Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

MARCELO OLIVEIRA RIBEIRO

Brasília/DF

2023

MARCELO OLIVEIRA RIBEIRO

Resultados Sobre a Transcendência de Potências Relacionadas a U-números e T-números

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira

Brasília/DF

2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Resultados Sobre a Transcendência de Potências Relacionadas a U-números e T-números

Marcelo Oliveira Ribeiro *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 25 de abril de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira - MAT/UnB (Orientador)

Hemar T. Godinho

Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho – MAT/UnB (Membro)

Ana Paula de A. Chaves

Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves – UFG (Membro)

Victor Neumann

Prof. Dr. Victor Gonzalo Lopez Neumann – UFU (Membro)

À minha mãe Iracema, à minha esposa Mary Jane e à minha irmã Mariane.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar, pois acredito plenamente que ele é autor da minha existência.

Aos meus pais, em especial à minha mãe, cuja contribuição para minha formação humana e profissional foi (e ainda é) imensurável. Agradeço à minha irmã, por sempre acreditar no meu potencial.

Agradeço à minha esposa pelo incondicional apoio, pela paciência de tantos dias sem a minha presença, por estar ao meu lado em cada etapa desse sonho que agora se realiza. Agradeço-a também por crer que aqui podia chegar, quando eu mesmo diversas vezes quis me convencer do contrário.

Agradeço aos grandes amigos que, inopinadamente, fiz durante o doutorado: Luiz, Jhon, Genildo e Ricardo. Sem eles a trajetória teria sido mais difícil. Guardarei sempre em minha memória os bons momentos que tivemos.

Há uma lista de professores que gostaria de agradecer, são eles: Axel Peter Winterhalder, por incansáveis vezes tirar minhas dúvidas e por me estimular a fazer mestrado e doutorado. José Antônio Marão, pela excelente orientação e conselhos durante o mestrado. Sandra Imaculada, por ter me projetado para a vida acadêmica, além de ter me proporcionado inúmeras e enriquecedoras conversas. Guram Donadze, pelos excelentes cursos ministrados durante o doutorado, que ajudaram a ampliar meus horizontes. Michel Waldschmidt, pela paciência em responder meus e-mails. Diego Marques, por ter me aceitado como aluno de doutorado, além de ter oferecido todo o suporte para que eu chegasse até o fim. Agradeço aqueles que não foram citados aqui, mas que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro, que iniciou-se ainda na graduação, enquanto eu era aluno de iniciação científica, e perdurou até o doutorado. Agradeço também à Fundação Humboldt que, através de um grant do renomado professor Harald Helfgott, proporcionou-me participar de um evento cuja importância em minha trajetória acadêmica é indescritível.

Sinto-me verdadeiramente afortunado por ter conseguido alcançar esse obje-

tivo. Mais feliz ainda é saber que todos os supracitados estiveram ao meu lado e tornaram o caminho menos tortuoso. Muito obrigado a todos!

"Stay hungry, stay foolish."

Stewart Brand

“Não sou eu quem me navega
Quem me navega é o mar
Não sou eu quem me navega
Quem me navega é o mar
É ele quem me carrega
Como nem fosse levar
É ele quem me carrega
Como nem fosse levar.”

Paulinho da Viola

RESUMO

Neste trabalho investigamos a natureza aritmética de certas potências relacionadas a U-números e uma subclasse de T-números. Os primeiros dois resultados nos garantem, respectivamente, a transcendência de qualquer número algébrico elevado a um U-número e uma generalização da transcendência da constante e elevada a um U-número. Ainda relacionado a U-números, obtivemos outros dois resultados: um que dá a transcendência do produto entre um algébrico não nulo e a constante e, elevado a um U-número, o outro que nos diz quando são transcendentes números do tipo $\alpha^\ell \cdot \beta^{\ell^2}$, em que $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ e ℓ é a constante de Liouville.

Conseguimos provar mais dois resultados, que são técnicos, e nos dão apenas informações parcias. Um deles garante, para uma subclasse dos T-números, que chamamos de T-números especiais, a transcendência de todos os resultados que provamos serem válidos para U-números. O outro, resolve parcialmente o problema em aberto sobre a natureza aritmética de ξ^ξ, quando ξ é um número de Liouville. Conseguimos tal resultado para um conjunto G_δ denso de números de Liouville, que chamamos de números de Liouville ϵ-fortes.

Palavras-chave: Transcendência, Potências, U-números, T-números.

ABSTRACT

In this work we investigate the arithmetic nature of certain powers related to U-numbers and a subclass of T-numbers. The first two ensures, respectively, results in the transcendence of any algebraic number raised to a U-number and a generalization of the transcendence of the constant e raised to a U-number. Still related to U-numbers, we get two other results: one which gives the transcendence of product between a non-zero algebraic and the constant e, raised to a U-number, and another which tells us when numbers of the type $\alpha^{\ell} \cdot \beta^{\ell^2}$, where $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ and ℓ is the Liouville constant, are transcendentals.

We were able to prove two more results, which are technical, and give us only partial information. One of them ensures, for a subclass of T-numbers, which we call special T-numbers, the transcendence of all results that we prove to be valid for U-numbers. The other partially solves the open problem on the arithmetic nature of ξ^{ξ}, when ξ is a Liouville number. We get such a result for a G_δ dense set of Liouville numbers, which we call ϵ-strong Liouville numbers.

Keywords: Transcendence, Powers, U-numbers, T-numbers.

SUMÁRIO

LISTA DE NOTAÇÕES E SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais: $1, 2, \ldots$
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros: $\ldots, -1, 0, 1, \ldots$
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais: $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\overline{\mathbb{Q}}$	conjunto dos números algébricos
$\mathbb{T}$	conjunto dos números transcendentes
$\mathbb{L}$	conjunto dos números de Liouville
$\mathbb{L}_{\text{ultra}}$	conjunto dos números ultra-Liouville
$\mathbb{L}_{\epsilon}$	conjunto dos números de Liouville ϵ-fortes
$\max K$	maior elemento do conjunto K
$\min K$	menor elemento do conjunto K
$K[x_1, \ldots, x_n]$	conjunto dos polinômios em n variáveis com coeficientes em K
K^n	produto cartesiano de n cópias de K
$[a, b]$	conjunto $\{a, a+1, \ldots, b\}$ para inteiros $a < b$
$B(a, r)$	bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro a e raio $r : \{x \in \mathbb{R}^n : \lvert x - a \rvert < r\}$
$\overline{A}$	fecho topológico do conjunto A em $\mathbb{R}$
A^c	complementar do conjunto A
$A - B$	diferença entre conjuntos
$A \cup B$	união entre os conjuntos A e B
$A \cap B$	interseção entre os conjuntos A e B
$n!$	fatorial de $n : n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$
$\log x$	logaritmo natural de x
$\log_a b$	logaritmo de b na base a
f'	derivada da função f
$\lceil x \rceil$	menor número inteiro maior do que ou igual a x
$\mathrm{gr}(P)$	grau do polinômio P
$H(P)$	altura do polinômio P
$\mathrm{gr}(\alpha)$	grau do número algébrico α
$H(\alpha)$	altura do número algébrico α
$\lvert x \rvert$	valor absoluto (ou módulo) de x
$\ll$	símbolo de Vinogradov com significado usual

$m(A)$	medida de Lebesgue do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$
$\mathrm{vol}(A)$	volume do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$

Introdução

Um número complexo α é dito *algébrico* se existe um polinômio $P(x)$ não nulo, com coeficientes racionais, tal que $P(\alpha) = 0$. Equivalentemente, "limpando"os denominadores, podemos assumir que os coeficientes são inteiros. Caso contrário, o número α chama-se *transcendente*. Provavelmente, foi Euler um dos primeiros matemáticos a utilizar esse termo, quando escreveu no seu livro *Introductio in Analysin Infinitorum* [12], de 1748, que logaritmos de números que não são potências da base deveriam ser chamados de quantidades transcendentes. Em 1794, Legendre formalizou a definição desses números, mas somente em 1844, através dos trabalhos de Liouville, o primeiro exemplo de número transcendente surgiu, dando oficialmente origem à teoria dos números transcendentes. Na ocasião, Liouville mostrou que a constante que recebe seu nome, $\ell = 0.1100010000\ldots$(com os 1's em cada posição fatorial e os 0's nas demais) é transcendente. Vale ressaltar, porém, que entre Euler e Liouville alguns problemas isolados de natureza transcendente foram formulados. Por exemplo, em 1744 (antes mesmo do termo *transcendente* surgir), o próprio Euler estabeleceu a irracionalidade da constante e. Em 1761, Lambert confirmou a irracionalidade de π.

Em 1873, a transcendência da constante e foi estabelecida por Hermite, utilizando um engenhoso método que, uma década mais tarde, foi generalizado por Lindemann para provar que π é transcendente. Isso permitiu a Lindemann resolver um antigo problema grego conhecido como quadratura do círculo, o qual questionava se seria possível construir usando régua e compasso um quadrado com área igual a de um círculo dado. Além disso, Lindemann provou, em 1882, que a função exponencial e^x, avaliada em pontos algébrico não nulos, toma valores transcendentes. Davam-se ali os primeiros passos sobre a natureza aritmética da potenciação entre dois números.

O sétimo dentre os 23 problemas propostos por Hilbert no Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris no ano de 1900, perguntava se o número α^β, com α sendo algébrico não nulo diferente de 1 e β algébrico não racional, é transcendente. Os matemáticos Gelfond e Schneider resolveram essa questão independentemente nos anos 1934 e 1935, respectivamente. Na ocasião, eles provaram a transcendência de tal número nas condições supramencionadas. Esse resultado ficou conhecido como Teorema de Gelfond-Schneider. Ele possui uma formulação equivalente: se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são números algébricos, com $\log \alpha_1, \log \alpha_2$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então

$$\sum_{j=1}^{2} \beta_j \log \alpha_j \neq 0.$$

Uma versão mais geral desse resultado, válido para uma quantidade arbitrária de logaritmos, foi provada por Baker [1] em 1966.

Percebemos que, como consequência do Teorema de Gelfond-Schneider, a natureza aritmética da potenciação entre dois números algébricos ficou completamente caracterizada pois, se $\alpha \in \{0, 1\}$ ou β é racional, então α^β é algébrico. Assim, levantamos naturalmente as seguintes questões: qual é a natureza aritmética da potenciação entre dois números quando pelo menos um deles é transcendente? E quando ambos são transcendentes?

Respostas para as questões há pouco colocadas são, em geral, desconhecidas. A tabela a seguir mostra que tudo pode acontecer quando pelo menos um dos números na potenciação é transcendente.

Tabela 1. Possíveis resultados para α^β quando α ou β é transcendente.

Valor de α	Classe	Valor de β	Classe	Valor de α^β	Classe
2	algébrico	$\log 3/\log 2$	transcendente	3	algébrico
2	algébrico	$i \log 3/\log 2$	transcendente	3^i	transcendente
e^i	transcendente	π	transcendente	-1	algébrico
e	transcendente	π	transcendente	e^π	transcendente
$2^{\sqrt{2}}$	transcendente	$\sqrt{2}$	algébrico	4	algébrico
$2^{\sqrt{2}}$	transcendente	$i\sqrt{2}$	algébrico	4^i	transcendente

Em 1932, Mahler [21] introduziu um sistema de classificação para os números complexos, baseando-se em propriedades de aproximação. Para um dado número complexo α, a classificação de Mahler de α é determinada por quão próximo de zero $|P(\alpha)|$ pode ser quando $P(x)$ é um polinômio não nulo com coeficientes inteiros, de grau no máximo n e altura no máximo H. Essa classificação nos fornece quatro classes disjuntas de números complexos, a saber, A, S, T e U- números. Alguns anos após Mahler fornecer essa classificação, Koksma [19] apresentou uma nova, mais natural, e equivalente à de Mahler. Enquanto Mahler observou quão próximo de zero $|P(\alpha)|$ pode se tornar quando $P(x)$ está sob as condições acima mencionadas, Koksma estudou quando bem aproximado α pode ser por algébricos de altura e grau limitados. Pelo fato dessas classificações serem equivalentes, em vez de especificar sobre qual classificação estamos nos referindo, usaremos simplesmente a expressão *classificação de Koksma-Mahler*.

Nosso trabalho preocupou-se em determinar a natureza aritmética de certas potenciações envolvendo números transcendentes. Para ser mais específico, os números transcendentes que regem esta pesquisa são os U-números e os T-números na classificação de Koksma-Mahler.

Justificamos a importância da nossa pesquisa ressaltando que foram feitos estudos recentes (ou não) relacionados à natureza aritmética da potenciação envolvendo números transcendentes. Mostraremos a seguir alguns.

- Franklin [14], Mostrou que 2^α é transcendente quando $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-(2^{(8^n)})}$, onde x_i representa o i-ésimo dígito da parte decimal de π;
- Marques [24] provou que, fixados polinômios não constantes $P(x), Q(x)$ com coeficientes em $\mathbb{Q}[x]$, o conjunto dos números algébricos da forma $P(\theta)^{Q(\theta)}$, com θ transcendente, é denso em algum subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma generalização desse resultado foi dada por Trojovský [40], que mostrou a existência de algébricos da forma
$$P_1(\theta)^{Q_1(\theta)} \cdots P_n(\theta)^{Q_n(\theta)},$$
onde $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ são polinômios não constantes em $\mathbb{Q}[x]$, sob certas condições, e θ é um número transcendente.
- Recentemente, Chalebgwa e Morris [7] provaram que e^ξ é transcendente sempre

que ξ é um U-número na classificação de Koksma-Mahler.

Os resultados a serem provados nesta tese serão indicados com letras maísculas, começando com a primeira letra do nosso alfabeto e mantendo a ordem de disposição que conhecemos. Dito isso, os apresentaremos a seguir.

Permanecia em aberto saber se α^{ξ} é algébrico ou transcendente, quando α é um número algébrico diferente de 0 ou 1 e ξ um U-número. Mostramos que, em geral, vale o

Teorema A. *Sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ números algébricos não nulos, com $\alpha_0 \neq 1$, e $\beta_0, \ldots, \beta_n$ números algébricos. Se ξ é um U-número, então $\alpha_0^{\xi} e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ é um número transcendente.*

O resultado seguinte generaliza o fato provado por Chalebgwa e Morris [7], de que e^{ξ} é transcendente quando ξ é um U-número.

Teorema B. *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos não nulos e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números algébricos. Se ξ é um U-número, então $e^{\xi} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ é um número transcendente.*

Desejávamos saber se é transcendente o produto entre α^{ξ} e e^{ξ}, com α sendo um número algébrico diferente de zero e ξ um U-número. Obtivemos uma resposta positiva com o

Teorema C. *Sejam α e β números algébricos, com $\alpha \neq 0$, e seja ξ um U-número. Então $(\alpha e^{\beta})^{\xi}$ é um número transcendente.*

Conseguimos provar a transcendência do número $2^{\ell} \cdot 3^{\ell^2}$, em que ℓ é a constante de Liouville. Mais geralmente, considerando que as bases da potenciação são números algébricos multiplicativamente independentes, vale o próximo resultado.

Teorema D. *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos não nulos multiplicativamente independentes, $P_1(x), \ldots, P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinômios não constantes e ξ um U-número. Então $\alpha_1^{P_1(\xi)} \cdots \alpha_n^{P_n(\xi)}$ é um número transcendente.*

Provamos ainda dois resultados técnicos. O primeiro é relacionado à uma subclasse dos T-números, que chamamos de T-números especiais.

Teorema E. *Todos os teoremas mencionados acima permanecem válidos quando ξ é* *um T-número especial.*

O outro resultado está relacionado a um problema em aberto, que consiste em saber se é transcendente o número ξ^ξ quando ξ é um número de Liouville. Nesse sentido, provamos o resultado parcialmente para um subconjunto dos números de Liouville, que chamamos de conjunto dos números de Liouville ϵ-fortes.

Teorema F. *Seja ϵ um número real positivo. Se ξ é um número de Liouville ϵ-forte, então ξ^ξ é um número transcendente.*

Veremos também ao longo do texto diversas consequências relacionadas a cada um dos resultados supramencionados, dentre elas, informações sobre a classificação de Koksma-Mahler de formas lineares em logaritmos de números algébricos.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo principal deste capítulo é fornecer a base necessária em termos de definições e resultados para os capítulos que a este sucedem.

Inicialmente, apresentaremos os primeiros exemplos de números transcendentes, que são os números de Liouville. Após isso, daremos uma breve exposição da classificação de Koksma-Mahler e, finalmente, enunciaremos dois lemas fundamentais para as demonstrações dos nossos resultados.

1.1 Números de Liouville

Utilizaremos esta seção para dar a definição de número transcendente. Além disso, veremos a existência de tais números, através de um resultado devido a Liouville.

Definição 1.1. *Um número complexo α é chamado algébrico se existe um polinômio não nulo $P(x)$, com coeficientes racionais, tal que $P(\alpha) = 0$. Se α não é algébrico, é chamado transcendente. O conjunto de todos os números transcendentes será denotado por $\mathbb{T}$.*

Em outras palavras, números transcendentes são aqueles que não satisfazem nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais.

Exemplos de números algébricos são simples de construir. Com efeito, qualquer número racional m/n é algébrico, pois é raiz do polinômio

$$P(x) = nx - m.$$

Mais geralmente, qualquer número da forma $(m/n)^{\frac{1}{k}}$ em que m, n são inteiros, $n \neq 0$ e k um inteiro positivo, é algébrico, já que é raiz do polinômio

$$P(x) = nx^k - m.$$

Esses exemplos, assim como a maneira que são construídos, nos dão a impressão que a "maioria"dos números complexos são algébricos, mas isto não é verdade.

Teorema 1.2. *O conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Veja Proposição 4.1 de [25]. ■

Sabemos que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ é não enumerável, logo $\mathbb{C}$ é não enumerável. Pelo fato de ser $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$, segue a não enumerabilidade de $\mathbb{T}$. A grosso modo, isto significa que a "maioria"dos números complexos são transcendentes. Vamos formalizar o que a palavra maioria significa.

Definição 1.3. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^t$ tem medida (de Lebesgue) nula, e escrevemos $m(A) = 0$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma quantidade enumerável de bolas abertas $(B_n)_n$ tais que*

- $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$;
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(B_n) < \epsilon$.

O símbolo Vol representa o volume de um conjunto do espaço t-dimensional. Quando $t = 2$ chamamos essa quantidade de área do conjunto.

Se uma propriedade é satisfeita por *quase todos* os números complexos, isto significa que um subconjunto de $\mathbb{C}$ que não atende tal propriedade tem medida nula.

Proposição 1.4. *Quase todos os números complexos são transcendentes, isto é, o conjunto dos números algébricos tem medida nula ($m(\overline{\mathbb{Q}}) = 0$).*

Demonstração. Veja Proposição 4.2 de [25]. ∎

Ironicamente, enquanto construir números algébricos é simples, não encontramos a mesma facilidade para com os números transcendentes. Conforme dissemos, os primeiros exemplos de números transcendentes foram dados por Liouville. A sua ideia foi encontrar uma propriedade satisfeita por todos os algébricos e depois construir um número que não satisfizesse tal propriedade.

Teorema 1.5 (Teorema de Liouville)**.** *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma raiz real de um polinômio irredutível $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grau $d \geq 2$. Então existe uma constante positiva $c(\alpha)$ tal que, para qualquer $p/q \in \mathbb{Q}$*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^d}, \tag{1.1}$$

para todo racional p/q. Uma escolha conveniente para essa constante é

$$c(\alpha) = \frac{1}{1 + \max_{|t-\alpha|\leq 1} |P'(t)|}. \tag{1.2}$$

Demonstração. Veja Teorema 5.1 de [25]. ∎

O primeiro exemplo explícito de número transcendente dado por Liouville, foi a *constante de Liouville*

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000000000000000001\ldots.$$

O número 10 não tem nada de especial pois, conforme o corolário a seguir, é possível estender o exemplo acima para qualquer $a \geq 2$.

Corolário 1.6. *O número*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n!}}$$

é transcendente para qualquer inteiro $a \geq 2$.

Demonstração. Veja Teorema 7 de [35]. ∎

A constante de Liouville ℓ, satisfaz uma importante definição dentro da teoria dos números transcendentes. Estamos falando da

Definição 1.7. *Um número real α é chamado de número de Liouville se existe uma sequência de números racionais $(\frac{p_k}{q_k})_k$, tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{\omega_k}},$$

para alguma sequência de números reais $(\omega_k)_k$ que tende ao infinito à medida que $k \to \infty$. Denotaremos o conjunto de todos os números de Liouville por $\mathbb{L}$.

Observação 1.8. Podemos definir, de maneira equivalente, um número de Liouville da seguinte forma: o número α é de Liouville se, e somente se, para todo $k \geq 1$, existe $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 1$, tal que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}.$$

Mais geralmente podemos obter a seguinte equivalência: um número real α é número de Liouville se, e somente se, para todo número real ω existe uma quantidade infinita de números racionais p/q, com $q > 1$, tal que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\omega}.$$

Um importante resultado relacionado a números de Liouville é o

Teorema 1.9. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. veja Teorema 5.2 de [25]. ■

Veremos em seguida que o conjunto dos números de Liouville é "grande"no sentido topológico.

Definição 1.10. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $G \subset X$ é um subconjunto G_δ de X, se G é uma interseção enumerável de abertos densos em X.*

Proposição 1.11. *O conjunto dos números de Liouville forma um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Veja Lema 2.14 de [10] ■

1.2 Classificação de Koksma-Mahler

Uma classificação do conjunto de todos os números transcendentes em três classes disjuntas, denominadas S-,T- e U-números, foi dada por Mahler [21] em 1932. Sete anos depois, Koksma [19] apresentou uma nova classificação que mostrou-se equivalente à de Mahler e, além de tudo, mais natural.

Cabe ressaltar que necessitaremos essencialmente da definição de U e T-número, assim, não faremos uma exposição aprofundada a respeito da classificação de Kosma-Mahler. O leitor interessado em maiores detalhes pode consultar [4] para uma excelente exposição das classificações e propriedades.

Definição 1.12. *A altura de um polinômio complexo $P(x)$ denotada por $H(P)$, é o máximo entre os valores absolutos dos seus coeficientes. A altura de um número algébrico α, denotado por $H(\alpha)$, é a altura do seu polinômio minimal sobre $\mathbb{Z}$.*[1]

Seguiremos de perto a referência [4]. Enquanto as definições e resultados ali contidos são apresentados para números reais, *mutatis mutandis*, eles são transferidos para números complexos. Portanto, faremos as considerações necessárias para números reais, mas as definições e resultados desta seção serão feitos para números complexos.

A classificação de Mahler particiona os números complexos em quatro conjuntos, caracterizados pela forma com que polinômios não nulos com coeficientes inteiros aproximam-se de zero quando avaliados em um determinado número.

Consideremos ξ um número real. Sejam n um inteiro positivo e $H \geq 1$ um número real. Definimos a quantidade

$$w_n(\xi, H) = \min\{|P(\xi)| : P(x) \in \mathbb{Z}[x],\ H(P) \leq H,\ \mathrm{gr}(P) \leq n,\ P(\xi) \neq 0\},$$

[1] O *polinômio minimal* de um número algébrico α sobre $\mathbb{Z}$ é definido como o polinômio primitivo $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de menor grau, tal que $P(\alpha) = 0$.

em que $\mathrm{gr}(P)$ denota o grau do polinômio $P(x)$. Além disso, definimos

$$w_n(\xi) = \limsup_{H\to\infty} \frac{-\log w_n(\xi, H)}{\log H}$$

e

$$w(\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

Em outras palavras, $w_n(\xi)$ é o supremo dos números reais positivos w para os quais existem infinitos polinômios $P(x)$, de grau no máximo n, tais que

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}.$$

Para $n \geq 1$, temos

$$0 \leq w_n(\xi) \leq \infty,$$

pois

$$w_n(\xi, H) \leq w_1(\xi, H) \leq 1$$

para qualquer H com $H \geq |\xi| + 1$. portanto,

$$0 \leq w(\xi) \leq \infty.$$

Além disso, a sequência $(w_n(\xi))_n$ é não decrescente. Com essas notações, Mahler dividiu o conjunto dos números complexos como segue.

Definição 1.13. *Seja ξ um número complexo. Dizemos que ξ é um*

- *A-número, se $w(\xi) = 0$;*
- *S-número, se $0 < w(\xi) < \infty$;*
- *T-número, se $w(\xi) = \infty$ e $w_n(\xi) < \infty$ para todo $n \geq 1$;*
- *U-número, se $w(\xi) = \infty$ e $w_n(\xi) = \infty$ para algum $n \geq 1$.*

As classes S, T e U podem ser subdivididas em infinitas subclasses, o que dá origem à noção de *tipo*. Nesse sentido trataremos apenas da classe dos U-números.

Definição 1.14. *Seja ξ um U-número. O tipo de ξ, denotado por $t(\xi)$, é o menor inteiro positivo n tal que $w_n(\xi) = \infty$. Denotaremos por U_m o conjunto dos U-números tais que $t(\xi) = m$ e os chamaremos de U_m-números.*

Exemplo 1.15. Os U-números de tipo 1 são precisamente os números de Liouville, isto é $\mathrm{U}_1 = \mathbb{L}$. Além deles, Leveque [20] provou a existência de U_m-números para todo $m > 1$. De fato, ele exibiu números explícitos ao considerar a m-ésima raiz de alguns números de Liouville convenientes, por exemplo

$$\sqrt[m]{\frac{3+\ell}{4}} \in U_m, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

O seguinte resultado, devido a Mahler, nos mostra uma propriedade fundamental.

Teorema 1.16. *Se ξ e η são números complexos algebricamente dependentes, então eles pertencem a mesma classe de Mahler.*

Demonstração. Veja Teorema 3.2 de [4] ■

Tratemos de tecer um comentário acerca da classe dos T-números. Ela é, dentre as classes de Mahler, a mais desconhecida. Por exemplo, a existência desses números foi provada por Schmidt [34] somente trinta e seis anos após o artigo de Mahler [21]. Até a presente data ainda não temos um exemplo explícito de T-número.

Já que definimos a classificação de Mahler, vamos apresentar agora a de Koksma. O ponto de vista de Koksma [19] é semelhante ao de Mahler, mas em vez de olhar para a aproximação de 0 por polinômios com coeficientes inteiros avaliados em um número real ξ, ele considerou a aproximação de ξ por números algébricos.

Sejam dados um inteiro positivo n, um número real $H \geq 1$ e um número algébrico α. Definimos a quantidade

$$w_n^*(\xi, H) = \min\{|\xi - \alpha| : \mathrm{gr}(\alpha) \leq n,\ H(\alpha) \leq H,\ \alpha \neq \xi\},$$

em que $\mathrm{gr}(\alpha)$ denota o grau do algébrico α. Além disso, definimos

$$w_n^*(\xi) = \limsup_{H\to\infty} \frac{-\log\left(Hw_n^*(\xi,H)\right)}{\log H}$$

e

$$w^*(\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n^*(\xi)}{n}.$$

Em outras palavras, $w_n^*(\xi)$ é o supremo dos números reais positivos w^* para os quais existem infinitos números algébricos α, de grau no máximo n, tais que

$$0 < |\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-w^*-1}.$$

Observamos que

$$w_n^*(\xi,H) \leq w_1^*(\xi,H) \leq \frac{(|\xi|+1)}{H},$$

para qualquer número real ξ, qualquer inteiro positivo n e qualquer $H \geq |\xi|+1$. Portanto,

$$0 \leq w_n^*(\xi) \leq \infty.$$

Definição 1.17. *Seja ξ um número complexo. Dizemos que ξ é um*

- *A^*-número, se $w^*(\xi) = 0$;*
- *S^*-número, se $0 < w^*(\xi) < \infty$;*
- *T^*-número, se $w^*(\xi) = \infty$ e $w_n^*(\xi) < \infty$ para todo $n \geq 1$;*
- *U^*-número, se $w^*(\xi) = \infty$ e $w_n^*(\xi) = \infty$ para algum $n \geq 1$.*

As classificações de Mahler e Koksma são equivalentes.

Teorema 1.18. *Os A^*-números são exatamente os números algébricos.*

Demonstração. Veja Teorema 3.5 de [4]. ∎

Teorema 1.19. *Qualquer S-número (resp. T-número, U-número) é um S^*-número (resp. T^*-número, U^*-número).*

Demonstração. Veja Teorema 3.6 de [4]. ∎

Observação 1.20. Como mencionado anteriormente, as classificações de Mahler e Koksma são equivalentes. Sendo assim, daqui em diante, sempre que nos referirmos aos S, T ou U-números, devemos pensar na definição de Koksma. Por exemplo, se dissermos que ξ é um U-número (logo ele é também um U^*-número), então isso significa que, existe uma sequência infinita $(\theta_k)_k$, de números algébricos de grau m, (ou no máximo m) tal que

$$0 < |\xi - \theta_k| < H(\theta_k)^{-\omega_k},$$

para todo $k \geq 1$, em que ω_k tende ao infinito quando $k \to \infty$.

1.3 Estimativas de Íçen e Baker

Iremos apresentar nesta seção dois resultados fundamentais para as demonstrações feitas nos próximos capítulos. Usaremos a notação $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\}$ para inteiros $a < b$. O primeiro resultado, devido a Íçen [18], fornece uma desigualdade relacionando a altura de números algébricos.

Lema 1.21. *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos pertencentes a um corpo de números algébricos de grau g e $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio com coeficientes inteiros com grau $d > 1$ na variável y. Se η é um número algébrico tal que $F(\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, então o grau de η é, no máximo dg, e vale*

$$H(\eta) \leq 3^{2dg+(l_1+\cdots+l_k)g} \cdot H^g \cdot H(\alpha_1)^{l_1 g} \cdots H(\alpha_n)^{l_n g}, \tag{1.3}$$

em que H é o máximo dos valores absolutos dos coeficientes de F (a altura de F), l_i é o grau de F na variável x_i, para $i \in [1, n]$.

Demonstração. Veja [18] e [30]. ∎

Antes de enunciarmos o próximo resultado chave, vamos fazer uma breve discussão. Começamos fixando $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ e definindo o logaritmo complexo por

$$\log z = \log|z| + i \cdot \arg z, \quad \text{com} \quad \varphi_0 < \arg z \leq \varphi_0 + 2\pi.$$

Em tudo o que segue a escolha de φ_0 não importa. Assim, todos os resultados a partir daqui são válidos para qualquer *determinação* fixada dos logaritmos.

Definição 1.22. *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ números algébricos. Uma forma linear em logaritmos de números algébricos é uma expressão da forma*

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n. \tag{1.4}$$

Baker [1] provou em 1966 que, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números algébricos diferentes de 0 e 1, tais que, $\log \alpha_1 + \cdots + \log \alpha_n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então para qualquer n-upla de números algébricos $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ diferentes de $(0, 0, \ldots, 0)$ temos que (1.4) é diferente de zero. Podemos ir além e questionar se existem versões quantitativas deste resultado, isto é, nas condições impostas por Baker, podemos encontrar um limitante inferior estritamente positivo para o valor absoluto de (1.4)? Em 1967, Baker [2] de fato obteve tal limitante.

O limitante inferior obtido por Baker tornou-se uma ferramenta extremamente poderosa, não apenas na teoria transcendente, mas também em aplicações para as equações diofantinas e o problema número 1 da classe de Gauss. Por esta razão, o limitante inferior de Baker dado em 1967 foi melhorado pelo próprio Baker e outros.

Entre as muitas extensões (e variações) dos limitantes originais de Baker, optamos por usar o

Lema 1.23. *Seja $n > 1$ um inteiro e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ números algébricos não nulos. Definindo $A = \prod_{i=1}^{n} \log(\max\{H(\alpha_i), 4)\}$ e $B = \max_{i \in [1,n]}\{H(\beta_i), 4\}$. Seja $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n) : \mathbb{Q}]$. Então*

$$|\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n| > (AB)^{-(16nD)^{200n} A \log A},$$

desde que a forma linear (1.4) *seja diferente de zero.*

Demonstração. Veja [3]. ∎

Capítulo 2

Potências que envolvem U-números

Com as ferramentas vistas no capítulo anterior, podemos prosseguir para os resultados principais desta tese, que serão vistos nas duas próximas seções. Eles nos garantem a transcendência de uma família razoavelmente grande de potências envolvendo U-números.

2.1 Primeiros resultados e consequências

O primeiro resultado nos dá, em particular, a transcendência de α^ξ para qualquer U-número ξ e qualquer número algébrico $\alpha \notin \{0, 1\}$.

Teorema A. *Sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ números algébricos não nulos, com $\alpha_0 \neq 1$, e $\beta_0, \ldots, \beta_n$ números algébricos. Se ξ é um U-número, então $\alpha_0^\xi e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ é um número transcendente.*

Demonstração. Procederemos por contradição. Suponhamos que

$$\alpha_0^\xi e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$$

seja um número algébrico, digamos γ. Em particular, temos

$$\begin{aligned}\log\gamma &= \log\left(\alpha_0^{\xi}e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}\right)\\ &= \log\alpha_0^{\xi}+\log e^{\beta_0}+\log\alpha_1^{\beta_1}+\cdots+\log\alpha_n^{\beta_n}\\ &= \xi\log\alpha_0+\beta_0+\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n.\end{aligned}$$

Como ξ é um U-número, então existe uma sequência infinita $(\theta_k)_k$, de números algébricos de grau m, tal que

$$0<|\xi-\theta_k|<H(\theta_k)^{-\omega_k}, \tag{2.1}$$

para todo $k\geq 1$, em que ω_k tende ao infinito quando $k\to\infty$. Observe que podemos assumir

$$H(\theta_k)=\max_{i,j\in[1,n]}\{H(\alpha_j),H(\beta_i),4\},$$

para todo k.

Vamos agora mostrar que vale a

Afirmação. O número

$$\Lambda_k:=\theta_k\log\alpha_0-\log\gamma+\beta_0+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\log\alpha_i$$

é não nulo para todo k suficientemente grande.

De fato pois, caso contrário, isto é, se $\Lambda_k=0$ para todo k pertencente a um conjunto infinito de inteiros positivos N', temos

$$\theta_k\log\alpha_0-\log\gamma+\beta_0+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\log\alpha_i=0,$$

por conseguinte

$$\theta_k=\frac{1}{\log\alpha_0}\left(\log\gamma-\beta_0-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\log\alpha_i\right),$$

para todo $k\in N'$. isto significa que a sequência $(\theta_k)_{k\in N'}$ é constante. Em particular, θ_k tende para um número algébrico de grau m quando $k\to\infty$ $(k\in N')$, digamos θ_{n_0}

(em que $n_0 = \min N'$). Ora, como

$$\xi = \lim_{k\to\infty} \theta_k,$$

chegamos em um absurdo pois, nesse caso, teríamos $\xi = \theta_{n_0}$, o que não pode ocorrer levando em conta que ξ é um U-número. Portanto $\Lambda_k \neq 0$, for all $k \geq \kappa_0$ e a afirmação está provada.

Sabemos agora que $\Lambda_k \neq 0$, para todo k suficientemente grande. Além disso, estamos nas condições do Lema 1.23. Assim,

$$|\Lambda_k| > B_k^{-c_k}, \tag{2.2}$$

em que

$$B_k = H(\theta_k) \text{ e } c_k = 2(16nD_k)^{200n} A \log A.$$

Além disso, usamos que $A \leq B_k$. No entanto,

$$\begin{aligned} D_k &:= [\mathbb{Q}(\theta_k, \gamma, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n) : \mathbb{Q}] \\ &\leq m[\mathbb{Q}(\gamma, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n) : \mathbb{Q}] =: D. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Assim,

$$|\Lambda_k| > B_k^{-c}, \tag{2.4}$$

em que

$$c := 2(16nD)^{200n} A \log A$$

não depende de k.

Por outro lado, podemos escrever

$$\begin{aligned} |\Lambda_k| &= \left|\theta_k \log \alpha_0 - \left(\log \gamma - \beta_0 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log \alpha_i\right)\right| \\ &= |\theta_k \log \alpha_0 - \xi \log \alpha_0| \\ &= |\log \alpha_0||\theta_k - \xi|, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde usamos

$$\log\gamma - \beta_0 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log\alpha_i = \xi \log\alpha_0.$$

Agora, combinando (2.1), (2.4) e (2.5), obtemos

$$H(\theta_k)^{-c} < |\log\alpha_0||\theta_k - \xi| < |\log\alpha_0|H(\theta_k)^{-\omega_k},$$

e assim

$$4^{\omega_k - c} \leq H(\theta_k)^{\omega_k - c} < |\log\alpha_0|$$

para todo $k \geq \kappa_0$. Ora, mas isto é um absurdo, levando em conta que o lado esquerdo tende ao infinito quando $k \to \infty$, enquanto o lado direito é limitado. Concluímos dessa forma que o número $\alpha_0^{\xi} e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ é transcendente e a demonstração está completa. ■

Exemplo 2.1. De acordo com o Teorema anterior são transcendentes os números

$$2^{\ell} \quad \text{e} \quad e \cdot i^{\ell\sqrt{3}}.$$

Vimos no capítulo anterior que, se ξ e η são números complexos algebricamente dependentes, então eles pertencem a mesma classe de Mahler. Além disso, Mahler provou (veja [4], [21], [22] e suas referências) outros dois resultados extraordinários:

- e^{α} é S-número, para qualquer número algébrico não nulo α;
- $\log\alpha$ é S-número ou T-número, para qualquer número algébrico $\alpha \notin \{0,1\}$.

Recentemente, Chalebgwa e Morris[7] usaram os fatos anteriores para deduzir, em particular, que e^{α} é transcendente sempre que α é um U-número. O próximo resultado generaliza este fato.

Teorema B. *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos não nulos e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números algébricos. Se ξ é um U-número, então $e^{\xi}\alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ é um número transcendente.*

Demonstração. Para provar esse resultado vamos seguir a mesma linha de raciocínio do Teorema A. Sendo assim, vamos supor que o número

$$\gamma = e^{\xi}\alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$$

é algébrico. Logo, temos

$$\log \gamma = \xi + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log \alpha_i.$$

Usando agora que ξ é U-número, temos garantida a existência de uma sequência infinita $(\theta_k)_k$ de números algébricos de grau m, tal que

$$0 < |\xi - \theta_k| < H(\theta_k)^{-\omega_k},$$

para todo $k \geq 1$, onde ω_k tende ao infinito à medida que k cresce. Feitas essas considerações, afirmamos que

$$\Lambda_k := \theta_k - \log \gamma + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log \alpha_i$$

é diferente de zero para todo k suficientemente grande. De fato, supondo que $\Lambda_k = 0$, percebemos que

$$\theta_k = \log \gamma - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log \alpha_i.$$

Isto significa que $(\theta_k)_{k \in N'}$, onde N' é um subconjunto infinito de números naturais, é uma sequência constante. Particularmente, θ_k tende para algum número algébrico de grau m. Ora, mas isto é um absurdo, pois ξ é um U-número.

A ideia a partir daqui é usar o Teorema 1.23, que nos garante um limitante inferior para $|\Lambda_k|$, para cada k. Além disso, usamos a hipótese de ξ ser um U-número, e isto nos dá um limitante superior para $|\Lambda_k|$. De modo semelhante ao que ocorreu no Teorema A, iremos obter um absurdo supondo que γ é algébrico. ■

Como consequências imediatas, temos

Corolário 2.2. *Sejam α um número algébrico e ξ um U-número. Então $e^{\alpha\pi+\xi}$ é um número transcendente.*

Demonstração. Com efeito, para obtermos uma contradição, iremos supor que $e^{\alpha\pi+\xi} = \gamma$ é um número algébrico. Elevando esta relação à potência i, obtemos

$$e^{i\alpha\pi+i\xi} = e^{(i\pi)\alpha} \cdot e^{i\xi} = \gamma^i.$$

Usando que $e^{i\pi} = -1$ temos que

$$e^{i\xi}(-1)^{\alpha}\gamma^{-i} = 1.$$

Ora, mas o lado esquerda desta última igualdade é transcendente, de acordo com o Teorema A. Portanto, supor que $e^{\alpha\pi+\xi}$ é um número algébrico nos leva a uma contradição. ■

Corolário 2.3. *Seja α um número algébrico, com $\alpha \notin \{0,1\}$, e ξ um U-número. Então α^{ξ} e e^{ξ} são números transcendentes.*

Demonstração. Com efeito, tomando $n = 1, \alpha_0 = \alpha, \beta_0 = \beta_1 = 0$ e $\alpha_1 = 1$ no Teorema A, temos a trascendência de α^{ξ}. Para obtermos a transcendência de e^{ξ}, basta fazermos as mesmas escolhas acima para n, α_1 e β_1 no Teorema B. ■

O próximo resultado garante, em particular, que o produto de dois números, como os dados no corolário anterior, ainda é transcendente.

Teorema C. *Sejam α e β números algébricos, com $\alpha \neq 0$, e seja ξ um U-número. Então $(\alpha e^{\beta})^{\xi}$ é um número transcendente.*

Demonstração. A estrutura da demonstração também é similar àquela que foi feita no Teorema A. Supondo que $\gamma = (\alpha e^{\beta})^{\xi}$ é um número algébrico, vemos que

$$\log\gamma = \beta\xi + \xi\log\alpha.$$

Por hipótese, ξ é um U-número, logo

$$0 < |\xi - \theta_k| < H(\theta_k)^{-\omega_k},$$

onde $(\theta_k)_k$ é uma sequência de números algébricos de grau m e ω_k é uma sequência que tende ao infinito quando $k \to \infty$.

Procedendo da mesma maneira como nas demonstrações dos teoremas anteriores, devemos mostrar que $\Lambda_k \neq 0$ para todo k suficientemente grande, onde

$$\Lambda_k := -\beta\theta_k - \theta_k\log\alpha + \log\gamma.$$

Após isso, por um lado, o Lema 1.23 nos dará um limitante inferior para $|\Lambda_k|$, por outro, temos

$$|\Lambda_k| < (|\log \alpha| + |\beta|)H(\theta_k)^{-\omega_k}.$$

Assim como no Teorema A, atingiremos uma contradição assumindo que γ é um número algébrico. ■

Como apontado anteriormente, é conhecida a classificação de Mahler dos números e^{α} e $\log \beta$, para números algébricos $\alpha \neq 0$ e $\beta \notin \{0, 1\}$. Além disso, in 1972, Cijsouw [8] provou que se α e β são números algébricos, tais que $\alpha \notin \{0, 1\}$ e β é irracional, então α^{β} é um S- ou um T-número. Os próximos corolários fornecem informações sobre a classificação de Mahler de formas lineares em logaritmos de números algébricos.

Corolário 2.4. *Sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ números algébricos não nulos e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números algébricos. Temos que*

i) se $\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$ é diferente de zero, então é um S- ou um T-número;

ii) se $\beta_1 \log_{\alpha_0} \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log_{\alpha_0} \alpha_n$ é diferente de zero, então é um S- ou um T-número.

Demonstração. Pelo Lema 1.23, a forma linear

$$\Lambda_0 := \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$$

é igual a zero ou é um número transcendente. No último caso, para obtermos uma contradição, vamos supor que Λ_0 é um U-número. Então

$$e^{-\Lambda_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n} = 1,$$

o que contradiz o Teorema B. Isto prova o item (i).

Para provar o item (ii), assim como antes, supomos, com o objetivo de chegar a uma contradição, que

$$\Lambda_1 := \beta_1 \log_{\alpha_0} \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log_{\alpha_0} \alpha_n$$

é um U-número. Então, concluímos que

$$\alpha_0^{-\Lambda_1}\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n} = 1,$$

o que contradiz o Teorema A. Isto completa a prova. ■

Uma outra consequência é o

Corolário 2.5. *Seja α um número algébrico não nulo, com $\alpha \neq 1$. Então $\pi + \log\alpha$ é um S- ou um T-número.*

Demonstração. Claramente $\pi + \log\alpha \neq 0$. Portanto é suficiente usarmos o Corolário 2.4 (i), pois

$$\pi + \log\alpha = i\log(-1) + \log\alpha.$$

■

2.2 Independência multiplicativa

Definição 2.6. *Os números complexos $z_1, \ldots, z_n$ são ditos multiplicativamente independentes se $z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n} = 1$, para alguma n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, implica em $a_1 = \cdots = a_n = 0$.*

Observação 2.7. Dizer que $z_1, \ldots, z_n$ são multiplicativamente independentes é equivalente a dizer que $\log z_1, \ldots, \log z_n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$ (ou sobre $\mathbb{Z}$).

Exemplo 2.8. *Os números $2, 3$ e 5 são multiplicativamente independentes, pelo Teorema Fundamental da Aritmética. De maneira geral, se $p_1, \ldots, p_k$ são números primos distintos quaisquer, então eles são multiplicativamente independentes.*

Nossos últimos resultados mostrados garantem, em particular, a transcendência do número

$$2^{\ell+\ell^2\log_2 3} = 2^\ell \cdot 3^{\ell^2}.$$

Mais geralmente, temos o

Teorema D. *Sejam* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *números algébricos não nulos multiplicativamente independentes,* $P_1(x), \ldots, P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *polinômios não constantes e* ξ *um* U*-número. Então* $\alpha_1^{P_1(\xi)} \cdots \alpha_n^{P_n(\xi)}$ *é um número transcendente.*

Demonstração. Além de algumas dificuldades técnicas, as ideias pouco diferem daquelas vistas no Teorema A. Novamente buscamos obter uma contradição. Iremos supor que

$$\alpha_1^{P_1(\xi)} \cdots \alpha_n^{P_n(\xi)} = \gamma \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Mostraremos agora que

$$\Lambda_k := P_1(\theta_k) \log \alpha_1 + \cdots + P_n(\theta_k) \log \alpha_n - \log \gamma \neq 0$$

para todo k suficientemente grande. De fato pois, caso contrário, o polinômio

$$F(x) := -\log \gamma + \sum_{i=1}^{n} (\log \alpha_i) P_i(x)$$

seria identicamente nulo, uma vez que teria infinitas raízes, porque $F(\theta_k) = 0$, para infinitos k's. Em particular, seu coeficiente líder $\sum_{i \in I} m_i \log \alpha_i$ seria igual a zero (onde $m_i \neq 0$ é o coeficiente líder de $P_i(x)$ e $I \subseteq [1, n]$). Então,

$$\prod_{i \in I} \alpha_i^{m_i} = 1,$$

o que contradiz a independência multiplicativa de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Dessa forma, concluímos que $\Lambda_k \neq 0$. Portanto, podemos usar o Lema 1.23 para obter um limitante inferior. Mais precisamente,

$$|\Lambda_k| > B_k^{-c}, \tag{2.6}$$

em que

$$B_k := \max\{H(P_1(\theta_k)), \ldots, H(P_n(\theta_k)), H(\gamma)\}$$

e, assim como antes, deduzimos que c é um número real positivo que não depende de k.

Agora iremos obter um limitante superior para $H(B_k)$ dependendo de $H(\theta_k)$.

Para isso, vamos usar o Lema 1.21, para cada $i \in [1, n]$, com a conveniente escolha

$$F_i(y, x) := y - P_i(x).$$

Como

$$F_i(P_i(\theta_k), \theta_k) = 0,$$

a estimativa de Íçen garante que

$$H(P_i(\theta_k)) \leq 3^{2m+\mathrm{gr}P_i} H(P_i)^{\mathrm{gr}P_i} H(\theta_k)^{m\mathrm{gr}P_i} \leq M \cdot H(\theta_k)^{m\tau}, \tag{2.7}$$

em que

$$\tau := \max_{i \in [1,n]} \{\mathrm{gr}P_i\} \text{ e } M := 3^{2m+\tau} \left(\max_{i \in [1,n]} \{H(P_i)\} \right)^{\tau}.$$

Em particular, percebemos que

$$B_k \leq M \cdot H(\theta_k)^{m\tau},$$

para todo $k \geq \kappa_1$ suficientemente grande. Então, combinamos esse fato juntamente com (2.6), donde obtemos

$$B_k^{-c} \leq M^{-c} H(\theta_k)^{-cm\tau}.$$

Colocando

$$\tilde{M}_1 := M^{-c} \text{ e } \tilde{c} := -cm\tau,$$

obtemos

$$|\Lambda_k| > \tilde{M}_1 \cdot H(\theta_k)^{-\tilde{c}}. \tag{2.8}$$

A fim de obtermos um limitante superior para $|\Lambda_k|$, usamos que

$$\begin{aligned}
|\Lambda_k| &= |P_1(\theta_k) \log \alpha_1 + \cdots + P_n(\theta_k) \log \alpha_n - \log \gamma| \\
&= |(P_1(\theta_k) - P_1(\xi)) \log \alpha_1 + \cdots + (P_n(\theta_k) - P_n(\xi)) \log \alpha_n| \\
&\leq K_1(|(P_1(\theta_k) - P_1(\xi))| + \cdots + |P_n(\theta_k) - P_n(\xi)|),
\end{aligned}$$

em que

$$K_1 := |\log \alpha_1| + \cdots + |\log \alpha_n|.$$

Seja $\delta > 0$ um número real tal que $P_i'(x) \neq 0$, para todo $x \in \overline{B(\xi, \delta)}$ e para todo $i \in [1, n]$. Notamos que, θ_k pertence a $B(\xi, \delta)$, para todo k suficientemente grande (digamos $k \geq \kappa_2$). Portanto, para todo $i \in [1, n]$, temos que

$$|P_i(\xi) - P_i(\theta_k)| \leq M|\xi - \theta_k|,$$

em que

$$\tilde{M}_i := \sup_{z \in \overline{B(\xi,\delta)}} |P_i'(z)| > 0.$$

Assim,

$$|\Lambda_k| \leq K_2|\xi - \theta_k| < K_2 \cdot H(\theta_k)^{-\omega_k}, \tag{2.9}$$

para todo $k \geq \kappa_2$, onde

$$K_2 := K_1 \max_{i \in [1,n]} \{\tilde{M}_i\}.$$

Finalmente, para $k \geq \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$, combinando (2.8), (2.9) , obtemos

$$\tilde{M}_1 H(\theta_k)^{-\tilde{c}} \leq K_2 \cdot H(\theta)^{-\omega_k},$$

o que nos dá

$$H(\theta_k)^{\omega_k - \tilde{c}} \leq \frac{K_2}{\tilde{M}_1},$$

que não é satisfeita para infinitos valores de k, o que nos fornece uma contradição. Isto encerra a demonstração. ■

Capítulo 3

Mais resultados e algumas questões

Neste capítulo faremos uma breve discussão sobre alguns resultados mais técnicos e possíveis problemas para futuras pesquisas. A seguir, as constantes implícitas em $\ll$ e $\gg$ não dependem de k.

3.1 Uma subclasse de T-números

Mencionamos anteriormente que a classe de Mahler dos T-números é a mais desconhecida dentre as classes. Não sabemos se os resultados que provamos até aqui para U-números valem, em geral, para T-números. No entanto, definiremos uma classe de T-números para a qual todos os resultados e suas respectivas consequências que vimos também valem.

Na demonstração do Teorema A, para lidar com a dependência de c_k em k (e transformar (2.2) em (2.4)), usamos que o grau de θ_k é fixo (ou talvez limitado). Porém, isso não é válido para T-números. Com o intuito de superar esse problema, vamos incluir algumas condições técnicas entre o grau dos aproximantes de um T-número e sua taxa de convergência. Mais precisamente:

Definição 3.1. *Um T-número ξ é chamado de T-número especial, se existe uma sequência infinita de números algébricos $(\theta_k)_k$ tal que*

$$0 < |\xi - \theta_k| < H(\theta_k)^{-\omega_k},$$

para todo $k \geq 1$, *com* $\mathrm{gr}(\theta_k)$ *tendendo ao infinito quando* $k \to \infty$ *e*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\omega_k}{\exp(\mathrm{gr}(\theta_k))} > 0. \tag{3.1}$$

Nota. Já foi dito ao longo desta tese que a existência dos T-números fora provada apenas trinta e seis anos após Mahler desenvolver a sua classificação e, até a presente data, nenhum exemplo explícito de tais números foi dado. Enfatizamos que não conseguimos provar a existência dos T-números da definição anterior.

Feita essa observação, temos o

Teorema E. *Todos os teoremas e corolários anteriores permanecem válidos quando* ξ *é um* T*-número especial.*

Demonstração. Vamos simplesmente imitar a abordagem padrão para esses resultados. De fato, procedendo da mesma forma que antes, obtemos que

$$|\Lambda_k| \ll H(\theta_k)^{-\omega_k},$$

em que Λ_k é uma forma linear em logaritmos de números algébricos. A novidade aqui está em (2.2), porque

$$|\Lambda_k| \gg H(\theta_k)^{-c_k},$$

em que

$$c_k = c_1 \cdot D_k^{c_2} \quad \text{e} \quad D_k = [\mathbb{Q}(\theta_k, S) : \mathbb{Q}],$$

para algum conjunto finito de números algébricos S (que não depende de k) e para algumas constantes positivas c_1 and c_2. Portanto

$$D_k \ll \mathrm{gr}(\theta_k)$$

e, combinando os limitantes inferiores para $|\Lambda_k|$, concluímos que

$$\omega_k \ll \mathrm{gr}(\theta_k)^{c_2}.$$

Em particular,

$$\frac{\omega_k}{\exp(\mathrm{gr}(\theta_k))} \ll \frac{\mathrm{gr}(\theta_k)^{c_2}}{\exp(\mathrm{gr}(\theta_k))}.$$

No entanto,

$$\frac{\mathrm{gr}(\theta_k)^{c_2}}{\exp(\mathrm{gr}(\theta_k))} \to 0$$

quando $k \to \infty$, contradizendo a condição (3.1). ∎

Levando em conta os comentários anteriores feitos sobre os T-números, encerramos esta seção propondo o seguinte problema:

Problema 1. Os resultados que provamos no capítulo 2 para U-números são válidos para T-números em geral?

3.2 Números de Liouville ϵ-fortes

Voltamos nossa atenção agora para a natureza aritmética dos números da forma ξ^ξ, onde ξ é um U-número. Para evitar detalhes muito técnicos, nos concentraremos apenas nos números de Liouville.

Vimos no capítulo 1 que os números de Liouville formam um conjunto G_δ de $\mathbb{R}$. Agora, vamos definir um subconjunto dos números de Liouville como segue:

Definição 3.2. *Seja ϵ um número real positivo. Um número real ξ é chamado um número de Liouville ϵ-forte, se existe uma sequência infinita de números racionais $(p_k/q_k)_k$, com $q_k > 1$, tal que*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < q_k^{-(\log q_k)^{1+\epsilon}} \tag{3.2}$$

para todo $k \geq 1$. O conjunto desses números será denotado por $\mathbb{L}_\epsilon$.

Além de $\mathbb{L}_\epsilon$, vamos considerar outro subconjunto dos números de Liouville. Para isso, definimos, indutivamente,

$$\exp^{[n]}(x) = \exp(\exp^{[n-1]}(x)) \text{ e } \exp^{[0]}(x) = x.$$

Assim, temos a

Definição 3.3. *Um número real η é chamado um número ultra-Liouville, se para todo inteiro positivo k, existem infinitos números racionais (p/q) , com $q > 1$, tal que*

$$\left|\eta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\exp^{[k]}(q)}.$$

O conjunto dos números ultra Liouville é denotado por $\mathbb{L}_{\text{ultra}}$.

É válido notar que o conjunto $\mathbb{L}_{\text{ultra}}$ é um subconjunto G_δ denso de $\mathbb{R}$ (veja [26]). Além disso, percebemos que $\mathbb{L}_{\text{ultra}} \subset \mathbb{L}_\epsilon$. Em particular, os números de Liouville ϵ-fortes formam um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.4. Seja x um número real. Usando a notação $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$, temos que o número

$$\sum_{n \geq 2 + \lceil \epsilon \rceil} 2^{-2^{n!}}$$

pertence a $\mathbb{L}_\epsilon$.

Teorema F. *Seja ϵ um número real positivo. Se $\xi \in \mathbb{L}_\epsilon$, então ξ^ξ é um número transcendente.*

Demonstração. Vamos supor que $\xi^\xi = \gamma \in \overline{\mathbb{Q}}$, então $\xi \log \xi = \log \gamma$. A forma linear

$$\Lambda_k := \frac{p_k}{q_k} \log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) - \log \gamma$$

é diferente de zero, para todo k suficientemente grande. Com efeito, é finito o conjunto

$$\varphi^{-1}(c) = \{x \in D_\varphi ; \varphi(x) = c\},$$

onde $\varphi(x) = x \cdot \log x$, D_φ é o domínio da função φ e c é um número real. Por outro lado, podemos considerar a existência de uma sequência $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_k$, com $k \in N'$, onde N' é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, tal que seus termos $\frac{p_k}{q_k}$ são dois a dois distintos. Sendo assim, supor que $\Lambda_k = 0$, nos garante a existência de infinitos $\frac{p_k}{q_k}$ tais que

$$\frac{p_k}{q_k} \log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = \log \gamma.$$

Mas isso contradiz a finitude do conjunto $\varphi^{-1}(\log \gamma)$. Desse modo, a forma linear Λ_k em questão é diferente de zero para todo k suficientemente grande.

Estamos nas condições do Lema 1.23. Assim, temos

$$|\Lambda_k| > \exp\bigl(-c\log^2 q_k\bigr),$$

em que c é uma constante positiva e, usamos que

$$H\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = \max\{|p_k|, q_k\} \ll q_k,$$

pois

$$|p_k| < (|\xi|+1)q_k,$$

para todo $k \gg 1$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Lambda_k &= \frac{p_k}{q_k}\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) - \log\gamma \\
&= \frac{p_k}{q_k}\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) - \xi\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) + \xi\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) - \xi\log\xi \\
&= \log\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\left(\frac{p_k}{q_k} - \xi\right) + \xi\left(\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) - \log\xi\right). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (p_k/q_k, \xi)$ tal que

$$\frac{1}{\theta}\left(\frac{p_k}{q_k} - \xi\right) = \log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) - \log\xi. \qquad (3.4)$$

Por (3.3) e (3.4) temos que

$$\begin{aligned}
|\Lambda_k| &= \left|\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\left(\frac{p_k}{q_k} - \xi\right) + \xi\left(\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right) - \log\xi\right)\right| \\
&= \left|\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\left(\frac{p_k}{q_k} - \xi\right) + \frac{\xi}{\theta}\left(\frac{p_k}{q_k} - \xi\right)\right| \\
&\leq \left|\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\left(\frac{p_k}{q_k} - \xi\right)\right| + \left|\frac{\xi}{\theta}\left(\frac{p_k}{q_k} - \xi\right)\right| \\
&= \left|\log\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\right| \cdot \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\frac{\xi}{\theta}\right| \cdot \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| \\
&\leq M \cdot \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right|.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|\Lambda_k| \ll \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < q_k^{-(\log q_k)^{1+\epsilon}}.$$

Combinando os limitantes superior e inferior para $|\Lambda_k|$, chegamos em

$$\exp\bigl(-c\log^2 q_k\bigr) \ll q_k^{-(\log q_k)^{1+\epsilon}}. \tag{3.5}$$

Aplicando log em ambos os lados de (3.5), obtemos

$$(\log q_k)^{\epsilon} \ll 1,$$

o que é um absurdo. Portanto, concluímos que ξ^{ξ} é um número transcendente. ■

Usando um argumento topológico, podemos provar a existência de números de Liouville ξ and ζ tais que

$$\xi^{\zeta} = 2$$

que, claramente é um número algébrico. De fato, a função

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \text{dada por} \quad f(x) := 2^{1/x}$$

é não constante e contínua e assim, em particular, $f(\mathbb{L})$ é um conjunto G_δ denso. Portanto, $f(\mathbb{L}) \cap \mathbb{L}$ é um conjunto não vazio. Dessa forma, existem números de Liouville ξ e ζ, tais que $\xi = f(\zeta)$, como desejado.

Uma situação mais delicada é saber se é possível que seja $\xi = \zeta$. Levando isso em conta, finalizamos esta seção propondo a seguinte questão:

Problema 2. O número ξ^{ξ} é transcendente sempre que $\xi \in \mathbb{L}$?

Considerações Finais

Neste trabalho determinamos resultados que permitem conhecer a natureza aritmética de certas potências envolvendo U-números e T-números. Conforme foi visto neste texto, a menos de um conjunto de medida nula, todos os números são transcendentes. Porém, sabemos que estabelecer a transcendência de um número particular é uma tarefa demasiada difícil. Assim, dentro da teoria dos números transcendentes faz-se necessário desenvolver pesquisas como a que fizemos.

Na primeira parte apresentamos os teoremas A, B, C e D. Façamos alguns comentários acerca de cada um deles. No Teorema A provamos a transcendência de uma família grande de números, em particular, resolvemos um problema que permanecia aberto, que era saber a natureza aritmética do número α^ξ, em que α é algébrico diferente de 0 e 1 e ξ é um U-número na classificação de Koksma-Mahler. Além disso, espera-se que o número ξ^ξ seja transcedente, sempre que ξ é um U-número. Nem mesmo sabemos se isso é verdade para U_1-números (Veja o Problema 2 do capítulo 3).

No Teorema B generalizamos o fato de que e^ξ é transcendente caso ξ seja U-número. Além disso, ele também nos fornece informação sobre a classificação de Mahler de formas lineares em logaritmos de números algébricos. Enquanto os teoremas A e B nos dão a transcendência de α^ξ e e^ξ, o Teorema C nos garante particularmente que o produto entre tais números é transcendente. Uma boa questão a se fazer é, para α e ξ nas condições dadas, o número $\alpha^\xi\pi^\xi$ é também transcendente?

O Teorema D gera a transcendência de números da forma

$$\alpha_1^{P_1(\xi)} \cdots \alpha_n^{P_n(\xi)},$$

com $P_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ não constantes para todo i, $\alpha_i \neq 0$ para todo i e multiplicativamente independentes. Assim, provamos, em particular que, dados $p_1, \ldots, p_k$ números primos quaisquer e ξ um número de Liouville, então o número $p_1^{\xi} \cdot p_2^{\xi^2} \cdots p_k^{\xi^k}$ é transcendente (podendo inclusive permutar os primos).

Na segunda parte do nosso trabalho provamos os teoremas E e F. Conforme mencionamos, estes resultados são técnicos. No Teorema F verificamos serem válidos para uma subclasse dos T-números os mesmos resultados provados para U-números nesta tese. Observamos ainda que não conseguimos mostrar a existência de tais T-números, o que é algo interessante para se fazer em uma pesquisa futura. Mais interesante ainda, seria mostrar que valem (ou não) os nossos resultados para T-números de maneira geral (veja o Problema 1 do capítulo 3).

Finalmente, no Teorema E provamos que vale parcialmente o Problema 1 proposto no final do capítulo 3. De fato, vimos ser válido o resultado para um subconjunto G_δ dos números de Liouville, chamados de números de Liouville ϵ-fortes.

Bibliografia

[1] Baker, A. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers (I). *Mathematika 13* (1966), 204–216.

[2] Baker, A. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers (II). *Mathematika 14*, 1 (1967), 102–107.

[3] Baker, A. The theory of linear forms in logarithms. *Transcendence theory: advances and applications 1* (1977), 1–27.

[4] Bugeaud, Y. *Approximation by algebraic numbers*, vol. 160. Cambridge University Press, 2004.

[5] Burger, E. B., and Tubbs, R. *Making transcendence transparent: An intuitive approach to classical transcendental number theory*. Springer Science & Business Media, 2004.

[6] Caveny, D. M. U-numbers and T-numbers: Some elementary transcendence and algebraic independence results. In *Number theory with an emphasis on the Markoff spectrum*. Routledge, 2017, pp. 43–52.

[7] Chalebgwa, T. P., and Morris, S. A. Sin, cos, exp and log of liouville numbers. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* (2022), 1–5.

[8] Cijsouw, P. L. *Transcendence measures*. Doctoral dissertation, Universiteit van Amsterdam, 1972.

[9] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable:(by) John B. Conway*. Springer Verlag, 1973.

[10] de Souza Silva, E. C. *Alguns resultados relacionados a números de Liouville.* Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2015.

[11] Erdös, P. Representations of real numbers as sums and products of liouville numbers. *Michigan Math. J. 9*, 1 (1962), 59–60.

[12] Euler, L. *Introductio in analysin infinitorum*, vol. 2. Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, 1748.

[13] Evertse, J.-H. Linear forms in logarithms. *Preprint* (2011).

[14] Franklin, P. A new class of transcendental numbers. *Transactions of the American Mathematical Society 42*, 2 (1937), 155–182.

[15] Gelfond, A. O., and Vinogradov, I. Sur le septième problème de hilbert. *Bull. Acad. Sci. URSS* (1934), 623–634.

[16] Hermite, C. Sur la fonction exponentielle. *C. R* (1874), 18–24.

[17] Hilbert, D. Mathematical problems. lecture delivered before the international congress of mathematicians at paris, 1900.

[18] İçen, O. Ş. Über die funktionswerte der p-adisch elliptischen funktionen i. *Istanb. Üniv. Fen Fak. Mecm. Ser. A 36* (1971), 53–87.

[19] Koksma, J. Über die mahlersche klasseneinteilung der transzendenten zahlen und die approximation komplexer zahlen durch algebraische zahlen. *Monatshefte für Mathematik und Physik 48*, 1 (1939), 176–189.

[20] Leveque, W. J. On mahler's u-numbers. *Journal of the London Mathematical Society* (1953).

[21] Mahler, K. Zur approximation der exponentialfunktion und des logarithmus. teil i. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 166* (1932), 118–150.

[22] Mahler, K. On the approximation of logarithms of algebraic numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 245*, 898 (1953), 371–398.

[23] Mahler, K. *Lectures on transcendental numbers*, vol. 546. Springer, 2006.

[24] Marques, D. Algebraic numbers of the form p (t) q (t) with t transcendental. *Elemente der Mathematik 65*, 2 (2010), 78–80.

[25] Marques, D. *Teoria dos números transcendentes*. SBM, 2013.

[26] Marques, D., and Moreira, C. G. On a variant of a question proposed by k. mahler concerning liouville numbers. *Bulletin of the Australian Mathematical Society 91*, 1 (2015), 29–33.

[27] Marques, D., and Oliveira, M. On the transcendence of some powers related to u-numbers. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 54*, 2 (2023), 25.

[28] Murty, M. R., Rath, P., et al. *Transcendental numbers*. Springer, 2014.

[29] Niven, I., Zuckerman, H. S., and Montgomery, H. L. *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons, 1991.

[30] Orhan, İ. Uber die funictionswerte der p-adisch elliptischen funktionen ii. *İstanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics Physics and Astronomy 35* (1972), 139–166.

[31] Pollard, H., and Diamond, H. G. *The theory of algebraic numbers*. Courier Corporation, 1998.

[32] Popken, J., and Koksma, J. Zur transzendenz von e.... *Journal für die reine und angewandte Mathematik 168* (1932), 211–230.

[33] Ribenboim, P. *My numbers, my friends: Popular lectures on number theory*. Springer Science & Business Media, 2006.

[34] Schmidt, W. M. T -numbers do exist. *Symposia Math 6* (1968).

[35] Shidlovskii, A. B. Transcendental numbers. In *Transcendental Numbers*. de Gruyter, 2011.

[36] Siegel, C. L. *Transcendental numbers*. No. 16. Princeton University Press, 1950.

[37] Sondow, J., and Marques, D. Algebraic and transcendental solutions of some exponential equations. *arXiv preprint arXiv:1108.6096* (2011).

[38] Sprindzuk, V. On one classification of transcendental numbers. *Lithuanian Mathematical Journal 2*, 2 (1962), 215–219.

[39] Stewart, I., and Tall, D. O. *Algebraic number theory*, vol. 1987. Chapman and Hall London, 1979.

[40] Trojovskỳ, P. Algebraic numbers as product of powers of transcendental numbers. *Symmetry 11*, 7 (2019), 887.

[41] Waldschmidt, M. Introduction to diophantine methods: irrationality and transcendence. *Update* (2008).

[42] Wirsing, E. Approximation mit algebraischen zahlen beschränkten grades. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 206* (1961), 67–77.