Universidade de Brasília

Grupos *Extra-Especiais* como Grupos de Automorfismos

Maria Edna Gomes da Silva

Orientador: Emerson Ferreira de Melo

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Doutora em Matemática*

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Gg

Gomes da Silva, Maria Edna
Grupos Extra-Especiais como Grupo de Automorfismos. / Maria Edna Gomes da Silva; orientador Emerson Ferreira de Melo. -- Brasília, 2023.
56 p.

Tese(Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2023.

1. grupos. 2. automorfismos. 3. pontos fixos. 4. nilpotência. I. Ferreira de Melo, Emerson, orient. II. Título.

Acknowledgements

Dedico este trabalho a Deus pela fé e força que me deu nos momentos intensos e de alegria. Agradeço a minha família, Gilvan(pai), Silvana(madrasta), Maria(tia), Érica(irmã) e Ruan(cunhado) pelo apoio e entenderem os momentos abdicados para o estudo. Amo muito vocês e sempre estarei presente, mesmo ausente.

Ao meu namorado Deivid, que mesmo com toda distância sempre me apoio e me ajudou nos momentos difíceis. Obrigada por me ouvir durante a pesquisa e qualificações, mesmo que não entendo muito, você é uma pessoa de luz, te amo.

Agradeço a meus amigos do departamento, Claúdia Orduz, Junio, Rosalina, Gabriela, Gabriel, Caio, Mannu, Guilherme, Gabriel Bufolo, Gabrielzinho, George, Júlia, Juscelia, Katyane, Rodolfo, Thiago, Sharmenya, Júlia Aredes, Xiaofang Gao, Bruna, Gustavo, Flávia e Saulo. Aos membros da sala de doutorado, Ayana, Maristela e Ismael, vocês são demais. Obrigada por todas as risadas e por todas as conversas. Em especial, agradeço a Talita pela companhia nas horas tardias da noite. Ao Tharles por todo companheirismo, amizade e calma, uma das melhores pessoas que conheci. Ao Jônatas pela companhia no café e pelas conversas confortantes sobre fé e assuntos aleatórios. A Deyfila pela acolhida, a calma e as conversas dias antes e depois da defesa, você é incrível.

A Eliana pela amizade nas aflições das qualificações e da tese, uma amizade que quero levar da UnB. Obrigada pela calma, conversas e momentos descontraídos.

Ao Geovane pela amizade desde o mestrado, as conversas online, por torcer por mim nos momentos importantes e sempre. Ao Mateus, pela amizade longinquar, por acreditar em mim, pelas melhores e mais demorados conversas sobre a vida e matemática.

Agradeço a Bruna e Davi pela calma passada em nossas conversas, principalmente na pandemia. A todos que participaram do clube do livro da UnB, durante a pandemia, foram tranquilizantes e revigorantes. Ao pessoal do Colina Bloco K, pela convivência mesmo que nos corredores.

Ao meu orientador, Emerson Ferreira de Melo por toda ajuda, dedicação, por acreditar em mim e pelo compromisso prestado na construção deste trabalho. Obrigado pela paciência e por me impulsionar na vida acadêmica.

Aos funcionários do departamento de matemática que estiveram presentes em todas as aflições passadas. Em especial a Claúdia Messias, Emanoel, Rejane e Dona Deusa.

Ao professor Igor pelas contribuições na minha formação, a parceria no artigo e pelas conversas sobre futuro e matemática.

Aos professores que contribuíram para a minha formação como doutora, Carlos Alberto, Sheila Chagas, José Luis Teruel, Daniele Nantes, Theo Zapata, Raimundo Bastos, Cristina Acciari e principalmente ao professor Maurício Ayala.

Aos professores, Alex Carrazedo Dantas, Danilo Sanção da Silveira, Mohsen Amiri e Sheila Chagas, pelas correções, sugestões e contribuições para a versão final desse trabalho.

A Capes pelo financiamento durante a construção deste trabalho.

A todos vocês o meu sincero agradecimento.

Abstract

Let A be a group acting by automorphisms on a finite group G. In this work we consider that A is an extra-special p-group and we will present results regarding the nilpotency of the lower central series and derived series of the fixed points subgroups of the group G and similar results to Lie algebras. Furthermore, we prove results regarding supersoluble fixed points.

Resumo

Seja A um grupo agindo por automorfismos sobre um grupo finito G. Neste trabalho consideramos que A é um p-grupo extra-especial e apresentaremos resultados que relacionam a nilpotência dos termos da série central inferior e série derivada dos centralizadores dos elementos de A com a nilpotência dos respectivos termos das séries do grupo G. Resultados similares também são provados para Álgebras de Lie. Além disso, na condição dos centralizadores serem supersolúveis provamos algumas propriedades para o grupo G.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**
1.1 Teoria de Grupos . . . 5
1.2 Grupos Nilpotentes e Solúveis . . . 8
1.3 Grupos Supersolúveis . . . 9
1.4 p-Grupos Extra-Especiais . . . 11
1.5 Módulos . . . 13
1.5.1 Representação Lineares de Grupos . . . 15
1.6 Álgebra de Lie . . . 17

2 Grupos Abelianos Elementares Agindo como Grupo de Automorfismo **23**
2.1 Grupos A-Especiais e γ-A-Especiais . . . 25
2.2 Limitação da Classe de Nilpotência . . . 28

3 Grupos Extra-Especiais Agindo como Grupo de Automorfismo **33**
3.1 Resultados sobre Álgebra de Lie . . . 34
3.2 Resultados sobre Grupos . . . 40

4 Centralizadores Supersolúveis **45**
4.1 Ação de Grupos Abelianos Elementares . . . 45
4.2 Ação de Grupos Extra-Especiais . . . 47

5 Considerações Finais **51**
5.1 GAP . . . 52

Bibliografia **55**

Introdução

Seja G um grupo finito e A um grupo agindo por automorfismos sobre G, podemos definir um objeto que será demasiadamente estudado durante esse trabalho, o centralizador de a em G

$$C_G(a) = \{g \in G \mid g^a = g\}.$$

Além disso, dizemos que a é um automorfismo livre de pontos fixos se $C_G(a) = \{1\}$. Um dos mais famosos resultados com automorfismos livres de pontos fixos é devido a Higman [13] e Thompson [29] que mostram que se G admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima p, então G é nilpotente com classe de nilpotência limitada por uma função dependendo somente de p.

Se A é um grupo abeliano não cíclico e a ordem de A é coprima com a ordem de G, então $G = \langle C_G(a) \mid a \in A^{\#} \rangle$ (veja [11]), com $A^{\#}$ o conjunto das não-identidades de A. Assim é natural esperar que as propriedades dos centralizadores muitas vezes podem ser herdadas pelo grupo G. Naturalmente, cada resultado dependerá da estrutura do grupo A e da condição imposta sobre $C_G(a)$.

Em 1971, Ward provou que dado p primo, se A é um p-grupo abeliano elementar de posto 3 agindo sobre um p'-grupo finito G de tal maneira que $C_G(a)$ é nilpotente, então G é nilpotente. Posteriormente, Shumyatsky provou que se a classe de nilpotência do $C_G(a)$ é no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então a classe de nilpotência de G é limitada somente em termos de c e p (veja [28, 30]).

No recente artigo [21] o resultado de [28, 30] foi estendido para o caso onde A não é necessariamente abeliano. Mais precisamente, foi mostrado que se A é um grupo finito de expoente primo p e ordem pelo menos p^3 agindo em um p'-grupo finito G de tal maneira que $C_G(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então G é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c e p. Em [7], este resultado foi estendido da seguinte forma: se $\gamma_\infty(C_G(a))$ tem ordem no máximo m para qualquer $a \in A^{\#}$, então a ordem de $\gamma_\infty(G)$ é limitada apenas em termos de m. Além disso, foi mostrado que se o subgrupo Fitting de $C_G(a)$ tem índice no máximo m para qualquer

$a \in A^{\#}$, então o segundo subgrupo Fitting de G tem índice limitado apenas em termos de m.

As propriedades abordadas nessa tese são com relação a nilpotência dos termos da série central inferior e série derivada dos centralizadores e supersolubilidade dos centralizadores. São eles os seguintes resultados:

Teorema 3.0.1 *Seja p um primo e E um grupo extra-especial p de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E aja por automorfismos na álgebra de Lie L com $pL = L$ e $p \nmid Char(L)$.*

i) Se $\gamma_n(C_L(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in E^{\#}$, então $\gamma_n(L)$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c, n e p.

ii) Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq n$, o d-ésimo derivado do $C_L(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in E^{\#}$, então dth derivado $L^{(d)}$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c, n e p.

Teorema 3.0.2 *Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E age por automorfismos sobre um p'-grupo finito G.*

i) Se $\gamma_n(C_G(a))$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então $\gamma_n(G)$ é nilpotente.

ii) Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq n$, o d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é nilpotente.

Teorema 4.2.1 *Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^5. Suponha que E age por automorfismo em um p'-grupo finito G. Se $C_G(a)$ é supersolúvel para qualquer $a \in E^{\#}$, então G é supersolúvel.*

Ainda com relação aos termos da série central inferior e série derivada, em [4] os autores provaram que dado m um inteiro positivo e A um q-grupo abeliano elementar de ordem q^r com $r \geq 2$ agindo sobre um q'-grupo finito G . Se para algum inteiro d tal que $2^d \leq r-1$ o d-ésimo grupo derivado do $C_G(a)$ tem expoente dividindo m para qualquer $a \in A^{\#}$, então $G^{(d)}$ tem expoente $\{m, q, r\}$-limitado e se $\gamma_{r-1}(C_G(a))$ tem expoente dividindo m para qualquer $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{r-1}(C_G(a))$ tem expoente $\{m, q, r\}$-limitado.

Organização da Tese e Contribuições.

Esta tese será dividida em cinco capítulos.

Os capítulos 3 e 4 são resultados próprios que relacionam a nilpotência dos termos da série central inferior e série derivada, além da supersolubilidade dos subgrupos de pontos fixos nos quais o grupo que age como grupo de automorfismo é um p-grupo extra-especial. Tais resultados podem ser vistos em [22] e (artigo em construção), respectivamente.

O capítulo 1 daremos enfoque em seções que tratam da teoria de grupos finitos que são pré-requisitos para um bom entendimento dos principais resultados deste trabalho. Alguns destes pré-requisitos são: grupos supersolúveis, grupos nilpotentes, p-grupos extra-especiais e metódos de Lie.

O capítulo 2 damos destaque ao resultado de [3] onde os autores obtiveram que dado p um primo, se A é um p-grupo abeliano elementar de ordem p^k com $k \geq 3$ agindo sobre um p'-grupo finito G tal que $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ é nilpotente da classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{k-2}(G)$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c, k e p. Também foi provado que se para algum inteiro d tal que $2^d + 2 \leq k$, o d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c, k e p. Dado um grupo abeliano elementar A em [4] introduziu-se a definição de subgrupos A e γ-A especiais(veja seção 2.1) tais subgrupos de G apresentam como caracteristica serem formados por centralizadores dos subgrupos maximais de um grupo abeliano elementar A agindo em um grupo G.

Baseado nos resultados apresentados nesta introdução, no terceiro capítulo estendemos o resultado de [21] apresentando os seguintes resultados que podem ser vistos em [22]:

Teorema 3.0.2 *Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E age por automorfismos sobre um p'-grupo finito G.*

i) Se $\gamma_n(C_G(a))$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então $\gamma_n(G)$ é nilpotente.

ii) Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq n$, o d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é nilpotente.

Os resultados acima podem ser reformulados para Álgebra de Lie e pode ser visto em [22]:

Teorema 3.0.1 *Seja p um primo e E um grupo extra-especial p de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E aja por automorfismos na álgebra de Lie L com $pL = L$ e $p \nmid Char(L)$.*

i) Se $\gamma_n(C_L(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in E^{\#}$, então $\gamma_n(L)$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c, n e p.

ii) *Se, para algum inteiro d tal que* $2^d \leq n$, *o d-ésimo termo derivado do* $C_L(a)$ *é nilpotente de classe no máximo c para qualquer* $a \in E^{\#}$, *então dth derivado* $L^{(d)}$ *é nilpotente com classe limitada apenas em termos de* c, n *e* p.

O capítulo quatro apresenta alguns resultados sobre grupos com centralizadores supersolúveis, mais especificamente em [23] os autores mostraram que dado um p-grupo abeliano elementar A de ordem p^4 agindo em um p'-grupo G, se $C_G(a)$ para todo $a \in A^{\#}$ é supersolúvel, então G é supersolúvel. Nesse sentindo, esse capítulo inclue alguns resultados próprios com relação a supersolubilidade na hipótese que o grupo que age é um p-grupo finito extra-especial, assim temos o seguinte resultado nesse capítulo:

Teorema 4.2.1 *Seja* p *um primo e* E *um* p*-grupo extra-especial de expoente* p *e ordem* p^5. *Suponha que* E *age por automorfismo em um* p'*-grupo finito* G. *Se* $C_G(a)$ *é supersolúvel para qualquer* $a \in E^{\#}$, *então* G *é supersolúvel.*

O quinto capítulo trata de outros resultados sobre ação de grupos abelianos elementares, trabalhos estes que embasam os trabalhos, em preparação, descritos no capítulo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria de Grupos

Neste capítulo abordaremos principíos básicos de grupos finitos nos quais estes se relacionam com os resultados apresentados nos demais capítulos. Para maiores detalhes consulte os livros [26] e [9].

Neste trabalho considere G um grupo finito e A um grupo agindo por automorfismo no grupo G. Através dessa ação podemos definir o objeto que trataremos nessa tese, o subgrupo de pontos fixos ou centralizador. Definido por:

$$C_G(A) = \{g \in G \mid g^a = g \; para \; todo \; a \in A\}.$$

Para cada elemento de A podemos definir o centralizador de um elemento

$$C_G(a) = \{g \in G \mid g^a = g\}.$$

Definição 1.1.1. Sejam G um grupo e $g, h \in G$ dois elementos arbitrários de G. Definimos o comutador de g e h como o elemento de G

$$[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh.$$

Estendendo a definição de comutadores entre dois elementos de um grupo G, podemos definir o comutador de dois subgrupos de G.

Definição 1.1.2. Sejam H, K subgrupos de G, escrevemos $[H, K]$ para denotar o subgrupo de G gerado pelo conjunto $\{[h, k] \mid h \in H, k \in K\}$ de todos os comutadores de elementos de H com elementos de K. O subgrupo $[H, K]$ é chamado o comutador de H e K.

Em geral $[H, K]$ não é igual ao conjunto dos comutadores dos elementos de H com elementos de K, mas ele é o subgrupo gerado por este conjunto, ou equivalentemente, $[H, K]$ é o menor subgrupo de G que contém todos esses comutadores.

Definição 1.1.3. Definimos o comutador de três elementos arbitrários x, y, z de G, pondo:
$$[x, y, z] = [[x, y], z].$$
De maneira análoga, definimos o comutador de três subgrupos arbitrários X, Y, Z de G, pondo:
$$[X, Y, Z] = [[X, Y], Z].$$
Mais geralmente, para $n > 2$, definimos o comutador de n elementos $x_j \in G$ de G, pondo:
$$[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}], x_n],$$
e o comutador de n subgrupos $X_j \leq G$ de G, pondo:
$$[X_1, X_2, \cdots, X_n] = [[X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}], X_n].$$

O próximo resultado são propriedades simples sobre comutadores de elemento e subgrupos de G. A demonstração pode ser encontrada nos livros citados no início dessa seção.

Lema 1.1.4. Seja G um grupo e considere x, y e z elementos de G e L, H, K subgrupos de G. Então valem as seguintes propriedades:

1. $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$;
2. $[y, x] = [x, y]^{-1}$;
3. $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z, y][y, z]$;
4. $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ (Identidade de Hall-Witt);
5. $[H, K] = [K, H]$;
6. Se H, K e L são subgrupos normais de G, então $[HK, L] = [H, L][K, L]$.

Finalizamos essa seção com a demonstração de alguns resultados envolvendo centralizadores e automorfismo coprimos.

Lema 1.1.5. Seja A um grupo de automorfismo de um grupo finito G tal que $(|A|, |G|) = 1$. Então

1. Para qualquer subgrupo normal A-invariante de G temos $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$.
2. $G = [G, A]C_G(A)$.
3. Se A é um subgrupo abeliano não-cíclico e $A_1, \cdots, A_s$ são subgrupos maximais de A, então $G = \langle C_G(A_1), \cdots, C_G(A_s)\rangle$.
4. Se H é um p-subgrupo A-invariante de G, então H está contido em um p-subgrupo Sylow A-invariante de G.

Demonstração. 1. Os elementos de G invariantes por A são exatamente as classes laterais A-invariantes de N. Essas classes são justamente as classes laterais de N que contêm elementos de $C_G(A)$. Por outro lado, as classes laterais de N que possuem elementos de $C_G(A)$ formam a imagem de $C_G(A)$ em $\overline{G}$, isto é, $\overline{C_G(A)}$.

2. Escreva $\overline{G} = G/[G, A]$. Pelo item anterior temos que $C_{\overline{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$. Como A age trivialmente sobre $G/[G, A]$, então o lado esquerdo desta equação é todo o grupo $\overline{G}$. Assim, $\overline{C_G(A)[G, A]} = \overline{C_G(A)} = \overline{G}$. Pelo Teorema da Correspondência, segue que $[G, A]C_G(A) = G$.

3. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto dos subgrupos maximais de A.

   Primeiro tratamos dois casos particulares e depois mostramos que o caso geral pode ser reduzido a esses casos. Primeiro assuma que G é abeliano. Se A age irredutivelmente em G, então $B := C_G(A) \in \mathcal{B}$ por [20, 8.3.3], e obtemos $G = C_G(B)$. Portanto, podemos supor que A não é irredutível em G. Seja W um subgrupo A-invariante de G tal que $1 \neq W \neq G$. Indução em $|G|$, aplicada aos pares (W, A) e $(G/W, A)$, mostra que:

$$W = \langle C_W(B) \mid B \in \mathcal{B}\rangle \ e \ G/W = \langle C_{G/W}(B) \mid B \in \mathcal{B}.$$

   Como a ação de A sobre G é coprima o item 1. implica que:

$$C_{G/W}(B) = C_G(B)W/W,$$

   e assim

$$G = \langle C_G(B)W \mid B \in \mathcal{B}\rangle = \langle C_G(B) \mid B \in \mathcal{B}\rangle.$$

Assuma a seguir que G é um p-grupo. Então A age no grupo quociente abeliano ${}^{G}\!/_{\Phi(G)}$. Daí o teorema 8.2.2 (a)[20] e o caso já provado acima resulta $G = \langle C_G(B) \mid B \in \mathcal{B}\rangle\Phi(G)$ e então junto com o teorema 5.2.3 [20] a afirmação. No caso geral teorema 8.2.3 (a) [20] mostra que para todo $p \in \pi(G)$ existe um A-invariante Sylow p-subgrupo G_p de G. Como visto acima, a afirmação é válida para o par (G_p, A) e assim também para (G, A), pois $G = \langle G_p \mid p \in \pi(G)\rangle$.

□

Assim como o centralizador, outros subgrupos são importantes no decorrer do trabalho, são eles: O subgrupo derivado G', Fratini $\Phi(G)$, Fitting $F(G)$, além dos termos das séries de G que serão definidas na próxima seção.

1.2 Grupos Nilpotentes e Solúveis

Considere os subgrupos normais N_i em G tais que

$$N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_n$$

é chamada uma série central em G se ${}^{N_{i+1}}\!/_{N_i} \leq Z({}^{G}\!/_{N_i})$, para $0 \leq i < n$. Podemos construir uma série central em qualquer grupo. Para isto, defina $Z_0(G) = 1$ e indutivamente, defina $Z_i(G)$ pela equação ${}^{Z_i(G)}\!/_{Z_{i-1}(G)} = Z({}^{G}\!/_{Z_{i-1}(G)})$, para $i > 0$. A coleção $\{Z_i(G) \mid i \geq 0\}$ é chamada série central superior ou ascendente de G. É Claro que se $Z_n(G) = G$, para algum inteiro n, então G é nilpotente e vale a recíproca deste fato.

Outra série central relevante é a série central inferior. Seja G um grupo. Escrevemos $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G] = [G, G] = G'$. Indutivamente, se temos $\gamma_{i-1}(G)$ definimos $\gamma_i(G)$ pondo $\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$, para todo $i > 0$.

O menor n que satisfaz as condições do próximo teorema é chamada classe de nilpotência de G.

Teorema 1.2.1. Sejam G um grupo qualquer e $n \geq 1$ um inteiro. Então as afirmações são equivalentes:

1. $\gamma_{n+1} = 1$.

2. $Z_n(G) = G$.

Além disso, G é nilpotente se, e somente se, 1. e 2. valem para algum inteiro n.

Os grupos abelianos têm classe de nilpotência 1 e os grupos não abelianos tais que $G' \leq Z(G)$ são exatamente os grupos com classe de nilpotência 2.

Proposição 1.2.2. Subgrupos e grupos quocientes de grupos nilpotentes são também nilpotentes.

Definição 1.2.3. Seja G um grupo. Dizemos que G é um grupo solúvel se existe uma série de subgrupos

$$G = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq H_n = e$$

com ${}^{H_i}\!/\!_{H_{i+1}}$ abeliano para todo $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

Agora definimos uma sequência de subgrupos de G:

$$G^{(0)} = G, G^{(1)} = G', \cdots, G^{(n)} = (G^{(n-1)})'.$$

O subgrupo $G^{(n)}$ é chamado de o n-ésimo grupo derivado de G e a sequência

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq G^{(n)} \supseteq \cdots$$

chama-se a sequência derivada de G. Definimos o comprimento derivado de G, denotado por $d(G)$, como sendo $d(G) = min\{n \in \mathbf{N} \mid G^{(n)} = e\}$.

1.3 Grupos Supersolúveis

Nessa seção daremos foco a uma classe de grupos que herda algumas propriedades de grupos nilpotentes e solúveis. As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [27, 25].

Definição 1.3.1. Uma série supersolúvel de G é uma série normal de G com fatores cíclicos. Assim G é chamado supersolúvel se tiver uma série supersolúvel.

Trivialmente, todos os grupos cíclicos são supersolúveis e todos os grupos supersolúveis são policíclicos. No entanto, nem todo grupo policíclico é supersolúvel; A_4 é policíclico, mas não possui subgrupos cíclicos normais não triviais, e portanto, não pode possuir uma série normal com fatores cíclicos. Em comum com grupos policíclicos, solúveis e nilpotentes, temos:

Proposição 1.3.2. Suponha que $H \leq G$ e $G \trianglerighteq N$, onde G é um grupo supersolúvel. Então H e ${}^{G}\!/\!_{N}$ são supersolúveis.

Lema 1.3.3. 1. Um grupo é supersolúvel se e somente se possui uma série supersolúvel cujos fatores são infinitos ou de ordem prima;

2. Um grupo supersolúvel tem um subgrupo normal cíclico de ordem infinita ou prima;
3. Um grupo supersolúvel simples é cíclico de ordem prima;
4. Um fator principal de um grupo supersolúvel possui ordem prima e um subgrupo maximal possui índice primo.

Definição 1.3.4. Seja G um grupo finito de ordem $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, onde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ são primos. Se

$$P_k, P_kP_{k-1}, \cdots, P_kP_{k-1}\cdots P_2 \tag{1.1}$$

são subgrupos normais de G, onde P_i é um p_i-subgrupo de Sylow de G, $i = 1, \cdots, k$, então 1.1 é chamado uma torre de Sylow de G do tipo supersolúvel.

Teorema 1.3.5. Se G é um grupo finito e G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, então G é solúvel.

A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. O grupo A_4 é solúvel, mas não possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, pois A_4 não possui um subgrupo normal de ordem 3.

Teorema 1.3.6. Se G é um grupo finito supersolúvel então G possui uma torre do tipo supersolúvel.

O próximo exemplo, é um contra-exemplo para a recíproca do teorema anterior.

Exemplo 1.3.7. Seja $H = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 1, ab = ba\rangle$. Primeiramente, vemos que existe um automorfismo τ de H tal que $(a)^\tau = b$, $(b)^\tau = a^{-1}$ e que $o(\tau) = 4$. Agora o produto semi-direto $G = \langle\tau\rangle \ltimes_\epsilon H$, onde ϵ é o homomorfismo inclusão de $\langle\tau\rangle$ em $Aut(H)$, tem ordem 36, e possui um subgrupo de Sylow normal de ordem 9, mas não possui subgrupo normal de ordem 3. Com efeito, o subgrupo $L = \langle 1\rangle \ltimes_\epsilon H$ é um 3-subgrupo de Sylow de G e é o único. Os subgrupos de ordem 3 estão contidos em L. Vemos que todo elemento de ordem 3, quando conjugado por $(\tau, (1, 1))$, não está no subgrupo gerado por ele, portanto, os subgrupos de ordem 3 não são normais. Iremos mostrar que G não é supersolúvel. Suponhamos, por absurdo, que G seja supersolúvel, assim, pelo lemma 1.3.3, todo fator principal de G tem ordem prima. Mas, como G não possui subgrupo normal de ordem 3, L é isomorfo a um fator principal de G e não possui ordem prima. Concluímos, deste modo, que G não é supersolúvel. Para finalizarmos, podemos ver facilmente que G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, já que L é um 3-subgrupo de Sylow normal de G.

Como observamos no exemplo acima, se um grupo tem uma torre Sylow do tipo supersolúvel não caracteriza grupos supersolúveis (finitos). Assim a demonstração do próximo resultado pode ser encontrado em [31, Teorema 1.12], esse resultado é uma caracterização de grupos supersolúveis com torre de sylow do tipo supersolúvel.

Teorema 1.3.8 (Baer)**.** G é supersolúvel se e somente se

1. G tem uma torre Sylow e
2. Dado qualquer primo p e qualquer Sylow p-subgrupo S de G, $N_G(S)/C_G(S)$ é estritamente p-fechado.

Definição 1.3.9. Seja p um primo. Um grupo K é chamado estritamente p-fechado se K tem um único (e, portanto, normal) Sylow p-subgrupo T e K/T é abeliano de expoente dividindo $p-1$.

1.4 p-Grupos Extra-Especiais

Essa seção é destinada ao estudo de uma família de p-grupos, os p-grupos Extra-Especiais, detalhes veja [9, Capítulo A].

Definição 1.4.1. Um p-grupo G é extra-especial se seu centro Z é cíclico de ordem p e o quociente E/Z é um p-grupo abeliano elementar não trivial.

Os primeiros exemplos que temos de p-grupos Extra-Especiais são os grupos não abelianos de ordem p^3.

Teorema 1.4.2. Todo grupo não-abeliano de ordem p^3 é extra-especial.

Demonstração. Se G é um grupo não abeliano de ordem p^3 , queremos mostrar que $Z(G) = G'$ e $|Z(G)| = p$. Temos as seguintes possibilidades para a ordem de $Z(G)$: $|Z(G)| = 1, p, p^2$ ou p^3. Mas $|Z(G)| \neq 1$ pois todo p-grupo tem centro não trivial. Se $|Z(G)| = p^3$, então G seria abeliano, contradizendo a hipótese. Se $|Z(G)| = p^2$, então $G/Z(G)$ é cíclico, o que é uma contradição. Logo $|Z(G)| = p$. Assim $|G/Z(G)| = p^2$ e como todo grupo de ordem p^2 é abeliano, temos $G/Z(G)$ abeliano. Logo $G' \leq Z(G)$. Agora, desde que G é não abeliano, temos $G' \neq 1$. Portanto $G' = Z(G)$. □

Os grupos de ordem 8, Dihedral e Quatérnio são os primeiros exemplos de grupos extra-especiais. Considere as apresentações:

$$D_8 = \langle a, b \mid a^2 = b^4 = 1, (ab)^4 = 1\rangle$$
$$Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, a^b = a^{-1}\rangle.$$

Temos $Z(D_8) = D_8' = \langle (ab)^2 \rangle$ e $Z(Q_8) = Q_8' = \langle a^2 \rangle = \langle [a,b] \rangle$.

Vamos construir exemplos de grupos extra-especiais de ordem p^3 para p ímpar. Construiremos um grupo $\mathcal{N}$ de ordem p^3 atráves do produto semidireto $C_{p^2} = \langle x \rangle$ e $C_p = \langle y \rangle$. Definiremos uma ação não-trivial ϕ de C_p sobre C_{p^2}

$$\begin{aligned} \phi : C_p \longrightarrow Aut(C_{p^2}) : & C_{p^2} \longrightarrow C_{p^2} \\ & \phi_y : x \longrightarrow x^{p+1} \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{N} = C_{p^2} \rtimes C_p$ com a apresentação $\mathcal{N} = \langle x, y \mid x^{p^2} = 1, y^p = 1, x^y = x^{p+1} \rangle$.

De maneira análoga, construiremos um grupo $\mathcal{M}$ que será dado através do produto semidireto de $C_p \times C_p = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$ e $C_p = \langle y \rangle$ Definiremos a ação ϕ de C_p sobre $C_p \times C_p$ por:

$$\begin{aligned} \phi : C_p \longrightarrow Aut(C_p \times C_p) : & C_p \times C_p \longrightarrow C_p \times C_p \\ & \phi_y : x \longrightarrow xy \\ & \phi_y : z \longrightarrow z \end{aligned}$$

Desta maneira temos que $xy = xz$ e z comuta com y. Portanto, uma apresentação para $\mathcal{M} = \langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = 1, [x,y] = z, [x,z] = [z,y] = 1 \rangle = (C_p \times C_p) \rtimes C_p$

A partir de agora, apresentaremos uma classificação geral para todos os p-grupos extra-especiais.

Definição 1.4.3. Dizemos que um grupo G é o produto central de seus subgrupos G_i, para $1 \leq i \leq n$, se

1. $G = \langle G_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$, com $[G_i, G_j] = 1$ e
2. $Z(G) = Z(G_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$.

O próximo resultado pode ser visto na Seção 20 do livro [9].

Teorema 1.4.4. Um p-grupo extra-especial G é o produto central de $r \geq 1$ subgrupos não abelianos de ordem p^3. Além disso, temos

1. Se p é ímpar, G é isomorfo à $\mathcal{N}^k \mathcal{M}^{r-k}$, enquanto se $p = 2$, G é isomorfo à $D_8^k Q_8^{r-k}$, para algum k. Em ambos os casos $|G| = p^{2r+1}$.
2. Se p é ímpar e $k \geq 1$, $\mathcal{N}^k \mathcal{M}^{r-k}$ é isomorfo à $\mathcal{N}\mathcal{M}^{r-1}$ e os grupos $\mathcal{M}^r$ e $\mathcal{N}\mathcal{M}^{r-1}$ não são isomorfos.

3. Se $p = 2$, então $D_8^k Q_8^{r-k}$ é isomorfo à $D_8 Q_8^{r-1}$ se k for ímpar e à Q_8^r se k for par e os grupos Q_8^r e $D_8^k Q_8^{r-1}$ não são isomorfos.

Para descrever uma classificação de grupos extraespeciais, precisamos de alguma notação seja D e Q denotam, respectivamente, os grupos Dihedral e Quatérnio de ordem 8 e para um conjunto p primo ímpar:

$$E = \langle x, y \mid x^p = y^p = 1, [x, y] \in Z(E) \rangle$$
$$F = \langle x, y \mid x^{p^2} = y^p = 1, [x, y] = x^p \rangle.$$

Teorema 1.4.5 ([9](Teorema 20.5))**.** Seja p um primo, e seja P um grupo extra-especial de ordem p^{2n+1}. Então exatamente um dos quatro casos a seguir acontece.

(i) $p \neq 2$, $exp(P) = p$, e P é um produto central de n cópias de E;

(ii) $p \neq 2$, $exp(P) = p^2$, e P é um produto central de $n-1$ cópias de E com uma cópia de F;

(iii) $p = 2$, e P é um produto central de n cópias de D;

(iv) $p = 2$, e P é um produto central de $n-1$ cópias de D com uma cópia de Q. Em particular, um grupo extra-especial de ordem ímpar é unicamente determinado por sua ordem e seu expoente. Nos Casos (i). (ii), e (iii) P possui um subgrupo maximal abeliano de ordem p^{n+1} e expoente p(i.e. elementar) no caso (iv) todos os subgrupos abelianos maximais de P são isomórficos com $(Z_2)^{n+1} \times Z_4$.

1.5 Módulos

Definição 1.5.1. Seja R um anel (não necessariamente comutativo e com unidade). Um grupo abeliano (aditivo) M é dito um R-*Módulo* (à esquerda ou a direita) se R age linearmente em M, ou seja, se existe uma aplicação

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longrightarrow rm \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades, para todo m, m_1 e $m_2 \in M$, para todo r, r_1, r_2 e $s \in R$, temos:

1. $1_R m = m$;

2. $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$;

3. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$;

4. $(rs)m = r(sm)$.

As propriedades descritas acima podem ser vistas como homomorfismo de grupos e aneis. O item 3 diz que para todo r em R, f_r

$$\begin{aligned} f_r : M &\longrightarrow M \\ m &\longrightarrow rm \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos. Os itens $1, 2$ e 4 dizem que $f : R \longrightarrow End(M)$

$$\begin{aligned} r \longrightarrow f_r : M &\longrightarrow M \\ m &\longrightarrow rm \end{aligned}$$

é um homomorfismo de aneis.

Definição 1.5.2. Seja M um *R-módulo*. Um *R-submódulo* de M é um subconjunto $H \subseteq M$ tal que H é fechado com respeito a todas operações de M, isto é:

1. $(H, +)$ é subgrupo de M;

2. $rh \in H$, para todo $r \in R$ e $h \in H$.

Para dar uma breve noção sobre *R-Módulo* daremos exemplos de estruturas que são *R-Módulo*.

Exemplo 1.5.3. Considere $(A, +)$ um grupo abeliano, este é sempre um $\mathbb{Z}$-Módulo. De fato, basta considerar

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times A &\longrightarrow A \\ (n, a) &\longrightarrow na = \underbrace{a + a \cdots + a}_{\text{n-fatores}} \end{aligned}$$

Observe que os itens da definição de módulo são todos satisfeitos.

Exemplo 1.5.4. Seja I um ideal à esquerda de A, então I é um *A-Módulo*, bastando definir a operação:

$$\begin{aligned} A \times I &\longrightarrow I \\ (x, i) &\longrightarrow xi \end{aligned}$$

Definição 1.5.5. Sejam M um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano aditivo, então uma função R- biaditiva é uma aplicação $f : M \times N \longrightarrow G$ tal que para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$ valem:

1. $(m + m', n)f = (m, n)f + (m', n)f$;

2. $(m, n + n')f = (m, n)f + (m, n')f$;

3. $(mr, n)f = (m, rn)f$

Definição 1.5.6. Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. O produto tensorial de M e N é um grupo abeliano T junto com uma função R-biaditiva ϕ tais que, para todo grupo abeliano G e toda função R-biaditiva $f : M \times N \longrightarrow G$, exite um único homomorfismo $\overline{f} : T \longrightarrow G$ tal que $f = \phi\overline{f}$.

1.5.1 Representação Lineares de Grupos

Definição 1.5.7. Sejam K um corpo, V um K-espaço vetorial, $Gl(V)$ o grupo das transformações lineares inversíveis de V em V e G um grupo qualquer. Definimos uma representação linear de G em V como sendo um homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ definida por $\phi(g) = \phi_g$. Sendo ϕ uma representação linear, definimos o grau desta representação como sendo a dimensão de V .

Dizemos que uma representação é fiel se é injetora. Se W é um subespaço de V invariante por $\phi(G)$, então claramente ϕ induz uma representação de G sobre W, a qual chamamos de restrição de ϕ em W e denotamos por $\phi|_W$.

Definição 1.5.8. Seja ϕ uma representação linear. Dizemos que um subespaço W de V é ϕ-invariante se $\phi_g(W) \subseteq W$, para todo $g \in G$. Se existe algum subespaço W ϕ-invariante V tal que $\{0_V\} \neq W \neq V$ dizemos que ϕ é uma representação redutível, caso contrário dizemos que ϕ é uma representação irredutível.

Definição 1.5.9. Sejam G um grupo e ϕ uma representação linear. Dizemos que ϕ é completamente redutível se existem $W_1, W_2, \cdots, W_n$ subespaços ϕ-invariantes de V tais que:

1. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$;

2. As restrições de ϕ aos $W_i^{'}s$ são todas irredutíveis.

Dados uma representação irredutível de um grupo G sobre V e um subgrupo normal H de G, ele nos permite saber como o espaço V se decompõe em relação a ação de H.

Teorema 1.5.10 (Clifford)**.** Sejam V um G-módulo irredutível e H um subgrupo normal de G. Então V é uma soma direta de subespaços H-invariantes V_i , $1 \leq i \leq r$, os quais satisfazem as seguintes condições:

1. $V_i = X_{i1} \oplus X_{i2} \oplus \cdots \oplus X_{it}$, onde cada X_{ij} é um H-submódulo irredutível, $1 \leq i \leq r$, t é independente de i, e X_{ij}, $X_{i'j'}$ são H-submódulos isomorfos se e somente se $i = i'$.

2. Para qualquer H-submódulo U de V , temos $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde $U_i = U \cap V_i$, $1 \leq i \leq r$. Em particular, qualquer H-submódulo irredutível de V está contido em algum dos V_i.

3. Para cada $x \in G$, a aplicação $\pi(x) : V_i \longrightarrow xV_i$, $1 \leq i \leq r$ é uma permutação do conjunto $S = \{V_1, V_2, \cdots, V_r\}$ e π induz uma representação transitiva de G sobre S por grupo de permutações. Além disso, o subgrupo $HC_G(H)$ está contido no núcleo de π.

Seja G um grupo abeliano de ordem n. Um caráter sobre G é um homomorfismo de grupos $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Como $g^n = e$, para todo $g \in G$, temos que $[\chi(g)]^n = \chi(e) = 1$. Logo, $\chi(g)$ é uma raiz n-ésima da unidade para todo $g \in G$. Além disso, $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h), \forall g, h \in G$. O conjunto $\hat{G} = \{\chi : \chi \text{é um caráter sobre} G\}$ é um grupo abeliano com a operação $(\chi \circ \Psi)(g) = \chi(g)\Psi(g), \forall g \in G$. O elemento identidade χ_0 é definido por $\chi_0(g) = 1$, para todo $g \in G$, e o elemento inverso χ^{-1} é definido por $\chi^{-1}(g) = \chi(g^{-1})$, para todo $g \in G$. O grupo $\hat{G}$ é chamado o dual ou grupo dos caracteres de G.

Proposição 1.5.11. Seja G um grupo finito. Então:

1. Se G é um grupo cíclico, então $G \simeq \hat{G}$.

2. Se H e K são dois grupos abelianos finitos, então $H \hat{\times} K \simeq \hat{H} \times \hat{K}$.

3. Se G é um grupo abeliano, então $G \simeq \hat{G}$.

Demonstração. 1. Sejam $G = \langle g \rangle$ e $|G| = n$. Então $\Psi(g) \in K_n = \{1, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}\}$. Como $o(\xi) = n$ e divide $o(g)$ temos que existe um único $\xi \in \hat{G}$ tal que $\Psi(g) = \xi$ e $\Psi(g^r) = \xi^r$.

Afirmação: $\hat{G} = \langle \Psi \rangle$.

De fato, seja $\phi \in \hat{G}$. Então $(\phi(g))^n = \phi(g^n) = \phi(e) = 1$, ou seja, $\phi(g)$ é uma raiz n-ésima da unidade. Logo, $\phi(g) \in K_n \Longrightarrow \phi(g) = \xi^k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\phi(g) = \xi^k = (\psi(g))^k \Longrightarrow \phi \in \langle \Psi \rangle$.

2. Sejam $\hat{H} \times \hat{K} = \{(\varphi, \Psi) : \varphi \in \hat{H} \ e \ \Psi \in \hat{K}\}$.

$$\begin{aligned} \omega : \hat{H} \times \hat{K} &\longrightarrow H\hat{x}K \\ : (\varphi, \Psi) &\longrightarrow \omega(\varphi, \Psi) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \omega : H \times K &\longrightarrow \mathbb{C} \\ : (h, k) &\longrightarrow (\varphi(h), \Psi(k)) \end{aligned}$$

É claro que ω é um homomorfismo de grupos sobrejetor. Dado $(\varphi, \Psi) \in ker\omega$. Então $\omega((\varphi, \Psi))((h, k)) = 1$, isto é, $\varphi(h)\Psi(k) = 1$, para todo $(h, k) \in H \times K$. Em particular, $\varphi(h) = \varphi(h)\Psi(e) = 1$, para todo $h \in H$. Portanto, $\varphi = id$. De modo análogo, mostra-se que $\Psi = id$. Assim, ω é injetora.

3. Se G é um grupo abeliano. Então,

$$G \simeq G_1 \times \cdots \times G_s$$

onde G_i é um grupo cíclico, para cada $i = 1, \cdots, s$. Pelo item 1, temos que $G_i \simeq \hat{G}$, para cada $i = 1, \cdots, s$. Logo,

$$G \simeq \hat{G_1} \times \cdots \times \hat{G_s}$$

e pelo item 2, $G \simeq \hat{G}$.

□

1.6 Álgebra de Lie

A seção apresentada tratará de uma das teorias usada para resolver problemas de *grupos*.

Definição 1.6.1. Seja R um anel comutativo com unidade, uma R-álgebra de Lie L é um R-módulo com uma nova operação binária definida em L, chamada de **colchete de Lie**.

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot] : & L \times L \longrightarrow L \\ & (l,m) \longrightarrow [l,m]\end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Lei anticomutativa:

$$[l,l] = 0.$$

2. Identidade de Jacobi.
   Para m, n e $l \in L$, tem-se:

$$[[l,m],n] + [[m,n],l] + [[n,l],m] = 0.$$

3. Leis distributivas.
   Para todo $r, s \in R$ e para todo l, m e $n \in L$, tem-se:

   (a) $[rl + sm, n] = r[l,n] + s[m,n]$;

   (b) $[l, rm + sn] = r[l,m] + s[l,n]$.

Observação 1.6.2. Se R é um corpo então L é uma Álgebra de Lie. Quando $R = \mathbb{Z}$ então $\mathbb{Z}$-Álgebra de Lie é dito uma anel de Lie.

Seja A um grupo abeliano aditivo. Um anel de Lie L é graduado em A se

$$L = \bigoplus_{a \in A} L_a \quad e \quad [L_a, L_b] \subseteq L_{a+b};$$

onde os L_a são subgrupos do grupo aditivo de L. Os elementos dos componentes de graduação L_a são denominados homogêneos.

O $[\cdot,\cdot]$, em geral, não é associativo por causa da identidade de Jacobi, pois para todo l, m e $n \in L$ temos $[[l,m],n] \neq [l,[m,n]]$. E além disso não existe $1 \in L$, pois caso exista se $y = 1$ então para todo $l \in L$, o comutador $[y,l] = [l,y] = l$ em particular $[y,y] = y \neq 0$.

Definição 1.6.3. Dados duas R-Álgebras de Lie L_1 e L_2, um homomorfismo de R-álgebras de Lie é uma aplicação $\rho : L_1 \longrightarrow L_2$ tal que:

1. ρ é um homomorfismo de R-módulos;

2. ρ é compatível com $[,]$, ou seja, $[l,n]^\rho = [l^\rho, n^\rho]$.

Denotamos ${}_{+}\langle X\rangle$ e ${}_{id}\langle X\rangle$, a subálgebra gerado pelo conjunto X e o ideal gerado por X, respectivamente.

Definição 1.6.4. Dados U e V subconjuntos de L definimos o comutador de U e V, como:

$$[U,V] = {}_{+}\langle [u,v] | u \in U e v \in V\rangle.$$

Definição 1.6.5. Dado L um R-Álgebra de Lie, $M \subseteq L$ é uma R-álgebra de Lie se M é um R-submódulo tal que $[M,M] \subseteq M$.

Definição 1.6.6. Um ideal I de L é um R-módulo tal que $[I,L] \subseteq I$.

Observação 1.6.7. Se I_1 e I_2 são ideais de uma R-álgebra de Lie L então $I_1 + I_2 = \{a+b | a \in I_1 \ \ e \ \ b \in I_2\}$ é um ideal, além disso se I_1 e I_2 são subálgebras então $I_1 + I_2$ também o é. Mas, o mesmo não ocorre se ambos forem subálgebras. Por fim se I_1 e I_2 são ideais então $[I_1, I_2]$ é um ideal.

Definição 1.6.8. Dado $X \subseteq L$, a subálgebra gerada por X é definida pela interseção de todas as subálgebras de L que contém X.

Analogamente, definimos o ideal gerado por X, pela interseção de todos os ideias de L que contém X.

Lema 1.6.9. Seja L uma R-Álgebra de Lie. Então:

1. Todo comutador de Lie w nas entradas $a_1, \cdots, a_k \in L$ é uma R-combinação linear de comutadores de Lie simples nas mesmas entradas de w e com os mesmos multipesos de w em $\{a_1, \cdots, a_k\}$;

2. Os comutadores de Lie simples usados no item 1. também podem ser escolhidos todos com a mesma primeira entrada $a \in \{a_1, \cdots, a_k\}$.

Proposição 1.6.10. Seja X um conjunto tal que $X \subseteq L$, então:

1. $\langle X\rangle = {}_{+}\langle [x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n] | n \geq 0, x_i \in X\rangle$;

2. Suponha que $L = \langle Y\rangle$ então: ${}_{id}\langle X\rangle = \langle [x, y_1, \cdots, y_n] \mid n \geq 0, x \in X \text{ e } y_i \in Y\rangle$.

Definição 1.6.11. Seja $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$, com $X \subseteq L$. Se $L =< X >$ for uma R-álgebra de Lie, definimos:

$$L_k = {}_+\langle \text{Todos os comutadores de Lie de peso } k \text{ nos elementos de } X\rangle.$$

Definição 1.6.12. Um ideal (subálgebra ou submódulo) H de L é dito homogêneo se

$$H = \bigoplus_{k=1}^{\infty}(H \cap L_k).$$

Definição 1.6.13. Seja L uma Álgebra de Lie, definamos a série central superior:

$$\begin{aligned} Z_0(L) =& L \\ Z_1(L) =& Z(L) \\ &\vdots \\ Z_{i+1}(L) =& \{x \in L \mid \ [x, L] \subseteq Z_i(L)\}. \end{aligned}$$

com

$$Z_0(L) \supseteq Z_1(L) \supseteq \cdots Z_i(L) \supseteq \cdots$$

Definição 1.6.14. Assim como para grupos definimos a série central inferior para L:

$$\begin{aligned} \gamma_1(L) =& L \\ \gamma_2(L) =& [\gamma_1(L), L] = [L, L] \\ &\vdots \\ \gamma_{i+1}(L) =& [\gamma_s(L), L]. \end{aligned}$$

Observe que $\gamma_n(L) = \underbrace{[L, \cdots, L]}_{\text{n-fatores}} = {}_+\langle [l_1, l_2, \cdots, l_n] | l_i \in L\rangle$, ou seja, $\gamma_n(L)$ é um ideal para todo $n \geq 1$, e assim,$\gamma_{n+1}(L) = [\gamma_n(L), L] \subseteq \gamma_n(L)$. Como consequência temos uma cadeia de ideais:

$$\gamma_1(L) \supseteq \gamma_2(L) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_i(L) \supseteq \cdots$$

Lema 1.6.15. Seja L uma R-álgebra de Lie, então para todo $k \geq 1$, temos:

1. $\gamma_k(L)$ contém todos comutadores de Lie de peso $l \geq k$ nos elementos de L.
2. Se $L = \langle X\rangle$ então $\gamma_k(L) = {}_+\langle [x_1, x_2, \cdots, x_n] | x_i \in X, n \geq k\rangle$ para todo $k \geq 1$.
3. $[\gamma_n(L), \gamma_m(L)] \subseteq \gamma_{m+n}(L)$, para todo $m, n \geq 1$.

Algumas propriedades de G se traduzem para L e algumas definições parecem semelhantes. As próximas definições e resultados diz respeito a nilpotência e solubilidade de uma R-álgebra de Lie.

Definição 1.6.16. Uma R-álgebra de Lie, L é dita nilpotente se existe n tal que $\gamma_n(L) = 0$. O menor n inteiro com essa propriedade é dita classe de Nilpotência de L.

Teorema 1.6.17. As seguintes afirmações são equivalentes para qualquer R-álgebra de Lie L.

1. $\gamma_{c+1}(L) = 0$;

2. L possui uma série de ideais:

$$L = L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots \supseteq L_i \supseteq \cdots \supseteq L_c \supseteq L_{c+1} = 0$$

   tal que $[L_i, L] \subseteq L_{i+1}$

3. Para todos $l_1, l_2, \cdots, l_{c+1} \in L$ temos que $[l_1, l_2, \cdots, l_{c+1}] = 0$

4. $\gamma_i(L) \subseteq Z_{k-i+1}(L)$ para cada $i = 1, \cdots, k+1$

Corolário 1.6.18. Seja $L = \langle X \rangle$. Então L é nilpotente de classe no máximo $c+1$ se, e somente se, $[x_{i_1}, \cdots, x_{i_{c+1}}] = 0$ para todo $x_i \in X$.

Demonstração. Suponha que L é nilpotente de classe $c+1$, então $\gamma_{c+1}(L) = 0$, mas pelo lema 1.6.15 temos, $0 = \gamma_{c+1}(L) = {}_{+}\langle [x_1, x_2, \cdots, x_n] | x_i \in X, n \geq c+1 \rangle$. Assim para todo $x_i \in X$ temos

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{c+1}}] = 0.$$

Agora, suponha $[x_{i_1}, \cdots, x_{i_{c+1}}] = 0$, observe que cada $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{c+1}} \in L$ então pela implicação 3. em 1. do teorema acima temos que $\gamma_{c+1}(L) = 0$ então por definição L é nilpotente de classe no máximo $c+1$. □

Alguns conceitos de grupo e anéis são semelhantes como o R-módulo quociente $L/_I = l + I$ para todo $l \in L$, onde L é uma R-álgebra de Lie e I é um ideal de L.

Definição 1.6.19. No R-módulo $L/_I$ vale o seguinte produto de Lie $[x + I, y + I] = [x, y]_L + I$

Assim, $(L/_I, +, [\cdot, \cdot]_{L/_I})$ é uma R-álgebra de Lie.

Teorema 1.6.20. Seja L uma R-álgebra de Lie:

1. Seja I um ideal de L. Então L/I é nilpotente de classe no máximo c se, e somente se, $\gamma_{c+1}(L) \subseteq I$;

2. Se L é nilpotente de classe no máximo c, então qualquer subálgebra e qualquer quociente de L são nilpotentes de classe no máximo c.

Definição 1.6.21. Seja L uma R-álgebra de Lie, podemos definir indutivamente a série derivada de L, usando a operação $[,]$ os seguintes ideais.

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= L \\ L^{(1)} &= [L, L] = \gamma_2(L) \\ &\vdots \\ L^{(i)} &= [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] \end{aligned}$$

L é ideal, pois $L^{(1)} = [L, L] \subseteq L$, temos, $L^{(i)} \subseteq L^{(i-1)}$. Assim, temos a seguinte cadeia:

$$L^{(0)} = L \supseteq L^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(i)} \supseteq \cdots$$

Observe que $L^{(n-1)}/L^{(n)}$ é uma R-álgebra de Lie abeliana, pois:

$$\gamma_2\left(L^{(n-1)}/L^{(n)}\right) = \gamma_2(L^{(n-1)}) + L^{(n)}/L^{(n)} = L^{(n)}/L^{(n)} = 0.$$

Definição 1.6.22. Seja L uma R-álgebra de Lie. Dizemos que L é solúvel se existe $n \geq 0$ inteiro tal que $L^{(n)} = 0$.

Definimos $\delta_0(x) = x$ e $\delta_{k+1} = [\delta_k(x_1, \ldots, x_{2^k}), \delta_k(x_{2^k+1}, \ldots, x_{2^{n+1}})]$.

Teorema 1.6.23. Seja L uma R-álgebra de Lie. As seguintes relações são equivalentes:

1. $L^{(d)} = 0$;

2. L tem uma série de ideais de comprimento d com fatores abelianos

$$L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_d = 0.$$

   Tal que $[L_i, L_i] \leq L_{i+1}$ para todo $i = 0, \cdots, d-1$;

3. $\delta_d(x_1, x_2, \cdots, x_{2^d}) = 0$.

Um anel de Lie satisfazendo essas condições é dito ser solúvel e o menor número d com a propriedade indicada, é chamado comprimento derivado de L. Muitas vezes é dito que um anel de Lie é solúvel de comprimento derivado d, significando que é solúvel de comprimento derivado $\leq d$.

Capítulo 2

Grupos Abelianos Elementares Agindo como Grupo de Automorfismo

Esse capítulo terá como objetivo mostrar o resultado de [3] sobre grupos finitos que sofrem a ação de um grupo abeliano elementar A. Como mencionado na introduçao, Ward [30] provou que para um grupo abeliano elementar de posto igual a 3 agindo por automorfismo em um grupo finito G, a nilpotência dos $C_G(a)$ para todo $a \in A^\#$ implica na nilpotência de G. Então pode-se pensar se o mesmo ocorre quando o grupo abeliano elementar tem posto 1 e 2, ou seja, quando $A \cong C_p$ e $A \cong C_p \times C_p$. O próximo exemplo é uma construção para os casos de posto 1 e 2, no qual os pontos fixos são nilpotentes mas G não é nilpotente.

Exemplo 2.0.1. Sejam $7, 3$ e 2 primos distintos. A obtenção de tais primos é feita usando o teorema de Dirichlet sobre primos na progressão aritmética. Sejam α_1, α_2 p-ésimas raízes primitiva da unidade sobre os corpos $\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_7$, respectivamente.

Escreva $U_2 = W_1 \rtimes \langle \phi_1 \rangle$, com $W_1 = \langle x \rangle$, $o(x) = 3$, $o(\phi_1) = 2$ e $x^{\phi_1} = x^{\alpha_1}$ e considere o produto entrelaçado regular $V_2 = C_7 \wr U_2$, onde C_7 é o grupo ciclico de ordem 7. Seja W_2 o 7-subgrupo de Sylow de V_2. Defina ϕ_2 um automorfismo de V_2 por:

$$wu \mapsto w^{\alpha_2} u \ \ para\ w \in W_2, u \in U_2$$

Assim, considere $G = W_1 W_2$ e $A = \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle$. Observe que G é um p'-grupo e A é abeliano elementar de ordem p^2. A ação de A sobre G é definida por conjugação. Para cada $a = \phi_1^i \phi_2^j \in A^\#$ com $i, j \in \{0, \cdots, p-1\}$. Sabemos em [[11],8.2.11] que se $G = XY$, onde X e Y são subgrupos A-invariantes, então $C_G(A) = C_X(A) C_Y(A)$. Nessas condições e como as ações foram definidas, os pontos fixos são nilpotentes mas o G tomado dessa forma não é nilpotente.

Para o caso de posto 1, um exemplo mais simples é mostrado abaixo:

Exemplo 2.0.2. Seja S um grupo abeliano elementar de ordem 7^3 gerado por v_1, v_2 e v_3. Seja K um grupo de automorfismos de S gerados por a e b tais que:

(a) $v_1^a = v_1, v_2^a = v_2^{-1}$ e $v_3^a = v_3^{-1}$.

(b) $v_1^b = v^{-1}, v_2^b = v_2$ e $v_3^b = v_3^{-1}$.

O grupo K é um grupo abeliano elementar de ordem 4. Denote por G o produto semidireto SK. O grupo G admite um automorfismo α de ordem 3 tal que:

(a) $v_1^\alpha = v_1, v_2 = v_2^3$ e $v_3^\alpha = v_3^9$

(b) $a^\alpha = a$ e $b^\alpha = b$.

Quando calculado os pontos fixos, para $\alpha \neq e$, temos duas cópias de $C_2 \times C_2$. Ou seja, todos os pontos fixos são nilpotentes, mas o grupo G não é nilpotente, já que a série central inferior se estabeliza no segundo termo.

Nesse contexto os resultados a seguir relacionam os termos da série central inferior e derivada dos centralizadores com os respectivos termos das séries do grupo G. Assim, o seguinte resultado apresenta a limitação do expoente das séries central inferior e derivada do grupo.

Teorema 2.0.3 ([4])**.** Dado m é um inteiro positivo e A um q-grupo abeliano elementar de ordem q^r com $r \geq 2$ agindo sobre um q'-grupo G finito.

1. Se para algum inteiro d tal que $2^d \leq r-1$ o d-ésimo grupo derivado do $C_G(a)$ tem expoente dividindo m para qualquer $a \in A^\#$, então $G^{(d)}$ tem expoente $\{m, q, r\}$-limitado.

2. Se $\gamma_{r-1}(C_G(a))$ tem expoente dividindo m para qualquer $a \in A^\#$, então $\gamma_{r-1}(C_G(a))$ tem expoente $\{m, q, r\}$-limitado.

No trabalho contendo o resultado citado acima, os autores apresentam os conceitos de dois subgrupos importantes, os γ-A-Especiais e A-Especiais, esses subgrupos são importantes para o desenvolvimento de um dos resultados principais desta tese.

Como mencionado acima, o objetivo desse capítulo é demonstrar o resultado abaixo, pois tal resultado é importante devido as técnicas desenvolvidas que serão utilizadas no próximo capítulo.

Teorema 2.0.4 ([3]). Seja A um grupo abeliano elementar de ordem p^k com $k \geq 3$ agindo sobre a p-grupo finito G.

1. Se $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{k-2}(G)$ é nilpotente e tem classe de nilpotência $\{c, k, p\}$-limitada.

2. Se, para algum inteiro d tal que $2^d + 2 \leq k$, o d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é nilpotente e tem classe de nilpotência $\{c, k, p\}$-limitada.

2.1 Grupos A-Especiais e γ-A-Especiais

No contexto de ações de grupos abelianos elementares apresentaremos algumas definições que podem ser encontrados em [4]. Essa seção será destinada a conhercemos a estrutura, bem como as propriedades dos grupos A-Especiais e γ-A-Especiais, propriedades essas que sempre estaremos mencionando ao logo deste trabalho.

Definição 2.1.1. Seja p um primo e A um p-grupo finito abeliano elementar agindo sobre um q'-grupo finito G. Sejam $A_1, \ldots, A_s$ os subgrupos do índice p em A e H um subgrupo de G. Dizemos que H é um subgrupo γ-A-especial de G de grau 1 se e somente se $H = C_G(A_j)$ para algum $j \leq s$ adequado. A seguir, suponha que $i \geq 2$ e os subgrupos γ-A-especiais de G de grau $i-1$ já estejam definidos. Então H é um subgrupo γ-A-especial de G de grau i se e somente se existe um subgrupo γ-A-especial J de G de grau $i-1$ tal que $H = [J, C_G(A_j)] \cap C_G(A_n)$ para $j, n \leq s$ adequados.

Similarmente, dizemos que H é um subgrupo A-especial de G de grau 0 se e somente se $H = C_G(A_i)$ para $i \leq s$ adequado. Agora, suponha que $k \geq 1$ e os subgrupos A-especiais de G de grau $k-1$ são definidos. Então H é um subgrupo A-especial de G de grau k se e somente se existem subgrupos A-especiais J_1, J_2 de G de grau $k-1$ tal que $H = [J_1, J_2] \cap C_G(A_j)$ para adequado $j \leq s$.

Os próximos teoremas apresentam propriedades sobre os subgrupos A-especiais e γ-A-Especiais e as demonstrações podem ser encontradas em [4].

Proposição 2.1.2. Seja A um p-grupo abeliano elementar de ordem p^r com $r \geq 2$ agindo sobre um p'-grupo finito G e $A_1, \ldots, A_s$ os subgrupos máximos de A. Seja $k \geq 1$ um número inteiro.

i) Se $k \geq 2$, então todo subgrupo γ-A-especial de G de grau k está contido em algum subgrupo γ-A-especial de G de grau $k-1$.

ii) Suponha que $G = G'$ e seja N um subgrupo A-invariante tal que $N = [N, G]$. Então para cada $k \geq 1$ o subgrupo N é gerado por subgrupos da forma $N \cap H$, onde H é algum subgrupo γ-A-especial de G de grau k.

iii) Seja S_k o subgrupo gerado por todos os subgrupos γ-A-especiais de G de grau i. Então $S_k = \gamma_k(G)$.

iv) Se $k \leq r-1$ e H é um subgrupo γ-A-especiais de grau k, então $H \leq \gamma_k(C_G(B))$ para algum subgrupo $B \leq A$ tal que $|A/B| \leq p^k$.

v) Seja H um subgrupo γ-A-especial de G. Se N for um subgrupo normal A-invariante de G, então a imagem de H em ${}^{G}\!/_{N}$ é um subgrupo γ-A-especial de ${}^{G}\!/_{N}$.

vi) Seja Q um q-subgrupo A-invariante Sylow de $\gamma_{k-1}(G)$. Sejam $Q_1, \ldots, Q_t$ todos os subgrupos da forma $Q \cap H$ onde H é algum subgrupo γ-A-especial de G de grau $k-1$. Então $Q = \langle Q_1, \ldots, Q_t \rangle$.

Demonstração. i) Se $k = 2$ e H é um subgrupo γ-A-especial de G de grau 2, então $H = [J_1, C_G(A_k)] \cap C_G(A_m)$ para $k, m \leq s$ adequado. Observe que $H \leq C_G(A_m)$ e o $C_G(A_m)$ é um subgrupo γ-A-especial de G de grau 1. Assuma que $k \geq 3$ e use indução em k. Seja H um subgrupo γ-A-especial de grau k. Sabemos que existe subgrupo γ-A-especial J_1 de G de grau $k-1$ tal que $H = [J_1, C_G(A_k)] \cap C_G(A_m)$ para $k, m \leq s$ adequado. Por indução J_1 está contido em algum subgrupo γ-A-especial L_1 de G de grau $k-3$. Observe que $[L_1, C_G(A_k)] \cap C_G(A_m)$ é um subgrupo γ-A-especial de G de grau $k-2$ e $H \leq [L_1, C_G(A_k)] \cap C_G(A_m)$, então segue o resultado.

ii) Conjunto $M = \langle [K_i, C_G(A_j)] \mid 1 \leq i, j \leq s \rangle$. É claro que cada um dos subgrupos $[K_i, C_G(A_j)]$ é A-invariante. Assim, pelo Lema 1.1.5(3.) cada subgrupo $[K_i, C_G(A_j)]$ é gerado por subgrupos da forma $[K_i, C_G(A_j)] \cap C_G(l)$, onde $l = 1, \cdots, s$. Observe que cada subgrupo $[K_i, C_G(A_j)] \cap C_G(l)$ está contido em um subgrupo γ-A-especial de G de grau $k+1$. Portanto, M é gerado por subgrupos da forma $M \cap D$, onde D varia através do conjunto de todos os subgrupos γ-A-especiais de G de grau $k+1$. Se $M^* = M \cap D^*$ afirmamos que $[M^*, K_j] \leq M$ para cada $1 \leq j \leq t$.

De fato, por i) sabemos que existe algum subgrupo γ-A-especial H de G de grau k tal que $D^* \leq H$. Isso implica que M^* está contido em algum K_l e então temos

$[M^*, K_j] \leq [K_i, C_G(A_j)] \leq M$, conforme desejado. Portanto, M é normal em K e concluímos que $M = K'$. O resultado agora segue.

iii) Se $k = 1$ o resultado é imediato do Lema 1.1.5. Portanto, assuma que $k \geq 2$ e defina $N = R_{k-1}$. Por indução em k assumimos que $N = \gamma_{k-1}(G)$. Seja $D_1, D_2, \cdots, D_{s_{k-1}}$ são os subgrupos γ-A-especiais de G de grau $k-1$ e $H_1, H_2, \cdots, H_{s_k}$ são os subgrupos γ-A-especiais de G de grau k. Se cada $\gamma_k(G) = \langle [D_l, C_G(A_j)] \mid 1 \leq l, j \leq s_{k-1} \rangle$. Como cada subgrupo $[D_l, C_G(A_j)]$ é A-invariante, segue do Lema 1.1.5(3.) que é gerado por subgrupos da forma $[D_l, C_G(A_j)] \cap C_G(A_i)$, onde $i = 1, \ldots, s$. Estes são precisamente os subgrupos γ-A-especiais de G de grau k então segue o resultado.

iv) Se $k = 1$ o resultado vale, isso fica claro porque $H = C_G(A_l)$ para um $l \geq s$ adequado e $|{}^{A}\!/_{A_l}| = q$. Assuma que $k \geq 2$ e use indução em k. Temos $H = [J_1, C_G(A_l)] \cap C_G(A_m)$ para $k, m \leq s$ adequado e subgrupo γ-A-especiais J_1 de G de grau $k-1$. Por indução existe subgrupo $B_1 \leq A$ tal que $|{}^{A}\!/_{B_l}| = q^{k-1}$ e $J_1 \leq \gamma_{k-1}(C_G(B_l))$ Seja $B = B_l \cap A_l$, observe que $H = [J_1, C_G(A_l)] \leq [\gamma_{k-1}(C_G(B_l)), C_G(A_l)] \leq [\gamma_{k-1}(C_G(B)), C_G(B)] = \gamma_i(C_G(B))$. Assim $H \leq \gamma_i(C_G(B))$ e $|{}^{A}\!/_{B}| = q^k$, como requerido.

v) É imediato do Lema 1.1.5(1.) e das definições.

vi) Seja G um contra-exemplo de ordem minimal e seja N um subgrupo A-invariante normal minimal de G. Considere o conjunto $X = \langle Q_1, \ldots, Q_t \rangle$. Por minimalidade e pelo item iv) $QN = XN$. Para provar que $Q = X$ é suficiente mostrar que $Q \cap N \leq X$. Primeiro suponha que N é um p'-grupo. Neste caso a intersecção $Q \cap N$ é trivial e não há nada a provar. Em seguida, suponha que N é perfeito. Como N é caracteristicamente simples(um grupo G é caracteristicamente simples se não possui subgrupos característicos não triviais próprios), N é um produto de grupos simples não abeliano. Segue do Lema 4.2 [4] que $Q \cap N$ está contido em X e terminamos. Assim, resta considerar o caso em que N é um p-grupo. Suponha que $G \neq G'$. Por indução, sabemos que todo Sylow A-invariante O p-subgrupo de $\gamma_k(G)$ é gerado por suas interseções com todos os subgrupos γ-A-especiais de G' de grau $k-1$. Portanto, podemos passar para o quociente ${}^{G}\!/_{\gamma_k(G)}$ e assumir que $\gamma_k(G) = 1$. Isso implica que $\gamma_{k-1}(G)$ é nilpotente e assim podemos supor que $\gamma_{k-1}(G)$ é um p-grupo. Então $\gamma_{k-1}(G) = Q$. Segue de $ii)$ que Q é gerado por subgrupos γ-A-especiais de G de grau $k-1$ e o resultado vale. Estamos reduzidos ao caso em que $G = G'$. Como N é minimal, ou $N = [N, G]$, ou $N \leq Z(G)$. Se $N = [N, G]$ notamos que $Q \cap N = N$ porque N está contido em Q. Como $N = [N, G]$, o item $iv)$ mostra que N é gerado por suas interseções com todos os subgrupos γ-A-especiais de G de grau $k-1$ e então $N \leq X$, conforme desejado. Agora suponha N central em G. Então N é de ordem p e N está contido em todo subgrupo maximal de Q ou existe um subgrupo maximal S em P tal que $Q = NS$. No primeiro caso $N \leq \Phi(Q)$. Como sabemos que $Q = XN$, segue que $Q = X$, como requerido. Neste último caso, pelo Teorema [[14],pg.21], N também é complementado em G e então $G = NH$ para algum subgrupo $H \leq G$. Como N é central, temos $G = N \times A$. Isso gera uma contradição porque assumimos que $G = G'$.

□

Seguindo a mesma ideia da demonstração da proposição anterior, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.1.3. Seja A um p-grupo abeliano elementar de ordem p^k com $k \geq 2$ agindo sobre um finito p'-grupo G e $A_1, \ldots, A_s$ os subgrupos maximais de A. Seja $i \geq 0$ um número inteiro.

i) Se $i \geq 1$, então todo subgrupo A-especial de G de grau i está contido em algum subgrupo A-especial de G de grau $i-1$.

iii) Seja R_i o subgrupo gerado por todos os subgrupos A-especiais de G de grau i. Então $R_i = G^{(i)}$.

iii) Se $2^i \leq i-1$ e H são subgrupos A-especiais de grau i, então $H \leq (C_G(B))^{(i)}$ para algum subgrupo $B \leq A$ tal que $|A/B| \leq p^{2^i}$.

iv) Seja Q um A-invariante q-subgrupo de Sylow de $G^{(i)}$. Sejam $Q_1, \ldots, Q_t$ todos os subgrupos da forma $Q \cap H$ onde H é algum subgrupo A-especial de G de grau i. Então $Q = \langle Q_1, \ldots, Q_t \rangle$.

2.2 Limitação da Classe de Nilpotência

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte resultado que pode ser encontrado em [3].

Lema 2.2.1. Seja A um grupo abeliano elementar de ordem p^k com $k \geq 3$ agindo sobre a p'-grupo finito G.

1. Se $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{k-2}(G)$ é nilpotente e tem classe de nilpotência $\{c, k, p\}$-limitada.

2. Se, para algum inteiro d tal que $2^d + 2 \leq k$, o d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é nilpotente e tem classe de nilpotência $\{c, k, p\}$-limitada.

Apresentaremos a demonstração do item 1, a demonstração do outro item é similar. Dividiremos a demonstração em dois lemas, o primeiro lema é com relação a nilpotência e o segundo lema é sobre à limitação da classe de nilpotência. Vale ressaltar que iremos sempre voltar as propriedades citadas nas seções 2.1 e 1.6.

Lema 2.2.2. Seja A um grupo abeliano elementar de ordem p^k com $k \geq 3$ agindo sobre um p'-grupo finito G. Se $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{k-2}(G)$ é nilpotente.

Demonstração. Suponha que o lema seja falso e considere G um contra-exemplo de ordem minimal. Como $\gamma_n(C_G(x))$ é nilpotente para qualquer $x \in A^{\#}$, segue-se que $C_G(x)$ é solúvel para qualquer $x \in A^{\#}$. Portanto, o resultado de Glauberman sobre funtores sinalizadores solúveis [10] implica que G é solúvel. Assuma que G tem dois subgrupos normais minimais A-invariantes distintos V_1 e V_2. Por minimalidade, a imagem de $\gamma_n(G)$ em ${}^{G}\!/_{V_1}$ e em ${}^{G}\!/_{V_2}$ é nilpotente. Assim a imagem de $\gamma_n(G)$ deve ser nilpotente no quociente ${}^{G}\!/_{V_1 \cap V_2}$. Isso é uma contradição já que $V_1 \cap V_2 = 1$. Portanto, G tem um único subgrupo normal minimal A-invariante M. Novamente, o quociente ${}^{\gamma_{k-2}(G)}\!/_{M}$ é nilpotente. É claro que M é um q-grupo abeliano elementar para algum primo q. Seja $A_1, \ldots, A_s$ são os subgrupos maximais de A. Pelo Lema 1.1.5 $M = M_1 M_2 \cdots M_s$, onde $M_i = C_M(A_i)$ para $i \leq s$. Como γ_{k-2} não é nilpotente, esse não é um q-grupo. Portanto, pelo Lema 1.1.5(4.) $\gamma_{k-2}(G)$ contém um r-subgrupo de Sylow R A-invariante para algum primo $r \neq q$. O teorema 2.1.2(vi) nos diz que R é gerado por suas interseções com subgrupos γ-A-especiais de grau $k-2$.

Assim, $R = \langle R_1, \cdots, R_t \rangle$, onde $R_j = R \cap H_j$ para algum subgrupo γ-A-especial H_j de G de grau $k-2$. Agora fixe os inteiros i e j e considere o subgrupo $\langle M_i, R_j \rangle$. Desde que $k \leq r-1$ segue da Proposição 2.1.2(iv) segue que H_j está contido em $\gamma_{k-2}(C_G(B))$ para algum subgrupo B de A tal que $|{}^{A}\!/_{B}| \leq p^k$. Por outro lado, $M_i \leq C_G(A_i)$ e observe que a interseção $B \cap A_i$ não é trivial. Portanto, existe $a \in A^{\#}$ tal que $M_i \leq C_G(a)$ e $H_j \leq \gamma_{k-2}(C_G(a))$. Segue-se que H_j está contido em $F(C_G(a))$. Como M_i está contido em um subgrupo normal abeliano de G e também em $C_G(a)$, segue que $\langle M_i, R_j \rangle$ é nilpotente. Tendo em mente que M é um q-grupo e R é um r-grupo, deduzimos que $[M_i, R_j] = 1$ e isso vale para qualquer i, j. Lembre-se que $M = M_1M_2\cdots M_s$ e $R = \langle R_1, \cdots, R_t\rangle$. Portanto, $[M, R] = 1$. O fato que $\gamma_{k-2}(G)/_M$ é nilpotente implica que também $C_G(M) \cap \gamma_{k-2}(G)$ é nilpotente. Consequentemente, todo q-elemento de $C_G(M) \cap \gamma_{k-2}(G)$ pertence a $O_{q'}(G)$. Por outro lado, $O_{q'}(G)$ é trivial, já que M é o único subgrupo normal minimal A-invariante de G. Assim, obtemos um contradição pois acabamos de mostrar que R centraliza M. □

Pelo resultado 2.2.2 temos a nilpotência do $\gamma_{k-2}(G)$ sob as hipóteses estabelecidas, o próximo resultado auxiliará na limitação a classe de nilpotência.

Lema 2.2.3. Seja L uma álgebra de Lie tal que $pL = L$ onde p é primo, e seja A um p-grupo finito abeliano elementar agindo por automorfismos em L. Seja $A_1, \ldots, A_s$ sejam os subgrupos maximais de A. Suponha que L seja gerado por subespaços A-invariantes de $R_1, \ldots, R_t$ com a propriedade de que para quaisquer inteiros i, j e k existe algum inteiro m tal que

$$[R_i, C_L(A_j)] \cap C_G(A_k) \leq R_m.$$

Então L é gerado por $R_1, \ldots, R_t$.

Demonstração. Seja L um espaço linear de subespaços da forma $[R_{i_1}, \ldots, R_{i_w}]$, onde $R_{i_1}, \ldots, R_{i_w}$ não são necessariamente elementos distintos de $\{R_1, \ldots, R_t\}$. Então escolha $R_{i_1}, \ldots, R_{i_w} \in \{R_1, \ldots, R_t\}$ e coloque $R = [R_1, \ldots, R_t]$. Basta mostrar que R está contido em $\Sigma_j R_j$. Argumentamos por indução em w. Se $w = 1$, então $R = R_l$, para algum l e não há nada a provar. Assuma que $w \geq 2$ e coloque $R_0 = [R_{i_1}, \ldots, R_{i_w}]$. Assim $R = [R_0, R_{i_w}]$. Como R é um subespaço A-invariante segue-se do Lema 1.1.5(3.) que $R = \Sigma_{\lambda \leq s} C_R(A_\lambda)$. Por hipótese indutiva $R_0 \leq \Sigma_l R_l$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned} C_R(A_\lambda) = [R_0, C_L(A_l)] \cap C_L(A_\lambda) &\leq [\Sigma_l R_l, C_L(A_j)] \cap C_L(A_\lambda) \\ &\leq \Sigma_l([R_l, C_L(A_j)] \cap C_L(A_\lambda)). \end{aligned}$$

Pela hipótese cada soma $[R_l, C_L(A_j)] \cap C_L(A_\lambda)$ está contida em R_m, para algum inteiro m, e assim segue que $R \leq \Sigma_j R_j$, conforme desejado.

□

Lema 2.2.4. Seja A um grupo abeliano elementar de ordem p^k com $k \geq 3$ agindo sobre um p-grupo finito G. Se $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^\#$, então $\gamma_{k-2}(G)$ a classe de nilpotência é $\{c, k, p\}$-limitada.

Demonstração. Primeiro, notamos que $\gamma_{k-2}(G)$ é nilpotente pelo Lema 2.2.2. Em seguida, seja $L = L(\gamma_{k-2}(G))$ a álgebra de Lie associada a $\gamma_{k-2}(G)$ como na seção 1.6. Então $pL = L$ e L tem a mesma classe de nilpotência de $\gamma_{k-2}(G)$. O grupo A age naturalmente por automorfismos em L e, como $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ é nilpotente da classe no máximo c, segue que $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ é nilpotente da classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$. Coloque $K = L \otimes Z[\omega]$, onde ω é uma raiz p-ésima primitiva da unidade. A nilpotência de $\gamma_{k-2}(C_L(a))$ implica que também $\gamma_{k-2}(C_K(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$. O teorema 2.7(1) de [6] agora nos diz que $\gamma_{k-2}(K)$ é nilpotente de classe $\{c, k, p\}$- limitada. Portanto, também a classe de nilpotência de $\gamma_{k-2}(K)$ é $\{c, k, p\}$-limitada. Denotamos a classe de nilpotência de $\gamma_{k-2}(K)$ por e.

Seja $H_1, H_2, \ldots, H_t$ são os subgrupos γ-A-especiais de G de grau $k-2$. Pela Proposição 2.1.2(ii]) $\gamma_{k-2}(G) = \langle H_1, H_2, \ldots, H_t \rangle$. Como $k-2 \leq k-1$, a Proposição 2.1.2(iii]) nos diz que cada subgrupo H_i está contido em $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ para algum subgrupo B de A tal que $|{}^{A}\!/_{B}| \leq p^{k-2}$. Seja $A_1, \ldots, A_s$ sejam os subgrupos maximais de A. Para qualquer A_j a interseção $B \cap A_j$ não é trivial. Assim, existe um $a \in A^{\#}$ tal que o centralizador $C_G(A_j)$ está contido em $C_G(a)$ e H_i está contido em $\gamma_{k-2}(C_G(a))$. Como $\gamma_{k-2}(C_G(a))$ é nilpotente da classe no máximo c, temos:

$$[C_G(A_j), \underbrace{H_i, \cdots, H_i}_{c+1}] = 0. \tag{2.1}$$

Em seguida, definimos recursivamente o que será chamado de γ-A-subálgebras de L. Uma subálgebra R é uma γ-A-subálgebra de nível 1 se e somente se $R = L(\gamma_{k-2}(G), H_j)$ para $j \leq t$ adequado. A seguir, suponha que $l \leq 1$ e as γ-A-subálgebras de nível $l-1$ estejam definidas. Então R é uma γ-A-subálgebra de nível l se e somente se existem γ-A-subálgebras R_1, de nível $l-1$ tais que $R = [R_1, C_L(A_k)] \cap C_L(A_j)$ para $j, k \leq s$ adequado. Denotamos por R_l o conjunto de todas as γ-A-subálgebras de nível l.

É claro que toda γ-A-subálgebra é A-invariante e está contida em $C_L(A_j)$ para algum $j \leq s$. Como $\gamma_{k-2} = \langle H_1, H_2, \ldots, H_t \rangle$ segue que L é gerado por todo $R \in R_0$. É fácil verificar que se R está em R_l , então G contém um subgrupo γ-A-especial H de grau $k-2+l$ tal que $R \leq L(\gamma_{k-2}, H)$. Segue da definição e da Proposição 2.1.2(i]) que para quaisquer subgrupos γ-A-especiais J_1 e para todo $j, k \leq s$ existe um subgrupo γ-A-especial J_3 tal que

$$[J_1, C_G(A_j)] \cap C_G(A_k) \leq J_3. \tag{2.2}$$

A partir disso, deduzimos as propriedades correspondentes das γ-A-subálgebras.

(P1) Se $l \geq 1$, então todo elemento de R_l está contido em algum elemento de R_{l-1} .

(P2) Se $j \leq s$, então para qualquer $R_1 \in R_l$ existe $R_3 \in R_l$ tal que

$$[R_1, C_L(A_j)] \cap C_L(A_k) \leq R_3. \tag{2.3}$$

No grupo G temos a relação 2.1. Portanto, na álgebra de Lie temos

$$[C_L(A_j), {}_{c+1}L(\gamma_{k-2}(G), H_i)] = 0.$$

Considerando que toda γ-A-subálgebra está contida em algum $L(\gamma_{k-2}(G), H_i)$ e que $L = \Sigma_j C_L(A_j)$ deduzimos $[L, {}_{c+1}L(\gamma_{k-2}(G), H_i)] = 0$, em particular

$$[L, {}_{c+1}R] = 0. \tag{2.4}$$

para cada γ-A-subálgebra R. Além disso, usando o Lema 2.2.3 pode-se mostrar que para todo $l \geq 1$ o l-ésimo termo $\gamma_l(L)$ da série central inferior de L é gerado pelas γ-A-subálgebras de nível l.

Vamos agora provar que L é nilpotente de classe $\{c, k, p\}$-limitada. Seja $Z = Z(\gamma_{k-2}(L))$. Então $[Z, X, Y] = [Z, Y, X]$ para quaisquer subconjuntos $X \in \gamma_{k-3}(L)$ e $Y \in L$. Seja $n = |R_{k-3}|$, o número de elementos em R_{k-3} e observe que o número n é limitado por $\{k, p\}$. Defina $r = cn + 1$. Como $\gamma_{k-3}(L) = \Sigma_{i \leq n} R_i$, podemos escrever

$$[L, {}_r\gamma_{k-3}(L)] = \Sigma[Z, {}_{u_1}R_1, \cdots, {}_{u_n}R_n]. \tag{2.5}$$

onde $u_1 + \cdots + u_n = r$ e $R_1, \cdots, R_n$ estão em R_{k-3} . O número r é grande o suficiente para garantir que $u_j \geq c + 1$ para algum $j \leq n$. Segue-se de (2.4) que cada soma em (2.5) é igual a zero.

Assim $[Z, {}_r\gamma_{k-3}(L)] = 0$ e $Z \leq Z_r(\gamma_{k-3}(L))$, onde $Z_r(\gamma_{k-3}(L))$ é o r-ésimo termo da série central superior de $\gamma_{k-3}(L)$. Agora, repetindo este argumento para ${}^{\gamma_{k-3}(L)}\!/_{Z}$,${}^{\gamma_{k-3}(L)}\!/_{Z_2(\gamma_{k-2}(L))}$ e assim por diante, concluímos que $\gamma_{k-2}(L) \leq Z_{er}(\gamma_{k-3}(L))$ e, portanto, $\gamma_{k-3}(L)$ é nilpotente da classe no máximo $er + 1$. Depois disso, repetimos os argumentos para${}^{\gamma_{k-4}(L))}\!/_{Z(\gamma_{k-3}(L))}$,${}^{\gamma_{k-4}(L))}\!/_{Z_2(\gamma_{k-3}(L))}$ etc. Depois de muitas repetições, concluímos que L é nilpotente de classe $\{c, k, p\}$-limitado. Finalmente, observamos que, como a classe de nilpotência de G é igual à de L, segue-se o resultado. A prova está completa.

$\square$

Capítulo 3

Grupos Extra-Especiais Agindo como Grupo de Automorfismo

Esse capítulo é uma generalização para o caso não abelianos dos resultados apresentados no capítulo 2. Neste capítulo apresentamos as demonstrações dos seguintes teoremas publicados em [22]:

Teorema 3.0.1. Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E aja por automorfismos na álgebra de Lie L com $pL = L$ e $p \nmid Char(L)$.

i) Se $\gamma_n(C_L(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in E^{\#}$, então $\gamma_n(L)$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c, n e p.

ii) Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq n$, o d-ésimo termo derivado do $C_L(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in E^{\#}$, então o d-ésimo termo derivado $L^{(d)}$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c , n e p.

Teorema 3.0.2. Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E age por automorfismos sobre um p'-grupo finito G.

i) Se $\gamma_n(C_G(a))$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então $\gamma_n(G)$ é nilpotente.

ii) Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq n$, o d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é nilpotente.

Para o caso $n = 1$ os resultados anteriores foram publicados em [21] com os seguintes respectivos enunciados: Dado A um p-grupo de ordem p^3 e expoente p agindo em um p'-grupo finito de tal maneira que $C_G(a)$ (respectivamente $C_L(a)$) é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$ então G (respectivamente L) é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c e p.

3.1 Resultados sobre Álgebra de Lie

Essa seção visa desenvolver técnicas para álgebra de Lie, a fim de demonstrar:
Teorema 3.0.1 Seja p um primo e E um grupo extra-especial p de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E aja por automorfismos na álgebra de Lie L com $pL = L$ e $p \nmid Char(L)$.

i) Se $\gamma_n(C_L(a))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in E^{\#}$, então $\gamma_n(L)$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c, n e p.

ii) Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq n$, o d-ésimo termo derivado de $C_L(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in E^{\#}$, então o dth derivado $L^{(d)}$ é nilpotente com classe limitada apenas em termos de c, n e p.

Apresentaremos apenas a demonstração do item i) do teorema anterior uma vez que a demonstração do outro item é análoga.

Lembre-se de que um caractere de um grupo abeliano finito A é um homomorfismo $\alpha : A \longrightarrow S^1$. O grupo de caracteres de um grupo abeliano finito A é o conjunto de homomorfismos $A \longrightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ com a operação de multiplicação de funções: $(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g)$. O grupo de caracteres de A é denotado $\hat{A}$. É bem conhecido que $\hat{A}$ e A são isomórficos (ver 1.5.11).

Seja K um anel associativo com unidade em que p é invertível, ω uma p-ésima raiz primitiva da unidade e L uma álgebra de Lie sobre $K[\omega]$. Seja A um grupo abeliano elementar de ordem p^k, $k \geq 2$, agindo por automorfismos em L. Para qualquer $\alpha \in \hat{A}$ definimos

$$L_\alpha = \{x \in K \mid x^a = \alpha(a)x \text{ para cada } a \in A\}.$$

Observe que cada componente L_α pertence ao ponto fixo de um subgrupo maximal de A. É sabido (ver [16, pg.88]) que $L = \bigoplus_\alpha L_\alpha$ e $[L_\beta, L_\alpha] \leq L_{\beta\alpha}$ para todo $\alpha, \beta \in \hat{A}$.

Para qualquer inteiro positivo n e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \hat{A}$ definem indutivamente

$$\gamma(\alpha_1) = L_{\alpha_1} \text{ e } \gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = [\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), L_{\alpha_n}],$$
$$\delta(\alpha_1) = L_{\alpha_1} \text{ e } \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n}) = [\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^{n-1}}), \delta(\alpha_{2^{n-1}+1}, \ldots, \alpha_{2^n})].$$

Em [28], provou-se que $\gamma_n(L) = \sum \gamma(\alpha_1, .., \alpha_n)$ e $L^{(n)} = \sum \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n})$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n}$ variam independentemente através de $\hat{A}$. Além disso, para qualquer $\beta \in \hat{A}$, provou-se que $L_\beta \cap \gamma_n(L) = \sum \gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ onde a soma é feita sobre aqueles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \hat{A}$ para os quais $\alpha_1 \cdots \alpha_n = \beta$. Da mesma forma $L_\beta \cap L^{(n)} =$

$\sum \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n})$, onde $\alpha_1 \cdots \alpha_{2^n} = \beta$. Uma consequência útil desses resultados é que para qualquer $a \in A$ temos que $C_L(a) \cap \gamma_n(L) = \sum \gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, onde a soma é feita sobre todos aqueles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ para os quais $\alpha_1 \cdots \alpha_n(a) = 1$.

Lema 3.1.1. Se $r \geq k-1$, então $\gamma_r(L) = \sum_{a \in A} N_a$ onde cada N_a é uma subálgebra de $\gamma_{k-1}(C_L(a))$.

Demonstração. Note que para qualquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \hat{A}$ existe $a \in A$ com $L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_{k-1}} \leq C_L(a)$. Assim, $\gamma(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}) \leq \gamma_{k-1}(C_L(a))$ para algum $a \in A$. Se $r \geq k-1$, então $\gamma(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \leq \gamma(\beta_1, \cdots, \beta_{k-1})$ onde $\beta_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-k+2}$ e $\beta_i = \alpha_{r-k+i+1}$. Assim, se $n \geq k-1$, também obtemos que $\gamma(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \leq \gamma_{k-1}(C_L(a))$ por algum $a \in A$. Como $\gamma_r(L) = \sum \gamma(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ segue o resultado. □

Seja K um anel associativo com unidade em que p é invertível e ω uma p-ésima raiz primitiva da unidade. Seja L uma álgebra de Lie sobre $K[\omega]$. Então o objetivo da presente seção é estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 3.1.2. Suponha que E age por automorfismos em L de tal forma que $\gamma_n(C_L(a))$ seja nilpotente da classe no máximo c para qualquer $a \in E^{\#}$. Então $\gamma_n(L)$ é nilpotente da classe (c, n, p)-limitada.

Em toda essa seção denotamos por E um p-grupo Extra-Especial. Como de costume, denotamos por E' o subgrupo do comutador de E. Como E é extra-especial, E' tem ordem p e $E' = Z(E) = \Phi(E)$. Escolha um gerador φ de E' e defina $H_0 = C_{\gamma_n(L)}(\varphi) = C_L(\varphi) \cap \gamma_n(L)$. O subanel H_0 é E-invariante desde que φ comuta com qualquer elemento de E.

Lema 3.1.3. Sejam $B_1, \ldots, B_l$ todos os subgrupos abelianos elementares de ordem p^{n+1} de E. Então $H_0 = \sum_i C_{\gamma_n(L)}(B_i)$.

Demonstração. Denote por $\overline{E}$ o quociente E/E', que é um grupo abeliano elementar de ordem p^{2n}. Observe que H_0 admite a ação de $\overline{E}$ e então $H_0 = \sum_i C_{H_0}(\overline{Q_i})$ onde $\overline{Q_1}, \ldots, \overline{Q_l}$ são os subgrupos máximos de $\overline{E}$. Uma forma alternativa de expressar isso é dizer que $H_0 = \sum_i C_{\gamma_n(L)}(Q_i)$ onde $Q_i, \ldots, Q_l$ são os subgrupos maximais de E desde $E' \leq Q_i$ para qualquer i. Agora, para cada Q_i, escolhemos um subgrupo abeliano elementar $B_i \leq Q_i$ (pelo teorema 1.4.5) de ordem p^{n+1}. Assim, temos $H_0 = \sum_i C_{\gamma_n(L)}(B_i)$, pois $C_{\gamma_n(L)}(Q_i) \leq C_{\gamma_n(L)}(B_i)$. □

Seja ω uma p-ésima raiz primitiva da unidade. O produto tensorial $\overline{L} = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\omega]$ pode ser considerado como uma álgebra de Lie sobre $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\omega]$. A ação de E sobre L estende-se naturalmente para $\overline{L}$ e $\gamma_n(C_{\overline{L}}(x))$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $x \in E^{\#}$. Como $\gamma_n(L)$ e $\gamma_n(\overline{L})$ têm a mesma classe de nilpotência, basta limitar a classe de $\gamma_n(\overline{L})$. Portanto, sem perda de generalidade será assumido que $\omega \in K$ para que trabalhemos com L ao invés de $\overline{L}$.

Lema 3.1.4. H_0 é nilpotente da classe (c, n, p)-limitada.

Demonstração. Como $H_0 \leq C_L(\varphi)$ e $\gamma_n(C_L(\varphi))$ é nilpotente da classe no máximo c, temos que $\gamma_n(H_0)$ é nilpotente da classe classe no máximo c. Suponha que $n \geq 2$ e seja $N = \gamma_{n-1}(H_0)$. Primeiro provaremos que N é nilpotente da classe (c, n, p)-limitada. Observe que N' é nilpotente da classe no máximo c. Pelo análogo da álgebra de Lie do teorema de Hall (ver [17, Teorema 2.3.1]), é suficiente mostrar que $N/[N', N']$ tem classe de nilpotência (c, n, p)-limitada. Assim, podemos assumir que N é metabeliano. Neste caso $[x, y, z] = [x, z, y]$ para cada $x \in [N, N]$ e $y, z \in N$. Como N é E-invariante, temos que $N' = \sum_i C_{N'}(B_i)$ onde B_i varia sobre todos os subgrupos abelianos elementares de ordem p^{n+1} de E. Assim, basta mostrar que existe um número $t = t(c, n, p)$ tal que $[C_{N'}(B_i), \underbrace{N, \ldots, N}_{t}] = 0$ para qualquer i. Para cada subgrupo B_i consideramos o caractere $\hat{B}_i$ de B_i. Assim, podemos escrever $L = \bigoplus_{\alpha \in \hat{B}_i} L_\alpha$ onde e $L_\alpha = \{x \in K \mid x^a = \alpha(a)x \text{ para cada } a \in B_i\}$.

Para qualquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \hat{B}_i$ existe $b \in B_i$ tal que $L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_n} \leq C_L(b)$. Obviamente, $C_{H_0}(B_i) \leq C_L(b)$ e como $\gamma_n(C_L(b))$ é nilpotente de classe no máximo c, temos que

$$[C_{N'}(B_i), \underbrace{\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_{c+1}] = 0.$$

Observe que $H_0 = \sum \gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, onde a soma é feita sobre todos aqueles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ para o qual $\alpha_1 \cdots \alpha_n(\varphi) = 1$. Assim, como no Lema 3.1.1 podemos provar que $N = \sum_{b \in B_i} N_b$ onde N_b é uma subálgebra contida em $\gamma_n(C_L(b))$.

Coloque $t = cp^{n+1} + 1$. Portanto, $[C_{N'}(B_i), \underbrace{N, \ldots, N}_{t}]$ é igual a:

$$\sum [C_{N'}(B_i), \underbrace{N_j, \ldots, N_j}_{c+1}, *, \ldots, *] = 0.$$

Aqui, os asteriscos denotam alguns subespaços de N que não são importantes, pois o comutador é 0 de qualquer maneira. Isso prova que $N = \gamma_{n-1}(H_0)$ é nilpotente da classe (c, n, p)-limitada.

Agora, repetindo o mesmo argumento para $\gamma_{n-2}(H_0)$, $\gamma_{n-3}(H_0)$ e assim por diante, concluímos que H_0 é nilpotente de classe (c, n, p)-limitada. □

O próximo lema é provado em [28, Lema 2.2].

Lema 3.1.5. Seja $t > 1$. Seja L uma álgebra de Lie e K uma subálgebra nilpotente de classe c. Assuma que K é gerado pelos subespaços $X_1, \cdots, X_m$ tal que para qualquer espaço comutador Y em $X_1, \cdots, X_m$ temos $[L,_t Y] = 0$. Então existe um número u (c, m, t)-limitado tal que $[L,_u K] = 0$.

Lema 3.1.6. Existe um número (c, n, p) limitado s tal que

$$[L, \underbrace{H_0, \cdots, H_0}_{s}] = 0.$$

Demonstração. Seja B_i um grupo abeliano elementar de ordem p^{n+1} de E e escreva $L = \bigoplus_{\alpha \in \hat{B}_i} L_\alpha$. Primeiro, provaremos que

$$[L, \underbrace{C_{\gamma_n(L)}(B_i), \cdots, C_{\gamma_n(L)}(B_i)}_{c}] = 0. \tag{3.1}$$

Fixe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \hat{B}_i$ de forma que $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. É fácil ver que neste caso se $L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_{n-1}} \in C_L(b)$, então $L_{\alpha_n} \in C_L(b)$. Assim, para qualquer $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \hat{B}_i$ tal que $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$ existem $b \in B_i$ tal que $L_\beta, L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_n} \leq C_L(b)$. Como $\gamma_n(C_L(b))$ é nilpotente da classe no máximo c para $b \in B_i^{\#}$, segue que $[L_\beta,_{c+1} \gamma(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)] = 0$ sempre que $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. Agora, usando esse $L = \bigoplus_{\beta \in \hat{B}_i} L_\beta$, derivamos que $[L,_{c+1} \gamma(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)] = 0$. Observe que $C_L(B_i) = L_1$. Assim, temos que $C_{\gamma_n(L)}(B_i) = \sum \gamma(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, onde o somatório é feito sobre todos aqueles $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ para os quais $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. Agora aplicamos o Lema 3.1.5 com $K = C_L(B_i) \cap \gamma_n(L)$ e os espaços $\gamma(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \leq C_L(B_i)$ no lugar de X_i para deduzir que existe um $\{c, n, p\}$ número limitado u tal que $[L,_u K] = 0$.

Agora, seja M uma subálgebra invariante E de H_0 e seja $M_i = M \cap C_{\gamma_n(L)}(B_i)$, para qualquer subgrupo abeliano elementar B_i de ordem p^{n+1} de E. Segue que $M = \sum_i M_i$. Mostraremos, por indução na classe de nilpotência de M, que existe um (c, n, p) número limitado s tal que $[L,_s M] = 0$. Como $[M, M]$ é nilpotente de classe menor, existe um número (c, n, p) limitado s_1 tal que $[L,_{s_1} [M, M]] = 0$.

O conjunto $r = (u - 1)(t + 1) + 1$, onde t é o número de subgrupos abelianos elementares de ordem p^{n+1} de E, e $W = [L, M_{i_1}, \ldots, M_{i_r}]$ para alguma escolha de $M_{i_1}, \ldots, M_{i_r} \in \{M_1, \ldots, M_{t+1}\}$. Segue que para qualquer permutação dos símbolos $i_1, \ldots, i_r$, $W \leq [L, M_{\pi(i_1)}, \ldots, M_{\pi(i_r)}] + [L, [M, M]]$.

Além disso, observe que o número r é grande o suficiente para garantir que algum M_i ocorra na lista $M_{i_1}, \ldots, M_{i_r}$ pelo menos u vezes. Assim, deduzimos que $W \leq [L,_u M_1, *, \ldots, *] + [L, [M, M]]$, onde os asteriscos representam subálgebras arbitrárias M_{i_j} escolhidas entre $M_{i_1}, \ldots, M_{i_r}$. Segue da equação (3.1) que qualquer escolha para tal M_{i_j} não altera o resultado. Portanto, $W \leq [L, [M, M]]$.

Além disso, para qualquer escolha de $M_{i_1}, \ldots, M_{i_r} \in \{M_1, \ldots, M_t\}$ o mesmo argumento mostra que

$$[W, M_{i_1}, \ldots, M_{i_r}] \leq [W, [M, M]] \leq [L, [M, M], [M, M]]$$

Mais geralmente, para qualquer k e qualquer escolha $M_{i_1}, \ldots, M_{i_{kr}} \in \{M_1, \ldots, M_t\}$ temos

$$[L, M_{i_1}, \ldots, M_{i_{kr}}] \leq [L, \underbrace{[M, M], \ldots, [M, M]}_{k}].$$

Coloque $s = s_1 r$. Por indução temos que

$$[L, M_{i_1}, \ldots, M_{i_r}] \leq [L, \underbrace{[M, M], \ldots, [M, M]}_{s_1}] = 0.$$

Isso implica que $[L,_u M] = 0$. O lema agora é direto do caso em que $M = H_0$ e assim concluímos $[L,_u H_0] = 0$ □

O próximo resultado foi provado em [18]. Esse resultado estende um resultado anterior de Kreknin [19] que diz que se H é um anel de Lie admitindo um automorfismo livre de ponto fixo de ordem n, então H é solúvel e tem comprimento derivado limitado somente em termos de n.

Teorema 3.1.7. Seja H um anel de Lie admitindo um automorfismo α de ordem finita n tal que $[H,{}_tC_H(\alpha)] = 0$ para algum $t \geq 1$. Suponha que $nH = H$. Então H é solúvel com comprimento derivado no máximo $(t+1)^{n-1} + log_2 t$.

Considerando $H = \gamma_n(L)$ obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.1.8. A álgebra de Lie $\gamma_n(L)$ é solúvel com comprimento derivado (c,n,p)-limitado.

O ideal de um anel de Lie L gerado pelo conjunto X será denotado por ${}_{id}\langle X\rangle$. O grupo aditivo de ${}_{id}\langle X\rangle$ é gerado por comutadores simples da forma $[x, l_1, \ldots, l_k]$, em que $x \in X$, $l_i \in L$, $k \geq 0$. O próximo resultado foi provado em [17, Teorema 4.2.2].

Teorema 3.1.9. Se φ é um automorfismo de ordem prima p de um anel de Lie L então, para qualquer s, temos

$$\gamma_{f(p,s)+1}(pL) \leq {}_{id}\langle C_L(\varphi)\rangle + L^{(s)},$$

onde $f(p,s) = \dfrac{(p-1)^s - 1}{p-2}$.

Lembre-se que E' é cíclico de ordem p. Escolha um gerador φ de E'. Para cada $i = 0, \ldots, p-1$ denotamos por L_i o φ-autoespaço para o autovalor ω^i, ou seja $L_i = \{l \in L | l^\varphi = \omega^i l\}$. Temos (ver [17, pg.88])

$$L = \bigoplus_{i=0}^{p-1} L_i \ \text{ e } \ [L_i, L_j] \subseteq L_{i+j(\text{mod } p)}.$$

Observe que $L_0 = C_L(\varphi)$.

Teorema 3.1.10. A álgebra de Lie $\gamma_n(L)$ é nilpotente de classe (c,n,p)-limitada.

Demonstração. Denotaremos por H a subálgebra $\gamma_n(L)$. Note que $H = \bigoplus_{i=0}^{p-1} H_i$ onde $H \cap L_i$. Em particular, H_0 é a subálgebra $C_{\gamma_n(L)}(\varphi)$ de L_0. Pelo corolário 3.1.7 H é solúvel de comprimento derivado (c,n,p) limitado. Agora argumentamos por indução sobre o comprimento derivado de H. Se H é abeliano, não há nada a provar. Assuma que H é metabeliano. Neste caso $[x,y,z] = [x,z,y]$ para cada $x \in [H,H]$ e $y,z \in H$. Para cada $i = 0, ..., p-1$, denotamos $[H, H] \cap H_i$ por H_i'. Note que em geral $H_0' \neq [H_0, H_0]$. Coloque $t = max\{(c-1)(p+1) + p, s\}$, onde s é como em lema 3.1.6. Escolha dois índices $u, v \in \{0, \ldots, p-1\}$ e considere o comutador $[H_u', \underbrace{H_v, \ldots, H_v}_{t}]$. É suficiente mostrar que o comutador é zero.

Primeiro suponha que $u = 0$. Por Lema 3.1.3 temos que $H_0' = \sum_i C_{H_0'}(B_i)$. Por lema 3.1.1 para cada B_i temos que $H = \sum_{b \in B_i} N_b$ onde cada N_b é uma subálgebra de $\gamma_n(C_L(b))$. Obviamente, $C_{H_0'}(B_i) \leq C_L(b)$ e como $\gamma_n(C_L(b))$ é nilpotente de classe no máximo c, temos que $[C_{H_0'}(B_i), \underbrace{N_b, \ldots, N_b}_{c+1}] = 0$ e então $[C_{H_0'}(B_i), \underbrace{H, \ldots, H}_{t}] = 0$. Na verdade, usaremos que $[C_{H_0'}(B_i), \underbrace{H, \ldots, H}_{t-(p-1)}] = 0$.

Agora suponha que $u \neq 0$. Se $v = 0$, então usamos Lema 3.1.6. Se $v \neq 0$, encontramos um inteiro positivo $k < p$ tal que $u + kv = 0 \ (mod\ p)$. Assim, temos $[H_u', \underbrace{H_v, \ldots, H_v}_{t}] \leq [H_0', \underbrace{H_v, \ldots, H_v}_{t-k}]$. No parágrafo anterior foi mostrado que o último comutador é 0.

Agora suponha que o comprimento derivado de H seja pelo menos 3. Por hipótese de indução $[H, H]$ é nilpotente da classe (c, n, p)-limitada. Já sabemos que o quociente $H/[[H, H], [H, H]]$ é nilpotente da classe (c, n, p)-limitada. O análogo da álgebra de Lie do teorema de Hall [12] agora mostra que H tem classe de nilpotência limitada, como desejado. $\square$

3.2 Resultados sobre Grupos

No capítulo anterior apresentamos a definição de grupos γ-A-Especial e algumas propriedades inerentes a estes.

O próximo resultado em γ-A-subgrupos especiais será útil.

Lema 3.2.1. Seja A um p-grupo abeliano elementar de ordem p^k com $k \geq 2$ agindo sobre um finito p'-grupo G e $A_1, \ldots, A_s$ os subgrupos maximais de A. Seja $r \geq 2$ e Q um q-subgrupo de Sylow A-invariante $\gamma_{r-1}(G)$. Sejam $L_1, \ldots, L_t$ todos os subgrupos da forma $\gamma_j(Q) \cap H$ onde H é algum γ-A-subgrupo especial de G de grau $r + j - 2$. Então $\gamma_j(Q) = \langle L_1, \ldots, L_t \rangle$.

Demonstração. Se $j = 1$, então $Q = \langle Q_1, \ldots, Q_t \rangle$ onde $Q_1, \ldots, Q_t$ são subgrupos da forma $Q \cap H$ onde H é algum γ-A-subgrupo especial de G de grau $r-1$ pela proposição 2.1.2(vi). Assuma que $j \geq 2$ e use indução em j. Assim, $\gamma_j(Q)$ é gerado por subgrupos $K_1, \ldots, K_s$ da forma $\gamma_j(Q) \cap H$ onde H é algum γ-A-especial subgrupo de G de grau $r + j - 2$.

Definir $M = \langle [K_i, Q_a] \mid 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq a \leq t \rangle$. É claro que cada um dos subgrupos $[K_i, Q_a]$ é A-invariante. Assim, pela proposição 2.1.2cada subgrupo $[K_i, Q_a]$ é gerado por subgrupos da forma $[K_i, Q_a] \cap C_Q(A_l)$ onde A_l é algum subgrupo máximo de A. Observe que cada subgrupo $[K_i, Q_a] \cap C_Q(A_l)$ está contido em um subgrupo especial γ-A de G de grau $r + j - 1$. Portanto M é gerado por subgrupos da forma $M \cap D$, onde D varia através do conjunto de todos os γ-A-subgrupos especiais de G de grau $r + j - 1$. Se $M^* = M \cap D^*$ é tal subgrupo, afirmamos que $[M^*, Q_a] \leq M$ para cada $1 \leq a \leq t$. De fato, pela Proposição 2.1.2(1) sabemos que existe algum γ-A-subgrupo especial H de G de grau $r + j - 2$ tal que $D^* \leq H$. Isso implica que M^* está contido em algum K_i e então temos $[M^*, Q_a] \leq [K_i, Q_a] \leq M$, conforme desejado. Portanto M é normal em Q e concluímos que $M = \gamma_j(Q)$. □

Lema 3.2.2. Sejam $B_1, \ldots, B_l$ todos os subgrupos abelianos elementares de ordem p^{n+1} de E e V um subgrupo E-invariante de $C_G(E')$. Então $V = \langle C_V(B_i) \mid 1 \leq i \leq l \rangle$

Demonstração. Denote por $\overline{E}$ o quociente E/E', que é um grupo abeliano elementar de ordem p^{2n}. Observe que V admite uma ação de $\overline{E}$ e então $V = \langle C_V(\overline{Q_1}), \ldots, C_V(\overline{Q_l}) \rangle$ onde $\overline{Q_1}, \ldots, \overline{Q_l}$ são os subgrupos máximos de $\overline{E}$. Uma forma alternativa de expressar isso é dizer que $V = \langle C_V(Q_1), \ldots, C_V(Q_l) \rangle$ onde $Q_1, \ldots, Q_l$ são os subgrupos máximos de E desde $E' \leq Q_i$ para qualquer $i \leq l$. Agora, para cada Q_i, escolhemos um subgrupo abeliano elementar $B_i \leq Q_i$ (ver teorema 1.4.5) de ordem p^{n+1}. Assim, temos $V = \langle C_V(B_i) \mid 1 \leq i \leq l \rangle$, pois $C_V(Q_i) \leq C_V(B_i)$. □

Teorema 3.0.2 Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E age por automorfismos sobre um p'-grupo finito G.

i) Se $\gamma_n(C_G(a))$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então $\gamma_n(G)$ é nilpotente.

ii) Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq n$, o d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é nilpotente.

Demonstração. Suponha que o Teorema(i) seja falso e seja G um contra-exemplo de ordem mínima. Como $\gamma_n(C_G(a))$ é nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, segue-se que $C_G(a)$ é solúvel para qualquer $a \in E^{\#}$. Portanto, o resultado de Glauberman sobre funtores sinalizadores solúveis [10] implica que G é solúvel. Assuma que G tem dois subgrupos normais E-invariantes minimais distintos V_1 e V_2. Por minimalidade, a imagem de $\gamma_n(G)$ em G/V_1 e em G/V_2 é nilpotente. Assim a imagem de $\gamma_n(G)$ deve ser nilpotente no quociente $G/V_1 \cap V_2$. Isso é uma contradição já que $V_1 \cap V_2 = 1$.

Portanto G tem um único subgrupo normal E-invariante minimal V. Como G é solúvel, V é um q-grupo abeliano elementar para algum primo q. Novamente o quociente $\gamma_n(G)/V$ é nilpotente. Como $\gamma_n(G)$ não é nilpotente, não é um q-grupo. Assim, $\gamma_n(G)$ contém um E-invariante r-subgrupo de Sylow R para algum $r \neq q$.

Sejam $B_1, \ldots, B_l$ os subgrupos abelianos elementares de E de ordem p^{n+1}. Pelo Lema 3.2.2, temos que $C_V(E') = \prod_i V_i$, onde $V_i = C_V(B_i)$ para $i \leq l$. Por outro lado, a Proposição 2.1.2(vi) nos diz que para cada B_i o subgrupo R é gerado por suas interseções com γ-B_i-subgrupos especiais de grau n. Assim $R = \langle R_1, \ldots, R_t \rangle$, onde $R_j = R \cap H_j$ para algum γ-B_i-subgrupo especial H_j de G de grau n. Também pela Proposição 2.1.2(iv) temos que $H_j \leq \gamma_n(C_G(B))$ para algum subgrupo B tal que $|B_i/B| = p^n$. Em particular, H_j está contido em $F(C_G(a))$ para algum $a \in B_i^{\#}$. Como V_i está contido em um subgrupo abeliano normal de G e também em $C_G(a)$, segue-se que $\langle V_i, R_j \rangle$ é nilpotente. Assim, $[V_i, R_j] = 1$ para qualquer i, j. Portanto, $[C_V(E'), R] = 1$ e por minimalidade temos que $C_V(E') = 1$.

O fato de $\gamma_n(G)/V$ ser nilpotente implica que também $C_G(V) \cap \gamma_n(G)$ é nilpotente. Portanto, todo elemento q' do $C_G(V) \cap \gamma_n(G)$ pertence a $O_{q'}(G)$. Por outro lado, $O_{q'}(G)$ é trivial, pois V é o único subgrupo normal mínimo E-invariante de G. Em particular, não há nenhum q'-elemento em R agindo trivialmente em V.

Como mencionado acima, cada R_j pertence a $F(C_G(a))$ por algum $a \in E^{\#}$. Observe que podemos escolher algum $R_j \leq F(C_G(a))$ tal que $a \in E \setminus E'$. De fato, pelo Lema 3.1.3 mesmo o subgrupo $C_G(E')$ é gerado por pontos fixos de elementos de $E \setminus E'$. Seja R_j um subgrupo de $F(C_G(a))$ com $a \in E \setminus E'$. Seja $c \in R_j$. Assim, c centraliza $C_V(a)$ mas c age de forma não trivial sobre V já que $O_{q'}(G) = 1$. Nosso objetivo é uma contradição decorrente dessas suposições. Pelo Lema 3.2.1 podemos escolher $c \in Z(R)$. Consideramos V como um módulo $\mathbb{F}_p RE$ e estendemos o corpo para um corpo finito k que é um corpo de escalares para RE. Obtemos agora um módulo kRE $\widetilde{V} = V \otimes_{\mathbb{F}_p} k$. Muitas das propriedades mencionadas acima de V são herdadas por $\widetilde{V}$. Em particular, $C_{\widetilde{V}}(E') = 0$ e c centraliza $C_{\widetilde{V}}(a)$.

Considere uma série não refinável de kRE-submódulos

$$\widetilde{V} = V_1 > V_2 > \cdots V_n > V_{n+1} = 0.$$

Seja W um dos fatores dessa série, W é um kRE módulo irredutível não trivial. Se $c \in R$ age trivialmente em todo W, então c age trivialmente em $\widetilde{V}$, pois a ordem de R é coprima com a característica p do corpo k. Portanto, sem perda de generalidade podemos assumir que c não centraliza W.

Pelo teorema de Clifford (ver teorema 1.5.10), W é a soma direta

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t.$$

de componentes de Wedderburn W_i em relação a R, que são kR-módulos transitivamente permutados por E. Além disso, em cada um dos W_i o centro de R é representado pela multiplicação escalar.

Denotamos por Ω o conjunto de componentes de Wedderburn $\{W_1, \dots, W_t\}$. Como c não centraliza W podemos escolher um componente Wedderburn W_1 no qual c age de forma não trivial. Assim, para obter uma contradição basta provar que c age trivialmente sobre tal W_1.

Lema 3.2.3. O elemento c age trivialmente sobre a soma dos componentes em qualquer $\langle a \rangle$-órbita em Ω.

Demonstração. Considere a $\langle a \rangle$-órbita $\{W_j, W_j^a, \dots, W_j^{a^{p-1}}\}$. O elemento c deixa invariantes todos os componentes $W_j^{a^i}$ desde $c \in R$. Por outro lado, c fixa cada elemento da forma $w_j + w_j^a + \cdots + w_j^{a^{q-1}}$ que pertence a $C_W(a)$. Portanto c age trivialmente em todos os componentes $W_j^{a^i}$. □

Seja $A = \langle E', a \rangle$. Observe que $|A| = p^2$ e como $C_V(E') = 1$ o lema acima implica que $W_1^x = W_1$ para qualquer $x \in A^\#$. Como k é um corpo de escalares para RE temos que $Z(R)$ age por multiplicação escalar em W_1 e como c age trivialmente em $C_{W_1}(a)$, obteremos uma contradição provando que $C_{W_1}(a) \neq 0$.

Lembre-se de que E não é abeliano e $E' = Z(E)$. Os centralizadores $C_G(x)$ tais que $x \in A \setminus E'$ são permutados por E já que $C_G(x)^a = C_G(x^a)$ e $x^a = x[x, a]$. Então $C_{W_1}(a) \neq 0$ para qualquer $a \in A \setminus E'$ desde $W_1 = \langle C_{W_1}(x) \mid x \in A \rangle$ e $C_V(E') = 1$. Isso significa que c age trivialmente em W_1, o que é uma contradição e então $\gamma_n(G)$ é nilpotente. A prova está completa. □

Capítulo 4

Centralizadores Supersolúveis

Assumindo que A é um p-grupo agindo por automorfismo em um p'-grupo G. Nesse capítulo assuma que os centralizadores, $C_G(a)$ para $a \in A^{\#}$, são supersolúveis, mostraremos alguns resultados sobre a estrutura de G.

4.1 Ação de Grupos Abelianos Elementares

Em [23] os autores também mostraram que se A um p-grupo abeliano elementar de ordem pelo menos p^3 agindo sobre um p'-grupo G, então os centralizadores de automorfismos coprimos têm forte influência na estrutura G. Como podemos ver nos próximos dois resultados.

Teorema 4.1.1 ([23])**.** Seja p um primo e A um p-grupo abeliano elementar de ordem pelo menos p^3. Suponha que A age por automorfismos sobre um grupo finito p' G. Suponha que $C_G(a)$ satisfaça a propriedade da torre Sylow para qualquer $a \in A^{\#}$, então G satisfaz a propriedade da torre Sylow.

Teorema 4.1.2 ([23])**.** Seja p um primo e A um p-grupo abeliano elementar de ordem pelo menos p^3. Suponha que A age por automorfismo em um p'-grupo finito G e n seja um inteiro positivo. Se $C_G(a)$ é abeliano do expoente dividindo n para qualquer $a \in A^{\#}$, então G é abeliano do expoente dividindo n.

Em [23] e [24] os autores estudaram propriedades sobre supersolubilidade, altura de Fitting e p-nilpotência/mata-p-nilpotência. Nesses trabalhos temos um p-grupo A abeliano elementar agindo em um p'-grupo G, para supersolubilidade temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.3 ([23]). Seja A um p-grupo abeliano elementar de ordem pelo menos p^4 agindo em um p'-grupo G. Suponha que $C_G(a)$ seja supersolúvel para cada $a \in A^\#$. Então G é supersolúvel.

No mesmo artigo, os autores mostram um exemplo no qual o teorema acima não vale para p-grupos abelianos elementares de ordem p^3.

Exemplo 4.1.4 ([23]). Sejam r, q, s e p primos distintos tais que:

$$p|q-1 \quad p,q|s-1 \quad p,q,s|r-1$$

A obtenção de tais primos é feita usando o teorema de Dirichlet (ver [8]) sobre primos na progressão aritmética. Sejam α_1, α_2 e α_3 p-ésimas raízes primitiva da unidade sobre os corpos $\mathbf{F}_q, \mathbf{F}_s$ e $\mathbf{F}_r$, respectivamente.

Escreva $U_2 = W_1 \rtimes \langle \phi_1 \rangle$, com $W_1 = \langle x \rangle$, $o(x) = q$, $o(\phi_1) = p$ e $x^{\phi_1} = x^{\alpha_1}$ e considere o produto entrelaçado regular $V_2 = C_s \wr U_2$, com C_s o grupo ciclico de ordem s. Seja W_2 o s-subgrupo de sylow de V_2. Defina ϕ_2 um automorfismo de V_2 por:

$$wu \mapsto w^{\alpha_2}u \ \ para\ w \in W_2, u \in U_2.$$

Simirlarmente , seja $U_3 = W_2 \rtimes \langle \phi_2 \rangle$ e $V_3 = C_r \wr U_3$. Considere W_3 o r-subgrupo de sylow normal de V_3 e ϕ_3 um automorfismo de V_3 dado por:

$$wu \mapsto w^{\alpha_3}u \ \ para\ w \in W_3, u \in U_3.$$

Seja $H = V_3 \rtimes \langle \phi_3 \rangle = W_3W_2W_1\langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \rangle$.

Coloque $G = W_3W_2W_1$ e $A = \phi_1\phi_2\phi_3$. Observe que G é um p'-grupo e A é abeliano elementar de ordem p^3. A ação de A sobre G é definida por conjugação em H. Para cada $a = \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \in A^\#$ com $i, j, k \in \{0, \cdots, p-1\}$. Sabemos em [[11],8.2.11] que se $G = XY$, onde X e Y são subgrupos A-invariantes, então $C_G(A) = C_X(A)C_Y(A)$.

$$C_G(a) = \begin{cases} C_{W_3}(a)C_{W_2}(a) \ se\ i \neq 0 \\ C_{W_3}(a)W_1 \ se\ i = 0\ e\ j \neq 0 \\ W_2W_1 \ se\ i = j = 0\ e\ k \neq 0 \end{cases}$$

Pelo teorema 1.3.8 vemos que o $C_G(a)$ é supersolúvel e também podemos ver pela construção que G' não é nilpotente. Portanto, G não é supersolúvel.

Ainda para grupos abelianos elementares, os autores mostraram resultados com relação a p-nilpotência e meta-p-nilpotência. Antes de enunciar os resultados de p-nilpotência e meta-p-nilpotência recordaremos a definições de p-nilpotência.

Definição 4.1.5 (p-Nilpotência)**.** Dizemos que G é p-nilpotente se existe algum subgrupo normal K de G tal que $KP = G$ e $K \cap P = \{e\}$, onde P é um p-subgrupo de Sylow de G. Um subgrupo K nestas condições é dito um p-complemento normal em G e satisfaz $|K| = |G : P| = |G|/|P|$.

Lembre-se um grupo finito G e p um número primo. Dizemos que G é um grupo p-solúvel se G tem uma série subnormal onde todos os quocientes são p-grupos ou têm ordens relativamente primos com p.

Teorema 4.1.6 ([24])**.** Seja A um grupo abeliano elementar de ordem p^2 agindo coprimamente em um grupo r-solúvel finito G. Se $C_G(a)$ é r-nilpotente para cada elemento não trivial $a \in A$, então G é meta-p-nilpotente, isto é, p-nilpotente-por-p-nilpotente.

Teorema 4.1.7 ([23])**.** Seja A um grupo abeliano elementar de ordem p^3 agindo coprimamente em um grupo finito G. Se $C_G(a)$ é r-nilpotente para cada elemento não trivial $a \in A$, então G é p-nilpotente.

4.2 Ação de Grupos Extra-Especiais

O objetivo desta seção é mostrar o seguinte resultado que generaliza o resultado de supersolubilidade mostrado em [23]:

Teorema 4.2.1. Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^5. Suponha que E aja por automorfismo em um p'-grupo finito G. Se $C_G(a)$ é supersolúvel para qualquer $a \in E^\#$, então G é supersolúvel.

Inicialmente apresentaremos alguns resultados conhecidos da teoria de anéis e módulos, cujas algumas definições básicas são apresentadas em 1.5 e suas demonstrações podem ser encontradas em [15] e [6].

Lema 4.2.2. Seja $\mathbb{F}$ um corpo, G um grupo e V um $\mathbb{F}[G]$-módulo. Suponha que $H \leq G$, $char(\mathbb{F})$ não divida $|G : H|$, e V é um $\mathbb{F}[H]$ módulo completamente redutível. Então V é um $\mathbb{F}[G]$ módulo completamente redutível.

Teorema 4.2.3. (Gaschutz) Se G é um grupo solúvel. Então

$$F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$$

é um módulo $G/\Phi(G)$ completamente redutível e fiel.

Teorema 4.2.4. Seja G um grupo solúvel. Então $C_G(F(G)) \leq F(G)$.

Nesta seção P é um r-subgrupo de Sylow de G com $r \neq p$ em que r é o maior primo dividindo $|G|$ e para as provas dos seguintes Lemas considere G um contra-exemplo de ordem minimal do Teorema 4.2.1.

Lema 4.2.5. Suponha que G seja um contra-exemplo minimal para o Teorema 4.2.1. Então $\Phi(G) = 1$ e $P = F(G)$ é o único subgrupo normal minimal E-invariante de G.

Demonstração. Se $\Phi(G) \neq 1$ então $G/\Phi(G)$ é supersolúvel pela minimalidade de G. Portanto, G é supersolúvel, o que é uma contradição. Seja

$$\mathfrak{X} = \{1 < N \trianglelefteq G | N^E = N\}.$$

Suponha que existam elementos minimais $N_1, N_2 \in \mathfrak{X}$ tais que $N_1 \cap N_2 = 1$. Pela minimalidade de G, temos que G/N_1 e G/N_2 são supersolúveis. Então

$$\begin{aligned} \psi : & G \to G/N_1 \times G/N_2 \\ & g \to (gN_1, gN_2) \end{aligned}$$

define um homomorfismo e como $N_1 \cap N_2 = 1$ então ψ é injetivo. Assim, G é isomorfo a $G/N_1 \times G/N_2$, então G é supersolúvel, contrariando a escolha de G. Portanto $\mathfrak{X}$ tem um único subgrupo minimal, e $F(G) = P$ é um r-grupo pois $P \leq F(G)$.

Como $\Phi(P) \leq \Phi(G) = 1$, P é um p-grupo abeliano elementar e G é solúvel temos que P pode ser visto como um $\mathbb{F}_p[EG]$-módulo pelo teorema de Gaschutz 4.2.3, $P = F(G)$ é completamente redutível $\mathbb{F}_p[G]$-módulo. Como $(|E|, |G|) = 1$, segue do lema 4.2.2 que P é um módulo $\mathbb{F}_p[EG]$ completamente redutível .

No entanto $P \in \mathfrak{X}$ e como $\mathfrak{X}$ tem um único subgrupo minimal, P é um módulo $\mathbb{F}_p[EG]$mod irredutível. Isto é, P é o único subgrupo normal minimal E-invariante de G. □

Lema 4.2.6. Seja H o r'-subgrupo Hall E-invariante de G. Então todo subgrupo próprio E-invariante de H é abeliano de expoente dividindo $p - 1$.

Demonstração. Seja X um subgrupo próprio E-invariante de H. Note que $Y = PX$ é um subgrupo próprio E-invariante de G e P um subgrupo normal de Y. Pela minimalidade de G, Y é supersolúvel. Segue do Teorema 1.3.8 que $N_Y(P)/PC_Y(P)$ é abeliano de expoente dividindo $r - 1$ e

$$Y/PC_Y(P) = N_Y(P)/PC_Y(P). \tag{4.1}$$

Como $P = F(G)$ pelo Lema acima temos $C_Y(P) \leq C_G(P) \leq P$ pelo teorema 4.2.4 e como P é abeliano $P = C_Y(P)$. Portanto, temos que $X \cong Y/P$ é abeliano de expoente dividindo $r - 1$. □

Teorema 4.2.1 *Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^5. Suponha que E age por automorfismo em um p'-grupo finito G. Se $C_G(a)$ é supersolúvel para qualquer $a \in E^\#$, então G é supersolúvel.*

Demonstração. Suponha que o Teorema 4.2.1 seja falso. Seja G um contra-exemplo de ordem mínima. Pela minimalidade de G, todo subgrupo E-invariante próprio de G e todos os grupos quocientes G/N não-triviais E-invariante de G são supersolúveis.

Seja r o maior primo dividindo $|G|$ e seja P um r-subgrupo de Sylow de G com $r \neq p$. Sejam B_i os subgrupos abelianos elementares de ordem p^3 do p-grupo E. Pela a hipótese $C_G(a)$ é supersolúvel para cada $a \in B_i$ e portanto $C_G(a)$ satisfaz a propriedade da torre sylow de supersolúvel então por teorema 4.1.1 G satisfaz a propriedade da torre sylow de supersolúvel, então $P \trianglelefteq G$ e $P \leq F(G)$.

Seja $B = C_E(H)$, observe que B é o núcleo da ação E em H então B é o subgrupo normal de E. Considere os seguintes casos para B: B é trivial, B é cíclico e B é não-cíclico.

Se B não for cíclico. Para cada $b \in B^\#$, temos $C_G(b) = C_P(b)H$ desde $H \leq C_G(b)$ e $C_P(b) \trianglelefteq C_G(b)$. Isso implica que $C_P(b)$ é normalizado por H. Observe que P é abeliano e temos que $C_P(b) \trianglelefteq G$ e ainda $C_P(b)$ é um subgrupo normal E-invariante de G. Pelo Lema 4.2.5, P é o subgrupo E-invariante mínimal de G. Assim $C_P(b) = 1$ ou $C_P(b) = P$ para cada $b \in B^\#$. Segue-se do fato de que B não é cíclico que $C_P(b) \neq 1$ então $C_P(b_1) = P$ para algum $b_1 \in B^\#$. Isso implica que $C_G(b_1) = HC_P(b_1) \leq C_G(b_1)$ é supersolúvel, o que é uma contradição. Portanto $|B| \leq p$.

Para cada $c \in E \setminus B$, temos que $C_H(c)$ é um subgrupo próprio E-invariante de H. Pelo Lema 4.2.6, $C_H(c)$ é abeliano de expoente dividindo $r-1$. Considerando a ação fiel de E/B sobre H, podemos ver que $C_H(cB) = C_H(c)$ é abeliano de expoente dividindo $r - 1$ para cada $cB \in (E/B)^\#$. O fato de $B \trianglelefteq E$ temos $E' \leq B$ e conseqüentemente $|E/B| \geq p^4$ é abeliano, pelo Corolário 4.1.2 H é abeliano de expoente dividindo $r - 1$. Então

$$H = G/P \cong N_G(P)/PC_G(P).$$

Pelo Lema 1.3.8 G é supersolúvel, o que é uma contadição.

Se B é cíclico então $B \subseteq Z(E)$. Considerando a ação fiel de E/B sobre H, podemos ver que $C_H(cB) = C_H(c)$ é abeliano de expoente dividindo $r - 1$ para cada $cB \in (E/B)^\#$.

O fato de $B \triangleleft E$ temos $E' \leq B$ e conseqüentemente $|E/B| = p^4$ é abeliano, pelo Teorema 4.1.2 H é abeliano de expoente dividindo $r-1$. Agora segue facilmente do Teorema 1.3.8 que G é supersolúvel, contrariando a escolha de G.

Se B é trivial, escolha os subgrupos abelianos elementares B_i de ordem p^3. Pelo Lema 4.2.6 é abeliano de expoente dividindo $r-1$. Como $|B_i| = p^3$ por Teorema 4.1.2 que H é abeliano de expoente dividindo $r-1$. Então novamente pelo Teorema 1.3.8 G é supersolúvel, o que é uma contradição.

Estas contradições completam a prova. □

Capítulo 5

Considerações Finais

Em toda a tese vemos que as propriedades dos centralizadores possuem forte influência na estrutura do grupo. No capítulo 2, o grupo que age é abeliano elementar, os autores mostraram a limitação da classe de nilpotência dos termos da série central inferior e série derivada do grupo em termos de certos parâmetros (ver 2.0.4). Entretanto, no capítulo 3, o grupo que está agindo não é necessariamente abeliano, nesse contexto provou-se apenas a nilpotência dos termos da série central inferior e série derivada do grupo (ver 3.0.1) e conjecturamos o seguinte:

Conjectura Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^{2n+1}. Suponha que E age por automorfismos sobre um p'-grupo finito G.

i) Se $\gamma_n(C_G(a))$ é nilpotente de classe c para qualquer $a \in E^{\#}$, então a classe de nilpotência do $\gamma_n(G)$ é (c, n, p)-limitada.

ii) Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq n$, o d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente de classe c para qualquer $a \in E^{\#}$, então a classe de nilpotência do d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é (c, n, p)-limitada.

Na literatura existem muitos outros trabalhos sobre ação de grupos abelianos elementares, em específico apresentaremos alguns resultados para grupos profinitos.

Teorema 5.0.1. [2] Seja q um primo, A um grupo abeliano elementar de ordem q^3. Suponha que A aja coprimamente como um grupo de automorfismos em um grupo profinito G de tal maneira que $C_G(a)'$ é periódico para cada $a \in A^{\#}$. Então G' é localmente finito.

Teorema 5.0.2. [1] Seja q um primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^r com $r \geq 2$ agindo sobre grupo profinito G. Os seguintes resultados são provados.

1. Se todos os elementos em $\gamma_{r-1}(C_G(a))$ são Engel em G para qualquer $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{r-1}(G)$ é localmente nilpotente.

2. Se, para algum inteiro d tal que $2^d \leq r-1$, todos os elementos no d-ésimo grupo derivado do $C_G(a)$ são Engel em G para qualquer $a \in A^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é localmente nilpotente.

Teorema 5.0.3. [5] Seja q um primo e A um grupo abeliano elementar de ordem p^3. Suponha que A age coprimamente em um grupo profinito G e assuma que $C_G(a)$ é localmente nilpotente para cada $a \in A^{\#}$. Então o grupo G é localmente nilpotente.

Em geral, além da nilpotência e supersolubilidade podemos estudar outras propriedades dos centralizadores. Nesse sentido, outros dois resultados em preparação são os apresentados abaixo.

Teorema 5.0.4 (trabalho em construção). Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de expoente p e ordem p^3. Suponha que E age por automorfismo em um p'-grupo finito G. Se $C_G(a)$ é q-nilpotente para qualquer $a \in E^{\#}$, então G é q-nilpotente.

Lembre-se de que G é dito q-nilpotente se G tiver um q-subgrupo de Hall normal. Assim baseado em alguns resultados clássicos da teoria de grupos profinitos podemos provar um resultado similar ao apresentado em [5] para grupos extra-especiais agindo coprimamente em um grupo profinito.

Teorema 5.0.5 (trabalho em construção). Seja p um primo e E um p-grupo extra-especial de ordem p^3. Suponha que E age coprimamente em um grupo profinito G e assuma que $C_G(a)$ é localmente nilpotente para cada $a \in A^{\#}$. Então o grupo G é localmente nilpotente.

5.1 GAP

O GAP é um sistema de álgebra discreta computacional, com ênfase particular na Teoria Computacional de Grupos. Para instalar o GAP basta acessar o link: https://www.gap-system.org/Download/.

No sentido de pontos fixos foi desenvolvido duas rotinas para calcular pontos fixos com o grupo que está agindo sendo o grupo de $Aut(G)$.

```
FixPointsOfG := function(G)
 local aut, i, acc;
```

```
aut := Elements(AutomorphismGroup(G));;
acc := [];;
for i in [1..Size(aut)] do
    Add(acc, Filtered(G,x -> x^aut[i] = x));
od;
return acc;
end;
```

A próxima rotina especifica o automorfismo que age.

```
f := function(G)
local aut, i, l, acc;
aut := Elements(AutomorphismGroup(G));;
l := [];;
acc := [];;
for i in [1..Size(aut)] do
l := Filtered(G,x->x^aut[i]=x);
Add(acc,i);
Add(acc,l);
od;
return acc;
end;
```

Bibliografia

[1] Acciarri, C. and da Silveira, D. S. (2018). Profinite groups and centralizers of coprime automorphisms whose elements are engel. *Journal of Group Theory*, 21(3):485–509.

[2] Acciarri, C., Lima, A., and Shumyatsky, P. (2011). Derived subgroups of fixed points in profinite groups. *Glasgow Mathematical Journal*, 54.

[3] Acciarri, C. and Shumyatsky, P. (2011a). Centralizers of coprime automorphisms of finite groups. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 193:317–324.

[4] Acciarri, C. and Shumyatsky, P. (2011b). Fixed points of coprime operator groups. *Journal of Algebra*, 342(1):161–174.

[5] Acciarri, C. and Shumyatsky, P. (2016). Profinite groups and the fixed points of coprime automorphisms. *Journal of Algebra*, 452:188–195.

[6] Burns, R., Kargapolov, M., and Merzljakov, J. (2011). *Fundamentals of the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[7] de Melo, E. (2019). Nilpotent residual and fitting subgroup of fixed points in finite groups. *Journal of Group Theory*, 22(6):1059–1068.

[8] Dirichlet, P. G. L. (2008). There are infinitely many prime numbers in all arithmetic progressions with first term and difference coprime. *arXiv: History and Overview*.

[9] Doerk, K. and Hawkes, T. (2011). *Finite Soluble Groups*. De Gruyter Expositions in Mathematics. De Gruyter.

[10] Glauberman, G. (1976). On Solvable Signalizer Functors in Finite Groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s3-33(1):1–27.

[11] Gorenstein, D. (1967). *Finite groups*. Harper's series in modern mathematics. Harper & Row.

[12] Hall, P. (1958). Some sufficient conditions for a group to be nilpotent. *Illinois Journal of Mathematics*, 2(4B):787 – 801.

[13] Higman, G. (1957). Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-32(3):321–334.

[14] Huppert, B. and Blackburn, N. (1967). *Endliche Gruppen: 1*. Finite Groups. Springer-Verlag.

[15] Isaacs, I. (2008). *Finite Group Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.

[16] Khukhro, E. I. (1998). *p-Automorphisms of Finite p-Groups*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press.

[17] Khukhro, E. I. (2011). *Nilpotent Groups and their Automorphisms*. De Gruyter.

[18] Khukhro, E. I. and Shumyatskii, P. V. (1996). Fixed points of automorphisms of lie rings and locally finite groups. *Algebra and Logic*, 34:395–405.

[19] Kreknin, V. (2021). Solvability of lie algebras with a regular automorphism of finite period. *Soviet Mathematics. Doklady*, 4.

[20] Kurzweil, H. and Stellmacher, B. (2003). *The Theory of Finite Groups: An Introduction*. Universitext. Springer New York.

[21] Melo, E. and Shumyatsky, P. (2016). Finite groups and their coprime automorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 145:1.

[22] Melo, E. D., Gomes, M. E., and Lima, I. (2023). Extra-special p-groups as groups of automorphisms. *Communications in Algebra*, 51(2):475–484.

[23] Meng, H. and Guo, X. (2018). Coprime actions with supersolvable fixed-point groups. *Journal of Group Theory*, 21(3):475–484.

[24] Meng, H. and Guo, X. (2020). Coprime actions with p-nilpotent centralizers. *Journal of Algebra*, 557:37–46.

[25] Pinnock, C. J. E. (2000). Supersolubility and some characterizations of finite supersoluble groups, 2nd edition.

[26] Robinson, D. (1996). *A Course in the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[27] Scott, W. and Scott, W. (1987). *Group Theory*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications.

[28] Shumyatsky, P. (2001). Finite groups and the fixed points of coprime automorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(12):3479–3484.

[29] Thompson, J. (1959). Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 45(4):578–581.

[30] Ward, J. (1971). On finite groups admitting automorphisms with nilpotent fixed-point group. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 5(2):281–282.

[31] Weinstein, M. (1982). Between nilpotent and solvable. Passaic, New Jersey (USA): Polygonal Publishing House. VI, 231 p. $ 22.00 (1982).