



Universidade de Brasília

**Estimativas de curvatura para sólitons de
Ricci gradiente quadridimensionais**

Matheus Andrade Ribeiro de Moura Horácio

Orientador: Dr. João Paulo dos
Santos

Departamento de Matemática,
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 06 de março de 2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Estimativas de curvatura para sólitons de Ricci gradiente quadridimensionais

por

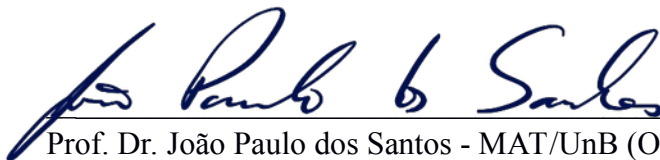
Matheus Andrade Ribeiro de Moura Horácio*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

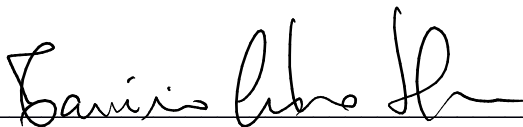
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 06 de março de 2023.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Junior – UFC (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

What an astonishing thing a book is. It's a flat object made from a tree with flexible parts on which are imprinted lots of funny dark squiggles. But one glance at it and you're inside the mind of another person, maybe somebody dead for thousands of years. Across the millennia, an author is speaking clearly and silently inside your head, directly to you. Writing is perhaps the greatest of human inventions, binding together people who never knew each other, citizens of distant epochs. Books break the shackles of time. A book is proof that humans are capable of working magic.

Carl Sagan

We are a way for the Cosmos to know itself.

Carl Sagan

Extraordinary claims require extraordinary evidence.

Carl Sagan

Imagination will often carry us to worlds that never were. But without it we go nowhere.

Carl Sagan

For me, it is far better to grasp the Universe as it really is than to persist in delusion, however satisfying and reassuring.

Carl Sagan

If you wish to make an apple pie from scratch, you must first invent the universe.

Carl Sagan

Dedico esse trabalho a Carl Edward Sagan.

*Mathematics is not about numbers,
equations, computations, or
algorithms: it is about
understanding.*

William Thurston

Wir müssen wissen.

Wir werden wissen.

David Hilbert

*If I have seen further it is only by
standing on the shoulders of
giants.*

Isaac Newton

*A human being is part of a whole,
called by us the "Universe", a part
limited in time and space. He
experiences himself, his thoughts
and feelings, as something
separated from the rest - a kind of
optical delusion of his
consciousness. This delusion is a
kind of prison for us, restricting
us to our personal desires and to
affection for a few persons nearest
us. Our task must be to free
ourselves from this prison by
widening our circles of compassion
to embrace all living creatures and
the whole of nature in its beauty.*

Albert Einstein

Aut viam inveniam aut faciam.

Hannibal Barca

*Only those who will risk going too
far can possibly find out how far
one can go.*

T. S. Elliot

*There is no royal road to
geometry.*

Euclid

*We are absurdly accustomed to the
miracle of a few written signs
being able to contain immortal
imagery, involutions of thought,
new worlds with live people,
speaking, weeping, laughing. We
take it for granted so simply that
in a sense, by the very act of
brutish routine acceptance, we
undo the work of the ages, the
history of the gradual elaboration
of poetical description and
construction, from the treeman to
Browning, from the caveman to
Keats. What if we awake one day,
all of us, and find ourselves utterly
unable to read? I wish you to gasp
not only at what you read but at
the miracle of its being readable.*

Vladimir Nabokov

Great men are forged in fire. It is the privilege of lesser men to light the flame.

Steven Moffat

Agradecimentos

Primeiramente, reconheço a impossibilidade de fazer justiça a todas as pessoas que contribuíram com o desenvolvimento desse trabalho via agradecimentos em alguns curtos parágrafos. Por outro lado, considero que o melhor esforço possível do autor nesse fim é uma obrigação moral, que tento cumprir em seguida. Assim,

Agradeço primeiramente e imensamente à pessoa mais importante na realização dessa dissertação, o meu orientador, João Paulo dos Santos, a quem admiro muito. Agradeço pelo papel extremamente decisivo na minha formação. Agradeço pelas oportunidades concedidas em todas as orientações não-oficiais e oficiais, desde o segundo semestre da graduação até o período de pandemia e o presente período, e por todas as aventuras a nível de graduação em que embarcamos no PET e no PIBIC. Agradeço por todas as suas excelentes aulas de Geometria Analítica (que, em particular, consolidaram o meu interesse em geometria logo no primeiro semestre da graduação), de Geometria Riemanniana, de Geometria das Subvariedades e por toda a guia, competência, dedicação, incentivo, confiança, disposição, inspiração e paciência de nível $> \varepsilon^{-\pi}$ que estiveram sempre presentes durante todos estes últimos anos de excelentes orientações. Não teria sido possível chegar até aqui sem você. Muitíssimo obrigado!

Agradeço ao professor Tarcísio Castro Silva, pelo exemplo acadêmico, pelas excelentes e inspiradoras aulas de Cálculo 1, Geometria Diferencial e Formas Diferenciais, e por toda a disposição e ajuda desde o meu primeiro semestre da graduação. Muito obrigado!

Agradeço profundamente à professora e tutora do PETMAT UnB, Luciana Ávila, pelo exemplo acadêmico, pelo acolhimento no grupo e por seu excelente trabalho em torná-lo no ambiente transformador e inspirador que contribuiu de maneira essencial para que eu chegasse até aqui. Muito obrigado!

Agradeço aos professores Ernani de Sousa Ribeiro Júnior, Tarcísio Castro Silva, e João Paulo dos Santos, que compuseram a comissão examinadora desse trabalho, pelo tempo tomado para avaliá-lo e por todas as suas valiosas sugestões e correções, que contribuíram muito. Muito obrigado!

Agradeço à professora Aline Pinto pelas excelentes aulas de Topologia Geral e Álgebra 1 e 2 e ao professor Lucas Seco pelas excelentes aulas de Cálculo 2, que foram, respectivamente, umas das primeiras pessoas a me mostrarem a beleza do rigor matemático. Obrigado!

Agradeço ao professor Martino Geronzi pelas excelentes aulas de Álgebra 3, que foram fundamentais à minha formação. Obrigado!

Agradeço ao maior divulgador científico de todos os tempos, Carl Sagan, por todos os seus grandiosíssimos trabalhos, que mudaram profunda e irreversivelmente a minha (e certamente também a de incontáveis outras pessoas) vida e foram a maior motivação e inspiração para que eu tomasse os

primeiros passos da muito frutífera e vitalícia jornada que hoje me leva a mais esta conquista. Muito obrigado!

Agradeço ao Amadeus Maldonado, pela incrível inspiração e por todas as discussões e conversas matemáticas e não-matemáticas que tivemos, que me ajudaram muito. Obrigado!

Agradeço ao Jailson Oliveira, por todas as discussões “malucas” e não-malucas que já tivemos até aqui, e por toda a sua ajuda em prévias e afins que contribuíram muito para esse trabalho. Sua presença é, e sempre tem sido, um prazer. Muito obrigado!

Agradeço ao Rodrigo Duarte pela amizade muito proveitosa, pelo incentivo constante nos tempos de graduação e pandemia a explorar o assustador desconhecido. Os finais de semana na sala do PET em que quase morríamos de estudar para tentar (felizmente, com sucesso!) adiantar os exames de qualificação serão sempre uma lembrança muito querida. Muito obrigado!

Agradeço ao Manoel Fernando pela amizade firmada desde aquela primeira confraternização no PDS no segundo semestre de 2017 onde descobrimos o amor comum pelo livro “O mundo assombrado pelos demônios” e por todas as nossas reuniões de estudo juntos, que me ajudaram muito. Muito obrigado!

Agradeço à Bárbara Guerra por todas as discussões, reuniões e afins que tivemos organizando o Clube do Livro do PET durante a pandemia, que me ajudaram a não enlouquecer ainda mais durante o muito infeliz período de pandemia. Muito obrigado!

Agradeço ao Caio Barbosa Rodrigues, por todas as discussões/reuniões muito produtivas nos tempos de graduação e nos tempos de pandemia em que tentávamos dar o nosso melhor nas matérias EAD da UnB e do IMPA. Muito obrigado!

Agradeço ao Rafael Meira pela amizade, pelo incentivo na época em que fomos PETianos, e por todas as boas perguntas que me fizeram pensar e refletir bastante. Muito obrigado!

Agradeço ao Carlos Campos pela amizade, pelas descontrações, e por todas as corridas juntos no Guará no tempo de pandemia. Muito obrigado!

Agradeço a todo o pessoal do vôlei das sextas e do futebol das quartas e sábados (que não citarei em nome por serem muitas) por todas as risadas e descontrações proporcionadas. Obrigado!

Agradeço ao Ivo Terek Couto, pelos seus excelentes textos responsáveis por grande parte do meu conhecimento atual, e por todas as dúvidas respondidas nos grupos de Facebook e no Math.Stackexchange. Obrigado!

Agradeço ao pessoal da comunidade ACBR, que desde os tempos do finado Orkut foram de grande importância na minha vida. Obrigado!

Agradeço à comunidade do Math.StackExchange e do MathOverflow, a quem devo muito do meu conhecimento e aprendizado. Em especial agradeço a Ted Shifrin. Muito obrigado!

Finalmente, mas não menos importante (muito pelo contrário!), agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que viabilizou a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo de s3litos de Ricci quadridimensionais gradiente completos e encolhedores (ou shrinking, como tamb3m conhecidos atrav3s da terminologia em ingl3s) de dimens3o 4. Apresentamos em detalhes as demonstra33es (expostas originalmente em um artigo de autoria de Huai-Dong Cao, Ernani Ribeiro Jr, e Detang Zhou [6]) de dois teoremas que garantem classifica33es geom3tricas e controles na curvatura de Ricci ou curvatura Riemanniana, desde que sejam satisfeitas estimativas pontuais sobre as partes duais ou anti-auto-duais do tensor de Weyl ou um certo controle sobre a curvatura escalar em termos da fun33o potencial do s3lito.

Palavras-chave: fluxo de Ricci, s3litos de Ricci, estimativas de curvatura, tensor de Weyl, variedades quadridimensionais.

Abstract

In this work, we provide a study of complete gradient shrinking Ricci solitons of dimension 4. We present in detail the proofs (originally exposed in an article by Huai-Dong Cao, Ernani Ribeiro Jr, and Detang Zhou [6]) of two theorems that guarantee geometrical classifications and controls on the Ricci or Riemannian curvature, provided that pointwise estimates on the self-dual or anti-self-dual parts of the Weyl tensor or a certain control on the scalar curvature in terms of the soliton's potential function are satisfied.

Keywords: Ricci flow, Ricci solitons, curvature estimates, Weyl tensor, four-manifolds.

Sumário

Introdução	10
1 Conceitos e notações preliminares	14
1.1 Variedades Riemannianas	14
1.2 Tensores	19
1.2.1 O traço de tensores	27
1.2.2 A extensão da métrica a tensores	31
1.2.3 A derivada covariante de tensores	33
1.3 Álgebra exterior	45
1.4 As identidades de Bianchi e suas consequências	46
2 O fluxo de Ricci	52
2.1 Motivação e exemplos	52
2.2 Sólitons	60
3 Estimativas de curvatura	74
3.1 Prólogo	74
3.1.1 Algumas decomposições importantes	75
3.1.2 Algumas importantes particularidades de dimensão 4	85
3.2 Resultados auxiliares	96
3.3 Resultados principais	102
Apêndice	121
Alguns cálculos importantes	121
Formas diferenciais	125
O método do referencial móvel	130
Produtos warped	132
Bibliografia	148

Introdução

O fluxo de Ricci, introduzido em [26] por Hamilton, surgiu na década de 1980 como a “espada” mais promissora para abater a conjectura de Poincaré, a saber,

A conjectura de Poincaré. *Toda variedade tridimensional fechada (id est, compacta e sem bordo) e simplesmente conexa é homeomorfa à esfera \mathbb{S}^3 .*

Grigori Perelman estendeu o programa inicial de Hamilton (que esboçaremos a seguir) para provar a conjectura da geometrização de Thurston, que implica (conforme provado em [36]) na conjectura de Poincaré.

Resumidamente e de maneira grosseira, a estratégia de Hamilton foi a seguinte: comece com uma 3-variedade fechada e simplesmente conexa \mathcal{M}^3 . A priori, \mathcal{M} só tem uma estrutura topológica, mas é um fato bem conhecido (veja o lema (L.2.1)) que em dimensão $n \leq 3$, qualquer variedade topológica \mathcal{M}^n admite uma única estrutura diferenciável compatível com sua topologia, e, *a fortiori*, admite uma métrica Riemanniana. Seja então g_0 uma métrica Riemanniana em \mathcal{M} . Iremos deformar g_0 de forma que façamos a sua curvatura “fluir” de áreas mais curvadas para área menos curvadas (analogamente à maneira que a equação do calor faz a temperatura fluir de regiões mais quentes a mais frias), tornando a variedade mais homogênea ao longo do tempo. Idealmente, se espera que tal processo eventualmente nos forneça uma métrica g_∞ em \mathcal{M} de curvatura de Ricci constante, ou, equivalentemente, de Einstein, e em dimensão 3, *a fortiori* de curvatura seccional constante (conforme vemos em (L.1.15)). Como \mathcal{M}^3 é fechada, nesse caso o Teorema de Cartan-Hadamard garantiria que tal curvatura seccional é positiva, e pelo Teorema de Killing-Hopf, \mathcal{M}^3 seria necessariamente homeomorfa à esfera \mathbb{S}^3 , como afirma a conjectura de Poincaré.

Os maiores indicadores do eventual sucesso dessa abordagem (e portanto do imenso poder do fluxo de Ricci como uma ferramenta para relacionar topologia e curvatura) foram os seguintes resultados, provados por Hamilton em [26] e [23]:

Teorema (T.0.1) (Hamilton). *Seja \mathcal{M}^3 uma 3-variedade diferenciável fechada que admite uma métrica Riemanniana de curvatura de Ricci estritamente positiva. Então o recobrimento universal de \mathcal{M} é \mathbb{S}^3 . Em particular, se \mathcal{M} é simplesmente conexa, então \mathcal{M} é \mathbb{S}^3 .*

Teorema (T.0.2) (Hamilton). *Seja \mathcal{M}^4 uma 4-variedade diferenciável fechada que admite uma métrica Riemanniana com operador de curvatura positivo. Então o recobrimento universal de \mathcal{M} é \mathbb{S}^4 . Em particular, se \mathcal{M} não é orientável, então \mathcal{M} é o espaço projetivo \mathbb{RP}^4 .*

Note que o “em particular” do Teorema **(T.0.2)** se deve ao fato de que as únicas formas espaciais com curvatura positiva de dimensão par são \mathbb{RP}^{2n} e \mathbb{S}^{2n} . De fato, se uma forma espacial de dimensão par com curvatura positiva é orientável, então também é simplesmente conexa pelo Teorema de Synge e é (pelo Teorema de Killing-Hopf) portanto \mathbb{S}^{2n} . Caso contrário, a mesma é \mathbb{RP}^{2n} , pois seu recobrimento duplo orientável é \mathbb{S}^{2n} .

Em geral, há várias obstruções à execução efetiva de tal estratégia (todas derrubadas por Grigori Perelman!). Entre estas, se destacam

- a existência de possíveis *singularidades*, regiões onde a curvatura de certa forma diverge de uma forma a priori descontrolada;
- os sólitons de Ricci, soluções que evoluem apenas por mudanças de escalas e difeomorfismos, sendo em certo sentido pontos estacionários do fluxo. Dizemos que uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}} = g_0)$ admite uma estrutura de sólon de Ricci quando existe um campo $V \in \Gamma(T\mathcal{M})$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{Ric}_{g_{\mathcal{M}}} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_V (g_{\mathcal{M}}) = \lambda g_{\mathcal{M}}. \quad (1)$$

Além disso, pode-se provar que os mesmos também são, de certa forma (para mais detalhes, veja [12]), importantes modelos das singularidades do fluxo.

Ambas as situações fazem com que a evolução do fluxo atinja um impasse aparentemente intransponível. Para contornar tal obstáculo, Perelman propôs “cortar” a variedade de forma a reiniciar o fluxo nos pedaços restantes. Porém, formalizar esse processo naturalmente requer tanto uma compreensão melhor de como a curvatura pode divergir como um entendimento das possíveis topologias/geometrias de tais sólitons. O estudo das singularidades e dos sólitons de Ricci fica então claramente motivado. Nesse sentido,

- Perelman provou, num sentido que pode ser formalizado (veja, por exemplo, [12]), que o raio de injetividade não diminui mais rápido do que a curvatura nas regiões de sua divergência, o que implica em uma certa semelhança geométrica com um certo tipo de fluxos de Ricci antigos. Por sua vez, tal fato permite concluir o suficiente sobre as singularidades para que se possa realizar o processo de *cirurgia*;
- Em [45], Perelman provou que todo sólon de Ricci compacto é um sólon de Ricci *gradiente*, ou seja, que o campo V na equação (1) sempre pode ser expresso como $V = \nabla f$ para alguma função $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.
- Pelos trabalhos de Ivey [27], Perelman [44], Naber [39], Ni-Wallach [42], e Cao-Chen-Zhu [5], se sabe que qualquer sólon de Ricci tridimensional gradiente completo e encolhedor é um quociente finito de uma das variedades a seguir: a esfera redonda \mathbb{S}^3 , o sólon Gaussiano \mathbb{R}^3 encolhedor, ou o cilindro redondo $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Conforme mencionado em [4], uma das várias particularidades notáveis do fluxo de Ricci em dimensão três é a preservação da positividade da curvatura de Ricci ao longo do fluxo. Mais especificamente, uma das “mágicas” do fluxo de Ricci em dimensão três é a seguinte: sempre que uma solução $g(t)$ do fluxo de Ricci desenvolve uma singularidade em tempo finito, digamos $T < \infty$, necessariamente acontecem os seguintes fenômenos:

- a curvatura “explode”, mais precisamente,

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \left(\sup_{x \in \mathcal{M}} \|\text{Rm}_{g(t)}\|(x) \right) = \infty$$

- em qualquer ponto e instante em que a curvatura seccional é negativa e grande em valor absoluto, se encontra uma curvatura seccional muito maior (do que o valor absoluto da curvatura seccional negativa) no mesmo tempo e instante. Para detalhes, pode-se consultar [12].

Como visto em [4] e [12], tais fatos implicam na nossa primeira estimativa de curvatura: qualquer sólito de Ricci tridimensional shrinking ou steady tem não só curvatura seccional não negativa, mas ainda além, seu tensor curvatura Rm é controlado pela curvatura escalar Scal , *id est*, existe uma constante universal $c > 0$ tal que $\|\text{Rm}\| \leq C \text{Scal}$.

Em geral, informações sobre a “divergência” da curvatura de uma solução no “infinito” (de maneira mais formal, dos seus modelos de singularidade associados, que surgem como um certo limite de dilatações parabólicas do fluxo) são cruciais ao estudo via o fluxo de Ricci de variedades Riemannianas completas e não compactas. Tais considerações esclarecem a importância do estudo do comportamento da curvatura de sólitons de Ricci gradiente.

Porém, ao aumentarmos dimensões, a situação se torna bem mais complexa. Em dimensão $n \leq 3$, o tensor curvatura Rm é determinado pelo tensor de Ricci: de fato, isso é uma consequência imediata da proposição (P.3.4) e da observação (O.71) (e este fato foi essencial para a prova do Teorema (T.0.1) dada em [26]). Em contraste, em dimensões mais altas, surge mais uma entidade essencial ao estudo do controle de Rm : o tensor de Weyl. Conforme exemplificado em [41], isso faz com que, em dimensão $n \geq 4$, percamos a preservação da positividade da curvatura de Ricci pelo fluxo.

Nesse sentido, um dos resultados recentes mais importantes foi a estimativa de curvatura $\|\text{Rm}\| \leq C \text{Scal}$ para sólitons de Ricci completos (e não compactos) gradiente shrinking com curvatura escalar limitada (*id est*, $\text{Scal} \leq M$ para alguma constante $M \in \mathbb{R}$). De acordo com Huai-Dong Cao (veja [4]), tal estimativa, juntamente com um resultado de unicidade obtido por Kotschwar-Wang em [28], desempenhou um papel crucial ao progresso da classificação de sólitons de Ricci completos não compactos gradiente shrinking quadridimensionais. Em [6], o objeto principal de estudo do nosso trabalho, Cao-Ribeiro-Zhou estenderam a estimativa de Munteanu e Wang, num sentido que explicitaremos em breve.

Nosso trabalho é dividido em três capítulos. No **Capítulo 1**, além de estabelecer nossas convenções e notações internas, apresentamos em detalhes vários conceitos e resultados fundamentais de tensores e geometria Riemanniana, que embora básicos, costumam não ser esclarecidos tão pormenorizadamente na literatura e serão cruciais aos capítulos seguintes.

No **Capítulo 2**, apresentamos alguns dos elementos básicos do fluxo de Ricci, começando com uma motivação do espírito do fluxo como um análogo da equação do calor para variedades Riemannianas. Em seguida, estudamos vários exemplos clássicos de soluções tradicionais do fluxo e de sólitons (incluindo o sólito de Bryant e o sólito Gaussiano), também esclarecendo o seu caráter de solução autossimilar do fluxo.

O **Capítulo 3** começa com um estudo detalhado, baseado em [15], da dualidade de tensores de tipo curvatura e operadores auto-adjuntos em $\Lambda^2(\mathcal{M})$ e da decomposição do fibrado de tensores de tipo

curvatura, a saber,

$$\mathcal{R}(T\mathcal{M}) = \mathbb{R}(g \otimes g) \oplus (g \otimes \mathcal{S}(T\mathcal{M})_0) \oplus \mathcal{W}(T\mathcal{M}).$$

Como veremos, tal decomposição implica em várias importantes particularidades que acontecem em dimensão 4, se destacando as seguintes

- o fato de que essa é a dimensão mais baixa em que o tensor de Weyl não se anula, e portanto é a dimensão mais baixa em que o tensor curvatura Rm não é determinado pelo tensor de Ricci;
- a decomposição do fibrado $\Lambda^2(\mathcal{M})$ das 2-formas em \mathcal{M} em autofibrados invariantes pelo operador estrela de Hodge, que implica na seguinte decomposição (crucial às demonstrações dos Teoremas (T.3.1) e (T.3.2)) do operador curvatura:

$$Rm = \left(\begin{array}{c|c} \left(\mathcal{W}^+ + \frac{\mathcal{S}}{12} \right) \Big|_{\Lambda_+^2(\mathcal{M})} & \mathcal{E} \Big|_{\Lambda_-^2(\mathcal{M})} \\ \hline \mathcal{E} \Big|_{\Lambda_+^2(\mathcal{M})} & \left(\mathcal{W}^- + \frac{\mathcal{S}}{12} \right) \Big|_{\Lambda_-^2(\mathcal{M})} \end{array} \right).$$

Em seguida, estabelecemos alguns resultados auxiliares ao nosso propósito principal: as demonstrações de dois resultados (de autoria de Huai-Dong Cao, Ernani Ribeiro Jr, e Detang Zhou, expostos originalmente em [6]) sobre sólitons de Ricci gradiente quadridimensionais completos e encolhedores (também conhecidos na literatura por sua denominação em inglês, shrinking), a saber,

- Um sóliton de Ricci gradiente completo e shrinking de dimensão 4 que não é Einstein e satisfaz ou

$$\|W^+\|^2 - \sqrt{6} \cdot \|W^+\|^3 \geq g((E \otimes E)^+, W^+);$$

ou

$$\|W^-\|^2 - \sqrt{6} \cdot \|W^-\|^3 \geq g((E \otimes E)^-, W^-),$$

é um quociente finito de uma das variedades a seguir: \mathbb{R}^4 , $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$, ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

- Se um sóliton de Ricci gradiente shrinking completo e não compacto de dimensão 4 satisfaz

$$Scal \leq A + \varepsilon f,$$

onde $A > 0$ e $0 \leq \varepsilon < 1$ são constantes, então existem constantes c_0, c_1 e c_2 de forma que as seguintes estimativas de curvatura são satisfeitas em \mathcal{M} :

(i) $\|Ric\| \leq c_0 + (c_1\varepsilon)f,$

(ii) $\|Rm\| \leq c_0 + (c_2\varepsilon)f^2.$

Por fim, no **Apêndice**, incluímos as demonstrações detalhadas de vários lemas usados ao longo do trabalho. Embora muito importantes à toda nossa exposição, a natureza técnica e carregada de índices dos cálculos presentes em tais demonstrações justifica as suas posições no apêndice.

Capítulo 1

Conceitos e notações preliminares

O objetivo desse capítulo é estabelecer (baseados nas referências [13], [14], [3], [31], [32] e [53]) com detalhes as principais fundações, notações e convenções internas que usaremos ao longo desse trabalho. Embora tenha sido feito um esforço de tornar toda a exposição maximamente auto-contida, alguns conceitos básicos de geometria Riemanniana e de variedades diferenciáveis, que assumiremos já serem familiares ao leitor, se fazem necessários para uma leitura agradável. Começaremos estabelecendo a notação que usaremos para variedades diferenciáveis.

1.1 Variedades Riemannianas

Nessa seção iremos relembrar algumas noções elementares de variedades diferenciáveis e de geometria Riemanniana, com base nas referências [31] e [32].

Seja \mathcal{M}^n uma variedade diferenciável de dimensão n , $\psi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em torno de um ponto $p \in \mathcal{M}$ arbitrariamente fixado e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i \right\}_{1 \leq i \leq n}$ o referencial local induzido por ψ . Denotaremos por $\{dx^i\}_{1 \leq i \leq n}$ o seu co-referencial associado, definido por:

$$\begin{aligned} dx^i &: U \rightarrow T^*U \\ p &\mapsto dx^i|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto dx^i|_p(v) = v^i, \end{aligned}$$

para cada $v = \sum_{1 \leq i \leq n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p\mathcal{M}$. Equivalentemente,

$$dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i, \quad \forall p \in U.$$

No caso especial $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ em que temos uma única carta $\varphi = \text{Id}$ e os (co-)referenciais se tornam globais, os denotaremos por

$$\left\{ dr^i \right\}_{1 \leq i \leq n} \text{ e } \left\{ \frac{\partial}{\partial r^i} \right\}_{1 \leq i \leq n},$$

que podem ser naturalmente identificados com a base canônica de \mathbb{R}^n . Note que, por um cálculo muito simples, a diferencial da i -ésima função coordenada da carta ψ (dada por $r^i \circ \psi$, onde $r^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na i -ésima coordenada de \mathbb{R}^n) coincide com dx^i , *id. est.*, $dx^i = d(r^i \circ \psi)$, o que justifica a nossa notação.

Em seguida, introduziremos (com base nas referências [31] e [32]) as noções de fibrados vetoriais sobre variedades diferenciáveis e de conexões e seções sobre tais fibrados. Uma vez que tensores se manifestam como seções de fibrados vetoriais apropriados (num sentido que formalizaremos em breve) e estaremos interessados em estender a derivada covariante usual para tensores, tal abordagem fica claramente motivada.

Definição (D.1.1). Um fibrado vetorial de posto n sobre uma variedade diferenciável \mathcal{M} é uma variedade diferenciável E juntamente com uma aplicação suave e sobrejetora $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ que satisfaz as seguintes condições:

(a) Para cada $p \in \mathcal{M}$, a fibra

$$E_p \doteq \pi^{-1}(\{p\})$$

é um espaço vetorial real de dimensão n .

(b) Para cada $p \in \mathcal{M}$, existe uma vizinhança $U_p \ni p$ de $p \in \mathcal{M}$ e um difeomorfismo

$$\psi_p : \pi^{-1}(U_p) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n,$$

tal que, se $\text{pr}_1 : U_p \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_p$ denota a projeção na primeira coordenada, então

$$\pi = \text{pr}_1 \circ \psi_p.$$

(c) Para cada $q \in U$, a aplicação

$$\psi_p|_{E_q} : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

Definição (D.1.2). Se $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ é um fibrado vetorial sobre \mathcal{M} , denotaremos por $\Gamma(E)$ o conjunto das seções de E sobre \mathcal{M} , ou seja,

$$\Gamma(E) \doteq \left\{ s : \mathcal{M} \rightarrow E \mid \underbrace{\pi \circ s = \text{Id}_{\mathcal{M}}}_{\text{i.e., } s(p) \in E_p \ \forall p \in \mathcal{M}} \right\}.$$

Definição (D.1.3). Uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}, g) é uma variedade diferenciável \mathcal{M} (que, a não ser que explicitamente dito em contrário, sempre assumiremos ser conexa e sem bordo) munida de uma seção g sobre o fibrado das formas bilineares positiva definidas e simétricas em \mathcal{M} .

Observação (O.1). Para cada $p \in \mathcal{M}$, $g(p) : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno em $T_p\mathcal{M}$. g é portanto um campo tensorial simétrico de ordem 2 que é positivo definido no sentido de que $g_p(v, v) \geq 0$ seja qual for $v \in T_p\mathcal{M}$, com igualdade se e somente se $v = 0$.

Definição (D.1.4). Uma conexão em um fibrado $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ sobre \mathcal{M} é uma aplicação $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ que satisfaz as seguintes propriedades

- $\nabla_X Y$ é linear sobre $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ em X ; ou seja, sejam quais forem $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ e $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, vale

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y.$$

- $\nabla_X Y$ é linear sobre \mathbb{R} em Y : sejam quais forem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$, vale

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2.$$

- ∇ satisfaz a seguinte regra do produto: dada qualquer $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y.$$

Teorema (T.1.1) (Teorema fundamental da Geometria Riemanniana). *Seja (\mathcal{M}, g) uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão ∇ em \mathcal{M} que satisfaz as seguintes condições:*

- $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$;
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Demonstração: Consulte [32].

■

As duas condições acima implicam na seguinte equação, comumente chamada de *fórmula de Koszul*:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad - g([Y, X], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X), \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definição (D.1.5). Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Definimos o tensor curvatura de \mathcal{M} por

$$\begin{aligned} \text{Rm} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) &\mapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Também é comum denotar $\text{Rm}(X, Y, Z)$ por $\text{Rm}(X, Y)Z$.

Observação (O.2). O termo “tensor” empregado na definição anterior será definido detalhadamente em breve.

Observação (O.3) (“Paralelidade pontual”). Como visto em [32], se $p \in \mathcal{M}$ e $x \in T_p\mathcal{M}$, é sempre possível estender x a um campo $X \in \Gamma(TM)$ tal que $X(p) = x$ e $\nabla X|_{T_p\mathcal{M}} \equiv 0$ (ou seja, $\nabla_v X = 0$ seja qual for $v \in T_p\mathcal{M}$).

Definição (D.1.6). Se $p \in \mathcal{M}^n$ e $\varphi : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma carta em torno de p , os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita ∇ de \mathcal{M} em relação a φ são as funções reais $\{\Gamma_{ij}^m\}_{1 \leq i,j,m \leq n} \subset \mathcal{C}^\infty(U_p)$ determinadas por

$$(\nabla_{\partial_i} \partial_j)(q) = \sum_{1 \leq \ell \leq n} \Gamma_{ij}^\ell(q) \partial_\ell|_q, \quad \forall q \in U_p.$$

Observação (O.4). Um cálculo direto mostra que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq \ell \leq n} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}). \quad (1.3)$$

Observação (O.5). Sejam $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$, $p \in \mathcal{M}$ um ponto arbitrariamente fixado e suponha que $X(p) = x \in T_p\mathcal{M}, Y(p) = y \in T_p\mathcal{M}$. O fato de $(\nabla_X Y)(p)$ depender somente de x e de Y numa vizinhança (arbitrariamente pequena) de p torna inofensivo o abuso de notação de denotar $(\nabla_X Y)(p)$ tanto por $\nabla_x Y$ ou por $\nabla_x y$. Cometeremos tal abuso várias vezes durante este trabalho. *Mutatis mutandis*, é claro que uma observação inteiramente análoga vale para conexões em fibrados sobre \mathcal{M} .

Definição (D.1.7). Uma vizinhança U_p de um ponto $p \in \mathcal{M}$ é dita uma vizinhança normal de p quando a aplicação exponencial

$$\exp_p : (\exp_p)^{-1}(U_p) \subset T_p\mathcal{M} \rightarrow U_p \subset \mathcal{M}$$

é um difeomorfismo.

Definição (D.1.8). Geodésicas partindo de p cujas imagens estão contidas numa vizinhança normal de p são chamadas de *geodésicas radiais*.

Lema (L.1.1). Seja (\mathcal{M}^n, g) uma variedade Riemanniana e $p \in \mathcal{M}$ um ponto arbitrariamente fixado. Então existe uma vizinhança $U_p \ni p$ e um referencial local $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \Gamma(TU_p)$ que satisfaz

$$g(E_i(q), E_j(q)) = \delta_{ij} \quad \forall q \in U_p, \quad e \quad \nabla_{E_i(p)} E_j = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$.

Demonstração: Seja U_p uma vizinhança normal de p e fixe uma base ortonormal $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de $T_p\mathcal{M}$. Essa base induz um isomorfismo

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R}^n &\rightarrow T_p\mathcal{M} \\ (x^1, \dots, x^n) &\mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} x^i b_i. \end{aligned}$$

Considere agora a carta $\varphi = (\exp_p \circ B)^{-1}$ em torno de p e seja $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$ sua base coordenada associada. Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &= d(\exp_p \circ B) \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_0 \right) \\ &= \underbrace{d(\exp_p)_0}_{=\text{Id}_{T_p\mathcal{M}}} \circ \underbrace{dB_0}_{=B} \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_0 \right) \end{aligned}$$

$$= B \left(\left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_0 \right) \\ = b_i,$$

segue que $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$ é uma base ortonormal de $T_p \mathcal{M}$, de forma que podemos portanto definir $E_i(p) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ para cada $1 \leq i \leq n$. Para estender tal base a um referencial ortonormal local, basta lembrarmos do fato de que o transporte paralelo é uma isometria e realizarmos o transporte paralelo ao longo de geodésicas radiais. Mais precisamente, para cada $q \in U_p$, existe uma única geodésica radial $\gamma_{p,q} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ ligando p e q , e podemos então definir

$$E_i(q) = P_{\gamma_{p,q},0,1}(E_i(p)).$$

Em respeito à carta φ , é claro que a representação em coordenadas da única geodésica $\gamma_v : I \rightarrow \mathcal{M}$ partindo de p com velocidade inicial $v \in T_p \mathcal{M}$ é dada por $t \mapsto tv$, e portanto a equação das geodésicas se escreve como

$$\frac{d^2}{dt^2} (\gamma_v(t))^k + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \cdot \frac{d}{dt} (\gamma_v(t))^i \cdot \frac{d}{dt} (\gamma_v(t))^j = 0, \quad \forall t \in I \text{ e } \forall 1 \leq k \leq n.$$

Em particular, temos

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \Gamma_{ij}^k(p) v^i v^j = 0, \quad \forall v = \sum_{1 \leq i \leq n} v^i b_i \in T_p \mathcal{M}, \text{ seja qual for } 1 \leq k \leq n.$$

Fazendo $v = \partial_a$ para qualquer $1 \leq a \leq n$ fixado, concluímos que $\Gamma_{aa}^k(p) = 0$ sejam quais forem $1 \leq a, k \leq n$. Finalmente, fazendo $v \in \{\partial_a + \partial_b, \partial_b - \partial_a\}$ para quaisquer índices fixados $1 \leq a, b \leq n$ e subtraindo as equações resultantes, obtemos $\Gamma_{ab}^k(p) = 0$ para quaisquer $1 \leq a, b, k \leq n$, donde segue que $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ sejam quais forem $1 \leq i, j \leq n$. ■

Observação (O.6). É fácil verificar que em coordenadas normais (coordenadas da forma $\varphi = (\exp_p \circ B)^{-1}$, assim como visto na demonstração do lema anterior) todas as primeiras derivadas parciais de g_{ij} se anulam em p . Isso mostra que não existem invariantes geométricos de ordem < 2 . Como visto em [32], tal fato também pode ser visto pela expansão da métrica em coordenadas normais, dada por

$$g_{ij}(t) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \text{Rm}_{ik\ell j} x^k x^\ell + O(|t|^3).$$

Observação (O.7). Pela definição de geodésicas e pela própria construção de $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$, é claro também que o referencial geodésico do lema (L.1.1) satisfaz

$$\nabla_v E_i = 0,$$

seja qual for $v \in T_p \mathcal{M}$.

Como veremos brevemente, a observação **(O.3)** e o lema **(L.1.1)** nos serão muito úteis. O referencial acima é também chamado de um *referencial geodésico centrado em p* .

Observação (O.8). A notação $a \cdot b$ será reservada para *sempre* denotar a multiplicação de dois números reais, não a usaremos para denotar o produto interno. Ademais, adotaremos a notação \doteq ao invés da usual $:=$ quando formos escrever uma igualdade que define um objeto.

1.2 Tensores

Dedicaremos essa seção a explorar os principais conceitos de tensores presentes neste trabalho. É importante ressaltar que nossa abordagem segue de perto às encontradas em **[14]** e **[3]**.

Seja \mathbb{V} um espaço vetorial real de dimensão finita, digamos n . Denotaremos por \mathbb{V}^* o seu dual:

$$\mathbb{V}^* = \{f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\},$$

e por $\text{End}(\mathbb{V})$ o espaço de todos os endomorfismos de \mathbb{V} (ou seja, de transformações lineares de \mathbb{V} em \mathbb{V}). Sendo $r, s \geq 1$ inteiros, denotaremos também:

$$(\mathbb{V}^*)^r = \underbrace{\mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* \cdots \times \mathbb{V}^*}_{r \text{ vezes}},$$

e

$$\mathbb{V}^s = \underbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V} \cdots \times \mathbb{V}}_{s \text{ vezes}}.$$

Definição (D.1.9). Um tensor real de tipo (r, s) em \mathbb{V} é uma aplicação multilinear $T : (\mathbb{V}^*)^r \times \mathbb{V}^s \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto de tensores reais de tipo (r, s) em \mathbb{V} será denotado por $\mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$.

Observação (O.9). Diremos que $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$ é r vezes contravariante e s vezes covariante. O número $r + s$ é chamado a *ordem* de T . É claro que $\mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$ é um espaço vetorial.

Observação (O.10). É fácil ver que $\mathcal{T}_0^1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^{**} \cong \mathbb{V}$ e que $\mathcal{T}_1^0(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^*$, onde um isomorfismo natural (no sentido de que não depende de qualquer escolha de bases) entre \mathbb{V} e \mathbb{V}^{**} é dado por:

$$\mathbb{V} \ni v \mapsto (f \in \mathbb{V}^* \mapsto f(v) \in \mathbb{R}) \in \mathbb{V}^{**}.$$

Estamos então justificados ao chamar funcionais lineares de *covetores*.

Exemplo (E.1.1). A aplicação *avaliação* $\delta : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(f, v) \doteq f(v)$ é um tensor de tipo $(1, 1)$.

Exemplo (E.1.2). A aplicação *determinante* $\det : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$, que pega n vetores e devolve a determinante da matriz obtida ao colocar todos tais vetores em colunas, é um tensor de tipo $(0, n)$. Pode-se provar também que é o único tensor multilinear alternado de tal tipo (em outras palavras, uma n -forma diferencial) que avaliado na base canônica é 1. Tal fato é de importante significância geométrica, e serve na verdade de motivação à própria definição de \det .

Definição (D.1.10). Dados $f \in \mathbb{V}^*$ e $v \in \mathbb{V}$, definimos o $(1, 1)$ tensor $v \otimes f = f \otimes v$ por

$$(v \otimes f)(g, w) = g(v)f(w), \quad \forall (g, w) \in \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}.$$

Definição (D.1.11). Definimos o produto tensorial

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V}) \otimes \mathcal{T}_\ell^k(\mathbb{V}) &\rightarrow \mathcal{T}_{s+\ell}^{r+k}(\mathbb{V}) \\ (T, S) &\mapsto T \otimes S, \end{aligned}$$

por

$$(T \otimes S)(\omega^1, \dots, \omega^{r+k}, \dots, v_1, \dots, v_{s+\ell}) = T(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) \cdot S(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+k}, v_{s+1}, \dots, v_{s+\ell}),$$

sejam quais forem $\omega^1, \dots, \omega^{r+k} \in \mathbb{V}^*$ e $v_1, \dots, v_{s+\ell} \in \mathbb{V}$.

Definição (D.1.12). Sejam $\beta = \{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ e $\beta^* = \{\mathbf{e}^i\}_{1 \leq i \leq n}$ bases duais de \mathbb{V} e \mathbb{V}^* , respectivamente (ou seja, $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$ para cada $1 \leq i, j \leq n$). Dado $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$, os componentes de T na base β são os números reais definidos por:

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \doteq T(\mathbf{e}^{i_1}, \dots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}),$$

sejam quais forem $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n$.

Observação (O.11) (“*One chart to rule them all!*”). É comum na literatura usar o fato de que tensores são *livres de coordenadas* sem explicitar formalmente o que se quer dizer com isso. Uma interpretação errônea desse fato seria dizer que dadas quaisquer duas bases $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ e $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ e qualquer $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$, vale que

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_r}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_s},$$

sejam quais forem $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s, \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_r, \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_s \leq n$, o que é evidentemente um absurdo! Na verdade, o que acontece é que para provar que dois tensores $T, Q \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$ são iguais - ou seja, que vale

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) = Q(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s),$$

seja qual for $(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) \in (\mathbb{V}^*)^r \times \mathbb{V}^s$, é suficiente provar que

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = Q^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

sejam quais forem $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n$, o que é evidentemente verdadeiro pela multilinearidade de T e Q . Equivalentemente, para definir um tensor $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$, é suficiente declaramos qual é sua ação em $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^r, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s\}$, ou seja, é suficiente especificarmos os n^{r+s} números reais $\{T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\}$. Quando $r + s = n = 3$, por exemplo, podemos pensar em T como um “cubo” de dimensões n de $3^3 = 27$ números. Portanto, de certa forma tensores são generalizações das matrizes usuais “bi-dimensionais” (equivalentemente, transformações lineares) que já conhecemos.

A *fortiori*, quando temos dois tensores (a priori não necessariamente iguais) definidos numa variedade Riemanniana, o fato de tensores poderem (por definição) ser avaliados pontualmente nos garante que

para provar a igualdade entre os mesmos basta fixarmos arbitrariamente um ponto $p \in \mathcal{M}^n$, um referencial local conveniente $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ em torno de p e provarmos que as igualdades entre componentes são satisfeitas. Novamente, isso *não* quer dizer que as componentes independem do referencial fixado: meramente usamos o fato da multilinearidade para garantir que a definição de um tensor por suas componentes é bem definida (em contraste com aplicações não necessariamente multilineares, que não são determinadas por seus valores em bases). Resumidamente: duas quantidades geométricas tensoriais que coincidem em *um* sistema dado de coordenadas (resp. um dado referencial) coincidem em *qualquer* sistema de coordenadas (resp. qualquer referencial).

Finalmente, como vemos com mais detalhes na observação (O.18), essas considerações podem ser “fibrizadas”. Mais precisamente, dado qualquer atlas de uma variedade diferenciável \mathcal{M}^n , digamos

$$\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in I},$$

qualquer seção do fibrado $T \in \Gamma(\mathcal{T}_b^a(T\mathcal{M}))$ (comumente chamada simplesmente de um tensor de tipo (a, b) em \mathcal{M}) é determinada pelo conhecimento de todas as suas n^{a+b} componentes $\{T^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}\} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, dadas explicitamente por

$$\left\{ T \left(\mathbf{e}^{(\alpha, i_1)}, \dots, \mathbf{e}^{(\alpha, i_a)}, \mathbf{e}_{(\alpha, j_1)}, \dots, \mathbf{e}_{(\alpha, j_b)} \right) \right\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}),$$

onde

$$\mathbf{e}_{(\alpha, j_k)}(p) = d \left(\varphi_\alpha^{-1} \right)_{\varphi_\alpha(p)} \left(\frac{\partial}{\partial r^{j_k}} \Big|_{\varphi(p)} \right),$$

e $\{\mathbf{e}^{(\alpha, i_\ell)}\}_{1 \leq \ell \leq n}$ é a base dual associada $\{\mathbf{e}^{(\alpha, i_\ell)}\}_{1 \leq \ell \leq n}$ à base $\{\mathbf{e}_{(\alpha, j_k)}\}_{1 \leq k \leq n}$, determinada por

$$\mathbf{e}^{(\alpha, i_\ell)} \left(\mathbf{e}_{(\alpha, j_k)} \right) = \delta_{j_k}^{i_\ell}.$$

A direção recíproca - ou seja, quando que certas funções reais indexadas sobre um atlas de \mathcal{M} são na verdade componentes tensoriais - é um pouco mais complicada, de forma que não elaboraremos mais sobre ela, mas convém observar que tal problema aparece ao tentar, por exemplo, “globalizar” o método do referencial móvel (para mais detalhes, consulte [18] ou [53]).

Proposição (P.1.1). A aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \text{End}(\mathbb{V}) &\rightarrow \mathcal{T}_1^1(\mathbb{V}) \\ T &\mapsto \psi(T) : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, v) &\mapsto f(T(v)). \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração: Consulte [14].

■

Definição (D.1.13). Sejam \mathbb{V} e \mathbb{W} espaços vetoriais reais de dimensão finita. Uma aplicação multilinear

$$T : (\mathbb{V}^*)^r \times \mathbb{V}^s \rightarrow \mathbb{W}$$

é dita um \mathbb{W} -tensor de tipo (r, s) em \mathbb{V} . Denotaremos o espaço vetorial de todas tais aplicações por $\text{Hom}_s^r(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Observação (O.12). *A fortiori,*

$$\text{Hom}_s^r(\mathbb{V}, \mathbb{R}) = \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V}).$$

Proposição (P.1.2). $\text{Hom}_s^r(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ é isomorfo a $\mathcal{T}_s^{r+1}(\mathbb{V})$.

Demonstração: Defina $\psi : \text{Hom}_s^r(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \rightarrow \mathcal{T}_s^{r+1}(\mathbb{V})$ por:

$$[\psi(T)](\omega^1, \dots, \omega^{r+1}, v_1, \dots, v_s) = \omega^{r+1}(T(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s)),$$

para cada $(\omega^1, \dots, \omega^{r+1}, v_1, \dots, v_s) \in (\mathbb{V}^*)^{r+1} \times \mathbb{V}^s$. É simples verificar que ψ é um isomorfismo. ■

Devido à proposição (P.1.2), não faremos (como também não é feita na literatura) qualquer distinção entre tensores reais e tensores vetoriais.

Como veremos em seguida, a existência de um produto interno g em \mathbb{V} nos permite fazer ainda mais identificações.

Definição (D.1.14). Definimos a aplicação bemol $\flat : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$ por

$$\flat(v) = g(v, \bullet).$$

Proposição (P.1.3). A aplicação bemol é um isomorfismo.

Demonstração: Consulte [14]. ■

Observação (O.13). Uma vez que a aplicação \flat (definida em (D.1.14)) é um isomorfismo em cada fibra de $T\mathcal{M}$, podemos então definir ∇ pela equação (1.1). Essa é uma técnica comum às demonstrações de geometria Riemanniana - determinamos a imagem de um campo via bemol, que por sua vez determina o próprio campo.

Observação (O.14). Não é verdade que em geral $\flat(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}^i$. Na verdade, é fácil ver que isto é equivalente à base $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ser ortonormal.

Observação (O.15). Pela proposição (P.1.3), é claro que todo $v \in \mathbb{V}$ determina e é determinado por $\flat(v)$. Agora, uma vez que $\flat(v)$ é determinado por $\{\flat(v)(\mathbf{e}_k)\}_{1 \leq k \leq n} = \{g(v, \mathbf{e}_k)\}_{1 \leq k \leq n}$, é claro que v é determinado pelos valores $\{g(v, \mathbf{e}_k)\}_{1 \leq k \leq n}$. É razoável então esperar que possa se obter uma relação explícita entre as componentes de v e tais valores. De fato, denotando $g_{ij} \doteq g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $v = \sum_{1 \leq i \leq n} v^i \mathbf{e}_i$ e

por g^{ij} os coeficientes da matriz inversa de $\tilde{g} = (g_{ij})$ (que está bem definida, pois $\tilde{g}v = 0 \iff v = 0$ pela não-degenericidade da métrica), observe que vale a igualdade

$$g(v, \mathbf{e}_k) = g\left(\sum_{1 \leq i \leq n} v^i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} v^i g_{ki}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},$$

e portanto,

$$\sum_{1 \leq k \leq n} g^{kt} g(v, \mathbf{e}_k) = \sum_{1 \leq i, k \leq n} v^i g_{ki} g^{kt} = \sum_{1 \leq i \leq n} v^i \delta_{it} = v^t, \quad \forall t \in \{1, \dots, n\}.$$

Devido à proposição (P.1.3), fica então bem definida a aplicação inversa da aplicação bemol:

Definição (D.1.15). Dado $f \in \mathbb{V}^*$, existe um único $f^\#$ tal que

$$f(v) = g(f^\#, v),$$

seja qual for $v \in \mathbb{V}$. A aplicação sustenido $\sharp : \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{V}$ é definida então por:

$$\begin{aligned} \sharp : \mathbb{V}^* &\rightarrow \mathbb{V} \\ f &\mapsto f^\#. \end{aligned}$$

Proposição (P.1.4). Seja $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base de \mathbb{V} . Se $v = \sum_{1 \leq i \leq n} v^i \mathbf{e}_i \in \mathbb{V}$ e $f = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \mathbf{e}^i \in \mathbb{V}^*$, então escrevendo:

$$b(v) = v_b = \sum_{1 \leq i \leq n} (v_b)_i \mathbf{e}^i, \quad \text{assim como } \sharp(f) = f^\# = \sum_{1 \leq i \leq n} (f^\#)^i \mathbf{e}_i,$$

temos que

$$(v_b)_i = \sum_{1 \leq j \leq n} g_{ij} v^j, \quad \text{assim como } (f^\#)^i = \sum_{1 \leq j \leq n} g^{ij} f_j.$$

Demonstração: Consulte [14].

■

Corolário (C.1.1). Para cada $1 \leq i \leq n$, temos que $(\mathbf{e}_i)_b = \sum_{1 \leq j \leq n} g_{ij} \mathbf{e}^j$, e $(\mathbf{e}^i)^\# = \sum_{1 \leq j \leq n} g^{ij} \mathbf{e}_j$.

Para motivar as várias diferentes aplicações que podem ser usadas para identificar tensores de tipos diferentes, enunciaremos algumas proposições a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em [14].

Proposição (P.1.5). A aplicação:

$$\begin{aligned} \sharp_1 : \mathcal{T}_0^2(\mathbb{V}) &\rightarrow \mathcal{T}_1^1(\mathbb{V}) \\ T &\mapsto T^{\sharp_1} : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde

$$T^{\sharp_1}(f, v) = T(f^\#, v), \quad \forall (f^\#, v) \in \mathbb{V}^* \times \mathbb{V},$$

é um isomorfismo.

Proposição (P.1.6). A aplicação

$$\begin{aligned} b_1 : \mathcal{T}_0^2(\mathbb{V}) &\rightarrow \mathcal{T}_1^1(\mathbb{V}) \\ T &\mapsto T_{b_1} : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde

$$[T_{b_1}](f, v) = T(f, v_b), \quad \forall (f, v) \in \mathbb{V}^* \times \mathbb{V},$$

é um isomorfismo.

Observação (O.16). É comum não explicitar os isomorfismos usados ao identificar tensores de tipos diferentes. Por exemplo, um abuso de notação persistente na literatura é denotar as componentes de $T^{\sharp 1}$ simplesmente por T_j^i ao invés de $(T^{\sharp 1})_j^i$. Tal abuso é razoável, pois embora T não seja de tipo $(1, 1)$, o isomorfismo $T \mapsto T^{\sharp 1}$ é óbvio e suficiente para não ser explicitado repetidamente. Em geral, temos várias identificações possíveis, uma das quais vemos na proposição (P.1.7). São esses isomorfismos que nos permitem “abaixar” ou “subir” índices à vontade. Formalmente, se $T \in \mathcal{T}_\ell^k(\mathbb{V})$ é um tensor de tipo (k, ℓ) , dizemos que o tensor $T^{\sharp a} \in \mathcal{T}_{\ell-1}^{k+1}(\mathbb{V})$ determinado por

$$(T^{\sharp a})(\omega^1, \dots, \omega^k, \bullet, v_1, \dots, v_{\ell-1}) = T(\omega^1, \dots, \omega^k, v_1, \dots, v_{a-1}, \sharp(\bullet), \dots, v_{\ell-1})$$

é o tensor obtido de T ao subir o seu a -ésimo índice. Analogamente, dizemos que o tensor $T_{br} \in \mathcal{T}_{\ell+1}^{k-1}(\mathbb{V})$ determinado por

$$T_{br}(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, \bullet, \dots, \omega^k, v_2, \dots, v_{\ell+1}) = T(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, \flat(\bullet), \dots, \omega^k, v_2, \dots, v_{\ell+1})$$

é o tensor obtido de T ao descer o seu r -ésimo índice.

Observação (O.17). Em geral, a identificação que usamos para ver tensores de tipo $(0, k)$ como tensores de tipo $(1, k-1)$ (ou, equivalentemente, de tipo $(1, k)$ como de tipo $(0, k+1)$) é feita ao subirmos o último índice de T , *id est*, se T é um $(0, k)$ tensor, também o vemos como o tensor $T \in \mathcal{T}_{k-1}^1(\mathbb{V})$ determinado por

$$\mathbb{V} \ni T(y_1, \dots, y_{k-1}) = \sharp[T(y_1, \dots, y_{k-1}, \bullet)],$$

sejam quais forem $y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{V}$.

Proposição (P.1.7). Sejam $a, b, r, s \geq 0$ inteiros tais que $r + s = a + b$. Então $\mathcal{T}_b^a(\mathbb{V}) = \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$.

Demonstração: Há vários isomorfismos possíveis. Podemos, por exemplo, abaixar todos os índices contravariantes possíveis e identificar ambos espaços com $\mathcal{T}_{r+s}^0(\mathbb{V})$, ou seja, considerar

$$\mathcal{T}_s^r(\mathbb{V}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{T}_{r+s}^0(\mathbb{V}) \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{T}_{a+b}^0(\mathbb{V}) \xrightarrow{\psi} \mathcal{T}_b^a(\mathbb{V}),$$

onde

$$[\varphi(T)](v_1, \dots, v_{r+s}) = T((v_1)_b, (v_2)_b, \dots, (v_r)_b, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}),$$

e

$$[\psi(T)](\omega^1, \dots, \omega^a, v_1, \dots, v_b) = T\left((\omega^1)^\sharp, (\omega^2)^\sharp, \dots, (\omega^a)^\sharp, v_1, \dots, v_b\right).$$



Observação (O.18). É óbvio que todas as construções lembradas nessa seção se “fibrizam” naturalmente. Se (\mathcal{M}^n, g) é uma variedade Riemanniana, podemos, por exemplo, considerar o fibrado (a, b) -tensorial

$$\mathcal{T}_b^a(T\mathcal{M}) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{T}_b^a(T_p\mathcal{M}) = \{(p, T) \mid p \in \mathcal{M} \text{ e } T \in \mathcal{T}_b^a(T_p\mathcal{M})\},$$

que é uma variedade diferenciável de dimensão $n + n^{a+b}$. Sua topologia e atlas são induzidos de forma análoga à do fibrado tangente usual. Ou seja, se

$$\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in I},$$

é um atlas maximal de \mathcal{M} e

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{T}_b^a(T\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{M} \\ (p, T) &\mapsto p, \end{aligned}$$

denota a projeção natural, definimos um atlas de $\mathcal{T}_b^a(T\mathcal{M})$ por

$$\tilde{\mathcal{A}} = \left\{ \psi_\alpha : \mathcal{T}_b^a(U_\alpha) = \bigcup_{p \in U_\alpha} \mathcal{T}_b^a(T_p\mathcal{M}) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{n^{a+b}} \subset \mathbb{R}^{n+n^{a+b}} \right\}_{\alpha \in I},$$

onde ψ_α é definida por

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &\left(q, \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_b \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_a \leq n}} T_{i_1 \dots i_b}^{j_1 \dots j_a}(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_q \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_2}} \Big|_q \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_a}} \Big|_q \otimes dx^{i_1} \Big|_q \otimes dx^{i_2} \Big|_q \otimes \dots \otimes dx^{i_b} \Big|_q \right) \\ &= \left(\varphi_\alpha(q), \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_b \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_a \leq n}} T_{i_1 \dots i_b}^{j_1 \dots j_a}(q) \cdot \frac{\partial}{\partial r^{j_1}} \Big|_q \otimes \frac{\partial}{\partial r^{j_2}} \Big|_q \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial r^{j_a}} \Big|_q \otimes dr^{i_1} \Big|_q \otimes dr^{i_2} \Big|_q \otimes \dots \otimes dr^{i_b} \Big|_q \right), \end{aligned}$$

e declaramos que um subconjunto $O \subset \mathcal{T}_b^a(U_\alpha)$ é aberto em $\mathcal{T}_b^a(U_\alpha)$ se, e somente se, $\varphi_\alpha(O)$ é aberto em $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{n^{a+b}}$. Diremos que uma seção $T \in \Gamma(\mathcal{T}_b^a(T\mathcal{M}))$ é um campo tensorial em \mathcal{M} . Por simplicidade, também cometeremos o abuso de notação de escrever que $T \in \mathcal{T}_b^a(T\mathcal{M})$ é um tensor de tipo (a, b) em \mathcal{M} (o que corresponde ao abuso de linguagem de considerar campos tensoriais como tensores).

Exemplo (E.1.3). Sejam T, S tensores de tipo $(0, 4)$ e $(0, 2)$ em \mathcal{M} , respectivamente. Então, considerando coordenadas locais em torno de um $p \in \mathcal{M}$ arbitrariamente fixado, as componentes (e consequentemente os próprios T e S) de T e S têm, dentre várias outras possíveis, as seguintes “faces”

diferentes:

$$\underbrace{T^{ijkl}}_{=T((dx^i)^\sharp, (dx^j)^\sharp, (dx^k)^\sharp, (dx^\ell)^\sharp)}, \quad \underbrace{T^{ij}_k}_k, \quad T^{ij}_{kl}, T_{ijkl}, \dots, \text{ assim como } S^{ij}, S^i_j, S_{ij}, S_i^j,$$

onde i, j, k, ℓ percorrem $\{1, \dots, n\}$.

Exemplo (E.1.4). Considere o tensor curvatura Riemanniano definido em (1.2). Fixemos coordenadas locais numa vizinhança $U_p \ni p \in \mathcal{M}^n$, denotando o seu referencial associado por $\{\partial_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Para cada $q \in U_p$, existem n números reais, que denotaremos por $\{A_{ijk}^\ell\}_{1 \leq \ell \leq n}$ (e que por sua vez determinam um tensor A de tipo $(3, 1)$), determinados pela relação

$$\text{Rm}_{\partial_i, \partial_j}(\partial_k) = \sum_{1 \leq \ell \leq n} A_{ijk}^\ell \partial_\ell, \text{ em } q.$$

Tomando o produto interno com ∂_s dos dois lados da equação acima, obtemos

$$\langle \text{Rm}_{\partial_i, \partial_j}(\partial_k), \partial_s \rangle = \text{Rm}_{ijks} = \sum_{1 \leq \ell \leq n} A_{ijk}^\ell g_{\ell s},$$

e portanto

$$\sum_{1 \leq t \leq n} g^{st} \cdot \text{Rm}_{ijks} = \sum_{1 \leq \ell, t \leq n} A_{ijk}^\ell \cdot g_{\ell s} \cdot g^{st} = A_{ijk}^t.$$

Lembrando do corolário (C.1.1) e cometendo o mesmo (inofensivo) abuso de notação do exemplo anterior, vemos que

$$\text{Rm}_{ijk}^t = \text{Rm}\left(\left(dx^t\right)^\sharp, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k\right) = A_{ijk}^t,$$

seja qual for $1 \leq t \leq n$. Logo, A é determinado por Rm , e estamos agora completamente justificados em escrever

$$\text{Rm}_{\partial_i, \partial_j}(\partial_k) = \sum_{1 \leq \ell \leq n} \text{Rm}_{ijk}^\ell \partial_\ell.$$

Exemplo (E.1.5). Da maneira como o definimos, a priori $\text{Rm} = \text{Rm}_3^1$ é um tensor de tipo $(1, 3)$. Mas lembrando das proposições (P.1.7) e (P.1.2), é razoável denotar os seguintes tensores

$$\begin{aligned} \text{Rm}^{0,4} : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (X, Y, Z, W) &\mapsto [b(W)](\text{Rm}(X, Y, Z)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Rm}}_3^1 : \Gamma(T^*\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (b(W), X, Y, Z) &\mapsto [b(W)](\text{Rm}(X, Y, Z)), \end{aligned}$$

além de

$$\begin{aligned} \text{Rm}^{0,2} : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) &\rightarrow \text{End}(\Gamma(T\mathcal{M})) \\ (X, Y) &\mapsto \text{Rm}^{0,2}(X, Y) : \Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{M}) \end{aligned}$$

$$Z \mapsto \text{Rm}(X, Y)Z,$$

simplesmente por Rm também.

Exemplo (E.1.6). Se \mathcal{M} é uma variedade Riemanniana, todo campo vetorial $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ pode ser visto como uma 1-forma $X_b = g(X, \bullet) \in \Gamma(T^*\mathcal{M})$.

Definição (D.1.16). Seja $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ uma aplicação suave e suponha que $T \in \mathcal{T}_k^0(T\mathcal{N})$. O *pull-back* de T é o tensor $\varphi^*T \in \mathcal{T}_k^0(T\mathcal{M})$ determinado por

$$(\varphi^*T)_p(v_1, \dots, v_k) = T_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_k)),$$

sejam quais forem $p \in \mathcal{M}$ e $v_1, \dots, v_k \in T_p\mathcal{M}$.

1.2 O traço de tensores

O traço *ingênuo* de um endomorfismo $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, que é o traço da sua representação matricial $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ em qualquer base, dado por

$$\text{tr}(T) = \text{tr}(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii}, \quad (1.4)$$

não faz sentido algum para tensores de tipo $(0, 2)$, pois se $h \in \mathcal{T}_2^0(T\mathcal{M})$, a expressão

$$\sum_{1 \leq i \leq n} h_{ii}$$

não é invariante por mudança de coordenadas. O objetivo dessa subseção é estender a definição do traço de endomorfismos para tensores de uma maneira bem definida.

Observação (O.19). Alternativamente, sendo $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ qualquer base de \mathbb{V} , a equação (1.4) pode ser escrita equivalentemente como:

$$\text{tr}(T) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} \langle T(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} T_i^i = \sum_{1 \leq i \leq n} T_i^i.$$

Lema (L.1.2). Existe uma única aplicação linear $\text{tr}_1^1 : \mathcal{T}_1^1(\mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\text{tr}_1^1(v \otimes f) = f(v), \quad \forall (f, v) \in \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}.$$

Demonstração: Consulte [14]. ■

Definição (D.1.17). A contração na a -ésima entrada contravariante e b -ésima entrada covariante é a aplicação $\text{tr}_b^a : \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V}) \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(\mathbb{V})$ dada por:

$$[\text{tr}_b^a(T)](f^1, \dots, f^{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1}) \doteq \text{tr}_1^1(T(f^1, \dots, f^{a-1}, \bullet, f^a, \dots, f^{r-1}, v_1, \dots, v_{b-1}, \bullet, v_b, \dots, v_s)).$$

Definimos também:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{1,2} : \mathcal{T}_2^0(\mathbb{V}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto \text{tr}_1^1(T^{\sharp_1}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{tr}^{1,2} : \mathcal{T}_0^2(\mathbb{V}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto \text{tr}_1^1(T_{b_1}), \end{aligned}$$

Dado $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{V})$ e inteiros $1 \leq a \leq r, 1 \leq b \leq s$, um cálculo direto mostra que as componentes do tensor $\text{tr}_b^a(T) \in \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(\mathbb{V})$ relativas a uma base previamente fixada são dadas por:

$$(\text{tr}_b^a(T))^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} = \sum_{1 \leq k \leq n} T^{i_1 \dots i_{a-1} k i_a \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{b-1} k j_b \dots j_{s-1}},$$

onde o índice mudo k aparece na a -ésima entrada superior e na b -ésima entrada inferior. Quando \mathbb{V} está munido de um produto interno (que daqui em diante assumiremos que é sempre o caso) e ou r ou $s \geq 2$, definimos também os *traços métricos* $\text{tr}_{a,b}(T) \in \mathcal{T}_{s-2}^r(\mathbb{V})$ e $\text{tr}^{a,b}(T) \in \mathcal{T}_s^{r-2}(\mathbb{V})$ ao subir ou descer um índice e aplicar $\text{tr}_{1,2}$ ou $\text{tr}^{1,2}$. Mais precisamente, definimos

$$\text{tr}_{a,b}(T)(f^1, \dots, f^r, x_1, \dots, x_{s-2}) \doteq \text{tr}_{1,2}(T(f^1, \dots, f^r, x_1, \dots, \bullet, \dots, \bullet, \dots, x_{s-2})),$$

e

$$\text{tr}^{a,b}(T)(f^1, \dots, f^{r-2}, x_1, \dots, x_s) \doteq \text{tr}^{1,2}(T(f^1, \dots, \bullet, \dots, \bullet, \dots, f^{r-2}, x_1, \dots, x_s)),$$

com os \bullet nas a -ésimas e b -ésimas entradas, respectivamente. Em coordenadas, temos

$$(\text{tr}_{a,b}(T))^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{s-2}} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} g^{k\ell} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots k \dots \ell \dots j_{s-2}}, \text{ e } (\text{tr}^{a,b}(T))^{i_1 \dots i_{r-2}}_{j_1 \dots j_s} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} g_{k\ell} T^{i_1 \dots k \dots \ell \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

onde $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ são as componentes de g em relação à tal base fixada e $(g^{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ denota sua inversa.

Exemplo (E.1.7). Uma intuição útil para essa operação é ilustrada pela seguinte situação: dada $\alpha \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{V})$, o fato de g ser não degenerada garante a existência de $A \in \text{End}(\mathbb{V})$ tal que $\alpha(x, y) = g(A(x), y)$ sejam quais forem $x, y \in \mathbb{V}$. Denotando por $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ tal base e fazendo $x = \mathbf{e}_i, y = \mathbf{e}_k$, obtemos $\alpha_{jk} = g(A(\mathbf{e}_j), \mathbf{e}_k) = \sum_{1 \leq i \leq n} g(A^i_j \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \sum_{1 \leq i \leq n} A^i_j g_{ik}$, de forma que $A^i_j = \sum_{1 \leq k \leq n} g^{ik} \alpha_{jk}$ e $\text{tr}_{1,2}(\alpha) = \text{tr}(A)$.

Definição (D.1.18). A curvatura de Ricci de uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}^n, g) é definida como $\text{Ric} = \text{tr}_{1,4}(\text{Rm})$.

Observação (O.20). Explicitamente, fixado $p \in \mathcal{M}$ e sendo $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base de $T_p \mathcal{M}$, temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}(v, w) &= \text{tr}(T_p \mathcal{M} \ni u \mapsto \text{Rm}(x, u)w) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} g(\text{Rm}(\mathbf{e}_i, v)w, \mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} g(\text{Rm}(v, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, w) \end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n} g(\text{Rm}(\mathbf{e}_i, w)v, \mathbf{e}_i),$$

sejam quais forem $v, w \in T_p\mathcal{M}$, e portanto Ric é uma forma bilinear simétrica. Equivalentemente, poderíamos ter adotado a definição de Ric como um tensor de tipo $(1, 1)$, determinado por

$$\text{Ric}(v) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Rm}(v, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \quad \forall v \in T_p\mathcal{M}.$$

Definição (D.1.19). Uma *variedade de Einstein* é uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}^n, g) que satisfaz $\text{Ric}_g = \lambda g$ para alguma função real $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Observação (O.21). Conforme veremos no lema (L.1.15), em dimensão $n \geq 3$ não há perda de generalidade em substituir “para alguma função real $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ ” na definição (D.1.19) por “para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$.” Nesse caso, Ric é constante (e igual a λ) no fibrado tangente unitário de \mathcal{M} . Pela fórmula da polarização, a saber,

$$\text{Ric}(v, w) = \frac{\text{Ric}(v + w, v + w) - \text{Ric}(v, v) - \text{Ric}(w, w)}{2},$$

vemos que $(\mathcal{M}^{n \geq 3}, g)$ é uma variedade de Einstein se e só se a forma quadrática induzida por Ric é constante no fibrado tangente unitário \mathcal{UM} .

Observação (O.22). Dado $T \in \text{End}(\mathbb{V})$, o tensor $\mathcal{T}_2^0(\mathbb{V}) \ni \tilde{T}(\bullet, \star) \doteq \langle T(\bullet), \star \rangle$ satisfaz $\text{tr}_{1,2}(\tilde{T}) = \text{tr}(T)$. Reciprocamente, dado qualquer $(0, 2)$ tensor \tilde{T} , existe um único tal T que satisfaz $\tilde{T}(\bullet, \star) \doteq \langle T(\bullet), \star \rangle$. *Mutatis mutandis*, o mesmo vale para tensores de tipo $(2, 0)$. Vemos então que apesar da métrica ter sido necessária para definir o traço de tensores de quaisquer tipos, o fato de termos trazido tudo de volta ao caso do traço de endomorfismos (cujos traços independem de qualquer escolha de bases ou produto interno) fez com que o traço na verdade independesse da métrica.

Definição (D.1.20). Seja $T \in \mathcal{T}_k^0(\mathbb{V})$ um k -tensor. Podemos ver T como um $(1, k-1)$ tensor \tilde{T} , determinado por

$$\tilde{T}(y_1, \dots, y_{k-1}) = \sharp(T(y_1, \dots, y_{k-1}, \bullet)),$$

O g -traço de T é o $(k-2)$ -tensor definido por

$$(\text{tr}_g(T))(y_1, \dots, y_{k-2}) = \text{tr}(\underbrace{\tilde{T}(y_1, \dots, y_{k-2}, \bullet)}_{\in \text{End}(\mathbb{V})}). \quad (1.5)$$

Note que suas componentes são dadas por

$$\begin{aligned} (\text{tr}_g(T))(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-2}) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} \langle \tilde{T}_{i_1 \dots i_{k-2} i}, \mathbf{e}_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} T_{i_1 \dots i_{k-2} ij}. \end{aligned}$$

Exemplo (E.1.8). O tensor de Ricci de uma variedade Riemanniana \mathcal{M} , denotado por Ric, pode ser visto como um endomorfismo:

$$\text{Ric} : \Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{M})$$

$$X \mapsto \text{Ric}(X) = \sharp(\text{Ric}(X, \bullet)),$$

ou seja,

$$g(\text{Ric}(X), Y) = \text{Ric}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Proposição (P.1.8). *Seja (\mathbb{V}, g) um espaço vetorial real e $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica em \mathbb{V} . Denotemos por*

$$\mathbb{S}_r \doteq \{v \in \mathbb{V} \mid \|v\| = r\}$$

a esfera de raio $r > 0$ centrada na origem de \mathbb{V} e por $d\mathbb{V}$ a forma de volume em \mathbb{V} induzida por g , de forma que

$$\text{vol}(\mathbb{S}_r) = \int_{\mathbb{S}_r} d\mathbb{V}.$$

Então

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}_r)} \int_{\mathbb{S}_r} B(x, x) d\mathbb{V} = \frac{r^2}{\dim(\mathbb{V})} \cdot \text{tr}_g(B).$$

Demonstração: Pelo teorema espectral, existe uma base de \mathbb{V} , digamos $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, que é g -ortonormal e B -ortogonal. Chamemos $\lambda_k \doteq B(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k)$ para cada $1 \leq k \leq n$. Dado qualquer $x = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k \mathbf{e}_k \in \mathbb{V}$, o quadrado da norma de x é dado então por $g(x, x) = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k^2$, e B é determinada por $B(x, x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k x_k^2$.

Portanto,

$$\int_{\mathbb{S}_r} B(x, x) d\mathbb{V} = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \int_{\mathbb{S}_r} x_k^2 d\mathbb{V}. \quad (1.6)$$

Afirmamos agora que dados quaisquer $1 \leq k \neq \ell \leq n$, vale que

$$\int_{\mathbb{S}_r} x_k^2 d\mathbb{V} = \int_{\mathbb{S}_r} x_\ell^2 d\mathbb{V}.$$

De fato, a reflexão ortogonal φ em torno da reta $\text{span}(\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_\ell)$ é uma isometria que preserva $d\mathbb{V}$ e satisfaz $x_k^2 \circ \varphi = x_\ell^2$, e portanto a afirmação segue do teorema da mudança de variáveis. Denotando então

$$I_k \doteq \int_{\mathbb{S}_r} x_k^2 d\mathbb{V},$$

temos que

$$I_k = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq \ell \leq n} I_\ell = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}_r} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} x_k^2 \right) d\mathbb{V}.$$

Agora, como

$$\sum_{1 \leq k \leq n} x_k^2 = g(x, x) = r^2 \quad \forall x \in \mathbb{S}_r,$$

vemos que

$$I_k = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}_r} r^2 d\mathbb{V} = \frac{r^2}{n} \cdot \text{vol}(\mathbb{S}_r).$$

Finalmente, lembrando da equação (1.6), concluímos que

$$\int_{\mathbb{S}_r} B(x, x) d\mathbb{V} = \frac{r^2}{n} \cdot \text{vol}(\mathbb{S}_r) \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k = \frac{r^2}{n} \cdot \text{vol}(\mathbb{S}_r) \cdot \text{tr}_g(B),$$

como desejado. ■

Observação (O.23). Em alguns cálculos no trabalho, adotaremos a convenção de Einstein ao lidar com somatórios. A mesma consiste, essencialmente, em sumir com os símbolos de somatórios e fazer um acordo de quando certos índices estão sendo somados ou não e deduzir de maneira óbvia até o onde o somatório implícito vai. Mais explicitamente, todos os símbolos de somatórios são omitidos, com o entendimento comum de que se um mesmo índice aparece numa expressão monomial uma vez em baixo e outra em cima, na verdade estamos somando a expressão sob tal índice.

Observação (O.24). Usaremos a seguinte notação comumente vista na literatura: se A e B são tensores quaisquer, a notação $A * B$ denotará um tensor que pode ser expresso como uma combinação linear finita (cujos coeficientes não dependem nem de A nem de B) de contrações ou contrações métricas do produto tensorial $A \otimes B$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \pi^2 \cdot (\text{tr}_{1,2} A) \otimes B + 271 \cdot \text{tr}_{1,3}(A \otimes B) - 666 \cdot A \otimes (\text{tr}_{1,2} B) &= A * B, \\ 13P_{ij}^{kil} Q_{lqr}^j - P_{qi}^{\ell rs} Q_{isr}^k &= (P * Q)_{kqr}, \\ 23P_{ij}^{ijk} Q_{klm}^\ell &= (P * Q)_m, \end{aligned}$$

onde nas últimas igualdades acima usamos a convenção de Einstein e P e Q denotam tensores de tipo $(3, 2)$ e $(1, 3)$, respectivamente. Uma propriedade muito útil dessa notação, que é uma consequência direta da tensorialidade de $A * B$ e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, é que

$$\|A * B\| \leq C \|A\| \|B\|, \quad (1.7)$$

onde C é uma constante dimensional que não depende nem de A nem de B . De fato, note que a definição de tr com respeito a quaisquer índices sempre se reduz a tr_1^1 , e a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos fornece

$$|\text{tr}_1^1(\omega \otimes X)| = |\langle \omega^\sharp, X \rangle| \leq \|\omega^\sharp\| \cdot \|X\| = \|\omega\| \cdot \|X\|,$$

donde a desigualdade geral (1.7) segue por multilinearidade.

1.2 A extensão da métrica a tensores

Definição (D.1.21). Sejam $P, Q \in \mathcal{T}_\ell^k(TM^n)$. O produto interno de P e Q é a função real

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \ni g(P, Q) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_\ell \leq n \\ 1 \leq r_1, \dots, r_k \leq n \\ 1 \leq s_1, \dots, s_\ell \leq n}} g_{i_1 r_1} g_{i_2 r_2} \cdots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1} g^{j_2 s_2} \cdots g^{j_\ell s_\ell} P_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} Q_{s_1 \dots s_\ell}^{r_1 \dots r_k},$$

onde o referencial local tomado acima não necessariamente é ortonormal.

Observação (O.25). A demonstração de que tal produto está bem definido (ou seja, que o cálculo de $g(P, Q)$ definida acima não depende da carta escolhida) pode ser consultada no apêndice.

Observação (O.26). A definição anterior pode parecer obscura à primeira vista, mas na verdade a mesma possui uma motivação natural. Primeiramente, podemos definir o produto interno de 1-formas por

$$\langle \omega, \eta \rangle = \langle \omega^\sharp, \eta^\sharp \rangle.$$

Daí, podemos definir o produto interno em cada fibra $\mathcal{T}_b^a(T_p\mathcal{M})$ ao declarar que o produto interno dos seguintes tensores decomponíveis

$$P \doteq dx^{j_1}|_p \otimes dx^{j_2}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_a}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_b}}|_p,$$

com

$$Q \doteq dx^{\ell_1}|_p \otimes dx^{\ell_2}|_p \otimes \dots \otimes dx^{\ell_a}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{s_1}}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{s_2}}|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{s_b}}|_p,$$

é dado por

$$\langle P, Q \rangle \doteq \left\langle dx^{j_1}|_p, dx^{\ell_1}|_p \right\rangle \dots \left\langle dx^{j_a}|_p, dx^{\ell_a}|_p \right\rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p, \frac{\partial}{\partial x^{s_1}}|_p \right\rangle \dots \left\langle \frac{\partial}{\partial x^{i_b}}|_p, \frac{\partial}{\partial x^{s_b}}|_p \right\rangle,$$

e depois estender por multilinearidade à toda fibra $\mathcal{T}_b^a(T_p\mathcal{M})$ (e conseqüentemente, lembrando da observação (O.18), a todo fibrado $\mathcal{T}_b^a(T\mathcal{M})$). É fácil ver que a definição resultante de tal processo é equivalente à definição (D.1.21), pois

$$\langle \partial^{i_k}, \partial^{m_k} \rangle = \left\langle (\partial^{i_k})^\sharp, (\partial^{m_k})^\sharp \right\rangle.$$

E como visto no corolário (C.1.1), temos $(\partial^{i_k})^\sharp = \sum_{1 \leq \ell \leq n} g^{i_k \ell} \partial_\ell$. Logo,

$$\langle \partial^{i_k}, \partial^{m_k} \rangle = g^{i_k m_k},$$

e portanto recuperamos a definição (D.1.21).

Observação (O.27). Quando $k = 0$, vemos que:

$$g(P, Q) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_\ell \leq n} P_{j_1 \dots j_\ell} \cdot \underbrace{Q^{j_1 \dots j_\ell}}_{=Q((\mathbf{e}^{j_1})^\sharp, \dots, (\mathbf{e}^{j_\ell})^\sharp)},$$

Além disso, vemos que se $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é qualquer referencial ortonormal local, vale

$$g(P, Q) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_\ell \leq n}} P_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} Q_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k}.$$

Observação (O.28). A verificação de que para cada $p \in \mathcal{M}$, $g_p(\bullet, \star) : \mathcal{T}_\ell^k(T_p\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_\ell^k(T_p\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica positiva definida sobre $\mathcal{T}_\ell^k(T_p\mathcal{M})$ é direta, o que justifica a nossa nomenclatura de produto interno.

Definição (D.1.22). A norma de um tensor $T \in \mathcal{T}_\ell^k(T\mathcal{M})$ é a função real $\|T\| : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|T\| = \sqrt{g(T, T)}.$$

Observação (O.29). A fortiori, se $T \in \mathcal{T}_\ell^0(T\mathcal{M})$ e $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é um referencial geodésico em uma vizinhança U_p de $p \in \mathcal{M}$, temos

$$\|T\|^2(q) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} (T_{i_1 \dots i_k}(q))^2, \text{ seja qual for } q \in U_p.$$

1.2 A derivada covariante de tensores

Seja (\mathcal{M}, g) uma variedade Riemanniana e denotemos por

$$\nabla : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{M})$$

a sua conexão de Levi-Civita. É claro que ∇ não é um tensor, pois se $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ e $p \in \mathcal{M}$, $(\nabla_X Y)(p)$ não depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$, mas sim de $X(p)$ e de Y em uma vizinhança (arbitrariamente pequena) de p . A definição seguinte fornece um “conserto” parcial desse problema.

Definição (D.1.23). Se $Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$, definimos a derivada covariante total de Y por:

$$\begin{aligned} \nabla Y : \Gamma(T\mathcal{M}) &\rightarrow \Gamma(T\mathcal{M}) \\ X &\mapsto \nabla_X Y. \end{aligned}$$

Como ∇Y é uma aplicação linear em $\Gamma(T\mathcal{M})$ sobre $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, segue que ∇Y é um tensor de tipo $(1, 1)$. Portanto, podemos também pensar em ∇ também como uma aplicação

$$\nabla : \Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})}(\Gamma(T\mathcal{M}), \Gamma(T\mathcal{M})).$$

Se $S : \Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{M})$ é um tensor de tipo $(1, 1)$, podemos também definir sua derivada covariante ∇S como um tensor de tipo $(1, 2)$, com a ideia básica de garantir que uma espécie de regra de Leibniz seja satisfeita, ou seja, de forma que

$$\nabla_X(S(Y)) = (\nabla_X S)(Y) + S(\nabla_X Y), \quad \forall X \in \Gamma(T\mathcal{M}).$$

É portanto razoável definir ∇S por

$$\begin{aligned} (\nabla S)(X, Y) &= (\nabla_X S)(Y) \\ &= \nabla_X(S(Y)) - S(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$\nabla_X S = [\nabla_X, S].$$

Se verifica facilmente que $Y \mapsto (\nabla_X S)(Y)$ é tensorial em Y .

Na verdade, a derivada covariante total ∇ se estende naturalmente ainda além de campos vetoriais (que são tensores de tipo $(1, 0)$) e tensores de tipo $(1, 1)$, como vemos no seguinte

Lema (L.1.3). *Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Então existe uma única conexão (que por abuso de notação também denotaremos por ∇)*

$$\nabla : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_\ell^k(T\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_\ell^k(T\mathcal{M}),$$

em cada fibrado $\mathcal{T}_\ell^k(T\mathcal{M})$ tal que

- Em $\mathcal{T}_0^0(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,

$$\nabla_X f = X(f), \quad \forall X \in \Gamma(T\mathcal{M}), \quad e \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M});$$

- Em $\mathcal{T}_0^1(T\mathcal{M}) = \Gamma(T\mathcal{M})$, ∇ coincide com a conexão de Levi-Civita de \mathcal{M} ;
- ∇ satisfaz a regra de Leibniz com relação a produtos tensoriais, id est,

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G);$$

- ∇ comuta com todos os traços; i.e., se tr denota o traço com relação a qualquer par de índices, então

$$\nabla_X(\text{tr} F) = \text{tr}(\nabla_X F).$$

Demonstração: Consulte [31].

■

Observação (O.30). É possível provar que a conexão dada pelo lema acima satisfaz também

$$\nabla_X[\omega(Y)] = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y),$$

sejam quais forem $\omega \in \Gamma(T^*\mathcal{M})$ e $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$, e é determinada por

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_\ell) &= \nabla_X \left(T(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_\ell) \right) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i \leq \ell} T(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_\ell) \\ &\quad - \sum_{1 \leq j \leq k} T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_\ell), \end{aligned} \tag{1.8}$$

sejam quais forem $T \in \mathcal{T}_\ell^k(T\mathcal{M})$, $\{X_i\}_{1 \leq i \leq k} \subset \Gamma(T\mathcal{M})$; e $\{\omega^j\}_{1 \leq j \leq \ell} \subset \Gamma(T^*\mathcal{M})$.

Observação (O.31). Note que na equação (1.8), interpretamos ∇_X ou como a derivada direcional usual (quando aplicada a uma função real) ou como a derivada covariante de campos vetoriais (quando aplicada a algum campo).

Definição (D.1.24). Um tensor T é dito *paralelo* quando $\nabla T \equiv 0$.

Observação (O.32). Note que sempre vale $\nabla g \equiv 0$.

Observação (O.33). Usando os isomorfismos musicais, podemos também pensar em ∇ como uma aplicação

$$\nabla : \Gamma(T^*\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_\ell^k(T\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_\ell^k(T\mathcal{M}),$$

ao definirmos

$$\nabla_\omega T = \nabla_{(\omega)^\#} T,$$

A *fortiori*, lembrando do corolário (C.1.1), em coordenadas locais numa vizinhança $U_p \ni p$ temos a aplicação

$$\nabla_{(dx^i)^\#} = \sum_{1 \leq j \leq n} g^{ij} \nabla_{\partial_j} : \mathcal{T}_\ell^k(TU_p) \rightarrow \mathcal{T}_\ell^k(TU_p),$$

que também denotaremos (como é comum na literatura) simplesmente por

$$\nabla^i : \mathcal{T}_\ell^k(TU_p) \rightarrow \mathcal{T}_\ell^k(TU_p).$$

Note que, trivialmente, para um referencial geodésico local vale $\nabla^i = \nabla_i$. Surge então uma pergunta natural: os isomorfismos musicais comutam com a conexão? Como veremos em seguida, a resposta é que isso acontece exatamente quando $\nabla g = 0$.

Observação (O.34). Se $T \in \mathcal{T}_\ell^k(T\mathcal{M})$, é comum denotar

$$T_{j_1 \dots j_\ell; i}^{s_1 \dots s_k} \doteq (\nabla_i T)_{j_1 \dots j_\ell}^{s_1 \dots s_k},$$

e

$$T_{j_1 \dots j_\ell}^{s_1 \dots s_k; i} \doteq (\nabla^i T)_{j_1 \dots j_\ell}^{s_1 \dots s_k}.$$

Em particular, quando $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, temos as notações

$$\nabla_i f = \partial_i f = f_{;i},$$

e

$$\nabla^i f = (\partial^i)^\#(f) = f^{;i} = \sum_{1 \leq j \leq n} g^{ij} f_{;j}.$$

Observação (O.35). *Mutatis mutandis*, os isomorfismos musicais também podem ser definidos para qualquer fibrado $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ munido de uma métrica.

Lema (L.1.4). *São equivalentes:*

- $(\nabla_X s)_b = \nabla_X(s_b)$ e $(\nabla_X \xi)^\# = \nabla_X((\xi)^\#)$ sejam quais forem $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$, $s \in \Gamma(E)$ e $\xi \in \Gamma(E^*)$;
- $\nabla g = 0$.

Demonstração: Suponha que $\nabla g = 0$ e seja $\psi \in \Gamma(E)$ arbitrária. Então

$$(\nabla_X s)_b(\psi) = \langle \nabla_X s, \psi \rangle = X(\langle s, \psi \rangle) - \langle s, \nabla_X \psi \rangle = X(s_b(\psi)) - s_b(\nabla_X \psi) = [\nabla_X(s_b)](\psi),$$

onde na segunda igualdade usamos a hipótese $\nabla g = 0$ e na última usamos a definição da derivada covariante. Da arbitrariedade de ψ , concluímos que

$$(\nabla_X s)_b = \nabla_X(s_b).$$

Analogamente, dada qualquer $\xi \in \Gamma(E^*)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$, temos:

$$\langle \nabla_X((\xi)^\sharp), \sigma \rangle = X(\langle \xi^\sharp, \sigma \rangle) - \langle \xi^\sharp, \nabla_X \sigma \rangle = X(\xi(\sigma)) - \xi(\nabla_X \sigma) = (\nabla_X \xi)(\sigma) = \langle (\nabla_X \xi)^\sharp, \sigma \rangle,$$

e portanto

$$b(\nabla_X((\xi)^\sharp)) = b((\nabla_X \xi)^\sharp).$$

Segue então da proposição **(P.1.3)** que

$$\nabla_X((\xi)^\sharp) = (\nabla_X \xi)^\sharp,$$

como desejado. Reciprocamente, se ∇ comuta com os isomorfismos musicais, então para quaisquer $X \in \Gamma(TM)$ e $s, \sigma \in \Gamma(E)$, vale

$$\begin{aligned} (\nabla_X g)(s, \sigma) &= X(\langle s, \sigma \rangle) - \langle \nabla_X s, \sigma \rangle - \langle s, \nabla_X \sigma \rangle \\ &= X(s_b(\sigma)) - \langle \nabla_X s, \sigma \rangle - s_b(\nabla_X \sigma) \\ &= (\nabla_X(s_b))(\sigma) - \langle \nabla_X s, \sigma \rangle \\ &= (\nabla_X s)_b(\sigma) - \langle \nabla_X s, \sigma \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

de forma que $\nabla g = 0$, como afirmado. ■

Exemplo (E.1.9). Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ campos quaisquer e $T \in \mathcal{T}_2^0(TM)$ um $(0, 2)$ tensor. Como já vimos, T também pode ser visto como um tensor de tipo $(1, 1)$, determinado pela seguinte relação:

$$T(s) = \sharp(T(s, \bullet)), \quad \forall s \in \Gamma(TM).$$

Como consequência do lema **(L.1.4)**, vemos que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X T)(Y), Z \rangle &= \langle \nabla_X(T(Y)) - T(\nabla_X Y), Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X[\sharp(T(Y, \bullet))], Z \rangle - T(\nabla_X Y, Z) \\ &= \langle [\nabla_X(T(Y, \bullet))]^\sharp, Z \rangle - T(\nabla_X Y, Z) \\ &= [\nabla_X(T(Y, \bullet))](Z) - T(\nabla_X Y, Z) \\ &= \nabla_X(T(Y, Z)) - T(Y, \nabla_X Z) - T(\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

$$= (\nabla_X T)(Y, Z).$$

Note que na primeira igualdade, estamos vendo T como um tensor de tipo $(1, 1)$, enquanto que na última já o vemos como um tensor de tipo $(0, 2)$. Esse abuso de notação é muito comum e geralmente não é explicitado (*id est*, quase sempre a identificação explícita de tensores de tipo diferentes via os isomorfismos musicais é omitida e o fato destes comutarem com ∇ é usado implicitamente sem nenhuma menção). *Mutatis mutandis*, o mesmo vale para tensores de tipo $(1, 3)$. Para evitar sobrecarga de notação, também cometeremos em várias partes (veja, por exemplo, a demonstração de (1.14) e a equação (2.12)) deste trabalho este mesmo abuso de notação (porém agora justificado como inofensivo).

Definição (D.1.25). Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Definimos a aplicação derivada de Lie \mathcal{L}

$$\mathcal{L} : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_\ell^0(T\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_\ell^0(T\mathcal{M}),$$

em cada fibrado $\mathcal{T}_\ell^0(T\mathcal{M})$ por

- Em $\mathcal{T}_0^0(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,

$$\mathcal{L}_X(f) = X(f), \quad \forall X \in \Gamma(T\mathcal{M}), \text{ e } \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M});$$

- Em $\mathcal{T}_1^0(T\mathcal{M}) \cong \mathcal{T}_0^1(T\mathcal{M}) = \Gamma(T\mathcal{M})$,

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M});$$

- Em $\mathcal{T}_\ell^0(T\mathcal{M})$,

$$(\mathcal{L}_X T)(Y_1, \dots, Y_\ell) = X(T(Y_1, \dots, Y_\ell)) - \sum_{1 \leq i \leq \ell} T(Y_1, \dots, \mathcal{L}_X Y_i, \dots, Y_\ell).$$

Observação (O.36). Usando os fatos de que a conexão de Levi-Civita é compatível com a métrica e livre de torção, um cálculo simples mostra que

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle,$$

sejam quais forem $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$. Em coordenadas locais, podemos então escrever

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{ij} &= \langle \nabla_{\partial_i} X, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_j} X \rangle \\ &= (\nabla_{\partial_i} X)_b (\partial_j) + (\nabla_{\partial_j} X)_b (\partial_i) \\ &= (\nabla_{\partial_i} X_b) (\partial_j) + (\nabla_{\partial_j} X_b) (\partial_i), \end{aligned}$$

onde usamos o lema (L.1.4) na última igualdade. Um abuso de notação comum é identificar X com X_b , abandonar o uso de parênteses e escrever a expressão acima simplesmente como

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.$$

A *fortiori*, quando $X = \nabla f$ para alguma $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, então

$$\mathcal{L}_{\nabla f}g = 2 \cdot \nabla^2 f,$$

que em coordenadas locais também se escreve como

$$(\mathcal{L}_{\nabla f}g)_{ij} = 2 \cdot (\nabla^2 f)_{ij} = 2 \cdot \nabla_i \nabla_j f.$$

Definição (D.1.26). Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana e $T \in \mathcal{T}_\ell^0(T\mathcal{M})$ (resp. $T \in \mathcal{T}_\ell^1(T\mathcal{M})$). A derivada covariante total de T , denotada por ∇T , é o tensor de tipo $(0, \ell + 1)$ (resp. $(1, \ell + 1)$) dado por

$$(\nabla T)(X, Y_1, \dots, Y_\ell) = (\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_\ell),$$

para quaisquer campos $X, Y_1, \dots, Y_\ell \in \Gamma(T\mathcal{M})$.

Observação (O.37). A *fortiori*, se $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{T}_0^0(T\mathcal{M})$, definimos o gradiente de f , $\nabla f \in \Gamma(T\mathcal{M}) \cong \mathcal{T}_1^0(T\mathcal{M})$, por

$$\nabla f = \sharp(df),$$

que em um referencial geodésico $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ possui a representação em coordenadas

$$\nabla f = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{e}_i(f) \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1(f), \dots, \mathbf{e}_n(f)),$$

e norma

$$\|\nabla f\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} (\mathbf{e}_i(f))^2}.$$

Lema (L.1.5). Sejam $f, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Então

$$\nabla(f \cdot h) = f \cdot \nabla h + h \cdot \nabla f.$$

Demonstração: É uma consequência imediata do fato de que para qualquer $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$, vale

$$g(\nabla(f \cdot h), X) = X(f \cdot h) = f \cdot X(h) + h \cdot X(f) = f \cdot g(\nabla h, X) + h \cdot g(\nabla f, X).$$

■

Lema (L.1.6). Sejam $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ funções reais suaves. Então

$$[\nabla(g \circ f)]_p = g'(f(p)) \cdot \nabla f.$$

Demonstração: É uma consequência imediata da regra da cadeia.

■

Definição (D.1.27). Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ uma função real suave que satisfaz

$$|f(p) - f(q)| \leq K \cdot \text{dist}(p, q), \quad \forall p, q \in \mathcal{M}.$$

Nesse caso diremos que f é K -Lipschitz e denotaremos esse fato por $\text{Lip}(f) = K$.

Lema (L.1.7). Uma função real suave $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ é K -Lipschitz se, e somente, se $\|\nabla f\| \leq K$.

Demonstração: Suponha que f é K -Lipschitz. Fixemos $p \in \mathcal{M}$ e $v \in T_p\mathcal{M}$ unitário arbitrariamente. Denotaremos a (única) geodésica que parte de p com vetor tangente inicial v por γ_v . Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, γ_v é dada por $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Como vemos em geometria Riemanniana, geodésicas são localmente minimizantes, portanto podemos também supor que $\varepsilon > 0$ é pequeno o suficiente de forma que $\text{dist}(p, \exp_p(tv)) = t$ seja qual for $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então

$$\begin{aligned} \langle (\nabla f)_p, v \rangle &= df_p(v) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} K \frac{\text{dist}(\exp_p(tv), p)}{t} = K, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a hipótese de f ser K -Lipschitz. *A fortiori*, tomando $v = \frac{\|(\nabla f)_p\|}{\|\nabla f\|_p}$, vemos que

$$\|(\nabla f)_p\| \leq K.$$

Da arbitrariedade de p , segue que $\|\nabla f\| \leq K$, como desejado.

Reciprocamente, suponha que $\|\nabla f\| \leq K$. Fixemos então $\varepsilon > 0$ e $p, q \in M$ arbitrariamente. Pela definição da função distância e pela definição de ínfimo, segue que existe uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ que satisfaz $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \leq \text{dist}(p, q) + \varepsilon$$

Note também que $f \circ \gamma$ é uma curva suave (com imagem em \mathbb{R}) que liga os pontos $f(p)$ e $f(q)$. Novamente pelas definições de distância e de ínfimo, segue que

$$\begin{aligned} |f(p) - f(q)| &\leq \int_0^1 |(f \circ \gamma)'(t)| dt \\ &= \int_0^1 |\langle (\nabla f)_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle| dt \leq K \cdot \ell(\gamma) \leq K \cdot (\text{dist}(p, q) + \varepsilon). \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade da segunda linha usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Portanto

$$\text{dist}(f(p), f(q)) \leq K \cdot \inf_{\varepsilon > 0} (\text{dist}(p, q) + \varepsilon) = K \cdot \text{dist}(p, q),$$

id. est., f é K -Lipschitz. ■

Lema (L.1.8). *Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana completa e $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (não necessariamente diferenciável) com $\text{Lip}(f) = K$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Então existe uma função diferenciável $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ que satisfaz $|h(p) - f(p)| < \varepsilon$ e $\text{Lip}(h) \leq K + \varepsilon$.*

Demonstração: Consulte [2]. ■

Lema (L.1.9). *Seja (\mathcal{M}, g) uma variedade Riemanniana completa, e $R > 0$ arbitrário. Então existe uma função real $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ tal que*

$$\varphi|_{B_p(R)} \equiv 1, \varphi|_{\mathcal{M} \setminus B_p(2R)} \equiv 0, \text{ e } \|\nabla \varphi\| \leq \frac{2}{R}.$$

Demonstração: Definiremos a função $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$z(x) = \begin{cases} 1 & x \leq R \\ 2 - \frac{x}{R} & R < x < 2R, \\ 0 & x \geq 2R \end{cases}$$

e a função $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\theta(q) = z(\text{dist}(p, q))$ (um fato conhecido de geometria Riemanniana é que $\text{dist}(p, \bullet)$ é diferenciável fora de p e seu cut-locus e necessariamente não diferenciável em p e seu cut-locus, de forma que θ não necessariamente é diferenciável). É fácil ver que

$$\theta|_{B(p,R)} = 1, \quad \theta|_{\mathcal{M} \setminus B(p,2R)} = 0, \quad \text{Lip}(\theta) \leq \frac{1}{R}.$$

O lema (L.1.8) garante então a existência de uma função diferenciável $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \ni \psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$|\psi(q) - \theta(q)| < \varepsilon, \quad \text{Lip}(\psi) < \frac{1}{R} + \varepsilon,$$

onde $\varepsilon > 0$ será tomado da seguinte maneira: dado $\delta > 0$ arbitrário, tome $\varepsilon > 0$ de forma que

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\delta}{4 \cdot (1 + \delta)}, \frac{1}{R} \right\}.$$

Tomemos agora uma função suave $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$h|_{(1-\varepsilon, \infty)} = 1, \quad h|_{(-\infty, \varepsilon)} = 0, \quad \text{Lip}(h) \leq \frac{1}{1-4\varepsilon}.$$

Definimos agora $\varphi := h \circ \psi$. É fácil ver que φ é identicamente 1 na bola de raio R centrada em p e identicamente nula fora da bola de raio $2R$ centrada em p . Além disso,

$$\text{Lip}(\varphi) \leq \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1-4\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1-4\varepsilon} \leq \frac{2+2\delta}{R}.$$

O resultado desejado segue então da arbitrariedade de $\delta > 0$ e do lema (L.1.7).

Observação (O.38). Note que o lema anterior é trivialmente satisfeito no caso em que \mathcal{M} é compacta e $R > \text{diam}(\mathcal{M})$.

Proposição (P.1.9). Seja $T \in \mathcal{T}_k^0(T\mathcal{M})$. Então

$$(\nabla T)_{m \ i_1 \dots i_k} = (\nabla_m T)_{i_1 \dots i_k} = \underbrace{\partial_m (T_{i_1 \dots i_k})}_{= \nabla_m (T_{i_1 \dots i_k})} - \sum_{1 \leq r, s \leq k} T_{i_1 \dots i_{r-1} s \ i_{r+1} \dots i_k} \cdot \Gamma_{m i_r}^s.$$

Demonstração: Segue imediatamente da definição de ∇T .

Observação (O.39). Uma consequência imediata da proposição anterior é que em um referencial geodésico $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ numa vizinhança $U_p \ni p$ (onde, a fortiori, todos os símbolos de Christoffel se anulam em p), a representação em coordenadas de ∇T é dada por:

$$(\nabla T)_{m \ i_1 \dots i_k} = (\nabla_m T)_{i_1 \dots i_k} = \nabla_m (T_{i_1 \dots i_k}),$$

removendo a ambiguidade implícita em denotar $(\nabla_m T)_{i_1 \dots i_k}$ por $\nabla_m T_{i_1 \dots i_k}$ ou $\nabla_m (T_{i_1 \dots i_k})$.

Observação (O.40). Pela observação anterior, vemos que em um referencial geodésico a norma da derivada covariante total de um tensor $T \in \mathcal{T}_k^0(T\mathcal{M})$ é dada por

$$\|\nabla T\|^2 = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k, \ell \leq n} (\mathbf{e}_\ell [(T_{i_1 \dots i_k})])^2 = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \|\nabla (T_{i_1 \dots i_k})\|^2.$$

Definição (D.1.28). Se S é um tensor de tipo $(0, \ell)$, definimos a *segunda derivada covariante total* de S , denotado por $\nabla^2 S$, como o tensor de tipo $(0, \ell + 2)$ determinado por

$$\begin{aligned} [(\nabla \circ \nabla)(S)](X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_\ell) &= (\nabla^2 S)(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_\ell) \\ &\doteq (\nabla_{X_1, X_2}^2 S)(Y_1, \dots, Y_\ell) \\ &\doteq (\nabla_{X_1}(\nabla S))(X_2, Y_1, \dots, Y_\ell) \\ &= (\nabla_{X_1}(\nabla_{X_2} S))(Y_1, \dots, Y_\ell) - (\nabla_{\nabla_{X_1} X_2} S)(Y_1, \dots, Y_\ell). \end{aligned}$$

Observação (O.41). A última igualdade na definição anterior é imediata da definição de ∇S , mas convém esclarecê-la agora. Temos

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_1}(\nabla S))(X_2, Y_1, \dots, Y_\ell) &= X_1 [(\nabla S)(X_2, Y_1, \dots, Y_\ell)] - \sum_{1 \leq i \leq \ell} (\nabla S)(X_2, Y_1, \dots, \nabla_{X_1} Y_i, \dots, Y_\ell) \\ &\quad - (\nabla S)(\nabla_{X_1} X_2, Y_1, \dots, Y_\ell) \\ &= X_1 [(\nabla_{X_2} S)(Y_1, \dots, Y_\ell)] - \sum_{1 \leq i \leq \ell} (\nabla_{X_2} S)(Y_1, \dots, \nabla_{X_1} Y_i, \dots, Y_\ell) \\ &\quad - (\nabla_{\nabla_{X_1} X_2} S)(Y_1, \dots, Y_\ell) \\ &= (\nabla_{X_1}(\nabla_{X_2} S))(Y_1, \dots, Y_\ell) - (\nabla_{\nabla_{X_1} X_2} S)(Y_1, \dots, Y_\ell). \end{aligned}$$

Observação (O.42). Analogamente se definem as derivadas covariantes totais de ordem n , denotadas por $\nabla^n S = \nabla^{on}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Cada derivada covariante total aumenta o tipo covariante do tensor em 1. Quando $n = 1$ e consideramos o caso de tensores puramente covariantes, temos uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{T}_k^0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_{k+1}^0(\mathcal{M}).$$

Quando $n = 2$, temos uma aplicação

$$\nabla^2 : \mathcal{T}_k^0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_{k+2}^0(\mathcal{M}),$$

que para um 2-tensor h , tem a expressão local em coordenadas dada por

$$\nabla^2 h = \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq n} (\nabla \nabla h)_{ijkl} \cdot dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^\ell,$$

onde por definição

$$(\nabla \nabla h)_{ijkl} = (\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} h)_{kl} = [\nabla_{\partial_i} (\nabla_{\partial_j} h)](\partial_k, \partial_\ell) - (\nabla_{\nabla_{\partial_i} \partial_j} h)(\partial_k, \partial_\ell).$$

Também fica claro pela expressão acima que, em geral,

$$\mathcal{T}_2^0(T\mathcal{M}) \ni (\nabla^2 h)(X, Y) \doteq \nabla_X \nabla_Y h \neq \nabla_X (\nabla_Y h),$$

e portanto, a priori o abuso de notação

$$\nabla_i \nabla_j h_{kl}$$

não é inofensivo, pois poderíamos razoavelmente interpretá-lo como as componentes do 2-tensor $(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} h)$ ou como as segundas derivadas parciais da função real h_{kl} . A solução desse problema, que torna tal abuso inofensivo (ou seja, faz com que ambas as interpretações coincidam), é o uso de referenciais geodésicos ao fazer cálculos localmente, como vimos na observação (O.39).

Lema (L.1.10) (Desigualdade de Kato). *Seja E um fibrado sobre (\mathcal{M}, g) e $s \in \Gamma(E)$ uma seção de E sobre \mathcal{M} . Então*

$$\|\nabla \|s\|\| \leq \|\nabla s\|. \quad (1.9)$$

Demonstração: Temos

$$2 \cdot \|\nabla \|s\|\| \cdot \|s\| = \|\nabla (\|s\|^2)\| = 2 \cdot \|g(\nabla s, s)\| \leq 2 \cdot \|\nabla s\| \cdot \|s\|.$$

donde segue imediatamente a desigualdade desejada, onde na última desigualdade usamos Cauchy-Schwarz. ■

Observação (O.43). Usando a definição (D.1.28) e o fato de ∇ ser livre de torção, vemos que outra maneira de escrever a expressão (1.2) é

$$\text{Rm}(X, Y)Z = \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z.$$

Além disso, fica claro que Rm pode ser estendida para qualquer fibrado E sobre \mathcal{M} , ou seja, que podemos ver Rm como uma aplicação

$$\begin{aligned} \text{Rm} : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, Y, s) &\mapsto \text{Rm}(X, Y)s \doteq \text{Rm}_{X,Y}s \doteq \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s. \end{aligned}$$

Observação (O.44). Um caso particular da definição (D.1.28) é a seguinte

Definição (D.1.29). O *hessiano* de uma função real $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ é o $(0, 2)$ tensor $\nabla^2 f$ determinado por

$$\begin{aligned} \nabla^2 f : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (X, Y) &\mapsto (\nabla^2 f)(X, Y) = [\nabla(\nabla f)](X, Y). \end{aligned}$$

Observação (O.45). Podemos deixar a definição anterior ainda mais explícita. Temos

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)(X, Y) &= [\nabla_Y(\nabla f)](X) \\ &= \nabla_Y[\nabla_X f] - (\nabla f)(\nabla_Y X) \\ &= Y(X(f)) - \nabla_{\nabla_Y X} f. \end{aligned}$$

Além disso, como a conexão ∇ é livre de torção, obtemos ainda

$$(\nabla^2 f)(X, Y) - (\nabla^2 f)(Y, X) = -[X, Y](f) - -\nabla_{[X,Y]} f = -([X, Y](f) - [X, Y](f)) = 0.$$

e portanto $\nabla^2 f$ é simétrico. Por outro lado, usando a compatibilidade de g com ∇ , obtemos também

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)(X, Y) &= \nabla_{X,Y}^2 f = \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f \\ &= \nabla_X [g(Y, \nabla f)] - g(\nabla_X Y, \nabla f) \\ &= g(\nabla_X \nabla f, Y). \end{aligned}$$

E portanto, $\nabla^2 f$ visto como um tensor de tipo $(1, 1)$ é dado por

$$(\nabla^2 f)(X) = \sharp[(\nabla^2 f)(X, \bullet)] = \nabla_X \nabla f,$$

que é obviamente auto-adjunto (por $\nabla^2 f$ visto como um $(0, 2)$ tensor ser simétrico).

Observação (O.46). Seja (\mathcal{M}, g) uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. $f = \nabla^0 f$ e $\nabla f = df$ são obviamente tensores de tipo $(0, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente, que não dependem da métrica g (embora como campo vetorial ∇f dependa da métrica g , é óbvio que como 1-forma diferencial df independe da métrica). A partir de ordem 2, isso já não é mais verdade: por exemplo, se $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ e definimos $\tilde{g} \doteq e^{2\varphi} g$ então um cálculo direto mostra que

$$\tilde{\nabla}^2 f = \nabla^2 f + g(d\varphi, df)g - 2 d\varphi \odot df,$$

onde \odot denota o produto simétrico de 1-formas, definido por

$$\mathcal{T}_2^0(T\mathcal{M}) \ni (\omega \odot \eta)(\bullet, \star) \doteq \frac{1}{2} (\omega(\bullet)\eta(\star) + \eta(\bullet)\omega(\star)).$$

A demonstração da identidade de Ricci a seguir pode ser encontrada no **Apêndice**.

Lema (L.1.2.1) (Identidade de Ricci livre de coordenadas). *Seja $T \in \mathcal{T}_k^0(TM)$. Então:*

$$(\text{Rm}_{x,y}T)(v_1, \dots, v_k) = - \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \text{Rm}_{x,y}(v_i), \dots, v_k), \quad (1.10)$$

para quaisquer $x, y, v_1, \dots, v_k \in T_p\mathcal{M}$, onde $p \in \mathcal{M}$ é arbitrário.

Lema (L.1.2.2) (Identidade de Ricci em coordenadas). *Seja $T \in \mathcal{T}_k^0(TM)$. Então:*

$$\begin{aligned} (\text{Rm}_{i,j}T)_{m_1 \dots m_k} &= [(\nabla_{\partial_i}^2 - \nabla_{\partial_j, \partial_i}^2)(T)]_{m_1 \dots m_k} = [(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)(T)]_{m_1 \dots m_k} \\ &= - \sum_{\substack{1 \leq t \leq k \\ 1 \leq \ell \leq n}} \text{Rm}_{ijm_t}^\ell T_{m_1 \dots m_{t-1} \ell m_{t+1} \dots m_k}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Demonstração: Consequência imediata da identidade (1.10) e do exemplo (E.1.4). ■

Observação (O.47). Uma identidade análoga vale para tensores de tipos quaisquer (k, ℓ) . Não precisaremos da mesma neste trabalho, mas convém observar que ela pode ser obtida usando o isomorfismo exibido na demonstração da proposição (P.1.7) juntamente do corolário (C.1.1) e do uso de um referencial geodésico local.

Definição (D.1.30). O *laplaciano* de uma função real $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^n)$ é a função real $\Delta f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ dada por

$$\Delta f = \underbrace{(\text{tr} \circ \nabla^2)}_{=\text{tr}_{1,2}(\nabla f)}(f) = \text{div}(\nabla f) = \sum_{1 \leq i \leq n} g(\nabla_{\mathbf{e}_i} \nabla f, \mathbf{e}_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \nabla_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i}^2 f,$$

onde $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é qualquer referencial ortonormal local.

Observação (O.48). Lembrando da (P.1.8), podemos ver o laplaciano como uma média do hessiano sobre todos os vetores unitários. Concretamente, temos que

$$(\Delta f)(p) = \frac{n}{r^2 \cdot \text{vol}(\mathbb{S}_r(p))} \int_{\mathbb{S}_r(p)} (\nabla^2 f)(v, v) d\text{Vol}_g,$$

onde $d\text{Vol}_g$ é a forma de volume Riemanniana, vista na proposição (P.4.11).

Definição (D.1.31). O *laplaciano* de uma seção $s \in \Gamma(E)$ é a seção $\Delta s \in \Gamma(E)$ dada por

$$\Delta s = \sum_{1 \leq i \leq n} \nabla_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i}^2 s,$$

onde $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é qualquer referencial ortonormal local.

Lema (L.1.11) (O Teste da Segunda Derivada). *Seja (\mathcal{M}^n, g_0) uma variedade Riemanniana e $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se u tem um ponto de mínimo local (resp. máximo) em algum $p \in \mathcal{M}$, então*

$$(\nabla u)(p) = 0 \text{ e } (\Delta u)(p) \geq 0, \text{ (resp. } (\Delta u)(p) \leq 0). \quad (1.12)$$

Demonstração: Como o problema é de natureza local, podemos passar a coordenadas normais (x^i) em torno de p para fazer os cálculos. Pelo teste da segunda derivada usual para funções reais em \mathbb{R}^n e pela definição da derivada parcial induzida por uma carta, segue que

$$(\nabla_i u)_p = \frac{\partial u}{\partial x^i}(p) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

e portanto o gradiente de u se anula em p . Novamente pelo teste da segunda derivada em \mathbb{R}^n , as entradas do hessiano são todas positivas e dadas por

$$\nabla_i \nabla_j u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(p) - \sum_{1 \leq k \leq n} \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial u}{\partial x^k}(p) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(p) \geq 0.$$

Como o laplaciano é o traço do hessiano, o resultado segue. *Mutatis mutandis*, a mesma demonstração pode ser feita no caso em que p é ponto de máximo local. ■

Definição (D.1.32). O f -laplaciano de uma seção $s \in \Gamma(E)$ é a seção $\Delta_f s \in \Gamma(E)$ dada por

$$\Delta_f s = \Delta s - \nabla_{\nabla f} s.$$

Lema (L.1.12). Sejam $f, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Então

$$\Delta(f \cdot h) = f \cdot \Delta h + h \cdot \Delta f + 2 \cdot g(\nabla f, \nabla h).$$

Demonstração: Como todos os operadores envolvidos são tensoriais, basta provar que a identidade é satisfeita em torno do centro arbitrariamente fixado $p \in \mathcal{M}$ de um referencial geodésico. Isto é um cálculo direto. ■

Lema (L.1.13). Sejam $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Então

$$\Delta_f(u \cdot v) = u \cdot \Delta_f v + v \cdot \Delta_f u + 2 \cdot g(\nabla f, \nabla h).$$

Demonstração: Consequência imediata dos lemas (L.1.12) e (L.1.5). ■

1.3 Álgebra exterior

Nessa seção relembremos alguns importantes conceitos de álgebra exterior, com base na referência [33]. Fixemos $k \in \mathbb{N}$ e denotemos por $\Lambda^k(\mathbb{V})$ o conjunto de k -formas em \mathbb{V} . Considere o produto exterior

$\wedge : \underbrace{\mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}}_{k \text{ vezes}} \mapsto \Lambda^k(\mathbb{V})$, definido por

$$\begin{aligned} \wedge(v_1, \dots, v_k) &\doteq v_1 \wedge \dots \wedge v_k \\ &= \flat(v_1) \wedge \flat(v_2) \wedge \dots \wedge \flat(v_k), \end{aligned}$$

sejam quais forem $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}$. Como $\flat(v_i)$ é uma 1-forma para cada $1 \leq i \leq k$, \wedge está bem definida. Além disso, conforme explicitado em [33], tal produto exterior é (a menos de isomorfismos) único.

Definição (D.1.33). Fixado $j \in \mathbb{N}$, diremos que uma j -forma diferencial $\omega \in \Lambda^j(\mathbb{V})$ é uma j -lâmina em \mathbb{V} quando existirem $v_1, \dots, v_j \in \mathbb{V}$ tais que

$$\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_j.$$

Definição (D.1.34). Fixado $j \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial gerado por combinações lineares de j -lâminas em \mathbb{V} será denotado por $\mathbb{V}^{\wedge j}$.

Definição (D.1.35). O Grassmanniano $\text{Gr}_k(\mathbb{V})$ é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão k de \mathbb{V} .

Definição (D.1.36). O *fibrado Grassmanniano* $\text{Gr}_k(\mathcal{M})$ de uma variedade diferenciável \mathcal{M} é definido por

$$\text{Gr}_k(\mathcal{M}) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \text{Gr}_k(T_p \mathcal{M})$$

Pode-se provar (veja [31]) que o Grassmanniano $\text{Gr}_k(\mathcal{M}^n)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n + \binom{n}{k}$.

1.4 As identidades de Bianchi e suas consequências

O objetivo principal dessa seção é estabelecer (com base na referência [48]) a identidade (1.14). Antes, precisamos lembrar de algumas identidades já conhecidas. Como visto em geometria Riemanniana (e também provado em [32]), o tensor curvatura Rm satisfaz as seguintes identidades

Identidade (I.1.1) (Primeira identidade de Bianchi).

$$\text{Rm}(x, y)z + \text{Rm}(z, x)y + \text{Rm}(y, z)x = 0, \quad \forall x, y, z \in T_p \mathcal{M} \text{ e } \forall p \in \mathcal{M}.$$

Identidade (I.1.2) (Segunda identidade de Bianchi).

$$(\nabla_z \text{Rm})(x, y)w + (\nabla_x \text{Rm})(y, z)w + (\nabla_y \text{Rm})(z, x)w = 0 \quad \forall x, y, z, w \in T_p \mathcal{M} \text{ e } \forall p \in \mathcal{M}.$$

Estas duas identidades implicam na

Identidade (I.1.3) (Segunda identidade de Bianchi contraída).

$$2 \cdot \text{div}(\text{Ric}) = \nabla \text{Scal}. \tag{1.13}$$

Demonstração: Fixe $p \in \mathcal{M}$ e $v \in T_p\mathcal{M}$ arbitrariamente, e considere γ a única geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Estendamos v a um campo V paralelo ao longo de γ , assim como visto na observação (O.3) e tomemos $\{E_i\}$ um referencial geodésico em torno de p . Assim, temos que

$$(\nabla V)|_p = (\nabla E_i)|_p \equiv \nabla_{E_i(p)} E_j = 0, \text{ sejam quais forem } 1 \leq i, j \leq n.$$

Equivalentemente,

$$\nabla_x V = \nabla_x E_i \equiv \nabla_{E_i(p)} E_j = 0, \text{ sejam quais forem } x \in T_p\mathcal{M} \text{ e } 1 \leq i, j \leq n.$$

Portanto, segue da segunda identidade de Bianchi e do lema (L.1.4) que:

$$\begin{aligned} (\text{dScal})(V)(p) &= (V(\text{Scal}))(p) = V \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \langle \text{Ric}(E_i), E_i \rangle \right) \\ &= V \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle \text{Rm}(E_i, E_j) E_j, E_i \rangle \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle \nabla_V [\text{Rm}(E_i, E_j) E_j], E_i \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle (\nabla_V \text{Rm})(E_i, E_j) E_j, E_i \rangle \\ &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle (\nabla_{E_j} \text{Rm})(V, E_i) E_j, E_i \rangle - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle (\nabla_{E_i} \text{Rm})(E_j, V) E_j, E_i \rangle \\ &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\nabla_{E_j} \text{Rm})(V, E_i, E_j, E_i) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle (\nabla_{E_i} \text{Rm})(E_j, V, E_j, E_i) \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\nabla_{E_j} \text{Rm})(E_j, E_i, E_i, V) + \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\nabla_{E_i} \text{Rm})(E_i, E_j, E_j, V) \\ &= 2 \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\nabla_{E_j} \text{Rm})(E_j, E_i, E_i, V) \\ &= 2 \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq n} \nabla_{E_j} (\text{Rm}(E_j, E_i, E_i, V)) \\ &= 2 \sum_{1 \leq j \leq n} \nabla_{E_j} (\langle \text{Ric}(E_j), V \rangle) \\ &= 2 \cdot \sum_{1 \leq j \leq n} \nabla_{E_j} (\langle \text{Ric}(V), E_j \rangle) \\ &= 2 \cdot \sum_{1 \leq j \leq n} \langle (\nabla_{E_j} \text{Ric})(V), E_j \rangle \\ &= 2 \cdot (\text{div}(\text{Ric}))(V)(p). \end{aligned}$$

O resultado desejado segue então da arbitrariedade de $V(p) = v \in T_p\mathcal{M}$. ■

Observação (O.49). Lembrando da observação (O.90), vemos que a expressão local da identidade (1.13) é dada por

$$2 \cdot (\text{div}(\text{Ric}))_a = 2 \sum_{1 \leq b \leq n} (\nabla^b \text{Ric})_{ab} = \nabla_a \text{Scal}.$$

Um abuso comum na literatura é abandonar o uso de parênteses e usar a convenção da notação de Einstein, de forma que (denotando Scal por R e Ric_{ij} por R_{ij}), a equação acima se escreve como

$$\nabla^j R_{ij} = \nabla_j R_i^j = \frac{1}{2} \nabla_i R,$$

onde a primeira igualdade é uma consequência imediata da maneira que identificamos Ric como um tensor de tipo $(1, 1)$ e $(0, 2)$ simultaneamente. De fato, usando a convenção da notação de Einstein, temos

$$\begin{aligned} \nabla_j R_i^j &= (\nabla_j \text{Ric})(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i) \\ &= (\nabla_j \text{Ric})(g^{js} e_s, e_i) \\ &= g^{js} (\nabla_j \text{Ric})_{si} \\ &= (\nabla^s \text{Ric})_{si} \\ &= \nabla^j R_{ij}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade fizemos uma renomeação trivial de índices e usamos a simetria de Ric (que implica na simetria de todas as suas derivadas covariantes).

Os próximos dois lemas também nos serão bastante úteis:

Lema (L.1.14).

$$(\text{div Rm})(x, y, z) = (\nabla_x \text{Ric})(y, z) - (\nabla_y \text{Ric})(x, z), \quad \forall x, y, z \in T_p \mathcal{M} \text{ e } \forall p \in \mathcal{M}.$$

Demonstração: Seja $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ um referencial geodésico centrado em torno de p (com $E_i(p) \doteq \mathbf{e}_i$) e suponhamos sem perda de generalidade (conforme a observação (O.3)) que $0 = \nabla_v x = \nabla_v y = \nabla_v z$ seja qual for $v \in T_p \mathcal{M}$. Temos então

$$\begin{aligned} -(\text{div Rm})(x, y, z) &= - \sum_{1 \leq i \leq n} \langle (\nabla_{\mathbf{e}_i} \text{Rm})(x, y, z), \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} [g((\nabla_x \text{Rm})(y, \mathbf{e}_i, z), \mathbf{e}_i) + g((\nabla_y \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z), \mathbf{e}_i)] \\ &= \text{tr}((\nabla_x \text{Rm})(y, \bullet, z)) + \text{tr}((\nabla_y \text{Rm})(\bullet, x, z)) \\ &= -(\nabla_x \text{Ric})(y, z) + (\nabla_y \text{Ric})(x, z), \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a segunda identidade de Bianchi e na última usamos o fato de ∇ comutar com o traço. ■

Lema (L.1.15). Uma variedade de Einstein \mathcal{M}^n de dimensão $n \geq 3$ (veja a definição (D.1.19)) tem λ constante. E no caso em que $n = 3$, \mathcal{M} tem curvatura seccional constante (e portanto curvaturas de Ricci e escalar constantes também).

Demonstração: Pela segunda identidade de Bianchi, temos $d\text{Scal} = 2 \text{div}(\text{Ric})$ (onde Scal é a curvatura escalar de \mathcal{M}). No caso em que \mathcal{M} é Einstein, vemos então que $d(\lambda \text{tr}(g)) = n \cdot d\lambda = 2 \text{div}(\lambda g)$, que em

coordenadas locais se escreve como

$$n \cdot d\lambda = 2 \operatorname{div}(\lambda g) = 2 \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} g^{ij} \nabla_i (\lambda g_{jk}) dx^k = 2 \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} g^{ij} g_{jk} (\nabla_i \lambda) dx^k = 2 d\lambda,$$

Portanto $n \geq 3 \implies d\lambda \equiv 0$, e pela conexidade de \mathcal{M} , λ é então constante. Para a segunda parte, observe que tomando $p \in \mathcal{M}$ arbitrário e um referencial geodésico $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ centrado em p , vemos que

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} \operatorname{Rm}(X, \mathbf{e}_i, Y, \mathbf{e}_i) = 2\lambda \cdot g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M}).$$

Fazendo $X = Y = \mathbf{e}_j$ com $j \in \{1, 2, 3\}$ e avaliando em p obtemos o sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{determinante}=2} \begin{pmatrix} \operatorname{sec}_{12} \\ \operatorname{sec}_{23} \\ \operatorname{sec}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Ric}_{11} \\ \operatorname{Ric}_{22} \\ \operatorname{Ric}_{33} \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, a curvatura seccional é constante e igual a λ . ■

Identidade (I.1.4) (Identidade de Bochner). *Numa variedade Riemanniana (\mathcal{M}^n, g) , vale que:*

$$[\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)](X) = \frac{1}{2} \cdot \Delta \|X\|^2 - \|\nabla X\|^2 + \operatorname{Ric}(X, X) + X(\operatorname{div} X).$$

E no caso em que $X = \nabla f$ para alguma $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, temos

$$[\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)](Z) = 2 \cdot \operatorname{Ric}(Z, X) + 2 \cdot Z(\operatorname{div} X),$$

ou, equivalentemente e livre de coordenadas (vendo as entidades acima como tensores de tipo $(1, 1)$),

$$\operatorname{div} \nabla^2 f = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f. \quad (1.14)$$

Demonstração: Faremos os cálculos em um referencial geodésico $\{E_i\}$ em torno de um ponto $p \in \mathcal{M}$ arbitrariamente fixado. Conforme a definição (D.4.11) e o exemplo (E.1.9), temos

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)](X) &= \sum_{1 \leq i \leq n} g([\nabla_{E_i}(\mathcal{L}_X g)](X), E_i) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} [\nabla_{E_i}(\mathcal{L}_X g)](E_i, X) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} [\nabla_{E_i}[(\mathcal{L}_X g)(E_i, X)] - (\mathcal{L}_X g)(E_i, \nabla_{E_i} X)]. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)(E_i, X) &= X(g(E_i, X)) - g([X, E_i], X) \\ &= g(E_i, \nabla_X X) - g(\nabla_X E_i - \nabla_{E_i} X, X) \\ &= g(E_i, \nabla_X X) + g(\nabla_{E_i} X, X), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-(\mathcal{L}_X g)(E_i, \nabla_{E_i} X) &= -[X(g(E_i, \nabla_{E_i} X)) - g([X, E_i], \nabla_{E_i} X) - g(E_i, [X, \nabla_{E_i} X])] \\
&= -[g(E_i, \nabla_X \nabla_{E_i} X) + g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X) - g(E_i, \nabla_X \nabla_{E_i} X) + g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} X} X)] \\
&= -g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X) - g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} X} X).
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{1 \leq i \leq n} [\nabla_{E_i} [g(\nabla_{E_i} X, X) + g(E_i, \nabla_X X)] - g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X) - g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} X} X)] \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} [\nabla_{E_i} [g(\nabla_{E_i} X, X)] + \nabla_{E_i} [g(E_i, \nabla_X X)] - g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} X} X)] - \|\nabla X\|^2.
\end{aligned}$$

Mas como

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq n} \nabla_{E_i} [g(\nabla_{E_i} X, X)] &= \sum_{1 \leq i \leq n} [g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X) + g(X, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} X)] \\
&= \sum_{1 \leq i, \ell \leq n} g([\langle \nabla_{E_i} X, \nabla_{E_\ell} X \rangle + \langle X, \nabla_{E_i} \nabla_{E_\ell} X \rangle] E_\ell, E_i) \\
&= \sum_{1 \leq i, \ell \leq n} g \left(\nabla_{E_i} [\langle X, \nabla_{E_\ell} X \rangle] E_\ell + \langle X, \nabla_{E_\ell} X \rangle \underbrace{\nabla_{E_i} E_\ell}_{=0 \text{ em } p}, E_i \right) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} g \left(\nabla_{E_i} \left(\sum_{1 \leq \ell \leq n} \langle X, \nabla_{E_\ell} X \rangle E_\ell \right), E_i \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} g(\nabla_{E_i} \nabla (\|X\|^2), E_i) \\
&= \frac{1}{2} \Delta (\|X\|^2),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq n} [\nabla_{E_i} [g(E_i, \nabla_X X)] - g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} X} X)] &= \sum_{1 \leq i \leq n} \langle E_i, \nabla_{E_i} \nabla_X X - \nabla_{\nabla_{E_i} X} X \rangle \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{E_i, X}^2 X, E_i \rangle \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{E_i, X}^2 X - \nabla_{X, E_i}^2 X, E_i \rangle + \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{X, E_i}^2 X, E_i \rangle \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Rm}(E_i, X, X, E_i) + \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{X, E_i}^2 X, E_i \rangle \\
&= \operatorname{Ric}(X, X) + \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{X, E_i}^2 X, E_i \rangle \\
&= \operatorname{Ric}(X, X) + \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_X \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\
&= \operatorname{Ric}(X, X) + X \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \right) \\
&= \operatorname{Ric}(X, X) + X(\operatorname{div} X),
\end{aligned}$$

obtemos

$$[\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)](X) = \frac{1}{2} \cdot \Delta \|X\|^2 - \|\nabla X\|^2 + \operatorname{Ric}(X, X) + X(\operatorname{div} X),$$

como afirmado. *Mutatis mutandis*, segue da primeira parte da demonstração que

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)](Z) &= \sum_{1 \leq i \leq n} [\nabla_{E_i}(\mathcal{L}_X g)](E_i, Z) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} [\nabla_{E_i}([\mathcal{L}_X g](E_i, Z)) - (\mathcal{L}_X g)(E_i, \nabla_{E_i} Z)] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\nabla_{E_i} [\langle \nabla_{E_i} X, Z \rangle + \langle E_i, \nabla_Z X \rangle] - \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} Z \rangle - \langle E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} Z} X \rangle \right). \end{aligned}$$

No caso em que $X = \nabla f$ (e, a fortiori, a aplicação $Z \mapsto \nabla_Z X$ é auto-adjunta, como vimos na observação (O.45)), temos

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} (\nabla_{E_i} [\langle \nabla_{E_i} X, Z \rangle + \langle E_i, \nabla_Z X \rangle]) &= 2 \cdot \sum_{1 \leq i \leq n} \nabla_{E_i} (\langle \nabla_Z X, E_i \rangle) \\ &= 2 \cdot \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{E_i} \nabla_Z X, E_i \rangle, \end{aligned}$$

e

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} Z \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} Z} X \rangle,$$

de forma que

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)](Z) &= 2 \cdot \sum_{1 \leq i \leq n} \langle E_i, \nabla_{E_i} \nabla_Z X - \nabla_{\nabla_{E_i} Z} X \rangle \\ &= 2 \cdot \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{E_i, Z}^2 X - \nabla_{Z, E_i}^2 X, E_i \rangle + 2 \cdot \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \nabla_{Z, E_i}^2 X, E_i \rangle \quad (1.15) \\ &= 2 \cdot \operatorname{Ric}(Z, X) + 2 \cdot Z(\operatorname{div}(X)) = 2 \cdot \langle \operatorname{Ric}(Z), X \rangle + 2 \cdot \langle \nabla \Delta f, Z \rangle. \end{aligned}$$

Agora, como já vimos na observação (O.36),

$$\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2 \cdot \nabla^2 f.$$

Portanto, a equação (1.15) se escreve como:

$$[\operatorname{div}(\nabla^2 f)](\bullet) = \langle \operatorname{Ric}(\nabla f), \bullet \rangle + \langle \nabla \Delta f, \bullet \rangle.$$

Ou, vendo todas as entidades acima como tensores de tipo (1, 1) (equivalentemente, endomorfismos),

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = \sharp([\operatorname{div}(\nabla^2 f)](\bullet)) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f.$$

■

Capítulo 2

O fluxo de Ricci

O que é o fluxo de Ricci? Há várias maneiras, todas (necessariamente) equivalentes de responder essa pergunta. Não há como fugir do rigor e exatidão de uma fórmula bem definida, mas por ora vejamos o quão longe podemos chegar só com palavras. As abordagens que apresentamos nas duas seções a seguir são, em grande parte, baseadas nas referências [52], [12] e [1].

2.1 Motivação e exemplos

Como mencionamos na **Introdução**, o fluxo de Ricci surgiu na década de 1980 como a ferramenta mais promissora para a resolução da conjectura de Poincaré. O plano de ataque é o seguinte: tomemos \mathcal{M}^3 uma 3-variedade topológica fechada simplesmente conexa. Lembrando que em dimensão $n \leq 3$, acontece o seguinte fenômeno muito notável:

Lema (L.2.1). *Seja \mathcal{M}^n uma variedade topológica de dimensão $n \leq 3$. Então \mathcal{M}^n admite uma única estrutura diferenciável compatível com a sua topologia. Consequentemente,*

$$\mathcal{M}^n \text{ é homeomorfa a } \mathcal{N}^n \iff \mathcal{M}^n \text{ é difeomorfa a } \mathcal{N}^n.$$

Demonstração: Consulte [35].

■

Podemos então munir \mathcal{M}^3 de uma estrutura diferenciável e consequentemente de uma métrica Riemanniana, digamos $g_0 \in \mathcal{T}_0^2(TM^3)$ (que, a priori, não sabemos absolutamente nada sobre). Supondo que, milagrosamente, acontecesse que g_0 fosse uma métrica de Einstein, o problema estaria acabado: em dimensão ≤ 3 , métricas de Einstein têm curvatura seccional constante. Como uma consequência trivial do teorema de Cartan-Hadamard, tal curvatura necessariamente seria positiva, e portanto, teríamos a certeza (pelo teorema de Killing-Hopf) que \mathcal{M}^3 é isométrica (em particular, homeomorfa) a \mathbb{S}^3 .

O plano de ataque desenvolvido por R. Hamilton tenta encontrar tal métrica milagrosa ao deformar g_0 . De modo grosseiro, pensaremos na variedade como se fosse feita de metal, cuja temperatura varia

entre regiões distintas, e iremos deformar a métrica de tal forma que façamos a curvatura “fluir” de áreas mais curvadas para área menos curvadas, assim como o calor flui de regiões mais quentes a mais frias. Isso equivale a mudar as métricas do espaço de forma que as distâncias diminuam mais rapidamente nas direções ao longo das quais a curvatura é maior. O melhor cenário possível (que, como veremos, infelizmente não acontece em geral) é que tal processo eventualmente nos forneça uma métrica final (conceito este que precisa ser formalizado, como feito em [52]) g_∞ que seja de Einstein.

Apesar da plausibilidade e simplicidade iniciais de tal plano, há vários detalhes que precisam ser estudados com cuidado. Primeiramente, em dimensão ≥ 3 temperatura é um objeto muito mais simples que curvatura: enquanto que, informalmente, poderíamos definir a temperatura na variedade como uma função real (que, obviamente, associa a cada ponto sua temperatura), a curvatura, em contraste, é uma função $K : \text{Gr}_2(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$, que associa um valor a cada direção planar passando por um ponto. Conforme veremos na proposição (P.3.2), em cada ponto de \mathcal{M} são necessários seis números diferentes para descrever K . Ao buscarmos um análogo da equação do calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u,$$

para a curvatura, precisaremos então combinar todos os números que descrevem a curvatura em alguma quantidade geométrica que faça sentido independentemente de qualquer escolha de coordenadas e impor alguma fórmula que descreva a sua mudança.

Há essencialmente só uma maneira de prosseguir. Como vimos na observação (O.48), o laplaciano é, a grosso modo, um operador que faz médias ao longo de pequenas esferas centradas em torno de um ponto, e, analogamente, o tensor de Ricci é obtido do tensor de curvatura Riemanniano ao fazer a média de curvaturas em diferentes direções. Seja então $\{g(t)\}_{t \in I}$ uma família suave de métricas Riemannianas em \mathcal{M} . Assim motivados, fixemos arbitrariamente $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ e $p \in \mathcal{M}$. Para cada $t_0 \in I$ arbitrariamente fixado, o objeto geométrico $\text{Ric}_{g(t_0)}$ está bem definido, a correspondência $(Z, W) \mapsto \text{Ric}_{g(t_0)}(Z, W)$ é um 2-tensor simétrico e $\text{Ric}_{g(t)}(p)(X(p), Y(p)) \in \mathbb{R}$. Analogamente, temos $g(t_0)(p)(X(p), Y(p)) \in \mathbb{R}$. Podemos portanto tomar derivadas: vemos que $\frac{\partial}{\partial t} (g(t)(X(p), Y(p))) \in \mathbb{R}$, e a correspondência $(Z, W) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} (g(t)(X, Y))$ é um tensor simétrico. Em particular, fixando uma constante $c \in \mathbb{R}$, a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = c \cdot \text{Ric}_{g(t)}$$

faz sentido. Em vista do seguinte

Lema (L.2.2). *Em coordenadas harmônicas com respeito a $g(t)$, o tensor de Ricci satisfaz*

$$c \cdot \text{Ric}_{jk} = -\frac{c}{2} \cdot \Delta(g_{jk}) - \frac{c}{2} \cdot Q_{jk}(\partial g, g^{-1}), \quad (2.1)$$

onde Q_{jk} denota uma soma de termos que contém componentes de g^{-1} , e derivadas espaciais de ordem ≤ 1 dos componentes da métrica g .

Demonstração: Consulte [50], onde (2.1) foi (equivalentemente) demonstrada no caso $c = -2$. ■

É natural então escolher $c = -2$, de forma que, informalmente, a equação do fluxo se escreva como

$$\partial_t g = \Delta g + \dots,$$

cumprindo o nosso objetivo de encontrar um análogo da equação do calor para a curvatura e justificando a seguinte

Definição (D.2.1). *Seja $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ uma variedade Riemanniana e $T > 0$. Diremos que uma família de métricas $\{g_t\}_{t \in [0, T]}$ é uma solução do fluxo de Ricci em \mathcal{M} com condição inicial $g_{\mathcal{M}}$ quando*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = -2 \cdot \text{Ric}_{g_t}, \quad \forall t \in (0, T); \\ g_0 = g_{\mathcal{M}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Observação (O.50). No caso $c = 1$, é comum encontrar na literatura a equação (2.1) escrita como

$$\text{Ric}_{ij} = -\frac{1}{2} \Delta g_{ij} + \text{termos de ordem } \leq 1.$$

Porém, é importante ressaltar que em tal situação a notação Δg_{ij} pode parecer ambígua, podendo razoavelmente ser interpretada como o laplaciano da função real g_{ij} ou como os componentes do laplaciano da métrica. Mas como trivialmente $\Delta g = 0$, o contexto torna tal abuso inofensivo (em contraste com a situação vista na observação (O.5), onde é feito o uso de um referencial geodésico).

Observação (O.51). Apesar do plano de ataque acima ter sido inicialmente elaborado para atacar a conjectura de Poincaré, Perelman o estendeu de forma a atacar o problema ainda mais geral da conjectura da geometrização de Thurston. Um dos vários obstáculos nesse sentido é a existência de possíveis singularidades ao longo da evolução do fluxo. Inicialmente, para contornar esse impasse, Hamilton propôs fazer “cortes” (formalmente, decompor a variedade em somas conexas) na variedade e então reiniciar o fluxo em cada pedaço. Tal processo é comumente chamado de *cirurgia*.

Idealmente, se espera que somente um número finito de cirurgias tenha de ser realizado e que o fluxo forneça em cada componente uma métrica modelada por uma das oito geometrias-modelo de Thurston, de forma que ao “voltarmos no tempo”, fazendo a cirurgia no sentido contrário, estejam provadas tanto a conjectura da geometrização de Thurston quanto a conjectura de Poincaré (no caso em que a variedade inicial é simplesmente conexa, se espera que cada componente da cirurgia seja uma esfera - como somas conexas de esferas são esferas, provaríamos a conjectura de Poincaré).

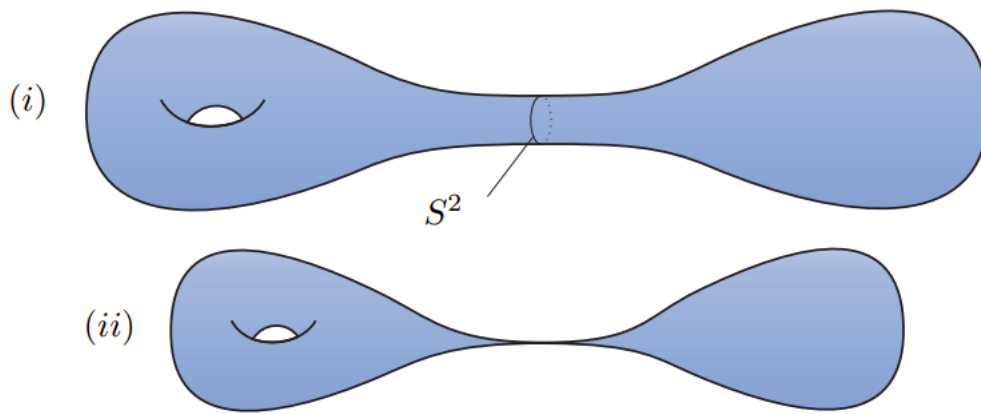


Figura 2.1: uma singularidade do tipo “pescoço pinçado”. Figura extraída de [52].

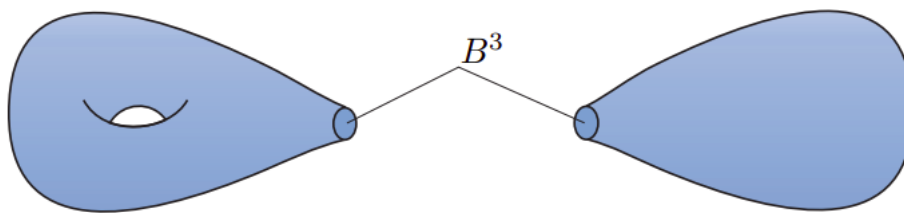


Figura 2.2: cirurgia. Figura extraída de [52].

Hamilton não conseguiu mostrar que tal processo não ficava preso numa situação do tipo do paradoxo de Zeno. *A priori*, poderia acontecer que após 1 segundo de evolução do fluxo tivéssemos que realizar tal processo pela primeira vez (gerando 2 componentes), após mais $\frac{1}{2}$ segundo tivéssemos que realizá-lo pela segunda vez (gerando 4 componentes), após mais $\frac{1}{4}$ de segundo, pela terceira vez (gerando 8 componentes), e assim sucessivamente... Perelman mostrou que tal obstáculo podia de fato ser superado, ou seja, que só um número finito de cirurgias precisa ser realizado.

Observação (O.52). A ideia de Hamilton para classificar as singularidades foi aplicar mudanças de escala a fim de diminuir a curvatura.

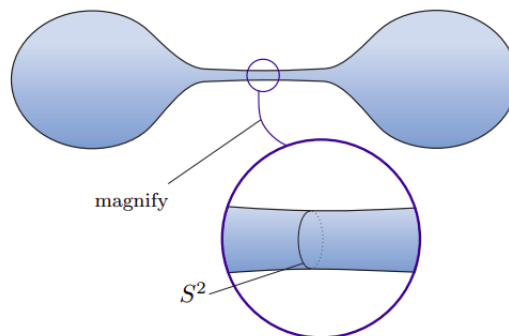


Figura 2.3: estratégia para classificar singularidades: usar uma “lupa” perto da singularidade (aplicar mudanças de escala) com “zoom” cada vez maior, e então aplicar limites. Figura extraída de [52].

Os sólitons de Ricci aparecem como limites do processo que delineamos informalmente na figura acima (cuja formalização pode ser encontrada em [12] ou [52]). Além disso, uma vez que sólitons (que definiremos em breve) são, de certa forma, soluções estacionárias do fluxo, os mesmos “nascem” como uma grande obstrução inicial ao plano que esboçamos na observação (O.51), se tornando assim importantes objetos de estudo.

A priori, a teoria padrão de EDPs não pode ser aplicada para garantir a existência e unicidade a curto prazo da equação acima, pois a mesma não é fortemente parabólica devido à invariância por difeomorfismos do tensor de Ricci. Originalmente, em [26], Hamilton usou um teorema da função inversa em dimensão infinita de Nash-Moser para contornar esse problema, e estabeleceu o seguinte

Teorema (T.2.1). *Dada uma métrica Riemanniana $g_{\mathcal{M}}$ numa variedade fechada \mathcal{M} , existe $\varepsilon > 0$ e uma família suave de métricas $\{g_t\}_{t \in [0, \varepsilon]}$ tais que*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = -2 \cdot \text{Ric}_{g_t}, \quad \forall t \in (0, \varepsilon); \\ g_0 = g_{\mathcal{M}}. \end{cases}$$

Demonstração: Consulte [52] ou [50].

■

Mais recentemente, Dennis DeTurck propôs com sucesso uma abordagem mais simples, que ficou conhecida como “o truque de DeTurck” na literatura. Também temos unicidade de soluções, no seguinte sentido:

Teorema (T.2.2). *Suponha que $\{g_1(t)\}_{t \in [0, \varepsilon]}$ e $\{g_2(t)\}_{t \in [0, \varepsilon]}$ são soluções do fluxo de Ricci numa variedade fechada \mathcal{M} . Se existe $s_0 \in [0, \varepsilon]$ tal que $g_1(s_0) = g_2(s_0)$, então $g_1(t) = g_2(t)$ seja qual for $t \in [0, \varepsilon]$.*

Demonstração: Consulte [52].

■

Observação (O.53). Note a necessidade do instante s_0 em que as soluções coincidem. De fato, o sucesso em dimensão 2 da estratégia descrita anteriormente (como visto em [25]) mostra que (a priori, pelo menos em dimensão 2) o fluxo evolui qualquer geometria de curvatura positiva à geometria da esfera, de curvatura constante, e portanto não é possível reverter o fluxo (assim como não é possível reverter a equação do calor). O instante maximal T é comumente chamado de *instante singular*. Se tal instante é finito, necessariamente a curvatura se torna arbitrariamente grande perto de T , como vemos no seguinte

Teorema (T.2.3) (O único obstáculo para existência a longo prazo). *Se g_0 é uma métrica suave numa variedade compacta \mathcal{M} , o fluxo de Ricci com condição inicial $g(0) = g_0$ possui uma única solução $\{g(t)\}_{t \in I}$ num intervalo maximal $0 \leq t < T \leq \infty$. Além disso, caso $T < \infty$, então:*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \left(\sup_{x \in \mathcal{M}} \left\| \text{Rm}_{g(t)} \right\| (x) \right) = \infty.$$

Demonstração: Consulte [12].

■

Observação (O.54). Combinando os teoremas (T.2.1) e (T.2.2), faz sentido então falar sobre o fluxo de Ricci com métrica inicial (ou condição inicial) g_0 , num intervalo *maximal* $[0, T)$. Nesse caso, “maximal” significa que ou $T = \infty$, ou que $T < \infty$ mas não existe nenhum $\varepsilon > 0$ e nenhum fluxo de Ricci suave $\{\tilde{g}(t)\}_{t \in [0, T+\varepsilon)}$ tal que $\tilde{g}(t) = g(t)$ seja qual for $t \in [0, T)$.

Observação (O.55). Como consequência da unicidade de soluções, vemos que o fluxo de Ricci também preserva isometrias: *id est*, se $\psi : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ é uma isometria de variedades Riemannianas (equivalentemente, $\psi^*(g_{\mathcal{N}}) = g_{\mathcal{M}}$) e $\{g_1(t)\}_{t \in [0, T_1)}$, $\{g_2(t)\}_{t \in [0, T_2)}$ são soluções do fluxo de Ricci em \mathcal{M} e \mathcal{N} (com condições iniciais $g_{\mathcal{M}}$ e $g_{\mathcal{N}}$), respectivamente, então $\psi : (\mathcal{M}, g_1(t)) \rightarrow (\mathcal{N}, g_2(t))$ também é uma isometria.

Para provar tal fato, inicialmente note que a equação (2.2) é invariante por difeomorfismos. De fato, se $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um difeomorfismo atemporal e $g(t)$ é a métrica definida por $g(t) = (\varphi^* g_2)(t)$ seja qual for $t \in \min\{T_1, T_2\}$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g &= \varphi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} g_2 \right) \\ &= \varphi^* (-2 \cdot \text{Ric}(g_2)) \\ &= -2 \cdot \text{Ric}(\varphi^* g_2) \\ &= -2 \cdot \text{Ric}(g), \end{aligned}$$

e portanto g também é uma solução do fluxo de Ricci em \mathcal{M} (onde na penúltima igualdade usamos a invariância por isometrias locais do tensor de Ricci). Em particular, fazendo $\varphi = \psi$, temos pela unicidade de soluções (note que $g(0) = g_1$ trivialmente) vista no teorema (T.2.2) que $g(t) = \psi^*(g_2(t)) = g_1(t)$ seja qual for $t \in \min\{T_1, T_2\}$. Equivalentemente, ψ permanece uma isometria ao longo do fluxo.

Definição (D.2.2). Seja $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ uma variedade Riemanniana isometricamente imersa em outra variedade Riemanniana $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ (via, digamos $f_0 : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$) e suponha que $\{g^{\mathcal{M}}(t)\}_{t \in I}$ é uma solução do fluxo de Ricci em \mathcal{M} . Quando existir uma família de imersões isométricas

$$\{f_t : (\mathcal{M}, g^{\mathcal{M}}(t)) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})\}_{t \in I},$$

diremos que $\{f_t\}_{t \in I}$ é uma representação geométrica do fluxo de Ricci em \mathcal{M} com respeito ao ambiente $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$.

Observação (O.56). É comum, ao fazer exposições introdutórias do fluxo de Ricci, apresentar figuras da evolução do fluxo sem a formalização da definição (D.2.2). Uma vez que o fluxo de Ricci é *intrínseco* (em particular, a sua definição não envolve nenhum espaço ambiente nem imersões), a priori isso não é um abuso inofensivo. Em seguida, apresentamos uma tal figura (criada por Cameron Slayden com aparição original em [34], e com uso autorizado para dissertações, conforme [49]), que retrata explicitamente a “uniformização” da curvatura trazida pelo fluxo.

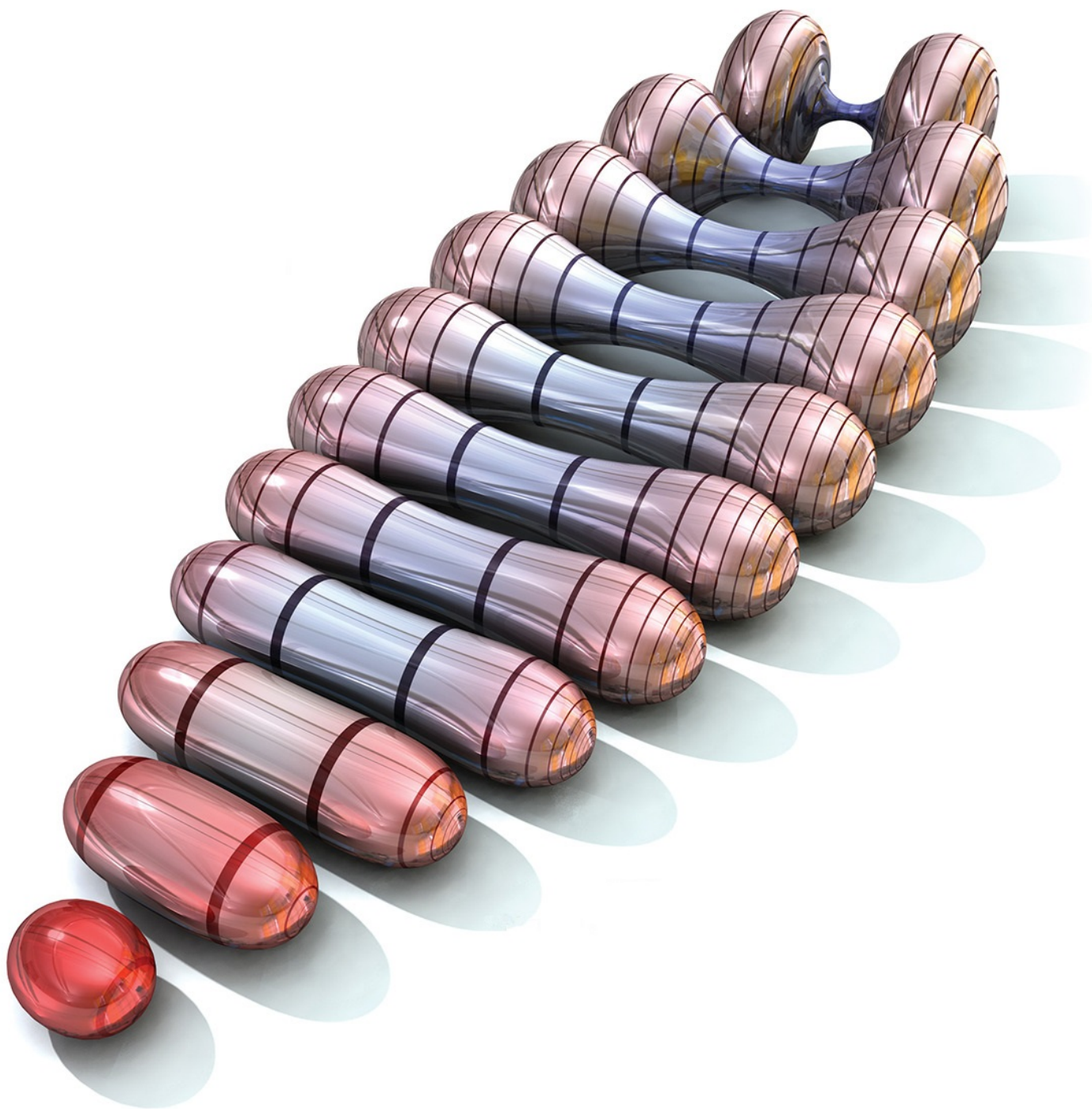


Figura 2.1: visualização da representação geométrica do fluxo de Ricci de uma superfície.

Exemplo (E.2.1). Suponha que (\mathcal{M}, g_0) é Einstein, de forma que

$$\text{Ric}_{ij}(p, 0) = \lambda g_{ij}(p, 0), \quad \forall p \in \mathcal{M},$$

onde λ é uma constante. Fazendo o palpite de que

$$g_{ij}(x, t) = \rho^2(t)g_{ij}(x, 0), \quad \forall x \in \mathcal{M},$$

e usando o fato de que o tensor de Ricci é invariante por difeomorfismos, vemos que $t \mapsto \text{Ric}_{g(t)}$ deve satisfazer

$$\text{Ric}_{ij}(p, t) = \text{Ric}_{ij}(p, 0) = \lambda g_{ij}(p, 0), \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Nesse caso, a equação do fluxo de Ricci se escreve então como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^2(t)g_{ij}(p, 0)) = -2\lambda g_{ij}(x, 0),$$

que nos dá a EDO

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\lambda}{\rho},$$

cujas soluções são dadas por

$$\rho^2(t) = 1 - 2\lambda t, \quad \forall t \in [0, (2\lambda)^{-1}].$$

Em particular, uma esfera encolhe/colapsa a um ponto em tempo finito e sua curvatura “explode” perto do tempo de singularidade.

Por outro lado, em uma variedade \mathbb{H}^3/\mathcal{G} (onde \mathcal{G} é um grupo discreto de isometrias) de curvatura seccional negativa constante, o fluxo simplesmente expande eternamente a variedade sem nunca “explodir” ou colapsar.

Caso a métrica inicial seja Ricci-flat (*id est*, $\text{Ric} \equiv 0$), então é claro que a métrica permanece eternamente estacionária (exemplos concretos incluem \mathbb{R}^n com sua métrica usual e o toro plano \mathbb{T}^n com a métrica produto).

Exemplo (E.2.2). Se a variedade Riemanniana inicial $\mathcal{N} = \mathcal{M}/\mathcal{G}$ é um quociente de uma variedade Riemanniana \mathcal{M} por um grupo discreto de isometrias \mathcal{G} , a observação (O.55) garante que tal propriedade é preservada pelo fluxo. Alguns exemplos concretos incluem superfícies fechadas com gênero ≥ 1 (que são quocientes de \mathbb{H}^2), espaços projetivos (quocientes de \mathbb{S}^n por \mathbb{Z}_2) e variedades Riemannianas de curvatura seccional não-negativa (que são, pelo teorema de Cartan-Hadamard, quocientes de \mathbb{R}^n).

Exemplo (E.2.3). Se $(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, g_{\mathcal{M}} \oplus g_{\mathcal{N}})$ é uma variedade produto, é trivial verificar que sua métrica permanece uma métrica produto sob o fluxo (já que $\text{Ric}_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}} = \text{Ric}_{\mathcal{M}} \oplus \text{Ric}_{\mathcal{N}}$). Por exemplo, o fluxo de Ricci na variedade $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ com a métrica produto usual encolhe o fator \mathbb{S}^2 a um ponto enquanto mantém o fator \mathbb{S}^1 fixado, de forma que a variedade colapsa a um círculo. Além disso, é claro também que se $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$ é uma solução do fluxo de Ricci numa variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$, então $\{g(t) \oplus g_{\mathbb{R}^n}\}_{t \in [0, T]} = \left\{g(t) \oplus dr_1^2 + \cdots + dr_n^2\right\}_{t \in [0, T]}$ também é uma solução do fluxo de Ricci com condição inicial $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$, pois o fluxo permanece estacionário no fator \mathbb{R}^n .

Observação (O.57). Se $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$ é uma solução do fluxo de Ricci em \mathcal{M} , então definindo

$$\tilde{g}(t) = \lambda \cdot g\left(x, \frac{t}{\lambda}\right), \quad \forall (x, t) \in \mathcal{M} \times [0, T],$$

então $\{\tilde{g}(t)\}_{t \in [0, \lambda T]}$ também é uma solução do fluxo de Ricci em \mathcal{M} . De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial g}{\partial t}(x, \lambda^{-1} \cdot t) \\ &= -2 \cdot \text{Ric}(g(\lambda^{-1} \cdot t))(x) \\ &= -2 \cdot \text{Ric}(\tilde{g}(t))(x), \end{aligned}$$

seja qual for $(x, t) \in \mathcal{M} \times [0, \lambda T]$. Note que a conexão de Levi-Civita, o tensor de Ricci e o tensor de curvatura de tipo $(1, 3)$ são invariantes por essa mudança de escala mas as curvaturas seccionais e a curvatura escalar são transformadas pelo fator λ^{-1} .

2.2 Sólitos

Uma das obstruções ao programa inicial de Hamilton de evoluir uma métrica Riemanniana inicial arbitrária a uma métrica de curvatura “uniforme” (em dimensão 3, Einstein, e, *a fortiori*, de curvatura seccional constante) são os *sólitos de Ricci*. Geometricamente, essas soluções evoluem sob o fluxo apenas por difeomorfismos e mudanças de escala, e são, de certa forma, pontos fixos do fluxo (num sentido a ser formalizado em breve).

Definição (D.2.3). Seja $\{g(t)\}_{t \in I}$ uma solução do fluxo de Ricci numa variedade Riemanniana (\mathcal{M}, g_0) . Se existir uma família temporal de difeomorfismos $\{\varphi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}\}_{t \in I}$ (com $\varphi_0 = \text{Id}_{\mathcal{M}}$) e um fator de escala temporal $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(I)$ (com $\sigma(0) = 1$) tal que

$$g(t) = \sigma(t) \cdot \varphi_t^*(g_0), \quad (2.3)$$

diremos que a solução $\{g(t)\}_{t \in I}$ é um sólito de Ricci em \mathcal{M} . A tripla $(\{g(t)\}_{t \in I}, \{\varphi_t\}_{t \in I}, \sigma)$ é chamada de *uma estrutura de sólito de Ricci em \mathcal{M}* .

Observação (O.58). Como o tensor de Ricci é invariante por homotetias e difeomorfismos, os sólitos de Ricci correspondem a pontos fixos da equação (2.2).

Proposição (P.2.1). Uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}} = g_0)$ admite uma estrutura de sólito de Ricci se, e somente se, existe um campo $V \in \Gamma(T\mathcal{M})$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{Ric}_{g_{\mathcal{M}}} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}_V(g_{\mathcal{M}}) = \lambda \cdot g_{\mathcal{M}}. \quad (2.4)$$

Observação (O.59). Dado um campo vetorial temporal $X : \mathcal{M} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T\mathcal{M}$, sempre existe uma família temporal de difeomorfismos - *id est*, uma aplicação $\psi : \mathcal{M} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ tal que

$\psi_t = \psi(\bullet, t) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um difeomorfismo seja qual for $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ - satisfazendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = X, \text{ e } \psi_0 = \text{Id}_{\mathcal{M}}.$$

Para uma demonstração desse fato, pode-se consultar o capítulo 9 de [31]. Explicitamente, a equação

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = X$$

significa que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{(p_0, t_0)} = d\psi_{(p_0, t_0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \right) = \underbrace{(X_{t_0} \circ \psi_{t_0})(p_0)}_{\in T_{\psi(p_0, t_0)}\mathcal{M}},$$

sejam quais forem $p_0 \in \mathcal{M}$ e $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. A família $\{\psi_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ é chamada da *família de difeomorfismos gerada pelos campos temporais* X_t .

Demonstração: Suponha que a definição (D.2.3) seja satisfeita. Tomando a derivada da expressão (2.3), vemos que

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \frac{d\sigma_t}{dt} \cdot \varphi_t^*(g_0) + \sigma(t) \cdot \frac{\partial(\varphi_t^* g_0)}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Avaliando a equação (2.5) em $t = 0$ e definindo $V \doteq \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$ e $\lambda \doteq -\frac{\sigma'(0)}{2}$, obtemos

$$\text{Ric}_{g_{\mathcal{M}}} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}_V(g_{\mathcal{M}}) = \lambda \cdot g_{\mathcal{M}}.$$

Por outro lado, se existem $V \in \Gamma(T\mathcal{M})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que a equação (2.4) é satisfeita, podemos considerar a função real definida por

$$\sigma(t) = 1 - 2\lambda t, \quad (2.6)$$

para cada $t \in [0, T)$, onde $T = \infty$ se $\lambda \leq 0$ e $T = (2\lambda)^{-1}$ se $\lambda > 0$. Definindo então para cada $t \in [0, T)$ o campo

$$\mathcal{M} \ni p \mapsto Y_t(p) = \frac{V(p)}{\sigma(t)},$$

podemos então definir ψ como sendo a família de difeomorfismos gerada pelos campos temporais Y_t , como na observação (O.59). Finalmente, definindo $g(t) = \sigma(t) \cdot \psi_t^*(g_0)$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_t}{\partial t} &= \sigma'(t) \psi_t^*(g_0) + \sigma(t) \cdot \psi_t^* \left(\mathcal{L}_{Y_t} g_0 \right) \\ &= \psi_t^* ([-2\lambda + \mathcal{L}_V] g_0) \\ &= \psi_t^* (-2 \cdot \text{Ric}(g_0)) \\ &= -2 \cdot \text{Ric}(\psi_t^*(g_0)) \\ &= -2 \cdot \text{Ric} \left((\sigma(t))^{-1} \cdot g(t) \right) \\ &= -2 \cdot \text{Ric}_{g_t}. \end{aligned}$$

■

Observação (O.60). Na literatura, os casos $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$ correspondem a sólitos *shrinking*, *steady* (“encolhedores” e “estáveis/firmes”, respectivamente) e *expanding* (“expansores”). Tal nomenclatura é justificada pelo fator de escala definido na equação (2.6). Note que no caso *shrinking*, a solução existe somente para $t \in [0, (2\lambda)^{-1})$.

Observação (O.61). Usando a notação da proposição (P.2.1), diremos que um sólito de Ricci é um sólito de Ricci gradiente se existir $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ tal que $V = \nabla f$. Nesse caso, segue da observação (O.36) que a equação (2.4) se escreve como

$$\text{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g. \quad (2.7)$$

Exemplo (E.2.4). Qualquer variedade de Einstein admite o campo trivial nulo $V \equiv 0 \in \Gamma(TM)$ e portanto satisfaz a equação (2.4), sendo então um exemplo trivial de sólito de Ricci.

Exemplo (E.2.5) (O Charuto de Hamilton). Considere \mathbb{R}^2 munido da métrica Riemanniana $g_0 \doteq g_\Sigma(0)$ definida por

$$g_0(x, y) = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Definiremos a seguinte família de difeomorfismos:

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (e^{-2t}x, e^{-2t}y). \end{aligned}$$

É simples verificar que a família de métricas $\{g(t)\}_{t \geq 0}$ definida por

$$g(t) = \frac{dx^2 + dy^2}{e^{4t} + x^2 + y^2}$$

é uma solução do fluxo de Ricci, e além disso satisfaz

$$g(t) = \varphi_t^*(g_0).$$

Portanto, $\{g(t)\}_{t \geq 0}$ é um sólito de Ricci em \mathbb{R}^2 . Na literatura, esse sólito é chamado do *charuto de Hamilton*. Pode-se provar que (excluindo o exemplo trivial do plano \mathbb{R}^2) ele é o único sólito de Ricci gradiente *steady* conformemente plano.

Exemplo (E.2.6) (Sólito de Bryant). Seja $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ a métrica usual na esfera redonda unitária $(n-1)$ -dimensional. Procuraremos sólitos de Ricci *steady* que surgem como produtos warped em $(0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$. Consideremos então métricas da forma

$$g = dr^2 + (\phi(r))^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Tomando um referencial ortonormal local em \mathbb{S}^{n-1} , digamos

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial \\ \partial \theta^i \end{array} \right\}_{1 \leq i \leq n-1},$$

vemos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right\}_{1 \leq i \leq n-1}$ é um referencial ortonormal local em $(0, \infty) \times_{\phi} \mathbb{S}^{n-1}$. Pelo item (8) do lema (L.4.10), vemos que a curvatura radial de um plano passando pelo vetor radial $\frac{\partial}{\partial r}$ é dada por

$$\begin{aligned} K_{\text{rad}} &= K \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right) = g \left(\text{Rm} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right) \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{\phi^2} \cdot g(\text{Rm}(\partial_r, \partial_{\theta^i}) \partial_{\theta^i}, \partial_r) \\ &= -\frac{1}{\phi^2} \cdot \frac{\phi^2}{\phi} \cdot \phi'' \\ &= -\frac{\phi''}{\phi}. \end{aligned}$$

Analogamente, usando o item (9) do lema (L.4.10), vemos que a curvatura seccional de um plano P_{sph} perpendicular a $\frac{\partial}{\partial r}$ é dada por

$$\begin{aligned} K_{\text{sph}} &= K \left(\frac{1}{\phi} \partial_{\theta^i}, \frac{1}{\phi} \partial_{\theta^j} \right) = \frac{1}{\phi^4} \cdot g(\text{Rm}(\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j}) \partial_{\theta^j}, \partial_{\theta^i}) \\ &= \frac{1}{\phi^4} \cdot \phi^2 \cdot g_{\mathbb{S}^{n-1}}([\pi_{\mathbb{S}^{n-1}}^* \text{Rm}] (\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j}) \partial_{\theta^j}), \partial_{\theta^i}) \\ &= \frac{1}{\phi^2} \cdot \left(1 - \frac{(\phi')^2}{\phi^2} \cdot \phi^2 \right) \\ &= \frac{1 - (\phi')^2}{\phi^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} K_{\text{rad}} = -(n-1) \frac{\phi''}{\phi},$$

e

$$\text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) = ((n-2) (1 - (\phi')^2) - \phi \phi'') g_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right)$$

Concluimos então que

$$\text{Ric}(g) = -(n-1) \frac{\phi''}{\phi} \cdot dr^2 + ((n-2) (1 - (\phi')^2) - \phi \phi'') g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Além disso, como

$$\nabla^2 f = f''(r) \cdot dr^2 + \phi \phi' f' \cdot g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

vemos que a equação para os sólitos de Ricci steady $\text{Ric}(g) + \nabla^2 f = 0$ nesse caso é equivalente ao seguinte sistema de EDOs de segunda ordem:

$$\begin{cases} f'' = (n-1) \frac{\phi''}{\phi}; \\ \phi \phi' f' = -(n-2) (1 - (\phi')^2) + \phi \phi''; \end{cases}$$

Estudando detalhadamente esse sistema, pode-se provar a existência de um sólton de Ricci gradiente steady rotacionalmente simétrico e completo, que é único a menos de homotetias.

Exemplo (E.2.7) (Sólton Gaussiano). O espaço euclidiano \mathbb{R}^n com a métrica canônica $g(t) \equiv g_{\text{can}} \cong \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ é uma solução estacionária trivial do fluxo de Ricci, que à primeira vista pode parecer desinteressante. Mas, na verdade, o fato das métricas usuais de formas espaciais serem invariantes por mudanças de escalas (mais precisamente, se g é uma métrica de curvatura seccional constante em uma forma espacial \mathcal{M} , $cg = (\sqrt{c} \cdot \text{Id}_{\mathcal{M}})^*g$ é isométrica a g seja qual for $c > 0$) torna tal solução interessante, pois faz com que $(\mathbb{R}^n, g_{\text{can}})$ possa ser visto como um sólton de Ricci gradiente não só steady mas também possivelmente expanding ou shrinking. De fato, considerando qualquer constante $\lambda \in \mathbb{R}$ e definindo $f(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot \|x\|^2 \forall x \in \mathbb{R}^n$, vemos que a equação (2.7) é trivialmente satisfeita. Esse exemplo mostra que é possível que uma solução do fluxo de Ricci seja um sólton de Ricci gradiente que é ou shrinking, steady ou expanding, a depender de como se escolhe a função potencial f .

Exemplo (E.2.8). Considere o produto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$ com a métrica produto usual $g = g_{\mathbb{R}^m} \oplus g_{\mathbb{S}^n}$. É simples verificar que a equação (2.7) é satisfeita ao tomar $\lambda = n - 1$ e $f(x, \theta) = \frac{\lambda}{2} \cdot \|x\|^2 \forall (x, \theta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$.

Os lemas a seguir nos serão muito úteis mais adiante.

Lema (L.2.3). Considere o quadrado do operador curvatura $\text{Rm} : \Lambda^2(\mathcal{M}^n) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{M})$ (definido no **Capítulo 3**), dado por

$$\text{Rm}^{\circ 2} = \text{Rm} \circ \text{Rm} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{M}).$$

Então em qualquer referencial ortonormal $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ local (que em um ponto u arbitrariamente fixado denotaremos por e_i), vale que

$$- \sum_{1 \leq i \leq n} g(\text{Rm}(w, z)e_i, \text{Rm}(x, y)e_i) = -2 \cdot \text{Rm}^{\circ 2}(x, y, z, w).$$

Demonstração: Primeiramente, note que a igualdade

$$- \sum_{1 \leq i \leq n} g(\text{Rm}(w, z)e_i, \text{Rm}(x, y)e_i) = -2 \cdot \text{Rm}^{\circ 2}(x, y, z, w) \quad (2.8)$$

é satisfeita se, e somente se,

$$\text{Rm}_{pqrs}^{\circ 2} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Rm}_{srij} \text{Rm}_{pqij}. \quad (2.9)$$

De fato, a igualdade (2.8) é satisfeita se, e somente se,

$$\begin{aligned} \text{Rm}_{pqrs}^{\circ 2} &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \text{Rm}(E_p, E_q)E_i, \text{Rm}(E_s, E_r)E_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Rm}(E_s, E_r, E_i, \text{Rm}(E_p, E_q)E_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Rm}_{srij} \text{Rm}_{pqij}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como o operador Rm é auto-adjunto, segue (pela construção da identificação entre tensores de tipo curvatura e endomorfismos de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ vista no **Capítulo 3**) que

$$\text{Rm}_{pqrs}^{\circ 2} = \langle \text{Rm}^{\circ 2}(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q), \mathbf{e}^s \wedge \mathbf{e}^r \rangle = \langle \text{Rm}(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q), \text{Rm}(\mathbf{e}^s \wedge \mathbf{e}^r) \rangle.$$

Além disso, de

$$\begin{aligned} (\text{Rm}(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q))_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} (\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q)_{k\ell} \text{Rm}_{ij\ell k} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \delta_{k\ell}^{pq} \cdot \text{Rm}_{ij\ell k} = \text{Rm}_{ijqp}, \end{aligned}$$

temos que

$$\text{Rm}(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Rm}_{ijqp} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j,$$

e analogamente

$$\text{Rm}(\mathbf{e}^s \wedge \mathbf{e}^r) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \text{Rm}_{k\ell rs} \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Rm}_{pqrs}^{\circ 2} &= \langle \text{Rm}(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q), \text{Rm}(\mathbf{e}^s \wedge \mathbf{e}^r) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Rm}_{ijqp} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j, \frac{1}{2} \cdot \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \text{Rm}_{k\ell sr} \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq n} \text{Rm}_{pqij} \text{Rm}_{srk\ell} \cdot \delta_{k\ell}^{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \text{Rm}_{pqij} \text{Rm}_{sr\ell j}, \end{aligned}$$

e portanto a igualdade (2.9) está verificada. ■

No lema a seguir, demonstraremos algumas importantes propriedades satisfeitas por sólitos de Ricci gradiente shrinking (conforme [24]). Usaremos tais propriedades de maneira essencial no próximo capítulo.

Lema (L.2.4). *Seja (\mathcal{M}^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente shrinking. Então temos:*

- (a) $\text{Scal} + \Delta f = \frac{n}{2}$;
- (b) $\nabla \text{Scal} = 2 \cdot \text{Ric}(\nabla f)$;
- (c) $\Delta_f \text{Scal} = \text{Scal} - 2 \cdot \|\text{Ric}\|^2$;
- (d) $\text{Scal} + \|\nabla f\|^2 = f$;
- (e) $\Delta_f \text{Rm} = \text{Rm} + \text{Rm} * \text{Rm}$.

Além disso, em um referencial geodésico vale que:

$$(f) \quad (\Delta_f \text{Ric})_{ij} = \Delta_f(\text{Ric}_{ij}) = \text{Ric}_{ij} - 2 \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \text{Rm}_{ik\ell j} \text{Ric}_{k\ell};$$

$$(g) \quad \sum_{1 \leq \ell \leq n} (\nabla_\ell \text{Rm})_{ijkl} = \sum_{1 \leq \ell \leq n} \nabla_\ell (\text{Rm}_{ij\ell k}) = (\nabla_j \text{Ric})_{ik} - (\nabla_i \text{Ric})_{jk} = \nabla_j (\text{Ric}_{ik}) - \nabla_i (\text{Ric}_{jk}) \\ = \sum_{1 \leq \ell \leq n} \text{Rm}_{ij\ell k} f_\ell.$$

Demonstração: Por hipótese (supondo sem perda de generalidade $2\lambda = 1$), vale que

$$\text{Ric} + \nabla^2 f = \frac{1}{2}g. \quad (2.10)$$

Tomando o g -traço dos dois lados da equação acima, obtemos

$$\text{Scal} + \Delta f = \frac{1}{2} \cdot n = \frac{n}{2},$$

e portanto (a) está provada. Segue também que

$$\nabla \text{Scal} + \nabla \Delta f = 0, \text{ e } \text{div}(\text{Ric}) + \text{div}(\nabla^2 f) = \frac{1}{2} \text{tr}(\nabla g) = 0.$$

Por outro lado, temos pelas identidades (1.13) e (1.14) que:

$$\nabla \text{Scal} = 2 \cdot \text{div}(\text{Ric}) \text{ e } \text{div}(\nabla^2 f) = \text{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f.$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned} \nabla \text{Scal} &= 2 \cdot \text{div}(\text{Ric}) \\ &= -2 \cdot \text{div}(\nabla^2 f) \\ &= -2 \cdot \text{Ric}(\nabla f) - 2 \cdot \nabla \Delta f \\ &= -2 \cdot \text{Ric}(\nabla f) + 2 \cdot \nabla \text{Scal}, \end{aligned}$$

de forma que

$$\nabla \text{Scal} = 2 \cdot \text{Ric}(\nabla f),$$

e portanto (b) está provada. Daqui em diante, faremos todos os cálculos usando um referencial geodésico $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ em torno de um ponto $p \in \mathcal{M}$ arbitrariamente fixado (conforme visto no lema (L.1.1)). Temos:

$$\begin{aligned} g(\nabla(\text{Scal} + \|\nabla f\|^2), \mathbf{e}_i) &= g \left(2 \cdot \text{Ric}(\nabla f) + 2 \cdot \underbrace{g(\nabla^2 f, \nabla f)}_{=(\nabla^2 f)(\nabla f)}, \mathbf{e}_i \right) \\ &= 2 \cdot [\text{Ric}(\nabla f, \mathbf{e}_i) + (\nabla^2 f)(\nabla f, \mathbf{e}_i)] \\ &= g(\nabla f, \mathbf{e}_i). \end{aligned}$$

Como i e p são arbitrários, segue que

$$\nabla(\text{Scal} + \|\nabla f\|^2 - f) = 0,$$

e portanto a função real $\text{Scal} + \|\nabla f\|^2 - f$ é constante. Sem perda de generalidade (substituindo, caso necessário, f por $\tilde{f} \doteq f + c$ para alguma constante c apropriada, cuja existência acaba de ser demonstrada), temos então que

$$\text{Scal} + \|\nabla f\|^2 = f,$$

de forma que (d) está demonstrada. Em um referencial geodésico, é claro que as duas primeiras igualdades em (f) e (g) são satisfeitas, como já vimos na observação (O.39). Demonstraremos agora de duas maneiras diferentes a última igualdade de (g). Novamente da equação (2.10), temos que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{jk} + (\nabla^2 f)_{jk} &= \frac{1}{2}g_{jk}; \\ \text{Ric}_{ik} + (\nabla^2 f)_{ik} &= \frac{1}{2}g_{ik}, \end{aligned}$$

donde segue que:

$$(\nabla_i \text{Ric})_{jk} + (\nabla^3 f)_{ijk} = (\nabla_j \text{Ric})_{ik} + (\nabla^3 f)_{jik} = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned} (\nabla_j \text{Ric})_{ik} - (\nabla_i \text{Ric})_{jk} &= (\nabla^3 f)_{ijk} - (\nabla^3 f)_{jik} \\ &= \langle \partial_i \circ \partial_j \circ \partial_k - \partial_j \circ \partial_i \circ \partial_k, \nabla f \rangle \\ &= \sum_{1 \leq a \leq n} \text{Rm}_{ijk}^a f_a \\ &= \sum_{1 \leq \ell, a \leq n} \underbrace{g^{a\ell}}_{=\delta^{a\ell}} \text{Rm}_{ij\ell k} f_a \\ &= \sum_{1 \leq \ell \leq n} \text{Rm}_{ij\ell k} f_\ell. \end{aligned}$$

Por outro lado, dados $x, y, z \in T_p \mathcal{M}$ temos por definição que

$$\begin{aligned} (\nabla_x \text{Ric})(y, z) &= \nabla_x(\text{Ric}(y, z)) - \text{Ric}(\nabla_x y, z) - \text{Ric}(y, \nabla_x z) \\ &= \nabla_x \left(\frac{1}{2}g(y, z) - (\nabla^2 f)(y, z) \right) - \left(\frac{1}{2}g(\nabla_x y, z) - (\nabla^2 f)(\nabla_x y, z) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}g(y, \nabla_x z) - (\nabla^2 f)(y, \nabla_x z) \right) \\ &= (\nabla^2 f)(\nabla_x y, z) + (\nabla^2 f)(y, \nabla_x z) - \nabla_x(g(\nabla_y \nabla f, z)) \\ &= g(\nabla_{\nabla_x y} \nabla f, z) + g(\nabla_y \nabla f, \nabla_x z) - g(\nabla_x \nabla_y \nabla f, z) - g(\nabla_y \nabla f, \nabla_x z) \\ &= g(\nabla_{\nabla_x y} \nabla f - \nabla_x \nabla_y \nabla f, z), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
(\nabla_x \text{Ric})(y, z) - (\nabla_y \text{Ric})(x, z) &= g \left(\nabla_{\nabla_{xy}} \nabla f - \nabla_{\nabla_{yx}} \nabla f + \nabla_y \nabla_x \nabla f - \nabla_x \nabla_y \nabla f, z \right) \\
&= -g \left(\nabla_x \nabla_y \nabla f - \nabla_y \nabla_x \nabla f + \nabla_{\nabla_{yx} - \nabla_{xy}} \nabla f, z \right) \\
&= -g(\text{Rm}(x, y) \nabla f, z) = \text{Rm}(x, y, z, \nabla f),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

que é uma versão livre de coordenadas da última igualdade em (g). Note que na última igualdade usamos o fato de ∇ ser livre de torção e portanto satisfazer

$$\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y].$$

Finalmente, agora usando o lema (L.1.14), temos

$$(\nabla_x \text{Ric})(y, z) - (\nabla_y \text{Ric})(x, z) = (\text{div Rm})(x, y, z) = \sum_{1 \leq \ell \leq n} (\nabla_{\mathbf{e}_\ell} \text{Rm})(x, y, z, \mathbf{e}_\ell), \tag{2.12}$$

e portanto (g) está demonstrada. Agora, por definição (conforme (D.1.32)), temos que:

$$(\Delta \text{Rm})(x, y, z, w) = \sum_{1 \leq i \leq n} (\nabla_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i}^2 \text{Rm})(x, y, z, w).$$

Mas note que por definição (conforme (D.1.26)), temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{e}_i, x}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) &= [\nabla_{\mathbf{e}_i} (\nabla_x \text{Rm})](\mathbf{e}_i, y, z, w) - \underbrace{(\nabla_{\nabla_{\mathbf{e}_i} x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w)}_{=0, \text{ pois } \nabla_{\mathbf{e}_i} x=0} \\
&= \nabla_{\mathbf{e}_i} [(\nabla_x \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w)] \\
&= \nabla_{\mathbf{e}_i} [(\nabla_y \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w) + (\nabla_{\mathbf{e}_i} \text{Rm})(x, y, z, w)],
\end{aligned}$$

onde usamos repetidamente que $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é um referencial geodésico e na última igualdade usamos a segunda identidade de Bianchi. Temos então que:

$$(\nabla_{\mathbf{e}_i, x}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) - (\nabla_{\mathbf{e}_i, y}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w) = (\nabla_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i}^2 \text{Rm})(x, y, z, w).$$

Assim, vemos que:

$$\begin{aligned}
(\Delta \text{Rm})(x, y, z, w) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left[(\nabla_{\mathbf{e}_i, x}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) - (\nabla_{\mathbf{e}_i, y}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w) \right] \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} \left[(\nabla_{x, \mathbf{e}_i}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) + (\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) \right] \\
&\quad - \sum_{1 \leq i \leq n} \left[(\nabla_{y, \mathbf{e}_i}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w) - (\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, y} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w) \right].
\end{aligned}$$

Mas novamente usando o fato de estarmos trabalhando em um referencial geodésico, vemos que:

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\nabla_{x, \mathbf{e}_i}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) = \nabla_x \left(\sum_{1 \leq i \leq n} (\nabla_{\mathbf{e}_i} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) \right)$$

$$= \nabla_x(\text{Rm}(\nabla f, y, z, w)),$$

onde usamos as equações (2.11) e (2.12) na última igualdade. De maneira inteiramente análoga, temos

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\nabla_{y, \mathbf{e}_i}^2 \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w) = \nabla_y(\text{Rm}(\nabla f, x, z, w)).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (\Delta \text{Rm})(x, y, z, w) &= \nabla_x(\text{Rm}(\nabla f, y, z, w)) - \nabla_y(\text{Rm}(\nabla f, x, z, w)) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n} [(\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) - (\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, y} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w)] \\ &= (\nabla_x \text{Rm})(\nabla f, y, z, w) + \text{Rm}(\nabla_x \nabla f, y, z, w) - (\nabla_y \text{Rm})(\nabla f, x, z, w) - \text{Rm}(\nabla_y \nabla f, x, z, w) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n} [(\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) - (\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, y} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w)]. \end{aligned}$$

Agora, da segunda identidade de Bianchi, temos

$$(\nabla_{\nabla f} \text{Rm})(x, y, z, w) = (\nabla_x \text{Rm})(\nabla f, y, z, w) - (\nabla_y \text{Rm})(\nabla f, x, z, w).$$

Note também que:

$$\begin{aligned} \text{Rm}(\nabla_x \nabla f, y, z, w) &= g(\text{Rm}(\nabla_x \nabla f, y)z, w) \\ &= g(\text{Rm}((\nabla^2 f)(x), y, z), w) \\ &= g\left(\text{Rm}\left(\frac{1}{2}x - \text{Ric}(x), y, z\right), w\right) \\ &= \frac{1}{2}\text{Rm}(x, y, z, w) - \text{Rm}(\text{Ric}(x), y, z, w). \end{aligned}$$

Daí obtemos:

$$\begin{aligned} (\Delta \text{Rm})(x, y, z, w) &= (\nabla_{\nabla f} \text{Rm})(x, y, z, w) + \frac{1}{2}(\text{Rm}(x, y, z, w) - \text{Rm}(y, x, z, w)) \\ &- \text{Rm}(\text{Ric}(x), y, z, w) + \text{Rm}(\text{Ric}(y), x, z, w) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n} [(\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) - (\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, y} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w)], \end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned} (\Delta_f \text{Rm})(x, y, z, w) &= \text{Rm}(x, y, z, w) - \text{Rm}(\text{Ric}(x), y, z, w) + \text{Rm}(\text{Ric}(y), x, z, w) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n} [(\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) - (\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, y} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w)]. \end{aligned}$$

Agora, conforme visto em (1.10), temos

$$(\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) = -\text{Rm}(\text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)\mathbf{e}_i, y, z, w) - \text{Rm}(\mathbf{e}_i, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)y, z, w)$$

$$- \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)z, w) - \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y, z, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)w),$$

e como

$$\begin{aligned} -\text{Rm}(\mathbf{e}_i, y, z, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)w) &= -g(\text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)z, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)w) \\ &= -\text{Rm}(\mathbf{e}_i, x, w, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)z) \\ &= \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)z, w), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} (\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) &= \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)z, w) - \text{Rm}(\text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)\mathbf{e}_i, y, z, w) \\ &\quad - \text{Rm}(\mathbf{e}_i, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)y, z, w) - \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)z, w). \end{aligned}$$

Agora, lembrando que

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \text{Rm}(v, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i = \text{Ric}(v) \quad \forall v \in T_p\mathcal{M},$$

e denotando

$$A(x, y, z, w) \doteq \sum_{1 \leq i \leq n} [(\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, x} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, y, z, w) - (\text{Rm}_{\mathbf{e}_i, y} \text{Rm})(\mathbf{e}_i, x, z, w)],$$

temos então que

$$\begin{aligned} A(x, y, z, w) &= \sum_{1 \leq i \leq n} [\text{Rm}(\mathbf{e}_i, x, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)z, w) - \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)z, w)] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq n} [\text{Rm}(\text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)\mathbf{e}_i, x, z, w) - \text{Rm}(\text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)\mathbf{e}_i, y, z, w)] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq n} [\text{Rm}(\mathbf{e}_i, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)x, z, w) - \text{Rm}(\mathbf{e}_i, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)y, z, w)] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq n} [\text{Rm}(\mathbf{e}_i, x, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)z, w) - \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)z, w)] \\ &= \text{Rm}(\text{Ric}(x), y, z, w) - \text{Rm}(\text{Ric}(y), x, z, w) + \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Rm}(\mathbf{e}_i, \text{Rm}(x, y)\mathbf{e}_i, z, w) \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} [\text{Rm}(y, \mathbf{e}_i, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)z, w) - \text{Rm}(x, \mathbf{e}_i, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)z, w)]. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Rm}(\mathbf{e}_i, \text{Rm}(x, y)\mathbf{e}_i, z, w) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Rm}(z, w, \mathbf{e}_i, \text{Rm}(x, y)\mathbf{e}_i) \\ &= - \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Rm}(w, z, \mathbf{e}_i, \text{Rm}(x, y)\mathbf{e}_i) \\ &= - \sum_{1 \leq i \leq n} g(\text{Rm}(w, z)\mathbf{e}_i, \text{Rm}(x, y)\mathbf{e}_i) \\ &= -2 \cdot \text{Rm}^2(x, y, z, w), \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde na última igualdade usamos o lema **(L.2.3)**. Além disso,

$$2 \sum_{1 \leq i \leq n} [\text{Rm}(y, \mathbf{e}_i, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, x)z, w) - \text{Rm}(x, \mathbf{e}_i, \text{Rm}(\mathbf{e}_i, y)z, w)] = -2 \cdot \text{Rm}^\#(x, y, z, w). \quad (2.14)$$

Da arbitrariedade de x, y, z, w e de $p \in \mathcal{M}$, segue que

$$\Delta_f \text{Rm} = \text{Rm} - 2 \cdot (\text{Rm}^2 + \text{Rm}^\#), \quad (2.15)$$

e portanto **(e)** está provada. Outra maneira de escrever **(g)** é:

$$(\nabla_j \text{Ric})_{ik} - (\nabla_i \text{Ric})_{jk} = \sum_{1 \leq s \leq n} \text{Rm}_{ijks} \nabla^s f.$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} (\Delta \text{Ric})_{ik} &= \sum_{1 \leq j \leq n} \nabla^j (\nabla_j \text{Ric}_{ik}) = \sum_{1 \leq j \leq n} \nabla^j \left(\nabla_i \text{Ric}_{jk} + \sum_{1 \leq s \leq n} \text{Rm}_{ijks} \nabla^s f \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, s \leq n} \left[\nabla^j \nabla_i \text{Ric}_{jk} + (\nabla^j (\text{Rm}_{ijks})) \cdot \nabla^s f + \text{Rm}_{ijks} \cdot \nabla^j \nabla^s f \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por outro lado, usando agora a notação introduzida na observação **(O.33)**, segue da identidade de Ricci (conforme **(1.11)**) que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq n} \left[\nabla^j \nabla_i \text{Ric}_{jk} - \nabla_i \nabla^j \text{Ric}_{jk} \right] &= - \sum_{1 \leq j, \ell, m \leq n} \left[g^{j\ell} \text{Rm}_{i\ell j}{}^m \text{Ric}_{mk} + g^{j\ell} \text{Rm}_{i\ell k}{}^m \text{Ric}_{jm} \right] \\ &= \sum_{1 \leq j, \ell, m, t \leq n} \left[g^{j\ell} g^{mt} (\text{Rm}_{\ell ijt} \text{Ric}_{mk} + \text{Rm}_{\ell ikt} \text{Ric}_{mt}) \right] \\ &= \sum_{1 \leq j, t \leq n} \left[\text{Rm}_{ijt}^j \text{Ric}_k^t + \text{Rm}_{ikt}^j \text{Ric}_j^t \right] = \sum_{1 \leq j, s \leq n} \left[\text{Rm}_{ijs}^j \text{Ric}_k^s + \text{Rm}_{iks}^j \text{Ric}_j^s \right]. \end{aligned}$$

Agora, pela segunda identidade de Bianchi, temos também:

$$\begin{aligned} \nabla_k \text{Rm}_{\ell sij} + \nabla_s \text{Rm}_{klij} + \nabla_\ell \text{Rm}_{skij} &= 0; \\ \implies \nabla_k \text{Rm}_{\ell sij} - \nabla_s \text{Rm}_{\ell kij} &= \nabla_\ell \text{Rm}_{ijks}; \\ \implies \sum_{1 \leq j \leq n} \left[\nabla_k \text{Rm}_{sij}^j - \nabla_s \text{Rm}_{kij}^j \right] &= \sum_{1 \leq j \leq n} \nabla^j \text{Rm}_{ijks}. \end{aligned}$$

A equação **(2.16)** se escreve então como:

$$\begin{aligned} (\Delta \text{Ric})_{ik} &= \sum_{1 \leq j, s \leq n} \left[\nabla_i \nabla^j \text{Ric}_{jk} + \text{Rm}_{ijs}^j \text{Ric}_k^s + (\nabla_k \text{Rm}_{sij}^j) \cdot \nabla^s f - (\nabla_s \text{Rm}_{kij}^j) \cdot \nabla^s f + \text{Rm}_{ijks} \cdot \nabla^j \nabla^s f \right] \\ &= \sum_{1 \leq j, s \leq n} \left[\nabla_i \nabla^j \text{Ric}_{jk} + \text{Ric}_{is} \text{Ric}_k^s + \text{Rm}_{iks}^j \text{Ric}_j^s - (\nabla_k \text{Ric}_{si}) \cdot \nabla^s f + \text{Rm}_{ijks} \cdot \nabla^j \nabla^s f \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pela segunda identidade de Bianchi contraída vista no capítulo anterior (conforme a observação (O.49)), temos que

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \operatorname{Ric})_i &= \nabla^j \operatorname{Ric}_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i \operatorname{Scal}; \\ \implies \nabla_i \nabla^j \operatorname{Ric}_{jk} &= \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_k \operatorname{Scal}.\end{aligned}$$

E pela equação que define um sóliton de Ricci gradiente, temos

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq j, s \leq n} \operatorname{Rm}_{ijks} \nabla^j \nabla^s f &= \sum_{1 \leq j, s, \ell, t \leq n} \left[\operatorname{Rm}_{ijks} g^{j\ell} g^{st} \left(\frac{1}{2} g_{\ell t} - \operatorname{Ric}_{\ell t} \right) \right] \\ &= \sum_{1 \leq j, s, \ell, t \leq n} \operatorname{Rm}_{ijks} \left(\frac{1}{2} g^{j\ell} \delta_\ell^s - \operatorname{Ric}^{js} \right) = \sum_{1 \leq j, s \leq n} \operatorname{Rm}_{ijks} \left(\frac{1}{2} g^{js} - \operatorname{Ric}^{js} \right) \\ &= \sum_{1 \leq j, s \leq n} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Ric}_{ik} - \operatorname{Rm}_{ijks} \operatorname{Ric}^{js} \right].\end{aligned}$$

Note também que:

$$(\nabla_{\nabla f} \operatorname{Ric})_{ik} = \nabla_{\nabla f} (\operatorname{Ric}_{ik}) = \sum_{1 \leq s \leq n} \nabla_{(\nabla^s f) \cdot \mathbf{e}_s} \operatorname{Ric}_{ik} = (\nabla^s f) \cdot \nabla_s \operatorname{Ric}_{ik}.$$

Assim, a equação (2.17) se escreve como

$$\begin{aligned}(\Delta \operatorname{Ric})_{ik} &= (\nabla_{\nabla f} \operatorname{Ric})_{ik} + \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_k \operatorname{Scal} + \frac{1}{2} \operatorname{Ric}_{ik} + \sum_{1 \leq j, s \leq n} \left[\operatorname{Ric}_{is} \operatorname{Ric}_k^s + \underbrace{\operatorname{Rm}_{iksj}^s \operatorname{Ric}_j^s}_{= -\operatorname{Rm}_{ijks} \operatorname{Ric}^{js}} - (\nabla_k \operatorname{Ric}_{si}) \cdot \nabla^s f \right] \\ &\quad - \sum_{1 \leq j, s \leq n} \operatorname{Rm}_{ijks} \operatorname{Ric}^{js}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Pela representação em coordenadas de (b), vemos também que

$$\begin{aligned}\nabla_i \operatorname{Scal} &= 2 \sum_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Ric}_{ij} \nabla^j f \implies 0 = \frac{1}{2} \nabla_k \left(\nabla_i \operatorname{Scal} - \sum_{1 \leq s \leq n} 2 \operatorname{Ric}_{is} \nabla^s f \right) \\ \implies \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i \operatorname{Scal} &- \sum_{1 \leq s \leq n} (\nabla_k \operatorname{Ric}_{is}) \cdot \nabla^s f = \sum_{1 \leq s \leq n} \operatorname{Ric}_{is} \cdot \nabla^s \nabla_k f.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i \operatorname{Scal} - \sum_{1 \leq s \leq n} (\nabla_k \operatorname{Ric}_{is}) \cdot \nabla^s f &= \sum_{1 \leq s, \ell \leq n} \operatorname{Ric}_{is} g^{s\ell} \nabla_\ell \nabla_k f \\ &= \sum_{1 \leq s, \ell \leq n} \operatorname{Ric}_{is} g^{s\ell} \left(\frac{1}{2} g_{\ell k} - \operatorname{Ric}_{\ell k} \right) \\ &= \sum_{1 \leq s \leq n} \operatorname{Ric}_{is} \left(\frac{1}{2} \delta_k^s - \operatorname{Ric}_k^s \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Ric}_{ik} - \sum_{1 \leq s \leq n} \operatorname{Ric}_{is} \operatorname{Ric}_k^s.\end{aligned}$$

Portanto, a equação (2.18) se escreve como:

$$\begin{aligned}
(\Delta \text{Ric})_{ik} &= (\nabla_{\nabla f} \text{Ric})_{ik} + \frac{1}{2} \text{Ric}_{ik} - \sum_{1 \leq j, s \leq n} \left[2 \text{Rm}_{ijks} \text{Ric}^{js} + \text{Ric}_{is} \text{Ric}_k^s + \text{Ric}_{is} \cdot \nabla^s \nabla_k f \right] \\
&= (\nabla_{\nabla f} \text{Ric})_{ik} + \frac{1}{2} \text{Ric}_{ik} - \sum_{1 \leq j, s \leq n} \left[2 \text{Rm}_{ijks} \text{Ric}^{js} + \text{Ric}_{is} \text{Ric}_k^s - \text{Ric}_{is} \text{Ric}_k^s \right] + \frac{1}{2} \text{Ric}_{ik} \\
&= (\nabla_{\nabla f} \text{Ric})_{ik} + \text{Ric}_{ik} - 2 \sum_{1 \leq j, s \leq n} \text{Rm}_{ijks} \text{Ric}^{js}.
\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$(\Delta_f \text{Ric})_{ij} = \Delta_f(\text{Ric}_{ij}) = \text{Ric}_{ij} - 2 \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \text{Rm}_{ik\ell j} \text{Ric}_{k\ell},$$

e portanto (f) está demonstrada. Finalmente, tomando o traço na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} (\Delta_f \text{Ric})_{ij} &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Delta_f(g^{ij} \text{Ric}_{ij}) = \Delta_f \text{Scal} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} \text{Ric}_{ij} - 2 \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq n} g^{ij} \text{Rm}_{ik\ell j} \text{Ric}_{k\ell} \\
&= \text{Scal} - 2 \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} (\text{Ric}_{k\ell})^2 \\
&= \text{Scal} - 2 \|\text{Ric}\|^2,
\end{aligned}$$

de forma que (c) está demonstrada. ■

Capítulo 3

Estimativas de curvatura

Neste capítulo apresentaremos as demonstrações dos Teoremas **(T.3.1)** e **(T.3.2)** (de autoria de Huai-Dong Cao, Ernani Ribeiro Jr e Detang Zhou, expostas originalmente em [6]). O primeiro Teorema, o **(T.3.1)** nos fornece uma espécie de classificação (em dimensão 4) dos sólitons de Ricci gradiente completos e shrinking que satisfazem estimativas de curvatura apropriadas, enquanto que o segundo Teorema, **(T.3.2)**, nos dá algumas estimativas de curvatura para Ric e Rm sob a hipótese de um certo controle sobre Scal.

À primeira vista, as subseções a seguir podem parecer um pouco “áridas” e deslocadas do trabalho. Porém, elas desempenham um papel crucial em estabelecer os itens delineados a seguir, que por sua vez são importantíssimos às demonstrações dos Teoremas **(T.3.1)** e **(T.3.2)**:

- a decomposição do tensor curvatura Riemanniano em suas componentes correspondentes ao tensor de Weyl e ao tensor de Einstein, e a sua importante particularização em dimensão 4, que está intimamente ligada com a decomposição mencionada no item a seguir;
- a decomposição do fibrado de 2-formas de uma variedade quadridimensional em autofibrados invariantes pelo operador estrela de Hodge.

3.1 Prólogo

Existem vários motivos que fazem quatro dimensões um caso muito especial. Um deles, conforme veremos em breve, está ligado à importantíssima igualdade

$$2 + 2 = 4.$$

De fato, tal igualdade nos permite uma decomposição do fibrado de 2-formas de uma variedade diferenciável em suas componentes duais e anti-auto-duais (por exemplo, a 2-forma de curvatura de uma variedade Riemanniana, que toma valores em um certo fibrado, admite tal decomposição). Antes, iremos estabelecer algumas decomposições importantes, que valem em qualquer dimensão.

3.1 Algumas decomposições importantes

O objetivo principal dessa seção é estabelecer (com base nas exposições em [13], [54] e [3]) as decomposições do tensor curvatura em dimensão qualquer e do fibrado de 2-formas em dimensão 4. Veremos que tais decomposições têm um papel crucial nas demonstrações de todos os nossos resultados. Precisaremos de algumas definições e lemas antes.

Definição (D.3.1). Um tensor de tipo curvatura em um espaço vetorial real \mathbb{V} é um tensor $R \in \mathcal{T}_4^0(\mathbb{V})$ satisfazendo as simetrias:

$$(a) \quad R(x, y, z, w) = -R(y, x, z, w) = -R(x, y, w, z);$$

$$(b) \quad R(x, y, z, \cdot) + R(y, z, x, \cdot) + R(z, x, y, \cdot) = 0.$$

sejam quais forem $x, y, z, w \in \mathbb{V}$. Denotaremos o espaço vetorial de todos os tensores de tipo curvatura em \mathbb{V} por $\mathcal{R}(\mathbb{V})$.

Observação (O.62). Assumiremos daqui em diante que \mathbb{V} está munido de um produto interno, denotado por g ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nesse contexto, definimos a norma $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|v\| = \sqrt{g(v, v)}, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Definição (D.3.2). Dado $R \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$, definimos a R -curvatura seccional de um plano bi-dimensional $\sigma = \text{span}(u, v) \subset \mathbb{V}$ como

$$K^R(\sigma) = \frac{R(u, v, v, u)}{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}.$$

Note que a independência linear de u e v força o denominador da expressão acima a ser não-nulo. Além disso, é simples checar que se $x, y \in \mathbb{V}$ são tais que $\text{span}(x, y) = \sigma$, então $K^R(x, y) = K^R(u, v)$, de forma que $K^R(\sigma)$ está bem definida.

Observação (O.63). Em uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}^n, g) , definimos o fibrado de tensores de tipo curvatura em \mathcal{M}^n como

$$\mathcal{R}(T\mathcal{M}) \doteq \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{R}(T_p\mathcal{M}).$$

Observação (O.64). É comum denominar (b) como a “primeira identidade de Bianchi” (conhecida da geometria Riemanniana). Juntas, (a) e (b) implicam ainda a seguinte *simetria por pares*:

$$(c) \quad R(x, y, z, w) = R(z, w, x, y) \quad \forall x, y, z, w \in \mathbb{V}.$$

De fato, dados quaisquer $x, y, z, w \in \mathbb{V}$, temos

$$\begin{aligned} 2 \cdot R(x, y, z, w) &\stackrel{(a)}{=} R(x, y, z, w) + R(y, x, w, z) \\ &\stackrel{(b)}{=} -R(y, z, x, w) - R(z, x, y, w) - R(x, w, y, z) - R(w, y, x, z) \\ &\stackrel{(a)}{=} -R(z, y, w, x) - R(x, z, w, y) - R(w, x, z, y) - R(y, w, z, x) \\ &\stackrel{(b)}{=} R(w, z, y, x) + R(z, w, x, y) \\ &\stackrel{(a)}{=} 2 \cdot R(z, w, x, y). \end{aligned}$$

Considere agora o 4-tensor $g \oslash g$, definido por

$$(g \oslash g)(x, y, z, w) \doteq g(y, z)g(x, w) - g(x, z)g(y, w) \quad \forall z, w \in \mathbb{V}.$$

Esse é o nosso primeiro exemplo de um tensor de tipo curvatura: $g \oslash g \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$. A simetria (a) da definição (D.3.1) é imediata, enquanto que (b) da mesma definição segue de um cálculo direto, com os seis termos iniciais se cancelando em pares. Chamaremos $g \oslash g$ da *curvatura fundamental* de (\mathbb{V}, g) . A fim de extrair ainda mais exemplos dessa ideia, veremos $g \oslash g$ como uma forma quadrática na variável g e usaremos polarização novamente. Lembramos que se Q é uma forma quadrática, podemos recuperar a forma bilinear associada B pela relação

$$B(x, y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2},$$

de forma que $Q(x) = B(x, x)$. Sejam então $T, S \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{V})$. Temos então:

$$\begin{aligned} ((T+S) \oslash (T+S))(x, y, z, w) & - (T \oslash T)(x, y, z, w) - (S \oslash S)(x, y, z, w) = (T+S)(y, z) \cdot (T+S)(x, w) \\ & - (T+S)(x, z) \cdot (T+S)(y, w) - T(y, z) \cdot T(x, w) + T(x, z) \cdot T(y, w) - S(y, z) \cdot S(x, w) \\ & \quad \quad \quad + S(x, z) \cdot S(y, w) \\ & = T(y, z) \cdot S(x, w) + S(y, z) \cdot T(x, w) - T(x, z) \cdot S(y, w) - S(x, z) \cdot T(y, w). \end{aligned}$$

Isso motiva a

Definição (D.3.3). Sejam $T, S \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{V})$. O produto de Kulkarni-Nomizu de T e S é o tensor $T \oslash S \in \mathcal{T}_4^0(\mathbb{V})$ definido por

$$2 \cdot (T \oslash S)(x, y, z, w) = T(y, z)S(x, w) - T(x, z)S(y, w) + S(y, z)T(x, w) - S(x, z)T(y, w), \quad \forall x, y, z, w \in \mathbb{V}.$$

Temos então uma aplicação simétrica $\oslash : \mathcal{T}_2^0(\mathbb{V}) \times \mathcal{T}_2^0(\mathbb{V}) \rightarrow \mathcal{T}_4^0(\mathbb{V})$.

Observação (O.65). • Note que o fator 2 no lado esquerdo apareceu como uma consequência natural do processo de polarização.

- Fixando uma base $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{V} , temos a expressão em coordenadas:

$$2 \cdot (T \oslash S)_{ijkl} = T_{jk}S_{il} - T_{ik}S_{jl} + S_{jk}T_{il} - S_{ik}T_{jl}.$$

É fácil ver que o produto $T \oslash S$ nem sempre satisfaz a simetria (a) da definição (D.3.1), mas satisfaz a simetria (c). Iremos agora investigar quais condições em T e S garantem que $T \oslash S$ seja um tensor de tipo curvatura. Primeiramente, note que, por força bruta, vemos que (o dobro do) lado esquerdo da identidade de Bianchi para $(T \oslash S)(x, y, z, w)$ é na verdade igual à soma dos seguintes seis termos:

$$\begin{aligned} & (T(y, z) - T(z, y))S(x, w) + (T(z, x) - T(x, z))S(y, w) \\ & + (T(x, y) - T(y, x))S(z, w) + \text{(mais três termos, agora fazendo a troca } T \leftrightarrow S), \end{aligned}$$

que se anulam quando ambos T e S são tensores simétricos. Está provada então a:

Proposição (P.3.1). Sejam $T, S \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{V})$. Se T e S são ambos simétricos, então o tensor $T \hat{\wedge} S \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$ é de tipo curvatura.

Observação (O.66). • Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{V})$ o espaço de todos os tensores simétricos de tipo $(0, 2)$ em \mathbb{V} , e por $\mathcal{S}^2(\mathbb{V})$ o espaço de formas bilineares e simétricas em \mathbb{V} .

- Focar em tais simetrias nos permite dar outra interpretação do produto de Kulkarni-Nomizu. Se $R \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$, a simetria (a) nos diz que R induz uma aplicação $R' : \mathbb{V}^{\wedge 2} \times \mathbb{V}^{\wedge 2} \rightarrow \mathbb{R}$, caracterizada pela sua ação em pares de 2-lâminas como

$$R'(x \wedge y, z \wedge w) \doteq R(x, y, w, z).$$

Uma vez fixado um produto interno em $\mathbb{V}^{\wedge 2}$, fica então determinado um endomorfismo auto-adjunto $\tilde{R} \in \text{End}(\mathbb{V}^{\wedge 2})$, caracterizado por

$$\tilde{R}(x \wedge y) = \sharp(R'(x \wedge y, \bullet)).$$

Agora, a simetria (c) induz ainda mais uma aplicação $R'' : \mathbb{V}^{\wedge 2} \odot \mathbb{V}^{\wedge 2} \rightarrow \mathbb{R}$ (onde aqui \odot denota o produto simétrico) caracterizada por $R''((x \wedge y) \odot (z \wedge w)) = R(x, y, z, w)$. Por outro lado, se munirmos \mathbb{V} de um produto interno g , temos um produto interno induzido em $\mathbb{V}^{\wedge 2}$ (denotado também por g), que age em 2-lâminas via

$$g(x \wedge y, z \wedge w) = \det \begin{pmatrix} g(x, z) & g(x, w) \\ g(y, z) & g(y, w) \end{pmatrix} = g(x, z)g(y, w) - g(x, w)g(y, z).$$

Esse produto interno induzido é exatamente $-(g \hat{\wedge} g)''$. Segue que $\widetilde{g \hat{\wedge} g} = -\text{Id}$. Portanto, $\hat{\wedge}$ é em certo sentido a aplicação identidade (a menos de sinal, dependendo das convenções adotadas).

Com essa “mini-fábrica” de exemplos que $\hat{\wedge}$ nos fornece em mente, vamos seguir em frente e estabelecer algumas propriedades algébricas de tensores de tipo curvatura.

Proposição (P.3.2). Se $\dim(\mathbb{V}) = n$, então $12 \cdot \dim(\mathcal{R}(\mathbb{V})) = n^2(n^2 - 1)$.

Demonstração: Seja $R \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$. Uma vez que

$$R_{ijkl} = R_{klij},$$

então denotando $p = (i, j)$, $q = (k, \ell)$, podemos ver R como uma matriz simétrica $(R_{pq})_{1 \leq p, q \leq n}$ onde os índices p, q percorrem uma matriz anti-simétrica, tendo em vista que

$$R_{jikl} = -R_{ijkl};$$

$$R_{ijlk} = -R_{ijkl}.$$

Como a dimensão do subespaço (de \mathbb{R}^{n^2}) das matrizes antisimétricas $n \times n$ (em outras palavras, o número de componentes independentes de uma matriz anti-simétrica $n \times n$) é

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

e o subespaço das matrizes simétricas $n \times n$ tem dimensão

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

segue que $(R_{pq})_{1 \leq p, q \leq n}$ vista como uma matriz simétrica tem

$$\frac{m(m+1)}{2} \text{ componentes independentes, onde } m = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Portanto, sem levar em conta a simetria da identidade de Bianchi, temos

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right)}{2} = \frac{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n}{8}$$

componentes independentes a serem consideradas. No caso geral, como há $\binom{n}{4}$ maneiras de escolher 4 índices distintos e a identidade de Bianchi elimina um destes, o número de componentes independentes é dado por

$$\frac{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n}{8} - \frac{n!}{(n-4)! \cdot 24} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}.$$

■

Observação (O.67). Temos então que em dimensão 1 vale $\mathcal{R}(\mathbb{V}) = \{0\}$ (isso é óbvio também das anti-simetrias que um tensor de tipo curvatura deve satisfazer, que em dimensão 1 o obrigam a se anular). Em outras palavras, não é possível distinguir duas curvas por propriedades puramente geométricas (todas são localmente isométricas a \mathbb{R}). Em dimensão 2 temos $\dim(\mathcal{R}(\mathbb{V})) = 1$, de forma que $\mathcal{R}(\mathbb{V}) = \mathbb{R}(g \otimes g)$, o que implica que $\text{Rm} = Kg \otimes g$ para alguma constante $K \in \mathbb{R}$. Tomando uma base ortonormal de \mathbb{V} , digamos $\{e_1, e_2\}$, vemos que $K = \text{Rm}(e_1, e_2, e_1, e_2)$, que é a curvatura seccional do plano gerado por e_1 e e_2 , ou seja a curvatura Gaussiana em p (uma vez fixada uma superfície S , um ponto $p \in S$ e fazendo $\mathbb{V} = T_p S$).

Nosso objetivo agora será decompor (em qualquer dimensão) o espaço de tensores de tipo curvatura como algo da forma

$$\mathcal{R}(\mathbb{V}) = \mathbb{R}(g \otimes g) \oplus (\text{alguns fatores extras}).$$

A fim de descrever tais fatores extras, precisaremos relembrar a noção de *contração*, e nos focar em particular na contração conhecida como a *contração de Ricci*, a ser definida em breve.

Podemos analisar quais são todas as contrações possíveis de um tensor de tipo curvatura $R \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$. Uma vez que R é anti-simétrico tanto no primeiro quanto no último par, segue que $\text{tr}_{1,2}(R) = \text{tr}_{3,4}(R) = 0$. Além disso, aplicando a simetria **(a)** da definição **(D.3.1)** vemos que $\text{tr}_{2,4}(R) = \text{tr}_{1,3}(R)$. Finalmente, temos também $\text{tr}_{2,3}(R) = -\text{tr}_{1,3}(R) = \text{tr}_{1,4}(R)$. Em outras palavras, $\text{tr}_{1,4}(R)$ é (a menos de sinal) a única contração não trivial de R .

Definição (D.3.4). Seja $R \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$. A *contração de Ricci* de R é o tensor $\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{V})$ dado por $\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) \doteq \text{tr}_{1,4}(R)$. A *curvatura escalar* de R é o número $\text{SC}(R) \doteq \text{tr}_{1,2}(\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R))$.

Observação (O.68). • Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana. Estendendo $\text{Ric}_{\mathbb{V}}$ a todo $\mathcal{R}(T\mathcal{M})$ de maneira óbvia, é claro que $\text{Ric}_{\mathbb{V}}(\text{Rm}) = \text{Ric}$ e $\text{SC}(\text{Rm}) = \text{Scal}$, que são os tensores de Ricci e a curvatura escalar, respectivamente.

- Uma vez que $R(z, x, y, w) = R(x, z, w, y) = R(w, y, x, z)$, a simetria de g nos permite tomar o traço com respeito ao par (z, w) e obter $\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R)(x, y) = \text{Ric}_{\mathbb{V}}(R)(y, x)$, de forma que $\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$. Em coordenadas, $(\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R))_{ij} = \sum_{1 \leq \ell, m \leq n} g^{\ell m} R_{\ell i j m}$ e $\text{SC}(R) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} (\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R))_{ij}$.

Exemplo (E.3.1). Considere a curvatura fundamental $g \oslash g$, dada em termos de uma base pela expressão $(g \oslash g)_{ijkl} = g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl}$. A contração de Ricci é então dada por

$$[\text{Ric}_{\mathbb{V}}(g \oslash g)]_{jk} = \sum_{1 \leq i, \ell \leq n} (g^{i\ell} g_{jk} g_{i\ell} - g^{i\ell} g_{ik} g_{j\ell}) = n g_{jk} - \sum_{1 \leq \ell \leq n} \delta_k^\ell g_{j\ell} = (n-1)g_{jk},$$

e portanto

$$\text{Ric}_{\mathbb{V}}(g \oslash g) = (n-1)g.$$

Em seguida, temos também

$$\text{SC}(g \oslash g) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} (n-1)g_{ij} = n(n-1).$$

E para um produto geral, temos a seguinte:

Proposição (P.3.3). Sejam $T, S \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$, e considere $T \oslash S \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$. Então:

$$2 \cdot [\text{Ric}_{\mathbb{V}}(T \oslash S)](x, y) = \text{tr}_{1,2}(S)T(x, y) - \text{tr}_{1,4}(T \otimes S)(y, x) + \text{tr}_{1,2}(T)S(x, y) - \text{tr}_{1,4}(S \otimes T)(y, x).$$

Demonstração: Um cálculo direto nos fornece

$$\begin{aligned} 2 \cdot [\text{Ric}_{\mathbb{V}}(T \oslash S)]_{jk} &= \sum_{1 \leq i, \ell \leq n} (g^{i\ell} T_{jk} S_{i\ell} - g^{i\ell} T_{ik} S_{j\ell} + g^{i\ell} S_{jk} T_{i\ell} - g^{i\ell} S_{ik} T_{j\ell}) \\ &= \left[\sum_{1 \leq i, \ell \leq n} (g^{i\ell} S_{i\ell}) \right] \cdot T_{jk} + \sum_{1 \leq i, \ell \leq n} [-g^{i\ell} (T \otimes S)_{ikj\ell} + (g^{i\ell} T_{i\ell}) S_{jk} - g^{i\ell} (S \otimes T)_{ikj\ell}] \\ &= \text{tr}_{1,2}(S)T_{jk} - \text{tr}_{1,4}(T \otimes S)_{kj} + \text{tr}_{1,2}(T)S_{jk} - \text{tr}_{1,4}(S \otimes T)_{kj}. \end{aligned}$$

■

Como consequência, temos o seguinte importante caso particular:

Corolário (C.3.1). Seja $T \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$. Então

$$2 \cdot \text{Ric}_{\mathbb{V}}(T \oslash g) = (n-2)T + \text{tr}_{1,2}(T)g,$$

e

$$\text{SC}(T \oslash g) = (n-1) \text{tr}_{1,2}(T).$$

Demonstração: Como na demonstração anterior, temos

$$\begin{aligned}
2 \cdot [\text{Ric}_V(T \otimes g)]_{jk} &= \sum_{1 \leq i, \ell \leq n} (g^{i\ell} T_{jk} g_{i\ell} - g^{i\ell} T_{ik} g_{j\ell} + g^{i\ell} g_{jk} T_{i\ell} - g^{i\ell} g_{ik} T_{j\ell}) \\
&= nT_{jk} - \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \delta_j^i T_{ik} \right) + \text{tr}_{1,2}(T) g_{jk} - \left(\sum_{1 \leq \ell \leq n} \delta_k^\ell T_{j\ell} \right) \\
&= (n-2)T_{jk} + \text{tr}_{1,2}(T) g_{jk}.
\end{aligned}$$

E para a segunda parte, basta notar que

$$2 \cdot \text{SC}(T \otimes g) = (n-2) \text{tr}_{1,2}(T) + \text{tr}_{1,2}(T)n = (2n-2) \text{tr}_{1,2}(T).$$

■

Observação (O.69). Assim como o espaço $\mathbb{R}(g \otimes g)$ apareceu anteriormente, vamos também fixar a notação

$$g \otimes \mathcal{S}(\mathbb{V}) \doteq \{g \otimes T \in \mathcal{R}(\mathbb{V}) \mid T \in \mathcal{S}(\mathbb{V})\},$$

e

$$g \otimes \mathcal{S}(\mathbb{V})_0 \doteq \{g \otimes T \in \mathcal{R}(\mathbb{V}) \mid T \in \mathcal{S}(\mathbb{V}) \text{ satisfaz } \text{tr}_{1,2}(T) = 0\}.$$

Corolário (C.3.2). Se $n \geq 3$, as aplicações $g \otimes _ : \mathcal{S}(\mathbb{V}) \rightarrow g \otimes \mathcal{S}(\mathbb{V})$ e $\text{Ric}_V : g \otimes \mathcal{S}(\mathbb{V}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{V})$ são isomorfismos.

Demonstração: Verificaremos inicialmente que a composição $(\text{Ric}_V \circ (g \otimes _)) : \mathcal{S}(\mathbb{V}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{V})$ é um isomorfismo. Para isso, basta verificar que a mesma é injetora. Suponha então que $T \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ é um tensor que satisfaz $\text{Ric}_V(g \otimes T) = 0$. Então $(n-2)T + \text{tr}_{1,2}(T)g = 0$. Tomando o traço, obtemos $(2n-2) \text{tr}_{1,2}(T) = 0$, de forma que $\text{tr}_{1,2}(T) = 0$ e $(n-2)T = 0$. Logo $T = 0$, como desejado. Segue que ambos $g \otimes _$ e Ric_V são injetoras. Mas $g \otimes _$ é sobrejetora por definição, e portanto é também um isomorfismo. Uma vez que $g \otimes _$ e a composição com Ric_V são isomorfismos, segue que Ric_V é um isomorfismo também.

■

Antes de seguir em frente, lembramos que dado qualquer endomorfismo $A \in \text{End}(\mathbb{V})$, a *parte livre de traço* de A é definida como o endomorfismo A_0 dado por

$$A_0 = A - \frac{\text{tr}(A)}{n} \text{Id}_V.$$

Preservando a mesma notação do exemplo (E.1.7), podemos converter isso a uma relação entre aplicações bilineares pela relação

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{\text{tr}_{1,2}(\alpha)}{n} g,$$

de forma que $\text{tr}(A_0) = \text{tr}_{1,2}(\alpha_0) = 0$. Essa ideia nos permitirá construir objetos mais simples associados a um tensor de tipo curvatura $R \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$. Por exemplo, temos a

Definição (D.3.5). Seja $R \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$. O *tensor de Einstein* de R é o tensor $E(R) \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ definido por

$$E(R) = \text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) - \frac{\text{SC}(R)}{n}g.$$

Observação (O.70). Como sugerido pelo nome, o tensor E nasceu da física. Nas palavras de Carl Sagan, o Cosmos é tudo o que existe, existiu ou existirá; e a teoria da relatividade geral de Einstein modela o Cosmos como uma variedade pseudo-Riemanniana de dimensão 4 (com 3 dimensões espaciais e 1 temporal), cujos efeitos gravitacionais podem ser explicados pela curvatura de tal variedade, que é comumente chamada de *espaço-tempo*. Explicitamente, como visto em [21], em tal modelo a gravidade não pode ser considerada como uma força no sentido convencional: na verdade, ela é uma propriedade intrínseca do espaço-tempo e “nasce” como resultado de sua curvatura local, que por sua vez reage à distribuição de massa-energia, momento e stress de uma região espacial via a seguinte equação:

$$\text{Ric} - \frac{1}{2} \cdot \text{Scal} \cdot g + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4} T, \quad (3.1)$$

onde T denota o tensor de energia-momento do espaço-tempo e as constantes Λ, G e c denotam, respectivamente, a *constante cosmológica* do modelo, a constante Newtoniana de gravitação, e a velocidade da luz no vácuo. Na verdade, a convenção de denotar a métrica Riemanniana por g foi originada por Einstein e Grossman por volta de 1910-13, que perceberam que as componentes $\{g_{\mu\nu}\}_{1 \leq \mu, \nu \leq 4}$ que determinam a geometria do espaço-tempo pareciam depender da quantidade de matéria em gravitação da região estudada. E como também visto em [21], há um sentido preciso em que as quantidades $\{g_{\mu\nu}\}_{1 \leq \mu, \nu \leq 4}$ podem ser vistas como potenciais gravitacionais. Geralmente, a equação (3.1) é apresentada em coordenadas locais, na forma

$$\text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot \text{Scal} \cdot g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

que ao todo constituem um sistema de 10 equações diferenciais parciais (onde o 10 vem do fato de que os tensores envolvidos têm 10 componentes independentes, conforme visto na observação (O.73)). Einstein originalmente introduziu a constante Λ em 1917, visando contra-balancear o efeito da gravidade e modelar um universo estático, que era a noção mais aceita na época. Após a confirmação de Edwin Hubble que o universo estava se expandindo, Einstein removeu tal constante, escrevendo a equação (3.1) como

$$\text{Ric} - \frac{1}{2} \text{Scal} g = \frac{8\pi G}{c^4} T.$$

No caso particular $T \equiv 0$ a equação se reduz à *equação de campo para o vácuo de Einstein* e obtemos (após tomar o traço dos dois lados) $\text{Scal} \equiv 0$, $\text{Ric} \equiv 0$ e $E \equiv 0$. Uma variedade Riemanniana que satisfaz $E \equiv 0$ (igualdade motivada, de maneira grosseira, pela ideia “curvatura = gravidade”) é chamada uma *variedade de Einstein*. É fácil ver que tal definição coincide com a definição usual de variedades de Einstein encontrada na literatura.

Exemplo (E.3.2). Para a curvatura fundamental de (\mathbb{V}, g) , temos

$$E(g \otimes g) = \text{Ric}_{\mathbb{V}}(g \otimes g) - \frac{\text{SC}(g \otimes g)}{n}g = (n-1)g - \frac{n(n-1)}{n}g = 0.$$

No que segue, da mesma maneira em que construímos a parte livre de traço de $\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R)$, gostaríamos de construir a parte livre de Ricci-traço de R . Sendo assim, para motivar a próxima definição, procuraremos por um tensor $W(R)$ no núcleo de $\text{Ric}_{\mathbb{V}}$ da forma particular

$$W(R) = R - \lambda(g \otimes h(R)).$$

Será conveniente também procurar por $h(R)$ da forma $h(R) = \text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) - \mu g$ para algum $\mu \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo então é encontrar λ e μ que realizem essa construção. Tomando o traço na expressão para $W(R)$, obtemos $0 = \text{Ric}_{\mathbb{V}}(W(R)) = \text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) - \lambda \text{Ric}_{\mathbb{V}}(g \otimes h(R))$, e portanto

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) = \lambda \text{Ric}_{\mathbb{V}}(g \otimes h(R)) &= \frac{\lambda}{2}((n-2)h(R) + \text{tr}_{1,2}(h(R))g) \\ &= \frac{\lambda}{2}((n-2)(\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) - \mu g) + (\text{SC}(R) - n\mu)g) \\ &= \frac{\lambda}{2}((n-2)\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) + (\text{SC}(R) - 2(n-1)\mu)g). \end{aligned}$$

Vemos então que definindo

$$\mu = \frac{\text{SC}(R)}{2n-2},$$

e

$$\lambda = \frac{2}{n-2}.$$

concluimos o propósito desejado.

Definição (D.3.6). Seja $R \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$.

(a) O *tensor de Schouten* de R é $h(R) \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ dado por

$$h(R) = \text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) - \frac{\text{SC}(R)}{2(n-1)}g.$$

(b) O *tensor de Weyl* de R é $W(R) \in \mathcal{R}(\mathbb{V})$ dado (quando $n > 2$) por

$$W(R) = R - \frac{2}{n-2}(g \otimes h(R)).$$

Definiremos também $\mathcal{W}(\mathbb{V}) = \{W \in \mathcal{R}(\mathbb{V}) \mid \text{Ric}_{\mathbb{V}}(W) = 0\}$.

Observação (O.71). Pela sua construção, o tensor de Weyl tem as mesmas simetrias do tensor de curvatura Riemanniano, de forma que:

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= -W_{jikl} = -W_{ijlk} = W_{jilk} = W_{klij}; \\ W_{ijkl} + W_{iklj} + W_{iljk} &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, todos os seus traços se anulam, logo

$$\sum_{1 \leq i, k \leq n} g^{j\ell} W_{ijkl} = 0,$$

sejam quais forem $1 \leq i, k \leq n$ fixados, donde segue que

$$W_{1111} + W_{1212} + W_{1313} = 0,$$

e portanto

$$W_{1212} = -W_{1313} = W_{2323} = -W_{2121} = -W_{1212} \implies W_{1212} = 0.$$

Também temos

$$W_{1213} + W_{2223} + W_{3233} = 0 \implies W_{1213} = 0,$$

mostrando então que $W_{ijkl} = 0$ sempre que quaisquer dois índices são iguais. Como em dimensão 3 só há 3 possíveis escolhas para cada índice, $W \equiv 0$ em uma variedade tridimensional. Pela proposição (P.3.4), segue que em dimensão ≤ 3 , Ric determina completamente Rm.

Observação (O.72). • É comum denotar o tensor de Weyl de uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}^n, g) por C ao invés de W . Como mencionado em [15], isso se justifica pelo fato de que W é um invariante conforme da métrica e determina se \mathcal{M} é (localmente) conformemente plana: em dimensão $n \geq 4$, uma condição necessária e suficiente para que \mathcal{M} seja (localmente) conformemente plana é que W se anule.

- Quando $n \geq 3$, temos que $W = \text{Rm}$ se e somente se $\text{Ric} = 0$. De fato, se $\text{Ric} = 0$, é claro que $\text{Scal} = 0$ e $h = 0$, de forma que $W = \text{Rm}$. Reciprocamente, se $W = \text{Rm}$, o corolário (C.3.2) garante que $h = 0$, assim temos $\text{tr}_{1,2}(h) = 0$ e portanto $\text{Scal} = 0$, garantindo (pela definição de h) que $\text{Ric} = 0$.

Exemplo (E.3.3). Tome $K \in \mathbb{R}$ e considere $R = Kg \otimes g$. Já vimos no exemplo (E.3.1) que nesse caso $\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) = (n-1)Kg$, e portanto $\text{SC}(R) = n(n-1)K$. Logo, temos

$$h(R) = (n-1)Kg - \frac{n(n-1)K}{2(n-1)}g = \frac{n-2}{2}Kg,$$

e também

$$W = Kg \otimes g - \frac{2}{n-2}g \otimes \left(\frac{n-2}{2}Kg\right) = Kg \otimes g - Kg \otimes g = 0.$$

Exemplo (E.3.4). Dado $T \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$, considere $R = g \otimes T$. Já vimos no corolário (C.3.1) que, nesse caso,

$$\text{Ric}_{\mathbb{V}}(R) = \frac{1}{2}((n-2)T + \text{tr}_{1,2}(T)g),$$

e

$$\text{SC}(R) = (n-1)\text{tr}_{1,2}(T).$$

Portanto, segue que

$$h(R) = \frac{1}{2}((n-2)T + \text{tr}_{1,2}(T)g) - \frac{(n-1)\text{tr}_{1,2}(T)}{2(n-1)}g = \frac{n-2}{2}T,$$

e

$$W(R) = g \otimes T - \frac{2}{n-2}g \otimes \left(\frac{n-2}{2}T\right) = g \otimes T - g \otimes T = 0,$$

assim como

$$E(R) = \left(\frac{n-2}{2}\right) \left(T - \frac{g}{n}\right).$$

Os dois exemplos anteriores são casos particulares da seguinte:

Proposição (P.3.4). *Seja (\mathcal{M}^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n . Então $\mathcal{R}(T\mathcal{M})$ admite a seguinte decomposição ortogonal:*

$$\mathcal{R}(T\mathcal{M}) = \mathbb{R}(g \otimes g) \oplus (g \otimes \mathcal{S}(T\mathcal{M})_0) \oplus \mathcal{W}(T\mathcal{M}).$$

A fortiori, a decomposição explícita do tensor curvatura de \mathcal{M} é dada por:

$$\text{Rm} = \frac{\text{Scal}}{n(n-1)}(g \otimes g) + \frac{2}{n-2}(g \otimes E) + W.$$

Demonstração: Por construção, temos

$$\begin{aligned} R &= \frac{2}{n-2}g \otimes h + W \\ &= \frac{2}{n-2}g \otimes \left(\text{Ric}_v - \frac{\text{SC}}{2(n-1)g}\right) + W \\ &= \frac{2}{n-2}g \otimes \left(E + \frac{\text{SC}}{n}g - \frac{\text{SC}}{2(n-1)g}\right) + W \\ &= \frac{2}{n-2}g \otimes \left(E + \frac{(n-2)\text{SC}}{2n(n-1)}g\right) + W \\ &= \frac{\text{SC}}{n(n-1)}g \otimes g + \frac{2}{n-2}g \otimes E + W. \end{aligned}$$

Pelo corolário (C.3.2), temos também

$$\mathbb{R}(g \otimes g) \cap (g \otimes \mathcal{S}(T_p\mathcal{M})_0) = \{0\} \quad \forall p \in \mathcal{M};$$

e

$$(g \cap \mathcal{S}(T_p\mathcal{M})) \cap \mathcal{W}(T_p\mathcal{M}) = \{0\} \quad \forall p \in \mathcal{M};$$

de forma que as somas são diretas. A ortogonalidade segue facilmente ao fazer o cálculo em um referencial ortonormal usando o fato de que E e W são livres de traço. ■

Observação (O.73). Equivalentemente,

$$\mathcal{R}(\mathbb{V}) = (g \wedge \mathcal{S}^2(\mathbb{V})) \oplus \mathcal{W}(\mathbb{V}),$$

e portanto

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} = \frac{n(n+1)}{2} + \dim \mathcal{W}(\mathbb{V}).$$

Logo,

$$\dim \mathcal{W}(\mathbb{V}) = \frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}.$$

Em particular, em dimensão 4 as 20 componentes independentes do tensor curvatura vêm de 10 componentes independentes do tensor de Ricci e 10 do tensor de Weyl.

Observação (O.74). Como já provamos, em dimensão $n = 3$ temos $W = 0$, de forma que Ric determina completamente Rm. Conforme visto em [12], esse é um fato crucial à prova da conjectura de Poincaré.

Observação (O.75). Uma consequência imediata da proposição (P.3.4) é que variedades de Einstein localmente conformemente planas (ou, equivalentemente, localmente conformes à uma variedade de curvatura seccional constante) têm curvatura seccional constante. Para uma demonstração alternativa desse fato, pode-se consultar [29].

3.1 Algumas importantes particularidades de dimensão 4

Proposição (P.3.5). *Seja (\mathcal{M}^4, g) uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 4. Então o fibrado $\Lambda^2(\mathcal{M})$ das 2-formas em \mathcal{M} admite a seguinte decomposição conformemente invariante de autofibrados \star -invariantes:*

$$\Lambda^2(\mathcal{M}) = \Lambda_+^2(\mathcal{M}) \oplus \Lambda_-^2(\mathcal{M}),$$

onde $\Lambda_{\pm}^2(\mathcal{M}) = \{\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M}) \mid \star \omega = \pm \omega\}$.

Demonstração: É fácil verificar que em dimensão 4 vale $\star^2 = \star \circ \star = \text{Id}$. Portanto um autovalor de \star é necessariamente ± 1 . Dada $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$, definamos agora as 2-formas:

$$\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega + \star \omega) \in \Lambda_+^2(\mathcal{M}),$$

e

$$\omega^- = \frac{1}{2}(\omega - \star \omega) \in \Lambda_-^2(\mathcal{M}).$$

É claro que $\omega = \omega^+ + \omega^-$. Tal decomposição é conformemente invariante, pois se g e \tilde{g} são duas métricas conformes em \mathcal{M} , vemos por um cálculo direto usando a proposição (P.4.15) que $\star_g = \star_{\tilde{g}}$. Finalmente, é óbvio que $\Lambda_+^2(\mathcal{M}) \cap \Lambda_-^2(\mathcal{M}) = \{0\}$, donde segue o resultado desejado. ■

Observação (O.76). Elementos de $\Lambda_+^2(\mathcal{M})$ são chamados de auto-duais, enquanto que elementos de $\Lambda_-^2(\mathcal{M})$ são chamados de anti-auto-duais.

Veremos agora como identificar tensores do tipo $(0, 4)$ com operadores auto-adjuntos em $\Lambda^2(\mathcal{M})$. Seja (\mathcal{M}^4, g) uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 4. Fixemos um ponto $p \in \mathcal{M}$, um aberto $U \ni p$ de \mathcal{M} e um referencial local ortonormal $\{\mathbf{e}_i \in \Gamma(TU)\}_{1 \leq i \leq 4}$ em U , sendo $\{\mathbf{e}^i \in \Gamma(T^*U)\}_{1 \leq i \leq 4}$ o seu co-referencial de 1-formas associado, determinado por $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$ para cada $1 \leq i, j \leq 4$. Definimos:

$$\omega_1^{\pm} = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \pm \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4;$$

$$\omega_2^\pm = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 \pm \mathbf{e}^4 \wedge \mathbf{e}^2;$$

$$\omega_3^\pm = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^4 \pm \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3.$$

Note que $*\omega_i^\pm = \pm\omega_i^\pm$, e $\frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_i^\pm\}_{1 \leq i \leq 4}$ é uma base de $\Lambda_\pm^2(U)$. Para uma 2-forma ω , podemos então escrever

$$\begin{aligned} \omega|_U &= \sum_{i < j} \omega_{ij} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j = \sum_{i < j} \frac{(w_{ij} - w_{ji})}{2} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j - \frac{1}{2} \sum_{j < i} \omega_{ij} \mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} \omega_{ij} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j. \end{aligned}$$

Notando também que:

$$\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{2} (\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q)_{ij} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{2} \delta_{ij}^{pq} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j,$$

vemos que os componentes de $\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q$ são dados por $(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q)_{ij} = \delta_{ij}^{pq}$, que é o delta de Kronecker generalizado (definido como 1 se $(p, q) = (i, j)$, -1 se $(p, q) = (j, i)$ e 0 caso contrário).

Seja agora P um $(0, 4)$ tensor em \mathcal{M}^4 do tipo curvatura. Podemos definir um operador

$$\tilde{P} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \times \Lambda^2(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}),$$

ao exigir que localmente $\tilde{P}(\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell) = P_{ij\ell k}$ e (por multilinearidade) determiná-lo em todo $\Lambda^2(\mathcal{M}) \times \Lambda^2(\mathcal{M})$ usando tal relação (ou, equivalentemente, exigir que para quaisquer $x, y, v, w \in T_p\mathcal{M}$ valha $\tilde{P}(x \wedge y, v \wedge w) = P(x, y, w, v)$, com $p \in \mathcal{M}$ arbitrário). A relação:

$$g(\hat{P}(x \wedge y), v \wedge w) = \tilde{P}(x \wedge y, v \wedge w) \quad \forall x, y, v, w \in T_p\mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{M};$$

determina então um operador $\hat{P} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{M})$. De fato \hat{P} está bem definido (ou seja, $P(\omega) \in \Lambda^2(\mathcal{M})$ para cada $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$), pois:

$$\begin{aligned} g(\hat{P}(y \wedge x), v \wedge w) &= \tilde{P}(y \wedge x, v \wedge w) = -\tilde{P}(x \wedge y, v \wedge w) \\ &= -g(\hat{P}(x \wedge y), v \wedge w), \end{aligned}$$

sejam quais forem $x, y, v, w \in T_p\mathcal{M}$. Daqui em diante identificaremos P com os respectivos operadores associados ao próprio, cometendo o (razoável) abuso de notação de escrever $P = \hat{P} = \tilde{P}$. Em coordenadas locais, dada $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$, temos:

$$P(\omega) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{2} [P\omega]_{ij} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j.$$

Note que por definição:

$$g(P(\omega), \mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (P\omega)_{ij} \delta_{pq}^{ij},$$

enquanto que por outro lado:

$$\begin{aligned} g(P(\omega), \mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q) &= g\left(\sum_{1 \leq k, \ell \leq n} P\left(\frac{1}{2}\omega_{k\ell}\mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell\right), \mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \omega_{k\ell} P_{k\ell qp}. \end{aligned}$$

Fazendo $(p, q) = (i, j)$ vemos então que

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \omega_{k\ell} P_{k\ell ji} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \omega_{k\ell} P_{ij\ell k} = [P(\omega)]_{ij},$$

e portanto

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} [P(\omega)]_{ij} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq n} P_{ij\ell k} \omega_{k\ell} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j.$$

A relação acima determina completamente $P : \Lambda^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{M})$. Embora aqui tenhamos começado com um $(0, 4)$ tensor do tipo curvatura e obtido tal operador em $\Lambda^2(\mathcal{M})$, é claro que poderíamos ter feito o caminho inverso: ou seja, começar com um operador $P : \Lambda^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{M})$ e obter um $(0, 4)$ tensor determinado pela relação:

$$P_{pqrs} = g(P(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q), \mathbf{e}^s \wedge \mathbf{e}^r).$$

Evidentemente tal construção força P a ser auto-adjunto. De fato, isso segue do fato de que 2-formas decomponíveis constituem uma base de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ e de que para quaisquer $x, y, v, w \in T_p\mathcal{M}$ vale:

$$\begin{aligned} g(x \wedge y, P(v \wedge w)) &= P(v \wedge w, x \wedge y) \\ &= P(v, w, y, x) \\ &= P(x, y, w, v) \\ &= g(P(x \wedge y), v \wedge w). \end{aligned}$$

Com tais identificações em mente, definimos agora o *operador curvatura de Weyl*, $\mathcal{W} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{M})$ por

$$[\mathcal{W}(\omega)]_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} W_{ij\ell k} \omega_{k\ell}.$$

Os operadores associados a cada fator da decomposição de Rm vista anteriormente são definidos de maneira inteiramente análoga. Definimos as projeções $\pi_\pm : \Lambda^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda_\pm^2(\mathcal{M})$ aos autofibrados \star -invariantes de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ por

$$\pi_\pm = \frac{1}{2} (\text{Id} \pm \star).$$

Assim, dado $P \in \Lambda^2(\mathcal{M})$, temos a decomposição $P = P^+ + P^-$, onde $P^\pm = \pi_\pm(P) \in \Lambda_\pm^2(\mathcal{M})$. Por exemplo, o operador \mathcal{W}^+ corresponde a um tensor de tipo curvatura W^+ , determinado pelas suas componentes definidas pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} W_{pqrs}^+ &= g\left(\mathcal{W}^+(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q), \mathbf{e}^s \wedge \mathbf{e}^r\right) \\ &= \frac{1}{2}g\left(W^+(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q + \star(\mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q)), \mathbf{e}^s \wedge \mathbf{e}^r\right). \end{aligned}$$

Explicitamente, temos que

$$\begin{aligned} W_{1234}^+ &= \frac{1}{2}g\left(\mathcal{W}(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4), \mathbf{e}^4 \wedge \mathbf{e}^3\right) \\ &= \frac{1}{2}(W_{1234} + W_{4343}). \end{aligned}$$

Os fatores W^+ e W^- da decomposição

$$W = W^+ + W^-$$

são chamados as componentes auto-duais e anti-auto-duais da curvatura de Weyl, respectivamente. Portanto, em dimensão 4, temos ainda a seguinte decomposição ortogonal do tensor curvatura:

$$\text{Rm} = W^+ + W^- + g \oslash E + \frac{\text{Scal}}{12}(g \oslash g).$$

O *operador sem traço da curvatura de Ricci*, que denotaremos por \mathcal{E} , é definido então como o operador auto-adjunto em $\Lambda^2(\mathcal{M})$ associado ao tensor de tipo curvatura $g \oslash E$, e o *operador curvatura escalar* \mathcal{S} é o operador associado a $\text{Scal} \cdot (g \oslash g)$.

Estamos agora preparados para estabelecer a proposição a seguir, enunciada em [54] (como a proposição 26.1) mas demonstrada em menos detalhes do que apresentaremos aqui. A decomposição dada pela proposição (P.3.6) será um dos alicerces às demonstrações dos Teoremas (T.3.1) e (T.3.2).

Proposição (P.3.6). *O operador curvatura de Weyl preserva o tipo de formas, id est,*

$$\mathcal{W} : \Lambda_\pm^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda_\pm^2(\mathcal{M}),$$

e o operador livre de traço da curvatura de Ricci reverte os tipos,

$$\mathcal{E} : \Lambda_\pm^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda_\mp^2(\mathcal{M}).$$

Explicitamente, $\mathcal{W}(\omega) \in \Lambda_\pm^2(\mathcal{M})$ sempre que $\omega \in \Lambda_\pm^2(\mathcal{M})$, e $\mathcal{E}(\omega) \in \Lambda_\mp^2(\mathcal{M})$ sempre que $\omega \in \Lambda_\pm^2(\mathcal{M})$. Além disso, o operador curvatura escalar satisfaz

$$\mathcal{S} = \text{Scal} \cdot \text{Id}.$$

Finalmente, a decomposição em blocos correspondente à decomposição de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ via a estrela de Hodge \star do operador de curvatura é dada por

$$\text{Rm} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\mathcal{W}^+ + \frac{\mathcal{S}}{12} \right) \Big|_{\Lambda_+^2(\mathcal{M})} & \mathcal{E} \Big|_{\Lambda_-^2(\mathcal{M})} \\ \hline \mathcal{E} \Big|_{\Lambda_+^2(\mathcal{M})} & \left(\mathcal{W}^- + \frac{\mathcal{S}}{12} \right) \Big|_{\Lambda_-^2(\mathcal{M})} \end{array} \right).$$

Demonstração: Para a primeira parte, basta provarmos que

$$(\pi_- \circ \mathcal{W})(\omega_i^+) = (\pi_+ \circ \mathcal{W})(\omega_i^-) = 0,$$

para cada $1 \leq i \leq 3$. E como $\{\omega_i^\pm\}_{1 \leq i \leq 3}$ é uma base ortogonal de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ e \mathcal{W} é auto-adjunto, é suficiente então mostrarmos a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{g(\mathcal{W}(w_1^+), \omega_1^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_1^-), \omega_1^+)} = \underbrace{g(\mathcal{W}(\omega_1^+), \omega_2^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_2^-), \omega_1^+)} = \underbrace{g(\mathcal{W}(\omega_1^+), \omega_3^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_3^-), \omega_1^+)}; \\ 0 &= \underbrace{g(\mathcal{W}(w_2^+), \omega_1^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_1^-), \omega_2^+)} = \underbrace{g(\mathcal{W}(w_2^+), \omega_2^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_2^-), \omega_2^+)} = \underbrace{g(\mathcal{W}(w_2^+), \omega_3^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_3^-), \omega_2^+)}; \\ 0 &= \underbrace{g(\mathcal{W}(w_3^+), \omega_1^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_1^-), \omega_3^+)} = \underbrace{g(\mathcal{W}(w_3^+), \omega_2^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_2^-), \omega_3^+)} = \underbrace{g(\mathcal{W}(w_3^+), \omega_3^-)}_{=g(\mathcal{W}(\omega_3^-), \omega_3^+)}. \end{aligned}$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}(\omega_1^+)]_{ij} &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq 4} W_{ijkl} (\delta_{k\ell}^{12} + \delta_{k\ell}^{34}) \\ &= -(W_{ij12} + W_{ij34}), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} g(\mathcal{W}(\omega_1^+), \omega_1^-) &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} [\mathcal{W}(\omega_1^+)]_{ij} (\omega_1^-)_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij12} + W_{ij34}) (\delta_{ij}^{12} - \delta_{ij}^{34}) \\ &= W_{1212} - W_{3412} + W_{1234} - W_{3434} \\ &= W_{1212} - W_{3434}. \end{aligned}$$

Lembrando que $\text{tr}(W) = 0$ e que o traço independe de base, temos que

$$\sum_{1 \leq \ell \leq 4} W_{i\ell j\ell} = \sum_{1 \leq \ell \leq 4} W_{\ell i \ell j} = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq 4$ fixados. E portanto:

$$\begin{aligned} W_{1212} + W_{1313} + W_{1414} &= 0; \\ W_{1212} + W_{3232} + W_{4242} &= 0. \end{aligned}$$

Somando as duas equações acima, vemos que:

$$2W_{1212} = -W_{1313} - W_{1414} - W_{3232} - W_{4242}.$$

Temos também:

$$W_{1414} + W_{2424} + W_{3434} = 0;$$

$$W_{3131} + W_{3232} + W_{3434} = 0,$$

donde segue que

$$2W_{3434} = -W_{1414} - W_{2424} - W_{3131} - W_{3232} = 2W_{1212},$$

e portanto

$$g(\mathcal{W}(w_1^+), \omega_1^-) = 0.$$

Em seguida, temos também:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g(\mathcal{W}(\omega_1^+), \omega_1^-) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij12} + W_{ij34})(\delta_{ij}^{13} - \delta_{ij}^{42}) \\ &= W_{1312} - W_{4212} + W_{1334} - W_{4234} \\ &= -W_{1231} - W_{4212} - W_{4313} - W_{4234}, \end{aligned}$$

mas lembrando novamente de $\text{tr}(W) = 0$, vemos que:

$$W_{4212} + W_{4313} = 0;$$

$$W_{1231} + W_{4234} = 0,$$

e portanto

$$g(\mathcal{W}(w_1^+), \omega_2^-) = 0.$$

Mais uma vez,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g(\mathcal{W}(\omega_1^+), \omega_3^-) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij12} + W_{ij34})(\delta_{ij}^{14} - \delta_{ij}^{23}) \\ &= W_{1412} + W_{1434} - W_{2312} - W_{2334}, \end{aligned}$$

mas novamente, temos

$$W_{1434} + W_{1232} = W_{1434} - W_{2312} = 0;$$

$$W_{4323} + W_{4121} = W_{1412} - W_{2334} = 0,$$

de forma que

$$g(\mathcal{W}(w_1^+), \omega_3^-) = 0,$$

e portanto está provada a primeira fileira de igualdades desejadas. As outras igualdades seguem de maneira inteiramente análoga, mas por completude as provaremos todas. Temos:

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}(\omega_1^-)]_{ij} &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq 4} W_{ijkl} (\delta_{k\ell}^{12} - \delta_{k\ell}^{34}) \\ &= W_{ij34} - W_{ij12}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g(\mathcal{W}(\omega_1^-), \omega_2^+) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij34} - W_{ij12})(\delta_{ij}^{13} + \delta_{ij}^{42}) \\ &= W_{1334} - W_{1312} + W_{4234} - W_{4212}, \end{aligned}$$

mas como

$$\begin{aligned} W_{4212} + W_{4313} &= W_{4212} - W_{1334} = 0; \\ W_{3424} + W_{3121} &= -W_{4234} + W_{1312} = 0, \end{aligned}$$

segue que

$$g(\mathcal{W}(\omega_1^-), \omega_2^+) = 0.$$

Analogamente, de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g(\mathcal{W}(\omega_1^-), \omega_3^+) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij34} - W_{ij12})(\delta_{ij}^{14} + \delta_{ij}^{23}) \\ &= W_{1434} - W_{1412} + W_{2334} - W_{2312}, \end{aligned}$$

e de

$$\begin{aligned} W_{4121} + W_{4323} &= W_{1412} - W_{2334} = 0; \\ W_{1434} + W_{1232} &= -W_{1434} + W_{2312} = 0, \end{aligned}$$

segue que

$$g(\mathcal{W}(\omega_1^-), \omega_3^+) = 0.$$

Como também vale

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}(\omega_2^-)]_{ij} &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq 4} W_{ijkl} (\delta_{k\ell}^{13} - \delta_{k\ell}^{42}) \\ &= W_{ij42} - W_{ij13}, \end{aligned}$$

temos então

$$\frac{1}{2}g(\mathcal{W}(\omega_2^-), \omega_2^+) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij42} - W_{ij13})(\delta_{ij}^{13} + \delta_{ij}^{42})$$

$$\begin{aligned}
&= W_{1342} - W_{1313} + W_{4242} - W_{4213} \\
&= W_{4242} - W_{1313}.
\end{aligned}$$

Mas de

$$\begin{aligned}
W_{4242} + W_{4343} + W_{4141} &= 0; \\
W_{4242} + W_{3232} + W_{1212} &= 0; \\
\implies 2W_{4242} &= -W_{4343} - W_{4141} - W_{3232} - W_{1212},
\end{aligned}$$

e de

$$\begin{aligned}
W_{1313} + W_{1212} + W_{1414} &= 0; \\
W_{1313} + W_{2323} + W_{4343} &= 0; \\
\implies 2W_{1313} &= -W_{1212} - W_{1414} - W_{2323} - W_{4343} = 2W_{4242},
\end{aligned}$$

segue que

$$g(\mathcal{W}(\omega_2^-), \omega_2^+) = 0.$$

Mais uma vez, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}g(\mathcal{W}(\omega_2^-), \omega_3^+) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij42} - W_{ij13})(\delta_{ij}^{14} + \delta_{ij}^{23}) \\
&= W_{1442} - W_{1413} + W_{2342} - W_{2313}.
\end{aligned}$$

E de

$$\begin{aligned}
W_{4142} + W_{3132} &= -W_{1442} + W_{2313} = 0; \\
W_{1413} + W_{2423} &= W_{1413} - W_{2342} = 0,
\end{aligned}$$

segue que

$$g(\mathcal{W}(\omega_2^-), \omega_3^+) = 0.$$

Temos também:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{W}(\omega_3^-)]_{ij} &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq 4} W_{ijk\ell}(\delta_{k\ell}^{14} - \delta_{k\ell}^{23}) \\
&= W_{ij23} - W_{ij14},
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}g(\mathcal{W}(\omega_3^-), \omega_2^+) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij23} - W_{ij14})(\delta_{ij}^{13} + \delta_{ij}^{42}) \\
&= W_{1323} - W_{1314} + W_{4223} - W_{4214}.
\end{aligned}$$

Mas como

$$\begin{aligned} W_{1323} + W_{1424} &= W_{1323} - W_{4214} = 0; \\ W_{1314} + W_{2324} &= W_{1314} - W_{4223} = 0, \end{aligned}$$

obtemos

$$g(\mathcal{W}(\omega_3^-), \omega_2^+) = 0.$$

Finalmente, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g(\mathcal{W}(\omega_3^-), \omega_3^+) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (W_{ij23} - W_{ij14})(\delta_{ij}^{14} + \delta_{ij}^{23}) \\ &= W_{1423} - W_{1414} + W_{2323} - W_{2314}, \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} W_{1414} + W_{1313} + W_{1212} &= 0; \\ W_{1414} + W_{2424} + W_{3434} &= 0; \\ \implies 2W_{1414} &= -W_{1313} - W_{1212} - W_{2424} - W_{3434}, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} W_{2323} + W_{2424} + W_{2121} &= 0; \\ W_{2323} + W_{1313} + W_{4343} &= 0; \\ \implies 2W_{2323} &= -W_{2424} - W_{2121} - W_{1313} - W_{4343} = 2W_{1414}, \end{aligned}$$

temos

$$g(\mathcal{W}(\omega_3^-), \omega_3^+) = 0,$$

provando então que \mathcal{W} preserva tipos. Para a segunda parte, podemos sem perda de generalidade assumir que $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ é uma base ortonormal que diagonaliza E (pois em cada ponto p fixado, E é uma forma bilinear simétrica em $T_p\mathcal{M}$). Sendo assim, temos $E_{ij} = g(E(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ para cada $1 \leq i, j \leq 4$, e segue que:

$$\begin{aligned} 4[\mathcal{E}(\omega)]_{ij} &= \sum_{k, \ell} 2(g \otimes E)_{ijkl} \omega_{k\ell} \\ &= - \sum_{k, \ell} (E_{i\ell} g_{jk} - E_{j\ell} g_{ik} - E_{ik} g_{j\ell} + E_{jk} g_{i\ell}) \omega_{k\ell} \\ &= - \sum_{k, \ell} (\lambda_i \delta_{i\ell} \delta_{jk} - \lambda_j \delta_{j\ell} \delta_{ik} - \lambda_i \delta_{ik} \delta_{j\ell} + \lambda_j \delta_{jk} \delta_{i\ell}) \omega_{k\ell} \\ &= -(\lambda_i \omega_{ji} - \lambda_j \omega_{ij} - \lambda_i \omega_{ij} + \lambda_j \omega_{ji}) \\ &= 2(\lambda_i + \lambda_j) \omega_{ij}. \end{aligned}$$

A fortiori,

$$\begin{aligned} 2[\mathcal{E}(\omega_1^+)]_{ij} &= (\lambda_i + \lambda_j)(\delta_{ij}^{12} + \delta_{ij}^{34}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\delta_{ij}^{12} + (\lambda_3 + \lambda_4)\delta_{ij}^{34}. \end{aligned}$$

Mas como $\text{tr}(E) = 0$, segue que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Portanto,

$$[\mathcal{E}(\omega_1^+)]_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\delta_{ij}^{12} - \delta_{ij}^{34}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\omega_1^-)_{ij}.$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{E}(\omega_1^+) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_1^- \in \Lambda_-^2(\mathcal{M}).$$

De maneira inteiramente análoga, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\omega_2^+) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)\omega_2^- \in \Lambda_-^2(\mathcal{M}); \\ \mathcal{E}(\omega_3^+) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4)\omega_3^- \in \Lambda_-^2(\mathcal{M}); \\ \mathcal{E}(\omega_1^-) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_1^+ \in \Lambda_+^2(\mathcal{M}); \\ \mathcal{E}(\omega_2^-) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)\omega_2^+ \in \Lambda_+^2(\mathcal{M}); \\ \mathcal{E}(\omega_3^-) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4)\omega_3^+ \in \Lambda_+^2(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Resumidamente, definindo $c_i \doteq \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{i+1})$, temos

$$\mathcal{E}(\omega_i^\pm) = c_i \omega_i^\mp \in \Lambda_\mp^2(\mathcal{M}), \text{ seja qual for } 1 \leq i \leq 3,$$

o que prova que $\mathcal{E}(\omega) \in \Lambda_\mp^2(\mathcal{M})$ sempre que $\omega \in \Lambda_\pm^2(\mathcal{M})$, como desejado. Por fim, note que

$$\begin{aligned} -4[(g \oslash g)(\omega)]_{ij} &= \sum_{k,\ell} 2(g \oslash g)_{ijk\ell} \omega_{k\ell} \\ &= \sum_{k,\ell} -(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{jk}\delta_{i\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk} + \delta_{j\ell}\delta_{ik}) \omega_{k\ell} \\ &= -4 \cdot \omega_{ij}, \end{aligned}$$

logo,

$$\mathcal{S} = \text{Scal} \cdot (g \oslash g) = \text{Scal} \cdot \text{Id}.$$

Segue então de tudo já feito até aqui que:

$$\text{Rm}(\omega_i^+) = \underbrace{\mathcal{W}^+(\omega_i^+)}_{\in \Lambda_+^2(\mathcal{M})} + \underbrace{\mathcal{W}^-(\omega_i^+)}_{=0} + \underbrace{\mathcal{E}(\omega_i^+)}_{\in \Lambda_-^2(\mathcal{M})} + \underbrace{\frac{\text{Scal}}{12} \cdot \omega_i^+}_{\in \Lambda_+^2(\mathcal{M})} = \underbrace{\left(\mathcal{W}^+(\omega_i^+) + \frac{\text{Scal}}{12} \cdot \omega_i^+ \right)}_{\text{na base } \{\omega_i^\pm\}_{1 \leq i \leq 3}}; \mathcal{E}(\omega_i^+);$$

$$\text{Rm}(\omega_i^-) = \underbrace{\mathcal{W}^+(\omega_i^-)}_{=0} + \underbrace{\mathcal{W}^-(\omega_i^-)}_{\in \Lambda_-^2(\mathcal{M})} + \underbrace{\mathcal{E}(\omega_i^-)}_{\in \Lambda_+^2(\mathcal{M})} + \underbrace{\frac{\text{Scal}}{12}(\omega_i^-)}_{\in \Lambda_-^2(\mathcal{M})} = \underbrace{\left(\mathcal{E}(\omega_i^-), \mathcal{W}^-(\omega_i^-) + \frac{\text{Scal}}{12} \cdot \omega_i^- \right)}_{\text{na base } \{\omega_i^\pm\}_{1 \leq i \leq 3}}.$$

Equivalentemente, a representação matricial de Rm é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Rm} &= \left(\text{Rm}(\omega_1^+) \quad \text{Rm}(\omega_2^+) \quad \text{Rm}(\omega_3^+) \quad \text{Rm}(\omega_1^-) \quad \text{Rm}(\omega_2^-) \quad \text{Rm}(\omega_3^-) \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \left[\left(\mathcal{W}^+ + \frac{\mathcal{S}}{12} \right) \Big|_{\Lambda_+^2(\mathcal{M})} (\omega_i^+) \right]_{1 \leq i \leq 3} & \left[\mathcal{E} \Big|_{\Lambda_-^2(\mathcal{M})} (\omega_i^-) \right]_{1 \leq i \leq 3} \\ \hline \left[\mathcal{E} \Big|_{\Lambda_+^2(\mathcal{M})} (\omega_i^+) \right]_{1 \leq i \leq 3} & \left[\left(\mathcal{W}^- + \frac{\mathcal{S}}{12} \right) \Big|_{\Lambda_-^2(\mathcal{M})} (\omega_i^-) \right]_{1 \leq i \leq 3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Note que cada matriz na representação por blocos acima é 3 por 3, constituindo um total de 36 entradas, o que condiz com o fato de que $\dim[\text{End}(\Lambda^2(\mathcal{M}))] = (\dim[\Lambda^2(\mathcal{M})])^2 = 36$.

■

Observação (O.77). Escrevendo

$$\text{Rm} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

e lembrando que a representação matricial em uma base ortonormal do adjunto de um operador é dado pela sua transposta, temos pelo fato de Rm ser auto-adjunto que:

$$\text{Rm} = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ C^T & D \end{pmatrix},$$

e portanto A e D são simétricas e $B = C^*$, o adjunto de C . E como já vimos que a correspondência

$$\mathcal{F}_2^0(\mathcal{M}) \ni h \mapsto h \wedge g \in \mathcal{F}_4^0(T\mathcal{M})$$

é injetora, então um abuso de notação razoável é escrever

$$\text{Rm} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{W}^+ + \frac{\mathcal{S}}{12} & E \\ \hline E^* & \mathcal{W}^- + \frac{\mathcal{S}}{12} \end{array} \right),$$

como é feito em [6].

Note também que as componentes auto-duais e anti-auto-duais do tensor de Weyl também devem ser auto-adjuntas e livres de traço. De fato, temos

$$g(\mathcal{W}^\pm(\omega_i^\pm), \omega_j^\pm) = g(\mathcal{W}(\omega_i^\pm), \omega_j^\pm) = g(\mathcal{W}(\omega_j^\pm), \omega_i^\pm) = g(\mathcal{W}^\pm(\omega_j^\pm), \omega_i^\pm),$$

para cada $1 \leq i \leq 3$. Além disso, denotando por $\{\beta_i^\pm\}$ os auto-vetores de \mathcal{W}^\pm (que são obviamente auto-vetores de \mathcal{W} também, por \mathcal{W}^\pm preservar tipos) e por $\{\alpha_i^\pm\}_{1 \leq i \leq 3}$ os auto-valores correspondentes, temos por construção

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot \mathcal{W}^-(\beta_i^+) = \mathcal{W}(\beta_i^+) - (\star \circ \mathcal{W})(\beta_i^+), \\ \implies \mathcal{W}(\beta_i^+) &= (\star \circ \mathcal{W})(\beta_i^+), \end{aligned}$$

e portanto β_i^+ também é auto-vetor de $\star \circ \mathcal{W}$. Além disso, de

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot \mathcal{W}^+(\beta_i^-) = \mathcal{W}(\beta_i^-) - (\star \circ \mathcal{W})(\beta_i^-), \\ \implies \mathcal{W}(\beta_i^-) &= (\star \circ \mathcal{W})(\beta_i^-), \end{aligned}$$

segue que β_i^- também é auto-vetor de $\star \circ \mathcal{W}$. Então, como

$$\begin{aligned} \star \mathcal{W} &= 2\mathcal{W}^+ - \mathcal{W}; \\ \star \mathcal{W} &= \mathcal{W} - 2\mathcal{W}^-, \end{aligned}$$

segue que

$$0 = \text{tr}(\mathcal{W}) = \text{tr}(\star \circ \mathcal{W}) = 2 \text{tr}(\mathcal{W}^+) = -2 \text{tr}(\mathcal{W}^-).$$

Vemos então que

$$0 = \sum_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i^+ = \text{tr}(\mathcal{W}^+) = \text{tr}(\mathcal{W}^-) = \sum_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i^-,$$

como afirmado.

3.2 Resultados auxiliares

Observação (O.78). Várias das constantes nas nossas estimativas diferem por um fator multiplicativo das constantes em [6]. Isso acontece devido a convenções diferentes da definição do produto de Kulkarni-Nomizu. Enquanto que a nossa definição (veja (D.3.3)) adota um fator de normalização 2^{-1} herdado da fórmula da polarização, é comum na literatura não fazer tal normalização, conforme é feito em [6].

Seja (\mathcal{M}^4, g) uma variedade Riemanniana orientada. Como já vimos no capítulo passado, podemos ver o tensor de Weyl W como um operador auto-adjunto $\mathcal{W} \in \text{End}(\Lambda^2(\mathcal{M}))$ do fibrado $\Lambda^2(\mathcal{M}) = \Lambda_+^2(\mathcal{M}) + \Lambda_-^2(\mathcal{M})$, que se decompõe como

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ \oplus \mathcal{W}^-,$$

e então fixar um ponto $p \in \mathcal{M}^4$ e diagonalizar \mathcal{W}^\pm de forma que α_i^\pm , com $1 \leq i \leq 3$, sejam seus respectivos auto-valores. Assumindo sem perda de generalidade que os mesmos estão ordenados, já

vimos que tais autovalores satisfazem:

$$\alpha_1^\pm \leq \alpha_2^\pm \leq \alpha_3^\pm \text{ e } \sum_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i^- = \sum_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i^+ = 0.$$

Proposição (P.3.7). *Temos as seguintes desigualdades para \mathcal{W} :*

- $$\frac{3}{2}(\alpha_3^+)^2 \leq \|\mathcal{W}^+\|^2, \text{ e}$$

- $$\det \mathcal{W}^+ \leq \frac{1}{6}(\alpha_3^+) \|\mathcal{W}^+\|^2 \leq \frac{\sqrt{6}}{18} \|\mathcal{W}^+\|^3.$$

Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se, $\alpha_1^+ = \alpha_2^+$.

Demonstração: Primeiramente, temos por construção que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}^+\|^2 &= (\alpha_1^+)^2 + (\alpha_2^+)^2 + (\alpha_3^+)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\alpha_1^+ + \alpha_2^+}_{=-\alpha_3^+})^2 + \frac{1}{2}(\alpha_1^+ - \alpha_2^+)^2 + (\alpha_3^+)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(\alpha_3^+)^2 + (\alpha_3^+)^2 = \frac{3}{2}(\alpha_3^+)^2, \end{aligned}$$

onde a igualdade é satisfeita se e somente se $\alpha_1^+ - \alpha_2^+ = 0$, como afirmado. Por fim, calculamos que

$$\begin{aligned} (\alpha_3^+) \|\mathcal{W}^+\|^2 - 6 \det \mathcal{W}^+ &= (\alpha_3^+) \left[(\alpha_3^+)^2 + (\alpha_2^+)^2 + \underbrace{(\alpha_1^+)^2}_{=(-\alpha_2^+ - \alpha_3^+)^2} \right] - 6 \cdot \alpha_1^+ \alpha_2^+ \alpha_3^+ \\ &= 2(\alpha_3^+) \left[(\alpha_3^+)^2 + (\alpha_2^+)^2 + (\alpha_3^+)(\alpha_2^+) \right] - 6 \cdot \alpha_1^+ \alpha_2^+ \alpha_3^+ \\ &= 2(\alpha_3^+)^3 + 2(\alpha_3^+)(\alpha_2^+)^2 + \underbrace{2 \cdot (\alpha_3^+)^2(\alpha_2^+)}_{=-2 \cdot \alpha_1^+ \alpha_2^+ \alpha_3^+} - 6 \cdot \alpha_1^+ \alpha_2^+ \alpha_3^+ \\ &= 2(\alpha_3^+) \left[(\alpha_3^+)^2 - 4 \cdot \alpha_1^+ \alpha_2^+ \right] \\ &= 2(\alpha_3^+) \underbrace{(\alpha_1^+ - \alpha_2^+)^2}_{=(\alpha_1^+ - \alpha_2^+)^2}, \\ &= 2(\alpha_3^+)(\alpha_1^+ - \alpha_2^+)^2, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\det \mathcal{W}^+ \leq \frac{1}{6}(\alpha_3^+) \|\mathcal{W}^+\|^2.$$

Finalmente, da primeira parte da demonstração, segue que

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \alpha_3^+ \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} |\alpha_3^+| \leq \|\mathcal{W}^+\|,$$

e portanto

$$\frac{1}{6} \cdot \alpha_3^+ \|\mathcal{W}^+\|^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \alpha_3^+ \cdot \frac{1}{6} \|\mathcal{W}^+\|^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} \|\mathcal{W}^+\|^3 = \frac{\sqrt{6}}{18} \|\mathcal{W}^+\|^3,$$

como desejado. O caso de igualdade novamente é óbvio. ■

Em seguida, apresentaremos uma estimativa para $(E \otimes E)^+$ em 4-variedades Riemannianas orientadas. Lembramos que o tensor de Einstein E de (\mathcal{M}^4, g) é dado por

$$E = \text{Ric} - \frac{\text{Scal}}{4} g$$

Proposição (P.3.8). *Seja (\mathcal{M}^4, g) uma 4-variedade Riemanniana orientada. Então temos:*

(a) $\|(E \otimes E)\|^2 \leq \frac{3}{2}\|E\|^4$. Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se,

$$4 \cdot \|E^2\|^2 = \|E\|^4,$$

$$\text{onde } (E^2)_{ik} = \sum_{1 \leq p \leq 4} E_{ip} E_{kp}.$$

(b) $\|(E \otimes E)^+\|^2 \leq \frac{3}{2}\|E\|^4$. Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se, $\|(E \otimes E)^-\| = 0$.

Demonstração: Faremos todos os cálculos em um referencial ortornormal que diagonaliza E (de forma que $E_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$). Primeiramente, temos pela definição do produto de Kulkarni-Nomizu que:

$$\begin{aligned} -2(E \otimes E)_{ijkl} &= 2(E_{ik}E_{j\ell} + E_{j\ell}E_{ik} - E_{i\ell}E_{jk} - E_{jk}E_{i\ell}) \\ &= 2(E_{ik}E_{j\ell} - E_{i\ell}E_{jk}) \\ &= 2\lambda_i \lambda_j (\delta_{ik} \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell} \delta_{jk}). \end{aligned}$$

Agora, pela proposição (P.3.1), temos que $(E \otimes E)_{ijkl} = 0$ sempre que $i = j$ ou $k = \ell$. Portanto:

$$\begin{aligned} \|E \otimes E\|^2 &= \sum_{i \neq j, k \neq \ell} [\lambda_i \lambda_j (\delta_{ik} \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell} \delta_{jk})]^2 \\ &= \sum_{i \neq j, k \neq \ell} \lambda_i^2 \lambda_j^2 (\delta_{ik} \delta_{j\ell} - 2 \cdot \underbrace{\delta_{ik} \delta_{j\ell} \delta_{i\ell} \delta_{jk}}_{=0 \text{ se } k=i \text{ ou } k \neq i} + \delta_{i\ell} \delta_{jk}) \\ &= 2 \sum_{i \neq j} \lambda_i^2 \lambda_j^2 = 2 \sum_{1 \leq i \leq 4} \left(\sum_{j \neq i} \lambda_i^2 \lambda_j^2 \right) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^2 \left(\sum_{j \neq i} \lambda_j^2 \right) = 2 \sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^2 \left[\left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \lambda_j^2 \right) - \lambda_i^2 \right] \\ &= 2 \left[\left(\sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^2 \right)^2 - \sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^4 \right] \\ &\stackrel{(*)}{\leq} 2 \left[\left(\sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^2 \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^2 \right)^2 \right] = \frac{3}{2} \|E\|^4, \end{aligned}$$

onde em (*) usamos Cauchy-Schwarz, e a igualdade é satisfeita se, e só se,

$$\|E^2\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^4 = \frac{1}{4} \left(\sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^2 \right)^2 = \frac{1}{4} \|E\|^4,$$

como afirmado. Finalmente, como a decomposição nas componentes auto-duais e anti-auto-duais é por construção ortogonal, temos

$$\|(E \otimes E)^\pm\|^2 \leq \|E \otimes E\|^2 \leq \frac{3}{2} \|E\|^4,$$

e conseqüentemente, a igualdade é satisfeita se, e somente se

$$\frac{3}{2} \|E\|^4 = \|(E \otimes E)\|^2 = \|(E \otimes E)^+\|^2 + \|(E \otimes E)^-\|^2 \leq \frac{3}{2} \|E\|^4 + \|(E \otimes E)^-\|^2,$$

ou, equivalentemente, se, e somente se,

$$\|(E \otimes E)^-\| = 0,$$

como afirmado. ■

Observação (O.79). É claro que substituindo as componentes auto-duais pelas anti-auto-duais na (P.3.7) e (P.3.8), teremos resultados inteiramente análogos (isto é, bastará trocar + por -).

Será esclarecedor analisar o exemplo do sólito de Ricci gradiente shrinking em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Exemplo (E.3.5). Denotaremos por $\mathcal{M} = (\mathbb{S}^2(\sqrt{2}) \times \mathbb{R}^2, g, f)$ o sólito de Ricci gradiente no cilindro redondo $\mathbb{S}^2(\sqrt{2}) \times \mathbb{R}^2$, onde g denota a métrica produto usual e a função potencial f é dada por

$$f(x, y) = \frac{\|y\|^2}{4} + 1, \text{ para cada } (x, y) \in \mathbb{S}^2(\sqrt{2}) \times \mathbb{R}^2.$$

Como $\mathbb{S}^2(\sqrt{2})$ tem curvatura seccional constante $\frac{1}{2}$ (e portanto curvatura escalar constante $2 \cdot (2 - 1) \cdot \frac{1}{2} = 1$) e \mathbb{R}^2 é plano, vemos que $\mathbb{S}^2(\sqrt{2}) \times \mathbb{R}^2$ tem curvatura escalar constante $\text{Scal} = 1$. Fixaremos uma base local ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de forma que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ seja tangente a $\mathbb{S}^2(\sqrt{2})$ e $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ seja tangente a \mathbb{R}^2 . Nessas coordenadas, temos então que as representações matriciais da curvatura de Ricci e da curvatura de Ricci livre de traço são todas diagonais e dadas por:

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} \text{Ric}(\mathbf{e}_1) & \text{Ric}(\mathbf{e}_2) & \text{Ric}(\mathbf{e}_3) & \text{Ric}(\mathbf{e}_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$E = \text{Ric} - \frac{1}{4} \text{Id} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Em seguida, agora novamente vendo Rm como um endomorfismo de $\Lambda^2(\mathcal{M})$, afirmamos que sua representação matricial é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Rm} &= \left(\text{Rm}(\omega_1^+) \quad \text{Rm}(\omega_2^+) \quad \text{Rm}(\omega_3^+) \quad \text{Rm}(\omega_1^-) \quad \text{Rm}(\omega_2^-) \quad \text{Rm}(\omega_3^-) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{0}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De fato, isso é uma consequência direta da expressão para o tensor curvatura de uma variedade produto. Temos que

$$\left[\text{Rm}(\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b) \right]_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \text{Rm}_{ijkl} \delta_{kl}^{ab} = -\text{Rm}_{ijab};$$

$$\implies \text{Rm}(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2) = \frac{1}{2} \text{Rm}_{1221} \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 = \frac{1}{4} \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2, \text{ e de maneira análoga}$$

$$\text{Rm}(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3) = \text{Rm}(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^4) = \text{Rm}(\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3) = \text{Rm}(\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^4) = \text{Rm}(\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4) = 0, \text{ de forma que}$$

$$\text{Rm}(\omega_1^+) = \text{Rm}(\omega_1^-) = \frac{1}{4} \omega_1^+ + \frac{1}{4} \omega_1^- = \left(\frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0 \right), \text{ e } \text{Rm}(\omega_i^\pm) = (0, 0, 0, 0, 0, 0), \forall i \neq 1,$$

como afirmado. Lembrando da proposição **(P.3.6)**, vemos então que as representações matriciais de \mathcal{W}^+ e \mathcal{W}^- devem satisfazer:

$$\mathcal{W}^+ + \frac{1}{12} \text{Id} = \mathcal{W}^- + \frac{1}{12} \text{Id} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde segue que

$$\mathcal{W}^\pm = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Afirmamos agora que $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ satisfaz

$$g(E \otimes E, \mathcal{W}^+) = \frac{1}{48}.$$

De fato, temos pela definição do produto de Kulkarni-Nomizu que:

$$\begin{aligned} 2(E \otimes E)_{ijkl} &= E_{jk}E_{il} - E_{ik}E_{jl} + E_{jk}E_{il} - E_{ik}E_{jl} \\ &= -2(E_{ik}E_{jl} - E_{il}E_{jk}). \end{aligned}$$

Em particular, denotando por $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ os auto-valores de E temos que

$$\begin{aligned} \|(E \otimes E)\|^2 &= \sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq 4} [(E \otimes E)_{ijkl}]^2 \\ &= \sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq 4} [\lambda_i \lambda_j (\delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{ik} \delta_{jl})]^2 \\ &= \sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq 4} \lambda_i^2 \lambda_j^2 (\delta_{jk} \delta_{il} - 2\delta_{jk} \delta_{il} \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \\ &= 2 \left[\sum_{1 \leq k \leq 4} \lambda_k^2 \left(\sum_{1 \leq \ell \leq 4} \lambda_\ell^2 \right) - \sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i^4 \right] \\ &= 2 \left[\sum_{1 \leq k \leq 4} \lambda_k^2 \left(4 \cdot \frac{1}{16} \right) - 4 \cdot \frac{1}{256} \right] \\ &= \frac{2}{16} - \frac{2}{64} = \frac{3}{32}. \end{aligned}$$

Para uma 2-forma ω , vemos então que:

$$\begin{aligned} (E \otimes E)(\omega)_{ij} &= -\frac{1}{2} \sum_{k,\ell} (E \otimes E)_{ijkl} \omega_{k\ell} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \lambda_i \lambda_j (\delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_{k\ell} \\ &= -\frac{1}{2} \lambda_i \lambda_j (\omega_{ji} - \omega_{ij}) = \lambda_i \lambda_j \omega_{ij}. \end{aligned}$$

Em particular, lembrando de (3.2) temos

$$\begin{aligned} [(E \otimes E)(\omega_1^+)]_{ij} &= \lambda_i \lambda_j (\delta_{ij}^{12} + \delta_{ij}^{34}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \delta_{ij}^{12} + \lambda_3 \lambda_4 \delta_{ij}^{34} \\ &= \frac{1}{16} (\delta_{ij}^{12} + \delta_{ij}^{34}) \\ &= \frac{1}{16} (\omega_1^+)_{ij}, \end{aligned}$$

de forma que

$$(E \otimes E)(\omega_1^+) = \frac{1}{16} \omega_1^+.$$

De maneira inteiramente análoga, vemos que

$$(E \otimes E)(\omega_2^+) = -\frac{1}{16} \omega_2^+,$$

e

$$(E \otimes E)(\omega_3^+) = -\frac{1}{16} \omega_3^+.$$

Agora, como por definição $(E \otimes E)^\pm(\omega) = (E \otimes E)(\omega^\pm)$, a representação matricial do endomorfismo $(E \otimes E)^+$ é dada por

$$(E \otimes E)^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Consequentemente,

$$g((E \otimes E)^+, \mathcal{W}^+) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{48},$$

como afirmado.

Usaremos de maneira crucial nas demonstrações dos resultados a seguir outros fatos já demonstrados anteriormente na literatura, e por isso convém enunciá-los agora. Em [10], Chen provou que qualquer sólito de Ricci gradiente completo e shrinking possui curvatura escalar não-negativa (ou seja, $\text{Scal} \geq 0$). E em [7], Cao e Zhou provaram o seguinte

Lema (L.3.1). *Seja (\mathcal{M}^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente completo, shrinking e não compacto satisfazendo (2.7) com $2\lambda = 1$. Então existem $r_0 > 0$, $p_0 \in \mathcal{M}$ e constantes reais $c_1, c_2 > 0$ (que dependem somente de n e da geometria de g na bola unitária centrada em p_0) tais que a função potencial f satisfaz as estimativas*

$$\frac{1}{4}(r(x) - c_1)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + c_2)^2,$$

sempre que $r(x) \geq r_0$, onde $r \doteq \text{dist}(p_0, \bullet)$ denota a função distância Riemanniana até p_0 .

Observação (O.80). Devido à existência do sólito Gaussiano shrinking (veja o exemplo (E.2.7)), não é possível melhorar a estimativa acima.

Além disso, em [16], Derdziński provou que toda variedade de Einstein orientada de dimensão 4 (\mathcal{M}^4, g) satisfaz a seguinte fórmula de Weitzenböck:

$$\Delta \|W^\pm\|^2 = 2 \cdot \|W^\pm\|^2 + \text{Scal} \cdot \|W^\pm\|^2 - 36 \cdot \det W^\pm.$$

Esta fórmula é uma ferramenta poderosa na teoria de métricas canônicas em variedades de dimensão 4, que pode ser usada para obter resultados de classificação assim como para descartar potenciais exemplos novos.

Em seguida, lembramos da seguinte fórmula de tipo Weitzenböck para sólitons de Ricci gradiente, que aparece também em [9] e [56] e faz um papel essencial na prova do Teorema (T.3.1).

Proposição (P.3.9). *Seja (\mathcal{M}^4, g, f) um sólito de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4. Então temos:*

$$\Delta_f (\|W^\pm\|^2) = 2 \cdot \|\nabla W^\pm\|^2 + 2 \cdot \|W^\pm\|^2 - 36 \cdot \det W^\pm - 2 \cdot g((E \otimes E), W^\pm).$$

3.3 Resultados principais

Iremos agora apresentar as demonstrações dos Teoremas (T.3.1) e (T.3.2), que garantem classificações geométricas e controles na curvatura de Ricci ou curvatura Riemanniana, desde que sejam satisfeitas

estimativas pontuais sobre as partes duais ou anti-auto-duais do tensor de Weyl ou um certo controle sobre a curvatura escalar em termos da função potencial do sóliton.

Observação (O.81). Conforme mencionado em [6], um aspecto importante e inédito do Teorema (T.3.1) é a ausência de hipóteses contendo estimativas pontuais sobre o tensor de Ricci ou que assumam alguma nulidade do tensor de Weyl e suas derivadas.

Além disso, como observado em [6], podemos estimar o valor $g((E \otimes E)^\pm, W^\pm)$ de forma a substituir a condição no lado direito das desigualdades do Teorema (T.3.1) por estimativas sobre o tensor de Einstein E . De fato, como consequência imediata da proposição (P.3.8) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$g((E \otimes E)^\pm, W^\pm) \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|E\|^2 \|W^\pm\|. \quad (3.3)$$

Note que a estimativa (3.3) não é ótima. De fato, como visto no exemplo (E.3.5), o sóliton $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ satisfaz

$$g((E \otimes E)^+, W^+) = \frac{1}{48} = \frac{\sqrt{6}}{6} \|E\|^2 \|W^+\|.$$

Em [8], Xiaodong Cao, Ernani Ribeiro, e Hung Tran provaram a inédita (e ótima, devido ao exemplo (E.3.5)) estimativa:

$$g((E \otimes E)^+, W^+) \leq \frac{\sqrt{6}}{6} \|E\|^2 \|W^+\|.$$

Teorema (T.3.1). *Seja (\mathcal{M}^4, g, f) um sóliton de Ricci gradiente completo e shrinking de dimensão 4 que satisfaz ou*

$$\|W^+\|^2 - \sqrt{6} \cdot \|W^+\|^3 \geq g((E \otimes E)^+, W^+),$$

ou

$$\|W^-\|^2 - \sqrt{6} \cdot \|W^-\|^3 \geq g((E \otimes E)^-, W^-).$$

Então (\mathcal{M}^4, g, f) é ou

(a) Einstein, ou

(b) um quociente finito do sóliton Gaussiano shrinking \mathbb{R}^4 , ou de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$, ou de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Demonstração: Primeiramente, temos pela proposição (P.3.9) que

$$\Delta_f(\|W^\pm\|^2) = 2 \cdot \|\nabla W^\pm\|^2 + 2 \cdot \|W^\pm\|^2 - 36 \cdot \det W^\pm - 2 \cdot g((E \otimes E), W^\pm). \quad (3.4)$$

Agora, pelo lema (L.1.13), temos também que

$$\begin{aligned} \Delta_f(\|W^\pm\|^2) &= 2 \cdot \|W^\pm\| \cdot \Delta_f \|W^\pm\| + 2 \cdot g(\nabla \|W^\pm\|, \nabla \|W^\pm\|) \\ &= 2 \cdot \|W^\pm\| \cdot \Delta_f \|W^\pm\| + \|\nabla \|W^\pm\|\|^2. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} 2 \cdot \|W^\pm\| \cdot \Delta_f \|W^\pm\| &= \Delta_f(\|W^\pm\|^2) - 2\|\nabla \|W^\pm\|\|^2 \\ &= 2 \cdot \|\nabla W^\pm\|^2 - 2 \cdot \|\nabla \|W^\pm\|\|^2 + 2 \cdot \|W^\pm\|^2 - 36 \cdot \det W^\pm - 2 \cdot g((E \otimes E), W^\pm). \end{aligned}$$

Pela desigualdade (1.9), temos também que $\|\nabla W^\pm\|^2 \geq \|\nabla\|W^\pm\|^2$, e portanto

$$2 \cdot \|W^\pm\| \cdot \Delta_f \|W^\pm\| \geq 2 \cdot \|W^\pm\|^2 - 36 \cdot \det W^\pm - 2 \cdot g((E \otimes E), W^\pm).$$

Usando agora a segunda parte da proposição (P.3.7), obtemos

$$\|W^\pm\| \cdot \Delta_f \|W^\pm\| \geq \|W^\pm\|^2 - \sqrt{6} \cdot \|W^\pm\|^3 - g((E \otimes E)^\pm, W^\pm). \quad (3.5)$$

Lembrando também que por hipótese, vale

$$\|W^\pm\|^2 - \sqrt{6} \cdot \|W^\pm\|^3 \geq g((E \otimes E)^\pm, W^\pm). \quad (3.6)$$

Vemos que

$$\|W^\pm\| \cdot \Delta_f \|W^\pm\| \geq 0,$$

ou seja, $\|W^\pm\| \cdot \Delta_f \|W^\pm\|$ é não negativa. Em seguida, provaremos que $\|W^\pm\|^2 \cdot e^{-f}$ é g -integrável, isto é, que $\|W^\pm\| \in \mathcal{L}^2(e^{-f} \cdot d\text{Vol}_g)$. De fato, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$-\|(E \otimes E)^\pm\| \cdot \|W^\pm\| \leq g((E \otimes E)^\pm, W^\pm) \leq \|(E \otimes E)^\pm\| \cdot \|W^\pm\|.$$

Assim, usando a primeira parte da proposição (P.3.8), vemos que

$$\begin{aligned} -g((E \otimes E)^\pm, W^\pm) &\leq \|(E \otimes E)^\pm\| \cdot \|W^\pm\| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \|E\|^2 \cdot \|W^\pm\|^2. \end{aligned}$$

Usando agora a equação (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \cdot \|W^\pm\|^3 &\leq \|W^\pm\|^2 - g((E \otimes E)^\pm, W^\pm) \\ &\leq \|W^\pm\|^2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \|E\|^2 \cdot \|W^\pm\| \\ &\leq \|W^\pm\|^2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \|\text{Ric}\|^2 \cdot \|W^\pm\|. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\sqrt{6} \cdot \|W^\pm\|^2 \leq \|W^\pm\| + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \|\text{Ric}\|^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \|W^\pm\|^2 + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \|\text{Ric}\|^2, \quad (3.7)$$

ou, equivalentemente,

$$\|W^\pm\|^2 \leq \frac{1}{6} + \|\text{Ric}\|^2, \quad (3.8)$$

onde na última desigualdade em (3.7) usamos que

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot x^2 - x + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Integrando a equação (3.8) sobre \mathcal{M} , vemos que

$$\int_{\mathcal{M}} \|W^\pm\|^2 \cdot e^{-f} \, d\text{Vol}_g \leq \frac{1}{6} \cdot \int_{\mathcal{M}} e^{-f} \, d\text{Vol}_g + \int_{\mathcal{M}} \|\text{Ric}\|^2 \cdot e^{-f} \, d\text{Vol}_g. \quad (3.9)$$

Agora, como visto no corolário 1.1 de [7], o volume “ponderado” de \mathcal{M}^4 é finito, ou seja,

$$\int_{\mathcal{M}} e^{-f} \, d\text{Vol}_g < \infty.$$

Além disso, Munteanu e Sesum (como visto no Teorema 1.1 em [37]) provaram que

$$\int_{\mathcal{M}} \|\text{Ric}\|^2 e^{-f} \, d\text{Vol}_g < \infty.$$

Segue então da equação (3.9) que $\|W^\pm\|^2 \cdot e^{-f}$ é g -integrável. Fixemos agora $r > 0, p \in \mathcal{M}$ arbitrários, e seja $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo:

$$\begin{aligned} \varphi(q) &= 1, \quad \forall q \in B_p(r) \doteq \exp_p(B_r(0)); \\ \varphi(q) &= 0, \quad \forall q \notin B_p(2r), \text{ e} \\ \|\nabla\varphi\| &\leq \frac{c}{r}, \end{aligned}$$

onde $c > 0$ é uma constante real. Note que usamos a hipótese da completude de \mathcal{M} para garantir que a bola geodésica $\exp_p(B_r(0))$ está bem definida sejam quais forem $p \in \mathcal{M}$ e $r > 0$. A existência de tal φ é garantida pelo lema (L.1.9). Denotaremos a forma de volume $e^{-f} \cdot d\text{Vol}_g$ por $\widetilde{d\text{Vol}_g}$. Integrando por partes na primeira igualdade abaixo (conforme vimos em (4.29)), temos então que:

$$\begin{aligned} 0 &\geq - \int_{\mathcal{M}} \varphi^2 \cdot \|W^\pm\| \cdot \Delta_f (\|W^\pm\|) \, \widetilde{d\text{Vol}_g} \\ &= \int_{\mathcal{M}} g(\nabla(\varphi^2 \cdot \|W^\pm\|), \nabla\|W^\pm\|) \, \widetilde{d\text{Vol}_g} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \varphi^2 \cdot \|\nabla\|W^\pm\|\|^2 \, \widetilde{d\text{Vol}_g} + 2 \int_{\mathcal{M}} \varphi \cdot \|W^\pm\| \cdot g(\nabla\|W^\pm\|, \nabla\varphi) \, \widetilde{d\text{Vol}_g} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left\| (\varphi \cdot \|\nabla\|W^\pm\| + \|W^\pm\| \cdot \nabla\varphi) \right\|^2 \, \widetilde{d\text{Vol}_g} - \int_{\mathcal{M}} \|W^\pm\|^2 \cdot \|\nabla\varphi\|^2 \, \widetilde{d\text{Vol}_g}, \end{aligned}$$

onde nas últimas igualdades usamos a bilinearidade de g juntamente com o lema (L.1.5), donde seguem as igualdades

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi^2 \cdot \|W^\pm\|) &= \varphi^2 \cdot \nabla(\|W^\pm\|) + 2 \cdot \varphi \cdot \|W^\pm\| \cdot \nabla\varphi, \text{ assim como} \\ \left\| \nabla(\varphi \cdot \|W^\pm\|) \right\|^2 &= \left\| (\varphi \cdot \nabla\|W^\pm\| + \|W^\pm\| \cdot \nabla\varphi) \right\|^2 = \varphi^2 \cdot \|\nabla\|W^\pm\|\|^2 + 2 \cdot \varphi \cdot \|W^\pm\| \cdot g(\nabla\|W^\pm\|, \nabla\varphi) \\ &\quad + \|W^\pm\|^2 \cdot \|\nabla\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\int_{\mathcal{M}} \left\| \nabla(\varphi \cdot \|W^\pm\|) \right\|^2 \, \widetilde{d\text{Vol}_g} \leq \int_{\mathcal{M}} \|W^\pm\|^2 \cdot \|\nabla\varphi\|^2 \, \widetilde{d\text{Vol}_g}.$$

Pela construção de φ , as seguintes igualdades também são óbvias:

$$\begin{aligned} \int_{B_p(r)} \left\| \nabla \|W^\pm\| \right\|^2 \widetilde{dVol}_g &= \int_{\mathcal{M}} \left\| \nabla (\varphi \cdot \|W^\pm\|) \right\|^2 \widetilde{dVol}_g - \int_{B_p(2r) \setminus B_p(r)} \left\| \nabla (\varphi \cdot \|W^\pm\|) \right\|^2 \widetilde{dVol}_g, \\ \int_{\mathcal{M}} \|W^\pm\|^2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 \widetilde{dVol}_g &= \int_{B_p(2r) \setminus B_p(r)} \|W^\pm\|^2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 \widetilde{dVol}_g. \end{aligned}$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{B_p(r)} \left\| \nabla \|W^\pm\| \right\|^2 \widetilde{dVol}_g &\leq \int_{\mathcal{M}} \left\| \nabla (\varphi \cdot \|W^\pm\|) \right\|^2 \widetilde{dVol}_g \\ &\leq \int_{B_p(2r) \setminus B_p(r)} \|W^\pm\|^2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 \widetilde{dVol}_g \\ &\leq \frac{c^2}{r^2} \cdot \int_{\mathcal{M}} \|W^\pm\|^2 \widetilde{dVol}_g. \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é satisfeita para todo $r > 0$ e como já vimos que $\|W^\pm\| \in \mathcal{L}^2(\widetilde{dVol}_g)$, concluímos que

$$0 \leq \int_{\mathcal{M}} \left\| \nabla \|W^\pm\| \right\|^2 \widetilde{dVol}_g \leq \left(\inf_{r>0} r^{-2} \right) \cdot c^2 \int_{\mathcal{M}} \|W^\pm\|^2 \widetilde{dVol}_g = 0,$$

donde segue que $\nabla(\|W^\pm\|) = 0$, de forma que $\|W^\pm\|$ é constante.

Temos então dois casos a serem analisados, a saber, $\|W^\pm\| = 0$ (que obviamente implica em $\nabla W^\pm = 0$) e $\|W^\pm\| \neq 0$. Se $\|W^\pm\| = 0$, então segue do Teorema 1.2 em [11] que \mathcal{M}^4 é ou Einstein ou um quociente finito ou do sóliton Gaussiano shrinking \mathbb{R}^4 ou do cilindro redondo $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$, como afirmado inicialmente.

Por outro lado, se $\|W^\pm\|$ é identicamente igual a uma constante não nula, digamos c , então $\nabla W^\pm = 0$. De fato, pela equação (3.4), temos que

$$0 = \Delta_f(\|W^\pm\|^2) = 2 \cdot \|\nabla W^\pm\|^2 + 2 \cdot c^2 - 36 \cdot \det W^\pm - 2 \cdot g((E \otimes E), W^\pm). \quad (3.10)$$

Lembrando também da equação (3.6), obtemos

$$c^2 - \sqrt{6} \cdot c^3 \geq g((E \otimes E)^\pm, W^\pm) \implies -2 \cdot g((E \otimes E)^\pm, W^\pm) \geq 2\sqrt{6} \cdot c^3 - 2 \cdot c^2.$$

Agora, pela proposição (P.3.7), temos

$$36 \det W^\pm \leq 2\sqrt{6} \cdot c^3 \implies -36 \det W^\pm \geq -2\sqrt{6} \cdot c^3.$$

Portanto

$$2 \cdot c^2 - 36 \cdot \det W^\pm - 2 \cdot g((E \otimes E), W^\pm) \geq 0.$$

Segue então da equação (3.10) que

$$\nabla W^\pm = 0, \text{ e também } 2 \cdot c^2 = 36 \det W^\pm + \underbrace{2 \cdot g((E \otimes E), W^\pm)}_{\leq 2 \cdot c^2 - 2\sqrt{6} \cdot c^3},$$

donde concluímos também que

$$2 \cdot c^2 \leq 36 \det W^\pm + 2 \cdot c^2 - 2\sqrt{6} \cdot c^3 \implies \det W^\pm \geq \frac{\sqrt{6}}{18} \cdot c^3,$$

e portanto a igualdade na proposição **(P.3.7)** é satisfeita, de forma que W^\pm possui exatamente dois auto-valores distintos. Além disso, conforme vimos na proposição **(P.4.14)**, temos $\operatorname{div} = \operatorname{tr} \circ \nabla$, donde é claro que $\operatorname{div} W^\pm = 0$ sempre que $\nabla W^\pm = 0$. Como já vimos que isso é satisfeito em qualquer um dos casos, podemos então aplicar o Teorema 1.1 em [55] e concluir que \mathcal{M}^4 é ou Einstein ou um quociente finito de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. ■

Assumindo agora que Scal esteja apropriadamente limitada pela função potencial f , isto é, que Scal satisfaça

$$\operatorname{Scal} \leq A + \varepsilon f, \tag{3.11}$$

onde $A > 0$ e $0 \leq \varepsilon < 1$ são constantes, iremos provar algumas estimativas de curvatura para Rm e Ric . Para isso, será essencial lembrar uma estimativa de curvatura para Rm satisfeita por todo sólito de Ricci gradiente shrinking, provada por Munteanu e Wang em [38].

Proposição (P.3.10). *Seja (\mathcal{M}^4, g, f) um sólito de Ricci gradiente shrinking completo e não compacto de dimensão 4. Então existe uma constante universal positiva C_0 tal que:*

$$\|\operatorname{Rm}\| \leq C_0 \left(\|\operatorname{Ric}\| + \frac{\|\nabla \operatorname{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \right),$$

sempre que $\|\nabla f\| \neq 0$.

Demonstração: Fixemos um referencial ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ com $e_4 = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$. Pela parte **(g)** do lema **(L.2.4)**, temos:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Rm}_{ij\ell 4}| &= \frac{1}{\|\nabla f\|} \cdot |(\nabla_i \operatorname{Ric})_{\ell j} - (\nabla_j \operatorname{Ric})_{\ell i}| \\ &\leq \frac{1}{\|\nabla f\|} \cdot (|(\nabla_i \operatorname{Ric})_{\ell j}| + |(\nabla_j \operatorname{Ric})_{\ell i}|) \\ &\leq \frac{1}{\|\nabla f\|} \cdot \left(\sum_{1 \leq i, j, \ell \leq 4} |(\nabla_i \operatorname{Ric})_{\ell j}| + \sum_{1 \leq i, j, \ell \leq 4} |(\nabla_j \operatorname{Ric})_{\ell i}| \right). \end{aligned}$$

Agora, da desigualdade:

$$\frac{\sum_{1 \leq i \leq n} |a_i|}{n} \leq \frac{\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2}}{\sqrt{n}}, \text{ para quaisquer } \{a_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$\begin{aligned} |\operatorname{Rm}_{ij\ell 4}| &\leq \frac{2}{\|\nabla f\|} \cdot \left(\sqrt{\sum_{1 \leq i, j, \ell \leq 4} |(\nabla_i \operatorname{Ric})_{\ell j}|^2} + \sqrt{\sum_{1 \leq i, j, \ell \leq 4} |(\nabla_j \operatorname{Ric})_{\ell i}|^2} \right) \\ &= \frac{4}{\|\nabla f\|} \cdot \|\nabla \operatorname{Ric}\|. \end{aligned}$$

Note também que:

$$\|\text{Rm}\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq 4} (\text{Rm}_{ijkl})^2} \leq \sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq 4} |\text{Rm}_{ijkl}|.$$

Pela proposição **(P.3.2)**, só precisamos nos preocupar com 20 termos do último somatório que aparece na expressão acima. Todos eles podem ser tratados de maneira semelhantes. Note que, por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{11} &= \text{Rm}_{1212} + \text{Rm}_{1313} + \text{Rm}_{1414}, & \text{Ric}_{22} &= \text{Rm}_{1212} + \text{Rm}_{2323} + \text{Rm}_{2424}, \\ \text{Ric}_{33} &= \text{Rm}_{1313} + \text{Rm}_{2323} + \text{Rm}_{3434}, & \text{Ric}_{44} &= \text{Rm}_{1414} + \text{Rm}_{2424} + \text{Rm}_{3434}, \\ \implies \text{Rm}_{1212} &= \frac{1}{2} (\text{Ric}_{11} + \text{Ric}_{22} - \text{Ric}_{33} - \text{Ric}_{44}) + \text{Rm}_{3434}, \\ \implies |\text{Rm}_{1212}| &\leq C_0 \left(\|\text{Ric}\| + \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \right), \end{aligned}$$

e podemos lidar com as outras 19 componentes de Rm de maneira inteiramente análoga, obtendo a estimativa desejada. ■

Observação (O.82). Como obviamente as constantes c_0, c_1 e c_2 no Teorema a seguir poderão ser tomadas de forma arbitrariamente grandes, ε poderá ser tomado de forma arbitrariamente pequena.

Além disso, para cada $K > 0$, como

$$D_K \doteq \{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \leq K\} = f^{-1}((-\infty, K]),$$

segue da continuidade de f que D_K é fechado em \mathcal{M} . Agora, se D_K fosse ilimitado, então tomando p_0 como no lema **(L.3.1)**, existiria uma sequência de pontos $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_k$ satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(p_0, x_k) = \infty$, o que é evidentemente um absurdo. O Teorema de Hopf-Rinow garante então que D_K é compacto para qualquer $K > 0$.

Observação (O.83). Pela parte **(d)** do lema **(L.2.4)**, sabemos que $\text{Scal} + \|\nabla f\|^2 = f$, o que obviamente implica na estimativa $\text{Scal} \leq f$, satisfeita por qualquer sóliton de Ricci gradiente shrinking. Vemos portanto que a hipótese $\text{Scal} \leq A + \varepsilon f$ do Teorema **(T.3.2)** é um enfraquecimento muito leve de uma propriedade comum a todos os sósitons de Ricci gradiente shrinking. Nesse sentido, seria interessante então investigar a possibilidade de remover tal estimativa como hipótese, o que até o momento dessa escrita constitui um problema em aberto.

Outro problema interessante seria investigar se a estimativa sobre Rm na segunda parte do Teorema **(T.3.2)** pode ser melhorada para $\|\text{Rm}\| \leq c_0 + (c_2\varepsilon) f$, ao invés de $\|\text{Rm}\| \leq c_0 + (c_2\varepsilon) f^2$.

Teorema (T.3.2). *Seja (\mathcal{M}^4, g, f) um sóliton de Ricci gradiente shrinking completo e não compacto de dimensão 4 que satisfaz*

$$\text{Scal} \leq A + \varepsilon f,$$

onde $A > 0$ e $0 \leq \varepsilon < 1$ são constantes. Então existem constantes c_0, c_1 e c_2 de forma que as seguintes estimativas de curvatura são satisfeitas em \mathcal{M} :

- $\|\text{Ric}\| \leq c_0 + (c_1\varepsilon)f$;

- $\|\text{Rm}\| \leq c_0 + (c_2\varepsilon)f^2$.

Demonstração: Provaremos primeiro a estimativa no tensor de Ricci, seguindo de perto os mesmos argumentos dados em [6] e [38]. Como sempre, faremos todos os cálculos em um referencial geodésico centrado em torno de um ponto $p \in \mathcal{M}$ fixado que, para evitar sobrecarga de notação, omitiremos. Além disso, também usaremos c ou C para denotar constantes universais (i.e. dependentes somente da dimensão da variedade, nesse caso 4) que podem mudar entre uma linha e outra. Assim, note que

$$\begin{aligned} \Delta_f (\|\text{Ric}\|^2) &= \Delta_f \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 4} (\text{Ric}_{ij})^2 \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq 4} 2 \cdot \text{Ric}_{ij} \Delta_f \text{Ric}_{ij} + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq 4} g(\nabla \text{Ric}_{ij}, \nabla \text{Ric}_{ij}) \\ &= 2 \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq 4} \left[\text{Ric}_{ij} \left(\text{Ric}_{ij} - 2 \sum_{1 \leq k, \ell \leq 4} \text{Rm}_{ikj\ell} \cdot \text{Ric}_{k\ell} \right) \right] + 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 \\ &= 2 \cdot \|\text{Ric}\|^2 + 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 - 4 \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 4} \text{Ric}_{ij} \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq k, \ell \leq 4} \text{Rm}_{ikj\ell} \cdot \text{Ric}_{k\ell} \right), \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos o lema (L.1.13) e na segunda usamos a parte (f) do lema (L.2.4). Agora, por Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq 4} \text{Rm}_{ikj\ell} \cdot \text{Ric}_{k\ell} &\leq c \sqrt{\sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq 4} (\text{Rm}_{ikj\ell})^2} \cdot \sqrt{\sum_{1 \leq k, \ell \leq 4} (\text{Ric}_{k\ell})^2} = c \cdot \|\text{Rm}\| \cdot \|\text{Ric}\|, \text{ assim como} \\ \sum_{1 \leq i, j \leq 4} \text{Ric}_{ij} &\leq c \cdot \|\text{Ric}\|. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta_f (\|\text{Ric}\|^2) &\geq 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 + 2 \cdot \|\text{Ric}\|^2 - c \cdot \|\text{Rm}\| \cdot \|\text{Ric}\|^2 \\ &\geq 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^3 - c \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde na última desigualdade descartamos o termo com $\|\text{Ric}\|^2$ e usamos a proposição (P.3.10). Para qualquer $0 < a < 1$, temos também:

$$\begin{aligned} \Delta_f (\text{Scal}^{-a}) &= \Delta (\text{Scal}^{-a}) - \nabla_{\nabla f} (\text{Scal}^{-a}) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 4} \left[(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i) (\text{Scal}^{-a}) - \mathbf{e}_i(f) \cdot \mathbf{e}_i (\text{Scal}^{-a}) \right] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 4} \left[\frac{a(a+1)}{\text{Scal}^{a+2}} \cdot (\mathbf{e}_i(\text{Scal}))^2 - a \cdot \text{Scal}^{-a-1} \cdot (\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i) (\text{Scal}) + a \cdot \mathbf{e}_i(f) \cdot \text{Scal}^{-a-1} \cdot \mathbf{e}_i(\text{Scal}) \right] \\ &= \frac{a(a+1)}{\text{Scal}^{a+2}} \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2 - a \cdot \text{Scal}^{-a-1} \cdot \Delta \text{Scal} + a \cdot \text{Scal}^{-a-1} \cdot g(\nabla f, \nabla \text{Scal}) \\ &= \frac{a(a+1)}{\text{Scal}^{a+2}} \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2 - a \cdot \text{Scal}^{-a-1} \Delta_f \text{Scal} \\ &= -\frac{a}{\text{Scal}^a} + 2a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^{a+1}} + \frac{a(a+1)}{\text{Scal}^{a+2}} \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a parte (c) do lema (L.2.4). Essa igualdade juntamente com a equação (3.12) e o lema (L.1.13) nos garantem que

$$\begin{aligned}
\Delta_f \left(\frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} \right) &= \frac{\Delta_f (\|\text{Ric}\|^2)}{\text{Scal}^a} + \|\text{Ric}\|^2 \cdot \Delta_f \left(\frac{1}{\text{Scal}^a} \right) + 2 \cdot g \left(\nabla (\|\text{Ric}\|^2), \nabla \left(\frac{1}{\text{Scal}^a} \right) \right) \\
&\geq \frac{1}{\text{Scal}^a} \left[2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^3 - c \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2 \right] \\
&+ \|\text{Ric}\|^2 \cdot \left[-\frac{a}{\text{Scal}^a} + 2a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^{a+1}} + \frac{a(a+1)}{\text{Scal}^{a+2}} \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2 \right] \cdot \Delta_f \left(\frac{1}{\text{Scal}^a} \right) \\
&+ 2 \cdot g \left(\nabla (\|\text{Ric}\|^2), \nabla \left(\frac{1}{\text{Scal}^a} \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Agora, como

$$\nabla (\|\text{Ric}\|^2) = 2 \cdot \|\text{Ric}\| \cdot \nabla (\|\text{Ric}\|), \text{ e } \nabla (\text{Scal}^{-a}) = -a \cdot \text{Scal}^{-a-1} \cdot \nabla \text{Scal},$$

segue que

$$2 \cdot g \left(\nabla (\|\text{Ric}\|^2), \nabla \left(\frac{1}{\text{Scal}^a} \right) \right) = -4a \cdot \text{Scal}^{-a-1} \cdot \|\text{Ric}\| \cdot g(\nabla \text{Scal}, \nabla (\|\text{Ric}\|)).$$

Mas pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Kato, temos

$$g(\nabla \text{Scal}, \nabla \|\text{Ric}\|) \leq \|\nabla \text{Scal}\| \cdot \|\nabla \|\text{Ric}\|\| \leq \|\nabla \text{Scal}\| \cdot \|\nabla \text{Ric}\|.$$

Logo,

$$2 \cdot g \left(\nabla (\|\text{Ric}\|^2), \nabla \left(\frac{1}{\text{Scal}^a} \right) \right) \geq -4a \cdot \text{Scal}^{-a-1} \cdot \|\text{Ric}\| \cdot \|\nabla \text{Scal}\| \cdot \|\nabla \text{Ric}\|.$$

Mas de

$$\left[\sqrt{a+1} \cdot \|\text{Ric}\| \cdot \|\nabla \text{Scal}\| \cdot \text{Scal}^{-1} - \frac{2}{\sqrt{a+1}} \right]^2 \geq 0,$$

segue que

$$-4 \cdot \text{Scal}^{-1} \cdot \|\text{Ric}\| \cdot \|\nabla \text{Scal}\| \cdot \|\nabla \text{Ric}\| \geq -(a+1) \cdot \|\text{Ric}\|^2 \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2 \cdot \text{Scal}^{-2} - \frac{4}{a+1} \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 \geq 0,$$

e portanto que

$$\begin{aligned}
-4a \cdot \text{Scal}^{-a-1} \cdot \|\text{Ric}\| \cdot \|\nabla \text{Scal}\| \cdot \|\nabla \text{Ric}\| &\geq -a(a+1) \cdot \|\text{Ric}\|^2 \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2 \cdot \text{Scal}^{-a-2} \\
&- \frac{4a}{a+1} \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 \cdot \text{Scal}^{-a}.
\end{aligned}$$

Obtemos então

$$2 \cdot g \left(\nabla (\|\text{Ric}\|^2), \nabla \left(\frac{1}{\text{Scal}^a} \right) \right) \geq -a(a+1) \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2 \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2}{\text{Scal}^{a+2}} - \frac{4a}{a+1} \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a},$$

Portanto, a equação (3.13) se escreve como

$$\begin{aligned}
\Delta_f \left(\frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} \right) &\geq \frac{1}{\text{Scal}^a} \left[2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^3 - c \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2 \right] \\
&+ \|\text{Ric}\|^2 \cdot \left[-\frac{a}{\text{Scal}^a} + 2a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^{a+1}} + \frac{a(a+1)}{\text{Scal}^{a+2}} \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2 \right] \cdot \Delta_f \left(\frac{1}{\text{Scal}^a} \right) \\
&- a(a+1) \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2 \cdot \|\nabla \text{Scal}\|^2}{\text{Scal}^{a+2}} - \frac{4a}{a+1} \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} \\
&\geq \frac{2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} - \frac{4a}{a+1} \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} - c \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} - c \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^3}{\text{Scal}^a} - a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} \\
&+ 2a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^4}{\text{Scal}^{a+1}} \\
&= \frac{2(1-a)}{(1+a)} \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} - c \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} - c \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^3}{\text{Scal}^a} - a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} + 2a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^4}{\text{Scal}^{a+1}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Agora, de

$$\left(4 \cdot (1-a) \cdot \|\nabla \text{Ric}\| \cdot \|\nabla f\| - (1+a) \cdot c \cdot \|\text{Ric}\|^2 \right)^2 \geq 0,$$

temos

$$16 \cdot (1-a)^2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 \cdot \|\nabla f\|^2 + (1+a)^2 \cdot c^2 \cdot \|\text{Ric}\|^4 - 8c \cdot (1-a) \cdot (1+a) \cdot \|\nabla \text{Ric}\| \cdot \|\text{Ric}\|^2 \cdot \|\nabla f\| \geq 0,$$

donde vem

$$\frac{2 \cdot (1-a)}{1+a} \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 \cdot \|\nabla f\|^2 + \frac{(1+a)}{8 \cdot (1-a)} \cdot c^2 \cdot \|\text{Ric}\|^4 - c \cdot \|\nabla \text{Ric}\| \cdot \|\text{Ric}\|^2 \cdot \|\nabla f\| \geq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{2 \cdot (1-a)}{1+a} \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} - c \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} \geq -\frac{(1+a)}{8 \cdot (1-a)} \cdot \frac{c^2}{\|\nabla f\|^2} \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^4}{\text{Scal}^a}.$$

E portanto, agora substituindo c por $\tilde{c} = -\frac{1+a}{8} \cdot c^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_f \left(\frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} \right) &\geq \left(2a - \frac{\tilde{c}}{(1-a)} \cdot \frac{\text{Scal}}{\|\nabla f\|^2} \right) \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^4}{\text{Scal}^{a+1}} - c \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^3}{\text{Scal}^a} - a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} \\
&\geq \left(2a - \frac{C}{(1-a)} \cdot \frac{\text{Scal}}{\|\nabla f\|^2} \right) \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^4}{\text{Scal}^{a+1}} - C \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^3}{\text{Scal}^a} - a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $C \doteq \max\{c, \tilde{c}\}$. Por simplicidade cometeremos o abuso de notação de denotar C por c . Mas como já vimos na parte (d) do lema (L.2.4), temos $\text{Scal} + \|\nabla f\|^2 = f$, de forma que a nossa hipótese sobre Scal implica que

$$\|\nabla f\|^2 = f - \text{Scal} \geq f - A - \varepsilon f = (1-\varepsilon)f - A. \tag{3.16}$$

Segue então que

$$\frac{\text{Scal}}{\|\nabla f\|^2} \leq \frac{\text{Scal}}{(1-\varepsilon)f - A} \leq \frac{\varepsilon f + A}{(1-\varepsilon)f - A}.$$

Usando esta desigualdade na desigualdade (3.15), temos

$$\Delta_f \left(\frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a} \right) \geq \left(2a - \frac{c}{1-a} \cdot \frac{\varepsilon f + A}{(1-\varepsilon)f - A} \right) \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^4}{\text{Scal}^{a+1}} - c \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^3}{\text{Scal}^a} - a \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\text{Scal}^a}. \quad (3.17)$$

Agora, precisamos então considerar o termo

$$\Gamma = 2a - \frac{c}{1-a} \cdot \frac{\varepsilon f + A}{(1-\varepsilon)f - A}.$$

Tomando $a = \frac{1}{2}$, vemos que

$$\Gamma = 1 - \frac{2c \cdot (\varepsilon f + A)}{(1-\varepsilon)f - A}.$$

Agora, definindo $C \doteq \frac{1-\varepsilon-4c \cdot \varepsilon}{1+4c}$ e escolhendo $r_0 > 0$ grande o suficiente no lema (L.3.1) de forma que

$$r_0 > \max \left\{ \frac{A}{C}, \frac{1+4c}{4c} \cdot (1+A) \right\}, \quad (3.18)$$

vemos então que

$$A \leq \left(\frac{1-\varepsilon-4c \cdot \varepsilon}{1+4c} \right) f,$$

em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$, onde $D_{r_0} \doteq \{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \leq r_0\}$. Em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$, temos então

$$\begin{aligned} 2c \cdot (\varepsilon f + A) &\leq 2c \left(\varepsilon f + \frac{1-\varepsilon-4c \cdot \varepsilon}{1+4c} f \right) \\ &= \frac{2c}{1+4c} f. \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\varepsilon)f - A} &\leq \frac{1+4c}{(1+4c)(1-\varepsilon)f - (1-\varepsilon-4c \cdot \varepsilon)f} \\ &= \frac{1+4c}{4cf}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{2c(\varepsilon f + A)}{(1-\varepsilon)f - A} \leq \frac{2c \cdot f}{1+4c} \cdot \frac{1+4c}{4c \cdot f} = \frac{1}{2}$$

em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$. Lembrando da observação (O.82), podemos também supor sem perda de generalidade que $\varepsilon < (1+4c)^{-1}$, de forma que

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)f - A &> \left(1 - \frac{1}{1+4c} \right) f - A \\ &= \frac{4c \cdot f}{1+4c} - A \\ &> \frac{4c \cdot r_0}{1+4c} - A \\ &> \frac{4c}{1+4c} \cdot \frac{1+4c}{4c} \cdot (1+A) - A \end{aligned}$$

$$= 1,$$

em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$. Provamos então que o comportamento assintótico de f previsto pelo **(L.3.1)** garante a existência de um $r_0 > 0$ que depende unicamente de A e ε tal que

$$\Gamma \geq \frac{1}{2}, \text{ e } (1 - \varepsilon f) - A \geq 1 \text{ em } \mathcal{M} \setminus D_{r_0}.$$

Portanto, definindo $u \doteq \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\sqrt{\text{Scal}}}$ e lembrando que tomamos $a = \frac{1}{2}$, a equação **(3.17)** se escreve como

$$\begin{aligned} \Delta_f u &\geq \Gamma \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^4}{\text{Scal}^{\frac{3}{2}}} - c \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^3}{\sqrt{\text{Scal}}} - \frac{\|\text{Ric}\|^2}{2 \cdot \sqrt{\text{Scal}}} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot \text{Scal}^{-\frac{1}{2}} - c \cdot u^{\frac{3}{2}} \cdot \text{Scal}^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} u \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot \text{Scal}^{-\frac{1}{2}} - c \cdot u^{\frac{3}{2}} \cdot \text{Scal}^{\frac{1}{4}} - u, \end{aligned} \tag{3.19}$$

em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$. Considere agora uma função suave $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \\ 1, & \text{se } 1 \leq t \leq 2. \\ 0, & \text{se } t > 3; \end{cases}$$

e definamos $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = \eta\left(\frac{f(x)}{\rho^2}\right)$, onde $\rho > 2 \cdot r_0$ é uma constante.

Observação (O.84). Note que $\varphi(x) = 1$ sempre que $\frac{f(x)}{\rho^2} \in [1, 2]$, e $\varphi(x) = 0$ sempre que $\frac{f(x)}{\rho^2} > 3$ ou $\frac{f(x)}{\rho^2} \leq \frac{1}{2}$. Portanto, na argumentação que vem a seguir, podemos sem perda de generalidade trabalhar somente com os pontos $x \in \mathcal{M}$ que satisfazem

$$\frac{\rho^2}{2} \leq f(x) \leq 3 \cdot \rho^2.$$

Agora, como

$$(\nabla \varphi)_x = \frac{1}{\rho^2} \cdot \eta' \left(\frac{f(x)}{\rho^2} \right) \cdot (\nabla f)_x, \quad \forall x \in \mathcal{M},$$

e também (pela parte **(d)** do lema **(L.2.4)**):

$$\|\nabla f\|^2 = f - \text{Scal} \leq f,$$

segue que

$$\|\nabla \varphi\| \leq |\eta'| \cdot \frac{\|\nabla f\|}{\rho^2} \leq |\eta'| \cdot \frac{\sqrt{f}}{\rho^2} \leq |\eta'| \cdot \frac{\sqrt{3}}{\rho}.$$

Note também que seja qual for $x \in \mathcal{M}$, vale

$$\begin{aligned} (\Delta_f \varphi)(x) &= \sum_{1 \leq i \leq 4} [(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i)(\varphi) - \mathbf{e}_i(f) \cdot \mathbf{e}_i(\varphi)] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 4} \left[\frac{1}{\rho^4} \cdot \eta'' \left(\frac{f(x)}{\rho^2} \right) \cdot (\mathbf{e}_i(f))^2 + \frac{1}{\rho^2} \cdot \eta' \left(\frac{f(x)}{\rho^2} \right) \cdot (\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i)(f) - \frac{1}{\rho^2} \cdot (\mathbf{e}_i(f))^2 \cdot \eta' \left(\frac{f(x)}{\rho^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho^4} \cdot \eta'' \left(\frac{f(x)}{\rho^2} \right) \cdot \|\nabla f\|^2 + \frac{1}{\rho^2} \cdot \eta' \left(\frac{f(x)}{\rho^2} \right) \cdot \Delta_f f. \end{aligned}$$

Por construção, η e todas as suas derivadas têm suporte compacto, portanto existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C > \max \left\{ \frac{\eta''}{2 \cdot \rho^4}, \frac{\eta'}{2 \cdot \rho^2} \right\}.$$

Usando também as partes **(a)** e **(d)** do lema **(L.2.4)**, vemos que

$$\Delta_f f = \Delta f - \nabla_{\nabla f} f = \Delta f - \|\nabla f\|^2 = 2 - \text{Scal} - (f - \text{Scal}) = 2 - f.$$

Segue então que:

$$\Delta_f \varphi = \eta'' \cdot \frac{\|\nabla f\|^2}{\rho^4} + \eta' \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot \Delta_f f \leq \eta'' \cdot \frac{\|\nabla f\|^2}{\rho^4} + \eta' \cdot \frac{2-f}{\rho^2} \leq \frac{C}{2} \cdot 2 = C.$$

Definimos agora $G = \varphi^2 \cdot u = \varphi^2 \cdot \frac{\|\text{Ric}\|^2}{\sqrt{\text{Scal}}}$, e daqui em diante denotaremos Scal por R . Pelos lemas **(L.1.5)** e **(L.1.13)**, temos

$$\nabla G = \nabla(\varphi^2 \cdot u) = (\nabla u) \cdot \varphi^2 + u \cdot \nabla(\varphi^2), \text{ e } \Delta_f(\varphi^2) = 2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2\varphi \cdot \Delta_f \varphi.$$

Portanto, usando a equação **(3.19)** e o lema **(L.1.13)** novamente vemos que

$$\begin{aligned} \varphi^2 \cdot \Delta_f G &= \varphi^2 \cdot \Delta_f(u \cdot \varphi^2) = \varphi^2 \cdot [u \cdot \Delta_f(\varphi^2) + \varphi^2 \cdot \Delta_f u + 2 \cdot g(\nabla u, \nabla[\varphi^2])] \\ &= \varphi^4 \cdot \Delta_f u + \varphi^2 u \cdot (2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2\varphi \cdot \Delta_f \varphi) + 2 \cdot g((\nabla u) \cdot \varphi^2, \nabla[\varphi^2]) \\ &\geq \varphi^4 \left[\frac{1}{2} u^2 R^{-\frac{1}{2}} - c u^{\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{4}} - c u \right] + \varphi^2 u \cdot (2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2\varphi \cdot \Delta_f \varphi) + 2 \cdot g(\nabla G - u \cdot \nabla(\varphi^2), \nabla[\varphi^2]) \\ &= \varphi^4 \left[\frac{1}{2} u^2 R^{-\frac{1}{2}} - c u^{\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{4}} - c u \right] + \varphi^2 u \cdot (2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2\varphi \cdot \Delta_f \varphi) \\ &\quad + 2 \cdot g(\nabla G, \nabla[\varphi^2]) - 2u \cdot \|\nabla(\varphi^2)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varphi^4 u^2 R^{-\frac{1}{2}} - \varphi \cdot c \cdot \varphi^3 u^{\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{4}} - \varphi^2 \cdot c \cdot \varphi^2 u + 2 \cdot g(\nabla G, \nabla[\varphi^2]) \\ &\quad + \varphi^2 u \cdot (2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2\varphi \cdot \Delta_f \varphi) - 8\varphi^2 u \cdot \|\nabla \varphi\|^2. \end{aligned}$$

Usando agora que (por construção) φ e todas as suas derivadas têm suporte compacto, tomaremos constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2\varphi \cdot \Delta_f \varphi \geq -c_1, \text{ e } -8 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 \geq -c_2.$$

Obtemos então (usando agora também que $0 \leq \varphi \leq 1$):

$$\begin{aligned} \varphi^2 \cdot \Delta_f G &\geq \frac{1}{2} G^2 R^{-\frac{1}{2}} - c \cdot G^{\frac{3}{2}} \cdot R^{\frac{1}{4}} - (c + c_1 + c_2)G + 2 \cdot g(\nabla G, \nabla[\varphi^2]) \\ &\geq \frac{1}{2} G^2 R^{-\frac{1}{2}} - c_3 \cdot G^{\frac{3}{2}} \cdot R^{\frac{1}{4}} - c_3 G + 2 \cdot g(\nabla G, \nabla[\varphi^2]), \end{aligned}$$

onde $c_3 = c + c_1 + c_2$. Por simplicidade cometeremos o abuso de notação de denotar c_3 por c . Agora, como $D_{3\rho^2}$ é compacto (conforme vimos na observação **(O.82)**), existe $q \in D_{3\rho^2}$ tal que $G(q) \geq G(x) \forall x \in D_{3\rho^2}$. Em q , temos então (conforme o lema **(L.1.11)**):

$$\varphi^2 \cdot (\Delta_f G)_q = \varphi^2 [(\Delta G)(q) - g((\nabla f)_q, (\nabla G)_q)] = \varphi^2 \cdot (\Delta G)(q) \leq 0,$$

e portanto

$$0 \geq \frac{1}{2} G^2(q) R^{\frac{1}{2}}(q) - c \cdot G^{\frac{3}{2}}(q) - cG(q).$$

Definindo $v \doteq G^{\frac{1}{2}}$, segue daí que

$$0 \geq \frac{1}{2} v^4 R^{-\frac{1}{2}} - c \cdot v^3 R^{\frac{1}{4}} - v^2,$$

em q . Ou, equivalentemente,

$$0 \geq \frac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} v^2 - c R^{\frac{1}{4}} v - c,$$

em q . Vemos então que v deve satisfazer (em q):

$$\frac{cR^{\frac{1}{4}} - \sqrt{c^2 R^{\frac{1}{2}} + 2R^{-\frac{1}{2}}c}}{R^{-\frac{1}{2}}} \leq v \leq \frac{cR^{\frac{1}{4}} + \sqrt{c^2 R^{\frac{1}{2}} + 2R^{-\frac{1}{2}}c}}{R^{-\frac{1}{2}}}.$$

Logo, em q vale

$$v \leq cR^{\frac{3}{4}} + \sqrt{c^2 R^{\frac{3}{2}} + 2R^{\frac{1}{2}}} \leq cR^{\frac{3}{4}} + cR^{\frac{3}{4}} + \sqrt{2} \cdot R^{\frac{1}{4}} \leq 3c \cdot R^{\frac{3}{4}} = CR^{\frac{3}{4}},$$

onde assumimos sem perda de generalidade que $c \geq \sqrt{2} \cdot R^{-\frac{1}{2}}(q)$. Novamente cometeremos o abuso de denotar C por c . Portanto,

$$v(q) \leq cR^{\frac{3}{4}}(q),$$

e conseqüentemente,

$$G(q) \leq cR^{\frac{3}{2}}(q).$$

Pela maneira que o ponto q foi tomado e pela nossa hipótese sobre R , temos também que

$$G(x) \leq G(q) \leq cR^{\frac{3}{2}} \leq c \cdot (\varepsilon f(q) + A)^{\frac{3}{2}}, \quad \forall x \in D_{3\rho^2}.$$

Por definição, em $D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2}$ temos $\rho^2 < f(x) \leq 2\rho^2$. Como por construção $q \in D_{3\rho^2}$, segue que existe $C > 0$ (basta tomar $C \geq 3$) tal que $Cf(x) \geq f(q)$, $\forall x \in D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2}$.

Segue então que em $D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2}$, $\|\text{Ric}\|$ satisfaz:

$$\|\text{Ric}\|^2(x) = G(x)R^{\frac{1}{2}}(x) \leq G(q)R^{\frac{1}{2}}(x)$$

$$\begin{aligned} &\leq c \cdot (\varepsilon f(q) + A)^{\frac{3}{2}} \cdot (\varepsilon f(x) + A)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \cdot (\varepsilon C f(x) + A)^{\frac{3}{2}} \cdot (\varepsilon f(x) + A)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Tome agora uma constante $C' > 0$ tal que

$$C' \geq \left(\frac{2C\varepsilon\rho^2 + A}{2\varepsilon\rho^2 + A} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Tal C' obviamente satisfaz:

$$C' \geq \left(\frac{C\varepsilon f(x) + A}{\varepsilon f(x) + A} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \forall x \in D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2} \iff (C\varepsilon f(x) + A)^{\frac{3}{2}} \leq C'(\varepsilon f(x) + A)^{\frac{3}{2}}, \quad \forall x \in D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2}.$$

E, portanto, em $D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2}$, $\|\text{Ric}\|$ satisfaz:

$$\|\text{Ric}\|^2(x) \leq C_1 \cdot (\varepsilon f(x) + A)^2,$$

onde $C_1 \doteq c \cdot C'$. Definindo então $c_0 \doteq A\sqrt{C_1}$ e $c_1 \doteq \sqrt{C'}$, obtemos:

$$\|\text{Ric}\|(x) \leq c_0 + (c_1\varepsilon) \cdot f(x), \quad \forall x \in D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2}.$$

Como $\rho > 0$ pode ser tomado de forma arbitrariamente grande, temos então (agora denotando $4r_0^2$ por r_0):

$$\|\text{Ric}\|(x) \leq c_0 + (c_1\varepsilon) \cdot f(x), \quad \forall x \in \bigcup_{\rho > 2r_0} f^{-1}((\rho^2, 2\rho^2]) = \mathcal{M} \setminus D_{r_0}.$$

Como D_{r_0} é compacto, existem constantes $M, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\|\text{Ric}\|(x) \leq M$ e $f(x) \geq \beta$ sempre que $x \in D_{r_0}$. Tomando $c_0 > 0$ grande o suficiente, temos então $\|\text{Ric}\| \leq c_0 + (c_1\varepsilon)f$ em D_{r_0} também, de forma que a estimativa

$$\|\text{Ric}\| \leq c_0 + (c_1\varepsilon)f$$

é válida na verdade em toda \mathcal{M} , como desejado.

Trataremos agora da segunda estimativa do Teorema, ou seja, a estimativa no tensor de curvatura Rm. Novamente iremos usar a mesma abordagem vista em [6]. Primeiramente, note que (usando a (2.13) e (2.14)), a representação em coordenadas (novamente, em um referencial geodésico) da (2.15) é dada por:

$$(\Delta_f \text{Rm})_{ijkl} = \text{Rm}_{ijkl} - 2 \cdot \sum_{1 \leq s, t \leq 4} (\text{Rm}_{\ell kst} \text{Rm}_{ijst} - \text{Rm}_{jst\ell} \text{Rm}_{sikt} + \text{Rm}_{ist\ell} \text{Rm}_{sjkt}). \quad (3.20)$$

Agora, note que (pelo lema (L.1.13))

$$\Delta_f(\|\text{Rm}\|^2) = 2 \cdot \|\text{Rm}\| \cdot \Delta_f(\|\text{Rm}\|) + 2 \cdot \|\nabla\|\text{Rm}\|^2,$$

e portanto

$$\|\text{Rm}\| \cdot \Delta_f(\|\text{Rm}\|) = \Delta_f(\|\text{Rm}\|^2) - \|\nabla\|\text{Rm}\|^2.$$

Mas como

$$\begin{aligned}\Delta_f(\|\text{Rm}\|^2) &= \Delta_f \left(\sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq 4} (\text{Rm}_{ijkl})^2 \right) = \sum_{i,j,k,\ell} \left[\text{Rm}_{ijkl} \cdot \Delta_f \text{Rm}_{ijkl} + \|\nabla \text{Rm}_{ijkl}\|^2 \right] \\ &= \left(\sum_{i,j,k,\ell} \text{Rm}_{ijkl} \cdot \Delta_f \text{Rm}_{ijkl} \right) + \|\nabla \text{Rm}\|^2,\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Kato temos

$$\|\nabla \text{Rm}\|^2 - \|\nabla \|\text{Rm}\|\|^2 \geq 0,$$

segue então da equação (3.20) que

$$\begin{aligned}\|\text{Rm}\| \cdot \Delta_f(\|\text{Rm}\|) &\geq \sum_{i,j,k,\ell} \text{Rm}_{ijkl} \cdot \Delta_f \text{Rm}_{ijkl} \\ &= \|\text{Rm}\|^2 - 2 \cdot \sum_{i,j,k,\ell,s,t} \text{Rm}_{ijkl} (\text{Rm}_{\ell kst} \text{Rm}_{ijst} - \text{Rm}_{jst\ell} \text{Rm}_{sikt} + \text{Rm}_{ist\ell} \text{Rm}_{sjkt}).\end{aligned}$$

Podemos lidar com todos os termos nos somatórios que aparecem na segunda parcela da expressão acima de maneira óbvia (usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz), de forma que obtemos

$$\Delta_f(\|\text{Rm}\|) \geq \|\text{Rm}\| - c \cdot \|\text{Rm}\|^2 \geq -c \cdot \|\text{Rm}\|^2. \quad (3.21)$$

Por outro lado, segue da equação (3.12) que

$$\begin{aligned}\Delta_f(\|\text{Ric}\|^2) &\geq 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 + 2 \cdot \|\text{Ric}\|^2 - 4 \cdot \|\text{Rm}\| \cdot \|\text{Ric}\|^2 \\ &\geq 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 + 2 \cdot \|\text{Ric}\|^2 - C \cdot \|\text{Ric}\|^3 - C \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2.\end{aligned}$$

Assim, usando a equação (3.21), obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta_f(\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2) &\geq \underbrace{-c}_{=1-(c+1)} \cdot \|\text{Rm}\|^2 + 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 + 2 \cdot \|\text{Ric}\|^2 - C \cdot \|\text{Ric}\|^3 - C \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2 \\ &= \|\text{Rm}\|^2 - (c+1) \cdot \|\text{Rm}\|^2 + 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 + 2 \cdot \|\text{Ric}\|^2 \\ &\quad - C \cdot \|\text{Ric}\|^3 - C \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2.\end{aligned}$$

Agora, pela proposição (P.3.10), existe $C_0 > 0$ tal que:

$$-(c+1) \cdot \|\text{Rm}\|^2 \geq -C_0 \cdot \|\text{Ric}\|^2 - C_0 \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\| \cdot \|\text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} - C_0 \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\|\nabla f\|^2}.$$

Usando o fato de que

$$-2ab \geq -(a^2 + b^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

segue então que existe $c_0 > 0$ tal que

$$-(c+1) \cdot \|\text{Rm}\|^2 \geq -c_0 \cdot \|\text{Ric}\|^2 - c_0 \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\|\nabla f\|^2}.$$

Logo, (denotando c_0 por c agora)

$$\begin{aligned} \Delta_f (\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2) &\geq \|\text{Rm}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^2 - c \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\|\nabla f\|^2} \\ &\quad + 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 - C \cdot \|\text{Ric}\|^3 - C \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora, de

$$\left(\frac{C}{2} \cdot \|\text{Ric}\|^2 - \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \right)^2 \geq 0,$$

obtemos

$$C \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2 \leq \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\|\nabla f\|^2} + \frac{C^2}{4} \cdot \|\text{Ric}\|^4.$$

A fortiori,

$$-C \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|}{\|\nabla f\|} \cdot \|\text{Ric}\|^2 \geq -2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 - \frac{C^2}{4} \cdot \|\text{Ric}\|^4.$$

Assim (agora já supondo sem perda de generalidade que $c \geq C$ e $C^2 \geq 4c$), a equação (3.22) se escreve como

$$\begin{aligned} \Delta_f (\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2) &\geq \|\text{Rm}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^3 - c \cdot \|\text{Ric}\|^4 \\ &\quad + 2 \cdot \|\nabla \text{Ric}\|^2 - c \cdot \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\|\nabla f\|^2} - \frac{\|\nabla \text{Ric}\|^2}{\|\nabla f\|^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Podemos também assumir sem perda de generalidade que r_0 é grande o suficiente de forma que $\|\nabla f\|^2 \geq (1 - \varepsilon)f - A \geq \frac{c+1}{2}$. Dessa maneira, a equação (3.23) se escreve como

$$\Delta_f (\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2) \geq \|\text{Rm}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^3 - c \cdot \|\text{Ric}\|^4,$$

em $D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2}$. A compacidade de $D_{2\rho^2}$ garante também a existência de $c_0, A > 0$ tal que $-c_0\|\text{Ric}\|^2 \geq -A\|\text{Ric}\|^3$ em $D_{2\rho^2}$. Cometendo o abuso usual de não explicitar as renomeações das constantes, temos

$$\Delta_f (\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2) \geq \|\text{Rm}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^3 - c \cdot \|\text{Ric}\|^4,$$

em $D_{2\rho^2} \setminus D_{\rho^2}$. Novamente, como $\rho > 2 \cdot r_0$ pode ser tomado de maneira arbitrariamente grande, concluímos que

$$\Delta_f (\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2) \geq \|\text{Rm}\|^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^3 - c \cdot \|\text{Ric}\|^4$$

vale em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$. Agora, de

$$a^2 = \frac{1}{2} [(a+b^2)^2 + (a-b^2)^2 - 2b^4] \geq \frac{1}{2}(a+b^2)^2 - 2b^4, \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

concluimos que

$$\Delta_f \left(\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2 \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2 \right)^2 - c \cdot \|\text{Ric}\|^4 - c \cdot \|\text{Ric}\|^3,$$

em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$. Além disso, usando a estimativa $\|\text{Ric}\| \leq c_0 + (c_1\varepsilon)f$ estabelecida na primeira parte da demonstração, vemos que

$$\Delta_f \left(\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2 \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2 \right)^2 - \beta(f), \quad (3.24)$$

em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$, onde $\beta(f) \doteq c \cdot \left[(c_0 + (c_1\varepsilon)f)^4 + (c_0 + (c_1\varepsilon)f)^3 \right]$. Assim como fizemos na primeira parte da demonstração, vamos considerar agora as mesmas funções η e $\varphi = \eta \left(\frac{f(x)}{\rho^2} \right)$, que têm suportes compactos contidos em $[2^{-1}, 2]$ e $D_{3\rho^2}$, respectivamente. Definiremos também $Q \doteq \varphi^2 \cdot \psi$, com $\psi \doteq \|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2$. Pelo lema (L.1.13), vemos que

$$\Delta_f Q = \psi \cdot \Delta_f(\varphi^2) + \varphi^2 \cdot (\Delta_f \psi) + 2 \cdot g(\nabla[\varphi^2], \nabla \psi).$$

Agora, lembrando que (pelo lema (L.1.5))

$$g(\nabla[\varphi^2], \nabla Q) = g(\nabla \varphi^2, \psi \cdot \nabla[\varphi^2] + \varphi^2 \cdot \nabla \psi) = \psi \cdot \|\nabla(\varphi^2)\|^2 + \varphi^2 \cdot g(\nabla[\varphi^2], \nabla \psi),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \varphi^2 \cdot \Delta_f Q &= (\varphi^2 \psi) \cdot \Delta_f(\varphi^2) + \varphi^4 \cdot \Delta_f \psi + 2\varphi^2 \cdot g(\nabla[\varphi^2], \nabla \psi) \\ &= (\varphi^2 \psi) \cdot \Delta_f(\varphi^2) + \varphi^4 \cdot \Delta_f \psi + 2 \cdot g(\nabla(\varphi^2), \nabla Q) - 2\psi \cdot \|\nabla(\varphi^2)\|^2 \end{aligned}$$

Portanto, usando que $\Delta_f(\varphi^2) = 2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2 \cdot \varphi \cdot \Delta_f \varphi$ e lembrando da equação (3.24), obtemos

$$\varphi^2 \cdot \Delta_f Q = Q \cdot (2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2 \cdot \varphi \cdot \Delta_f \varphi) + \varphi^4 \cdot \underbrace{\Delta_f \psi}_{\geq \frac{1}{2}\psi^2 - \beta} + 2 \cdot g(\nabla(\varphi^2), \nabla Q) - \underbrace{2\psi \cdot \|\nabla(\varphi^2)\|^2}_{-8Q \cdot \|\nabla \varphi\|^2}.$$

Como já argumentamos anteriormente, o fato de φ e η e todas suas derivadas terem suporte compacto garante a existência de uma constante $c > 0$ tal que

$$2 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 + 2 \cdot \varphi \cdot \Delta_f \varphi \geq -c, \text{ e } -8 \cdot \|\nabla \varphi\|^2 \geq -c.$$

Logo, usando também que $0 \leq \varphi \leq 1$, obtemos

$$\varphi^2 \cdot \Delta_f Q \geq \frac{1}{2} Q^2 - cQ + 2g(\nabla[\varphi^2], \nabla Q) - \beta.$$

Usando o lema (L.1.11), obtemos então que em um ponto de máximo de Q em $D_{3\rho^2}$, digamos $y \in \mathcal{M}$, temos

$$0 \geq \left(\frac{1}{2} Q^2 - cQ - \beta \right) (y).$$

Segue que

$$c - \sqrt{c^2 + 2\beta} \leq Q(y) \leq c + \sqrt{c^2 + 2\beta}.$$

Usando repetidamente a desigualdade

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

obtemos então

$$Q(y) \leq (c + c_0 \cdot \sqrt{f} + c_1 \cdot f + c_2 \cdot f^2 + c_3 \cdot f^{\frac{3}{2}})(y).$$

Usando o fato de que $y \in D_{3\rho^2}$ é ponto de máximo e que ρ pode ser arbitrariamente grande, concluimos que

$$Q = \varphi^2 \cdot (\|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2) \leq c + (c_2\varepsilon)f^2,$$

em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$. Como φ tem suporte compacto (em particular existem constantes $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi([0, \infty)) \subset [s, t]$), concluimos que

$$\|\text{Rm}\| \leq \|\text{Rm}\| + \|\text{Ric}\|^2 \leq c + (c_2\varepsilon)f^2,$$

em $\mathcal{M} \setminus D_{r_0}$. Como argumentamos na primeira parte da prova, a constante c pode ser escolhida de forma que a estimativa desejada seja satisfeita em toda \mathcal{M} . Isto completa a prova do Teorema. ■

Apêndice

Alguns cálculos importantes

Sobre a extensão da métrica a tensores: Há uma sutileza implícita na definição (D.1.21). O que estamos dizendo, na verdade, é que para calcular o valor da função $g(P, Q)$ em um ponto $q \in \mathcal{M}$, tomamos uma carta φ em torno de uma vizinhança $U_q \ni q$ (de onde nascem as componentes locais da definição acima, que são calculadas usando o referencial e co-referencial induzido por φ), e aí calculamos a expressão

$$\left(\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_\ell \leq n \\ 1 \leq r_1, \dots, r_k \leq n \\ 1 \leq s_1, \dots, s_\ell \leq n}} g_{i_1 r_1} g_{i_2 r_2} \dots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1} g^{j_2 s_2} \dots g^{j_\ell s_\ell} P_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} Q_{s_1 \dots s_\ell}^{r_1 \dots r_k} \right) (q). \quad (4.25)$$

A priori, poderia acontecer que tomando outra carta ψ em torno de x , que induz outro referencial $\left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right\}_{1 \leq i \leq n}$ e outro co-referencial $\{d\tilde{x}^i\}_{1 \leq i \leq n}$, tivéssemos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_\ell \leq n \\ 1 \leq r_1, \dots, r_k \leq n \\ 1 \leq s_1, \dots, s_\ell \leq n}} g_{i_1 r_1} g_{i_2 r_2} \dots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1} g^{j_2 s_2} \dots g^{j_\ell s_\ell} P_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} Q_{s_1 \dots s_\ell}^{r_1 \dots r_k} \right) (q) \\ & \neq \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_\ell \leq n \\ 1 \leq r_1, \dots, r_k \leq n \\ 1 \leq s_1, \dots, s_\ell \leq n}} g_{\tilde{i}_1 \tilde{r}_1} g_{\tilde{i}_2 \tilde{r}_2} \dots g_{\tilde{i}_k \tilde{r}_k} g^{\tilde{j}_1 \tilde{s}_1} g^{\tilde{j}_2 \tilde{s}_2} \dots g^{\tilde{j}_\ell \tilde{s}_\ell} P_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_\ell}^{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_k} Q_{\tilde{s}_1 \dots \tilde{s}_\ell}^{\tilde{r}_1 \dots \tilde{r}_k} \right) (q). \end{aligned}$$

Verificaremos agora que isso não acontece. Para evitar extrema sobrecarga de notação, usaremos a notação de Einstein nos cálculos a seguir (ou seja, adotaremos a convenção de que quando um índice aparece em cima e em baixo, estamos somando sobre tal índice). Fixemos uma nova carta $\psi : V \subset \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\tilde{T}_{i_1 \dots i_b}^{j_1 \dots j_a}$ as componentes de um tensor T no novo sistema de coordenadas ψ , e usaremos também a notação

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right|_p = \partial_k,$$

e

$$dx^{j_k} \Big|_p = \partial^k.$$

Queremos então estabelecer a seguinte igualdade:

$$g_{j_1 r_1} \dots g_{j_a r_a} g^{i_1 m_1} \dots g^{i_b m_b} P_{i_1 \dots i_b}^{j_1 \dots j_a} Q_{m_1 \dots m_b}^{r_1 \dots r_a} = \tilde{g}_{\mu_{j_1} \mu_{r_1}} \dots \tilde{g}_{\mu_{j_a} \mu_{r_a}} \tilde{g}^{\theta_{i_1} \theta_{m_1}} \dots \tilde{g}^{\theta_{i_b} \theta_{m_b}} \tilde{P}_{\theta_{i_1} \dots \theta_{i_b}}^{\mu_{j_1} \dots \mu_{j_a}} \tilde{Q}_{\theta_{m_1} \dots \theta_{m_b}}^{\mu_{r_1} \dots \mu_{r_a}}.$$

Chamaremos o lado esquerdo da expressão acima de A e o lado direito de B . Observemos inicialmente que se $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é uma base de um espaço vetorial \mathbb{V} e $\{\mathbf{e}^i\}_{1 \leq i \leq n}$ é sua base dual associada, então todo $v \in \mathbb{V}$ se escreve como

$$v = \mathbf{e}^i(v) \mathbf{e}_i,$$

e todo $f \in \mathbb{V}^*$ se escreve como

$$f = f(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}^i.$$

Em particular, para cada $1 \leq k \leq n$, temos

$$\partial_{j_k} = \tilde{\partial}^{\mu_{j_k}} (\partial_{j_k}) \tilde{\partial}_{\mu_{j_k}}.$$

Analogamente, temos

$$\partial^{i_k} = \partial^{i_k} (\tilde{\partial}_{\theta_{i_k}}) \tilde{\partial}^{\theta_{i_k}},$$

Portanto, definindo as expressões A_1, A_2, A_3 e A_4 por:

$$\begin{aligned} A_1 &\doteq g_{j_1 r_1} \dots g_{j_a r_a}, \\ A_2 &\doteq g^{i_1 m_1} \dots g^{i_b m_b}, \\ A_3 &\doteq P_{i_1 \dots i_b}^{j_1 \dots j_a}, \\ A_4 &\doteq Q_{m_1 \dots m_b}^{r_1 \dots r_a}; \end{aligned}$$

vemos que

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{\partial}^{\mu_{j_1}} (\partial_{j_1}) \tilde{\partial}^{\mu_{r_1}} (\partial_{r_1}) \dots \tilde{\partial}^{\mu_{j_a}} (\partial_{j_a}) \tilde{\partial}^{\mu_{r_a}} (\partial_{r_a}) \tilde{g}_{\mu_{j_1} \mu_{r_1}} \dots \tilde{g}_{\mu_{j_a} \mu_{r_a}}, \\ A_2 &= \partial^{i_1} (\tilde{\partial}_{\theta_{i_1}}) \partial^{m_1} (\tilde{\partial}_{\theta_{m_1}}) \dots \partial^{i_b} (\tilde{\partial}_{\theta_{i_b}}) \partial^{m_b} (\tilde{\partial}_{\theta_{m_b}}) \tilde{g}^{\theta_{i_1} \theta_{m_1}} \dots \tilde{g}^{\theta_{i_b} \theta_{m_b}}, \\ A_3 &= \partial^{j_1} (\tilde{\partial}_{\beta_{j_1}}) \dots \partial^{j_a} (\tilde{\partial}_{\beta_{j_a}}) \tilde{\partial}^{\lambda_{i_1}} (\partial_{i_1}) \dots \tilde{\partial}^{\lambda_{i_b}} (\partial_{i_b}) \tilde{P}_{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_b}}^{\beta_{j_1} \dots \beta_{j_a}}, \\ A_4 &= \partial^{r_1} (\tilde{\partial}_{\xi_{r_1}}) \tilde{\partial}^{\xi_{r_1}} \dots \partial^{r_a} (\tilde{\partial}_{\xi_{r_a}}) \tilde{\partial}^{\xi_{r_a}} \tilde{\partial}^{\eta_{m_1}} (\partial_{m_1}) \dots \tilde{\partial}^{\eta_{m_b}} (\partial_{m_b}) \tilde{Q}_{\eta_{m_1} \dots \eta_{m_b}}^{\xi_{r_1} \dots \xi_{r_a}}. \end{aligned}$$

Agrupando os termos de maneira conveniente, segue que

$$\begin{aligned}
A &= \left(\prod_{1 \leq k \leq a} \tilde{\partial}^{\mu_{j_k}} (\partial_{j_k}) \partial^{j_k} (\tilde{\partial}_{\beta_{j_k}}) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq a} \tilde{\partial}^{\mu_{r_k}} (\partial_{r_k}) \partial^{r_k} (\tilde{\partial}_{\xi_{r_k}}) \right) \\
&\cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq b} \tilde{\partial}^{\lambda_{i_k}} (\partial_{i_k}) \partial^{i_k} (\tilde{\partial}_{\theta_{i_k}}) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq b} \tilde{\partial}^{\eta_{m_k}} (\partial_{m_k}) \partial^{m_k} (\tilde{\partial}_{\theta_{m_k}}) \right) \cdot \tilde{g}_{\mu_{j_1} \mu_{r_1}} \cdots \tilde{g}_{\mu_{j_a} \mu_{r_a}} \tilde{g}^{\theta_{i_1} \theta_{m_1}} \cdots \tilde{g}^{\theta_{i_b} \theta_{m_b}} \\
&\cdot \tilde{P}_{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_b}}^{\beta_{j_1} \dots \beta_{j_a}} \tilde{Q}_{\eta_{m_1} \dots \eta_{m_b}}^{\xi_{r_1} \dots \xi_{r_a}} \\
&= \left(\prod_{1 \leq k \leq a} \tilde{\partial}^{\mu_{j_k}} (\partial^{j_k} (\tilde{\partial}_{\beta_{j_k}}) \partial_{j_k}) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq a} \tilde{\partial}^{\mu_{r_k}} (\partial^{r_k} (\tilde{\partial}_{\xi_{r_k}}) \partial_{r_k}) \right) \\
&\cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq b} \tilde{\partial}^{\lambda_{i_k}} (\partial^{i_k} (\tilde{\partial}_{\theta_{i_k}}) \partial_{i_k}) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq b} \tilde{\partial}^{\eta_{m_k}} (\partial^{m_k} (\tilde{\partial}_{\theta_{m_k}}) \partial_{m_k}) \right) \tilde{g}_{\mu_{j_1} \mu_{r_1}} \cdots \tilde{g}_{\mu_{j_a} \mu_{r_a}} \tilde{g}^{\theta_{i_1} \theta_{m_1}} \cdots \tilde{g}^{\theta_{i_b} \theta_{m_b}} \\
&\cdot \tilde{P}_{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_b}}^{\beta_{j_1} \dots \beta_{j_a}} \tilde{Q}_{\eta_{m_1} \dots \eta_{m_b}}^{\xi_{r_1} \dots \xi_{r_a}} \\
&= \left(\prod_{1 \leq k \leq a} \tilde{\partial}^{\mu_{j_k}} (\tilde{\partial}_{\beta_{j_k}}) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq a} \tilde{\partial}^{\mu_{r_k}} (\tilde{\partial}_{\xi_{r_k}}) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq b} \tilde{\partial}^{\lambda_{i_k}} (\tilde{\partial}_{\theta_{i_k}}) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq b} \tilde{\partial}^{\eta_{m_k}} (\tilde{\partial}_{\theta_{m_k}}) \right) \\
&\cdot \tilde{g}_{\mu_{j_1} \mu_{r_1}} \cdots \tilde{g}_{\mu_{j_a} \mu_{r_a}} \cdot \tilde{g}^{\theta_{i_1} \theta_{m_1}} \cdots \tilde{g}^{\theta_{i_b} \theta_{m_b}} \tilde{P}_{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_b}}^{\beta_{j_1} \dots \beta_{j_a}} \tilde{Q}_{\eta_{m_1} \dots \eta_{m_b}}^{\xi_{r_1} \dots \xi_{r_a}} \\
&= \left(\prod_{1 \leq k \leq a} \delta_{\beta_{j_k}}^{\mu_{j_k}} \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq a} \delta_{\xi_{r_k}}^{\mu_{r_k}} \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq b} \delta_{\theta_{i_k}}^{\lambda_{i_k}} \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq k \leq b} \delta_{\theta_{m_k}}^{\eta_{m_k}} \right) \\
&\cdot \tilde{g}_{\mu_{j_1} \mu_{r_1}} \cdots \tilde{g}_{\mu_{j_a} \mu_{r_a}} \cdot \tilde{g}^{\theta_{i_1} \theta_{m_1}} \cdots \tilde{g}^{\theta_{i_b} \theta_{m_b}} \tilde{P}_{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_b}}^{\beta_{j_1} \dots \beta_{j_a}} \tilde{Q}_{\eta_{m_1} \dots \eta_{m_b}}^{\xi_{r_1} \dots \xi_{r_a}} \\
&= \tilde{g}_{\mu_{j_1} \mu_{r_1}} \cdots \tilde{g}_{\mu_{j_a} \mu_{r_a}} \tilde{g}^{\theta_{i_1} \theta_{m_1}} \cdots \tilde{g}^{\theta_{i_b} \theta_{m_b}} \tilde{P}_{\theta_{i_1} \dots \theta_{i_b}}^{\mu_{j_1} \dots \mu_{j_a}} \tilde{Q}_{\theta_{m_1} \dots \theta_{m_b}}^{\mu_{r_1} \dots \mu_{r_a}} \\
&= B.
\end{aligned}$$

Demonstração da Identidade (1.10): É uma consequência direta das definições de ∇^2 e de Rm . Primeiramente, note que podemos supor sem perda de generalidade que $\nabla_w v_i = 0$ seja qual for $w \in T_p \mathcal{M}$ (conforme a observação (O.3)) e $1 \leq i \leq n$. Temos então

$$\begin{aligned}
(\nabla_{x,y}^2 T)(v_1, \dots, v_k) &= [\nabla_x (\nabla_y T)](v_1, \dots, v_k) - (\nabla_{\nabla_{xy}} T)(v_1, \dots, v_k) \\
&= \nabla_x [(\nabla_y T)(v_1, \dots, v_k)] - \sum_{1 \leq i \leq k} (\nabla_y T)(v_1, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k) \\
&\quad - \nabla_{\nabla_{xy}} (T(v_1, \dots, v_k)) + \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_{\nabla_{xy}} v_i, \dots, v_k) \\
&= \nabla_x \left[\nabla_y (T(v_1, \dots, v_k)) - \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_y v_i, \dots, v_k) \right] \\
&\quad - \sum_{1 \leq i \leq k} \left[\nabla_y (T(v_1, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k)) - \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} T(v_1, \dots, \nabla_y v_j, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k) \right] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_y \nabla_x v_i, \dots, v_k) \\
&\quad - \nabla_{\nabla_{xy}} (T(v_1, \dots, v_k)) + \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_{\nabla_{xy}} v_i, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\text{Rm}_{x,y}T)(v_1, \dots, v_k) &= (\nabla_{x,y}^2 T - \nabla_{y,x}^2 T)(v_1, \dots, v_k) \\
&= (\nabla_x \nabla_y)(T(v_1, \dots, v_k)) - (\nabla_y \nabla_x)(T(v_1, \dots, v_k)) \\
&\quad - \sum_{1 \leq i \leq k} \nabla_x(T(v_1, \dots, \nabla_y v_i, \dots, v_k)) + \sum_{1 \leq i \leq k} \nabla_y(T(v_1, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k)) \\
&\quad - \sum_{1 \leq i \leq k} \nabla_y(T(v_1, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k)) + \sum_{1 \leq i \leq k} \nabla_x(T(v_1, \dots, \nabla_y v_i, \dots, v_k)) \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} T(v_1, \dots, \nabla_y v_j, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} T(v_1, \dots, \nabla_x v_j, \dots, \nabla_y v_i, \dots, v_k) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_y \nabla_x v_i, \dots, v_k) - \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_x \nabla_y v_i, \dots, v_k) \\
&\quad - \nabla_{\nabla_{xy}}(T(v_1, \dots, v_k)) + \nabla_{\nabla_{yx}}(T(v_1, \dots, v_k)) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_{\nabla_{xy}} v_i, \dots, v_k) - \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_{\nabla_{yx}} v_i, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

Denotaremos os termos na expressão acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
A_1 &\doteq (\nabla_x \nabla_y)(T(v_1, \dots, v_k)), & A_2 &\doteq (\nabla_y \nabla_x)(T(v_1, \dots, v_k)), \\
B_1 &\doteq \sum_{1 \leq i \leq k} \nabla_x(T(v_1, \dots, \nabla_y v_i, \dots, v_k)), & C_1 &\doteq \sum_{1 \leq i \leq k} \nabla_y(T(v_1, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k)), \\
D_1 &\doteq \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} T(v_1, \dots, \nabla_y v_j, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k), & D_2 &\doteq \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} T(v_1, \dots, \nabla_x v_j, \dots, \nabla_y v_i, \dots, v_k), \\
E_1 &\doteq \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_y \nabla_x v_i, \dots, v_k), & E_2 &\doteq \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_x \nabla_y v_i, \dots, v_k), \\
A_3 &\doteq \nabla_{\nabla_{xy}}(T(v_1, \dots, v_k)), & A_4 &\doteq \nabla_{\nabla_{yx}}(T(v_1, \dots, v_k)), \\
F_1 &\doteq \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_{\nabla_{xy}} v_i, \dots, v_k), & F_2 &\doteq \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \nabla_{\nabla_{yx}} v_i, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned}
(\text{Rm}_{x,y}T)(v_1, \dots, v_k) &= A_1 - A_2 - A_3 + A_4 - B_1 + B_1 + C_1 - C_1 + D_1 - D_2 + E_1 - E_2 + F_1 - F_2 \\
&= A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + D_1 - D_2 + E_1 - E_2 + F_1 - F_2.
\end{aligned}$$

Note agora que

$$A_1 - A_2 - A_3 + A_4 = [\nabla^2(T(v_1, \dots, v_k))](x, y) - [\nabla^2(T(v_1, \dots, v_k))](y, x) = 0,$$

pois o hessiano é simétrico, conforme vimos na observação **(O.45)**. Como $\nabla_w v_i = 0$ seja qual for $w \in T_p \mathcal{M}$ e T é um tensor, temos também

$$D_1 = D_2 = F_1 = F_2 = 0.$$

Concluimos então que

$$\begin{aligned} (\text{Rm}_{x,y}T)(v_1, \dots, v_k) &= E_1 - E_2 = - \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, (\nabla_x \nabla_y - \nabla_y \nabla_x)v_i, \dots, v_k) \\ &= - \sum_{1 \leq i \leq k} T(v_1, \dots, \text{Rm}_{x,y}(v_i), \dots, v_k). \end{aligned}$$

■

Observação (O.85). Na demonstração acima, o fato

$$\nabla_w v_i = 0, \quad \forall w \in T_p \mathcal{M},$$

não implica que B_1 nem C_1 se anulam em p . Mesmo que T seja um tensor e portanto valha

$$T(v_1, \dots, \nabla_y v_i, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, \nabla_x v_i, \dots, v_k) = 0,$$

o fato de uma função real se anular em um ponto não nos permite concluir nada sobre a derivada de tal função em tal ponto, e portanto não sabemos se B_1 ou C_1 se anulam.

Formas diferenciais

Definição (D.4.7). Diremos que um tensor $\omega \in \mathcal{T}_k^0(T\mathcal{M}^n)$ é alternado quando

$$\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = -\omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k),$$

sejam quais forem $\{X_i\}_{1 \leq i \leq k} \subset \Gamma(T\mathcal{M})$ e $1 \leq i, j \leq k$.

Definição (D.4.8). Uma forma diferenciável ω de grau k em \mathcal{M}^n é um tensor $\omega \in \mathcal{T}_k^0(T\mathcal{M}^n)$ alternado.

Observação (O.86). O fibrado de todas as formas diferenciáveis de grau k em \mathcal{M} será denotado por $\Lambda^k(\mathcal{M})$. Novamente, para evitar sobrecarga de notação, cometeremos o abuso de considerar elementos de $\Gamma(\Lambda^k(\mathcal{M}))$ como elementos de $\Lambda^k(\mathcal{M})$.

Definição (D.4.9). Uma forma de orientação em \mathcal{M}^n é uma forma diferenciável ω de grau n tal que $T_p^* \mathcal{M} \ni \omega(p) \neq 0$ seja qual for $p \in \mathcal{M}$.

As demonstrações das próximas três proposições podem ser encontradas em [31].

Proposição (P.4.11). *Seja (\mathcal{M}^n, g) uma variedade Riemanniana orientada. Então existe uma única forma de orientação em \mathcal{M} , que denotaremos por $d\text{Vol}_g$, chamada da **forma de volume Riemanniana**, que satisfaz*

$$d\text{Vol}_g(E_1, \dots, E_n) = 1,$$

pra qualquer referencial local ortonormal orientado $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de \mathcal{M} .

Proposição (P.4.12). *Seja (\mathcal{M}, g) uma variedade Riemanniana orientada e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ uma função suave com suporte compacto que satisfaz $f \geq 0$. Então*

$$\int_{\mathcal{M}} f \, d\text{Vol}_g \geq 0,$$

e a igualdade é satisfeita se, e somente se, $f \equiv 0$.

Teorema (I.4.1) (Teorema de Stokes). *Seja \mathcal{M}^n uma variedade diferenciável orientada com bordo, e suponha que $\omega \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{M})$ tem suporte compacto. Então*

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega. \quad (4.26)$$

Observação (O.87). A forma de volume Riemanniana $d\text{Vol}_g$ em \mathcal{M} determina uma medida natural μ em \mathcal{M} que torna (\mathcal{M}, μ) um espaço de medida, de forma que faz sentido falar de $\mathcal{L}^2(d\text{Vol}_g)$, o espaço de todas as funções reais u em \mathcal{M} que satisfazem

$$\int_{\mathcal{M}} u^2 \, d\text{Vol}_g < \infty.$$

Um abuso de notação comum e inofensivo é denotar μ por $d\text{Vol}_g$. Além disso, $\mathcal{L}^2(d\text{Vol}_g)$ admite um produto interno, dado por

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{L}^2(d\text{Vol}_g)} \doteq \int_{\mathcal{M}} u \cdot v \, d\text{Vol}_g.$$

Definição (D.4.10). Seja $v \in \mathbb{V}$ um vetor de um espaço vetorial real de dimensão finita. Para cada $v \in \mathbb{V}$, definimos uma aplicação $i_v : \Lambda^k(\mathbb{V}^*) \rightarrow \Lambda^{k-1}(\mathbb{V}^*)$, chamada da **multiplicação interior por v** , por

$$[i_v \omega](\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \doteq \omega(v, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}), \text{ para cada } \omega \in \Lambda^k(\mathbb{V}^*).$$

Observação (O.88). Por convenção, interpretamos $i_v \omega$ como sendo zero quando ω é um número real. Também usaremos a notação

$$v \lrcorner \omega = i_v \omega.$$

Proposição (P.4.13). *Para cada campo $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$, existe uma única função real, que denotaremos por $\text{div } X$, tal que*

$$(\text{div } X) \, d\text{Vol}_g = d(X \lrcorner d\text{Vol}_g). \quad (4.27)$$

Fica então bem definida a aplicação $\text{div} : \Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Demonstração: Consulte [31]. ■

Usando a tensorialidade de todas as entidades presentes na equação (4.27) além de um referencial geodésico centrado em torno de um ponto $p \in \mathcal{M}$ arbitrariamente fixado, um cálculo direto mostra a seguinte

Proposição (P.4.14). *Seja (\mathcal{M}^n, g) uma variedade Riemanniana orientada. Para qualquer $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$, vale que*

$$\text{div}(X) = \text{tr}(\nabla X),$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{div} = \operatorname{tr} \circ \nabla.$$

Observação (O.89). Pela proposição anterior (e pelo fato da aplicação tr independer de bases), concluímos que se $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é qualquer referencial ortonormal local em uma vizinhança de $p \in \mathcal{M}$ arbitrariamente fixado, vale que

$$[\operatorname{div}(X)](p) = \sum_{1 \leq i \leq n} g([\nabla X](E_i), E_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} g(\nabla_{E_i(p)} X, E_i(p)).$$

Equivalentemente, a representação em coordenadas locais de $\operatorname{div}(X)$ é dada por

$$\operatorname{tr}(\nabla X) = \sum_{1 \leq i \leq n} dx^i (\nabla_{\partial_i} X).$$

Lema (L.4.2). Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^n)$ e $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$. Então

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = X(f) + f \cdot \operatorname{div}(X).$$

Demonstração: Consequência imediata da observação anterior. De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \cdot X) &= \sum_{1 \leq i \leq n} g(\nabla_{\mathbf{e}_i}(fX), \mathbf{e}_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} g(\mathbf{e}_i(f)X + f \cdot \nabla_{\mathbf{e}_i}(X), \mathbf{e}_i) \\ &= \left(\sum_{1 \leq i \leq n} X(\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i(f) \right) + f \cdot \operatorname{div}(X) \\ &= X(f) + f \cdot \operatorname{div}(X). \end{aligned}$$

■

Lema (I.4.2) (Integração por partes em variedades Riemannianas). Sejam $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ funções reais suaves e suponha que u tem suporte compacto. Então vale

$$\int_{\mathcal{M}} g(\nabla u, \nabla v) \, d\operatorname{Vol}_g = - \int_{\mathcal{M}} u \cdot \Delta v \, d\operatorname{Vol}_g. \quad (4.28)$$

Demonstração: Pelo teorema de Stokes (conforme (4.26)) e pela definição (4.27), temos

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}(u \cdot \nabla v) \, d\operatorname{Vol}_g = 0.$$

Por outro lado, pelo lema (L.4.2) e pela definição (D.1.30), temos

$$\operatorname{div}(u \cdot \nabla v) = u \cdot \Delta v + g(\nabla u, \nabla v).$$

Segue então que

$$0 = \int_{\mathcal{M}} u \cdot \Delta v \, d\operatorname{Vol}_g + \int_{\mathcal{M}} g(\nabla u, \nabla v) \, d\operatorname{Vol}_g,$$

como afirmado.

Corolário (C.4.3). O operador $u \mapsto \Delta u$ é auto-adjunto com respeito ao produto interno em $\mathcal{L}^2(d\text{Vol}_g)$ induzido por $d\text{Vol}_g$, id est,

$$\int_{\mathcal{M}} f \cdot \Delta h \, d\text{Vol}_g = \int_{\mathcal{M}} h \cdot \Delta f \, d\text{Vol}_g,$$

sejam quais forem $f, h \in \mathcal{L}^2(d\text{Vol}_g)$.

Demonstração: Consequência imediata do lema anterior. ■

Lema (L.4.3). Sejam $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ funções reais suaves e suponha que u tem suporte compacto. Então vale

$$\int_{\mathcal{M}} g(\nabla u, \nabla v) \cdot e^{-f} \, d\text{Vol}_g = - \int_{\mathcal{M}} u \cdot e^{-f} \Delta_f v \, d\text{Vol}_g. \quad (4.29)$$

Demonstração: Consequência imediata dos lemas anteriores. ■

Corolário (C.4.4). O operador $u \mapsto \Delta_f u$ é auto-adjunto com respeito ao produto interno em $\mathcal{L}^2(e^{-f} d\text{Vol}_g)$ induzido por $e^{-f} d\text{Vol}_g$, id est,

$$\int_{\mathcal{M}} u \cdot \Delta_f v \cdot e^{-f} \, d\text{Vol}_g = \int_{\mathcal{M}} v \cdot \Delta_f u \cdot e^{-f} \, d\text{Vol}_g,$$

sejam quais forem $u, v \in \mathcal{L}^2(e^{-f} d\text{Vol}_g)$.

Demonstração: Consequência imediata do lema anterior. ■

A definição de div prevista pela proposição (P.4.14) nos permite estender naturalmente div para quaisquer tensores, como vemos na seguinte

Definição (D.4.11). Seja

$$\mathcal{T}_k^1(\mathcal{M}) \ni T : \underbrace{\Gamma(T\mathcal{M}) \times \dots \times \Gamma(T\mathcal{M})}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \Gamma(T\mathcal{M})$$

um tensor de tipo $(1, k)$. O divergente de T , que denotaremos por $\text{div} T$, é o tensor de tipo $(0, k)$ determinado por

$$\begin{aligned} (\text{div} T)(Y_1, \dots, Y_k) &= \text{tr}([\nabla T](\bullet, Y_1, \dots, Y_k)) \\ &= \text{tr}(X \mapsto (\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_k)). \end{aligned}$$

Observação (O.90). Em coordenadas locais arbitrárias, se $T \in \mathcal{T}_k^1(TM)$, temos então

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} T)(Y_1, \dots, Y_k) &= \sum_{1 \leq a, b \leq n} g^{ab} \langle (\nabla_{\partial_a} T)(Y_1, \dots, Y_k), \partial_b \rangle \\ &= \sum_{1 \leq b \leq n} g^{ab} (\nabla_{\partial_a} T)(Y_1, \dots, Y_k, \partial_b) \\ &= \sum_{1 \leq b \leq n} (\nabla^{\partial_b} T)(Y_1, \dots, Y_k, \partial_b). \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos um argumento inteiramente análogo ao visto no exemplo (E.1.9). Em particular, vemos que se T é um 2-tensor, temos

$$(\operatorname{div} T)(\bullet) = \sum_{1 \leq b \leq n} (\nabla^b T)(\bullet, \partial_b).$$

E se $T = \operatorname{Rm}$, temos (usando agora a convenção da notação de Einstein):

$$[\operatorname{div}(\operatorname{Rm})]_{ijk} = (\nabla^\ell \operatorname{Rm})_{ijk\ell}.$$

Observação (O.91). Também é comum denotar $\operatorname{div} T$ por δT .

Observação (O.92). A definição (D.4.11) também se estende de maneira óbvia aos tensores puramente covariantes uma vez que fizemos a identificação vista na observação (O.17). Nesse caso, se $T \in \mathcal{T}_k^0(TM)$, $\operatorname{div}(T) \in \mathcal{T}_{k-1}^0(TM)$ é o tensor determinado por

$$\operatorname{div}(T)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \operatorname{tr}_g((X, Y) \mapsto (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_{k-1}, Y)).$$

Em coordenadas locais arbitrárias, temos

$$(\operatorname{div} T)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} (\nabla_{\partial_i} T)(Y_1, \dots, Y_{k-1}, \partial_j).$$

Observação (O.93). Em componentes locais, temos então (usando a convenção de Einstein):

$$\begin{aligned} (\delta T)_{i_1 \dots i_{k-1}} &= g^{ij} T_{i_1 \dots i_{k-1} i; j}, \text{ se } T \text{ é de tipo } (0, k). \\ (\delta T)_{i_1 \dots i_k} &= T_{i_1 \dots i_k}{}^j{}_{; j}, \text{ se } T \text{ é de tipo } (1, k). \end{aligned}$$

Outro operador comumente presente é dado pela seguinte proposição, demonstrada em [20]

Proposição (P.4.15). Seja (\mathcal{M}^n, g) uma variedade Riemanniana. Existe um único operador, denominado o operador estrela de Hodge, $\star : \Lambda^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{n-k}(\mathcal{M})$, tal que

$$\alpha \wedge (\star \beta) = g(\alpha, \beta) \operatorname{dVol}_g,$$

sejam quais forem $\alpha, \beta \in \Lambda^k(\mathcal{M})$.

O método do referencial móvel

Em geral, a grande maioria dos cálculos de Geometria Riemanniana se resumem a provar igualdades tensoriais. Isso geralmente é realizado de uma das três maneiras a seguir:

- *a maneira livre de coordenadas*: nesse caso, explicitamos a ação de cada tensor em campos arbitrários na variedade em questão, verificando que os resultados coincidem. Veja, por exemplo, as demonstrações de (2.11) e do item (b) no lema (L.2.4).
- *usando coordenadas locais*: nesse caso, fixamos coordenadas locais apropriadas que facilitem os cálculos (por exemplo, coordenadas normais) e tomamos vantagem da multilinearidade dos tensores, que garante que a igualdade só precisa ser verificada numa base (conforme observamos na observação (O.11)).
- *usando o método do referencial móvel*: nesse caso, fixamos um referencial ortonormal local (que induz um co-referencial ortonormal local) e calculamos as 1-formas e 2-formas de conexão e curvatura, respectivamente, que determinam a conexão e curvatura da variedade.

Dependendo da situação, um dos três métodos acima pode ser significativamente mais fácil de ser aplicado do que os outros dois. Nessa subseção, nos dedicaremos, com base na referência [53] (uma boa referência alternativa é [18]), a explorar o suficiente às nossas aplicações do último método citado acima.

Seja (\mathcal{M}^n, g) uma variedade Riemanniana e fixe $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ um referencial local g -ortonormal definido num aberto $U \subset \mathcal{M}$, sendo $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ o co-referencial associado (determinado por $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$). Como qualquer campo $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ se escreve localmente como

$$\Gamma(TU) \ni X|_U = \sum_{1 \leq j \leq n} X^j \mathbf{e}_j, \text{ onde } \{X^j\}_{1 \leq j \leq n} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}),$$

então dada $s \in \Gamma(TU)$ podemos determinar (usando a linearidade de ∇ na primeira entrada e a regra de Leibniz) $\nabla_X s$ pelo conhecimento dos campos $\{\nabla_X \mathbf{e}_j\}_{1 \leq j \leq n}$. Sendo um campo em U , $\nabla_X \mathbf{e}_j$ é uma combinação linear dos \mathbf{e}_i 's com coeficientes ω_j^i dependendo de X , *id est*:

$$\nabla_X \mathbf{e}_j = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_j^i(X) \mathbf{e}_i.$$

A $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -linearidade de $\nabla_X \mathbf{e}_j$ em X garante a $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -linearidade de ω_j^i em X , de forma que $\omega_j^i \in \Gamma(T^*U)$ é uma 1-forma em U . As 1-formas ω_j^i em U são chamadas das **formas de conexão**, e a matriz $\omega = (\omega_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ é chamada da **matriz de conexão**, da conexão ∇ com respeito ao referencial $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \Gamma(TU)$.

Analogamente, dados $X, Y \in \Gamma(TU)$, o campo $\text{Rm}(X, Y)\mathbf{e}_j$ é uma combinação linear de $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, *id est*:

$$\text{Rm}(X, Y)\mathbf{e}_j = \sum_{1 \leq i \leq n} \Omega_j^i(X, Y) \mathbf{e}_i.$$

Uma vez que

$$\text{Rm}(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

é alternada e $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -bilinear, Ω_j^i também é alternada e $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -bilinear. Pelas propriedades de Rm , Ω_j^i é portanto uma 2-forma em U . As 2-formas Ω_j^i são chamadas das **formas de curvatura**, e a matriz $\Omega = (\Omega_j^i)$ é chamada da matriz de curvatura, da conexão ∇ com respeito ao referencial $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ em U .

Observação (O.94). Note que Ω_j^i é determinada por Rm , pois

$$\begin{aligned}\Omega_j^i &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \Omega_j^i(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \text{Rm}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell,\end{aligned}$$

onde na última igualdade segue do fato de que

$$\begin{aligned}\Omega_j^i(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) &= g \left(\sum_{1 \leq s \leq n} \Omega_j^s(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_i \right) \\ &= g(\text{Rm}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \\ &= -\text{Rm}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell).\end{aligned}$$

Cálculos diretos mostram os seguintes resultados:

Teorema (T.4.3). *Seja (\mathcal{M}^n, g) uma variedade Riemanniana e $U \subset \mathcal{M}$ um aberto em qual está definido um referencial ortonormal $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, com co-referencial associado $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$. Então existe uma matriz antissimétrica $(\omega_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ de 1-formas tal que*

$$d\mathbf{e}^i + \sum_{1 \leq j \leq n} \omega_j^i \wedge \mathbf{e}^j = 0, \text{ seja qual for } 1 \leq i \leq n.$$

Além disso, se $(\alpha_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ é qualquer outra matriz antissimétrica de 1-formas satisfazendo

$$d\mathbf{e}^i + \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j^i \wedge \mathbf{e}^j = 0, \text{ seja qual for } 1 \leq i \leq n, \quad (4.30)$$

então

$$(\alpha_j^i)_{1 \leq i, j \leq n} = (\omega_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Teorema (T.4.4). *As formas de curvatura Ω_j^i se relacionam às formas de conexão ω_j^i pela seguinte equação, comumente chamada da **segunda equação estrutural de Cartan**:*

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \sum_{1 \leq k \leq n} \omega_k^i \wedge \omega_j^k, \text{ sejam quais forem } \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

Demonstração: Consulte [53] ou [18].

■

Produtos warped

Essa seção é dedicada aos cálculos das entidades geométricas de um produto multiplamente warped arbitrário. Produtos warped (comumente traduzidos na literatura brasileira como produtos “torcidos”) são um dos conceitos mais importantes e frutíferos de geometria Riemanniana, tendo também grande relevância na física (aparecendo como modelos do próprio Cosmos - veja em [22] ou [40], por exemplo, o modelo cosmológico de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker - ou de buracos negros).

Nossa abordagem é baseada em [43] e em [17], a diferença principal sendo que em alguns cálculos usamos o método do referencial móvel. Em [43], é feito o cálculo das entidades geométricas de um produto warped simples $\mathcal{B} \times_h \mathcal{N}$, enquanto que em [17] os autores enunciam (sem demonstração) várias proposições que determinam as entidades geométricas de um produto multiplamente warped arbitrário. Usando o método do referencial móvel, generalizamos os cálculos feitos em [43] e demonstramos as proposições 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 enunciadas em [17].

Definição (D.4.12). Sejam (\mathcal{B}, g_B) e $(\mathcal{M}_i, g_{\mathcal{M}_i})$ variedades Riemannianas e $b_i : \mathcal{B} \rightarrow (0, \infty)$ funções suaves para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. O produto warped múltiplo de tais variedades é a variedade produto $\mathcal{N} = \mathcal{B} \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_k$ munida da métrica $g = g_B \oplus b_1^2 g_{\mathcal{M}_1} \oplus b_2^2 g_{\mathcal{M}_2} \oplus \dots \oplus b_k^2 g_{\mathcal{M}_k}$, definida por

$$g = \sigma_0^*(g_B) \oplus (b_1 \circ \pi)^2 \sigma_1^*(g_{\mathcal{M}_1}) \oplus \dots \oplus (b_k \circ \pi)^2 \sigma_k^*(g_{\mathcal{M}_k}),$$

onde $\sigma_0 : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$ é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \sigma_0 : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{B} \\ (p, q_1, \dots, q_k) &\mapsto p \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

e para $i \geq 1$, $\sigma_i : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}_i$ é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \sigma_i : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{M}_i \\ (p, q_1, \dots, q_i, \dots, q_k) &\mapsto q_i \in \mathcal{M}_i. \end{aligned}$$

Observação (O.95). • É comum denotar a variedade Riemanniana $(\mathcal{N} = \mathcal{B} \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_k, g = g_B \oplus b_1^2 g_{\mathcal{M}_1} \oplus b_2^2 g_{\mathcal{M}_2} \oplus \dots \oplus b_k^2 g_{\mathcal{M}_k})$ simplesmente por $\mathcal{N} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{M}_1^{d_1} \times \dots \times_{h_k} \mathcal{M}_k^{d_k}$.

- Quando $k = 1$, temos o produto warped simples usual.
- Se todos $b_i \equiv 1$, temos um produto Riemanniano trivial.

Definição (D.4.13). Se $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma aplicação suave, diremos que dois campos $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ e $Y \in \Gamma(T\mathcal{N})$ estão φ -relacionados (fato que denotaremos por $X \stackrel{\varphi}{\sim} Y$) quando $Y \circ \varphi = d\varphi \circ X$.

Lema (L.4.4). O espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ de um ponto $p = (p_0, p_1, \dots, p_k) \in \mathcal{M} = \mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_k$ é canonicamente isomorfo (no sentido de existir um isomorfismo que não depende de escolhas de bases) ao produto $T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \dots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k$.

Demonstração: Considere as aplicações

$$\begin{aligned}\iota_0 : \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{M} \\ \mathcal{B} \ni q_0 &\mapsto (q_0, p_1, \dots, p_k) \in \mathcal{M},\end{aligned}$$

e, para $\alpha \geq 1$,

$$\begin{aligned}\iota_\alpha : \mathcal{N}_\alpha &\rightarrow \mathcal{M} \\ \mathcal{N}_\alpha \ni q_\alpha &\mapsto (p_0, p_1, \dots, p_{\alpha-1}, q_\alpha, p_{\alpha+1}, \dots, p_k).\end{aligned}$$

Como veremos agora, a aplicação ψ definida por

$$\begin{aligned}\psi : T_{(p_0, p_1, \dots, p_k)}(\mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_k) &\rightarrow T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \dots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k \\ v &\mapsto (d(\sigma_0)_p(v), d(\sigma_1)_p(v), d(\sigma_2)_p(v), \dots, d(\sigma_k)_p(v)),\end{aligned}$$

é um isomorfismo, com inversa dada por

$$\begin{aligned}\varphi : T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \dots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k &\rightarrow T_{(p_0, p_1, \dots, p_k)}(\mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_k) \\ (v_0, v_1, \dots, v_k) &\mapsto \sum_{0 \leq \ell \leq k} d(\iota_\ell)_{p_\ell}(v_\ell).\end{aligned}$$

De fato, note inicialmente que

$$\sigma_i \circ \iota_\ell = \begin{cases} \text{a aplicação identidade } \text{Id}_{\mathcal{N}_i} : \mathcal{N}_i \rightarrow \mathcal{N}_i, & \text{se } i = \ell; \\ \text{a aplicação constante } \mathcal{N}_\ell \ni q_\ell \mapsto p_i \in \mathcal{N}_i, & \text{se } i \neq \ell. \end{cases}$$

E portanto, segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned}d(\sigma_i \circ \iota_\ell)_{p_\ell} &= d(\sigma_i)_p \circ d(\iota_\ell)_{p_\ell} \\ &= \begin{cases} \text{a aplicação identidade } \text{Id}_{T_{p_i}\mathcal{N}_i} : T_{p_i}\mathcal{N}_i \rightarrow T_{p_i}\mathcal{N}_i, & \text{se } i = \ell; \\ \text{a aplicação identicamente nula } T_{p_\ell}\mathcal{N}_\ell \ni v_\ell \mapsto 0 \in T_{p_i}\mathcal{N}_i, & \text{se } i \neq \ell. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Portanto, seja qual for $(v_0, v_1, \dots, v_k) \in T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \dots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k$, temos

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(v_0, v_1, \dots, v_k) &= \left(d(\sigma_0)_p \left(\sum_{0 \leq \ell \leq k} d(\iota_\ell)_{p_\ell}(v_\ell) \right), \dots, d(\sigma_k)_p \left(\sum_{0 \leq \ell \leq k} d(\iota_\ell)_{p_\ell}(v_\ell) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{0 \leq \ell \leq k} d(\sigma_0)_p(d(\iota_\ell)_{p_\ell}(v_\ell)), \dots, \sum_{0 \leq \ell \leq k} d(\sigma_k)_p(d(\iota_\ell)_{p_\ell}(v_\ell)) \right) \\ &= (v_0, v_1, \dots, v_k),\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (4.31). Segue que ψ é sobrejetiva. Como $T_{(p_0, p_1, \dots, p_k)}(\mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_k)$ e $T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \dots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k$ têm a mesma dimensão, segue que ψ é um isomorfismo. Como uma aplicação bijetora possui um único inverso à direita, segue também que φ é o inverso de ψ .



Observação (O.96). Note que o lema (L.4.4) não usa em nenhum momento qualquer estrutura Riemanniana de \mathcal{M} , caracterizando então o espaço tangente de um produto de variedades diferenciáveis.

Observação (O.97). Para cada $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, o conjunto dos campos em \mathcal{M} que surgem como levantamentos de campos em fatores do produto será denotado por

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}_i) = \{X \in \Gamma(T\mathcal{M}) \mid d\sigma_j(X) = 0, \text{ seja qual for } j \neq i.\}$$

Dado $X_i \in \Gamma(T\mathcal{N}_i)$, é fácil ver que existe um único campo $\text{Lev}(X_i) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_i)$ que satisfaz $(d\sigma_i \circ \text{Lev})(X_i) = X_i$ (de fato, $\text{Lev}(X_i) = \psi^{-1}((0, \dots, X_i, 0, \dots, 0))$). O campo $\text{Lev}(X_i)$ é chamado do levantamento do campo X_i . O abuso de notação de identificar um campo ou uma 1-forma com seu levantamento é portanto inofensivo, e o cometeremos várias vezes daqui em diante. Note que $\text{Lev}(X_i)$ é o único campo σ_i -relacionado com X_i e σ_j -relacionado com $0 \in \Gamma(T\mathcal{N}_j)$ para todo $j \neq i$.

Observação (O.98). Convém agora relembrarmos a equação de Gauss. Dizemos que uma aplicação entre variedades Riemannianas $f : (\mathcal{M}^n, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}, \widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}})$ é uma imersão isométrica quando vale

$$f^* \left(\widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}} \right) = g_{\mathcal{M}},$$

ou, equivalentemente,

$$g_{\mathcal{M}}(p)(v, w) = \widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}}(f(p))(df_p(v), df_p(w)),$$

sejam quais forem $p \in \mathcal{M}$ e $v, w \in T_p\mathcal{M}$. Nesse caso, cometendo o abuso usual de identificar campos com suas extensões, temos

$$\widetilde{\text{Rm}}(X, Y, Z, W) = \text{Rm}(X, Y, Z, W) - \widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}}(\mathbf{II}(X, W), \mathbf{II}(Y, Z)) + \widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}}(\mathbf{II}(X, Z), \mathbf{II}(Y, W)), \quad (4.32)$$

sejam quais forem $X, Y, Z, W \in \Gamma(T\mathcal{M})$. Nesse sentido, é importante ressaltar que, uma vez que fixarmos

$$p = (p_0, p_1, \dots, p_k) \in \mathcal{M} = \mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_k,$$

a inclusão

$$\begin{aligned} \iota_\alpha : (\mathcal{N}_\alpha, g_{\mathcal{N}_\alpha}) &\hookrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1 \times \dots \times_{h_k} \mathcal{N}_k \\ q_\alpha &\mapsto (p_0, \dots, p_{\alpha-1}, q_\alpha, p_{\alpha+1}, \dots, p_k), \end{aligned}$$

não é uma imersão isométrica. De fato, fixando arbitrariamente $q_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$ e denotando

$$P = (p_0, \dots, p_{\alpha-1}, q_\alpha, p_{\alpha+1}, \dots, p_k),$$

temos

$$\begin{aligned} [(\iota_\alpha)^*(g_{\mathcal{M}})](q_\alpha)(v, w) &= g_{\mathcal{M}}(P) \left(d(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(v), d(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(w) \right) \\ &= h_\alpha^2(p_0) [(\sigma_\alpha)^*(g_{\mathcal{N}_\alpha})]_P \left(d(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(v), d(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(w) \right) \\ &= h_\alpha^2(p_0) (g_{\mathcal{N}_\alpha})_{q_\alpha} \left(d(\sigma_\alpha)_P \left(d(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(v) \right), d(\sigma_\alpha)_{q_\alpha} \left(d(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(w) \right) \right) \\ &= h_\alpha^2(p_0) (q_\alpha) (g_{\mathcal{N}_\alpha})_{q_\alpha}(v, w), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde na última igualdade usamos a equação (4.31). Porém, é claro dos cálculos feitos em (4.33) que com a métrica $(h_\alpha(p_0))^2 g_{\mathcal{N}_\alpha}$, a inclusão

$$\begin{aligned} \iota_\alpha : (\mathcal{N}_\alpha, (h_\alpha(p_0))^2 g_{\mathcal{N}_\alpha}) &\hookrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1 \times \dots \times_{h_k} \mathcal{N}_k \\ q_\alpha &\mapsto (p_0, \dots, p_{\alpha-1}, q_\alpha, p_{\alpha+1}, \dots, p_k), \end{aligned}$$

é uma imersão isométrica, de forma nesse contexto podemos usar a equação (4.32) (como faremos futuramente).

Observação (O.99). Embora usualmente a equação (4.32) seja utilizada para determinar a curvatura de subvariedades, em algumas situações podemos usá-la no sentido contrário: ou seja, via o conhecimento da curvatura de específicas subvariedades, podemos determinar a curvatura da variedade total. Um exercício interessante de Geometria Riemanniana (que comentaremos em mais detalhes no exemplo (E.4.6)) que utiliza essa técnica envolve calcular a curvatura do produto warped $\mathcal{I} \times_\varphi \mathbb{Q}^n(\kappa)$, onde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow (0, \infty)$ é uma função suave, e definimos

$$\mathbb{Q}^n(\kappa) \doteq \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{se } \kappa = 0; \\ \mathbb{S}^n, & \text{se } \kappa = 1; \\ \mathbb{H}^n, & \text{se } \kappa = -1. \end{cases}$$

Lema (L.4.5). Se $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma aplicação suave, então

$$d\varphi([X, Y]) = [d\varphi(X), d\varphi(Y)], \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M}).$$

Demonstração: Segue da definição do colchete de Lie e da definição da diferencial de uma aplicação. De fato, para qualquer $p \in \mathcal{M}$ e $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$ temos

$$\begin{aligned} (d\varphi_p([X, Y](p)))(g) &= [X, Y](p)(g \circ \varphi) \\ &= X_p(Y(g \circ \varphi)) - Y_p(X(g \circ \varphi)) \\ &= X_p(d\varphi(Y)(g) \circ \varphi) - Y_p(d\varphi(X)(g) \circ \varphi) \\ &= d\varphi_p(X_p)(d\varphi(Y)(g)) - d\varphi_p(Y_p)(d\varphi(X)(g)) \\ &= [d\varphi(X), d\varphi(Y)]_p(g). \end{aligned}$$

■

Lema (L.4.6). Se $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma aplicação suave e $X_1, X_2 \in \Gamma(T\mathcal{M}), Y_1, Y_2 \in \Gamma(T\mathcal{N})$ são campos satisfazendo $X_i \mathcal{L} Y_i$ para cada $1 \leq i \leq 2$, então $[X_1, X_2] \mathcal{L} [Y_1, Y_2]$.

Demonstração: Consequência imediata do lema anterior. De fato, dado qualquer $p \in \mathcal{M}$ temos

$$\begin{aligned} d\varphi_p([X_1, X_2](p)) &= [d\varphi_p(X_1(p)), d\varphi_p(X_2(p))] \\ &= [Y_1, Y_2](\varphi(p)). \end{aligned}$$

■

Naturalmente, o conhecimento das conexões e curvaturas dos fatores de tal produto determina a conexão e curvatura do próprio produto. Para determinar estes, usaremos o método do referencial móvel. Antes, estabeleceremos algumas notações importantes para as demonstrações dos lemas a seguir (enunciados também em [17] - com um erro de sinal no item (8) da Proposição 2.4, corrigido no item (8) do lema (L.4.10)).

Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica

$$g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k},$$

e conexão $\nabla^g = \nabla$. Denotaremos $\mathcal{N}_0^r \doteq \mathcal{B}$ e $d_i \doteq \dim(\mathcal{N}_i)$ para cada $0 \leq i \leq k$. Para cada $0 \leq i \leq n$, fixaremos referenciais locais $g_{\mathcal{N}_i}$ -ortonormais, que denotaremos por $\{\mathbf{e}_{(i,j)}\}_{1 \leq j \leq d_i}$. Seus co-referenciais associados serão denotados por $\{\Theta^{(i,j)}\}_{1 \leq i,j \leq d_i}$ (e estão determinados por $\Theta^{(i,j)}(\mathbf{e}_{(i,s)}) = \delta_s^j$). As 1-formas de conexão e 2-formas de curvatura associadas a tais referenciais serão denotadas por $\{\omega_q^{(i,j)}\}_{1 \leq j,q \leq d_i}$ e $\{\Omega_q^{(i,j)}\}_{1 \leq j,q \leq d_i}$, respectivamente. Sendo assim, note que

$$\left\{ \mathbf{e}_{(0,1)}, \dots, \mathbf{e}_{(0,r)}, \frac{1}{h_1} \mathbf{e}_{(1,1)}, \dots, \frac{1}{h_1} \mathbf{e}_{(1,d_1)}, \dots, \frac{1}{h_k} \mathbf{e}_{(k,1)}, \dots, \frac{1}{h_k} \mathbf{e}_{(k,d_k)} \right\}$$

é um referencial local g -ortonormal. Usaremos a notação

$$\tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)} = \begin{cases} \mathbf{e}_{(0,j)}, & \text{se } i = 0; \\ \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_{(i,j)}, & \text{se } i \neq 0; \end{cases}$$

de forma que

$$\{\tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}\}_{0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i}$$

é um referencial local g -ortonormal, sendo seu co-referencial local associado dado por

$$\{\tilde{\Theta}^{(i,j)}\}_{0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i},$$

onde

$$\tilde{\Theta}^{(i,j)} = \begin{cases} \Theta^{(0,j)}, & \text{se } i = 0; \\ h_i \Theta^{(i,j)}, & \text{se } i \neq 0; \end{cases}$$

de forma que num aberto $U \subset \mathcal{M}$, todo campo $s \in \Gamma(TU)$ se escreve como

$$s|_U = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \tilde{s}^{(i,j)} \tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \tilde{\Theta}^{(i,j)}(s) \tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}.$$

Finalmente, as 1-formas de conexão e 2-formas de curvatura de (\mathcal{M}, g) com respeito a esse referencial serão denotadas por $\{\tilde{\omega}_{(p,m)}^{(i,j)}\}_{\substack{0 \leq i,p \leq k \\ 1 \leq j,m \leq d_i}}$ e $\{\tilde{\Omega}_{(p,m)}^{(i,j)}\}_{\substack{0 \leq i,p \leq k \\ 1 \leq j,m \leq d_i}}$, de forma que

$$\nabla_s (\tilde{\mathbf{e}}_{(p,m)}) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \tilde{\omega}_{(p,m)}^{(i,j)}(s) \tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)},$$

e

$$\text{Rm}(s_1, s_2)\tilde{\mathbf{e}}_{(p,m)} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \tilde{\Omega}_{(p,m)}^{(i,j)}(s_1, s_2) \tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}.$$

Lema (L.4.7). Seguindo a notação acima, seja $\mathcal{M} = \mathcal{B}^r \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$ e conexão $\nabla^g = \nabla$. As 1-formas de conexão $\{\tilde{\omega}_{(p,m)}^{(i,j)}\}_{\substack{0 \leq i, p \leq k \\ 1 \leq j, m \leq d_i}}$ são dadas por

(a)

$$\tilde{\omega}_{(0,\ell)}^{(0,j)} = \omega_{\ell}^{(0,j)}, \text{ sejam quais forem } 1 \leq j, \ell \leq r.$$

(b)

$$\tilde{\omega}_{(\beta,\ell)}^{(0,j)} = -\frac{\mathbf{e}_{(0,j)}(h_{\beta})}{h_{\beta}} \tilde{\Theta}^{(\beta,\ell)}, \text{ para quaisquer } 1 \leq j \leq r \text{ e } \beta, \ell \geq 1.$$

(c)

$$\tilde{\omega}_{(0,a)}^{(\gamma,j)} = \frac{\mathbf{e}_{(0,a)}(h_{\gamma})}{h_{\gamma}} \tilde{\Theta}^{(\gamma,j)}, \text{ se } 1 \leq \gamma \leq k \text{ e } 1 \leq a, j \leq r.$$

(d)

$$\tilde{\omega}_{(\beta,p)}^{(\gamma,q)} = \delta_{\gamma\beta} \omega_p^{(\gamma,q)}, \text{ se } 1 \leq \gamma, \beta \leq k \text{ e } 1 \leq p, q \leq d_{\gamma}.$$

Demonstração: A ideia da demonstração é clássica: motivados pelo teorema (T.4.3), iremos definir uma matriz antissimétrica $(\alpha_{(p,m)}^{(i,j)})_{\substack{0 \leq i, p \leq k \\ 1 \leq j, m \leq d_i}}$ que satisfaz

$$\begin{cases} d\tilde{\Theta}^{(0,j)} + \sum_{1 \leq \ell \leq r} \alpha_{(0,\ell)}^{(0,j)} \wedge \tilde{\Theta}^{(0,\ell)} + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_{\gamma}}} \alpha_{(\gamma,\beta)}^{(0,j)} \wedge \tilde{\Theta}^{(\gamma,\beta)} = 0; \\ d\tilde{\Theta}^{(\beta,\gamma)} + \sum_{1 \leq \ell \leq r} \alpha_{(0,\ell)}^{(\beta,\gamma)} \wedge \tilde{\Theta}^{(0,\ell)} + \sum_{\substack{1 \leq \xi \leq k \\ 1 \leq \eta \leq d_{\xi}}} \alpha_{(\xi,\eta)}^{(\beta,\gamma)} \wedge \tilde{\Theta}^{(\xi,\eta)} = 0; \end{cases} \quad (4.34)$$

sejam quais forem $1 \leq j \leq r$, $1 \leq \beta \leq k$, $1 \leq \gamma \leq d_{\beta}$. Da unicidade enunciada no teorema (T.4.3), seguirá que $(\alpha_{(p,m)}^{(i,j)})_{\substack{0 \leq i, p \leq k \\ 1 \leq j, m \leq d_i}}$ é a matriz de 1-formas da conexão de Levi-Civita de \mathcal{M} . Uma vez que

$$\begin{aligned} d\tilde{\Theta}^{(0,j)} &= d\Theta^{(0,j)} \\ &= -\sum_{1 \leq \ell \leq r} \omega_{\ell}^{(0,j)} \wedge \tilde{\Theta}^{(0,\ell)}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

e também,

$$\begin{aligned} d\tilde{\Theta}^{(\gamma,j)} &= d(h_{\gamma}\Theta^{(\gamma,j)}) \\ &= dh_{\gamma} \wedge \Theta^{(\gamma,j)} + h_{\gamma} d\Theta^{(\gamma,j)} \\ &= \left(\sum_{1 \leq a \leq r} \mathbf{e}_{(0,a)}(h_{\gamma}) \Theta^{(0,a)} \right) \wedge \Theta^{(\gamma,j)} - h_{\gamma} \sum_{1 \leq \ell \leq d_{\gamma}} \omega_{\ell}^{(\gamma,j)} \wedge \Theta^{(\gamma,\ell)} \\ &= -\sum_{1 \leq a \leq r} (\mathbf{e}_{(0,a)}(h_{\gamma}) \Theta^{(\gamma,j)}) \wedge \tilde{\Theta}^{(0,a)} - \sum_{1 \leq \ell \leq d_{\gamma}} \omega_{\ell}^{(\gamma,j)} \wedge \tilde{\Theta}^{(\gamma,\ell)}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

definiremos

$$\begin{aligned}\alpha_{(0,\ell)}^{(0,j)} &= \omega_\ell^{(0,j)}; \\ \alpha_{(\gamma,\beta)}^{(0,j)} &= -\frac{\mathbf{e}_{(0,j)}(h_\gamma)}{h_\gamma} \tilde{\Theta}^{(\gamma,\beta)}; \\ \alpha_{(0,\ell)}^{(\beta,\gamma)} &= \frac{\mathbf{e}_{(0,\ell)}(h_\beta)}{h_\beta} \tilde{\Theta}^{(\beta,\gamma)}; \\ \alpha_{(\xi,\eta)}^{(\beta,\gamma)} &= 0, \text{ para qualquer } \xi \geq 1 \text{ com } \xi \neq \beta.\end{aligned}$$

É fácil ver que a matriz α assim definida é antissimétrica. Além disso, segue das equações (4.35) e (4.36) que α assim definida satisfaz (4.34), donde segue o resultado desejado. ■

Lema (L.4.8). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$ e conexão $\nabla^g = \nabla$. Suponha que $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$ e $W \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\eta)$. Então:

- (1) $\nabla_X Y = \nabla_X^{\mathcal{B}} Y$;
- (2) $\nabla_X V = \nabla_V X = \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V$;
- (3) $\nabla_V W = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \eta; \\ \nabla_V^{\mathcal{N}_\eta} W - \frac{g(V, W)}{h_\eta} \text{grad}_{\mathcal{B}} h_\eta, & \text{se } \alpha = \eta. \end{cases}$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_{1 \leq a \leq r} \tilde{Y}^{(0,a)} \tilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} \right) \\ &= \sum_{1 \leq a \leq r} \left\{ X \left(\tilde{Y}^{(0,a)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} + \tilde{Y}^{(0,a)} \nabla_X \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} \right) \right\} \\ &= \sum_{1 \leq a \leq r} \left\{ X \left(Y^{(0,a)} \right) \mathbf{e}_{(0,a)} + Y^{(0,a)} \nabla_X \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\nabla_X \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} \right) &= \sum_{\substack{0 \leq i < k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \tilde{\omega}_{(0,a)}^{(i,j)}(X) \tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq r} \tilde{\omega}_{(0,a)}^{(0,j)}(X) \tilde{\mathbf{e}}_{(0,j)} + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ 1 \leq j \leq d_\gamma}} \tilde{\omega}_{(0,a)}^{(\gamma,j)}(X) \tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,j)} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq r} \omega_a^{(0,j)}(X) \mathbf{e}_{(0,j)} + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ 1 \leq j \leq d_\gamma}} \mathbf{e}_{(0,a)}(h_\gamma) \underbrace{\Theta^{(\gamma,j)}(X)}_{=0, \text{ pois } X \in \mathcal{L}(\mathcal{B})} \tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,j)} \\ &= \nabla_X^{\mathcal{B}} \left(\mathbf{e}_{(0,a)} \right),\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_{1 \leq a \leq r} \left\{ X \left(Y^{(0,a)} \right) \mathbf{e}_{(0,a)} + Y^{(0,a)} \nabla_X \left(\mathbf{e}_{(0,a)} \right) \right\} \\ &= \nabla_X^{\mathcal{B}} \left(\sum_{1 \leq a \leq r} Y^{(0,a)} \mathbf{e}_{(0,a)} \right) \\ &= \nabla_X^{\mathcal{B}} Y,\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos os itens **(a)** e **(c)** do lema **(L.4.7)**. Uma vez que $X \left(V^{(\alpha,\beta)} \right) = 0$, temos também

$$\begin{aligned}\nabla_X V &= \nabla_X \left(\sum_{1 \leq \beta \leq d_\alpha} \tilde{V}^{(\alpha,\beta)} \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \\ &= \sum_{1 \leq \beta \leq d_\alpha} \left\{ X \left(\tilde{V}^{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} + \tilde{V}^{(\alpha,\beta)} \nabla_X \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \right\} \\ &= \sum_{1 \leq \beta \leq d_\alpha} \left\{ \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V^{(\alpha,\beta)} \mathbf{e}_{(\alpha,\beta)} + \tilde{V}^{(\alpha,\beta)} \left(\sum_{1 \leq \ell \leq r} \underbrace{\tilde{\omega}_{(\alpha,\beta)}^{(0,\ell)}(X)}_{=0, \text{ por (b) de (L.4.7)}} \tilde{\mathbf{e}}_{(0,\ell)} + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ 1 \leq s \leq d_\gamma}} \tilde{\omega}_{(\alpha,\beta)}^{(\gamma,s)}(X) \tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,s)} \right) \right\} \\ &= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V + \sum_{1 \leq s, \beta \leq d_\alpha} \underbrace{\omega_\beta^{(\alpha,s)}(X)}_{=0, \text{ pois } X \in \mathcal{L}(\mathcal{B})} \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,s)} \\ &= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V,\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o item **(d)** do lema **(L.4.7)**.

Finalmente, usando novamente o lema **(L.4.7)**, temos

$$\begin{aligned}\nabla_V W &= \nabla_V \left(\sum_{1 \leq \beta \leq d_\eta} \tilde{W}^{(\eta,\beta)} \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} \right) \\ &= \sum_{1 \leq \beta \leq d_\eta} V \left(\tilde{W}^{(\eta,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} + \sum_{1 \leq \beta \leq d_\eta} \tilde{W}^{(\eta,\beta)} \nabla_V \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} \right) \\ &= \sum_{1 \leq \beta \leq d_\eta} V \left(\tilde{W}^{(\eta,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} + \sum_{1 \leq \beta \leq d_\eta} \tilde{W}^{(\eta,\beta)} \left\{ \sum_{1 \leq a \leq r} \tilde{\omega}_{(\eta,\beta)}^{(0,a)}(V) \tilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} + \sum_{\substack{1 \leq \xi \leq k \\ 1 \leq \gamma \leq d_\xi}} \tilde{\omega}_{(\eta,\beta)}^{(\xi,\gamma)}(V) \tilde{\mathbf{e}}_{(\xi,\gamma)} \right\} \\ &= \sum_{1 \leq \beta \leq d_\eta} V \left(\tilde{W}^{(\eta,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} + \sum_{1 \leq \beta \leq d_\eta} \tilde{W}^{(\eta,\beta)} \left\{ - \sum_{1 \leq a \leq r} \frac{\mathbf{e}_{(0,a)}(h_\eta)}{h_\eta} \tilde{V}^{(\eta,\beta)} \tilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} + \sum_{1 \leq \gamma \leq d_\eta} \omega_\beta^{(\eta,\gamma)}(V) \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\gamma)} \right\} \\ &= \sum_{1 \leq \beta \leq d_\eta} \left\{ V \left(\tilde{W}^{(\eta,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} + \tilde{W}^{(\eta,\beta)} \nabla_V \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} \right) \right\} - \sum_{1 \leq a \leq r} \frac{\mathbf{e}_{(0,a)}(h_\eta)}{h_\eta} g(V, W) \mathbf{e}_{(0,a)} \\ &= \nabla_{d\sigma_\eta(V)}^{\mathcal{N}_\eta} W - \delta_{\alpha\eta} \frac{g(V, W)}{h_\eta} \text{grad}_{\mathcal{B}} h_\eta \\ &= \delta_{\alpha\eta} \left(\nabla_V^{\mathcal{N}_\eta} W - \frac{g(V, W)}{h_\eta} \text{grad}_{\mathcal{B}} h_\eta \right).\end{aligned}$$



Observação (O.100). A progressão “natural” após termos calculado as 1-formas de conexão no lema (L.4.7) seria usarmos o teorema (T.4.4) para calcularmos as 2-formas de curvatura. Não faremos isso pois para determinarmos Rm, esse caminho é bem mais complicado em comparação a simplesmente usarmos a definição de Rm nos cálculos, amparados do lema (L.4.7). Faremos isso na demonstração do lema (L.4.10).

Lema (L.4.9). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$. Denotemos $\text{grad}^{\mathcal{M}} = \text{grad}$ e $\Delta^{\mathcal{M}} = \Delta$. Se $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B})$ e $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}_i)$, então

- (1) $\text{grad}(\phi \circ \pi) = \text{grad}_{\mathcal{B}}\phi$;
- (2) $\text{grad}(\psi \circ \sigma_i) = \frac{\text{grad}_{\mathcal{N}_i}\psi}{h_i^2}$;
- (3) $\Delta(\phi \circ \pi) = \Delta_{\mathcal{B}}\phi + \sum_{1 \leq i \leq k} d_i \frac{g_{\mathcal{B}}(\text{grad}_{\mathcal{B}}\phi, \text{grad}_{\mathcal{B}}h_i)}{h_i}$;
- (4) $\Delta(\psi \circ \sigma_i) = \frac{\Delta_{\mathcal{N}_i}\psi}{h_i^2}$.

Demonstração: Fixe $p = (p_0, q_1, \dots, q_k) \in \mathcal{M}$. Uma vez que $\phi \circ \pi$ é constante em $\{p_0\} \times \mathcal{N}_1 \times \cdots \times \mathcal{N}_k$ seja qual for $p_0 \in \mathcal{B}$, temos

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(\phi \circ \pi)(p) &= \sum_{1 \leq i \leq r} \mathbf{e}_{(0,i)}(p) (\phi \circ \pi) \mathbf{e}_{(0,i)}(p) \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq r} d(\phi \circ \pi)_p(\mathbf{e}_{(0,i)}(p)) \mathbf{e}_{(0,i)}(p) \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq r} d\phi_{p_0}(\mathbf{e}_{(0,i)}(p_0)) \mathbf{e}_{(0,i)}(p) \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq r} \mathbf{e}_{(0,i)}(p_0) (\phi) \mathbf{e}_{(0,i)}(p) \\
 &= (\text{grad}_{\mathcal{B}}\phi)(p).
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(\psi \circ \sigma_i)(p) &= \sum_{1 \leq j \leq d_i} \tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}(p)(\psi) \tilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}(p) \\
 &= h_i^{-2} (\text{grad}_{\mathcal{N}_i}\psi)(p).
 \end{aligned}$$

Da definição do Laplaciano, do item (2) do lema (L.4.8) e do item (1) do lema atual, segue também que

$$\begin{aligned}
 \Delta(\phi \circ \pi) &= \sum_{1 \leq i \leq r} g(\nabla_{\mathbf{e}_{(0,i)}} \nabla^{\mathcal{B}}\phi, \mathbf{e}_{(0,i)}) + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_\alpha}} g(\nabla_{\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}} \nabla^{\mathcal{B}}\phi, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}) \\
 &= \Delta_{\mathcal{B}}\phi + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_\alpha}} g\left(\frac{(\nabla^{\mathcal{B}}\phi)(h_\alpha)}{h_\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta_{\mathcal{B}}\phi + \sum_{1 \leq \alpha \leq k} d_{\alpha} \frac{(\nabla^{\mathcal{B}}\phi)(h_{\alpha})}{h_{\alpha}} \\
&= \Delta_{\mathcal{B}}\phi + \sum_{1 \leq \alpha \leq k} d_{\alpha} \frac{g_{\mathcal{B}}(\nabla^{\mathcal{B}}\phi, \nabla^{\mathcal{B}}h_{\alpha})}{h_{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\Delta(\psi \circ \sigma_i) &= \sum_{1 \leq j \leq r} g(\nabla_{\mathbf{e}_{(0,j)}} \nabla \psi, \mathbf{e}_{(0,j)}) + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_{\alpha}}} g(\nabla_{\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}} \nabla \psi, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}) \\
&= \sum_{1 \leq j \leq r} g\left(\nabla_{\mathbf{e}_{(0,j)}} \left(\frac{\nabla^{\mathcal{N}_i} \psi}{h_i^2}\right), \mathbf{e}_{(0,j)}\right) + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_{\alpha}}} g\left(\nabla_{\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}} \left(\frac{\nabla^{\mathcal{N}_i} \psi}{h_i^2}\right), \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right) \\
&= \sum_{1 \leq j \leq r} g\left(-\frac{2\mathbf{e}_{(0,j)}(h_i)}{h_i^3} \nabla^{\mathcal{N}_i} \psi + \frac{1}{h_i^2} \nabla_{\mathbf{e}_{(0,j)}} \nabla^{\mathcal{N}_i} \psi, \mathbf{e}_{(0,j)}\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_{\alpha}}} h_i^{-4} g(\nabla_{\mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}} \nabla^{\mathcal{N}_i} \psi, \mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_{\alpha}}} h_i^{-2} g^{\mathcal{N}_i}(\nabla_{\mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}} \nabla^{\mathcal{N}_i} \psi, \mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}) \\
&= h_i^{-2} \Delta_{\mathcal{N}_i} \psi.
\end{aligned}$$

■

Lema (L.4.10). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$. Denotemos $\text{Rm}^{\mathcal{M}} = \text{Rm}$ e tomemos $X, Y, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_{\alpha})$, $W \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_{\eta})$ e $U \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_{\beta})$. Então

- (1) $\text{Rm}(X, Y)Z = \text{Rm}_{\mathcal{B}}(X, Y)Z$;
- (2) $\text{Rm}(V, X)Y = -\frac{(\nabla_{\mathcal{B}}^2 h_{\alpha})(X, Y)}{h_{\alpha}} V$;
- (3) $\text{Rm}(X, V)W = \text{Rm}(V, W)X = \text{Rm}(V, X)W = 0$ sempre que $\alpha \notin \{\eta\}$;
- (4) $\text{Rm}(X, Y)V = 0$;
- (5) $\text{Rm}(V, W)X = 0$, sempre que $\alpha = \eta$;
- (6) $\text{Rm}(V, W)U = 0$, sempre que $\alpha \in \{\eta\} \neq \{\beta\}$;
- (7) $\text{Rm}(U, V)W = -g(V, W) \frac{g_{\mathcal{B}}(\text{grad}_{\mathcal{B}} h_{\alpha}, \text{grad}_{\mathcal{B}} h_{\beta})}{h_{\alpha} h_{\beta}} U$ sempre que $\alpha \in \{\eta\} \neq \{\beta\}$;
- (8) $\text{Rm}(X, V)W = -\frac{g(V, W)}{h_{\alpha}} \nabla_X^{\mathcal{B}}(\text{grad}_{\mathcal{B}} h_{\alpha})$, sempre que $\alpha \in \{\eta\}$;
- (9) $\text{Rm}(V, W)U = \text{Rm}_{\mathcal{N}_{\alpha}}(V, W)U + \frac{\|\text{grad}_{\mathcal{B}} h_{\alpha}\|^2}{(h_{\alpha}^2)} \cdot (g(V, U)W - g(W, U)V)$, sempre que $\{\alpha, \eta\} = \{\beta\}$.

Demonstração: O item (1) é uma consequência direta do item (1) do lema (L.4.8). Para provar o item (2), note inicialmente que $[X, V] = 0$ como consequência imediata do lema (L.4.6), de forma que

$$\begin{aligned}
\text{Rm}(V, X)Y &= \nabla_V \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_V Y \\
&= \nabla_V \nabla_X^{\mathcal{B}} Y - \nabla_X \left(\frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} V \right) \\
&= \frac{(\nabla_X^{\mathcal{B}} Y)(h_\alpha)}{h_\alpha} V - X \left(\frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} \right) V - \frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V \\
&= \frac{\nabla_{\nabla_X^{\mathcal{B}} Y}(h_\alpha)}{h_\alpha} V - \frac{X(Y(h_\alpha))}{h_\alpha} V + \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha^2} Y(h_\alpha) V - \frac{X(h_\alpha) Y(h_\alpha)}{h_\alpha^2} V \\
&= -\frac{(\text{Hess}_g(h_\alpha))(X, Y)}{h_\alpha} V.
\end{aligned}$$

O item (3) segue como consequência direta do item (3) do lema (L.4.8). Agora, segue do item (2) do lema (L.4.8) que

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V &= \nabla_X \left(\frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} V \right) - \nabla_Y \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V \right) \\
&= X \left(\frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} \right) V + \frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_X V - Y \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \right) V - \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_Y V \\
&= \frac{X(Y(h_\alpha))}{h_\alpha} V - \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} Y(h_\alpha) V + \frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V \\
&\quad - \frac{Y(X(h_\alpha))}{h_\alpha} V + \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} Y(h_\alpha) V - \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} V \\
&= \frac{[X, Y](h_\alpha)}{h_\alpha} V \\
&= \nabla_{[X, Y]} V,
\end{aligned}$$

e portanto $\text{Rm}(X, Y)V = 0$, como afirmado no item (4). O item (5) é uma consequência simples do item (2) do lema (L.4.8). De fato,

$$\begin{aligned}
\text{Rm}(V, W)X &= \nabla_V \nabla_W X - \nabla_W \nabla_V X - \nabla_{[V, W]} X \\
&= \nabla_V \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} W \right) - \nabla_W \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V \right) - \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} [V, W] \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} (\nabla_V W - \nabla_W V - [V, W]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O item (6) é uma consequência direta dos itens (3) e (1) do lema (L.4.8). Para provar o item (7), note que novamente como consequência do lema (L.4.6), temos $[U, V] = 0$, de forma que usando o lema (L.4.8), obtemos:

$$\text{Rm}(U, V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \underbrace{\nabla_U W}_{=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_U \left(\nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \right) \\
&= -\frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla_U \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&= -\frac{g(V, W)}{h_\alpha} \frac{(\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha)(h_\beta)}{h_\beta} U \\
&= -g(V, W) \frac{g_{\mathcal{B}}(\text{grad}_{\mathcal{B}} h_\alpha, \text{grad}_{\mathcal{B}} h_\beta)}{h_\alpha h_\beta} U.
\end{aligned}$$

Iremos agora provar o item (8). Primeiramente, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_V W &= \nabla_X \left(\nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \right) \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - X \left(\frac{g(V, W)}{h_\alpha} \right) \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha - \frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla_X \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{(g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W))}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha + \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} g(V, W) \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&\quad - \frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla_X^{\mathcal{B}} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - 2 \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} g(V, W) \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha + \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} g(V, W) \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha - \frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla_X^{\mathcal{B}} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} g(V, W) \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha - \frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla_X^{\mathcal{B}} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha.
\end{aligned}$$

Outrossim,

$$\begin{aligned}
\nabla_V \nabla_X W &= \nabla_V \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} W \right) \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \left(\nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \right) \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} g(V, W) \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha.
\end{aligned}$$

Como $[X, V] = 0$, segue então que

$$\text{Rm}(X, V)W = -\frac{g(V, W)}{h_\alpha} \nabla_X^{\mathcal{B}}(\text{grad}_{\mathcal{B}} h_\alpha).$$

Finalmente, para provar (9), note primeiramente que $\text{Rm}(V, W)U \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$, já que dados $X \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ e $L \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\xi)$ com $\xi \neq \alpha$, temos

$$\begin{aligned}
g(\text{Rm}(V, W)U, X) &= -g(\text{Rm}(V, W)X, U) = 0, \text{ pelo item (5);} \\
g(\text{Rm}(V, W)U, L) &= -g(\text{Rm}(V, W)L, U) = 0, \text{ pelo item (6).}
\end{aligned}$$

Segue então da equação de Gauss e do item (3) do lema (L.4.8) que dado qualquer $C \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$, temos

$$\begin{aligned} g(\text{Rm}(V, W)U, C) &= (h_\alpha)^2 \text{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}(V, W, U, C) - g(\mathbf{II}(V, C), \mathbf{II}(W, U)) + g(\mathbf{II}(V, U), \mathbf{II}(W, C)) \\ &= (h_\alpha)^2 \text{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}(V, W, U, C) - \frac{g(V, C)g(W, U)}{(h_\alpha)^2} \|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2 + \frac{g(V, U)g(W, C)}{(h_\alpha)^2} \|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Equivalentemente, como $\text{Rm}(V, W)U \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$,

$$\flat^g(\text{Rm}(V, W)U) = \flat^g \left(\text{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}(V, W)U + \frac{\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2} \cdot \{g(V, U)W - g(W, U)V\} \right).$$

Como \flat^g é um isomorfismo em cada fibra de $T\mathcal{M}$, segue, como queríamos mostrar, que

$$\text{Rm}(V, W)U = \text{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}(V, W)U + \frac{\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2} \cdot \{g(V, U)W - g(W, U)V\}.$$

■

Lema (L.4.11). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$. Suponha que $X, Y, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$ e $W \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\eta)$. Então:

$$(1) \quad \text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}_{\mathcal{B}}(X, Y) - \sum_{1 \leq \mu \leq k} \frac{d_\mu}{h_\mu} \nabla_{\mathcal{B}}^2(h_\mu)(X, Y);$$

$$(2) \quad \text{Ric}(X, V) = 0;$$

$$(3) \quad \text{Ric}(V, W) = 0 \text{ se } \alpha \neq \eta;$$

$$(4)$$

$$\text{Ric}(V, W) = \text{Ric}^{\mathcal{N}_\alpha}(V, W) - \left(\begin{array}{l} \frac{\Delta_{\mathcal{B}} h_\alpha}{h_\alpha} + (d_\alpha - 1) \frac{\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2} \\ + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ \gamma \neq \alpha}} d_\gamma \frac{g_{\mathcal{B}}(\nabla^{\mathcal{B}} h_\gamma, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha)}{h_\gamma h_\alpha} \end{array} \right) g(V, W), \text{ se } \alpha = \eta.$$

Demonstração: Primeiramente, temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \sum_{1 \leq i \leq r} \text{Rm}(\mathbf{e}_{(0,i)}, X, Y, \mathbf{e}_{(0,i)}) + \sum_{\substack{1 \leq \mu \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_\mu}} \text{Rm}(\tilde{\mathbf{e}}_{(\mu,\beta)}, X, Y, \tilde{\mathbf{e}}_{(\mu,\beta)}) \\ &= \text{Ric}^{\mathcal{B}}(X, Y) + \sum_{\substack{1 \leq \mu \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_\mu}} g \left(-\frac{(\nabla_{\mathcal{B}}^2 h_\mu)(X, Y)}{h_\mu} \tilde{\mathbf{e}}_{(\mu,\beta)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\mu,\beta)} \right) \\ &= \text{Ric}^{\mathcal{B}}(X, Y) - \sum_{1 \leq \mu \leq k} \frac{d_\mu}{h_\mu} (\nabla_{\mathcal{B}}^2 h_\mu)(X, Y). \end{aligned}$$

Pela $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -bilinearidade de Ric, para provar os itens restantes podemos supor sem perda de generalidade que $V = \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}$ e $W = \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)}$. Temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, V) &= \sum_{1 \leq i \leq r} g \left(\text{Rm} \left(\mathbf{e}_{(0,i)}, X \right) V, \mathbf{e}_{(0,i)} \right) + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ 1 \leq \ell \leq d_\gamma}} g \left(\text{Rm} \left(\mathbf{e}_{(\gamma,\ell)}, X \right) V, \mathbf{e}_{(\gamma,\ell)} \right) \\ &= - \sum_{1 \leq i \leq r} \underbrace{g \left(\text{Rm} \left(\mathbf{e}_{(0,i)}, X \right) \mathbf{e}_{(0,i)}, V \right)}_{=0, \text{ por (1) de (L.4.10)}} - \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ 1 \leq \ell \leq d_\gamma}} \underbrace{g \left(\text{Rm} \left(X, \mathbf{e}_{(\gamma,\ell)} \right) \mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}, \mathbf{e}_{(\gamma,\ell)} \right)}_{=0, \text{ por (3) e (8) de (L.4.10)}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq \eta$, temos:

$$\text{Ric} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)} \right) = \sum_{1 \leq i \leq r} \underbrace{g \left(\text{Rm} \left(\mathbf{e}_{(0,i)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)}, \mathbf{e}_{(0,i)} \right)}_{=0, \text{ por (3) de (L.4.10)}} + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ 1 \leq p \leq d_\gamma}} g \left(\text{Rm} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)} \right).$$

É óbvio que os termos do último somatório do lado direito acima todos se anulam. De fato, se $\gamma = \alpha$ isso é absolutamente trivial, e quando γ, α e η são todos distintos, o item (3) do lema (L.4.8) garante que

$$\text{Rm} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)} = 0.$$

Agora, quando $\alpha = \eta$, temos

$$\begin{aligned} \text{Ric} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)} \right) &= \sum_{1 \leq i \leq r} g \left(\text{Rm} \left(\mathbf{e}_{(0,i)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}, \mathbf{e}_{(0,i)} \right) + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ 1 \leq p \leq d_\gamma}} g \left(\text{Rm} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} g \left(\frac{-\delta_{\beta\xi}}{h_\alpha} \nabla_{\mathbf{e}_{(0,i)}}^{\mathcal{B}} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha, \mathbf{e}_{(0,i)} \right) + \sum_{1 \leq p \leq d_\alpha} g \left(\text{Rm} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)} \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ \gamma \neq \alpha \\ 1 \leq p \leq d_\gamma}} g \left(\text{Rm} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)} \right) \\ &= -\frac{\delta_{\beta\xi}}{h_\alpha} \Delta_{\mathcal{B}} h_\alpha \\ &\quad + \sum_{1 \leq p \leq d_\alpha} g \left(\text{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)} + \frac{\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2} \left\{ \delta_{p\xi} \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} - \delta_{\beta\xi} \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)} \right\}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)} \right) \\ &\quad - \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ \gamma \neq \alpha \\ 1 \leq p \leq d_\gamma}} g \left(\delta_{\beta\xi} \frac{g_{\mathcal{B}} \left(\nabla^{\mathcal{B}} h_\gamma, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \right)}{h_\gamma h_\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)} \right) \\ &= -\frac{\delta_{\beta\xi}}{h_\alpha} \Delta_{\mathcal{B}} h_\alpha + \text{Ric}^{\mathcal{N}_\alpha} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)} \right) + \frac{\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2} \delta_{\beta\xi} - \frac{\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2} \delta_{\beta\xi} d_\alpha \\ &\quad - \delta_{\beta\xi} \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ \gamma \neq \alpha}} d_\gamma \frac{g_{\mathcal{B}} \left(\nabla^{\mathcal{B}} h_\gamma, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \right)}{h_\gamma h_\alpha} \end{aligned}$$

$$= \text{Ric}^{\mathcal{N}_\alpha} \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)} \right) - \left(\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_{\mathcal{B}} h_\alpha}{h_\alpha} + (d_\alpha - 1) \frac{\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ \gamma \neq \alpha}} d_\gamma \frac{g_{\mathcal{B}}(\nabla^{\mathcal{B}} h_\gamma, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha)}{h_\gamma h_\alpha} \right) g \left(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)} \right). \end{aligned} \right)$$

■

Lema (L.4.12). Seja $\mathcal{M} = B \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_B \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$. Então a curvatura escalar de \mathcal{M} é dada por

$$\begin{aligned} R = R_B - 2 \sum_{1 \leq i \leq k} d_i \frac{\Delta_B h_i}{h_i} + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{R_{\mathcal{N}_i}}{h_i^2} - \sum_{1 \leq i \leq k} d_i (d_i - 1) \frac{\|\text{grad}_B h_i\|_B^2}{h_i^2} \\ + \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k \\ \ell \neq i}} d_i d_\ell \frac{g_B(\text{grad}_B h_i, \text{grad}_B h_\ell)}{h_i h_\ell}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} R &= \sum_{1 \leq i \leq r} \text{Ric}(\mathbf{e}_{(0,i)}, \mathbf{e}_{(0,i)}) + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \varphi \leq d_\alpha}} \text{Ric}(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}) \\ &= R_B - \sum_{\substack{1 \leq \mu \leq k \\ 1 \leq i \leq r}} \frac{d_\mu}{h_\mu} (\nabla_{\mathcal{B}}^2 h_\mu)(\mathbf{e}_{(0,i)}, \mathbf{e}_{(0,i)}) \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \varphi \leq d_\alpha}} \text{Ric}^{\mathcal{N}_\alpha}(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}) - \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \varphi \leq d_\alpha}} \left(\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_{\mathcal{B}} h_\alpha}{h_\alpha} + (d_\alpha - 1) \frac{\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ \gamma \neq \alpha}} d_\gamma \frac{g_{\mathcal{B}}(\nabla^{\mathcal{B}} h_\gamma, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha)}{h_\gamma h_\alpha} \right) g(\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}) \end{aligned} \right) \\ &= R_B - 2 \sum_{1 \leq \mu \leq k} d_\mu \frac{\Delta_{\mathcal{B}} h_\mu}{h_\mu} + \sum_{1 \leq \mu \leq k} \frac{R_{\mathcal{N}_\mu}}{(h_\mu)^2} - \sum_{1 \leq \mu \leq k} d_\mu (d_\mu - 1) \frac{\|\text{grad}_{\mathcal{B}} h_\mu\|^2}{(h_\mu)^2} \\ &+ \sum_{1 \leq \alpha \leq k} \sum_{\substack{1 \leq \gamma \leq k \\ \gamma \neq \alpha}} d_\alpha d_\gamma \frac{g_{\mathcal{B}}(\nabla^{\mathcal{B}} h_\gamma, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha)}{h_\gamma h_\alpha}. \end{aligned}$$

■

Exemplo (E.4.6). Para este exemplo, lembramos primeiramente que uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}, g) tem curvatura seccional constante igual a $S \in \mathbb{R}$ se, e somente se, seu tensor de curvatura é dado por

$$\text{Rm} = S (g \otimes g),$$

ou, equivalentemente, se e só se,

$$\text{Rm}(X, Y, Z, W) = S (g(X, W) g(Y, Z) - g(X, Z) g(Y, W)),$$

sejam quais forem $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$. Agora, denotando

$$\mathbb{Q}^n(\kappa) \doteq \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{se } \kappa = 0; \\ \mathbb{S}^n, & \text{se } \kappa = 1; \\ \mathbb{H}^n, & \text{se } \kappa = -1; \end{cases}$$

temos (conforme demonstrado em [30]) que o tensor Riemanniano de $\mathcal{I} \times_h \mathbb{Q}^n(\kappa)$ (onde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e h é uma função real suave e positiva definida em \mathcal{I}) é dado por

$$\begin{aligned} \text{Rm}(X, Y, Z, W) = & \left(\frac{(h')^2 - \kappa}{h^2} \circ \pi_{\mathcal{I}} \right) (g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)) \\ & + \left(\frac{h h'' - (h')^2 + \kappa}{h^2} \circ \pi_{\mathcal{I}} \right) \begin{pmatrix} g(X, Z)g(Y, \partial_t)g(W, \partial_t) - g(Y, Z)g(X, \partial_t)g(W, \partial_t) \\ -g(X, W)g(Y, \partial_t)g(Z, \partial_t) + g(Y, W)g(X, \partial_t)g(Z, \partial_t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular, $\mathcal{I} \times_h \mathbb{Q}^n(\kappa)$ tem curvatura seccional constante igual a $C \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$-C = \frac{(h')^2 - \kappa}{h^2} \text{ é constante e } \frac{h''}{h} = \frac{(h')^2 - \kappa}{h^2}.$$

Consequentemente,

\mathbb{S}^n é localmente isométrico a $\mathcal{I} \times_{\text{sen}(t)} \mathbb{S}^{n-1}$;

\mathbb{H}^n é localmente isométrico a $\mathcal{I} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ e a $\mathcal{I} \times_{\text{senh}(t)} \mathbb{S}^{n-1}$;

\mathbb{R}^n é localmente isométrico a $\mathcal{I} \times_t \mathbb{S}^{n-1}$.

Bibliografia

- [1] **Andrews, Ben; Hopper, Christopher.** The Ricci flow in Riemannian geometry. A complete proof of the differentiable $1/4$ -pinching sphere theorem. Lecture Notes in Mathematics, 2011. Springer, Heidelberg, 2011. xviii+296 pp. ISBN: 978-3-642-16285-5.
- [2] **Azagra, D.; Ferrera, J.; López-Mesas, F.; Rangel, Y.** Smooth approximation of Lipschitz functions on Riemannian manifolds. *J. Math. Anal. Appl.* **326** (2007), no. 2, 1370–1378.
- [3] **Biezuner, R. J.** Notas de aula de geometria Riemanniana. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: http://150.164.25.15/~rodney/notas_de_aula/geometria_riemanniana.pdf. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.
- [4] **Cao, Huai-Dong.** On curvature estimates for four-dimensional gradient Ricci solitons. *Mat. Contemp.* **49** (2022), 87–139.
- [5] **Cao, Huai-Dong; Chen, Bing-Long; Zhu, Xi-Ping.** Recent developments on Hamilton’s Ricci flow. *Surveys in differential geometry. Vol. XII. Geometric flows*, 47–112, Surv. Differ. Geom., 12, Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [6] **Cao, Huai-Dong; Ribeiro, Ernani, Jr.; Zhou, Detang.** Four-dimensional complete gradient shrinking Ricci solitons. *J. Reine Angew. Math.* **778** (2021), 127–144.
- [7] **Cao, Huai-Dong; Zhou, Detang.** On complete gradient shrinking Ricci solitons. *J. Differential Geom.* **85** (2010), no. 2, 175–185.
- [8] **Cao, Xiaodong; Ribeiro, Ernani, Jr.; Tran, Hung.** Rigidity of four-dimensional Kähler-Ricci solitons. Preprint, ArXiv:math.DG/221205267, 2022.
- [9] **Cao, Xiaodong; Tran, Hung.** The Weyl tensor of gradient Ricci solitons. *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 1, 389–436.
- [10] **Chen, Bing-Long.** Strong uniqueness of the Ricci flow. *J. Differential Geom.* **82** (2009), no. 2, 363–382.
- [11] **Chen, Xiuxiong; Wang, Yuanqi.** On four-dimensional anti-self-dual gradient Ricci solitons. *J. Geom. Anal.* **25** (2015), no. 2, 1335–1343.
- [12] **Chow, Bennett; Lu, Peng; Ni, Lei.** Hamilton’s Ricci flow. Graduate Studies in Mathematics, 77. American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press Beijing, New York, 2006. xxxvi+608 pp. ISBN: 978-0-8218-4231-7; 0-8218-4231-5.
- [13] **Couto, I. T.** About curvature like tensors. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: <https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouth.1/texts/curvaturelike.pdf>. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.
- [14] **Couto, I. T.** A mini-course on tensors. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: <https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouth.1/texts/tensors.pdf>. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

- [15] Couto, I. T. Some index computations with curvature tensors. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouth.1/texts/index_curvature.pdf. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.
- [16] Derdziński, Andrzej. Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four. *Compositio Math.* **49** (1983), no. 3, 405–433.
- [17] Dobarro, Fernando; Ünal, Bülent. Curvature of multiply warped products. *J. Geom. Phys.* **55** (2005), no. 1, 75–106.
- [18] do Carmo, M. P. (1976) *O método do referencial móvel*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- [19] Emineti, Manolo; La Nave, Gabriele; Mantegazza, Carlo. Ricci solitons: the equation point of view. *Manuscripta Math.* **127** (2008), no. 3, 345–367.
- [20] Flanders, Harley. Differential forms with applications to the physical sciences. Second edition. Dover Books on Advanced Mathematics. *Dover Publications, Inc., New York*, 1989. xvi+205 pp. ISBN: 0-486-66169-5.
- [21] Foster, James; Nightingale, J. David. A short course in general relativity. Third edition. Springer, New York, 2006. x+292 pp. ISBN: 978-0387-26078-5; 0-387-26078-1.
- [22] Godinho, Leonor; Natário, José. An introduction to Riemannian geometry. With applications to mechanics and relativity. Universitext. *Springer, Cham*, 2014. x+467 pp. ISBN: 978-3-319-08665-1; 978-3-319-08666-8.
- [23] Hamilton, Richard S. Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geom.* **24** (1986), no. 2, 153–179.
- [24] Hamilton, Richard S. The formation of singularities in the Ricci flow. *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), 7–136*, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [25] Hamilton, Richard S. The Ricci flow on surfaces. *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986)*, 237–262, Contemp. Math., 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [26] Hamilton, Richard S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geometry* **17** (1982), no. 2, 255–306.
- [27] Ivey, Thomas. New examples of complete Ricci solitons. *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), no. 1, 241–245.
- [28] Kotschwar, Brett; Wang, Lu. Rigidity of asymptotically conical shrinking gradient Ricci solitons. *J. Differential Geom.* **100** (2015), no. 1, 55–108.
- [29] Kühnel, Wolfgang. Conformal transformations between Einstein spaces. *Conformal geometry (Bonn, 1985/1986)*, 105–146, Aspects Math., E12, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1988.
- [30] Lawn, Marie-Amélie; Ortega, Miguel. A fundamental theorem for hypersurfaces in semi-Riemannian warped products. *J. Geom. Phys.* **90** (2015), 55–70.
- [31] Lee, John M. Introduction to smooth manifolds. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013. xvi+708 pp. ISBN: 978-1-4419-9981-8
- [32] Lee, John M. Riemannian manifolds. An introduction to curvature. Graduate Texts in Mathematics, 176. *Springer-Verlag, New York*, 1997. xvi+224 pp. ISBN: 0-387-98271-X.
- [33] Lima, E. L. (2017). *Álgebra Exterior*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- [34] Mackenzie, Dana. The Poincaré Conjecture—Proved. *Science*, 314(5807):1848-1849, 2006. Disponível em: [DOI: 10.1126/science.314.5807.1848](https://doi.org/10.1126/science.314.5807.1848). Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

- [35] **MathOverflow**. Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds. Disponível em: <https://mathoverflow.net/questions/96670/classification-of-surfaces-and-the-top-diff-and-pl-categories-for-manifolds>. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.
- [36] **Morgan, John W.** Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2005), no. 1, 57–78.
- [37] **Munteanu, Ovidiu; Sesum, Natasa.** On gradient Ricci solitons. *J. Geom. Anal.* **23** (2013), no. 2, 539–561.
- [38] **Munteanu, Ovidiu; Wang, Jiaping.** Geometry of shrinking Ricci solitons. *Compos. Math.* **151** (2015), no. 12, 2273–2300.
- [39] **Naber, Aaron.** Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature. *J. Reine Angew. Math.* **645** (2010), 125–153.
- [40] **Natário, José.** Mathematical relativity. Notas de aula. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2003.02855>. Acessado em 07 de março de 2023.
- [41] **Ni, Lei.** Ricci flow and nonnegativity of sectional curvature. *Math. Res. Lett.* **11** (2004), no. 5-6, 883–904.
- [42] **Ni, Lei; Wallach, Nolan.** On a classification of gradient shrinking solitons. *Math. Res. Lett.* **15** (2008), no. 5, 941–955.
- [43] **O’Neill, Barrett.** Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. *Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York*, 1983. xiii+468 pp. ISBN: 0-12-526740-1.
- [44] **Perelman, G. Y.** Ricci flow with surgery on three manifolds. Preprint, ArXiv:math.DG/0303109, 2003.
- [45] **Perelman, G. Y.** The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. Preprint, arXiv math/0211159, 2002.
- [46] **Petersen, Peter; Wylie, William.** On the classification of gradient Ricci solitons. *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 4, 2277–2300.
- [47] **Petersen, Peter.** Riemannian geometry. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, New York, 2006. xvi+401 pp. ISBN: 978-0387-29246-5; 0-387-29246-2.
- [48] **Petersen, Peter; Wylie, William.** Rigidity of gradient Ricci solitons. *Pacific J. Math.* **241** (2009), no. 2, 329–345.
- [49] **Reprints and Permissions, Science, AAAS.** Disponível em: <https://www.science.org/content/page/reprints-and-permissions>. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.
- [50] **Rudnik, Adam Petzet.** *Analysis of the Ricci Flow on Compact Manifolds*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2019.
- [51] **Shin, Jinwoo.** On the classification of 4-dimensional (m, ρ) -quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl curvature. *Ann. Global Anal. Geom.* **51** (2017), no. 4, 379–399.
- [52] **Topping, Peter.** Lectures on the Ricci flow. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/~maseq/RFnotes.html>. Acessado em 08 de março de 2023.
- [53] **Tu, Loring W.** Differential geometry. Connections, curvature, and characteristic classes. Graduate Texts in Mathematics, 275. *Springer, Cham*, 2017. xvi+346 pp. ISBN: 978-3-319-55082-4; 978-3-319-55084-8.

- [54] **Viaclovsky, J. A.** Math 865, Topics in Riemannian Geometry. Notas de aula. Disponível em: https://www.math.uci.edu/~jviaclov/courses/865_Fall_2007.pdf. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.
- [55] **Wu, Jia-Yong; Wu, Peng; Wylie, William.** Gradient shrinking Ricci solitons of half harmonic Weyl curvature. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **57** (2018), no. 5, Paper No. 141, 15 pp.
- [56] **Wu, Peng.** A Weitzenböck formula for canonical metrics on four-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017), no. 2, 1079–1096.