso, para mim, é uma indicação sutil de que as relações de dependência de que trata o fundacionalista talvez sejam um caso de uma estrutura mais geral, uma estruturna da qual as relações espaciais e temporais também são exemplares. Que estrutura é essa? Afinal, como o fundacionalismo explica a estrutura da relação de dependência que o estado de justificada das crenças não básicas mantém com as crenças básicas? Uma analogia só é uma explicação até certo ponto e, é razoável pensar, a posição tem de avançar, para não permanecer incompleta, um esclarecimento adequado sobre a maneira como entende essa relação de dependência.

Podemos encontrar uma descrição mais acurada da posição fundacionalista, com um avanço no sentido de mitigar tal hiato, quando adotamos a terminologia e parte da exposição de Alston (1976, [5]; 2010, [2]). Em *Two types of foundationalism*, Alston (1976, p. 165-6) apresenta a posição recorrendo a uma distinção que faz entre crenças justificadas indiretamente (mediatamente) e crenças justificadas diretamente (imediatamente). A crença justificada de um agente doxástico, S, em uma proposição, φ, está *indiretamente* (*mediatamente*) justificada se, e só se, o que justifica a crença de S de que φ inclui[4] outras crenças justificadas de S, $\psi_1, ..., \psi_n$[5], que incorporam razões ou motivos para φ; e está *diretamente* (*imediatamente*) justificada se, e só se, o que justifica a crença de S de que φ *não* inclui outras crenças justificadas de S. Com a distinção em mãos, Alston (1976, p. 166) formula o fundacionalismo como a visão segundo a qual:

[A]. Existem crenças justificadas diretamente;

[B]. Se a crença de um agente doxástico, S, em uma proposição, φ, está indiretamente justificada, então o estoque das crenças diretamente justificadas de S é sempre suficientemente robusto para gerar uma cadeia de justificações que termina na sua crença indiretamente justificada de que φ.

A tese [A] é uma declaração estritamente existencial. Ela não explica ou oferece indicativos de como as crenças básicas mantêm o seu status de justificada, apenas afirma

[4]Na segunda nota de rodapé de *Two types of foundationalism*, Alston (1976, [5]) sublinha que, para que a crença justificada de uma pessoa, S, em uma proposição, φ, esteja mediatamente justificada, é suficiente que a justificação da crença de S de que φ *apenas* inclua outras crenças justificadas de S. Nesse sentido, por exemplo, se a justificação da crença de S de que φ inclui outras crenças justificadas de S, $\psi_1, ..., \psi_n$, porém S não se dá conta disso, por inteiro ou em parte, ainda assim a crença de S de que φ estará mediatamente justificada, vez que é suficiente apenas que a justificação inclua outras crenças justificadas.

[5]As letras latinas minúsculas "m" e "n" são usadas, nesse contexto, para denotar números naturais $1, 2, 3, ...$

a sua existência. O fundacionalismo, para dar conta dessa explicação, precisa recorrer a teses adicionais. A afirmação [B], por outro lado, não parece sustentar diretamente, ao menos de forma explícita, a existência de qualquer crença justificada. Ela, apesar disso, condiciona o status de mediatamente justificada de uma crença, φ, à existência de uma cadeia de justificações que, partindo dos fundamentos, ascende, intermédio justificação inferencial, até φ. As teses [A]-[B], dessa forma, parecem condicionar o status de justificada de uma opinião, φ, à existência de uma série de opiniões $\psi_1, ..., \psi_n$[6] tal que:

(1) ψ_n é a opinião φ.

(2) Cada opinião nessa série ou está diretamente justificada, ou está inferencialmente justificada pelo recurso a opiniões que já ocorreram anteriormente na série.

Na forma como a apresentamos, as semelhanças entre a concepção fundacionalista da justificação e a noção tradicional de dedutibilidade é evidente. Prawitz (2011) busca explorar, ao menos em parte, essa semelhança (cf. Prawitz (2011), [50]).

Uma consequência imediata da noção de justificação inferencial talvez seja o que chamarei de *princípio da condicionalidade*, doravante PC. O PC é um dos componentes do que Fumerton (2004) denomina de *princípio da justificação inferencial* (cf. Fumerton (2004), [31], p. 151). Se minha opinião de que ψ é injustificada, isso se deve ao fato de que ela, simultaneamente, não é básica e não está inferencialmente justificada. Pela definição de justificação mediata, apenas crenças justificadas podem justificar indiretamente outras crenças, e é precisamente isso que afirma o princípio da condicionalidade. PC também tem uma expressão proposicional. Suponhamos que uma proposição, ψ, não esteja justificada para um sujeito, S, mas que a proposição, φ, esteja mediatamente justificada, para S, pela proposição ψ. Nessas condições, se S passa a crer que φ e, além disso, apoia essa sua opinião na sua crença de que ψ, a conclusão mais razoável é de que a opinião de S de que φ está mediatamente justificada pela sua opinião de que ψ. Agora, uma vez que ψ não está justificada para S, a opinião de S de que ψ não está justificada,

[6]Neste ponto, a letra "n" denota números naturais $1, 2, 3...$

de onde, pelo PC, versão doxástica, a sua opinião de que φ não está mediatamente justificada pela sua opinião de que ψ, uma contradição.

Princípio 3.1 (Princípio da condicionalidade, versão doxástica; cf. Fumerton (2004), [31], p. 151) *Se a opinião de um sujeito S de que ψ não está justificada, então a sua opinião de que φ não está mediatamente justificada pela sua opinião de que ψ.*

$\square$

Princípio 3.2 (Princípio da condicionalidade, versão proposicional; cf. Fumerton (2004), [31], p. 151) *Se uma proposição ψ não está justificada para um sujeito S, então uma proposição φ não pode ser mediatamente justificada, para S, pela proposição ψ.*

$\square$

Tendo em conta essas considerações, o que acontece se uma de minhas opiniões, a de que φ, está justificada? Segundo a concepção fundacionalista, isso significa que deve existir uma série de opiniões $\psi_1, ..., \psi_n$ gozando das propriedades (1) e (2). Além disso, pelo princípio da condicionalidade, versão doxástica, todos os elementos dessa série estão justificados. Se o estado de justificada da minha opinião de que φ *depende* do estado de justificada da minha opinião de que ψ, então, se φ está justificada, ψ também está. E se o estado de justificada de minha opinião de que ψ depende do estado de justificada da minha opinião de que ψ_1, então, se ψ está justificada, ψ_1 também. E assim por diante, até chegarmos aos fundamentos. Mas, e se, todavia, os fundamentos não existirem? É natural pensar que, diante disso, essa sequência de implicações não terá fim, se seguindo infinitamente. Dessa maneira, uma forma de pensar a regressão infinita de justificações é precisamente essa, como uma sequência infinita de condicionais de justificações.

Antes de passar ao trabalho técnico, deixe-me tentar transportar essas ideias para a linguagem das lógicas da justificação. Para isso, como é usual em todo argumento de regressão ao infinito, suponhamos que a justificação inferencial seja a única que existe. Agora, suponhamos que uma proposição φ está, para mim, justificada[7]. Como

[7]Admitindo-se as distinções desenvolvidas no primeiro capítulo, a justificação epistêmica ou é doxástica, ou é proposicional. A justificação doxástica é uma propriedade das crenças de um *indivíduo*.

observamos anteriormente, isso é o mesmo que admitir que existe um justificador τ para φ, quer dizer, que existe um justificador τ tal que $\tau{:}\varphi$. Agora, como a justificação inferencial é a única que existe, então o fato de que τ é um justificador para φ envolve a justificação de uma outra proposição, digamos ψ. Dessa forma, φ está, para mim, justificada porque está, para mim, mediatamente justificada pela proposição ψ. Por conta do princípio da condicionalidade, versão proposicional, isso significa que ψ também está, para mim, proposicionalmente justificada. Isso só ocorre, entretanto, se existir um justificador para ψ. Suponhamos que seja π esse justificador, ou seja, que $\pi{:}\psi$. Dessa forma, se φ está, para mim, justificada, então, para algum justificador τ, e para algum justificador π e uma proposição ψ, temos que, se τ é uma justificação para φ, então π é uma justificação para ψ. Dito de outro modo, se φ está para mim justificada, então, para dois termos τ e π, e uma sentença ψ, a seguinte condicional deve ser verdadeira:

$$\tau{:}\varphi \rightarrow \pi{:}\psi$$

Esta condicional será verdadeira simplesmente porque seu antecedente e consequente serão simultaneamente verdadeiros. Suponhamos agora que a justificação da proposição ψ envolve a proposição ψ_1. Dessa maneira, deve existir também um π_1 tal que $(\pi{:}\psi \rightarrow \pi_1{:}\psi_1)$. Portanto, se a regressão se segue infinitamente, o que temos é uma sequência infinita de condicionais $\xi = \{(\tau_k{:}\psi_k \rightarrow \tau_{k+1}{:}\psi_{k+1})\}_{n \in \mathcal{N}}$. Não é difícil ver que ξ é, em certo sentido, o que Gratton (1997) chama de esquema de regressão, sendo $\tau{:}\varphi$ o que denomina de sentença de gatilho (cf. Gratton (1997), [37], p. 204).[8]

Gostaria de formalizar a noção de retrocesso infinito de justificações a partir de um ponto de vista modal. Como penso que isso pode ser feito? A ideia que tenho em mente é a seguinte. Se uma proposição φ vem a adquirir o status de justificada, e tudo o que existe é justificação inferencial, então terá de existir uma sequência infinita

Por sua vez, a justificação proposicional é uma característica que *indivíduos* têm com relação a certas proposições. Não parece existir, nesse sentido, nenhuma justificação *absoluta*. Toda forma de justificação parece envolver a referência a um certo indivíduo.

[8]Gratton (1997), ao propor as noções de fórmula de regressão e sentença de gatilho, tem em mente, sobretudo, a linguagem de primeira ordem. Isso, todavia, não é impedimento para uma generalização. Na sequência, na seção 3.2, eu volto a esse ponto e procuro motivar essa generalização de uma maneira mais pormenorizada.

de condicionais, como a sequência ξ. Suponhamos que um ser humano, S, procura, gradativamente, construir essa sequência ξ. Que quero dizer com isso? Quero dizer que, para justificar φ, S, por exemplo, faz recurso a um argumento que tem ψ como premissa, e, para justificar ψ, S faz recurso a um argumento que tem ψ_1 como premissa, e assim por diante, infinitamente. Segundo a conclusão do último parágrafo, seguindo esse caminho, se S for bem sucedido, e a proposição φ tornar-se para ele justificada, então, para ao menos três termos τ, π e π_1, os membros do seguinte conjunto de condicionais serão todos verdadeiros:

$$\{(\tau{:}\varphi \rightarrow \pi{:}\psi), (\pi{:}\psi \rightarrow \pi_1{:}\psi_1)\}$$

Uma vez que tem um ser finito e uma existência temporalmente limitada, talvez S nunca consiga, efetivamente, construir a sequência infinita como ξ. Mas, se S *não tivesse* essas limitações, talvez fosse capaz de construir essa cadeia, ato de justificação por ato de justificação. Primeiro, buscando apoiar φ em ψ, e depois ψ em ψ_1, e assim por diante. Cada ato de justificação, manifestamente, mudaria o conjunto das proposições *atualmente* verdadeiras, quer dizer, mudaria, em termos modais, o mundo possível em que S estaria em um modelo de Fitting. Dessa forma, quando ignoramos a finitude da existência humana, seguindo esse raciocínio, é muito natural pensar uma regressão infinita como uma sequência infinita de mundos possíveis $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n, ...$, no interior de um modelo de Fitting, onde, em cada mundo possível ω_n, S obteve êxito na construção de toda a sequência ξ até o membro ξ_n. Dito de outro modo, em cada mundo possível ω_n, os membros da sequência ξ até a posição n consistem precisamente nas condições para que S seja bem-sucedido. Por exemplo, se, para justificar φ, busca apoiá-la em ψ, e depois ψ em ψ_1, então, neste ponto, só terá sucesso se, para ao menos três termos τ, π e π_1, os membros do conjunto $\{(\tau{:}\varphi \rightarrow \pi{:}\psi), (\pi{:}\psi \rightarrow \pi_1{:}\psi_1)\}$ são todos verdadeiros. É dessa maneira que gostaria de pensar os retrocessos epistêmicos. O restante desta seção é dedicado ao trabalho técnico envolvido na formalização dessa concepção. O modelo apresentado na definição 3.3 não foi retirado da literatura, tratando-se de uma contribuição original deste autor.

Definição 3.1 (Esquema de regressão) *Seja* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{T_F}}$ *um conjunto de sentenças de uma linguagem justificacional* $\mathcal{L}_{\mathcal{T_F}}$. *Dizemos que* Γ *é um* ***esquema de regressão*** *se, e só se, existe uma sequência* $\sigma_i = \{\tau_i{:}\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ *de sentenças de* $\mathcal{L}_{\mathcal{T_F}}$ *de maneira que:*

a. Γ *é o menor conjunto tal que, se* $i \in \mathcal{N}$, *então* $(\sigma_i \rightarrow \sigma_{i+1}) \in \Gamma$.

Para cada $i \in \mathcal{N}$, *dizemos que* σ_i *é a* ***sentença-gatilho*** *de profundidade* i. *A sentença gatilho de profundidade 1 é chamada de sentença-gatilho* ***inicializadora***.

□

Definição 3.2 (Sequência infinita) *Seja* A *um conjunto. Uma* ***relação binária*** R *em* A *é um subconjunto de* $A \times A$. *Uma sequência* ***em*** A *é uma sequência cujos membros são elementos de* A. *Uma sequência em* A *é* ***infinita*** *se, e só se, a sua imagem é infinita. Uma sequência em* A *infinita é* ***não prolixa*** *se, e só se, é injetiva.*

□

Definição 3.3 (Modelos de Regressão ao Infinito – MRIs) *Sejam* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, v \rangle$ *um modelo de Fitting para* $\mathcal{L}_{\mathcal{T_F}}$, $\prec$ *uma relação binária em* $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$, $\{\omega_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ *uma sequência não prolixa de mundos possíveis em* $\mathcal{W}'$, *e* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{T_F}}$ *um esquema de regressão cuja sentença-gatilho inicializadora é* $\tau{:}\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{T_F}}$. *Um* ***modelo de regressão ao infinito*** *para a sentença* φ *é uma tripla*

$$\mathcal{I} = \langle \mathcal{M}, \Gamma, \prec \rangle$$

tal que:

1. *Para cada* $w, w' \in \mathcal{W}'$, *temos que* $w \prec w'$ *se, e só se, existe um* $k \in \mathcal{N}$ *tal que* $\omega_k = w$ *e* $\omega_{k+1} = w'$. *Além disso, se* $w \prec w'$, *então* $w\mathcal{R}w'$.

2. $\mathcal{M}, \omega_1 \models (\tau{:}\varphi \rightarrow \tau_2{:}\varphi_2)$.

3. *Se* $\mathcal{M}, \omega_n \models (\tau_k{:}\varphi_k \rightarrow \tau_{k+1}{:}\varphi_{k+1})$, *então* $\mathcal{M}, \omega_{n+1} \models (\tau_{k+1}{:}\varphi_{k+1} \rightarrow \tau_{k+2}{:}\varphi_{k+2})$, *para cada* $n, k \in \mathcal{N}$.

3. *Para cada* $w, w' \in \mathcal{W}'$, *se* $w \prec w'$, *então, para cada* $\psi \in \Gamma$, *se* $\mathcal{M}, w \models \psi$, *então* $\mathcal{M}, w' \models \psi$.

4. *Para cada mundo possível $w \in \mathcal{W}'$, temos que $\mathcal{M}, w \not\models \tau{:}\varphi$.*

□

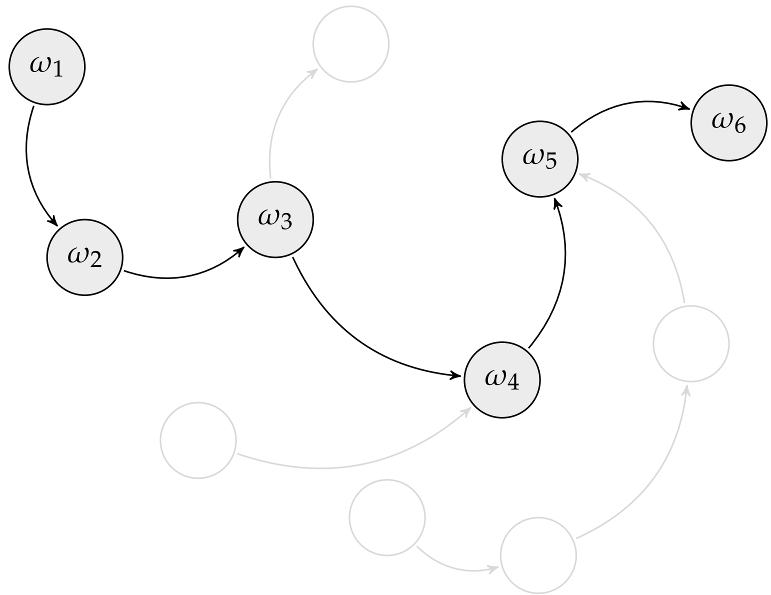

Figura 3.1 *Diagrama para seção de um modelo de regressão ao infinito.*

3.2 Viciosidade e benignidade

Os regressos infinitos não aparecem apenas na teoria da justificação epistêmica. Nós também podemos registrar a sua presença em outros setores da filosofia, da ciência e da vida cotidiana. O que todas essas regressões têm em comum? O que vem a ser, afinal, um regresso infinito? Uma resposta a essa questão, oferecida por Cameron (2022a; 2022b), diz-nos que *regressos infinitos* são sequências de objetos adequadamente relacionados com um primeiro membro, mas sem um último elemento, onde cada membro da sequência, em certo sentido, leva ao (ou gera o) próximo elemento imediato (CAMERON, 2022a, [14], p. 11).

A resposta proposta por Cameron (2022a; 2022b), que em alguma medida já se encontra presente em Nolan (2001, [45]), é interessante e tem alguns atrativos. Um deles, por exemplo, consiste no fato de que, ao menos aparentemente, ela dá conta das regressões epistêmicas, no sentido de que tais regressos, na definição de Cameron (2022a; 2022b), não perdem a sua condição, mantendo-se como casos paradigmáticos de regressões infinitas. Penso que uma maneira de ver isso seja notando que, em uma regressão epistêmica, cada estágio sempre é gerado a partir das exigências de suporte epistêmico levantadas no estágio imediatamente anterior. Em uma formulação tradicional do problema do regresso, se colocamos como objetivo justificar uma proposição, φ, o sucesso de nossa empresa estará então condicionado à posse de garantias quanto à verdade de que φ, mas a garantias, como é habitual, que não podem ser senão a conjunção de outras proposições justificadas $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Dessa forma, o objetivo de justificar uma proposição, φ, gera um novo estágio, onde o objetivo agora é justificar a conjunção das proposições $\psi_1, \ldots, \psi_n$. E assim, presumivelmente, avançando sempre do mesmo modo, oferecendo sempre novas proposições como garantias das anteriores, vamos a uma regressão que é infinita, e aparentemente nunca chegamos a um estágio em que φ está, de fato, justificada. Dito de outra forma, na tentativa inicial de justificar φ, geramos a demanda pela justificação da conjunção de $\psi_1, \ldots, \psi_n$, e assim por diante, infinitamente. Dessa forma, as regressões infinitas, aparentemente, correspondem bem às expectativas da concepção de Cameron (2022a; 2022b), como sequências com um primeiro termo, mas sem um último, na qual cada estágio gera, em certo sentido, o próximo.

Um segundo atrativo da análise de Cameron (2022a; 2022b), uma qualidade que buscamos explorar em maiores detalhes ao longo desta seção, consiste no fato de que, *prima facie*, no conjunto de todas as regressões infinitas, a posição de Cameron (2022a; 2022b) cria espaço para se falar não apenas nos regressos que costumamos pensar como intuitivamente indesejados e problemáticos[9] , como as regressões epistêmicas, mas

[9]No português, a palavra "problema" costuma ser utilizada de, ao menos, duas formas distintas. Na primeira delas, que podemos chamar de *sentido Q*, utilizamos-a para se referir a uma questão ou pergunta. Por exemplo, quando falamos da lista de problemas ainda não resolvidos da matemática, utilizamos-a dessa maneira. Na segunda delas, que podemos chamar de *sentido D*, empregamos-a quando desejamos falar não sobre uma questão ou pergunta, mas sobre alguma dificuldade, embaraço ou obstáculo que se mostra, ou que geralmente se mostra, quando da tentativa de se obter algo. Nesse sentido, por exemplo, quando o pneu fura, podemos justificar o atraso dizendo que tivemos um problema.

O modo como utilizamos a palavra "problema", se no sentido D ou Q, coopera para a determinação do gênero de coisa que pode contar como uma solução do que se alega ser um problema. Manifestamente, pode-se solucionar certos problemas de matemática apresentando uma teoria que garanta a conjectura em questão, ou um contraexemplo que a negue, mas não se pode com frequência resolver o problema de um pneu furado com uma teoria matemática. Isso tudo é óbvio para boa parte das pessoas, como imagino.

Todavia, há um aspecto dessa discussão que não é suficientemente óbvio. Dentre aquelas coisas que têm a aparência de um problema, no sentido Q, alguns filósofos defendem a existência de objetos que não são problemas genuínos, no sentido Q, mas antes o que chamam de *pseudoproblemas*. De forma análoga, também em regressões algo mais gentis e benéficas. Na terminologia frequentemente adotada por parte da literatura ligada à questão, a concepção de Cameron (2022a; 2022b) permite falar em regressões *viciosas*, mas também em regressos *benignos* (cf. Cameron (2022), [14], p. 11; Nolan (2001), [45]; Clark (1988), [19]).

Os itens (a), (b), (c) e (d) seguintes apresentam quatro regressos infinitos, três benignos e um vicioso. O primeiro deles, (a), é o que se pode denominar de uma *regressão de verdades*, ou ainda de um *regresso veritativo*. Ele é um exemplo bem-conhecido de regresso benigno (NOLAN, 2001, [45], p. 523). Se p, então "p" é verdadeira. Mas se "p" é verdadeira, então ""p" é verdadeira" também é verdadeira, e assim sucessivamente, ao infinito. Associada a uma proposição verdadeira, p, existe uma sequência infinita de outras proposições verdadeiras. A regressão de verdades é, para muitos, uma dimensão benigna de qualquer atividade intelectual. Se encontramos uma proposição verdadeira, p, então estamos sempre em condições de obter tantas outras proposições verdadeiras quanto o tempo nos permitir, pois ""p" é verdadeira" também será verdadeira, e etc.

(a) p, "p" é verdadeira, ""p" é verdadeira" é verdadeira, ...

O segundo regresso, (b), é uma progressão geométrica $\{b_n\}_{n \in \mathcal{N}}$[10] cuja razão é a fração $1/2$ e o termo inicial é o número natural 1.[11] À medida que avançamos em (b), admitindo-se a análise matemática tradicional, retrocedemos pouco a pouco na reta real, aproximando-se cada vez mais do número zero, porém se mantendo sempre algo distante dele. O sentido em que, progredindo em (b), nós *regredimos* na reta real, ao invés de *avançarmos* nela, pode ser retirado da relação de ordem estrita usual[12] definida

poderíamos então afirmar que, dentre as coisas que têm a aparência de um problema, no sentido D, também talvez existam certos objetos que não são problemas genuínos, no sentido D, mas antes o que poderíamos chamar de *pseudodificuldades*.

Penso que, quando se diz que certas regressões infinitas, incluindo as regressões epistêmicas, são problemáticas, deseja-se com isso afirmar que são problemas em uma acepção da palavra que se aproxima do sentido D. Dessa forma, qualquer pessoa que afirme que um regresso é problemático, está suscetível à afirmação de que, onde ele vê problema, não há senão pseudodificuldade.

[10] Nesse ponto, assumimos que $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

[11] Portanto, essa progressão geométrica tem lei de formação, ou termo geral, $b_n = 1 \cdot (1/2)^{n-1}$.

[12] Cf. Davey e Priestley (2002), [25], p. 3.

no conjunto dos números reais, a relação "menor que" <, e do seguinte:

$$... < -2 < -1 < 0 < ... < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1 < 2 < ...$$

Nesse sentido, retrocedemos na reta real se, e só se, percorremos uma sequência de números reais $x_0, x_1, ...$ tais que: $... < x_1 < x_0$. É claro que, nesses termos, a noção de regresso aqui utilizada depende, em última instância, do fato de que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo (cf. Lima (2009), [44], p. 15; Hrbacek (1999), [40], p. 178).

(b) $1, 1/2, 1/4, 1/8, ...$

A progressão geométrica (b) mantém uma relação muito íntima com o terceiro exemplo que gostaríamos de considerar, a regressão (c), a antinomia do estádio, na sua versão regressiva, proposta por Zenão de Eleia (séc. V AEC) como um argumento contra a possibilidade do movimento (cf. Kirk, Raven e Schofield (2010), [42], p. 282; Kenny (2008), [41], p. 44). Nessa antinomia, um corredor, para percorrer um certo percurso, deve antes atingir 1/2 da sua extensão, e, antes de atingir 1/2 da extensão total, deve atingir 1/4 da extensão total, e assim por diante, infinitamente. Vez que não é possível percorrer um número infinito de pontos em um tempo finito, afirma Zenão, o corredor jamais consegue percorrer todo o percurso. O que é verdadeiro para o corredor também é para todo o resto, e o movimento, dessa forma, apresenta-se como impossível. Se a conclusão de Zenão é acertada ou não, isso é uma coisa com a qual nós não precisamos nos preocupar no momento. Penso que o importante aqui seja notar o seguinte: a regressão (c), no contexto da antinomia do estádio, é apresentada como um regresso vicioso. E, talvez ainda mais importante, seja a observação de que, em um outro contexto, uma regressão muito similar, o regresso (b), não ocorre como vicioso, mas como benigno. Por exemplo, no contexto da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), a existência de (b) é um teorema.[13] Ninguém, todavia, afirma que (b), no contexto de ZF, é problemática, ou que ZF, por prever a existência de (b), deve ser

[13]Sobre a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, veja Hrbacek (1999), [40], p. 267.

abandonada. No interior de ZF, (b) é esperada e, além disso, intuitivamente benigna. A antinomia do estádio, por sua vez, apesar de semelhante a (b), é por vezes pensada como uma *reductio* para certas filosofias do movimento e do espaço-tempo.

(c) Um corredor, para percorrer um certo percurso, deve antes atingir 1/2 da sua extensão, e, antes de atingir 1/2 da extensão total, deve atingir 1/4 da extensão total, e assim por diante, infinitamente.

O quarto e último caso de regressão infinita que gostaríamos de analisar, (d), é uma sequência de sentenças aléticas gerada a partir da consideração, infinitamente reiterada, do esquema de axioma modal "4" (cf. Carnielli e Pizzi (2008), [16]; Chellas (1980), [18]). Nesse regresso, o seu primeiro termo, $\Box\alpha$, e o esquema "4", $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$, parecem operar, em certo sentido, como o que Gratton (1997) procurou denominar de, respectivamente, *fórmula de regressão* e *sentença de gatilho* (cf. Gratton (1997), [37], p. 204). Lembramos o leitor do fato de que Gratton (1997), ao apresentar suas noções, parece ter em mente, acima de tudo, certas sentenças quantificadas universalmente[14] e sentenças atômicas de primeira ordem[15], respectivamente. Mas, vez que se conserva a intenção mais profunda dessas definições, o emprego dos conceitos de Gratton (1997), em um contexto propriamente modal, não parece configurar nenhuma ampliação problemática dessas duas noções. Os ganhos parecem superar as perdas. Penso, para além disso, que seja interessante generalizar ainda mais as duas noções de Gratton (1997), fazendo-as falarem não apenas de sentenças quantificadas universalmente e de sentenças modais, mas também de regras de inferência. De fato, certas regras de transformação (por exemplo, as regras de necessitação e de internalização de axioma) podem funcionar muito bem, em essência, como "fórmulas de regressão". No regresso (d') seguinte, por exemplo, podemos tomar $(\alpha \vee \neg\alpha)$ como sua sentença de gatilho e a própria regra de necessitação como sua "fórmula" de regressão (sobre a regra de internalização de axioma, veja Artemov (2008), [9], p. 484).

(d) $\Box\alpha, \Box\Box\alpha, \Box\Box\Box\alpha, \ldots$

[14]Como, por exemplo, $\forall x(Px \rightarrow \exists y((yRx \wedge Py) \wedge y \neq x)$.
[15]Como, por exemplo, Pa.

(d′) $(\alpha \vee \neg\alpha), \Box(\alpha \vee \neg\alpha), \Box\Box(\alpha \vee \neg\alpha), \Box\Box\Box(\alpha \vee \neg\alpha), \ldots$

Por conta da posição privilegiada que os argumentos de regressão infinita ocupam na filosofia, onde frequentemente são chamados a fim de aconselhar e desaconselhar teorias, a questão da viciosidade dos regressos apresenta-se muito naturalmente como um importante problema filosófico interdisciplinar. Por que certas regressões infinitas são viciosas, enquanto outras não são? Existe uma etiologia comum, capaz de explicar a natureza problemática de todas as regressões viciosas, ou o fenômeno pode ser o efeito de diferentes fatores? Essas duas questões têm movimentado um debate filosófico longo, complexo, profundo e interessante. Neste trabalho, não teremos a oportunidade de repassar essa discussão por completo, nem mesmo a possibilidade de tocar por inteiro a sua literatura mais essencial. Fazer isso nos levaria para muito longe de nossos propósitos atuais. Todavia, penso que seja algo proveitoso, pelo menos, fazer referência a uma das etiologias já propostas, a taxonomia de Nolan (2001, [45]). Mais proveitoso ainda, como imagino, será analisar uma relação das etiologias já propostas para a viciosidade das regressões epistêmicas. Escolhi a taxonomia de Aikin (2005, [1]) para isso. O restante desta seção é dedicado a essa última tarefa.

É um dado curioso o fato de que, muitas vezes, simplesmente assumimos *tacitamente* que as regressões epistêmicas sejam viciosas. Esse parece ser, inclusive entre os céticos, o procedimento mais corriqueiro. A opinião que tem desfrutado de maior prestígio, durante o curso da história do pensamento ocidental, talvez não seja só a de que as regressões epistêmicas são viciosas, mas sobretudo a de que são *obviamente* viciosas. O infinitismo, presumivelmente por conta disso, foi muito frequentemente pensado como uma alternativa trivialmente falsa: para além das fortificações do fundacionalismo (para alguns) e do coerentismo (para a boa parte dos demais), o ceticismo é o único terreno razoável. Alguns filósofos, entretanto, rompendo com esse padrão, sentiram-se compelidos a motivar, por meio de argumentos, a viciosidade dos regressos.

Aikin (2005) procurou desenvolver uma taxonomia quadripartida dos argumentos oferecidos para a tese de que os regressos de justificação inferencial são viciosos. Essa taxonomia, na verdade, ocorre em um contexto muito mais amplo, incorporando-se em uma metodologia que o autor parece utilizar para defender um certo gênero particular de infinitismo. A ideia, até certo ponto, não é difícil de se compreender. Aikin (2005), primeiro, classifica os argumentos em quatro categorias e, apoiando-se nos critérios de classificação adotados, tenta mostrar que sua proposta de infinitismo resiste a todos os argumentos sistematizados. A taxonomia diminui relativamente o esforço, vez que, no interior de cada categoria, não é necessário mostrar, membro por membro, que a sua proposta de infinitismo mantém-se, sendo suficiente motivar essa conclusão geral a partir do aspecto que une os argumentos na classe. O núcleo do trabalho de Aikin (2005), dessa forma, é uma certa defesa do infinitismo. Eu gostaria, todavia, de deixar essa defesa de lado (aos fins que nos propomos, ela não poderia ser mantida na pauta sem um desvio) e me concentrar na sua taxonomia. Em cada categoria, o aspecto que congrega os argumentos é, apenas ou em grande medida, uma etiologia comum para a viciosidade das regressões epistêmicas. Dessa forma, a taxonomia de Aikin (2005), primordialmente colocada como uma classificação dos argumentos oferecidos para a viciosidade dos regressos epistêmicos, pode ser vista, muito facilmente, também como uma taxonomia das etiologias propostas para a viciosidade das regressões. Por conta disso, na sequência, tomo-a e apresento-a a partir dessa segunda perspectiva.

Dentre as etiologias sistematizadas por Aikin (2005) para o fenômeno da viciosidade das regressões epistêmicas, a primeira que eu gostaria de colocar toca a questão da finitude humana. Nós somos seres limitados, com tempo de existência e capacidade de memória finitos. Se chegamos aos 100 anos de idade, agradecemos. O poder da nossa memória é modesto. Parece existir um limite quantitativo para ela e, não bastando isso, ela é frágil e costuma falhar constantemente. Dessa forma, uma vez que as regressões infinitas cobram uma quantidade infinita de crenças, é muito razoável pensar que sua viciosidade resida precisamente no fato de que suas exigências são marcadas pela inexequibilidade: infinitas inferências levariam uma quantidade infinita de tempo para serem feitas, não somos capazes de ter um número infinito de crenças, e assim por diante (cf. Aikin (2005), [1], p. 202).

Uma segunda etiologia, abordada por Aikin (2005), busca explicar a viciosidade dos regressos epistêmicos a partir da tese de que a opinião de um sujeito, S, só pode vir a ser justificada por uma cadeia infinita de razões se o sujeito em questão, S, vier a ter uma *crença justificada infinitamente complexa* (cf. Aikin (2005), [1], pp. 204-5). Foley (1978) é um dos filósofos que oferecem esse diagnóstico (cf. [32]). Ele parte das teses (A) e (B) seguintes. Como coloca Foley (1978, p. 314), se a opinião de um sujeito, S, em uma proposição, φ, está justificada com base na sua opinião justificada em uma outra proposição, ψ, que, por sua vez, está justificada com base em uma outra opinião justificada, α, que, por sua vez, está justificada com base em uma outra opinião justificada, β, e assim por diante, *ad infinitum*, então esse sujeito, S, tem de ter uma crença justificada de que φ está justificada por ψ que, por sua vez, está justificada por α que, por sua vez, está justificada por β que, por sua vez, ... (cf. Foley (1978), [32], p. 314). Uma vez que não somos capazes de ter crenças desse tipo, infinitamente complexas, a viciosidade do regresso se apresenta.

(A) Se a crença de um sujeito, S, em uma proposição, φ, está justificada com base na sua crença justificada de que ψ, então esse sujeito, S, tem de ter uma crença justificada de que φ está justificada por ψ (cf. Foley (1978), [32], p. 313).

(B) Se a crença de um sujeito, S, em uma proposição, φ, está justificada com base na sua crença justificada de que ψ e, por sua vez, a sua crença justificada de que ψ está justificada com base na sua crença justificada de que β, então o sujeito, S, tem de ter uma crença justificada de que φ está justificada por β através de ψ (cf. Foley (1978), [32], p. 314).

Uma terceira etiologia, presente no interior da taxonomia de Aikin (2005), tenta motivar a viciosidade dos regressos epistêmicos através da defesa de uma posição segundo a qual, se se pode justificar uma crença, φ, fazendo-se uso de uma regressão infinita, então se pode também justificar a crença na sua negação, $\neg\varphi$, algo que é, para seus proponentes, um contrassenso (cf. Aikin (2005), [1], p. 198). Na lógica clássica, tanto ao nível proposicional quanto ao nível de primeira ordem, se φ e ψ são duas proposições, então φ é uma consequência lógica de $(\varphi \wedge \psi)$. Dito de outra maneira, a proposição $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ é logicamente verdadeira (válida). Mas não só isso. Da hipótese de que φ e ψ são proposições, segue-se que $(\neg\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi$ também é logicamente verdadeira. Essas duas considerações, relativamente simples, são o ponto de partida para uma versão da etiologia em questão. Para ver isso, assuma que $\mathcal{L}$ seja a linguagem da lógica clássica, $\varphi \in \mathcal{L}$ uma de suas sentenças e $\{\alpha_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ a enumeração de um subconjunto infinito das sentenças de $\mathcal{L}$ que não tem φ entre seus membros. Nesses termos, de uma maneira geral, podemos sempre construir uma regressão infinita de proposições, $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-}$, tal que:[16]

(1) β_{-1} é a proposição φ.

(2) Para cada $n \in \mathbb{Z}_-$ que seja < -1, β_n é a proposição $(\beta_{n+1} \wedge \alpha_{|n|-1})$.

Não é difícil ver que, para cada $m \in \mathbb{Z}_-$, nós temos que $(\beta_{m-1} \rightarrow \beta_m)$ é logicamente verdadeira, quer dizer, que β_m é uma consequência clássica de β_{m-1}. Dessa forma, temos uma cadeia infinita de proposições para φ e, além disso, cada crença β_m nessa regressão parece inferencialmente justificada pela sua predecessora imediata, β_{m-1}, uma vez que aquela sempre pode ser inferida, segundo os cânones clássicos, desta. Nesses termos, se admitimos que regressões infinitas justificam proposições, então se segue que φ está justificada. Mas se esse é o caso, então temos um problema. Tomando a mesma sequência $\{\alpha_n\}_{n \in \mathcal{N}}$, podemos obter agora uma outra regressão, $\{\beta^*_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-}$ tal que:

(1) β^*_{-1} é a proposição $\neg\varphi$.

(2) Para cada $n \in \mathbb{Z}_-$ que seja < -1, β^*_n é a proposição $(\beta^*_{n+1} \wedge \alpha_{|n|-1})$.

E não será difícil ver que, presentemente, admitindo-se que as regressões infinitas justificam crenças, a opinião $\neg\varphi$ está, por conta da sequência $\{\beta^*_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-}$, igualmente justificada. Portanto, $(\varphi \wedge \neg\varphi)$ estão justificadas, o que é um contrassenso (um argumento

[16] O conjunto numérico $\mathbb{Z}_-$ é o conjunto dos números inteiros negativos não nulos $-1, -2, -3, \ldots$ Por sua vez, o conjunto numérico $\mathcal{N}$ é o conjunto dos números naturais $1, 2, 3, \ldots$ Se $x \in \mathbb{Z}_-$, então $|x| \in \mathcal{N}$ é o chamado *módulo*, ou *valor absoluto*, do inteiro x.

desse tipo pode ser encontrado em Oakley (1976), [46], p. 227-28; uma versão mais sofisticada foi desenvolvida por Post (1980), [49], pp. 32-5).[17]

O último diagnóstico filosófico que procuro analisar tenta esclarecer a viciosidade dos retrocessos epistêmicas apoiando-se no pensamento de que a justificação inferencial é sempre, no fim, uma forma *condicional* de justificação: se, para justificar uma opinião, φ, busco o apoio de uma outra crença, ψ, então minha opinião inicial de que φ só está justificada *se* ψ está; dito de outra maneira, se ψ não estiver justificada, então φ não estará. Desse modo, se a regressão prossegue infinitamente, a justificação de cada proposição sempre permanece condicionada ao status de justificada de alguma opinião posterior, e a dificuldade, segundo essa concepção, parece nascer precisamente desse ponto. Aikin (2005) diz-nos que, segundo essa etiologia, os regressos são sempre *incompletos* (cf. [1], p. 194). Dancy (2002) parece defender uma explicação similar para o fenômeno da viciosidade. É dele que retiramos a noção de justificação condicional (cf. [24], pp. 77-8).

Esse diagnóstico tem sido, frequentemente, apresentado por meio de analogias. Por exemplo, Hankinson (1995) apresenta a analogia do trem (cf. [39], p. 189).[18]

[17]Nas regressões animadas pelos argumentos de Post (1980) e Oakley (1976), cada novo estágio é gerado pela necessidade de se justificar a proposição presente no estágio anterior, algo que se procura fazer, em linhas gerais, buscando uma segunda proposição que tenha a primeira como consequência. Em nenhum ponto desses regressos, entretanto, a questão da consequência lógica é, ela própria, tocada. Nessas regressões, cada estágio dá conta das premissas suficientes para concluir o próximo estágio, mas sempre segundo uma concepção predeterminada e constante de consequência lógica. Para justificar uma proposição φ, podemos recorrer, por exemplo, à proposição $(\varphi \wedge \psi)$, mas não sem assumir, de forma implícita, a concepção clássica de verdade lógica, não sem assumir que esteja justificada a afirmação de que φ é uma consequência lógica de $(\varphi \wedge \psi)$. É algo interessante o fato de que, de certa forma, pode-se fazer quase o completo oposto, deixando as premissas de um argumento de lado e buscando a justificação, em uma regressão infinita, dos requisitos de consequência lógica levantados ao longo do trajeto. Por exemplo, para justificar uma proposição, φ, podemos começar por oferecer um argumento com premissa ψ e conclusão φ, mas, na sequência, ao invés de colocar em questão a premissa, ψ, colocar em suspeita a validade do raciocínio envolvido nesse argumento. Para dar conta dessa dificuldade, podemos então apresentar um novo argumento, mas agora com uma outra premissa, α, e a conclusão de que φ é uma consequência lógica de ψ. Para evitar o embaraço de uma petição de princípio, podemos assumir que o raciocíno envolvido nesse novo argumento é outro. Todavia, vez que o novo argumento faz agora uma outra afirmação de consequência lógica, temos de procurar um terceiro argumento, e assim sucessivamente, *ad infinitum*. A esse respeito, pode ser interessante comparar o argumento presente em Post (1980) e Oakley (1976) com o diálogo que Aquiles e a tartaruga mantém em um dos trabalhos de ficção de Lewis Carroll, *O que a tartaruga disse a Aquiles*. Uma tradução desse trabalho pode ser encontrado em [17].

[18]Segundo Aikin (2005), Hankinson (1995) desenvolve sua metáfora no seu livro, *The Sceptics*, página 189. Todavia, o leitor interessado deve ter em mente que, no exemplar que utilizamos, Hankinson (1995) apresenta sua metáfora um pouco antes, na página 169.

Um trem com uma quantidade infinito de vagões, onde cada um se move porque se move o que está imediatamente à sua frente, na ausência de uma locomotiva, como afirma Hankinson (1995), aparentemente não há como se explicar o movimento do todo (HANKINSON, 1995, [39], p. 169). O paralelo, assim, é muito claro, se bem que com uma diferença crucial: da maneira como estamos acostumados a pensar as regressões, a locomotiva não viria à frente dos vagões, mas só após todos eles, não os puxando, mas os empurrando.

Uma segunda analogia, antes de prosseguir, é a seguinte. Suponhamos que, a certa altura, eu precise de uma dada quantia emprestada. O leitor, para me ajudar, dá-me, muito gentilmente, um cheque bancário. Ocorre que, infelizmente, o próprio leitor não anda financeiramente muito bem. Para a nossa sorte, todavia, um amigo do leitor, para tentar resolver o problema, toma a decisão de dar a você um novo cheque bancário. Mas esse amigo também não anda bem de dinheiro e resolve... Nessas circunstâncias, se a regressão se segue da mesma forma, infinitamente, o que se passará no dia em que eu procurar o banco? Nessas circunstâncias, sem alguém com saldo positivo em conta, é difícil explicar como se poderia sair do banco com algum dinheiro em mãos.

A etiologia da incompletude, como observou Aikin (2005), parece depender de dois pontos. Primeiro, de uma distinção entre uma perspectiva *imediata* ou *local*, onde o que se apresenta é a relação que cada crença mantém com aquela opinião particular que justifica inferencialmente, e uma perspectiva *global*, onde o que se nos mostra é a cadeia de opiniões em sua totalidade. Segundo, a afirmação da viciosidade, a partir da perspectiva global, com o emprego, de uma forma crucial, de uma analogia (cf. Aikin (2005), [1], p. 195). Por exemplo, para avançar o diagnóstica da incompletude, Hankinson (1995), da perspectiva local, fala da relação que mantém um vagão com outro e, da perspectiva global, apresenta todos os vagões conectados uns com os outros, infinitamente. Na sequência, da perspectiva global, Hankinson (1995) fala-nos das locomotivas. No exemplo do cheque bancário, de uma perspectiva imediata, eu falo de uma pessoa generosa, porém com problemas financeiros, oferecendo um cheque bancário a outra e, de uma perspectiva global, falo de uma regressão infinita de cheques bancários e pessoas com dificuldades financeiras. Com isso, de uma perspectiva global, faço referência ao saldo positivo em conta.

Aikin (2005), como procurei afirmar anteriormente, apresenta sua taxonomia em um contexto mais geral, onde busca argumentar que a sua visão do infinitismo suporta todos os argumentos catalogados. Na tentativa de dar conta dessa tarefa, um dos problemas que Aikin (2005) identifica nessa última forma de diagnóstico, que coloca a viciosidade dos retrocessos na sua incompletude, consiste no uso decisivo que ela faz das analogias. Por exemplo, Hankinson (1995), em seu argumento, busca aproximar a justificação epistêmica da relação de causalidade. Na sua analogia, o movimento dos vagões só podem ser causalmente explicados como o efeito da energia gerada na locomotiva. Analogias, todavia, são argumentos cujo valor é, até certo ponto, limitado. Os raciocínios por analogia são excelentes recursos, mas, *per se*, não são geralmente capazes de decidir todo o jogo (cf. Aikin (2005), [1], p. 195).

Penso que Hankinson (1995) talvez tivesse um certo interesse em, apresentada a sua história dos vagões e da locomotiva, dizer-nos que, *mutatis mutandis*, a viciosidade se segue, da mesma forma, para as regressões epistêmicas. Se esse for precisamente o caso, então estou inclinado a concordar com Aikin (2005) nesse ponto. Efetivamente, entre trens e cadeias infinitas de razões há muitas diferenças importantes. E argumentos para a incompletude, tais como os de Hankinson (1995), parecem comportar uma certa lacuna explicativa. Um *mutatis mutandis*, nesse contexto, parece perigoso. Um vagão não pode se mover sem uma locomotiva, nem mesmo por alguns centímetros. Podemos admitir isso. Mas, por outro lado, imaginemos a seguinte situação. Para pagar meu aluguel, o gentil leitor oferece-me um cheque bancário sem fundos. Com esse cheque em mãos, eu "pago" meu aluguel. A senhoria não confia muito em mim, mas tem um conceito muito elevado do leitor, e por isso aceita o cheque e a condição de descontá-lo apenas quando transcorridos cinco dias, na expectativa de que ele tem fundos. Todavia, no dia em que ela decide descontar o cheque, o leitor, que é uma pessoa muito responsável, procura minha senhoria. Ao saber que o cheque do leitor não tem fundos, ela fica muito aborrecida, mas ao tomar conhecimento do fato de que o leitor pegou com seu melhor amigo, Alfredo, um outro cheque, a senhora, que confia muito em Alfredo, decide esquecer a história. Ela pega o cheque de Alfredo e, novamente, aceita depositá-lo apenas transcorridos novos cinco dias. Mas Alfredo, ela não sabe, também anda passando por dificuldades e resolveu pegar um cheque... Dessa maneira, como já podemos imaginar, se a situação prosseguir dessa forma, infinitamente, parece certo que a senhoria, à luz disso tudo, talvez nunca veja o dinheiro do aluguel, mas, se ela for suficientemente generosa, a ponto de permitir que a regressão persista infinitamente, tudo parece indicar que talvez eu nunca mais precise pagar o aluguel. De cheque sem fundo em cheque sem fundo, eu ganharia cinco dias, e mais cinco dias, e assim por diante, ao infinito. Isso parece sugerir que o argumento de Hankinson (1995), pelo apoio que faz em analogias, não parece ser capaz de me garantir que, com regressos epistêmicos, não seja possível algo semelhante. Não parece ser possível, apenas com o argumento de Hankinson (1995), concluir que regressos não podem nos movimentar por “metros”, “quilômetros”, etc. Para obter sua conclusão, ele, tudo indica, carece de um argumento auxiliar. Na próxima seção, busco, usando os modelos de regressão infinita, oferecer para debate um argumento desse gênero.

3.3 Finitariedade e incompletude

Nesta parte final do trabalho, procuro desenvolver um argumento filosófico que, como o vejo, tem potencial para ser utilizado — pelo menos subsidiariamente, somando-se às analogias tradicionais — na defesa da etiologia segundo a qual retrocessos epistêmicos são viciosos porque são incompletos.

O argumento pode ser descrito, informalmente, da seguinte forma. Uma regressão epistêmica, como pensamos, é composta por uma série infinita de atos de justificação. Todos esses atos, quando considerados individualmente, no contexto de um segmento inicial do retrocesso, são *imperfeitos* e *incompletos*, no sentido de que estão na regressão por conta de demandas de justificação que, no fim, estão associadas à necessidade de se justificar uma proposição inicial, mas não encerram a demanda por tais justificações, ao contrário, são geradores de novas demandas que não dão conta e, por isso, enviam ao próximo estágio. A consequência desses aspectos, em um modelo de regressão infinita, é o de que, em cada mundo possível ao longo do regresso, ou seja, em cada estado justificacional gerado pelos atos de justificação durante a regressão, a opinião que se deseja justificar, φ, não está *atualmente* justificada, mas apenas *condicionalmente* justificada. Uma vez que cada estado de justificação descreve um momento da regressão infinita e, além disso, cada estado de justificação mantém o trabalho desenvolvido, ao longo da regressão, até aquele ponto, as lógicas da justificação abordadas no capítulo anterior, de maneira geral, garantem que a justificação pretendida para φ só se obtém contingentemente, se se obtém, ao final da regressão, vez que tais lógicas garantem que, se uma sentença é consequência lógica genuína de um conjunto de sentenças, então o é de um de seus subconjuntos finitos. Dessa forma, as lógicas da justificação garantem a existência de uma ontologia justificacional, um modelo de Fitting, onde a regressão em questão se mantém, mas a justificação buscada para φ não se apresenta. Disso, conclui nosso argumento, a regressão infinita para φ, se afirmada em algum ponto pelo modelo de regressão, não é *suficiente* para justificar φ. Portanto, informalmente, se nosso argumento é bem-sucedido, isso se deve primordialmente ao uso da finitariedade das lógicas da justificação combinado, por sua vez, à tese de que os argumentos de regressão são incompletos porque são insuficientes. Formalmente, o argumento pode ser dado a partir da seguinte sequência.

Seja LJ uma lógica da justificação. Vamos assumir que suas relações de consequência sintática, $\vdash_{\text{LJ}}$, e semântica, $\models_{\text{LJ}}$, sejam dadas pelas definições 2.4 e 2.11, respectivamente. Além disso, suponhamos também que as relações de consequência de LJ estejam unidas por teoremas de correção e completude. Disso se segue que $\vdash_{\text{LJ}}$ é finitária e monotônica. Suponhamos que temos um teorema de dedução para $\vdash_{\text{LJ}}$.

Suponhamos que $\Gamma \models_{\text{LJ}} \varphi$. Desse modo, pelo teorema da correção e completude, admitido como hipótese no parágrafo anterior, $\Gamma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$. Portanto, uma vez que $\vdash_{\text{LJ}}$ é finitária, existe um conjunto finito $\Sigma \subseteq \Gamma$ tal que $\Sigma \vdash_{\text{LJ}} \varphi$. Portanto, existe um conjunto finito $\Sigma \subseteq \Gamma$ tal que $\Sigma \models_{\text{LJ}} \varphi$, por conta do teorema da correção e completude. Portanto, se $\Gamma \models_{\text{LJ}} \varphi$, então existe um conjunto finito $\Sigma \subseteq \Gamma$ tal que $\Sigma \models_{\text{LJ}} \varphi$. Esta condicional é verdadeira para todas as lógicas da justificação abordadas no capítulo anterior. De fato, todas dão conta dos pressupostos do parágrafo anterior. Para além das lógicas da justificação do capítulo anterior, Artemov e Fitting (2019), por exemplo, oferece muitas outras, todas gozando das propriedades do último parágrafo. A argumentação que oferecemos no sentido de que regressões são viciosas porque são incompletas depende das características metalógicas do último parágrafo. É uma vantagem da nossa argumentação o fato de que ela não se apoia em aspectos específicos de sistemas particulares de lógica da justificação, mas apenas em propriedades metalógicas, comuns a uma família infinita desses sistemas.

Suponhamos que $\mathcal{I} = \langle \mathcal{M}, \Gamma, \prec \rangle$ seja um modelo de regressão para uma sentença φ. Diante disso, temos dois casos possíveis. No primeiro, o modelo $\mathcal{M}$ não é um membro da classe $\mathcal{C}_{\mathrm{LJ}}$ dos modelos de Fitting de LJ. Se pensamos um modelo de Fitting como uma ontologia justificacional, e uma classe de modelos de uma lógica LJ como a coleção, segundo LJ, de todas as ontologias justificacionais possíveis, dizer que $\mathcal{M} \notin \mathcal{C}_{\mathrm{LJ}}$ é dizer, em certo sentido, que a regressão descrita pelo modelo $\mathcal{I}$ não pode, segundo LJ, existir.

No segundo caso, $\mathcal{M}$ é um membro da classe $\mathcal{C}_{\mathrm{LJ}}$. Suponhamos que a sentença-gatilho inicializadora de $\mathcal{I}$ seja $\tau{:}\varphi$. Isso significa que a regressão infinita em questão, $\mathcal{I}$, teve início da tentativa de justificar φ. Se $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \tau{:}\varphi$, ou seja, se $\tau{:}\varphi$ é uma consequência lógica, segundo LJ, do esquema de regressão de $\mathcal{I}$, então $\Gamma \models_{LJ} \tau{:}\varphi$. Dessa forma, existe um subconjunto finito $\Sigma \subseteq \Gamma$ tal que $\Sigma \models_{LJ} \tau{:}\varphi$. Como Σ é finito, nós temos que $\mathcal{M} \models_{\mathrm{LJ}} (\bigwedge \Sigma \rightarrow \tau{:}\varphi)$ e, para algum $\omega_k \in \mathcal{W}'$, temos também que $\mathcal{M}, \omega_k \models_{\mathrm{LJ}} \bigwedge \Sigma$. Desse modo, temos que $\mathcal{M}, \omega_k \models_{\mathrm{LJ}} \tau{:}\varphi$, o que é uma contradição, uma vez que, pela definição dos MRIs, $\mathcal{M}, \omega_k \models_{\mathrm{LJ}} \neg(\tau{:}\varphi)$. Portanto, isso nos leva à conclusão de que $\tau{:}\varphi$ não pode ser, segundo LJ, uma consequência lógica de Γ. Dessa forma, a lógica LJ afirma a existência de um modelo de Fitting $\mathcal{M}'$ tal que, em algum de seus mundos possíveis, w, nós temos que $\mathcal{M}', w \models_{\mathrm{LJ}} \psi$, para cada $\psi \in \Gamma$, mas que $\mathcal{M}', w \not\models_{\mathrm{LJ}} \tau{:}\varphi$. Novamente, se assumimos que os modelos de Fitting são ontologias justificacionais, a nossa conclusão parece ser a de que, segundo LJ, existe uma situação possível onde "se percorreu" toda a regressão infinita, mas que, todavia, ainda assim se permaneceu sem garantias de que φ está justificada. Uma vez que essas considerações são muito gerais, aplicando-se à todas as lógicas da justificação do capítulo anterior, esse resultado parece aconselhar fortemente a visão segundo a qual as regressões epistêmicas são viciosas, e isso pelo fato de que são incompletas, insuficientes para garantir a justificação de uma proposição.

Se nossa etiologia aponta, de fato, para a origem correta do fenômeno da viciosidade, as notícias para o infinitismo podem não ser animadoras. Na minha argumentação, talvez um dos pontos mais problemáticos, do ponto de vista do infinitismo, seja a exigência que coloquei através da cláusula (4) do Definição 3.3. Todavia, o infinitista que a ataca deveria tomar certo cuidado. Para pensar esse ponto, suponhamos que $\mathcal{I} = \langle \mathcal{M}, \Gamma, \prec \rangle$ seja um modelo de regressão para uma sentença φ. Seguindo a cláusula (4) da Definição 3.3, para cada mundo possível $w \in \mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$, temos que $\mathcal{M}, w \not\models \tau{:}\varphi$. Em especial, dessa forma, para cada membro ω_n da sequência $\{\omega_n\}_{n \in \mathcal{N}}$, temos que $\mathcal{M}, \omega_n \not\models \tau{:}\varphi$. Estamos assumindo que, se ω_n é um membro da sequência $\{\omega_n\}_{n \in \mathcal{N}}$, então ω_n é o mundo possível que descreve o estado justificacional de um sujeito, S, após os n primeiros atos de justificação da regressão infinita que iniciou na tentativa de justificar φ. Dessa forma, a exigência de que $\mathcal{M}, \omega_n \not\models \tau{:}\varphi$, para cada n, é muito natural. Formaliza apenas o requisito comum de que, em cada estágio n da regressão, S ainda não obteve, pelo caminho que escolheu, uma justificação para φ. De fato, se já tivesse obtido o desejado, seguir na sequência se tornaria desnecessário. Em toda regressão infinita, cada estágio n jamais dá conta de todas as exigências justificacionais, e busca resolver essa questão, como vimos, transportando as exigências pendentes para um estágio posterior $n+1$. A cláusula (4) é, de fato, um elemento crucial do meu argumento para a tese de que as regressões infinitas são viciosas porque são incompletas. Todavia, para o infinitista, atacá-la pode trazer mais prejuízos que benefícios. Adicionamos a cláusula (4) para dar conta do fato de que, em cada estágio da regressão, há exigências justificacionais que ainda não foram satisfeitas. Se retiramos a cláusula (4) da definição 3.3 dos MRIs, a nossa concepção formal de cadeia infinita de justificações deixa de dar conta desse fato. Quais as consequências disso? Penso que depende da espécie de infinitismo.

Penso que o infinitismo epistêmico seja um gênero de posição que comporte, ao menos, duas espécies. A primeira, que poderia ser chamada de *infinitismo híbrido*, é a posição que afirma que cadeias epistêmicas infinitas são capazes de produzir justificações, sendo que, para cada proposição φ, se o estado de justificada de φ, para um sujeito S em uma dada situação, é o produto de uma cadeia infinita de justificações, então sempre existe uma outra situação onde o estado de justificada de φ, para o sujeito S, é o produto de uma cadeia finita de justificações. Por isso, chamo-a de "híbrida", porque torna duas vezes maior a lista das situações nas quais uma proposição pode ser justitificada. A segunda espécie, que chamarei de *infinitismo estrito*, também afirma que cadeias epistêmicas infinitas são capazes de produzir justificações, mas, ao contrário da híbrida, diz-nos que, para algumas proposições, *apenas* uma regressão infinita pode oferecer uma justificação. Penso que meu argumento a favor da incompletude das regressões, sobretudo por conta da cláusula (4), oferece um perigo para ambas as formas de infinitismo. De fato, um modelo $\mathcal{I} = \langle \mathcal{M}, \Gamma, \prec \rangle$ para uma sentença φ, como procurei mostrar, oferece uma ontologia justificacional, um modelo de Fitting. Supor que essa ontologia, em algum de seus mundos possíveis, torna φ justificada, e isso por conta da cadeia infinita de justificações envolvida, é um absurdo, uma vez que, segundo o nosso argumento, sempre existe uma outra ontologia onde φ não está justificada, a parte todo esse esforço infinito da primeira. Nós nunca conseguimos chegar a um mundo possível onde uma infinita quantidade de condições justificacionais foram atendidas e, *por conta disso*, acabamos nos tornamos justificados a acreditar em uma proposição φ. Todavia, se um infinitista estrito tentar atacar minha posição a partir da cláusula (4), indicando e defendendo a sua retirada, é importante notar que essa forma de movimento levará a uma concepção de MRIs sem a cláusula (4), o que é, como vimos, uma concepção de regressão infinita na qual um sujeito, S, pode percorrer uma sequência infinita $\{\omega_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ de mundos possíveis na busca de uma justificação que ele já tinha, por exemplo, no mundo possível ω_k, o que parece ser um absurdo com a própria concepção de infinitismo do infinitista estrito. O infinitismo híbrido, para além dos efeitos que meu argumento têm sobre ele, é também uma posição, do ponto de vista ontológico, muito custosa. Ela duplica as possibilidades de se justificar certas proposições. Por que deveríamos admitir isso?

Conclusão

A justificação é uma condição necessária para o conhecimento. Se o saber em jogo é o matemático, o científico ou o filosófico, isso não é relevante. Se desejamos conhecer uma proposição φ, precisamos de justificação. E a questão do regresso é um clássico obstáculo à satisfação dessas pretensões.

Este trabalho procurou defender a tese de que os retrocessos são problemáticas porque são, por natureza, incompletos. São caros, trabalhosos e difíceis de se obter. Talvez, inacessíveis para os seres humanos. Ainda assim, do ponto de vista da filosofia do conhecimento, como tudo indica, são sempre ineficientes. É sempre um esforço infrutífero. Isso aponta para duas conclusões imediatas. Primeiro, que sua insuficiência pode ser identificada já na lógica do conceito de justificação. Segundo, que a viciosidade não é só uma questão de tempo ou de memória. Se as regressões oferecem um obstáculo genuíno à obtenção do conhecimento, isso não se deve tanto às características de nossa cognição ou da relação que temos com o tempo.

Nosso trabalho não deve ser pensado como a defesa da existência de uma única etiologia para a viciosidade das regressões. Deixamos em aberto se existem outras, insistindo apenas na existência de, ao menos, uma: a incompletude. Como procurei mostrar, quando o tema é a tese da incompletude, o que se pode encontrar mais facilmente na literatura filosófica são as analogias, como as do trem e da locomotiva. Dessa forma, nosso trabalho tem a vantagem de ter ter oferecido, para além de uma analogia, um argumento mais formal, além de uma expressão mais precisa da noção de incompletude das regressões epistêmicas. Penso que isso deverá facilitar qualquer argumentação futura, sobretudo a produzida por interessados, se algum vier a existir, em analisar e apontar problemas e dificuldades em nossa metodologia. Também penso que seja uma vantagem de nosso trabalho oferecer um uso genuinamente filosófico às lógicas da justificação desenvolvidas a partir de Artemov (1995), para além das já tradicionais aplicações em ciência da computação. De fato, penso que esses sistemas sejam muito ricos, tanto da perspectiva filosófica quando computacional, de forma que, como imagino, ainda há muito para se explorar com eles.

Afirmei anteriormente que talvez Hankinson (1995) estivesse algo inclinado a pensar que a sua história dos vagões e da locomotiva, *mutatis mutandis*, pudesse ser transformada em um argumento conclusivo a favor da viciosidade das regressões epistêmicas. As analogias, todavia, são dispositivos interessantes só até certo ponto. Depois, tornam-se perigosos. Os teoremas de realização, como tivemos a oportunidade de falar na introdução, se afirmam uma conexão entre um sistema modal e uma lógica da justificação, demonstram que esses sistemas, até certo ponto, se comportam de uma maneira muito semelhante. Esses resultados são mais confiáveis do que as analogias, pois indicam precisamente as suas potencialidades e os seus limites. Sabemos até onde um teorema de realização, uma vez provado para duas lógicas, pode nos levar, partindo-se de uma ou de outra. Dessa forma, como penso, isso parece levantar a possibilidade de que teoremas da realização possam ser utilizados para se comparar diferentes regressos, formalizados em diferentes lógicas conectadas por eles. Por exemplo, penso ser possível formalizar os regressos epistêmicos no contexto das lógicas da justificação desenvolvidas por da Costa (1999) e, na sequência, oferecer uma análise comparativa dessa formalização e dos MRIs, isso por meio de teoremas de realização que conectam os sistemas modais e as lógicas da justificação *à la* Artemov.

Por fim, o que esse trabalho tem a nos dizer sobre o ceticismo? Como afirmei anteriormente, penso que, com relação a esse ponto, nada esteja ainda certo e definido. Penso, de todo modo, que este trabalho oferece serviços para ambos os lados. Tanto o cético quanto o dogmático podem se beneficiar de um argumento que afirme a incompletude das regressões. Esta dissertação, desse modo, é antes um problema mais importante para o infinitista. Para os demais, parece ser um espaço neutro.

Referências

[1] AIKIN, Scott F. Who is afraid of epistemology's regress problem? **Philosophical Studies**, v. 126, n. 2, p. 191-217, 2005.

[2] ALSTON, William P. Foundationalism. In: DANCY, Jonathan; SOSA, Ernest; STEUP, Matthias (ed.). **A companion to epistemology**. Wiley-Blackwell, 2010. p. 382-385.

[3] ALSTON, William P. **Beyond "justification"**: dimensions of epistemic evaluation. Cornell University Press, 2005.

[4] ALSTON, William P. Internalism and externalism in epistemology. **Philosophical Topics**, v. 14, n. 1, p. 179-221, 1986.

[5] ALSTON, William P. Two types of foundationalism. **The Journal of Philosophy**, v. 73, n. 7, p. 179-221, 1976.

[6] ARISTÓTELES. **Órganon**. EDIPRO, 2010.

[7] ARISTÓTELES. **Ética a Nicômacos**. Editora Universidade de Brasília, 1985.

[8] ARTEMOV, Sergei; FITTING, Melvin. **Justification logic**: reasoning with reasons. Cambridge University Press, 2019.

[9] ARTEMOV, Sergei. The logic of justification. **The Review of Symbolic Logic**, v. 1, n. 4, p. 477-513, 2008.

[10] ARTEMOV, Sergei. **Operational modal logic**. Technical Report MSI 95-29. Cornell University, 1995.

[11] BOOLOS, George; BURGESS, John; JEFFREY, Richard. **Computabilidade e lógica**. Editora Unesp, 2012.

[12] BRANQUINHO, João. Atitude proposicional. In: BRANQUINHO, João; MURCHO, Desidério; GOMES, Nelson Gonçalves (ed.). **Enciclopédia de termos lógico-filosóficos**. 2005. p. 84-89. Disponível em: https://philarchive.org/archive/JOOEDT.

[13] BREZHNEV, Vladimir. **On explicit counterparts of modal logics**. Technical Report CFIS 2000–05. Cornell University, 2000.

[14] CAMERON, Ross. **Chains of being**: infinite regress, circularity, and metaphysical explanation. Oxford University Press, 2022a.

[15] CAMERON, Ross. Infinite regress arguments. In: ZALTA, Edward N.; NODELMAN, Uri (ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. 2022b.

[16] CARNIELLI, Walter; PIZZI, Claudio. **Modalities and multimodalities**. Springer, 2008.

[17] CARROLL, Lewis. O que a tartaruga disse a Aquiles. **Crítica**, 2016. Tradução de: Vítor Guerreiro. Disponível em: https://criticanarede.com/tartaruga.html. Acesso em: 10 fev. 2022.

[18] CHELLAS, Brian F. **Modal logic**: an introduction. Cambridge University Press, 1980.

[19] CLARK, Romane. Vicious Infinite Regress Arguments. **Philosophical Perspectives**, v. 2, p. 369, 1988.

[20] CLING, Andrew D. The epistemic regress problem. **Philosophical Studies**, v. 140, n. 3, p. 401-421, 2007.

[21] COSTA-LEITE, Alexandre. Lógicas da justificação e quase-verdade. **Principia**: an international journal of epistemology, v. 18, n. 2, p. 175, 2014.

[22] COSTA-LEITE, Alexandre. O problema das justificações parciais. **Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea**, v. 6, n. 2, p. 95-104, dez. 2018.

[23] DA COSTA, Newton. **O conhecimento científico**. Discurso Editorial, 1999.

[24] DANCY, Jonathan. **Epistemologia contemporânea**. Edições 70, 2002.

[25] DAVEY, B. A.; PRIESTLEY, H. A. **Introduction to lattices and order**. Cambridge University Press, 2002.

[26] DUNN, J. Michael; HARDEGREE, Gary M. **Algebraic methods in philosophical logic**. Oxford, 2001.

[27] FEITOSA, H. A.; D'OTTAVIANO, I. M. L. Conservative translations. **Annals of Pure and Applied Logic**, v. 108, n. 1-3, p. 205-227, 2001.

[28] FITTING, Melvin. **Justification logics and realization**. Technical Report TR-2014004. City University of New York, 2014.

[29] FITTING, Melvin. The logic of proofs, semantically. **Annals of Pure and Applied Logic**, v. 132, n. 1, p. 1-25, 2005.

[30] FITTING, Melvin. **A semantics for the logic of proofs**. Technical Report TR-2003012. City University of New York, 2003.

[31] FUMERTON, Richard. Epistemic probability. **Philosophical Issues**, v. 14, p. 149–64, 2004.

[32] FOLEY, Richard. Inferential justification and the infinite regress. **American Philosophical Quarterly**, v. 15, n. 4, p. 311-316, 1978.

[33] GETTIER, Edmund L. Is justified true belief knowledge? **Analysis**, v. 23, n. 6, p. 121-123, 1963.

[34] GÖDEL, Kurt. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus (1933f). In: FEFERMAN, Solomon; DAWSON JR, John W.; KLEENE, Stephen C.; MOORE, Gregory H.; SOLOVAY, Robert M.; VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). **Kurt Gödel:**

collected works, volume I, publications 1929-1936. Oxford University Press, 1986. p. 301-302.

[35] GOETSCHI, Remo; KUZNETS, Roman. Realization for justification logics via nested sequents: modularity through embedding. **Annals of Pure and Applied Logic**, v. 163, n. 9, p. 1271-1298, 2012.

[36] GOLDMAN, Alvin I. Internalism, externalism, and the architecture of justification. **The Journal of Philosophy**, v. 106, n. 6, p. 309-338, 2009.

[37] GRATTON, Claude. What is an infinite regress argument? **Informal Logic**, v. 18, n. 2, p. 203-224, 1997.

[38] HAACK, Susan. **Filosofia das lógicas**. Editora UNESP, 2002.

[39] HANKINSON, R. J. **The Sceptics**. Routledge, 1995.

[40] HRBACEK, Karel; JECH, Thomas. **Introduction to set theory**. Marcel Dekker, 1999.

[41] KENNY, Anthony. **Uma nova história da filosofia ocidental, volume I**: filosofia antiga. Edições Loyola, 2008.

[42] KIRK, G. S.; RAVEN, J. E.; SCHOFIELD, M. **Os filósofos pré-socráticos**: história crítica com seleção de textos. Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[43] KOREZ, Keith Allen. Recent work on the basing relation. **American Philosophical Quarterly**, v. 34, n. 2, p. 171-191, 1997.

[44] LIMA, Elon Lages. **Análise real, volume 1**: funções de uma variável. IMPA, 2009.

[45] NOLAN, Daniel. What's Wrong With Infinite Regresses? **Metaphilosophy**, v. 32, n. 5, p. 523-538, 2001.

[46] OAKLEY, I. T. An argument for cepticism concerning justified beliefs. **American Philosophical Quarterly**, v. 13, n. 3, p. 221–228, 1976.

[47] PLATÃO. **Teeteto**. Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[48] POST, John F. Infinite regress argument. In: DANCY, Jonathan; SOSA, Ernest; STEUP, Matthias (ed.). **A companion to epistemology**: John Wiley & Sons, 2010. p. 447-450.

[49] POST, John F. Infinite regresses of justification and of explanation. **Philosophical Studies**: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition, v. 38, n. 1, p. 31-52, 1980.

[50] PRAWITZ, Dag. The epistemic significance of valid inference. **Synthese**, v. 187, n. 3, p. 887-898, 2011.

[51] PRYOR, James. There is immediate justification. In: STEUP, Matthias; SOSA, Ernest (ed.). **Contemporary debates in epistemology**. Blackwell, 2005. p. 181-202.

[52] RODRIGUES, Luís Estevinha. Conhecimento. In: BRANQUINHO, João; SANTOS, Ricardo (ed.). **Compêndio em linha de problemas de filosofia analítica**. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, 2013.

[53] ROLLA, Giovanni. **Epistemologia**: Uma introdução elementar. Editora Fi, 2018.

[54] SEXTUS EMPIRICUS. *Outlines of scepticism*. Cambridge University Press, 2000.

[55] STEUP, Matthias. Epistemologia. In: SEGUNDO, Luiz Helvécio Marques; CID, Rodrigo Reis Lastra (org.). **Textos selecionados de epistemologia e filosofia da ciência**. Pelotas (RS): Editora UFPEL, 2020. Cap. 1. p. 22-90. (Série Investigação Filosófica). Tradução de Eros M. Carvalho, Flavio Williges, Mateus Stein e Paola O. de Camargo. Revisão de Alexandre Meyer Luz e Delvair Moreira.

[56] VERDAN, André. **O ceticismo filosófico**. Ed. da UFSC, 1998.