Universidade de Brasília

Grupos tais que todo subgrupo tem defeito subnormal até 2

Millena Andrade da Silva

Orientador: Dr. Igor dos Santos Lima

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre em Matemática*

Brasília, 10 de Julho de 2023

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me ajudar a chegar onde cheguei.

Agradeço à minha família por todo o apoio e incentivo. Ao meu pai, Raimundo, que sempre colocou minha educação como prioridade. À minha mãe, Eliana, que é a mulher mais forte e determinada que conheço, meu maior exemplo. Aos meus irmãos, Hugo e Yago, que cresceram comigo e foram muito importantes para a minha escolha de curso. Às minhas irmãs, Kyria e Kárita, que mesmo longe sempre significaram suporte e conforto. Aos meus avós, Elias e Maria, que ajudaram na minha criação e sempre me incentivaram a estudar. À minha madrasta, Leíldes e à Dona Chica, por me mostrarem que laços de coração às vezes são mais fortes que de sangue.

Ao meu namorado, Bruno, por todo o carinho, apoio e cuidado comigo durante o mestrado.

Às minhas melhores amigas, Isabela, Julia, Yasmin e Micaelly, por todos esses mais de 10 anos de amizade.

Aos amigos que fiz no mestrado, em especial Henrylla, Jadde, Marcio, Marina, Daniel, Saulo e Talita. Vocês tornaram o mestrado muito mais leve. Agradeço principalmente à Henrylla, que se tornou minha maior amiga e confidente.

Aos muitos amigos que a matemática me deu e que sempre acreditaram em mim, ainda que eu não acreditasse. Em especial meus afilhados, Anita e Jeferson, que viram meus maiores momentos de angústia no curso e minha amiga Aryel, que passou boa parte desses momentos comigo.

Aos amigos de estudo e aos meus irmãos de orientação.

Ao meu orientador Igor dos Santos Lima por toda a confiança em mim todos esses anos de orientação, durante o PIBIC e o mestrado.

Aos professores Anderson Luiz Pedrosa Porto, Emerson Ferreira de Melo e Alex Carrazedo Dantas por terem aceitado fazer parte da minha banca e pelas contribuições para a versão final desta dissertação.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos os grupos em que todo subgrupo tem defeito subnormal até 2. Dividimos nossa investigação no estudo dos grupos de defeito 1 e de defeito 2. Para os grupos de defeito 1, ditos grupos de Dedekind, nosso principal objetivo é demonstrar o Teorema de Dedekind-Baer que nos dará uma classificação dos grupos de Dedekind não abelianos. Para os grupos de defeito 2, apresentamos as classes $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{T}$ e estudamos as relações de continência entre as mesmas. Com base em Heineken e Mahdavianary, mostraremos ainda que os grupos nessas classes são nilpotentes com classe de nilpotência menor ou igual a 3.

Palavras-chave: Comutadores; defeito; subnormalidade; nilpotência; grupos dedekindianos.

Abstract

In this work we study groups in which every subgroup has subnormal defect less than or equal to 2. We divide our investigation into the study of groups with defect 1 and 2. For groups with defect 1, called Dedekind groups, our main objective is to prove the Dedekind-Baer Theorem that gives us a classification of non-abelian Dedekind groups. For groups with defect 2, we present the classes $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ and $\mathscr{T}$ and study the relations between them. Based in Mahdavianary and Heineken, we also show that groups in these classes are nilpotent with nilpotency class less than or equal to 3.

Keywords: Commutators; defect; subnormality; nilpotency; dedekindian groups.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	O conjunto dos números naturais; o conjunto dos números inteiros.
$\lvert G \rvert$	Ordem de um grupo G.
$exp(G)$	Expoente do grupo G.
$o(x)$	Ordem de um elemento x de um grupo.
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado pelos elementos do conjunto X.
$H \leq G, H < G$	H subgrupo de G; H subgrupo próprio de G.
$N \trianglelefteq G, N \triangleleft G$	N subgrupo normal de G; N subgrupo normal próprio de G.
$H \subseteq G, H \subsetneq G$	H subconjunto de G; H subconjunto próprio de G.
$H \cong G$	H é isomorfo a G.
x^y	$y^{-1}xy$.
$[x,y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$.
$[x,_n y]$	O comutador $[x,y,y,\ldots,y]$, com uma quantidade n fatores y.
$[H,K]$	O subgrupo comutador dos subgrupos H e K.
G'	O subgrupo comutador.
G''	O subgrupo comutador de G'.
$Z(G)$	O centro do grupo G.
$\gamma_n(G)$	O n-ésimo termo da série central inferior de G.
$Z_n(G)$	O n-ésimo termo da série central superior de G.
$cl(G)$	A classe de nilpotência de um grupo G.
$C_G(H)$	O centralizador de H em G.
$N_G(H)$	O normalizador de H em G.
H^G	Fecho normal de H em G.
$Aut(G)$	Grupo dos automorfismos de G.
D_{2n}	Grupo diedral de ordem $2n$.
S_n	Grupo simetrias de ordem $n!$.
$\mathscr{T}$	A classe de grupos em que todo subgrupo cíclico é 2-subnormal.
$\mathscr{A}$	A classe de grupos em que todo subgrupo abeliano é 2-subnormal.
$\mathscr{S}$	A classe de grupos em que todo subgrupo é 2-subnormal.

Conteúdo

Lista de Símbolos **ix**

Introdução **1**

1 Preliminares **7**

1.1 Comutadores 7

1.2 Subgrupos especiais e demais conceitos iniciais 13

1.3 Subnormalidade e Nilpotência 15

2 Grupos de defeito 1 **23**

2.1 Grupos de Dedekind 23

2.2 O Teorema de Dedekind-Baer 25

3 Grupos de defeito 2 **35**

3.1 Elementos Engel 35

3.2 Grupos de Defeito 2 40

4 Considerações Finais **55**

Bibliografia **57**

Apêndice A GAP - Groups, Algorithms and Programming **61**

Introdução

Um subgrupo H de G é chamado de **n-subnormal** se existe uma cadeia ascendente de subgrupos
$$H = G_m \trianglelefteq G_{m-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G \tag{$*$}$$
de tamanho $m \geq 0$. O tamanho da menor série $(*)$ de H a G é chamado de **defeito subnormal de H em G**. Escreveremos simplesmente "grupos de defeito n" quando quisermos mencionar grupos tais que todo subgrupo tem defeito subnormal no máximo n. A importância da análise da subnormalidade consiste, sobretudo, no fato de podermos simplificar o estudo da estrutura de um grupo em termos de estruturas mais simples ou até mesmo classificar determinados grupos.

Os subgrupos de defeito 1 são aqueles em que todos os seus subgrupos são normais. A esses grupos damos o nome de **grupos de Dedekind**, assim nomeados graças ao matemático alemão R. Dedekind, que investigou tais grupos em 1897. O grupo dos quatérnios é um exemplo clássico de um grupo não abeliano com essa propriedade e, em homenagem ao matemático William Rowan Hamilton que descobriu os quatérnios, chamamos os grupos não abelianos tais que todo subgrupo é normal de **grupos hamiltonianos**. Os grupos de Dedekind são nilpotentes, com classe de nilpotência no máximo 2. Um importante resultado sobre tais grupos é com respeito à sua classificação. O primeiro passo nesta direção foi dado por R. Dedekind, que determinou todos os grupos dedekindianos finitos [7]. Depois, em 1933, R. Baer estendeu o resultado para grupos infinitos [2]. Juntos conseguiram dar a seguinte classificação para os grupos de Dedekind:

Teorema A. Todos os subgrupos de G são normais se, e somente se, G é abeliano ou G é o produto direto de Q_8 com um 2-grupo abeliano elementar e um grupo A em que todos os seus elementos têm ordem ímpar, ou seja, $G = Q \times A \times E$, onde $Q \cong Q_8$, A é um grupo abeliano tal que todos os elementos possuem ordem ímpar e E é um 2-grupo abeliano elementar.

Os grupos metahamiltonianos (uma generalização dos grupos hamiltonianos) são grupos não abelianos tais que todos os seus subgrupos não abelianos são normais. Em [1], An e Zhang investigam as propriedades dos p-grupos metahamiltonianos finitos e tais propriedades são utilizadas neste mesmo artigo ao fazerem uma classificação dos p-grupos metahamiltonianos. Outras generalizações de grupos de Dedekind podem ser vistas em Cappitt [4] e Kappe [18].

Em defeitos maiores, o estudo da subnormalidade se mescla com o estudo dos grupos Engel.

Um elemento x é chamado de **Engel à direita** se, para todo $g \in G$, existe um inteiro não negativo n, dependendo de g e x, tal que

$$[x,_n g] = [\ldots[[x,\underbrace{g],g],\ldots,g}_{n-parcelas}] = 1.$$

Se n pode ser escolhido de maneira independente de g, dizemos que x é n-Engel à direita.

Um elemento x é chamado de **Engel à esquerda** se, para todo $g \in G$, existe um inteiro não negativo n, dependendo de g e x, tal que

$$[g,_n x] = [\ldots[[g,\underbrace{x],x],\ldots,x}_{n-parcelas}] = 1.$$

Se n pode ser escolhido independentemente de g, dizemos que x é n-Engel à esquerda.

Se um grupo G é tal que todos os seus elementos são n-Engel à esquerda e à direita, dizemos que G é um grupo **n-Engel**.

Denota-se por $L(G)$ e $R(G)$ o conjunto dos elementos Engel à direita e Engel à esquerda de um grupo G, respectivamente. Temos que $G = L(G)$ se, e somente se, $G = R(G)$, entretanto se o conjunto dos elementos Engel à direita (esquerda) formam um subconjunto próprio de G, não necessariamente temos a igualdade entre os conjuntos. Mais sobre a história dos grupos Engel pode ser visto em [3].

Um outro conceito frequentemente presente no estudo da subnormalidade é o conceito de **grupo de Baer**, que são os grupos tais que todo subgrupo cíclico é subnormal. Se o grupo é tal que todo subgrupo cíclico tem defeito no máximo n, então dizemos que G é um grupo n-Baer. Para $n = 1$, os grupos 1-Baer são precisamente os grupos de Dedekind. É também fato que se G é um grupo n-Baer, então G é um grupo $(n+1)$-Engel.

Em grupos finitos, temos a seguinte equivalência: G é nilpotente; Todo subgrupo de G é subnormal; G é um grupo de Baer; G é um grupo Engel. Essas equivalências não são verdadeiras para grupos infinitos. Temos, por exemplo, que se G é nilpotente, então todos os seus subgrupos são subnormais, porém a recíproca deste fato não é verdadeira, como mostra o grupo construído por Heineken e Mohamed em [15]. Tal grupo tem todos os subgrupos (próprios) subnormais e nilpotentes, mas o grupo não é nilpotente. Apesar de, em geral, não termos a equivalência entre os conceitos, as relações entre eles são fortemente abordadas no estudo da subnormalidade. Um grande passo nessa direção é o estudo de Roseblade em [36] que mostra que se $\mathfrak{U}_d$ é a classe de grupos tais que os subgrupos possuem defeito subnormal no máximo d e $\mathfrak{N}_c$ são os grupos nilpotentes de classe no máximo c, então existe uma função

$$\mu_1 : \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \quad \text{tal que} \quad \mathfrak{U}_d \subseteq \mathfrak{N}_{\mu_1(d)},\ \forall\, d \geq 0.$$

Em outras palavras, este resultado nos diz que se G é um grupo tal que todo subgrupo tem defeito d, então a classe de nilpotência é limitada por uma função dependendo apenas de d.

No caso dos grupos de defeito 2, relacionamos ao estudo das seguintes classes:

1. A classe dos grupos tais que todo subgrupo cíclico é 2 subnormal, denotada por $\mathscr{T}$.

2. A classe dos grupos tais que todo subgrupo abeliano é 2 subnormal, denotada por $\mathscr{A}$.

3. A classe dos grupos tal que todo subgrupo é 2 subnormal, denotada por $\mathscr{S}$.

A classe dos grupos em $\mathscr{T}$ são justamente os grupos 2-Baer. Tais grupos são 3-Engel e foram inicialmente estudados por Heineken, que no ano de 1971 em [14] mostrou o seguinte teorema envolvendo nilpotência e grupos em $\mathscr{T}$:

Teorema B. Assuma que $G \in \mathscr{T}$ tem um elemento de ordem infinita. Então:

1. G é 2-Engel;

2. $\gamma_4(G) = (\gamma_3(G))^3 = 1$.

Nesse mesmo artigo, Heineken mostra que se não tivermos a hipótese do elemento de ordem infinita no grupo G, então a classe de nilpotência de G é menor ou igual a 4 e, mais tarde, em 1973, Mahdavianary [25] completa a demonstração de que grupos em $\mathscr{T}$ têm classe de nilpotência menor ou igual a 4, fazendo o caso em que G é um grupo de torção. Também em 1973, Cappitt [5] utiliza da hipótese de existência de elementos de ordem infinita no grupo para dar uma cota para a nilpotência.

Podemos ver que $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}$ e do fato provado por Mahdavianary sobre a nilpotência dos grupos em $\mathscr{T}$, conseguimos estabelecer então a mesma cota para as outras classes, assim se G é um grupo tal que todo subgrupo é 2-subnormal, então sua classe de nilpotência é menor ou igual a 3.

Em [22], Mahdavianary mostra que temos uma equivalência entre as classes $\mathscr{A}$ e $\mathscr{T}$ sob algumas hipóteses e garante que as classes $\mathscr{A}$, $\mathscr{T}$ e $\mathscr{S}$ não são equivalentes em casos gerais. Tal resultado é dado pelo seguinte teorema:

Teorema C.

1. Seja G um grupo de torção sem elementos de ordem par ou um grupo com um elemento de ordem infinita. Então $G \in \mathscr{T}$ implica que $G \in \mathscr{A}$.

2. Existe um 2-grupo em $\mathscr{T}$ que não está em $\mathscr{A}$. Daí $\mathscr{T}$ nem sempre implica em $\mathscr{A}$.

3. Existe um grupo em $\mathscr{A}$ que não está em $\mathscr{S}$. Daí $\mathscr{A}$ nem sempre implica em $\mathscr{S}$.

Por fim, o leitor interessado em saber mais informações sobre as relações entre elementos Engel, subnormalidade e nilpotência poderá consultar o trabalho de Casolo [6] de 2010, onde há um compilado de resultados importantes sobre esses assuntos, desde trabalhos mais antigos até resultados mais recentes.

Falaremos agora sobre a organização desta dissertação:

No Capítulo 1, abordamos os conceitos fundamentais da Teoria de Grupos e algumas ferramentas básicas que serão necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Definimos e damos propriedades de comutadores, subgrupo comutador, subnormalidade e nilpotência. Usamos como base para a construção desse capítulo as referências Robinson [33], Rotman [37] e Hall [12].

No Capítulo 2, falamos dos grupos tais que todos os subgrupos possuem defeito 1. Apresentamos os grupos de Dedekind, dando propriedades e resultados sobre os mesmos. Por fim, trazemos a prova do **Teorema A**, cuja demonstração será dividida em lemas para um melhor entendimento do leitor. As principais referências utilizadas são Robinson [33] e Hall [12]. Exibimos nesse capítulo a demonstração usual do Teorema de Dedekind-Baer, porém recomendamos como leitura o artigo de Porto, Guimarães, Bessa [30] que apresenta uma nova prova para este teorema.

No Capítulo 3, focamos nos grupos com subgrupos de defeito subnormal 2. Nosso principal objetivo nesse capítulo será estudar a relação entre as classes de grupos $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{T}$. Num primeiro momento, falaremos sobre grupos Engel como ferramenta fundamental no estudo da subnormalidade e provaremos o **Teorema B**, que relaciona o estudo de grupos Engel, com o estudo da classe $\mathscr{T}$ e sua nilpotência, generalizando ao final este resultado para as demais classes. Ao final do capítulo, traremos vários lemas e resultados técnicos que nos permitirão demonstrar o **Teorema C** e garantir a não equivalência das classes $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{T}$.

No Capítulo 4, damos as Considerações Finais. Apresentamos alguns resultados adicionais. Exibimos também motivações e propostas para trabalhos futuros.

Por fim, no Apêndice A, colocamos algumas considerações sobre o GAP - Groups, Algorithms and Programming, que utilizamos durante a demonstração do **Teorema C** para gerar o contra-exemplo dado no item 3 de tal teorema.

Os comutadores da forma

$$[x,_n y] = [[x,_{n-1}, y], y]$$

que estamos utilizando neste trabalho são ditos **normados à esquerda**, os mesmos são vistos com mais frequência na literatura. Alguns autores, como Heineken em [13], utilizam comutadores **normados à direita** $[_n y, x]$, definidos da seguinte maneira:

$$[_0 y, x] = x \quad \text{e} \quad [_{n+1} y, x] = [y, [_n y, x]].$$

Alguns dos resultados aqui apresentadas, em especial os presentes em Heineken [13] e [14], possuem demonstrações feitas originalmente usando comutadores normados à direita. Com interesse em fazer uma padronização, fizemos as demonstrações usando sempre comutadores normados à esquerda. A mudança não é direta e exigiu, em alguns casos, mudanças nos enunciados de resultados auxiliares e nas demonstrações. No decorrer do texto, deixaremos explícito quais demonstrações foram adaptadas dessa forma.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, estudamos alguns resultados da Teoria de Grupos que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Assumimos que o leitor tem domínio sobre conceitos básicos da teoria, tais como Teorema de Lagrange, propriedade de subgrupos normais, Teoremas do Isomorfismo e Teorema da correspondência. O leitor mais familiarizado com definições, propriedades e caracterizações envolvendo os conceitos de comutadores, nilpotência e subnormalidade, poderá iniciar sua leitura a partir do Capítulo 2. O objeto central deste trabalho, mencionado na Introdução, envolve operações com comutadores, portanto começamos as preliminares por este tópico. Baseamos a construção deste capítulo principalmente nas referências dos autores Robinson [33], Rose [35] e Rotman [37]. Alguns resultados mais básicos da teoria de grupos serão apenas enunciados. Outros, mais difíceis de se encontrar, serão demonstrados a fim de facilitar a leitura ou colocaremos a referência para que o leitor tenha acesso à demonstração.

1.1 Comutadores

Dados um grupo G e elementos $x, y \in G$, definimos o **conjugado de x por y** como:

$$x^y := y^{-1}xy$$

e o **comutador de x e y** como:

$$[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy.$$

Dados elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$, podemos definir, de forma mais geral, o **comutador de peso** n destes elementos da seguinte forma:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] := [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Observação 1.1.1. Com relação ao comutador de dois elementos x e y em um grupo G, é possível notar que:

(i) $[x,y] = 1$ se, e somente se, x e y comutam e daí, G é abeliano se, e somente se, $[x,y] = 1$ para todos elementos x e y de G.

(ii) $[x,y]^{-1} = [y,x]$.

Por convenção, para dois elementos x e y em G, temos:

1. $[x] := x$.
2. $[x,_n y] := [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n \text{ parcelas}}]$.

Dados um grupo G e elementos $x, y, z \in G$, com frequência utilizaremos

$$[x,y]^{-z} := ([x,y]^{-1})^z,$$

como uma forma de simplificar a notação.

A proposição a seguir nos dará uma série de propriedades de comutadores que serão amplamente utilizadas no decorrer do trabalho. Algumas demonstrações não serão feitas por serem análogas a outros itens já demonstrados.

Proposição 1.1.2 (Propriedades de comutadores)**.** Sejam x, y, z elementos de um grupo G. Então

(i) $xy = yx[x,y]$;

(ii) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z] = [x,z][x,z,y][y,z]$;

(iii) $[x,yz] = [x,z][x,y]^z = [x,z][x,y][x,y,z]$;

(iv) $[x,y]^z = [x^z, y^z]$;

(v) $[x^{-1}, y] = [y,x]^{x^{-1}}$;

(vi) $[x, y^{-1}] = [y,x]^{y^{-1}}$;

(vii) $y^x = y[y,x]$;

(viii) $y^{y^x} = y[y,[y,x]]$;

(ix) Se $[x,y] = 1$, então $[x,y^{-1}] = 1.$;

(x) *(Identidade de Jacobi)* $[x,y,z^x][z,x,y^z][y,z,x^y] = 1.$

(xi) *(Hall-Witt)* $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1$

Demonstração. *(i)* $xy = (yxx^{-1}y^{-1})xy = yx[x,y].$

(ii)

$$\begin{aligned}
[x,z][x,z,y][y,z] &= [x,z][x,z]^{-1}y^{-1}[x,z]y[y,z] = y^{-1}[x,z]y[y,z] = [x,z]^y[y,z] \\
&= y^{-1}[x,z]y[y,z] = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz \\
&= [xy,z].
\end{aligned}$$

(iii) Similar ao item (i).

(iv)

$$\begin{aligned}
[x,y]^z &= z^{-1}x^{-1}(zz^{-1})y^{-1}(zz^{-1})x(zz^{-1})yz = (x^z)^{-1}(y^z)^{-1}x^zy^z \\
&= [x^z,y^z].
\end{aligned}$$

(v)

$$[y,x]^{x^{-1}} = x(y^{-1}x^{-1}yx)x^{-1} = xy^{-1}x^{-1}y = [x^{-1},y].$$

(vi) Similar ao item (v).

(vii)

$$y^x = x^{-1}yx = yy^{-1}x^{-1}yx = y[y,x].$$

(viii) Similar ao item (vii), basta aplicar a propriedade duas vezes e observar que $[y,y] = 1$.

(ix) Se $[x,y] = 1$, então

$$[x,y^{-1}] \overset{(vi)}{=} [y,x]^{y^{-1}} = ([x,y]^{y^{-1}})^{-1} = 1.$$

(x) Note que

$$
\begin{aligned}
[x,y,z^x] &= y^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}xyx^{-1}zx,\\
[z,x,y^z] &= x^{-1}z^{-1}xy^{-1}x^{-1}zxz^{-1}yz
\end{aligned}
$$

e

$$[y,z,x^y] = z^{-1}y^{-1}zx^{-1}z^{-1}yzy^{-1}xy.$$

Tomando $u = xyx^{-1}zx$, $v = zxz^{-1}yz$ e $w = yzy^{-1}xy$, temos

$$[x,y,z^x] = w^{-1}u, \quad [z,x,y^z] = u^{-1}v \ \text{ e } \ [y,z,x^y] = v^{-1}w.$$

Logo

$$[x,y,z^x][z,x,y^z][y,z,x^y] = w^{-1}uu^{-1}vv^{-1}w = 1.$$

(xi) Ver [33, 5.1.5].

$\square$

Dados dois subconjuntos H e K não vazios de um grupo G. Definimos o **subgrupo comutador de H e K** como:

$$[H,K] := \langle [h,k] \mid h \in H \text{ e } k \in K \rangle.$$

Note que como $[H,K]$ é subgrupo, então se $[h,k] \in [H,K]$, $[k,h] = [h,k]^{-1}$ também deverá pertencer. Dessa forma, podemos escrever o subgrupo $[H,K]$ como sendo gerado por elementos da forma $[k,h]$, onde $k \in K$ e $h \in H$. Logo, $[H,K] = [K,H]$.

Se tivermos $H = K = G$, chamaremos $G' = [G,G]$ de **subgrupo comutador de G**. Pelo fato de G ser abeliano se, e somente se, $[x,y] = 1$ para todos x,y em G, temos que G é abeliano se, e somente se $G' = 1$.

De forma semelhante ao caso em que tínhamos comutador de dois elementos, dados subconjuntos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ não vazios de G podemos definir indutivamente:

$$
\begin{aligned}
[X] &:= \langle X \rangle,\\
[X_1, X_2, X_3, \dots, X_n] &:= [[X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}], X_n].
\end{aligned}
$$

A proposição a seguir é um resultado elementar da Teoria de Grupos. Como referência o leitor pode consultar Rotman [37, Teorema 2.23].

Proposição 1.1.3. Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G, então G/N é abeliano se, e somente se, $G' \leq N$.

Observação 1.1.4. Note que o grupo G/G' é abeliano, basta ver que, para quaisquer dois elementos $x, y \in G$, temos

$$xyG' = yx[x,y]G' = yxG'.$$

Mais ainda, esse é o maior quociente abeliano de G. Chamamos o grupo G/G' de **abelianização de** G.

Definição 1.1.5. Um grupo G é dito ser **metabeliano** se existe um subgrupo normal abeliano N de G tal que G/N é abeliano.

Apresentaremos agora uma caracterização dos grupos metabelianos que será constantemente usada durante este trabalho.

Lema 1.1.6. *G é metabeliano se, e somente se, G' é abeliano.*

Demonstração. Suponha G' abeliano. Sabemos que G/G' é um grupo abeliano. Logo, por definição, G é metabeliano. Em contrapartida, se G é metabeliano, então existe um subgrupo normal N abeliano tal que G/N é abeliano. Da Proposição 1.1.3, temos que $G' \leq N$ e como N é abeliano, G' também será. $\square$

A partir da definição de subgrupo comutador, podemos construir indutivamente a seguinte série em G

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= G \\ G^{(1)} &= G' = [G^{(0)}, G^{(0)}] \\ &\vdots \\ G^{(n)} &= [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}], \end{aligned}$$

daí temos

$$G \geq G' \geq G'' = G^{(2)} \geq G^{(3)} \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq \ldots$$

Tal série é chamada de **Série Derivada de G** e nela temos que todos os fatores são abelianos.

Observação 1.1.7. Observe que $G'' = 1$ se, e somente se, G é metabeliano.

Definição 1.1.8. Um subgrupo H de um grupo G é dito ser um subgrupo **característico** se $\alpha(H) \subseteq H$, para todo $\alpha \in Aut(G)$.

Em particular, se H é um subgrupo característico de G, então H também será normal em G, já que a conjugação por um elemento também é um automorfismo de G.

Proposição 1.1.9. Sejam G um grupo, $H, K \leq G$ e x, y elementos de G. Se $\alpha : G \to H$ é um homomorfismo de grupos, então:

(i) $\alpha([x,y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$.

(ii) $\alpha([H,K]) = [\alpha(H), \alpha(K)]$.

Demonstração. *(i)* $\alpha([x,y]) = \alpha(x^{-1}y^{-1}xy) = \alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1}\alpha(x)\alpha(y) = [\alpha(x), \alpha(y)]$.

(ii) Basta ver que por *(i)* temos $\alpha[h,k] = [\alpha(h), \alpha(k)]$, sempre que $h \in H$ e $k \in K$.

□

Observe que se os subgrupos H e K dados no item (ii) da proposição acima fossem característicos e tivéssemos $\alpha \in Aut(G)$, então

$$\alpha([H,K]) = [\alpha(H), \alpha(K)] \subseteq [H,K]$$

daí o subgrupo comutador de H e K, $[H,K]$ também seria característico. Tal fato nos leva ao seguinte corolário.

Corolário 1.1.10. *(i)* Se H e K são subgrupos característicos (normais) de um grupo G, então $[H,K]$ também é um subgrupo característico de G.

(ii) O subgrupo comutador G' de um grupo G é um subgrupo característico.

A próxima proposição nos diz que para encontrar o subgrupo comutador de um grupo basta observar os comutadores de seus geradores e conjugados. Em algumas demonstrações, quando se fizer necessária a aplicação deste fato, utilizaremos de forma direta, sem citar.

Proposição 1.1.11. Se G é tal que $G = \langle X \rangle$, então

$$G' = \langle [x,y]^g \mid x, y \in X \text{ e } g \in G \rangle.$$

Um importante resultado envolvendo comutador de subgrupos é o Lema dos Três Subgrupos cuja demonstração pode ser encontrada em Robinson [33, 5.1.10].

Teorema 1.1.12 (Lema dos Três Subgrupos)**.** Sejam H, K, L subgrupos de um grupo G e N um subgrupo normal de G. Se dois entre os subgrupos $[H,K,L], [K,L,H]$ e $[L,H,K]$ estiverem contidos em N, então o terceiro também estará.

Outro resultado envolvendo comutadores de subgrupos é o seguinte:

Proposição 1.1.13. Sejam G um grupo e $N \leq G$, então $[N,G] \leq N$ se, e somente se, $N \trianglelefteq G$.

1.2 Subgrupos especiais e demais conceitos iniciais

Apresentaremos alguns subgrupos utilizados no trabalho e daremos alguns outros resultados e definições que se farão necessários nos próximos capítulos para um maior entendimento do leitor.

Definição 1.2.1. Sejam G um grupo, x um elemento de G e H um subgrupo de G. Definimos:

(i) a **classe de conjugação de** x **em** G como sendo o conjunto:

$$x^G := \{g^{-1}xg | g \in G\};$$

(ii) o **centralizador de** x **em** G por:

$$C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\};$$

(iii) o **centralizador de** H **em** G por:

$$C_G(H) = \{g \in G \mid gh = hg,\ h \in H\};$$

(iv) o **normalizador** de H em G como sendo:

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

Proposição 1.2.2. Seja G um grupo, então

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x).$$

Observação 1.2.3. Observe que se $g \in C_G(H)$, então $gh = hg$, para todo $h \in G$, logo $g \in N_G(H)$ e portanto $C_G(H) \leq N_G(H)$. Note também que $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$ e que H é normal em G se, e somente se, $N_G(H) = G$.

Exibiremos agora um teorema que relaciona os conceitos de normalizador e centralizador, sua demonstração pode ser encontrada em Rose [35, Teorema 5.26].

Teorema 1.2.4 (Teorema do Normalizador-Centralizador)**.** Sejam G um grupo e $H \leq G$. Então $C_G(H) \triangleleft N_G(H)$ e $N_G(H)/C_G(H)$ é isomorfo a um subgrupo de $Aut(H)$.

Proposição 1.2.5. Se G é um grupo cíclico, então $Aut(G)$ é abeliano.

Definição 1.2.6. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Definimos o **fecho normal de H em G** como o menor subgrupo normal de G que contém H. Denotamos tal subgrupo por H^G e o mesmo pode ser obtido da seguinte forma:

$$H^G := \langle h^g \mid h \in H,\ g \in G \rangle = \bigcap_{H \leq N \trianglelefteq G} N.$$

Definição 1.2.7. Um subgrupo M de G é dito ser **maximal** se $M \neq G$ e sempre que $H \leq G$ é tal que $M \leq H \leq G$, então $H = M$ ou $H = G$.

Outras definições imprescindíveis para este trabalho são as definições de grupo finitamente gerado e grupo de torção.

Definição 1.2.8. Um grupo G é dito **finitamente gerado** se existe um subconjunto finito X de G tal que $G = \langle X \rangle$.

Proposição 1.2.9. Se G é um grupo finitamente gerado e H é um subgrupo de G com índice finito, então H é finitamente gerado.

Demonstração. Ver Robinson [33, 1.6.11]. $\square$

Definição 1.2.10. O **expoente** de um grupo G é o menor m natural tal que $g^m = 1$, para todo $g \in G$.

Definição 1.2.11. Dado um grupo G, chamamos o conjunto dos elementos de ordem finita de G de **torção de** G, este conjunto é dado por

$$Tor(G) = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}.$$

Se G é tal que todos os seu elementos possuem ordem finita, ou seja, se $G = Tor(G)$, então dizemos que G é um **grupo de torção**.

Em geral, $Tor(G)$ não é um subgrupo de G, como exemplificado a seguir.

Exemplo 1.2.12. No grupo diedral de ordem infinita

$$D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$$

os elementos a e b estão em $Tor(G)$, porém o elemento ab tem ordem infinita, então $Tor(G)$ não pode ser subgrupo.

Daremos então uma condição suficiente para que $Tor(G) \leq G$ e relacionaremos o conceito de grupo de torção e grupo finitamente gerado.

Proposição 1.2.13. Se G é um grupo abeliano, então $Tor(G) \leq G$.

Proposição 1.2.14. Se G é abeliano, finitamente gerado por elementos de ordem finita, então G é de torção.

Demonstração. Seja $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ onde $o(x_i) = m_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Se $a \in G$, então, como G é abeliano, a pode ser escrito da seguinte forma:

$$a = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n},$$

onde cada i_j é um inteiro positivo. Daí temos que

$$a^{m_1 m_2 \ldots m_n} = (x_1^{i_1})^{m_1 m_2 \ldots m_n} (x_2^{i_2})^{m_1 m_2 \ldots m_n} \ldots (x_n^{i_n})^{m_1 m_2 \ldots m_n} = 1.$$

Assim, a deverá ter ordem finita e pela arbitrariedade de a segue que G é de torção. □

O teorema a seguir também relaciona grupos de torção com grupos finitamente gerados. sua demonstração pode ser encontrada em Robinson [33, 4.2.9].

Teorema 1.2.15. Se G é um grupo abeliano de torção, finitamente gerado, então G é finito.

Teorema 1.2.16 (Lema de Bézout)**.** Dados dois inteiros não nulos m e n, existem inteiros r e q tais que

$$rm + qn = mdc(m,n).$$

1.3 Subnormalidade e Nilpotência

Abordaremos agora as definições principais do nosso trabalho, as de subnormalidade, defeito e nilpotência.

Definição 1.3.1. Um subgrupo H de G é chamado de **n-subnormal** se existe uma cadeia ascendente de subgrupos

$$H = G_m \trianglelefteq G_{m-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G \qquad (*)$$

de tamanho $m \geq 0$. Considerando todas as cadeias de subgrupos de H a G, existe pelo menos uma de menor tamanho d. O tamanho da menor série $(*)$ de H a G é chamado de **defeito subnormal de H em G**.

Exemplo 1.3.2.

(i) A classe de grupos tal que todo subgrupo tem defeito 0 contém apenas o grupo trivial, pois o único subgrupo em um grupo G com defeito 0 é o próprio G. Assim, se todos os subgrupos de G possuem defeito 0, então G deve ser trivial.

(ii) Grupos de defeito 1 são os grupos tais que todo subgrupo é normal. Abordaremos tais grupos de forma mais ampla no Capítulo 2 deste trabalho.

Considere $H \leq G$ a série de fechos normais $(H^{G,n})_{n\in\mathbf{N}}$ definida recursivamente por

$$H^{G,0} = G, \quad H^{G,1} = H^G \quad e \quad H^{G,n+1} = H^{H^{G,n}}.$$

Temos que H é subnormal em G se, e somente se $H^{G,d} \leq H$ para algum inteiro positivo d. Além disso, d é o defeito de H em G. Mostraremos no Capítulo 3 o caso em que os subgrupos possuem defeito 2.

Um grupo G é dito **nilpotente** se possui uma **série central**, isto é, uma série de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G$$

tais que cada G_i $(1 \leq i \leq n)$, é normal em G e cada fator

$$\frac{G_{j+1}}{G_j} \leq Z\left(\frac{G}{G_j}\right), 0 \leq j \leq n-1.$$

Exemplo 1.3.3.

(i) Grupos abelianos são nilpotentes.

(ii) p-grupos finitos são nilpotentes.

(iii) Para todo $n \geq 3$, S_n não é nilpotente.

(iv) D_∞ é um grupo infinito não nilpotente.

Uma propriedade importante sobre grupos nilpotentes é a seguinte:

Teorema 1.3.4. Seja $G \neq 1$ um grupo nilpotente, então $Z(G) \neq 1$.

Demonstração. De fato, se tivéssemos $G \neq 1$ um grupo nilpotente e $Z(G) = 1$, então tomando uma série central em G,

$$\frac{G_1}{G_0} \leq Z\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

o que implicaria em

$$G_1 \leq Z(G) = 1.$$

Analogamente, tomando indutivamente G_2, G_3, ..., chegaríamos em

$$1 = G_0 = G_1 = G_2 = \cdots = G_i = \dots$$

e a série não alcançaria G. Um absurdo, dado que G é nilpotente. $\square$

O tamanho da série central de menor comprimento é dito ser a **classe de nilpotência de** G, denotamos por $cl(G)$. Por convenção, se $G = 1$ dizemos que G é nilpotente de classe 0.

Exemplo 1.3.5.

(i) Grupos abelianos são grupos tais que a classe de nilpotência é 1.

(ii) Seja p um primo. Os grupos não abelianos de ordem p^3 são grupos nilpotentes de classe 2.

(iii) Os 2-grupos semidiedral e diedral dados por:

$$SD_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1, x^y = x^{-1+2^{n-2}} \rangle, \text{ para } n \geq 4$$

e

$$D_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ x^y = x^{-1} \rangle, \text{ para } n \geq 3,$$

respectivamente, são grupos de ordem 2^n e classe de nilpotência $n-1$.

Proposição 1.3.6. Sejam G um grupo nilpotente e $H \leq G$. Então:

i) H é nilpotente.

ii) Se $H \trianglelefteq G$, então G/H é nilpotente.

iii) O produto direto de uma quantidade finita de grupos nilpotentes é nilpotente.

Observação 1.3.7. O produto direto de uma quantidade infinita de grupos nilpotentes pode não ser nilpotente, como é o exemplo do seguinte grupo:

$$\prod_{n=1}^{\infty} D_{2^n} = D_2 \times D_{2^2} \times \cdots \times D_{2^n} \times \dots.$$

Temos que cada parcela do produto é nilpotente, por serem 2-grupos, porém o produto não é. Basta observar que para todo inteiro positivo n podemos tomar um subgrupo de classe de nilpotência n. Portanto a classe de nilpotência de $G = \prod_{n=1}^{\infty} D_{2^n}$ não pode ser limitada.

Vamos definir agora as séries centrais inferior e superior de G.

Seja G um grupo, definamos recursivamente os seguintes subgrupos de G:

$$\begin{aligned}\gamma_1(G) &= G,\\ \gamma_{n+1}(G) &= [\gamma_n(G),G],\ n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Temos a seguinte série em G

$$G=\gamma_1(G)\geq\gamma_2(G)\geq\cdots\geq\gamma_i(G)\geq\cdots.$$

Esta série é chamada **Série Central Inferior**.

De semelhante modo, consideremos $Z_0(G)=1$ e definamos, para cada $n\in\mathbb{N}$, $Z_n(G)$ como:

$$Z\left(\frac{G}{Z_{n-1}(G)}\right)=\frac{Z_n(G)}{Z_{n-1}(G)}.$$

Temos a série

$$1=Z_0(G)\leq Z_1(G)\leq\cdots\leq Z_i(G)\leq\cdots$$

em G e tal série é chamada de **Série Central Superior**.

Tais séries são importantes séries centrais de G. Durante o desenvolver deste trabalho, utilizaremos com frequência a série central inferior dos grupos apresentados. Apresentaremos agora algumas relações entre estas séries e a classe de nilpotência de G.

Proposição 1.3.8. Seja $1=G_0\leq G_1\leq\cdots\leq G_n=G$ uma série central em um grupo nilpotente G. As seguintes afirmações são válidas:

(i) $\gamma_i(G)\leq G_{n-i+1}$. Então $\gamma_{n+1}(G)=1$.

(ii) $G_i\leq Z_i(G)$. Então $Z_n(G)=G$.

(iii) Se $cl(G)=c$, então ambas as séries centrais superior e inferior possuem comprimento igual a c. Além disso, c é o menor inteiro positivo tal que $\gamma_{c+1}(G)=1$ e $Z_c(G)=G$.

Demonstração. Ver Robinson [33, 5.1.9]. □

Geralmente em um grupo G não temos que a série central inferior atinge 1, nem que a série central superior atinge G, mas tal fato deve acontecer se G é nilpotente. Mais ainda, em observância das definições das séries centrais superior e inferior de G e da proposição anterior, podemos ver que G é nilpotente se, e somente se, existe c tal que $\gamma_{c+1}=1$ e $Z_c(G)=G$.

Proposição 1.3.9. Seja G um grupo. Temos que $G'\leq Z(G)$ se, e somente se, G é um grupo nilpotente de classe 2.

Demonstração. Basta notar que $G' \leq Z(G)$ se, e somente se tivermos

$$\gamma_3(G) = [\gamma_2(G), G] = [G', G] = 1.$$

$\square$

Teorema 1.3.10. Para qualquer grupo G, temos que

$$[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G),$$

com inteiros $i, j \geq 1$.

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre i.

Para $i = 1$ e um j qualquer,

$$[\gamma_1(G), \gamma_j(G)] = [G, \gamma_j(G)] = \gamma_{1+j}(G),$$

por definição.

Suponhamos agora $i \geq 2$ e que vale

$$[\gamma_{i-1}(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i-1+j}(G).$$

Logo,

$$[\gamma_{i-1}(G), \gamma_j(G), G] \leq [\gamma_{i-1+j}(G), G] = \gamma_{1+j}(G)$$

e

$$[\gamma_j(G), G, \gamma_{i-1}(G)] \leq [\gamma_{j+1}(G), \gamma_{i-1}(G)] = [\gamma_{i-1}(G), \gamma_{j+1}(G)] \leq \gamma_{1+j}(G),$$

daí, do Lema dos Três Subgrupos, Teorema 1.1.12, segue que

$$[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] = [G, \gamma_{i-1}(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G).$$

$\square$

Para grupos finitos, existe uma caracterização dos grupos nilpotentes. Novamente, assumiremos familiaridade do leitor com conceitos da Teoria de Grupos, em especial, com conceitos da Teoria de Sylow.

Teorema 1.3.11. Seja G um grupo finito. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G é nilpotente;

(ii) todo subgrupo de G é subnormal;

(iii) se $H < G$, então $H < N_G(H)$;

(iv) todo subgrupo maximal de G é normal;

(v) G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.

Demonstração. Ver Robinson [33, 5.2.4]. □

Observação 1.3.12. No demonstração dada em Robinson [33, 5.2.4] (referente ao Teorema 1.3.11), ao mostrar que *(i)* implica em *(ii)*, o autor constrói uma série subnormal para $H \leq G$ utilizando a série central superior da seguinte forma:

$$H = HZ_0 \trianglelefteq HZ_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq HZ_c = G.$$

Ao construir tal série, não é usada a hipótese de G ser finito. Assim, para o caso infinito, temos que se G é nilpotente, então todos os seus subgrupos são subnormais. A recíproca deste fato não é verdadeira, como mostra o grupo construído por Heineken e Mohamed em [15]. O grupo construído é tal que todo subgrupo é subnormal e nilpotente, mas o grupo não o é.

Definição 1.3.13. Um grupo G é dito ser **localmente nilpotente** se todos os seus subgrupos finitamente gerados são nilpotentes.

Observação 1.3.14. Note que se G é nilpotente, então seus subgrupos serão também nilpotentes. Em particular, seus subgrupos finitamente gerados serão nilpotentes. Dessa forma, um grupo G ser nilpotente implica em ser localmente nilpotente. Entretanto a recíproca não vale, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.15. O grupo

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} D_{2^n} = D_2 \times D_4 \times \cdots \times D_{2^n} \times \ldots$$

não é nilpotente, porém é localmente nilpotente. De fato, tome uma quantidade finita de geradores e considere o respectivo subgrupo gerado por esses geradores. Esse subgrupo é subgrupo de um produto direto de uma quantidade finita de grupos diedrais de ordem potência de 2, que é nilpotente. Logo, tal subgrupo é necessariamente nilpotente. Assim, cada subgrupo finitamente gerado é nilpotente, mas o grupo não o é.

Usaremos neste trabalho o seguinte resultado sobre grupos localmente nilpotentes

Lema 1.3.16. Seja G um grupo localmente nilpotente, então os elementos de ordem finita em G formam um subgrupo característico de G.

Demonstração. Ver Robinson [33, 12.1.1]. □

Sabemos que, dados x e y em um grupo G, a relação $(xy)^n = x^n y^n$ é valida se G for abeliano, porém, utilizando a relação dada no item *(i)* da Proposição 1.1.2, podemos reorganizar os elementos, considerando os comutadores. A **Fórmula de Hall-Petresco**, também conhecida como **Fórmula de Compilação de Hall**, nos oferece um substituto válido em um grupo qualquer considerando-se os comutadores, como visto abaixo.

Teorema 1.3.17 (Fórmula de Hall-Petresco)**.** [9, Apêndice A] Sejam G um grupo e $x, y \in G$, então existem elementos $c_i(x,y) \in \gamma_i(\langle x,y \rangle)$ tais que

$$x^k y^k = (xy)^k c_2^{\binom{k}{2}} c_3^{\binom{k}{3}} \dots c_k^{\binom{k}{k}}.$$

Capítulo 2

Grupos de defeito 1

Nossa intenção neste capítulo é estudar os grupos de defeito 1, ou seja, os grupos em que todo subgrupo é normal. Veremos as principais características destes grupos e, ao final, faremos a demonstração do Teorema A, conhecido como Teorema de Dedekind-Baer, que nos dará uma caracterização dos grupos de Dedekind. Sua demonstração será dividida em lemas e proposições com o objetivo de facilitar o entendimento. As principais referências utilizadas aqui foram Robinson [33, p.143-145] e Porto [30].

2.1 Grupos de Dedekind

Definição 2.1.1. Um grupo G é dito de **Dedekind** ou **dedekindiano** se todos os seus subgrupos são normais.

Um exemplo de uma classe de grupos dedekindianos são os grupos abelianos. Existem também grupos dedekindianos não abelianos, tais grupos recebem uma nomenclatura diferente.

Definição 2.1.2. Um grupo de Dedekind não abeliano é chamado **hamiltoniano.**

Exemplo 2.1.3. *(i)* O grupo dos **quatérnios**, dado por:

$$Q_8 = \langle x, y \mid x^4 = 1, y^2 = x^2, x^y = x^{-1} \rangle$$

é um grupo de Dedekind não abeliano, ou seja, hamiltoniano. Basta notar que os subgrupos não triviais de Q_8 são: $\langle x^2 \rangle$, que é normal pois é o centro de Q_8; e os subgrupos cíclicos $\langle x \rangle, \langle y \rangle$, e $\langle xy \rangle$, que são normais por terem índice 2 em Q_8.

(ii) O **quatérnio Generalizado**, dado por:

$$Q_{2^n} = \langle x,y|\, x^{2^{n-1}} = 1, y^2 = x^{2^{n-2}}, x^y = x^{-1}\rangle, \quad n \geq 3,$$

não é um grupo de Dedekind se $n > 4$, pois, neste caso, $\langle y\rangle$ não é normal em Q_{2^n}.

Mais à frente, na seção 2.2, veremos que existe uma classificação para os grupos hamiltonianos e que em cada grupo hamiltoniano existirá uma cópia de Q_8.

Observação 2.1.4. i) Note que se G é um grupo de Dedekind e $H \leq G$, então H e G/H também são grupos de Dedekind. *De fato, se $K \leq H$, então K também será um subgrupo de G e como $K \trianglelefteq G$, temos $K \trianglelefteq H$. O quociente segue do Teorema da Correspondência.*

ii) Se H e K são grupos de Dedekind, então $H \times G$ não necessariamente é um grupo de Dedekind. Um exemplo é o grupo $Q_8 \times Q_8$. Temos que $D = \{(g,g)|\ g \in Q_8\}$ é um subgrupo de $Q_8 \times Q_8$ que não é normal em $Q_8 \times Q_8$. Esse resultado também pode ser visto como consequência de que $Q_8 \times C_4$ não é um grupo de Dedekind. De fato, o subgrupo $H = \langle (x,a) \mid x \in Q_8,\ a \in C_4,\ x^4 = 1,\ a^4 = 1\rangle$ não é normal em $Q_8 \times C_4$, já que $(x,a)^{(y,1)} = (x^{-1},a) \notin H$. Esse exemplo será muito importante para um melhor entendimento do item ii) do Lema 2.2.5.

A proposição a seguir nos diz que para verificar que um grupo é de Dedekind basta observar a normalidade de seus subgrupos cíclicos.

Proposição 2.1.5. Se todo subgrupo cíclico em um grupo G é normal, então G é um grupo de Dedekind.

Demonstração. Sejam $1 \neq H \leq G$ e $x \in H$ um elemento não trivial de H. Note que, como $\langle x\rangle$ é normal em G,

$$x^g \in \langle x\rangle \leq H, \quad \forall g \in G.$$

Assim, $H \trianglelefteq G$ e da arbitrariedade de H, temos que G é um grupo de Dedekind. □

Como em um grupo de Dedekind todos os subgrupos são normais, em particular, todos os subgrupos cíclicos são normais. Desta forma, poderíamos reescrever a proposição anterior da seguinte forma: *G é um grupo de Dedekind se, e somente se, todos os seus subgrupos cíclicos são normais.*

Apresentaremos agora um importante resultado com relação à nilpotência dos grupos de Dedekind.

Proposição 2.1.6. Todo grupo de Dedekind é nilpotente de classe no máximo 2.

Demonstração. Se G é abeliano, então G é nilpotente de classe 1. Seja G um grupo de Dedekind não abeliano (hamiltoniano). Tome $x \in G$, então $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, daí $N_G(\langle x \rangle) = G$. Pelo Teorema do Normalizador-Centralizador, Teorema 1.2.4, temos que

$$\frac{N_G(\langle x \rangle)}{C_G(\langle x \rangle)} \cong H \leq Aut(\langle x \rangle).$$

Como $\langle x \rangle$ é cíclico, da Proposição 1.2.5 temos que $Aut(\langle x \rangle)$ é abeliano, então do fato que

$$\frac{G}{C_G(\langle x \rangle)} = \frac{N_G(\langle x \rangle)}{C_G(\langle x \rangle)},$$

segue que $\dfrac{G}{C_G(\langle x \rangle)}$ é abeliano, dessa forma, para todo $x \in G$, temos da Proposição 1.1.3 que $G' \leq C_G(\langle x \rangle)$, o que nos diz que

$$G' \leq \bigcap_{x \in G} C_G(\langle x \rangle) = \bigcap_{x \in G} C_G(x) = Z(G).$$

Portanto, $G' \leq Z(G)$ e G é nilpotente de classe 2, pela Proposição 1.3.9. □

A seguir temos um resultado sobre os elementos de ordem 2 em um grupo de Dedekind.

Proposição 2.1.7. Seja G um grupo dedekindiano. Se $g \in G$ e $o(g) = 2$, então $g \in Z(G)$.

Demonstração. De fato, se G é abeliano, então o resultado é direto. Suponhamos então G não abeliano. Tome $g \in G$, como G é tal que todos os seus subgrupos são normais, temos $g^h \in \langle g \rangle$, para todo $h \in G$. Daí, se $o(g) = 2$, $\langle g \rangle = \{1, g\}$, então $g^h = 1$ ou $g^h = g$.

Se $g^h = 1$, então $g = 1$ e $g \in Z(G)$. Por outro lado, se $g^h = g$ para cada $h \in G$, então $gh = hg$, o que nos diz que $g \in Z(G)$. □

2.2 O Teorema de Dedekind-Baer

Daremos agora alguns lemas técnicos e resultados que serão utilizados na demonstração do Teorema de Dedekind-Baer.

Lema 2.2.1. Seja $G = \langle x, y \rangle$ um grupo tal que $[x, y] \in Z(G)$. Então, para $r \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$, são válidos:

i) $[x^r, y] = [x, y^r] = [x, y]^r$.

ii) $(xy)^r = x^r y^r [y,x]^{\binom{r}{2}}$.

Demonstração. Note primeiramente que, como $[x,y] \in Z(\langle x,y\rangle)$, temos $[x,y]^k = [x,y]$ para todo $k \in \langle x,y\rangle$.

i) Mostraremos que $[x^r,y] = [x,y]^r$ utilizando indução sobre r.

Para $r = 2$,

$$[x^2,y] = [xx,y] = [x,y]^x[x,y] = [x,y][x,y] = [x,y]^2.$$

Suponhamos agora $r > 2$ e que a igualdade seja válida para $r-1$. Então, como $[x,y] \in Z(G)$,

$$[x^r,y] = [xx^{r-1},y] = [x,y]^{x^{r-1}}[x^{r-1},y] = [x,y][x,y]^{r-1} = [x,y]^r.$$

A segunda igualdade segue de forma análoga.

ii) A demonstração será feita utilizando indução sobre $r \geq 2,\ r \in \mathbb{N}$.

Para $r = 2$, temos:

$$x^2y^2[y,x]^{\binom{r}{2}} = x^2y^2[y,x]^{\binom{2}{2}} = x^2y^2[y,x] = x^2y[y,x]y = x^2y(y^{-1}x^{-1}yx)y = (xy)^2.$$

Suponhamos agora que a igualdade é valida para algum $r \geq 2$. Então

$$(xy)^{r+1} = (xy)^r(xy) = x^ry^r[y,x]^{\binom{r}{2}}xy = x^ry^rxy[y,x]^{\binom{r}{2}}. \tag{2.1}$$

Observe que

$$y^rx = xy^r[y^r,x] \overset{i)}{=} xy^r[y,x]^r$$

e substituindo na equação (2.1) obtemos:

$$\begin{aligned}
(xy)^{r+1} &= x^rxy^r[y,x]^ry[y,x]^{\binom{r}{2}} \\
&= x^{r+1}y^{r+1}[y,x]^r[y,x]^{\binom{r}{2}} \\
&= x^{r+1}y^{r+1}[y,x]^r[y,x]^{\frac{r(r-1)}{2}} \\
&= x^{r+1}y^{r+1}[y,x]^{\left[\frac{r(r-1)}{2}+r\right]} \\
&= x^{r+1}y^{r+1}[y,x]^{\frac{r(r+1)}{2}} \\
&= x^{r+1}y^{r+1}[y,x]^{\binom{r+1}{2}}
\end{aligned}$$

como desejado.

$\square$

Recordemos que em um grupo nilpotente de classe no máximo 2, temos $G' \leq Z(G)$, assim podemos reescrever o Lema 2.2.1 tomando como hipótese G nilpotente de classe no máximo 2.

Lembremos que o grupo dos quatérnios Q_8 é um exemplo de grupo hamiltoniano. Veremos a seguir que todo grupo hamiltoniano deve possuir uma cópia de Q_8.

Teorema 2.2.2. Seja G um grupo hamiltoniano, então G possui um subgrupo isomorfo a Q_8.

Demonstração. Suponha que todo subgrupo de G é normal e G é não abeliano. Sejam x e y dois elementos não comutativos de G e $c = [x,y]$. Como $\langle x \rangle \lhd G$ *e* $\langle y \rangle \lhd G$, temos que $c = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y = y^{-x}y \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ e portanto $x^r = c = y^s$, com $r, s \notin \{0,1\}$ inteiros. Escrevendo $Q = \langle x, y \rangle$, vemos que $c \in Z(Q)$, pois c comuta com elementos de $\langle x \rangle$ e de $\langle y \rangle$. Além disso, como $[x,y]^x, [x,y]^y \in \langle c \rangle$, temos que $Q' = \langle c \rangle \leq Z(Q)$ e portanto Q é nilpotente de classe 2. Desta maneira, estamos sob as hipóteses do Lema 2.2.1 e segue que

$$c^r = [x,y]^r = [x^r, y] = [c,y] = 1,$$

o que implica que c tem ordem finita e como $c = x^r = y^s$, deduzimos que x e y têm ordens finitas. Logo Q/Q' é abeliano e finitamente gerado por elementos de ordem finita, então da Proposição 1.2.14 temos que Q/Q' é de torção e do Teorema 1.2.15 segue que Q/Q' é finito. Como Q/Q' é finito e Q' também o é, devemos ter que Q é finito.

Sejam $o(x) = m$ e $o(y) = n$. Suponha que escolhemos x e y de forma que $m+n$ sejam os menores possíveis tal que $c = [x,y] \neq 1$. Considere p um primo divisor de m. Como $o(x^p) < o(x)$, segue pela minimalidade de $m+n$ que $[x^p, y] = 1$ e como consequência

$$c^p = [x,y]^p = [x^p, y] = 1,$$

isto é, c tem ordem p. Note que tomamos um primo p qualquer que divide m e obtivemos que a ordem de c é p. Dessa forma, não podemos ter mais de um primo divisor de m. Logo, m é uma potência de p. Tomando agora um primo q divisor de n, também obtemos

$$c^q = [x,y]^q = [x, y^q] = 1$$

e podemos concluir que n é um potência de q. Como

$$c^p = c^q = 1,$$

devemos ter $p = q$. Consideraremos então m e n potências de p.

Como c é uma potência de x e de y, existem inteiros k, l, r_1, s_1 tais que $x^{kp^{r_1}} = c = y^{lp^{s_1}}$ e $mdc(k, p) = 1 = mdc(l, p)$, consequentemente, $mdc(k, o(x)) = mdc(l, o(y)) = 1$. Pelo Lema de Bézout, Teorema 1.2.16, existem inteiros k', q, l' e z, tais que:

$$kk' + o(x)q = 1 \ e \ ll' + o(y)z = 1.$$

Logo, $kk' \equiv 1(mod \ o(x))$ e $ll' \equiv 1(mod \ o(y))$.

Note que, pelo Lema 2.2.1, temos $[x^{l'}, y^{k'}] = [x, y]^{l'k'} = c^{k'l'}$. Além disso,

$$c^{k'} = \left(x^{kp^{r_1}}\right)^{k'} = (x^{kk'-1}x)^{p^{r_1}} = x^{p^{r_1}},$$

daí

$$(x^{l'})^{p^{r_1}} = (x^{p^{r_1}})^{l'} = c^{k'l'} = [x^{l'}, y^{k'}] \tag{2.2}$$

e

$$(y^{l'})^{p^{s_1}} = [x^{l'}, y^{k'}] = c^{k'l'}. \tag{2.3}$$

Visando simplificar a notação, denotaremos $x' = x^{l'}$, $y' = y^{k'}$ e $c' = c^{k'l'}$, então

$$(c')^p = (c^p)^{k'l'} = 1,$$

o que nos diz que $o(c') = p$ e, por esse motivo,

$$1 = (c')^p = ((x')^{p^{r_1}})^p = ((y')^{p^{s_1}})^p. \tag{2.4}$$

Mostraremos agora que $o(x') = p^{r_1+1}$ e que $o(y') = p^{s_1+1}$.

Já sabemos da equação (2.4) que $((x')^{p^{r_1}})^p = 1$. Suponha então que $o(x') < p^{r_1+1}$, assim, da equação (2.2), temos $c^{l'k'} = c' = (x')^{p^{r_1}} = 1$, mas como $o(c) = p$, então $p | l'k'$, um absurdo, pois $p \nmid l'$ e $p \nmid k'$, portanto $o(x') = p^{r_1+1}$. De semelhante forma, se tivéssemos $o(y') < p^{s_1+1}$, então utilizando a equação (2.3) chegaríamos no mesmo absurdo em que $p | l'k'$, daí temos $o(y') = p^{s_1+1}$.

Faremos a seguinte substituição $x = x', y = y'$ e $c = c'$ a fim de simplificar notação e pela forma que x e y foram tomados, vamos supor, sem perda de generalidade, que $r_1 \geq s_1$.

Tomando $y_1 = x^{-p^{r_1-s_1}} y \in Q$, temos

$$[x, y_1] = [x, x^{-p^{r_1-s_1}} y] = [x, y][x, x^{-p^{r_1-s_1}}]^y = [x, y] = c \neq 1,$$

entretanto, pela minimalidade de $m+n$, devemos ter $o(y_1) \geq o(y) = p^{s_1+1}$. Logo $y_1^{p^{s_1}} \neq 1$ e, pelo Lema 2.2.1,

$$y_1^{p^{s_1}} = (x^{-p^{r_1-s_1}}y)^{p^{s_1}} = x^{-p^{r_1}}y^{p^{s_1}}[y, x^{-p^{r_1-s_1}}]^{\binom{p^{s_1}}{2}},$$

portanto

$$\begin{aligned} y_1^{p^{s_1}} &= c^{-1}c[x^{-p^{r_1-s_1}}, y]^{-1\binom{p^{s_1}}{2}} \\ &= [x^{-1}, y]^{-p^{r_1-s_1}\binom{p^{s_1}}{2}} \\ &= [x, y]^{p^{r_1-s_1}\binom{p^{s_1}}{2}} \\ &= \left(c^{p^{r_1-s_1}}\right)^{\frac{p^{s_1}(p^{s_1}-1)}{2}} \\ &= c^{\frac{p^{r_1}(p^{s_1}-1)}{2}}, \end{aligned}$$

basta lembrar que $c = x^{p^{r_1}} = y^{p^{s_1}} = [x, y]$ e que $\binom{p^{s_1}}{2} = \dfrac{p^{s_1}(p^{s_1}-1)}{2}$.

Mostraremos que p deve ser 2. De fato, se p fosse um número ímpar, teríamos que p^{r_1} seria também um número ímpar, daí $p^{s_1}-1$ deveria ser par, mas como $o(c) = p$ e p divide $\dfrac{p^{r_1}(p^{s_1}-1)}{2}$, teríamos $y_1^{p^{s_1}} = 1$, um absurdo. Portanto, p deve ser par. Além disso, $r_1 = 1$, pois caso contrário $\dfrac{p^{r_1}(p^{s_1}-1)}{2}$ continuaria sendo um múltiplo de p e novamente teríamos $y_1^{p^{s_1}} = 1$. Com isso podemos concluir que $p = 2$ e $r_1 = 1$.

Sendo $r_1 \geq s_1$, obtemos $s_1 = 1$, daí $o(x) = o(y) = 2^2 = 4$ e x e y são tais que

$$x^4 = 1 \text{ e } c = [x, y] = x^2 = y^2.$$

Além disso,

$$x^2 = [x, y] = x^{-1}x^y$$

o que implica que $x^3 = x^y$ e daí $x^{-1} = x^y$. Portanto $Q = \langle x, y \rangle$ é isomorfo a Q_8, como desejávamos.

□

Observação 2.2.3. Na demonstração dada no Teorema 2.2.2, tomamos dois elementos que não comutavam e chegamos à conclusão de que eles deveriam ter ordem potência de 2. Assim, se G é hamiltoniano, então quaisquer dois elementos de G que não comutam devem ter ordem potência de 2. Note então que se g é um elemento de ordem ímpar em um grupo hamiltoniano, ele deverá comutar com qualquer outro elemento em G. Dessa forma, em um grupo hamiltoniano todo elemento de ordem ímpar está no centro.

O lema a seguir é usado na demonstração do Lema 2.2.5 e nos informa quanto à classe de conjugação de um elemento y de ordem 4 em um grupo hamiltoniano.

Lema 2.2.4. Seja G um grupo hamiltoniano e y um elemento em G de ordem 4. Então $y^G = \{y, y^{-1}\}$.

Demonstração. Como G é hamiltoniano, devemos ter $y^G \subseteq \langle y \rangle$ e assim, para qualquer g arbitrário em G, temos que $y^g \in \{1,\ y,\ y^2, y^3\}$.

Se $y^g = 1$, então $y = 1$, um absurdo. Como y^2 tem ordem 2, temos que $y^2 \in Z(G)$ (veja Proposição 2.1.7) e daí se $y^g = y^2$, então $y = y^2$, uma contradição. Sabemos que $y \in y^G$ e que y^G deve ter mais de um elemento, pois se não tivesse, concluiríamos que $y \in Z(G)$, o que é um absurdo. Portanto $y^3 = y^{-1} \in y^G$ e $y^G = \{y, y^{-1}\}$, como desejávamos. □

Lema 2.2.5. Sejam G um grupo hamiltoniano e $x, y \in G$, com $\langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, x^{-1} = x^y \rangle = Q_8$. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:

i) $G = C_G(Q_8)Q_8$.

ii) G é um grupo de torção e $C_G(Q_8)$ não tem elementos de ordem 4.

Demonstração. i) Suponha que G é um grupo hamiltoniano. Observe que pelo Teorema 2.2.2, temos um subgrupo $Q_8 = \langle x, y \rangle$ em G. Considere $C_G(Q_8)$ o centralizador de Q_8 em G e tome $g \in G \setminus C_G(Q_8)Q_8$. Então ou g não comuta com x ou g não comuta com y. Pela definição de Q_8, podemos supor, sem perda de generalidade, que g não comuta com y, ou seja, $y^g \neq y$. Como a ordem de y é 4, temos pelo Lema 2.2.4 que $y^G = \{y, y^{-1}\}$ e de $y^g \neq y$ devemos ter $y^g = y^{-1}$. Note que $y^2 = x^2 = [x, y]$, logo

$$ygx = gy^gx = gy^3x = gyy^2x = gyx^2x = gyxx^2 = gyx[x, y] = gxy,$$

portanto gx comuta com y. Note que $gx \notin C_G(Q_8)$, caso contrário, teríamos que $g = gxx^{-1} \in C_G(Q_8)Q_8$, um absurdo. Em particular, gx não pode comutar com x e daí $x^{gx} = x^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} x(gxy) &= (gxx^{-1}g^{-1})xgxy = gxx^{gx}y = gxx^{-1}y \\ &= gxy[y, x]x^{-1} = gxyx^2x^{-1} = gxyx \\ &= (gxy)x. \end{aligned}$$

Por outro lado,
$$y(gxy) = y(gx)y = (gx)yy = (gxy)y,$$
daí obtemos que $gxy \in C_G(Q_8)$, e, portanto, $gxyy^{-1}x^{-1} = g \in C_G(Q_8)Q_8$, o que é uma contradição. Logo não existe elemento em $G \setminus C_G(Q_8)Q_8$ e, portanto, $G = C_G(Q_8)Q_8$.

ii) Sabemos que Q_8 é um grupo finito e, portanto, um grupo de torção. Como visto acima, $G = C_G(Q_8)Q_8$. Observe que se $g \in C_G(Q_8)$, então $[x, gy] = [x, y] \neq 1$. Daí temos

$$c = [x, gy] = [x, y]$$

e, como $[x, gy] = (gy)^x gy$ e $\langle gy \rangle$ é normal em G, temos $c \in \langle gy \rangle$, o que nos diz que existe $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ tal que $c = (gy)^m$. Como sabemos, c tem ordem finita, daí obtemos que gy também deverá ter ordem finita. Note que gy tem ordem finita e y também tem ordem finita, sejam k a ordem de y e l a ordem de gy. Como $g \in C_G(Q_8)$, temos
$$1 = (gy)^{kl} = g^{kl}y^{kl} = g^{kl},$$
ou seja, g também tem ordem finita. Da arbitrariedade de g, temos que $C_G(Q_8)$ também é um grupo de torção. A partir disso, como os elementos em Q_8 e em $C_G(Q_8)$ possuem ordem finita e todo elemento em $C_G(Q_8)$ comuta com qualquer elemento em Q_8, então $C_G(Q_8)Q_8$ também será um grupo de torção, pois se $g \in C_G(Q_8)$ tem ordem m e $h \in Q_8$ tem ordem n, temos que $(gh)^{mn} = g^{mn}h^{mn} = 1$ e assim o produto de g por h tem ordem finita. Logo $G = C_G(Q_8)Q_8$ é um grupo de torção.

Mostraremos agora que $C_G(Q_8)$ não possui elementos de ordem 4. Suponha por contradição que exista $g \in C_G(Q_8)$ tal que $o(g) = 4$. Então

$$[x, gy] \neq 1 \; e \; (gy)^4 = 1,$$

o que implica, pelo Lema 2.2.4, que $(gx)^G = \{gx, gx^{-1}\}$ e portanto $(gy)^x = (gy)^{-1}$. Daí
$$[gy, x] = (gy)^{-1}(gy)^x = (gy)^{-2} = g^{-2}y^{-2} = g^2y^2.$$

Por outro lado,
$$[gy, x] = [x, gy]^{-1} = [x, y]^{-1} = y^2.$$

Logo, $g^2y^2 = y^2$, daí $g^2 = 1$, uma contradição. Portanto, $C_G(Q_8)$ não possui elementos de ordem 4.

□

Lema 2.2.6. Seja $G = C_G(Q_8)Q_8$ um grupo hamiltoniano, então se $g \in C_G(Q_8)$ é um elemento não trivial de ordem potência de 2, então $o(g) = 2$.

Demonstração. Como consequência do Lema 2.2.5, $C_G(Q_8)$ não possui elementos de ordem 4. Suponhamos então que exista $g \in C_G(Q_8)$ tal que $o(g) = 2^k$, com $k > 2$. Então, como $g \in C_G(Q_8)$, temos que $g^{2^{k-2}} \neq 1$ também está em $C_G(Q_8)$. Porém, note que

$$\left(g^{2^{k-2}}\right)^{2^2} = g^{2^k} = 1,$$

ou seja, $g^{2^{k-2}}$ é um elemento em $C_G(Q_8)$ de ordem 4, uma contradição. Portanto, g tem ordem 2. □

Agora temos as ferramentas necessárias para demonstrar o principal resultado deste capítulo, o Teorema de Dedekind-Baer, que nos dá a classificação dos grupos hamiltonianos.

Teorema A (Dedekind, Baer)**.** Todos os subgrupos de G são normais se, e somente se, G é abeliano ou $G = Q_8 \times A \times E$, onde E é um 2-grupo abeliano elementar e A é um grupo abeliano em que todos os seus elementos têm ordem ímpar.

Demonstração. Suponhamos G hamiltoniano. Então, do Teorema 2.2.2 e do Lema 2.2.5, temos que G possui um subgrupo $Q_8 = \langle x, y \rangle$ e $G = C_G(Q_8)Q_8$.

Além disso, da Observação 2.2.3, segue que os elementos de ordem ímpar estão no centro de G. Note que o conjunto formado por todos os elementos de ordem ímpar em $C_G(Q_8)$ formam um subgrupo, basta lembrar que se temos a e b em $C_G(Q_8)$ de ordem ímpar, então o produto entre eles e seus inversos também terão ordem ímpar, pelo fato de a e b comutarem. Assim, denotando por A este conjunto, temos $A \leq Z(G)$.

Consideraremos agora os elementos de ordem par em $C_G(Q_8)$.

O Lema 2.2.6 nos diz que os elementos não triviais de ordem potência de 2 em $C_G(Q_8)$ têm ordem igual a 2. Da Proposição 2.1.7 obtemos que estes elementos estão no centro de G. Denotaremos por E_1 o conjunto formado por todos os elementos de ordem potência de 2 em $C_G(Q_8)$. Temos então que $E_1 \subsetneq Z(G)$. Mostraremos que E_1 é um subgrupo de G e além disso, E_1 é um 2-grupo abeliano elementar. De fato, $1 \in E_1$ e E_1 é não-vazio. Sejam g_1 e g_2 elementos não triviais em E_1, então $o(g_1) = o(g_2) = 2$. Como g_1 e g_2 comutam, $g_1 g_2^{-1}$ também tem ordem 2, daí $g_1 g_2^{-1} \in E_1$ e E_1 realmente forma um subgrupo de G. Como E_1 é um grupo abeliano tal que todos os seus elementos possuem ordem 2, E_1 é um 2-grupo abeliano elementar.

Afirmamos que $C_G(Q_8) = E_1 \times A$. De fato, suponha $h \in C_G(Q_8)$. Se $o(h) = 2$, $h \in E_1$, e se $o(h)$ é ímpar, então $h \in A$, consequentemente temos $h \in E_1 A$. Suponhamos então $h \in C_G(Q_8)$ tal que $o(h) = 2^k m$, com m ímpar e $k \geq 1$. Temos necessariamente que $o(h) = 2m$, caso contrário, $h^{2^{k-2}m} \neq 1$ seria um elemento de ordem 4, o que não pode acontecer tendo em vista o Lema 2.2.5. Como $mdc(2,m) = 1$, existem inteiros r,q tais que $2q+rm = 1$, daí $h = h^{rm}h^{2q}$. Note que $(h^{rm})^2 = 1$ e $(h^{2q})^m = 1$, daí $h^{rm} \in E_1$ e $h^{2q} \in A$. Portanto, $h = h^{rm}h^{2q} \in E_1A$ e, da arbitrariedade de h, $C_G(Q_8) = E_1A$. Finalmente, como $A \cap E_1 = \{1\}$, $A, E_1 \trianglelefteq C_G(Q_8)$ e $C_G(Q_8) = E_1A$, temos que $C_G(Q_8) = E_1 \times A$.

Note que $x^2 \in Q_8$ é o único elemento não trivial de Q_8 que está também em E_1. Como E_1 é 2-abeliano elementar, podemos escrever $E_1 = \langle x^2 \rangle \times E$, onde E também é um grupo 2-abeliano elementar. Assim, $Q_8 \cap (E \times A) = \{1\}$ e

$$G = Q_8C_G(Q_8) = Q_8(E_1 \times A) = Q_8(\langle x^2 \rangle \times E \times A) = Q_8 \times E \times A,$$

como desejado.

Reciprocamente, se G é abeliano, então G é dedekindiano e o teorema vale. Consideremos então $G = Q_8 \times A \times E$, onde A é um grupo abeliano tal que todos os elementos possuem ordem ímpar, ou seja, um grupo abeliano de ordem ímpar e E é um 2-grupo abeliano elementar. Devemos mostrar que G é hamiltoniano. Note que $G = Q_8 \times A \times E$ é não abeliano, pois Q_8 não o é. Pela Proposição 2.1.5, basta mostrar que para cada $g \in G$ temos $\langle g \rangle \lhd G$.

Sejam $h, g \in G$ tal que $g = kab$, e $h = k_1a_1b_1$ onde $k \in Q_8,\ a \in A,\ b \in E$. Como G é um produto direto, temos

$$g^h = (kab)^{k_1a_1b_1} = k^{k_1}a^{a_1}b^{b_1} = k^{k_1}ab.$$

Analisaremos em casos. Se $o(k) = 2$, então $k \in Z(Q_8)$ e $g^h = kab = g$ e $\langle g \rangle \lhd G$. Se $o(k) = 4$, como Q_8 é hamiltoniano, pelo Lema 2.2.4 temos que $k^{k_1} \in \{k, k^{-1}\}$, daí $g^h = kab = g$ ou $g^h = k^{-1}ab$, ou seja, $g^G = \{g, k^{-1}ab\}$. Dessa forma, basta mostrar que $k^{-1}ab \in \langle g \rangle$.

Sabemos que $o(a)$ é ímpar pois $a \in A$, denote $o(a) = m$ e tome $n = 2m+1$. Note que que $n \equiv 3(mod\ 4)$, daí $4|n+1$ e $k^{n+1} = 1$, o que implica que

$$k^n = k^{-1}.$$

Como $n \equiv 1(mod\ m)$, temos que $m|n-1$ e daí $a^{n-1} = 1$, o que nos diz que

$$a^n = a.$$

Como $o(b) = 2$ e n é ímpar temos

$$b^n = b.$$

Logo,

$$g^n = (kab)^n = k^n a^n b^n = k^{-1}ab$$

e assim $k^{-1}ab$ é uma potência de g, consequentemente, $k^{-1}ab \in \langle g \rangle$. Daí segue que $\langle g \rangle \triangleleft G$, como desejávamos. Da arbitrariedade do elemento g tomado, segue da Proposição 2.1.5 que G é hamiltoniano. $\square$

Exemplo 2.2.7. Como consequência do Teorema A, temos que:

(i) O grupo

$$G = Q_8 \times C_p \times \underbrace{C_2 \times C_2 \times \cdots \times C_2}_{n\ parcelas},$$

onde p é um primo, é hamiltoniano.

(ii) Os p-grupos G hamiltonianos são exatamente os 2-grupos da forma $G = Q_8 \times E$, onde E é um 2-grupo abeliano elementar.

Capítulo 3

Grupos de defeito 2

Neste capítulo, teremos como referência principal o artigo de Mahdavianary [22] e, como complemento, os artigos: Heineken [13] e [14]; MacDonald [21]; Mahdavianary [25]; Robinson [34, Capítulo 7] e Stadelmann [38]. Nosso objetivo é estudar grupos tais que todo subgrupo é subnormal de defeito no máximo 2 e as relações entre as classes $\mathscr{T}$, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{S}$ que serão definidas posteriormente. Utilizaremos a notação dada por Mahdavianary para representar tais classes. Iniciaremos nosso capítulo falando sobre elementos Engel, que desempenham papel importante na classificação de $\mathscr{T}$, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{S}$.

3.1 Elementos Engel

Nesta seção, a principal ferramenta utilizada nas demonstrações dos resultados é a Proposição 1.1.2, que apresenta propriedades de comutadores. Em geral, aplicaremos os resultados dessa proposição sem mencionar os itens utilizados, a menos que se faça necessário.

Um elemento x é chamado de **Engel à direita** se, para todo $g \in G$, existir um inteiro não negativo n, dependendo de g e x, tal que

$$[x,_n g] = 1.$$

Se n pode ser escolhido independentemente de g, dizemos que x é n-Engel à direita.

Um elemento x é **Engel à esquerda** se, para todo $g \in G$, existir um inteiro não negativo n, dependendo de g e x, tal que

$$[g,_n x] = 1.$$

Se n pode ser escolhido independentemente de g, dizemos que x é n-Engel à esquerda.

Se um grupo G é tal que todos os seus elementos são n-Engel à esquerda e à direita, dizemos que G é um grupo **n-Engel**. Note que, se x e y são dois elementos n-Engel à direita, temos que $[x,_n y] = 1$ e $[y,_n x] = 1$. Dessa forma, se todos os elementos de G forem n-Engel à direita, aconteceria $[x,_n y] = 1$ para quaisquer x e y em G e cada elemento seria n-Engel à direita e à esquerda em G. Logo, G seria um grupo n-Engel. Por este motivo, para provar que certo grupo é n-Engel, basta mostrar que todos os seus elementos são n-Engel à direita (esquerda).

Observe que os grupos 0-Engel são grupos com $[x,_0 y] = x = 1$ para quaisquer $x, y \in G$, ou seja, são grupos com apenas um elemento e os grupos 1-Engel são os grupos tais que $[x,_1 y] = [x,y] = 1$, ou seja são os grupos abelianos. Neste trabalho, estaremos mais interessados em grupos 2-Engel e 3-Engel. Os grupos e elementos 2-Engel são bem conhecidos e amplamente estudados. O teorema a seguir é uma junção dos estudos de Kappe [19] e Levi [20] e nos dá informações sobre elementos 2-Engel. Sua demonstração de forma mais geral pode ser encontrada em Robinson [34, Teorema 7.13].

Teorema 3.1.1 (Levi [20], Kappe [19])**.** Seja a um elemento 2-Engel à direita e sejam x, y e z elementos de um grupo G. Então:

(i) a é 2-Engel à esquerda.

(ii) a^G é abeliano e seus elementos são 2-Engel à direita (e, portanto, à esquerda).

(iii) $[a,x,y] = [a,y,x]^{-1}$.

(iv) $[a,[x,y]] = [a,x,y]^2$.

(v) $[a,x,y,z]^2 = 1$.

(vi) $[a,[x,y],z] = 1$.

O corolário a seguir, provado por Kappe em [19], nos diz que os elementos 2-Engel à direita de um grupo G compõem um subgrupo característico.

Corolário 3.1.2. O conjunto dos elementos 2-Engel à direita em um grupo G formam um subgrupo de G.

Demonstração. Sejam x e y elementos 2-Engel à direita em um grupo G e g um elemento arbitrário de G. Então aplicando algumas propriedades de comutadores e os itens do Teorema

3.1.1, temos

$$\begin{aligned}
[xy,g,g] &= [[x,g]^y[y,g],g] \\
&= [[x,g]^y,g]^{[y,g]}[y,g,g] \\
&= [[x,g],g^{y^{-1}}]^{y[y,g]} \\
&= [[x,g],g[g,y^{-1}]]^{y[y,g]} \\
&= ([[x,g],[g,y^{-1}]][x,g,g]^{[x,b^{-1}]})^{y[y,g]} \\
&= ([x,g,[g,y^{-1}]])^{y[y,g]} \\
&\overset{(iii)}{=} ([x,[g,y^{-1}],g]^{-1})^{y[y,g]} \\
&\overset{(vi)}{=} 1,
\end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned}
[x^{-1},g,g] &= [[g,x]^{x^{-1}},g] \\
&= [[g,x],g^x]^{x^{-1}} \\
&= [[g,x],g[g,x]]^{x^{-1}} \\
&= ([[g,x],[g,x]][g,x,g]^{[g,x]})^{x^{-1}}.
\end{aligned}$$

Temos que $[[g,x],[g,x]] = 1$ e como $[x,g,g] = 1$, então $[[x,g]^{-1},g] = [g,x,g] = 1$ e podemos concluir que $[x^{-1},g,g] = 1$. Portanto os elementos 2-Engel em um grupo formam um subgrupo. Mostraremos agora que tal subgrupo é característico.

De fato, sejam $\alpha \in Aut(G)$, $x \in G$ um elemento 2-Engel e g um elemento em G. Então

$$[\alpha(x),g,g] = \alpha([x,\alpha^{-1}(g),\alpha^{-1}(g)]) = \alpha(1) = 1. \tag{3.1}$$

Concluímos que os elementos 2-Engel em G formam um subgrupo característico de G. $\square$

Por razão dos elementos 2-Engel à direita formarem um subgrupo em G temos importantes ferramentas para obter resultados. Na demonstração do Teorema B, por exemplo, utilizamos o fato de que o produto de 2 elementos 2-Engel à direita ainda é um elemento 2-Engel à direita.

Observação 3.1.3. Note que o argumento dado na equação (3.1) pode ser generalizado para um elemento n-Engel, já que se x é n-Engel, então

$$[\alpha(x),\underbrace{g,\ldots,g}_{n}]=\alpha([x,\alpha^{-1}(g),\ldots,\alpha^{-1}(g)])=\alpha(1)=1,$$

para todo $g\in G$, ou seja, o subconjunto dos elementos n-Engel é invariante para automorfismos.

Observe que se G é um grupo nilpotente de classe n, então $[x,_n g]=1$, para quaisquer elementos $x,y\in G$. Ou seja, se G é nilpotente, então G é um grupo n-Engel. Porém não é verdade que grupos Engel são nilpotentes. Vamos dar então uma condição suficiente para que G seja um grupo Engel.

Proposição 3.1.4. Se G é localmente nilpotente, então G é Engel.

Demonstração. Tome $x,y\in G$. Como $H=\langle x,y\rangle$ é finitamente gerado, temos que H é nilpotente. Seja c a classe de nilpotência de H, então $[x,_c y]=1$. Ou seja, quaisquer elementos $x,y\in G$, conseguimos um c (dependendo de x e y) tal que $[x,_c y]=1$. Portanto G é Engel. □

Observação 3.1.5. Note que para cada elemento x, o valor c tal que $[x,_c g]=1$ pode variar para cada g tomado, como no caso do grupo $\prod_{n=1}^{\infty} D_{2^n}$, de forma que não consigamos tomar c de forma independente, ou seja, não é possível tomar um c fixo tal que x seja um elemento n-Engel.

Um outro resultado relacionando grupos Engel e grupos localmente nilpotentes é o seguinte:

Teorema 3.1.6. Se G é um grupo 3-Engel, então G é localmente nilpotente.

Demonstração. Ver o Teorema 2, demonstrado na seção 3 de Heineiken [13]. □

Apresentaremos agora um resultado sobre grupos 3-Engel que será utilizado na demonstração do Teorema B na próxima seção, tal teorema usa comutadores normados à direita. Como queríamos padronizar os resultados deste trabalho, adaptamos o Lema 1 em Heineken [13] para uma versão de autoria própria, normada à esquerda, dada no Lema 3.1.7 a seguir. O leitor mais interessado, poderá consultar o resultado originais na referência supracitada para fins de comparação.

Lema 3.1.7. Se G é 3-Engel, então $[x,[y,x],[y,x]]=1$.

Demonstração. Observe primeiramente que

$$[x,[y,x],[y,x]] = [x,[y,x],x^{-y}x] = [x,[y,x],x]\ [x,[y,x],x^{-y}]^x. \tag{3.2}$$

Como G é 3-Engel, $1 = [[[y,x],x],x]$. Utilizando o item *(i)* da Proposição 1.1.2, temos

$$[[x,[y,x]],x] = 1, \tag{3.3}$$

logo basta mostrar que $[x,[y,x],x^{-y}]^x = 1$.

Note que, como G é 3-Engel, segue dos itens da Proposição 1.1.2 que para quaisquer dois elementos $a,b \in G$,

$$\begin{aligned} 1 &= [[[b^{-1},a],a],a] \\ &= [[a^{-b^{-1}}a,a],a] \\ &= [[a^{-b^{-1}},a]^a[a,a],a] \\ &= [[a^{-b^{-1}},a]^a,a] \\ &= [[a^{-b^{-1}},a],a]^a, \end{aligned}$$

daí

$$1 = [a^{-b^{-1}},a,a]. \tag{3.4}$$

Tomemos na equação (3.4) a substituição: $a = x^{-y}$ e $b = y$, temos $a^{-b^{-1}} = ((x^{-y})^{-1})^{y^{-1}} = x$ e então

$$1 = [x,x^{-y},x^{-y}].$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} 1 &= [x,x^{-y},x^{-y}] \\ &= [[x,x^{-1}]\ [x,[y,x]]\ [x,[y,x],x^{-1}],x^{-y}] \\ &= [[x,[y,x]]\ [x,[y,x],x^{-1}],x^{-y}]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como visto na equação (3.4), $[x,[y,x],x] = 1$. Utilizando novamente o item *(i)* da Proposição 1.1.2, temos que $[x,[y,x],x^{-1}] = 1$ e da equação (3.5) segue que

$$1 = [x,[y,x],x^{-y}].$$

Portanto, substituindo as equações (3.3) e (3.4) em (3.2), temos

$$[x,[y,x],[y,x]] = [x,[y,x],x]\ [x,[y,x],x^{-y}]^x = 1^x = 1.$$

□

3.2 Grupos de Defeito 2

Estudaremos aqui as relações entre as seguintes classes de grupos:

(i) Grupos tais que todo subgrupo cíclico é 2-subnormal. Denotamos essa classe de grupos por $\mathscr{T}$.

(ii) Grupos tais que todo subgrupo abeliano é 2-subnormal. Denotamos essa classe de grupos por $\mathscr{A}$.

(iii) Grupos tais que todo subgrupo é 2-subnormal. Denotamos essa classe de grupos por $\mathscr{S}$.

Como todo subgrupo cíclico é abeliano e todo subgrupo abeliano é um subgrupo, podemos notar que $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}$.

O grupo diedral $D_4 = \langle x,y \mid x^4 = y^2 = 1,\ x^y = x^{-1}\rangle$ é um exemplo de grupo que pertence às três classes, porém não temos a equivalência entre elas. O Teorema C, um dos teoremas principais deste capítulo, nos mostra uma relação entre duas dessas ($\mathscr{T}$ e $\mathscr{A}$), e nos garante que não são equivalentes.

Em geral, $\langle x\rangle$ não é normal em seu fecho (por exemplo, o subgrupo $\langle(12)\rangle$ de S_3 não é normal em seu fecho, que é o próprio S_3), entretanto essa condição é necessária e suficiente para caracterizar a classe $\mathscr{T}$, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.2.1. $G \in \mathscr{T}$ se, e somente se, $\langle x\rangle \lhd \langle x\rangle^G$, para todo $x \in G$.

Demonstração. Suponha que $\langle x\rangle \lhd \langle x\rangle^G$, para todo $x \in G$. Então, como $\langle x\rangle^G \trianglelefteq G$, temos a seguinte série 2-subnormal para G

$$\langle x\rangle \trianglelefteq \langle x\rangle^G \trianglelefteq G$$

e podemos concluir que $G \in \mathscr{T}$.

Suponha agora que $G \in \mathscr{T}$. Como $\langle x\rangle$ é cíclico e $G \in \mathscr{T}$, existe $H \trianglelefteq G$ tal que $\langle x\rangle \trianglelefteq H \trianglelefteq G$. Sabemos que

$$\langle x\rangle^G = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ \langle x\rangle \leq N}} N \leq H$$

Como $\langle x\rangle \trianglelefteq H$, temos que $\langle x\rangle \trianglelefteq \langle x\rangle^G$. $\square$

Assim como na Proposição 3.2.1, em geral não temos que $H \trianglelefteq H^G$, já que, como visto, não vale para subgrupos cíclicos, entretanto essa condição é necessária e suficiente para caracterizar a classe $\mathscr{S}$, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.2.2. $G \in \mathscr{S}$ se, e somente se, $H \trianglelefteq H^G$, para todo $H \leq G$.

Demonstração. É análogo à demonstração da Proposição 3.2.1, basta notar que

$$H^G = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ H \leq N}} N.$$

$\square$

Os resultados a seguir serão fundamentais para darmos uma outra caracterização das classes $\mathscr{S}$ e $\mathscr{A}$ utilizando comutadores.

Lema 3.2.3. $G \in \mathscr{T}$ se, e somente se, $[x,y,y] \in \langle y\rangle$, para todos $x,y \in G$.

Demonstração. Suponha $G \in \mathscr{T}$, então existe um subgrupo $H \trianglelefteq G$ tal que

$$\langle y\rangle \trianglelefteq H \trianglelefteq G.$$

Da Proposição 1.1.13, temos que $[H,G] \leq H$, daí, como $y \in H$, temos que $[x,y] \in H$. Por outro lado, usando novamente a Proposição 1.1.13, temos que $[\langle y\rangle, H] \leq \langle y\rangle$, daí como $[x,y] \in H$, devemos ter $[[x,y],y] \in \langle y\rangle$.

Suponha agora que $[x,y,y] \in \langle y\rangle$, para cada $x,y \in G$. Para mostrar que $G \in \mathscr{T}$, basta mostrar que $\langle y\rangle \trianglelefteq \langle y\rangle^G$, para todo $y \in G$, ou seja, que $y^{y^x} \in \langle y\rangle$, para todo $x \in G$. Observe que

$$\begin{aligned}
[[y,x],y]^{-y^{-2}} &= [y,[y,x]]^{y^{-2}} = \left([y,[y,x]]^{y^{-1}}\right)^{y^{-1}} = [[y,x],y^{-1}]^{y^{-1}} \\
&= [[y,x]^{y^{-1}},(y^{-1})^{y^{-1}}] = [[x,y^{-1}],y^{-1}] = [x,y^{-1},y^{-1}] \in \langle y\rangle
\end{aligned}$$

Como $[[y,x],y]^{-y^{-2}} \in \langle y \rangle$, conjugando por y^{-2} ainda estará em $\langle y \rangle$, assim

$$[y,[y,x]] = \left([[y,x],y]^{-y^{-2}}\right)^{y^2} \in \langle y \rangle. \tag{3.6}$$

Do item *(viii)* da Proposição 1.1.2 e da equação (3.6), temos

$$y^{y^x} = y[y,[y,x]] \in \langle y \rangle$$

e pela arbitrariedade dos elementos x e y tomados, $G \in \mathscr{T}$.

$\square$

Corolário 3.2.4. Se $G \in \mathscr{T}$, então G é 3-Engel.

Demonstração. Basta notar que, como $[x,y,y] \in \langle y \rangle$, temos $[x,y,y,y] = 1$, já que $\langle y \rangle$ é abeliano. $\square$

Observe que, pela caracterização dada no Lema 3.2.3, temos que se G é 2-Engel, então $G \in \mathscr{T}$. Mais à frente mostraremos que, caso exista um elemento em G de ordem infinita, $G \in \mathscr{T}$ será equivalente a dizer que G é 2-Engel.

Lema 3.2.5. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de grupos fechada para subgrupos. Se $H \leq G$ e $H \in \mathcal{C}$, então H é 2-subnormal em G se, e somente se,

$$[v,x,y] \in \langle x,y \rangle, \forall x,y \in H, v \in G.$$

Demonstração. Assuma que todo subgrupo de G que pertence a $\mathcal{C}$ é 2-subnormal. Então para quaisquer $x,y \in G$, com $\langle x,y \rangle \in \mathcal{C}$, temos que $\langle x,y \rangle \trianglelefteq \langle x,y \rangle^G$. Tomando $v \in G$, temos que $y^{[v,x]} = y^{x^{-v}x}$. Como $x^{-v}x \in \langle x,y \rangle^G$, $y^{[v,x]} \in \langle x,y \rangle$.

Por outro lado, pelo item *(vii)* da Proposição 1.1.2

$$y^{[v,x]} = y[y,[v,x]] = y[v,x,y]^{-1} \tag{3.7}$$

e como $y^{[v,x]} \in \langle x,y \rangle$,

$$[v,x,y] = \left(y^{[v,x]}\right)^{-1} y \in \langle x,y \rangle.$$

Como $\mathcal{C}$ é fechado para subgrupos, o resultado segue.

Suponha agora que $[v,x,y] \in \langle x,y \rangle$, para todo $x,y \in H$, $v \in G$. Para provar que todo subgrupo H de G com a propriedade $\mathcal{C}$ é 2-subnormal, temos que mostrar que $H \triangleleft H^G$, para todo $H \in \mathcal{C}$. Primeiramente mostraremos que $y^{[v,x]}$ e $y^{[x,v]}$ estão em H, para cada $x,y \in H$,

$v \in G$. Note que utilizando a equação (3.7),

$$y^{[v,x]} = y[v,x,y]^{-1} \in \langle x,y \rangle \leq H. \tag{3.8}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} y^{[x,v]} &= [x,v]^{-1}y[x,v] = v^{-1}x^{-1}vxyx^{-1}v^{-1}xv \\ &= x^{-1}\underbrace{xv^{-1}x^{-1}v}_{[v,x^{-1}]^{-1}}xyx^{-1}\underbrace{v^{-1}xvx^{-1}}_{[v,x^{-1}]}x \\ &= \left(\left(y^{x^{-1}}\right)^{[v,x^{-1}]}\right)^{x} \end{aligned} \tag{3.9}$$

e substituindo $y^{x^{-1}}$ por y_1 e x^{-1} por x_1 na equação (3.9). temos que

$$\left(y^{x^{-1}}\right)^{[v,x^{-1}]} = y_1^{[v,x_1]} \in \langle x,y \rangle,$$

pois $y_1^{[v,x_1]}$ é como dado na equação (3.8). Então

$$y^{[x,v]} = \left(\left(y^{x^{-1}}\right)^{[v,x^{-1}]}\right)^{x} \in \langle x,y \rangle \leq H.$$

Finalmente para mostrar que $H \lhd H^G$, devemos mostrar que

$$y^{x^v} \in H, \forall x,y \in H, v \in G.$$

Basta notar que

$$y^{x^v} = y^{xx^{-1}x^v} = (y^x)^{[x,v]} \in H,$$

assim $H \trianglelefteq H^G$ e H é 2-subnormal, para todo $H \in G$ com $H \in \mathcal{C}$, como desejado. $\square$

O resultado a seguir é uma versão sucinta do Lema 3.2.3. Será utilizado posteriormente durante a demostração do Teorema B.

Corolário 3.2.6. Seja G um grupo. Então

(i) $G \in \mathscr{S}$ se, e somente se, $[v,x,y] \in \langle x,y \rangle$, para todo $x,y,v \in G$;

(ii) $G \in \mathscr{A}$ se, e somente se, $[v,x,y] \in \langle x,y \rangle$, para todo $x,y,v \in G$, com $[x,y] = 1$.

Demonstração. Em i) basta tomar $\mathcal{C}$ do Lema 3.2.3 como a classe de todos os grupos. Em ii) basta tomar $\mathcal{C}$ como a classe de todos os grupos abelianos e o resultado seguirá. $\square$

O resultado a seguir mostra que a classe de nilpotência de grupos em $\mathscr{T}$ é no máximo igual a 3. Estes resultados implicarão que grupos nessa classe são metabelianos, fato que será utilizado na demonstração do Teorema C.

O Teorema B abaixo pode ser encontrado em Heineken [14, Teorema 1], contudo, como citado anteriormente, a prova original é feita com comutadores normado à direita e com notação $\circ$, ou seja, com comutadores da forma

$$[a_1,[a_2,\ldots,[a_{n-2},[a_{n-1},a_n]]]] = a_1\circ(a_2\circ(a_3\circ\ldots\circ a_n)),$$

que não são tão utilizados atualmente. A notação para os comutadores dada por $\circ$ é pouco usual, assim faremos adaptações nas provas de Heineken usando comutadores do tipo normado à esquerda que são da forma $[[[a_1,a_2],a_3],\ldots],a_n]$. Sendo assim, foram realizadas algumas adaptações nos enunciados e nas demonstrações dadas.

Teorema B. Assuma que $G\in\mathscr{T}$ tem um elemento de ordem infinita. Então

(i) G é 2-Engel;

(ii) $\gamma_4(G) = (\gamma_3(G))^3 = 1$.

Demonstração. (i) Note primeiramente que como $G\in\mathscr{T}$, G é 3-Engel. Além disso, temos

$$[g,u,u]\in\langle u\rangle,$$

assim, tomando $u\in G$ um elemento de ordem infinita em G e $g\in G$, podemos escrever $[g,u,u] = u^k$. Como G é 3-Engel, o Lema 3.1.7 nos diz que se $G\in\mathscr{T}$, então

$$1 = [u,[g,u],[g,u]],$$

daí temos

$$1 = [u,[g,u],[g,u]] = [[g,u,u]^{-1},[g,u]] = [u^{-k},[g,u]] = [[g,u],u^k]^{u^{-1}}. \tag{3.10}$$

Fazendo uma indução sobre k e notando que $[g,u,u]\in\langle u\rangle$, é possível ver que $[[g,u],u^k] = [g,u,u]^k$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$1 = [[g,u],u^k]^{u^{-1}} = ([[g,u],u]^{u^{-1}})^k = [g,u,u]^k = (u^k)^k = u^{k^2}.$$

Como u tem ordem infinita, devemos ter $k=0$, daí

$$[g,u,u] = u^k = 1,\ \text{para quaisquer } u\in G \text{ de ordem infinita e } g\in G. \tag{3.11}$$

Mostraremos agora que $[u,g,g] = 1$, para $g \in G$ e $u \in G$ de ordem infinita. Note primeiramente que se g for um elemento de ordem infinita o resultado segue do caso anterior. Suponhamos então que g tem ordem finita. Pelo Teorema 3.1.6, temos que os grupos 3-Engel são localmente nilpotentes e, do Lema 1.3.16, em um grupo localmente nilpotente, o conjunto dos elementos de ordem finita é um subgrupo característico. Dessa maneira, se g tem ordem finita, então gu deverá ter ordem infinita, pois se gu tivesse ordem finita, $u = g^{-1}gu$ teria também ordem finita, o que não acontece. Assim gu tem ordem infinita, logo

$$\begin{aligned} 1 &= [g,gu,gu] = [[g,gu],gu] = [[g,u][g,g]^u,gu] = [[g,u],gu] \\ &= [g,u,u][g,u,g]^u = [g,u,g]^u \end{aligned}$$

e por esse motivo temos $[g,u,g] = 1$. Como $[g,u,g] = 1$, temos

$$[[u,g],g] = [[g,u]^{-1},g] = 1.$$

Podemos então concluir que $[u,g,g] = 1$, para todo $g \in G$ e $u \in G$ de ordem infinita.

Mostramos no Corolário 3.1.2 que todos os elementos x de um grupo G satisfazendo $[x,z,z] = 1$, para qualquer $z \in G$ formam um subgrupo característico de G, ou seja, que os elementos de um grupo que são 2-Engel à direita formam um subgrupo característico. Queremos mostrar que todos os elementos de G pertencem a este conjunto. Da equação (3.11) já temos que todos os elementos de ordem infinita pertencem. Se v é um elemento de ordem finita e u é um elemento de ordem infinita, então uv é um elemento de ordem infinita e u^{-1} também é. Assim,

$$[u^{-1},g,g] = [uv,g,g] = 1, \forall g \in G \tag{3.12}$$

e então como o conjunto dos elementos 2-Engel à direita formam um subgrupo, temos que o produto de dois elementos 2-Engel também será 2-Engel, assim

$$[v,g,g] = [u^{-1}(uv),g,g] = 1.$$

(ii) Pelo item anterior, G é 2-Engel. Utilizaremos os itens do Teorema 3.1.1 para auxiliar na demonstração. Para quaisquer a,x,y,z, temos que

$$\begin{aligned}
1 &\overset{(v)}{=} [a,x,y,z]^{-2} \overset{(iv)}{=} [[a,x],[y,z]]^{-1} = [y,z,[a,x]] \overset{(iii)}{=} [y,[a,x],z]^{-1} = [z,[y,[a,x]]] \\
&\overset{(iv)}{=} [z,y,[a,x]]^{2} \overset{(iii)}{=} [z,[a,x],y]^{-2} \overset{(iv)}{=} [z,[[a,x],y]]^{-1} = [[[a,x],y],z] \\
&= [a,x,y,z].
\end{aligned}$$

Da arbitrariedade dos elementos tomados e como $\gamma_4(G)$ é gerado por comutadores da forma $[a,x,y,z]$, segue que $\gamma_4(G) = 1$, ou seja, G é nilpotente de classe 3.

Mostraremos agora que $(\gamma_3(G))^3 = 1$. Sejam $x,y,z \in G$. Considere a seguinte identidade

$$[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1. \tag{3.13}$$

Pelo Teorema 3.1.1, se G é 2-Engel, então, para quaisquer $x,y,z \in G$, temos

$$[x,y,z] = [x,z,y]^{-1} \text{ e } [x,[y,z]] = [x,y,z]^2.$$

Deste fato e da Proposição 1.1.2, temos que

$$\begin{aligned}
[x,y^{-1},z]^y &= ([x,z,y^{-1}]^y)^{-1} = ([y,[x,z]])^{-1} = [x,z,y] \\
&= [x,y,z]^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[y,z^{-1},x]^z &= ([y,x,z^{-1}]^z)^{-1} = [z,[y,x]]^{-1} = [y,x,z] = [y,z,x]^{-1} = [x,[y,z]] \\
&= [x,y,z]^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[z,x^{-1},y]^x &= ([z,y,x^{-1}]^x)^{-1} = [x,[z,y]]^{-1} = [x,z,y]^{-2} \\
&= [x,y,z]^2.
\end{aligned}$$

Daí

$$1 = [x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = [x,y,z]^{-1}[x,y,z]^2[x,y,z]^2 = [x,y,z]^3$$

e, novamente, como $\gamma_3(G)$ é gerado por comutadores triplos, o resultado segue. □

Observação 3.2.7. O Teorema B dado acima nos mostra que quando $G \in \mathscr{T}$ tem um elemento de ordem infinita (em outras palavras, quando G não é de torção), temos $\gamma_4(G) = 1$, o que implica que G é nilpotente de classe menor ou igual a 3. O Teorema 1 em Mahdavianary [25] diz que quando $G \in \mathscr{T}$ é um grupo de torção, então G também é um grupo cuja classe de nilpotência é de no máximo 3. Portanto qualquer grupo $G \in \mathscr{T}$ tem classe de nilpotência menor ou igual a 3. Tal fato sobre grupos com torção não será provado neste texto, contudo pode ser encontrado em Mahdavianary [25] e é mencionado em Garrison-Kappe [11].

Observação 3.2.8. Em geral, as classes $\mathscr{A}, \mathscr{T}$ e $\mathscr{S}$ não são iguais, como veremos mais à frente no Teorema C. Pelas definições destas classes, tem-se sempre que $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}$ e deste fato é possível concluir que todos os grupos em $\mathscr{S}$ e $\mathscr{A}$ também são nilpotentes de classe menor ou igual a 3. De fato, seja $G \in \mathscr{S}$, então todos os seus subgrupos tem defeito ≤ 2, em particular cada um dos seus subgrupos abelianos tem defeito ≤ 2, assim $G \in \mathscr{A}$, por outro lado, se $G \in \mathscr{A}$, então todos os seus subgrupos abelianos tem defeito ≤ 2, em particular cada um dos seus subgrupos cíclicos tem defeito ≤ 2, assim $G \in \mathscr{T}$. Portanto se $G \in \mathscr{S}$, tem-se que $G \in \mathscr{T}$, logo pela Observação 3.2.7, G é nilpotente de classe menor ou igual a 3 e por conseguinte $\gamma_4(G) = 1$ se $G \in \mathscr{S}$. Como citado anteriormente, Roseblade em [36] mostra se um grupo G é tal que todos os seus subgrupos possuem defeito subnormal no máximo d, então existe uma função μ_1 dependendo de d que limita a classe de nilpotência de G. Podemos relacionar tal função com os resultados aqui apresentados ao ver que para $d = 1$ e $d = 2$, temos $\mu_1(1) = 2$ e $\mu_1(2) = 3$. Maiores detalhes sobre essa observação podem ser encontrados em Garrison-Kappe [11] e em Roseblade [36].

O lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada no artigo de Hogan e Kappe [16], é técnico e será usado na demonstração do Teorema B.

Lema 3.2.9. Se G é um grupo metabeliano, então para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e qualquer inteiro k, temos

$$[g_1, g_2^k] = \prod_{1 \leq i \leq k} [g_{1,i}\, g_2]^{\binom{k}{i}}. \tag{3.14}$$

Observação 3.2.10. Note que no Lema 3.2.9, se tivermos em G a relação $[g_{1,2}\, g_2] = 1$, então poderemos reescrever a igualdade (3.14) como segue

$$[g_1, g_2^k] = [g_1, g_2]^k.$$

Analogamente, se tivermos $[g_{2,2}\, g_1] = 1$, então também vale

$$[g_1^k, g_2] = [g_1, g_2]^k.$$

Reescreveremos então o Lema 3.2.9 da seguinte forma:

Lema 3.2.11. Em um grupo 2-Engel metabeliano, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, temos

$$[g_1^m, g_2^n] = [g_1, g_2]^{mn}.$$

O teorema a seguir de Mahdavianary (Teorema I de [22]) mostra uma relação entre as contingências entre as classes de grupos $\mathscr{T}$ e $\mathscr{A}$ sob algumas hipóteses e também dois exemplos quem mostram que $\mathscr{S} \subsetneq \mathscr{A}$ e $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{T}$. Note que os exemplos dados nos itens *(ii)* e *(iii)* são de grupos 3-gerados, já que para grupos 2-gerados o próprio Mahdavianary em [24] mostra que, restrito a grupos 2-gerados, temos $\mathscr{S} = \mathscr{A} = \mathscr{T}$.

Teorema C.

(i) Seja G um grupo de torção sem elementos de ordem par ou um grupo com um elemento de ordem infinita. Então $G \in \mathscr{T}$ implica que $G \in \mathscr{A}$.

(ii) Existe um 2-grupo em $\mathscr{T}$ que não está em $\mathscr{A}$. Daí $\mathscr{T}$ nem sempre implica em $\mathscr{A}$.

(iii) Existe um grupo em $\mathscr{A}$ que não está em $\mathscr{S}$. Daí $\mathscr{A}$ nem sempre implica em $\mathscr{S}$.

Demonstração. *(i)* Assuma que $G \in \mathscr{T}$. Pela Observação 3.2.7, temos que $\gamma_4(G) = 1$. Pelo item *(ii)* do Corolário 3.2.6 é suficiente mostrar que para cada subgrupo abeliano 2-gerado $\langle x, y\rangle$ e para cada $z \in G$ temos que $[z, x, y] \in \langle x, y\rangle$. Considere $H = \langle x, y\rangle$. Note primeiramente que $G'' = [\gamma_2(G), \gamma_2(G)] \leq \gamma_4(G) = 1$, assim G é metabeliano, daí para quaisquer $x, y, z \in G$,

$$\begin{aligned}
[x,z,y^x] &= [[x,z],y^x] = [[x,z],[x,y^{-1}]y] = [[x,z],y](\underbrace{[[x,z],[x,y^{-1}]]}_{\in \gamma_4(G)})^y \\
&= [x,z,y].
\end{aligned}$$

Analogamente, $[y,x,z^y] = [y,x,z]$ e $[z,y,x^z] = [z,y,x]$. Desse fato, podemos utilizar a Identidade de Jacobi na Proposição 1.1.2 e obter

$$\begin{aligned}
1 &= [x,z,y^x][y,x,z^y][z,y,x^z] \\
&= [x,z,y][y,x,z][z,y,x],
\end{aligned}$$

mas como H é abeliano, $[x,y] = 1$, daí $[x,z,y][z,y,x] = 1$ e $[z,y,x] = [x,z,y]^{-1}$. Como G é metabeliano, temos que $\gamma_2(G)$ é abeliano e lembrando que $([x,z]^{-1})^y \in \gamma_2(G)$, segue que

$$\begin{aligned} [z,y,x] &= [x,z,y]^{-1} = [y,[x,z]] = ([x,z]^{-1})^y[x,z] \\ &= [x,z]([x,z]^{-1})^y = [[x,z]^{-1},y] = [z,x,y], \end{aligned}$$

ou seja,

$$[z,y,x] = [z,x,y].$$

Do Lema 3.2.3, como $G \in \mathscr{T}$, temos que $[z,xy,xy] \in \langle xy \rangle$. Note que

$$1 = \gamma_4(G) = [\gamma_3(G), G],$$

em outras palavras, $\gamma_3(G) \in Z(G)$, daí $m^g = m$, para todo $m \in \gamma_3(G)$, $g \in G$ e por esse motivo, temos

$$[[a,b],cd] = [[a,b],d][[a,b],c]^d = [[a,b],d][[a,b],c].$$

Tal fato será utilizado juntamente com a afirmação de que G é metabeliano a fim de mostrar que

$$[z,xy,xy] = [z,y,y][z,y,x][z,y,x][z,x,x].$$

De fato,

$$\begin{aligned} [z,xy,xy] &= [[z,xy],xy] = [[z,xy],y]\ [[z,xy],x] \\ &= [[z,y][z,x]\underbrace{[z,x,y]}_{\in Z(G)},y]\ [[z,y][z,x]\underbrace{[z,x,y]}_{\in Z(G)},x] \\ &= [[z,y][z,x],y]\ [[z,y][z,x],x] \\ &= [[z,y],y][[z,x],y]\ [[z,y],x][[z,x],x] \\ &= [z,y,y][z,x,y][z,y,x][z,x,x]. \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 3.2.3, temos que $[z,x,x] \in \langle x \rangle \leq \langle x,y \rangle$ e $[z,y,y] \in \langle y \rangle \leq \langle x,y \rangle$, daí $[z,x,x],[z,y,y] \leq \langle x,y \rangle$. Dado que $[z,y,x] = [z,x,y]$ e $[z,xy,xy] \in \langle xy \rangle \leq \langle x,y \rangle$, vale

$$[z,x,y]^2 = [z,xy,xy][z,x,x]^{-1}[z,y,y]^{-1} \in \langle x,y \rangle = H.$$

Analisaremos agora os casos:

Caso 1: Se G tem um elemento de ordem infinita, temos que $(\gamma_3(G))^3 = 1$ como consequência do Teorema B. Portanto, $1 = [z,x,y]^3 = [z,x,y]^2[z,x,y]$, o que nos diz que

$$[z,x,y]^{-1} = [z,x,y]^2 \in H,$$

daí $[z,x,y] \in H$ e $G \in \mathscr{A}$.

Caso 2: Se G é um grupo de torção sem elementos de ordem par, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $[z,x,y]^{2k+1} = 1$, daí

$$1 = [z,x,y]^{2k+1} = [z,x,y]^{2k}[z,x,y],$$

o que nos diz que

$$[z,x,y] = (([z,x,y]^2)^k)^{-1}.$$

Como $[z,x,y]^2 \in H$, $[z,x,y] = (([z,x,y]^2)^k)^{-1}$ também deverá pertencer e o resultado segue como desejado.

(ii) Considere o grupo D definido da seguinte forma: $D = \langle a,b,c; [x_1,x_2,x_2] = 1$, onde $x_1,x_2 \in \{a,b,c\}, [a,c,b] = [a,c] = 1, [b,c,a] = [a,b,c] = b^4, [a,b]^2 = [b,c]^2 = a^2 = 1, c^2 = b^8 = 1, \gamma_4(D) = 1\rangle$.

Para determinar uma caracterização precisa do grupo D, vamos usar o GAP [10]. Aos interessados, recomendamos a leitura do Apêndice A para um detalhamento das funções utilizadas.

Pelo Apêndice A, temos que $|D| = 128$, e D = SmallGroup([128,523]), isto é,

$$D = ((C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2) : C_2,$$

onde "$\times$" denota produto direto e ":" denota produto semidireto.

Como $(D_2)^2 = D_4 = 1$, utilizando a fórmula de Hall-Petresco temos que para todo $x,y \in D$, existem elementos $c_i = c_i(x,y) \in \gamma_i(G)$ tais que

$$(xy)^4 = x^4y^4c_2^6c_3^4c_4 = x^4y^4. \tag{3.15}$$

Mostraremos agora que todo subgrupo cíclico de D é 2-subnormal. Pelo Lema 3.2.3, basta mostrar que para quaisquer $g,h \in D$, temos que $[g,h,h] \in \langle h\rangle$. Seja $h = a^mb^nc^fd_1$ e $g = a^ib^jc^kd_2$, com i,j,k,m,n,l inteiros e $d_1,d_2 \in \gamma_2(D)$. Então pelo fato que $\gamma_4(D) =$

1, D é metabeliano e $\gamma_3(D) \in Z(D)$, assim

$$[g,h,h] = [a^i b^j c^k d_2, a^m b^n c^f d_1, a^m b^n c^f d_1].$$

Para facilitar notação, escreveremos $a^m b^n c^f = x$ e $a^i b^j c^k = y$ e obtemos

$$\begin{aligned} [g,h,h] &= [yd_2, xd_1, xd_1] = [[yd_2, xd_1], d_1]\ [yd_2, xd_1, x]^{d_1} = \underbrace{[[yd_2, xd_1], d_1]}_{\in \gamma_2(D)^2}\ [yd_2, xd_1, x] \\ &= [[yd_2, xd_1], x]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Note que

$$\begin{aligned} [yd_2, xd_1] &= [yd_2, d_1]\ [yd_2, x]^{d_1} = [yd_2, d_1]\ [yd_2, x] \\ &= [y, d_1][d_2, d_1][y, x][d_2, x] = [y, d_1][y, x][d_2, x] \end{aligned}$$

e que voltando à equação (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} [g,h,h] &= [[yd_2, xd_1], x] = [[y, d_1][d_2, x][y, x], x] = \underbrace{[[y, d_1][d_2, x], x]}_{\in \gamma_4(D)}\ [[y, x], x] \\ &= [y, x, x] = [a^i b^j c^k, a^m b^n c^f, a^m b^n c^f]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Expandiremos $[a^i b^j c^k, a^m b^n c^f, a^m b^n c^f]$ a fim de mostrar que $[g,h,h]$ é uma potência de b. Como $\gamma_3(D) \in Z(D)$, os comutadores triplos "somem"do comutador, além disso, lembrando que $\gamma_4(D) = 1$ e tomando agora $x = a^m b^n c^f$ na equação (3.17) com a intenção de simplificar as contas, temos

$$\begin{aligned} [g,h,h] &= [[a^i b^j c^k, c^f][a^i b^j c^k, b^n][a^i b^j c^k, a^m], x] \\ &= [[a^i, c^f][b^j, c^f][c^k, c^f][a^i, b^n][b^j, b^n][c^k, b^n][a^i, a^m][b^j, a^m][c^k, a^m], x] \\ &= [[b^j, c^f][a^i, b^n][c^k, b^n][b^j, a^m]\ ,\ x], \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}[g,h,h] &= [[b^j,c^f][a^i,b^n][c^k,b^n][b^j,a^m],a^m][[b^j,c^f][a^i,b^n][c^k,b^n][b^j,a^m],b^n] \\ &\quad [[b^j,c^f][a^i,b^n][c^k,b^n][b^j,a^m],c^f] \\ &= [b^j,c^f,a^m][a^i,b^n,a^m][c^k,b^n,a^m][b^j,a^m,a^m][b^j,c^f,b^n][a^i,b^n,b^n] \\ &\quad [c^k,b^n,b^n][b^j,a^m,b^n][b^j,c^f,c^f][a^i,b^n,c^f][c^k,b^n,c^f][b^j,a^m,c^f].\end{aligned}$$

Como pelas relações em D temos $[g_1,g_2,g_2]=1$, para quaisquer $g_1 \in D$ e $g_2 \in \{a,b,c\}$, estamos sob as hipóteses do Lema 3.2.11, então

$$\begin{aligned}[g,h,h] &= [b,c,a]^{jfm}[a,b,a]^{inm}[c,b,a]^{knm}[b,c,b]^{jfm}[b,a,b]^{jmn} \\ &\quad [a,b,c]^{inf}[c,b,c]^{knf}[b,a,c]^{jmf}.\end{aligned}$$

Lembrando que $[x,y]=1$ implica em $[x^{-1},y]=[x,y^{-1}]=1$, segue que

$$[g,h,h] = [b,c,a]^{jfm}[c,b,a]^{knm}[a,b,c]^{inf}[b,a,c]^{jmf}. \tag{3.18}$$

Das relações em D, temos que $[a,b,c]=[b,c,a]=b^4$. Mostraremos que também acontece $[c,b,a]=[b,a,c]=b^4$. De fato, lembre-se do item *(vi)* da Proposição 1.1.2 e que como $[a,b,c]=[b,c,a]=b^4 \in \gamma_3(D)$, temos

$$[c,b,a] = [a,[c,b]]^{-1} \overset{(vi)}{=} ([b,c,a]^{[c,b]})^{-1} = [b,c,a]^{-1} = b^4. \tag{3.19}$$

Analogamente,

$$[b,a,c] = ([a,b,c]^{[b,a]})^{-1} = [a,b,c]^{-1} = b^4. \tag{3.20}$$

Dessa forma, ao aplicar equações (3.19) e (3.20) na equação (3.18) e recordando que $\gamma_2(D)^2=1$, conseguimos

$$\begin{aligned}[g,h,h] &= ([a,b,c]^{jfm})^2[a,b,c]^{knm}[a,b,c]^{inf} \\ &= [a,b,c]^{knm+inf} \\ &= [a,b,c]^{n(km+if)} \\ &= b^{4n(km+if)},\end{aligned}$$

ou seja, $[g,h,h] = b^{4n(km+if)}$. Como no grupo D temos $\gamma_2(D)^2 = 1$ e $a^2 = c^2 = 1$, utilizando a equação (3.15), temos

$$h^4 = (a^m b^n c^f d_2)^4 = a^{4m} b^{4n} c^{4f} d_2^4 = b^{4n},$$

daí, $[g,h,h] = b^{4n(km+if)} = h^{4(km+if)} \in \langle h \rangle$. Assim, utilizando o Lema 3.2.3, segue que $D \in \mathscr{T}$.

Mostraremos agora que existe um subgrupo abeliano em D que não é 2-subnormal. Como $[a,c] = 1$ e $a^2 = c^2 = 1$, temos que $H = \langle a,c \rangle$ é um subgrupo abeliano elementar de D e $|H| = 4$. Utilizando o item *(ii)* do Corolário 3.2.6 podemos ver que para mostrar que $H = \{1,a,b,ac\}$ não é 2-subnormal basta verificar que $[b,c,a] \notin H$.

Da apresentação do grupo, temos que $[a,b,c] = [b,c,a] = b^4$ e $[b,c,a] \neq 1$. Observe que $[b^4,b] = 1$, porém $[a,b] \neq 1$, $[c,b] \neq 1$. Assim, b^4 não pode ser a nem c. Mostraremos agora que $b^4 \neq ac$. De fato, se tivéssemos $b^4 = ac = ca$, então $c = b^4 a$ e daí,

$$[b,c,a] = [[b,b^4 a],a] = [[b,a][b,b^4]^a,a] = [b,a,a] = 1,$$

o que não pode acontecer, já que $[b,c,a] \neq 1$. Logo não temos $b^4 = [b,c,a]$ em H e assim H não é 2-subnormal. Portanto $D \notin \mathscr{A}$, como desejávamos mostrar.

(iii) Cappitt, em [5], nos dá o seguinte grupo

$$G = \langle x,y,z;\ [u,v,v] = 1,\ \text{para } u,v \in G, y^3 = [z,y],\ z^9 = [y,x]^3 = [z,y,x],\ [z,x]^3 = 1 \rangle,$$

que é um grupo 2-Engel. Como para quaisquer $g,h \in G$, temos

$$[g,h,h] = 1 \in \langle h \rangle,$$

segue que $G \in \mathscr{T}$ do Lema 3.2.3. Agora, observe que G/G' é isomorfo a $\mathbb{Z} \times C_3 \times C_9$ e assim o grupo G tem elementos de ordem infinita. Pois caso contrário, se G fosse tal que todo elemento tivesse ordem finita, sua abelianização, G/G', seria um grupo abeliano, finitamente gerado, pelo fato de G ser finitamente gerado, e de torção, daí G/G' seria finito, um absurdo. Logo, G tem um elemento de ordem infinita e estamos sob as hipóteses do item *(i)* deste teorema, portanto $G \in \mathscr{A}$, contudo, Stadelmann prova em [38] que o subgrupo $H = \langle x^3 z, x^9 z \rangle$ não é 2-subnormal em G, ou seja, prova que G não está na classe $\mathscr{S}$. Logo podemos concluir que $\mathscr{A}$ não implica em $\mathscr{S}$.

$\square$

Temos então provado que as classes $\mathscr{S}, \mathscr{A}$ e $\mathscr{T}$ não são equivalentes.

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho classificamos os grupos de defeito 1. Vimos que os grupos abelianos pertencem a essa classe de grupos e mostramos que os grupos não abelianos (hamiltonianos) devem ser da forma $G = Q_8 \times A \times E$, onde Q_8, onde A é um grupo abeliano tal que todos os elementos possuem ordem ímpar e E é um 2-grupo abeliano elementar.

Para grupos de defeito 2, com base no Capítulo 3, definimos as seguintes classes (no caso $n = 2$, $\mathscr{T}_2 = \mathscr{T}$, $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}$, $\mathscr{S}_2 = \mathscr{S}$):

$\mathscr{T}_n$:= Grupos tais que todo subgrupo cíclico é n-subnormal.

$\mathscr{A}_n$:= Grupos tais que todo subgrupo abeliano é n-subnormal.

$\mathscr{S}_n$:= Grupos tais que todo subgrupo é n-subnormal.

Note que $\mathscr{T}_n \subseteq \mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{S}_n$ e no caso $n = 0$, temos que o grupo trivial.

No caso $n = 1$, temos equivalência entre essas classes (Grupos de Dedekind). No caso $n = 2$, vimos que elas não são equivalentes, mas temos que $\mathscr{A}_2 = \mathscr{T}_2$, restrito à grupos de torção sem elementos de ordem par ou grupos com um elemento de ordem infinita. Mahdavianary em [26] mostrou que restrito à p-grupos 2-gerados, $p \geq 3$, temos a equivalência entre as classes $\mathscr{T}_2$, $\mathscr{A}_2$ e $\mathscr{S}_2$. Isso motiva a seguinte questão:

Pergunta 1. Quais condições são necessárias ou suficientes para que essas classes (restritas) sejam equivalentes no caso $n \geq 2$?

Podemos também considerar outras classes de grupos. Mahdavianary em [23] acrescenta ao seu estudo duas novas classes $\mathscr{N}$ e $\mathscr{C}$, que são os grupos tais que todos os normalizadores são normais e os grupos tais que todo comutador normaliza todos os subgrupos, respectivamente. Neste artigo o autor classifica todos os 2-grupos 2-gerados com as propriedades $\mathscr{N}$, $\mathscr{T}$, $\mathscr{C}$ e $\mathscr{S}$. Ainda nessa direção de considerar o estudo de outras classes de grupo, podemos analisar grupos tais que todo centralizador é subnormal. Delizia, Moravec e Nicotera estudaram tais grupos, focando, em particular, em grupos tais que todo centralizador tem defeito subnormal no máximo 2 e em [8] mostraram que um grupo sem involuções satisfaz essa propriedade se, e somente se, é 3-Engel.

Neste trabalho estudamos grupos de defeito no máximo 2, porém existem estudos sobre defeitos maiores, como é o caso do artigo de Traustason [39]. Nesse artigo, Traustason estuda grupos tais que todo subgrupo tem defeito subnormal no máximo 3, relacionando com o estudo de grupos 3-Engel. Um dos resultados apresentados nesse trabalho é o seguinte:

Teorema. Seja G um grupo que livre de torção ou de expoente p, onde p é um primo diferente de 7. Então G é subnormal de defeito no máximo 3 se, e somente se, G é nilpotente de classe no máximo 3.

Por fim, faremos alguns comentários envolvendo grupos profinitos (grupos topológicos Hausdorff, compactos e totalmente desconexos, ver Ribes e Zalesskii [32]). Se G é um grupo profinito e H é um subgrupo fechado de G, chamamos H de subnormal apenas se existe uma cadeia como da Definição 1.3.1 de n-subnormalidade, com cada G_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ fechado. Assim, o conceito de defeito subnormal para grupos profinitos é equivalente, desde que as cadeias sejam de subgrupos fechados. A partir dessa definição, somos levados à seguinte pergunta:

Pergunta 2. Os resultados de subnormalidade mencionados neste trabalho são válidos para grupos profinitos?

Note que no caso profinito, estamos analisando a subnormalidade somente de subgrupos fechados. Ainda sob este contexto, vale citar o Teorema de Roseblade em [36], que nos diz que a classe de nilpotência de grupos tais que todo subgrupo tem defeito no máximo d é limitada por uma função dependendo apenas de d. Este fato nos motiva para a seguinte pergunta:

Pergunta 3. Existe uma versão profinita do Teorema de Roseblade?

Algumas generalizações de grupos de Dedekind têm sido estudadas no caso profinito, veja por exemplo Porto e Lima [31], Porto [28], Porto e Bessa [29]. Uma generalização dos grupos hamiltonianos são os grupos metahamiltonianos. Em grupos metahamiltonianos infinitos, os subgrupos abelianos são fechados na topologia profinita. Por este motivo, uma outra ideia de seguimento deste trabalho seria estudar o defeito subnormal para grupos profinitos metahamiltonianos.

Bibliografia

[1] L. An and Q. Zhang. Finite metahamiltonian p-groups. *Journal of Algebra*, 442:23–35, 2015.

[2] R. Baer. Situation der untergruppen und struktur der gruppe. *S.-B. Heidelberg Acad. Math.-Nat. Klasse*, 2:12–17, 1933.

[3] C. Bussman. A sketch of the history of engel groups. http://www.math.geek-den.net/history.pdf, 2021.

[4] D. Cappitt. Generalized Dedekind groups. *Journal of Algebra*, 17(3):310–316, 1971.

[5] D. Cappitt. On groups with every subgroup 2-subnormal. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1):17–18, 1973.

[6] C. Casolo. Groups with all subgroups subnormal. *Note di Matematica*, 28(suppl. 2):1–149, 2010.

[7] R. Dedekind. Ueber gruppen, deren sämmtliche theiler normaltheiler sind. *Math. Ann*, 48:137–168, 1897.

[8] C. Delizia, P. Moravec, and C. Nicotera. Groups with all centralizers subnormal of defect at most two. *Journal of Algebra*, 374:132–140, 2013.

[9] M. Du Sautoy, D. Segal, J. D. Dixon, and A. Mann. *Analytic pro-p groups*. Cambridge University Press, 1999.

[10] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.2*, 2019. https://www.gap-system.org.

[11] D. J. Garrison and L. C. Kappe. Metabelian groups with all cyclic subgroups subnormal of bounded defect. In *Infinite groups*, volume 94, pages 73–85, 2017.

[12] M. Hall. *The theory of groups*. Courier Dover Publications, 2018.

[13] H. Heineken. Engelsche elemente der länge drei. *Illinois Journal of Mathematics*, 5(4):681–707, 1961.

[14] H. Heineken. A class of three-engel groups. *J. Algebra*, 17(3):341–345, 1971.

[15] H. Heineken and I. J. Mohamed. A group with trivial centre satisfying the normalizer condition. *Journal of Algebra*, 10(3):368–376, 1968.

[16] G. T. Hogan and W. P. Kappe. On the H_p-problem for finite p-groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 20(2):450–454, 1969.

[17] I. Lima. *Apostila GGAP(Manual)*, 2016. Material não publicado.

[18] L-C. Kappe and D. M. Reboli. On the structure of generalized hamiltonian groups. *Archiv der Mathematik*, 75(5):328–337, 2000.

[19] W. Kappe. Die a-norm einer gruppe. *Illinois Journal of Mathematics*, 5(2):187–197, 1961.

[20] F. W. Levi. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions. *J. Indian Math. Soc*, 6:87–97, 1942.

[21] I. D. MacDonald. On certain varieties of groups. *Mathematische Zeitschrift*, 76:270–282, 1961.

[22] K. Mahdavi. On groups with every subgroup 2-subnormal. *Archiv der Mathematik*, 47(4):289–292, 1986.

[23] K. Mahdavi. A classification of 2-generator 2-groups with manv subgrouds 2-subnormal. *Communications in Algebra*, 15(4):713–750, 1987.

[24] S. K. Mahdavianary. *Groups with many subgroups 2-subnormal*. PhD thesis, State University of New York at Binghamton, 1983.

[25] S. K. Mahdavianary. A special class of three-engel groups. *Archiv der Mathematik*, 40:193–199, 1983.

[26] S. K. Mahdavianary. A classification of 2-generator p-groups, p $\geq$ 3, with many subgroups 2-subnormal. *Archiv der Mathematik*, 43(2):97–107, 1984.

[27] N. R. Rocco. *Uma breve introdução ao sistema GAP*, 1997. Material não publicado.

[28] A. L. P. Porto. Profinite Cappitt groups. *Quaestiones Mathematicae*, 44(3):307–311, 2021.

[29] A. L. P. Porto and V. R. Bessa. Profinite Dedekind groups. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 126(1):89–97, 2020.

[30] A. L. P. Porto, D. F. Guimarães, V. R. de Bessa, et al. A new proof of Baer-Dedekind theorem. *Southeast Asian Journal of Sciences*, 7(2):147–154, 2019.

[31] A. L. P. Porto and I. Lima. On pro-p cappitt groups with finite exponent. submitted.

[32] L. Ribes and P. Zalesskii. *Profinite groups*. Springer, 2000.

[33] D. J. S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*, volume 80. Springer Science & Business Media, 2012.

[34] D. J. S. Robinson. *Finiteness conditions and generalized soluble groups: Part 2*, volume 63. Springer Science & Business Media, 2013.

[35] J. S. Rose. *A course on group theory*. Courier Corporation, 1994.

[36] J. E. Roseblade. On groups in which every subgroup is subnormal. *Journal of Algebra*, 2(4):402–412, 1965.

[37] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148. Springer Science & Business Media, 2012.

[38] M. Stadelmann. Gruppen, deren untergruppen subnormal vom defekt zwei sind. *Archiv der Mathematik*, 30(1):364–371, 1978.

[39] G. Traustason. On groups in which every subgroup is subnormal of defect at most three. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 64(3):397–420, 1998.

Apêndice A

GAP - Groups, Algorithms and Programming

O que é o GAP?

O GAP [10] é a sigla para Groups, Algorithms and Programming e é um sistema desenvolvido com a intenção de programar e computar estruturas algébricas. Além de grupos, é possível utilizar o GAP para outras estruturas, tais como semigrupos e álgebras.

Funções utilizadas no trabalho

Comentaremos a seguir algumas funções utilizadas no Capítulo 3. Nossas principais referências são os manuais de N. R. Rocco (UnB) [27], Prof. Igor Lima (UnB) [17] e o manual contido no GAP.

- **FreeGroup(n):** Retorna um grupo livre com n geradores.
- **LowerCentralSeries(g):** Retorna a série central inferior do grupo g.
- **Comm(a,b):** Retorna o comutador dos elementos a e b.
- **StructureDescription(g):** Retorna a descrição da estrutura do grupo g conforme a biblioteca do GAP.
- **Size(g):** Retorna o tamanho do grupo g.
- **IdSmallGroup(g):** Retorna a identificação padrão do grupo g no GAP conforme a biblioteca do GAP.

Ao utilizar tais funções com o grupo D dado no Teorema B do Capítulo 3, obtivemos que o grupo D é o grupo

$$D = SmallGroup([128, 523]),$$

onde o número na primeira entrada representa a ordem de D e na segunda entrada representa a numeração dele na biblioteca do GAP. Além disso, foi possível utilizar as funções do GAP e obter que

$$D = ((C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2) : C_2,$$

onde a notação "$\times$" representa produto direto, ":" representa produto semidireto e "C_n"representa o grupo cíclico de ordem n.