UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

REPRESENTAÇÃO POLINOMIAL DE NÚMEROS REAIS POR U-NÚMEROS

TESE DE DOUTORADO

LUIZ GUSTAVO DALPIZOL

BRASÍLIA, MAIO DE 2023

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Representação polinomial de números reais por U-números.

Por

Luiz Gustavo Dalpizol

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 24 de abril de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. DIEGO MARQUES FERREIRA- MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. HEMAR TEIXEIRA GODINHO - MAT/UnB (Membro)

Victor Neumann

Prof. Dr. VICTOR GONZALO LOPEZ NEUMANN– UFU (Membro)

Profa. Dra. ANA PAULA DE ARAUJO CHAVES– UFG (Membro)

"It can be of no practical use to know that π is irracional,

but if we can know,

it surely would be intolerable not to know."

E. C. Titchmarsh (1899-1963)

Resumo

Em 1993, Pollington [24] demonstrou que dados n natural e θ real, existe $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ tal que $f(\sigma, \tau) = \theta$, onde $f(x, y) = x + y$; isto é, todo número real pode ser escrito como soma de dois U_n-números, para todo n natural. Neste trabalho de tese, consideramos substituir $f(x, y)$ por famílias mais gerais de polinômios em duas variáveis a coeficientes inteiros.

Palavras-chave: Números transcendentes, Classificação de Mahler, U-números.

Abstract

In 1993, Pollington [24] proved that for any positive integer n and for any real number θ, there exists $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ such that $f(\sigma, \tau) = \theta$, where $f(x, y) = x + y$, that is, every real number can be written as a sum of two U_n-numbers, for any integer $n \geq 1$. In this thesis, we shall replace $f(x, y)$ by some more general families of two variable polynomials with integer coefficients.

Keywords: Transcendental numbers, Mahler's classification, U-numbers.

Sumário

Notação

Sejam f e g funções de uma variável real x, escrevemos

$$f \ll g \;\; (f \gg g)$$

ou

$$f = O(g)$$

se existe uma constante c positiva e absoluta tal que

$$|f(x)| \leq cg(x),$$

para todo x em consideração. A constante c é chamada constante implícita. Escrevemos

$$f \ll_\lambda g$$

ou

$$f = O_\lambda(g)$$

se a constante c depende do parâmetro λ.

Por

$$f = o(g),$$

entende-se que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Usaremos ainda as seguintes notações:

$\mathbb{N}$	o conjunto dos naturais
$\mathbb{Z}$	o conjunto dos inteiros
$\mathbb{Q}$	o conjunto dos racionais
$\mathbb{C}$	o conjunto dos complexos
$\overline{\mathbb{Q}}$	o corpo dos números algébricos

(a, b)	o maior divisor comum de a e b
$[x]$	o maior inteiro que não excede x
$\mathbb{Z}[X]$	o anel dos polinômios com coeficientes inteiros
α, β, γ	números algébricos
$P_{\alpha, \mathbb{Z}}(X)$	o polinômio minimal com coeficientes inteiros do algébrico α
$\partial(\alpha)$	o grau do algébrico α
$H(\alpha)$	a altura do algébrico α
θ, ξ	números complexos
$\lvert\xi\rvert$	a norma do número complexo ξ
$\lvert A\rvert$	a cardinalidade do conjunto A
λ	a medida de Lebesgue na reta

Introdução

Um número complexo α é dito algébrico se é raiz de um polinômio não nulo com coeficientes inteiros. Em caso contrário, é chamado *transcendente*. A palavra transcendente, cunhada ao que tudo indica por Leibnitz, significa, segundo Euler, que esses números transcendem o poder das operações algébricas.

Mesmo sendo uma definição do século XVIII, a teoria dos números transcendentes nasceu com Liouville em seu famoso trabalho de 1844 (ver [16]) no qual obteve-se, pela primeira vez, uma classe, *très-étendue*, como foi descrito no título do artigo, de números que não satisfazem nenhuma equação algébrica não nula com coeficientes inteiros. No entanto, alguns problemas isolados relativos a natureza aritmética de certos números foram obtidos bem antes desta data. Por exemplo, Euler em 1744 provou a irracionalidade de e e, em 1761, Lambert estabeleceu a irracionalidade de π.

Para construir sua classe, Liouville estabeleceu que números algébricos não são "bem aproximados" por números racionais e, então, explicitou uma classe de números exatamente com a propriedade oposta. Estes números são hoje conhecidos como *números de Liouville*: um número real θ é chamado Liouville se para todo natural r correspondem inteiros p_r e q_r, com $q_r > 1$, tais que

$$0 < |\theta - p_r/q_r| < q_r^{-r}.$$

O conjunto dos números de Liouville é comumente denotado por $\mathbb{L}$. O primeiro exemplo neste conjunto (e, consequentemente, de um número transcendente) é a então conhecida *constante de Liouville* definida pela série convergente $\ell := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.11000100\ldots$ (isto é, o 1 nas casas decimais de posições fatoriais e 0 em caso contrário).

Em 1874, Cantor introduziu o conceito de enumerabilidade tendo como consequência a observação que "quase todos" os números são transcendentes. Na linguagem de Cantor, o conjunto dos números algébricos $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável enquanto que os números reais não são.

Classificação de Mahler

Neste início, estavamos apenas interessados na aproximação de um número real ξ por racionais p/q. Para este fim, comparamos a diferença $|\xi - p/q|$ com a maneira mais natural de medir o tamanho de p/q; isto é, com $\max\{|p|, |q|\}$. Com o intuito de considerarmos aproximações por algébricos mais gerais, precisamos agora definir uma noção de tamanho de um algébrico α a qual, se possível, coincida com a medida anterior quando nos restringimos aos racionais. Muitas definições foram propostas mas para os nossos propósitos usaremos apenas uma delas que é usualmente conhecida por *altura*.

Como $\mathbb{Z}[X]$ é um domínio de fatoração única,* existe um único polinômio irredutível $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ com coeficiente líder maior que zero tal que α é uma de suas raízes, este é conhecido como *polinômio minimal* de α sobre os inteiros e o denotamos por $P_{\alpha,\mathbb{Z}}(X)$. O *grau* do algébrico α é o grau de $P_{\alpha,\mathbb{Z}}(X)$ e será representado por $\partial(\alpha)$. A altura de um polinômio complexo $P(X)$, denotada por $H(P)$, é o máximo do valor absoluto de seus coeficientes. A altura de um número algébrico α, denotada por $H(\alpha)$, é a altura de seu polinômio minimal $P_{\alpha,\mathbb{Z}}(X)$. Resultados sobre a altura usados ao longo do texto foram condensados na última seção do Capítulo 1.

Como já vimos, admitir boas aproximações por racionais implica necessariamente em transcendência; seguindo esse mesmo princípio, veremos que um número complexo ξ é transcendente se, e somente se, admite infinitas "boas aproximações" por algébricos. Determinar com exatidão essas aproximações, em termos dos graus e alturas dos aproximantes, é precisamente o conteúdo de uma classificação para os números transcendentes dada pelo matemático alemão Kurt Mahler [17] em 1932. A primeira classificação dessa natureza foi idealizada por Maillet [18] em 1906, e outras foram descritas por Perna [23] e Morduchai-Boltovskoj [20] mas a dada por Mahler é, de longe, a mais interessante e será o objeto de nosso estudo à partir de agora.

É importante salientar que ao invés de considerar aproximações por números algébricos, Mahler focou nos menores valores de $|P(\xi)|$ quando $P(X)$ percorre todos os polinômios com coeficientes inteiros satisfazendo $P(\xi) \neq 0$, enquanto que aproximações por algébricos foram apenas consideradas por J. F. Koksma [13] cerca de 7 anos após os trabalhos de Mahler. Contudo, estes dois pontos de vistas nos dão classificações equivalentes, isso se deve em razão da seguinte conexão: se $|P(\xi)|$ é "pequeno" então ξ deve estar pró-

*Devido a um resultado de Gauss, vide ([10], Capítulo 2, Seção 3) ximo de uma das raízes de $P(X)$ e vice-versa. Detalhes sobre a classificação de Koksma bem com as relações entre elas será o assunto da primeira seção do Capítulo 1.

Seja ξ um número complexo qualquer. Para cada par de inteiros positivos n e h, definimos

$$\mathcal{P}_n(h) := \{P(X) \in \mathbb{Z}[X];\ \ \partial P \leq n \ \text{ e } \ H(P) \leq h\}. \tag{1}$$

Sendo este último um conjunto finito, consideramos

$$\Omega_n(\xi, h) := \min\{|P(\xi)|;\ \ P(X) \in \mathcal{P}_n(h),\ P(\xi) \neq 0\} \tag{2}$$

e o expoente $\omega_n(\xi, h)$ dado pela equação

$$\Omega_n(\xi, h) = h^{-n \cdot \omega_n(\xi, h)}. \tag{3}$$

Para avaliarmos o comportamento dos valores de todos os polinômios com grau, no máximo, n em ξ, definimos

$$\omega_n(\xi) := \limsup_{h \longrightarrow \infty} \omega_n(\xi, h)$$

e, para obtermos informações sobre a totalidade deles, tomamos

$$\omega(\xi) := \limsup_{n \longrightarrow \infty} \omega_n(\xi).$$

Por fim, fixamos $\nu(\xi)$ como o menor inteiro positivo n para o qual $\omega_n(\xi) = \infty$; escrevemos $\nu(\xi) = \infty$ se $\omega_n(\xi) < \infty$, para todo n natural. O inteiro $\nu(\xi)$ é conhecido como o grau de ξ.

Com isso, podemos dividir o conjunto dos números complexos, de acordo com Mahler, em quatro classes disjuntas:

A-número	$w(\xi) = 0$,	$\nu(\xi) = \infty$;
S-número	$0 < w(\xi) < \infty$,	$\nu(\xi) = \infty$;
T-número	$w(\xi) = \infty$,	$\nu(\xi) = \infty$;
U-número	$w(\xi) = \infty$,	$\nu(\xi) < \infty$.

A classe dos A-números é precisamente o conjunto dos algébricos, assim ξ é um número transcendente se, e somente se, $\omega(\xi) > 0$. O que dá precisão à frase já mencionada: ξ é transcendente se, e somente se, admite infinitas "boas aproximações" por algébricos. Observe que a notação A-número foi propositalmente escolhida para denotar os algébricos. A escolha das letras seguintes não parece ter uma razão evidente. Acredita-se que Mahler escolheu a letra S em homenagem a seu orientador C. L. Siegel e as letras T e U, sem nenhum significado especial, foram escolhidas por serem as duas seguintes do alfabeto.

Um U-número se caracteriza por apresentar bons aproximantes algébricos com graus relativamente baixos. Levando em conta esse comportamento, subdividiremos esta classe de acordo com o menor grau dos melhores aproximantes. De forma precisa: para cada n natural, denotamos por U_n o conjunto dos *U-números de grau n*. Recordamos que o grau de ξ é o valor da função $\nu(\xi)$ supramencionada.

Não é difícil checar que o conjunto $\mathbb{L}$ dos números de Liouville coincide com o conjunto $U_1 \cap \mathbb{R}$, em particular, a classe dos U-números é não vazia. Em 1953, LeVeque [15] demonstrou a existência de U_n-números, para todo $n \geq 1$; na verdade, ele exibiu um elemento explícito em cada classe, a saber:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3} + \ell} \in U_n \ \ (n = 1, 2, \ldots),$$

onde ℓ é a Constante de Liouville.

Por muitos anos, a existência de T-números foi uma questão em aberto mas, em 1968, uma resposta afirmativa foi obtida por Schmidt [26] porém, diferente do caso dos U_n-números, exemplos explícitos de elementos nessa família ainda não é conhecido. Uma construção mais compacta e acessível para a existência de T-números pode ser encontrada em ([4], Capítulo 8).

No que diz respeito aos S-números temos que quase todos os números são S-números ([4], Capítulo 8, Seção 5). Aqui "quase todos" é interpretado no sentido da medida de Lebesgue linear ou planar no caso dos números reais ou complexos respectivamente. Assim, podemos esperar que qualquer número definido de maneira "natural" tais como e, π e e^{π} (Constante de Gelfond[†]) são S-números. Em 1929, Popken [25] estabeleceu que a constante e é de fato um S-número. Os famosos teoremas de Baker sobre formas lineares em logarítmos atestam que π é um S-número ou um T-número porém a última possibilidade ainda não foi excluída. Quanto a Constante de Gelfond, a possibilidade dela ser um número de Liouville ainda não foi refutada.

Uma das propriedades mais importantes da Classificação de Mahler que a faz ocupar um lugar de destaque no estudo dos números transcendentes, reside no fato de números algebricamente dependentes pertencem a mesma classe ([4], Capítulo 8, Seção 3). De

[†]A transcendência da constante foi demonstrada pelo matemático Alexander Gelfond em 1929.

imediato, os números $e + \ell$ e $\pi + \ell$ são transcendentes. No cenário atual da Teoria dos Números Transcendentes, a natureza aritmética dos números $e + \pi$ e $e \cdot \pi$ é desconhecida mas como é sabido que a Constante de Euler é um S-número bastaria então estabelecer que π é um T-número para garantirmos que ambos são transcendentes.

Nossos resultados

Nesta seção a Classificação de Mahler está restrita a reta real assim todos os A-, S-, T- e U-números aqui considerados são reais. Iniciamos com uma afirmação de fácil justificativa: todo número real pode ser escrito como soma de dois transcendentes. Ora, no caso em que θ é algébrico, basta escrever $\theta = t + (\theta - t)$, para algum t transcendente. Quando θ é transcendente, tomamos $\theta = \theta/2 + \theta/2$. Esse resultado não é de modo algum interessante, pois o conjunto dos números transcendentes tem medida total em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, sabemos que o conjunto dos números de Liouville tem medida nula na reta e, em 1962, Erdös [9] demonstrou um resultado surpreendente: para todo θ real, existem números de Liouville σ e τ tais que $P(\sigma, \tau) = \theta$, onde $P(X, Y) = X + Y$; isto é, todo real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville. Podemos pensar assim que, mesmo sendo um conjunto "invisível", os números de Liouville estão estrategicamente posicionados na reta real. Burger [6] estendeu o resultado de Erdös ao substituir o polinômio $P(X, Y)$ por uma família mais vasta e interessante de funções, as quais ele denominou de funções localmente injetivas.

Em 1990, Alniacik [2] provou que todo número real, com a possível excessão dos números de Liouville, podem ser representados como soma de dois U_2-números. A questão sobre a existência de tais representações surgiu em Stroyls [27] em sua tese de doutoramento. O método adotado por Alniacik depende de propriedades da expansão em frações contínuas e se mostrou bastante intrincado. Contudo, três anos após os resultados envolvendo U_2-números, Pollington [24], adaptando o método usado por Schmidt para estabelecer a existência de T-números, apresentou um demonstração mais simples de um resultado mais geral, este consiste em: todo número real pode ser expresso como soma de dois U_n-números, para cada n natural.

De maneira equivalente, dados n natural e θ um real, existe $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ tal que

$$P(\sigma, \tau) = \theta,$$

onde $P(X,Y) = X + Y$. Essa tese, motivada pelo trabalho de Burger [6] com relação ao resultado de Erdös, visa estender o Teorema de Pollington para uma classe maior de polinômios. Nesta direção, obtemos os três seguintes teoremas que juntos compõem os principais resultados deste trabalho.

Teorema A. *Sejam n um natural, θ um S-número ou um T-número e $P(X,Y)$ um polinômio em duas variáveis com coeficientes inteiros tal que existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $P(x_0, y_0) = \theta$, com*

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x_0, y_0) \neq 0 \qquad e \qquad \frac{\partial P}{\partial Y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de pares $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ tais que $P(\sigma, \tau) = \theta$.

Observamos que as classes dos A- e U-números não foram contempladas no Teorema A. Mas, como estes conjuntos tem medida de Lebesgue zero, concluimos que quase todo número real em $P(\mathbb{R}^2)$ possui uma representação polinomial por U_n-números através de $P(X,Y)$, para todo $n \geq 1$.

Agora, reduziremos as classes dos polinômios com o intuito de estabelecermos um resultado semelhante ao anterior para as classes dos A- e U-números. Primeiro, vamos nos concentrar nos números algébricos (isto é, A-números). Para isso, denotamos por $\mathfrak{F}$ a família de polinômios da forma $P(X)Q(Y)$ e $P(X) + Q(Y)$, onde P e Q são polinômios com coeficientes inteiros.

Teorema B. *Sejam n um natural, θ um algébrico e $P(X,Y)$ um polinômio em $\mathfrak{F}$ tal que existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $P(x_0, y_0) = \theta$, com*

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x_0, y_0) \neq 0 \qquad e \qquad \frac{\partial P}{\partial Y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de pares $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ tais que $P(\sigma, \tau) = \theta$.

Para representarmos os U-números, restringiremos a família $\mathfrak{F}$ para o conjunto $\mathfrak{D}$ de polinômios da forma $X^d Q(Y)$ e $X^d + Q(Y)$, onde Q é um polinômio com coeficientes inteiros e d um natural qualquer. Neste caso, obtemos:

Teorema C. *Sejam n um natural, θ um U-número e $P(X,Y)$ um polinômio em $\mathfrak{D}$ tal que existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $P(x_0, y_0) = \theta$, com*

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x_0, y_0) \neq 0 \qquad e \qquad \frac{\partial P}{\partial Y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de pares $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ *tais que* $P(\sigma, \tau) = \theta$.

O corpo principal desta tese é dividido em três capítulos. No Capítulo 1, apresentamos os pré-requisitos para ler esse texto, estes compreendem uma nova abordagem para a Classificação de Mahler devida a Koksma e uma seção onde reunimos algumas proposições envolvendo a altura de algébricos. Aproveitamos também para apresentar um resultado sobre a existência de certos inteiros algébricos satisfazendo igualdades envolvendo seus graus.

A demonstração do Teorema A será o objetivo do Capítulo 2, nele desenvolveremos as principais ideias e métodos desta tese fazendo deste capítulo o mais importante. No Capítulo 3, utilizaremos grande parte da prova do Teorema A juntamente com os resultados sobre inteiros algébricos do Capítulo 1 para apresentarmos as demonstrações dos teoremas B e C. Uma seção com algumas consequências e comentários dos teoremas supracitados foi colocada na parte final de cada um dos dois últimos capítulos.

Capítulo 1

Preliminares

Reunimos neste capítulo os pré-requisitos necessários para apresentarmos os nossos resultados destacados na Introdução. Esses compreendem algumas proposições envolvendo a altura de algébricos, uma classificação equivalente a Classificação de Mahler bem como uma seção dedicada a construção de inteiros algébricos satisfazendo certas igualdades envolvendo seus graus.

1.1 Classificação de Koksma

Sete anos depois de Mahler classificar os números transcendentes em S-, T- e U-números, Koksma apresentou uma nova classificação que, como veremos adiante, mostrou-se equivalente à de Mahler. Seja ξ um número complexo qualquer. Para cada par de inteiros positivos n e h, definimos

$$\mathcal{A}_n(h) := \left\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}};\ \ \partial(\alpha) \leq n \ \text{ e } \ H(\alpha) \leq h\right\}. \tag{1.1}$$

Sendo este último um conjunto finito, consideramos

$$\Omega_n^*(\xi, h) := \min\left\{|\xi - \alpha|;\ \ \alpha \in \mathcal{A}_n(h),\ \alpha \neq \xi\right\} \tag{1.2}$$

e o expoente $\omega_n^*(\xi, h)$ dado pela equação

$$\Omega_n^*(\xi, h) = h^{-n\cdot\omega_n^*(\xi,h)-1}. \tag{1.3}$$

Para avaliarmos a proximidade de ξ a todos os algébricos com grau menor do que ou igual a n, definimos

$$\omega_n^*(\xi) := \limsup_{h\longrightarrow\infty} \omega_n^*(\xi, h),$$

e, para obtermos informações sobre a totalidade deles, tomamos

$$\omega^*(\xi) := \limsup_{n\longrightarrow\infty} \omega_n^*(\xi).$$

Aproveitamos e definimos $\nu^*(\xi)$ o menor inteiro positivo n para o qual $\omega_n^*(\xi) = \infty$, escrevemos $\nu^*(\xi) = \infty$ se $\omega_n^*(\xi) < \infty$, para todo n natural. Com isso, podemos dividir o conjunto dos números complexos, de acordo com Koksma, em quatro classes disjuntas:

$$\begin{array}{ll} A^*\text{-número} & \omega^*(\xi) = 0; \\ S^*\text{-número} & 0 < \omega^*(\xi) < \infty; \\ T^*\text{-número} & \omega^*(\xi) = \infty, \quad \nu^*(\xi) = \infty; \\ U^*\text{-número} & \omega^*(\xi) = \infty, \quad \nu^*(\xi) < \infty. \end{array}$$

Observamos que essa classificação foi idealizada no plano complexo todavia poderíamos nos restringir apenas a reta real e levarmos em conta somente aproximações por algébricos reais. Para isso, consideraríamos o conjunto

$$\mathcal{A}_n^r(h) := \left\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R};\ \ \partial\,(\alpha) \leq n \ \text{ e } \ H\,(\alpha) \leq h\right\}.$$

Para ξ real, definiríamos

$$\Omega_n^{*r}(\xi, h) := \min\left\{|\xi - \alpha|;\ \ \alpha \in \mathcal{A}_n^r(h),\ \alpha \neq \xi\right\}$$

e, de modo análoga as anteriores, $\omega_n^{*r}(\xi, h)$, $\omega_n^{*r}(\xi)$ e $\omega^{*r}(\xi)$.

Proposição 1.1. *Para todo n natural e todo número real ξ diferente de um algébrico de grau menor do que ou igual a n, temos a igualdade $\omega_n^*(\xi) = \omega_n^{*r}(\xi)$.*

Notemos que a desigualdade $\omega_n^*(\xi) \geq \omega_n^{*r}(\xi)$ é uma consequência direta das definições, no entanto, a desigualdade contrária não é nenhum pouco evidente; por esse motivo, recomendamos ao leitor consultar ([5], Capítulo 3, Lema 3.1)

Naturalmente somos levados a interpelar sobre as possíveis relações entre as classes definidas por Mahler e Koksma, bem como comparações entre as funções $\omega_n^*(\xi)$ e $\omega_n(\xi)$. Koksma, ao introduzir sua classificação, mostrou sem muita dificuldade que

$$\omega_n^*(\xi) \leq \omega_n(\xi), \tag{1.4}$$

para todo n natural e ξ número complexo. Desigualdades contrárias, contudo, apresentaram certo grau de dificuldade. Apenas em 1961 tais resultados foram obtidos por E.

Wirsing [28], estabelecendo várias desigualdades. Dentre elas, destacamos: sejam n um natural e ξ um complexo que não é um algébrico de grau, no máximo, n; então

$$\omega_n^*(\xi) \geq \frac{\omega_n(\xi) + \frac{1}{n}}{2}. \tag{1.5}$$

De posse das duas últimas desigualdades, obtemos:

Teorema 1.2. *Existe uma correspondência exata entre as duas classificações no sentido de que qualquer S-número (respectivamente, T-número, U-número) é um S^*-número (respectivamente, T^*-número, U^*-número).*

Ainda por (1.4) e (1.5), ν e ν^* definem a mesma função assim, definindo o conjunto U_n^* de maneira análoga ao conjunto U_n, obtemos

Proposição 1.3. *Vale a igualdade $U_n = U_n^*$, para todo n natural.*

Todos os nossos resultados terão no seu enunciado a nomenclatura associada a classificação de Mahler mas em suas demonstrações usaremos a versão de Koksma. Essa escolha, quase sempre adotada e permitida pelo Teorema 1.2 e Proposição 1.3, se deve ao fato de existir uma série de resultados sobre a distância entre algébricos distintos, tais como os famosos Teorema de Güting (Teorema 1.14) e Teorema de Schmidt ([4], Capítulo 7).

1.2 Um resultado em teoria dos corpos

Esta seção, que destoa das demais em relação ao tipo de ferramentas utilizadas, tem por objetivo apresentar um resultado (Proposição 1.9 e o seu Corolário) sobre a existência de inteiros algébricos satisfazendo certas igualdades envolvendo os seus graus. De modo que este resultado será utilizado somente no último capítulo deste trabalho, recomendamos ao leitor passar para a próxima seção e retornar somente após a leitura dos primeiros parágrafos do Capítulo 3, o qual dará uma boa motivação ao que foi feito por aqui. Os resultados desta seção são adaptações de algumas demonstrações contidas em [8].

Essencialmente, utilizaremos nesta parte da tese o conceito de discriminante de corpos de números. Iniciaremos então por sua definição e algumas de suas propriedades. Um *corpo de números* de grau m é uma extensão K de $\mathbb{Q}$ com $[K : \mathbb{Q}] = m$. Um elemento em K é dito *integral* ou um *inteiro algébrico* se é uma raiz de um polinômio mônico em $\mathbb{Z}[X]$. Chamamos de $\mathcal{O}_K$ o conjunto de todos os inteiros algébricos do corpo K, este é conhecido como o *fecho integral* de K. Sabemos que $\mathcal{O}_K$, junto das operações herdadas do corpo de números, é um $\mathbb{Z}$-módulo livre de dimensão m.

Consideramos $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ o conjunto dos $\mathbb{Q}$-homomorfismo de K em $\mathbb{C}$. O *discriminante* de uma base $\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ da extensão $K/\mathbb{Q}$ é definido por

$$d(\theta_1, \ldots, \theta_m) = [\det(\sigma_i(\theta_j))]^2 .$$

No caso especial de uma base do tipo $\{1, \theta, \ldots, \theta^{m-1}\}$, isto é, θ é um elemento primitivo de $K/\mathbb{Q}$, escrevemos

$$d(\theta) := d(1, \theta, \ldots, \theta^{m-1});$$

então

$$d(\theta) = \det \begin{pmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \cdots & \theta_1^{m-1} \\ 1 & \theta_2 & \theta_2^2 & \cdots & \theta_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \theta_m & \theta_m^2 & \cdots & \theta_m^{m-1} \end{pmatrix}^2 ,$$

onde $\theta_i = \sigma_i(\theta)$. Agora, pelas propriedades das *matrizes de Vandermonde*, obtemos

$$d(\theta) = \prod_{i<j} (\theta_i - \theta_j)^2. \tag{1.6}$$

Para uma $\mathbb{Z}$-base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ de $\mathcal{O}_K$ definimos o discriminante do corpo de números K como sendo

$$d_K := d(\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

O valor do determinante acima não depende da escolha da base integral garantindo, assim, a boa definição.

No caso em que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, com $\alpha \in \mathcal{O}_K$, a Igualdade (1.6) nos fornece

$$d(\alpha) = \mathrm{Disc}(P_{\alpha,\mathbb{Z}}(X)), \tag{1.7}$$

onde *Disc* denota o discriminate de polinômios. Além disso, chegamos à relação

$$d_K \mid \mathrm{Disc}(P_{\alpha,\mathbb{Z}}(X)), \tag{1.8}$$

pela proposição:

Proposição 1.4 ([22], Página 15, Proposição 2.12)**.** *Sejam* $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathcal{O}_K$ *vistos como grupos aditivos então o índice* $(\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha])$ *é finito e satisfaz*

$$d(\alpha) = (\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha])^2 \cdot d_K.$$

Anotamos abaixo alguns resultados relativos ao discriminante de corpos de números.

Proposição 1.5 ([21], Página 159, Proposição 4.25)**.** *Se L é o compósito dos corpos de números K_1 e K_2 então d_L e $d_{K_1} \cdot d_{K_2}$ possuem os mesmos divisores primos.*

Escrevemos $\overline{K}$ para denotar o fecho normal do corpo de números K.

Corolário 1.6 ([21], Página 159, Corolário 2)**.** *Os divisores primos de d_K e $d_{\overline{K}}$ coincidem.*

Corpos com discriminantes coprimos possuem certa independência algébrica como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.7 ([21], Página 159, Teorema 4.26)**.** *Sejam K e L corpos de números tais que $(d_K, d_L) = 1$, então:*

(a) $[K \cdot L : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}] \cdot [L : \mathbb{Q}]$;

(b) $L \cap K = \mathbb{Q}$.

Na demonstração do lema abaixo, precisaremos da seguinte informação cuja prova pode ser encontrada em ([11], página 406), a saber, seja $P(X) = X^n + aX + b$ polinômio em $\mathbb{Z}[X]$ então

$$\mathrm{Disc}(P(X)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(n^n b^{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}a^n\right). \tag{1.9}$$

Lema 1.8. *Sejam n um número natural e K um corpo de números. Existe um inteiro algébrico real γ de grau n, dependendo apenas de d_K, tal que*

$$(d_{\mathbb{Q}(\gamma)}, d_K) = 1.$$

Demonstração. Sejam q um número primo tal que q não é divisor de d_K e $c := \prod\limits_{\substack{p \mid d_K \\ p \nmid n}} p.$

Consideramos agora o polinômio

$$P(X) := X^n + cqX - q.$$

Pelo Critério de Eisenstein, vemos que $P(X)$ é irredutível e, como $P(0) < 0$, $P(X)$ possui pelo menos uma raiz real γ de grau n. Por (1.9), temos $(\mathrm{Disc}(P(X)), d_K) = 1$ mas, por (1.8), vale $d_{\mathbb{Q}(\gamma)} \mid \mathrm{Disc}\,(P(X))$ e, portanto, $\left(d_{\mathbb{Q}(\gamma)}, d_K\right) = 1$. $\square$

Observamos que no nosso lema podemos assumir que $-\gamma$ não é um conjugado algébrico de γ. Isso se deve ao fato dos polinômios com coeficientes inteiros da forma $X^n + aX + b$, com $n \in \mathbb{N}$, $ab \neq 0$, não possuírem zeros reais simétricos à origem.

Estamos prontos agora para enunciar e demonstrar o resultado principal desta seção.

Proposição 1.9. *Sejam d e n números naturais e α um algébrico não nulo . Existe um inteiro algébrico real γ de grau n, dependendo apenas de d e $d_{\mathbb{Q}(\alpha)}$, satisfazendo:*

(a) $\left[\mathbb{Q}\left(\alpha, \gamma^d\right) : \mathbb{Q}\right] = n \cdot \partial(\alpha)$;

(b) $\alpha + \gamma^d$ *e* $\alpha \cdot \gamma^d$ *são elementos primitivos da extensão* $\mathbb{Q}(\alpha, \gamma)/\mathbb{Q}$.

Demonstração. Seja ζ uma $2d$-ésima raiz primitiva da unidade. Escolhendo $K := \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$ no Lema 1.8, existe um inteiro algébrico real γ de grau n, dependendo apenas de d_K, tal que

$$\left(d_{\mathbb{Q}(\gamma)}, d_K\right) = 1. \tag{1.10}$$

Nestas condições, γ^d é um elemento primitivo da extensão $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$. De fato, consideramos

$$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(\gamma^d)}(\mathbb{Q}(\gamma), \mathbb{C}),$$

então $\gamma^d = \tau\left(\gamma^d\right)$, logo $\tau(\gamma)^d = \gamma^d$ e, portanto,

$$\left(\frac{\tau(\gamma)}{\gamma}\right)^d = 1. \tag{1.11}$$

Pelo Corolário 1.6, temos ainda

$$\left(d_{\overline{\mathbb{Q}(\gamma)}}, d_K\right) = 1,$$

assim, pelo Item (b) da Proposição 1.7, segue-se que

$$\overline{\mathbb{Q}(\gamma)} \cap K = \mathbb{Q}. \tag{1.12}$$

Em particular, $\overline{\mathbb{Q}}(\gamma)$ não contém nenhuma raiz complexa $2d$-ésima da unidade conseguinte, juntamente com a Relação (1.11) e a observação feita após o Lema 1.8, concluímos que

$$\tau(\gamma) = \gamma,$$

o que implica: $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\gamma^d)$. Pela Proposição 1.5 e (1.10), temos $\left(d_{\mathbb{Q}(\gamma)}, d_{\mathbb{Q}(\alpha)}\right) = 1$ assim, pelo Item (a) da Proposição 1.7, ganhamos a primeira parte do nosso resultado. Concentramo-nos agora na segunda parte.

Suponhamos, por contradição, que $\alpha\cdot\gamma^d$ não é elemento primitivo da extensão $\mathbb{Q}(\alpha,\gamma)/\mathbb{Q}$, isto é, $\mathbb{Q}(\alpha\cdot\gamma^d)\subsetneq\mathbb{Q}(\alpha,\gamma)$. Então existem σ e τ elementos distintos de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha,\gamma),\mathbb{C})$ tais que $\sigma=\tau$ sobre o corpo $\mathbb{Q}(\alpha\cdot\gamma^d)$, assim, denotando por $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq\partial(\alpha)}$ e $\{\gamma_j\}_{1\leq j\leq n}$ os conjugados algébricos de α e γ respectivamente, existem $1\leq k,\ l\leq\partial(\alpha)$ e $1\leq r,\ s\leq n$, com $(k,r)\neq(l,s)$, tais que

$$\alpha_k\cdot\gamma_r^d=\alpha_l\cdot\gamma_s^d \tag{1.13}$$

e, portanto,

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_l}=\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_r}\right)^d. \tag{1.14}$$

Pela Proposição 1.5, o Corolário que a segue e (1.10), temos ainda

$$(d_{\overline{\mathbb{Q}(\alpha)}},d_{\overline{\mathbb{Q}(\gamma)}})=1$$

logo, pelo Item (b) da Proposição 1.7, chegamos à $\overline{\mathbb{Q}(\alpha)}\cap\overline{\mathbb{Q}(\gamma)}=\mathbb{Q}$ que, por sua vez, juntamente com (1.14), implicam: $\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_r}\right)^d\in\mathbb{Q}$. Agora, como γ_r e γ_s são conjugados, obtemos

$$N_{\overline{\mathbb{Q}(\gamma)}}\left(\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_r}\right)^d\right)=1, \tag{1.15}$$

donde segue-se que $\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_r}\right)^{2d}=1$ mas, como já vimos, $\overline{\mathbb{Q}(\gamma)}$ não contém nenhuma raiz complexa $2d$-ésima da unidade, logo $\frac{\gamma_s}{\gamma_r}\in\{-1,1\}$. Agora, pela observação feita após o Lema 1.9, chegamos a igualdade $\gamma_r=\gamma_s$ que, através de (1.13), nos dá $\alpha_k=\alpha_l$. Uma contradição! Usando o operador traço no lugar do operador norma em (1.15), a demonstração que $\alpha+\gamma^d$ é um elemento primitivo de $\mathbb{Q}(\alpha,\gamma)/\mathbb{Q}$ procede-se de maneira análoga. □

Da proposição, obtemos:

Corolário 1.10. *Sejam d e n números naturais e α um algébrico. Existe um inteiro algébrico real γ de grau n, dependendo apenas de d e $d_{\mathbb{Q}(\alpha)}$, tal que*

$$\partial\big(\alpha+\gamma^d\big)=n\cdot\partial(\alpha)\quad e\quad\partial\big(\alpha\cdot\gamma^d\big)=n\cdot\partial(\alpha).$$

Finalizamos este capítulo registrando um resultado devido a Alniaçik sobre elementos primitivos em corpos de números que utilizaremos no Capítulo 3.

Proposição 1.11 ([1], Página 41, Lema 5)**.** *Sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ números algébricos. Para $A(X) := \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_k X^k$ polinômio, temos que $A(r)$ é um elemento primitivo da extensão*

$$\mathbb{Q}(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)/\mathbb{Q},$$

para todo racional r, com a possível exceção de um número finito de pontos.

1.3 Sobre a altura de algébricos

Escrevemos aqui alguns resultados relativos a altura de algébricos. Nosso primeiro lema consiste em uma cota superior para a cardinalidade do conjunto $\mathcal{A}_n(h)$ definido em (1.1).

Lema 1.12. *Sejam n e h inteiros positivos. A quantidade de algébricos de grau e altura no máximo n e h respectivamente é menor do que ou igual a $n(2h+1)^{n+1}$. Isto é,*

$$|\mathcal{A}_n(h)| \leq n(2h+1)^{n+1}.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{P}_n(h)$ o subconjunto dos polinômios com coeficientes inteiros definido em (1). Então

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_n(h)| &= |\{P(X) \in \mathbb{Z}[X];\ P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 \text{ com } |a_k| \leq h,\ k = 0, \ldots, n\}| \\ &\leq (2h+1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Como cada um dos polinômios em $\mathcal{P}_n(h)$ tem no máximo n zeros e todo elemento α em $\mathcal{A}_n(h)$ é raiz de algum polinômio não nulo em $\mathcal{P}_n(h)$ (de fato, basta considerarmos $P_{\alpha,\mathbb{Z}}(X)$), temos que o total de números algébricos em $\mathcal{A}_n(h)$ é limitado superiormente por $n(2h+1)^{n+1}$. □

O próximo resultado explora a relação entre o módulo de um número algébrico com o seu grau e altura.

Lema 1.13. *Seja γ um algébrico não nulo de grau n, então*

$$|\gamma| \geq \frac{1}{n \cdot H(\gamma)}.$$

Demonstração. Se $|\gamma| > 1$ a desigualdade vale trivialmente assim podemos assumir, sem perda de generalidade, que $|\gamma| \leq 1$. Escrevemos

$$P_{\gamma,\mathbb{Z}}(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,$$

então, como o polinômio minimal é por definição irreditível e $P_{\gamma,\mathbb{Z}}(\gamma) = 0$, temos

$$\begin{aligned} 1 \leq |a_0| &= |a_1\gamma + \cdots + a_n\gamma^n| \\ &\leq (|\gamma| + \cdots + |\gamma|^n)\, H(\gamma) \\ &\leq (n \cdot |\gamma|)H(\gamma). \end{aligned}$$

Daí

$$|\gamma| \geq \frac{1}{n \cdot H(\gamma)}.$$

□

Quanto a distância entre algébricos, temos o conhecido resultado:

Teorema 1.14 (Güting). *Sejam α e β números algébricos de grau, no máximo n e*

$$l := [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\alpha)] \quad e \quad m := [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\beta)].$$

Se $\alpha \neq \beta$ então

$$|\alpha - \beta| \gg_n H(\alpha)^{-l} H(\beta)^{-m}.$$

Demonstração. Vide ([4], página 92). □

O próximo resultado devido a İçen [12], fornece uma desigualdade à altura de números algébricos.

Proposição 1.15. *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elementos de um corpo de números K de grau d, η um algébrico e $F(Y, X_1, \ldots, X_n)$ um polinômio com coeficientes inteiros tal que o grau com relação a variável Y é, no mínimo, 1. Assumindo que $F(\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, temos que o grau de η é menor do que ou igual a gd e*

$$H(\eta) \leq 3^{2gd+(l_1+\cdots+l_n)d} H^d H(\alpha_1)^{l_1 d} \ldots H(\alpha_n)^{l_n d},$$

onde H é o máximo dos valores absolutos dos coeficientes de F, l_k é o grau de F na variável X_k, para $k = 1, \ldots, n$, e g é o grau de F com respeito a Y.

Como consequência, obtemos:

Corolário 1.16. *Sejam α e β algébricos de grau no máximo d e $P(X,Y)$ um polinômio em duas variáveis com coeficientes inteiros, então*

$$H(P(\alpha,\beta)) \ll H(\alpha)^{l_1 d^2} \cdot H(\beta)^{l_2 d^2},$$

onde a constante implícita depende apenas de d e do polinômio P e l_1 e l_2 são os graus de P nas variáveis X e Y, respectivamente.

Demonstração. Na Proposição 1.15, tome $n = 2$, $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha, \beta)$, $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, $\eta = P(\alpha, \beta)$ e $F(Y, X_1, X_2) = Y - P(X_1, X_2)$.

$\square$

Capítulo 2

Representação por U-números

Este capítulo é dividido em duas seções, a primeira é dedicada a demonstração do principal resultado desta tese, o Teorema A, e a segunda para algumas de suas aplicações. Boa parte do desenvolvimento da nossa demonstração será novamente utilizado no Capítulo 3, quando trataremos alguns casos não contemplados neste capítulo.

Todas as nossas construções serão feitas no ambiente da reta real assim usaremos a Classificação de Mahler bem como a de Koksma restritas a este espaço. Neste caso, como observado no Capítulo 1 (ver Proposição 1.1), podemos considerar, no contexto da classificação de Koksma, apenas algébricos reais.

2.1 Resultado principal

Iniciamos enunciando e provando um lema essencial à nossa demonstração. Anotamos aqui que λ denota a medida de Lebesgue na reta.

Lema 2.1. *Sejam γ um algébrico não nulo, $c > 3$ e δ constantes positivas. Para todo número primo q suficientemente grande, cada subconjunto $\mathcal{I}$ da reta escrito como união de, no máximo, $cq^{1/3}$ intervalos e satisfazendo*

$$\lambda(\mathcal{I}) > \delta \tag{2.1}$$

contém $\gg_{c,\delta,\gamma} q$ intervalos disjuntos da forma

$$\left[\frac{p}{q}\gamma - q^{-1}, \frac{p}{q}\gamma + q^{-1}\right], \tag{2.2}$$

com $(p, q) = 1$. Em particular, se $q > (10(c+1)|\gamma|/\delta)^{3/2}$ então a constante implícita pode tomar o valor $\delta/(10|\gamma|)$.

Demonstração. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\gamma > 1$. De fato, em caso contrário, escolhemos um inteiro n cumprindo $n \cdot \gamma > 1$ e q suficientemente grande tal que q não divide n. Sejam

$$S_q := \left\{ \frac{p}{q}\gamma;\ p \in \mathbb{Z},\ (p,q) = 1 \right\}$$

e S_q^* o conjunto dos elementos de S_q tais que os intervalos da forma (2.2) estão inteiramente contidos em $\mathcal{I}$.

Como a distância entre dois algébricos consecutivos da forma $\frac{p}{q}\gamma$ e $\frac{p+1}{q}\gamma$ é igual a $\frac{\gamma}{q}$, todo intervalo contido em $\mathcal{I}$ com comprimento maior que ou igual a $\frac{5\gamma}{q}$ contém, no mínimo, três elementos de S_q e, portanto, existe $\frac{p}{q}\gamma \in S_q$ satisfazendo

$$\left[\frac{p}{q}\gamma - \frac{\gamma}{q}, \frac{p}{q}\gamma + \frac{\gamma}{q} \right] \subseteq \mathcal{I},$$

mas $\gamma > 1$ logo

$$\left[\frac{p}{q}\gamma - q^{-1}, \frac{p}{q}\gamma + q^{-1} \right] \subseteq \mathcal{I}.$$

Além disso, por hipótese, $\mathcal{I}$ é a união de, no máximo, $cq^{\frac{1}{3}}$ intervalos, assim

$$\begin{aligned}
\left|S_q^*\right| &\geq \left\lfloor \frac{\lambda(\mathcal{I})}{\frac{5\gamma}{q}} \right\rfloor - cq^{1/3} \\
&\geq \frac{q}{5\gamma}\lambda(\mathcal{I}) - cq^{1/3} - 1 \\
&\geq q\left(\frac{\lambda(\mathcal{I})}{5\gamma} - cq^{-2/3} - q^{-1} \right) \\
&\overset{(2.1)}{\geq} q\left(\frac{\delta}{5\gamma} - cq^{-2/3} - q^{-1} \right) \\
&\gg_{c,\delta,\gamma} q,
\end{aligned}$$

para todo q suficientemente grande. Agora, se $q > (10(c+1)|\gamma|/\delta)^{3/2}$ então

$$\frac{\delta}{5\gamma} - cq^{-2/3} - q^{-1} > \frac{\delta}{5\gamma} - (c+1)q^{-2/3} > \frac{\delta}{10\gamma}.$$

Completando a demonstração. □

Passamos agora a demonstração do nosso resultado principal.

Teorema A. *Sejam n um natural, θ um S-número ou um T-número e $P(X,Y)$ um polinômio em duas variáveis com coeficientes inteiros tal que existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $P(x_0, y_0) = \theta$, com*

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x_0, y_0) \neq 0 \qquad e \qquad \frac{\partial P}{\partial Y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de pares $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ *tais que* $P(\sigma, \tau) = \theta$.

Demonstração. No decorrer da prova, todas as constantes, implícitas e explícitas, dependem apenas de n, θ e do polinômio P. Como $P(x_0, y_0) = \theta$ e $\frac{\partial P}{\partial X}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y}(x_0, y_0) \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, existem intervalos I e J compactos, e uma função $g : I \longrightarrow J$ com as seguintes propriedades:

- $(x_0, y_0) \in I \times J$;
- g é um difeomorfismo de classe C^∞;
- $P(x, g(x)) = \theta$, para todo $x \in I$.

Escolhemos uma sequência $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números algébricos reais de grau n.* Para um inteiro positivo l e uma constante positiva c, ambos dependendo apenas de θ e do polinômio P, construiremos uma sequência de intervalos $I_0, I_1, I_2, ...$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$I_0 = I,$$

e, para cada $k = 1, 2, ...,$

(i) Existem um primo q_k e um inteiro p_k, com $(p_k, q_k) = 1$, tais que

$$I_k = \left[\frac{p_k}{q_k}\gamma_k - q_k^{-lk},\ \frac{p_k}{q_k}\gamma_k + q_k^{-lk}\right].$$

Além disso, podemos tomar a sequência $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de forma estritamente crescente, com $H(\gamma_k) < q_k$;

(ii)
$$\begin{cases} I_k \subset g(I_{k-1}), & \text{se } k \text{ é ímpar;} \\ \\ I_k \subset g^{-1}(I_{k-1}), & \text{se } k \text{ é par,} \end{cases};$$

(iii) Para todo $x \in I_k$

$$\begin{cases} \min\{\,|x-\alpha|, |g(x)-\alpha|\,\} \geq H(\alpha)^{-cln}, & \text{se } k \text{ é par;} \\ \\ \min\{\,|x-\alpha|, |g^{-1}(x)-\alpha|\,\} \geq H(\alpha)^{-cln}, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{cases},$$

para todos os algébricos α de grau no máximo $n-1$, com $2 < H(\alpha) \leq (\lambda(I_k)/2)^{-1/4ln}$.

*Em particular, podemos escolher $\gamma_k = \sqrt[n]{2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por um momento, tomamos como estabelecida a sequência de intervalos com as propriedades desejadas. Observamos que, pela Propriedade (ii), $I_{2k+2} \subseteq I_{2k}$ e $I_{2k+1} \subseteq I_{2k-1}$ e, pela Propriedade (i), $\lambda(I_k) = 2/q_k^{lk} \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow \infty$, portanto existem σ e τ tais que

$$\{\sigma\} = \bigcap_{k\geq 1} I_{2k} \qquad \text{e} \qquad \{\tau\} = \bigcap_{k\geq 1} I_{2k-1}. \tag{2.3}$$

Como $\sigma \in I_{2k}$ e $\tau \in I_{2k-1}$, para todo $k \geq 1$, temos, via Propriedade (iii), que

$$\min\{\, |\sigma - \alpha|, |\tau - \alpha|\, \} \geq H(\alpha)^{-cln},$$

para todos os algébricos α de grau no máximo $n-1$ e, consequentemente, $\omega_j^*(\sigma) \leq cln$ e $\omega_j^*(\tau) \leq cln$, para todo $j < n$.

Agora, pelo formato dos nossos intervalos, obtemos

$$\left|\sigma - \frac{p_{2k}}{q_{2k}}\gamma_{2k}\right| \leq q_{2k}^{-l(2k)} \qquad \text{e} \qquad \left|\tau - \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}\gamma_{2k-1}\right| \leq q_{2k-1}^{-l(2k-1)},$$

para todo $k \geq 1$. Como $(p_{2k}/q_{2k})\gamma_{2k} \in I$ e $(p_{2k-1}/q_{2k-1})\gamma_{2k-1} \in J$, temos

$$\begin{aligned} |p_k| &\ll q_k|\gamma_k|^{-1} \\ &\overset{\text{Lema 1.13}}{\ll} q_k H(\gamma_k), \end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$, ainda, como o polinômio $p_k^n P_{\gamma_k,\mathbb{Z}}(q_k X/p_k)$ é um múltiplo inteiro do polinômio minimal de $(p_k/q_k)\gamma_k$ e $H(\gamma_k) \leq q_k$, obtemos

$$q_k \ll H\left(\frac{p_k}{q_k}\gamma_k\right) \ll q_k^{3n}, \tag{2.4}$$

logo

$$\left|\sigma - \frac{p_{2k}}{q_{2k}}\gamma_{2k}\right| \ll H\left(\frac{p_{2k}}{q_{2k}}\gamma_{2k}\right)^{-\frac{2kl}{3n}} \quad \text{e} \quad \left|\tau - \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}\gamma_{2k-1}\right| \ll H\left(\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}\gamma_{2k-1}\right)^{-\frac{(2k-1)l}{3n}},$$

quando $k \longrightarrow \infty$, portanto $\omega_n^*(\sigma) = \infty$ e $\omega_n^*(\tau) = \infty$, ou seja, σ e τ são U_n^*-números (isto é, U_n-números pela Proposição 1.3). Pela Propriedade (ii), temos $g(\sigma) \in g(I_{2k}) \subseteq I_{2k-1}$, para todo $k \geq 1$. Assim $g(\sigma) = \tau$ e, portanto,

$$P(\sigma, \tau) = P(\sigma, g(\sigma)) = \theta.$$

Veremos logo mais que na construção do intervalo I_k temos $\gg q_k$ escolhas para p_k, e cada uma delas nos fornece um intervalo disjunto dos demais. Com (σ, τ) definido por

(2.3), cada escolha de intervalo resulta em um novo par de solução obtendo assim, uma coleção de pares (σ, τ) de cardinalidade $2^{\mathbb{N}}$ e, desta forma, não enumerável, satisfazendo as condições do teorema.

Passamos agora para a construção dos intervalos. Partimos pela construção do intervalo I_1. Seja J' o conjunto de todos os $x \in J$ para os quais existe $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\partial(\alpha) < n$ e $H(\alpha) > 2$, tal que

$$\min\{|x-\alpha|, \left|g^{-1}(x)-\alpha\right|\} \leq H(\alpha)^{-cln}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\lambda\left(J^{'}\right) \leq & \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}\\ \partial(\alpha)<n\\ H(\alpha)>2}} \left\{\lambda\left(\{x \in J;\, |x-\alpha| \leq H(\alpha)^{-cln}\}\right)\right. \\
& \left. +\lambda\left(\{x \in J;\, \left|g^{-1}(x)-\alpha\right| \leq H(\alpha)^{-cln}\}\right)\right\} \\
\leq & \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}\\ \partial(\alpha)<n\\ H(\alpha)>2}} \left\{\lambda\left(\left[\alpha - H(\alpha)^{-cln},\, \alpha + H(\alpha)^{-cln}\right]\right)\right. \\
& \left. +\lambda\left(g\left(\left[\alpha - H(\alpha)^{-cln},\, \alpha + H(\alpha)^{-cln}\right] \cap I\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Como g é um difeomorfismo C^{∞}, temos, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\lambda\left(g\left(\left[\alpha - H(\alpha)^{-cln},\, \alpha + H(\alpha)^{-cln}\right] \cap I\right)\right) \leq c_1\lambda\left(\left[\alpha - H(\alpha)^{-cln},\, \alpha + H(\alpha)^{-cln}\right]\right), \quad (2.5)$$

onde $c_1 = \max_{x\in I} |g'(x)|$. Donde, para $c > 3$, valem

$$\begin{aligned}
\lambda\left(J^{'}\right) & \leq & 2(1+c_2) \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}\\ \partial(\alpha)<n\\ H(\alpha)>2}} \lambda\left(\left[\alpha - H(\alpha)^{-cln},\, \alpha + H(\alpha)^{-cln}\right]\right) \\
& \leq & 2(1+c_2) \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}\\ \partial(\alpha)<n\\ H(\alpha)>2}} H(\alpha)^{-cln} \\
& \leq & 2(1+c_2) \sum_{h>2} h^{-cln} \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}\\ \partial(\alpha)<n\\ H(\alpha)=h}} 1 \\
& \overset{Lema\ 1.12}{\leq} & c_3 \sum_{h>2} h^{-cln+n},
\end{aligned}$$

com $c_3 = 2(1+c_2)3^n n$. Para a última soma, temos ainda

$$\begin{aligned}
\sum_{h>2} h^{-cln+n} & \leq \int_2^{\infty} t^{-cln+n}dt \\
& \leq 2^{-cln+n+1},
\end{aligned}$$

onde usamos que $cln > 3n \geq n+2$. Assim, tomando c suficientemente grande (de fato, $c > \log(2c_3/\lambda(J))$ nos basta), obtemos:

$$\lambda\left(J^{'}\right) < \frac{\lambda\left(J\right)}{2}. \tag{2.6}$$

Para q_1 primo (a ser escolhido posteriormente), consideramos o conjunto $J^{''}$ de todos os $x \in J$ para os quais existe $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\partial(\alpha) < n$ e $2 < H(\alpha) \leq q_1^{1/3n}$, tal que

$$\min\{|x-\alpha|, \left|g^{-1}(x)-\alpha\right|\} \leq H(\alpha)^{-cln}.$$

Como $\left|\left\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}};\ \partial(\alpha) < n\ \ e\ \ 2 < H(\alpha) \leq q_1^{1/3n}\right\}\right| \overset{Lema\ 1.12}{\ll} q_1^{1/3}$, temos que $J^{''}$ é escrito como a união de, no máximo, $\ll q_1^{1/3}$ intervalos; em particular, $J \setminus J^{''}$ também admite tal escrita. Além disso, vale a inclusão $J^{''} \subset J^{'}$ donde, juntamente com (2.6), implicam: $\lambda\left(J \setminus J^{''}\right) \geq \lambda\left(J\right)/2$. Podemos então fazer uso do Lema 2.1 para concluir que, com q_1 suficientemente grande, existem $\gg q_1$ inteiros p_1, $(p_1, q_1) = 1$, tais que os intervalos da forma

$$\left[\frac{p_1}{q_1}\gamma_1 - q_1^{-l}, \frac{p_1}{q_1}\gamma_1 + q_1^{-l}\right]$$

estão todos contidos em $J \setminus J^{''}$. Agora basta escolher um desses intervalos para ser I_1.

Suponhamos que, para um k ímpar, os intervalos $I_0, I_1, ..., I_k$ estão definidos satisfazendo as três condições requeridas, passamos então para a construção de I_{k+1}. O caso em que k é par procede-se de maneira análoga.

Consideramos $I_k^{'}$ o conjunto de todos os $x \in I_k$ para os quais existe $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\partial(\alpha) < n$ e $H(\alpha) > 2$, tal que

$$\min\{|x-\alpha|, \left|g^{-1}(x)-\alpha\right|\} \leq H(\alpha)^{-cln}.$$

Pela hipótese indutiva, a Propriedade (iii) é satisfeita para o intervalo I_k, assim

$$\begin{aligned}
\lambda\left(I_k^{'}\right) \leq & \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}} \\ \partial(\alpha)<n \\ H(\alpha)>q_k^{k/4n}}} \left\{\lambda\left(\{x \in I_k;\ |x-\alpha| \leq H(\alpha)^{-cln}\}\right)\right. \\
& \left. + \lambda\left(\{x \in I_k;\ \left|g^{-1}(x)-\alpha\right| \leq H(\alpha)^{-cln}\}\right)\right\} \\
\leq & \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}} \\ \partial(\alpha)<n \\ H(\alpha)>q_k^{k/4n}}} \left\{\lambda\left(\left[\alpha - H(\alpha)^{-cln},\ \alpha + H(\alpha)^{-cln}\right]\right)\right. \\
& \left. + \lambda\left(g\left(\left[\alpha - H(\alpha)^{-cln},\ \alpha + H(\alpha)^{-cln}\right] \cap I\right)\right)\right\},
\end{aligned}$$

logo, por (2.5), valem

$$\begin{aligned}
\lambda\left(I_k^{'}\right) &\leq 2(1+c_2) \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}} \\ \partial(\alpha)<n \\ H(\alpha)>q_k^{k/4n}}} \lambda\left(\left[\alpha - H(\alpha)^{-cln},\, \alpha + H(\alpha)^{-cln}\right]\right) \\
&\leq 2(1+c_2) \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}} \\ \partial(\alpha)<n \\ H(\alpha)>q_k^{k/4n}}} H(\alpha)^{-cln} \\
&\leq 2(1+c_2) \sum_{h>q_k^{k/4n}} h^{-cln} \sum_{\substack{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}} \\ \partial(\alpha)<n \\ H(\alpha)=h}} 1 \\
&\overset{Lema\ 1.12}{\leq} c_3 \sum_{h>q_k^{k/4n}} h^{-cln+n}.
\end{aligned}$$

Para a última soma, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{h>q_k^{k/4n}} h^{-cln+n} &\leq \int_{q_k^{k/4n}-1}^{\infty} t^{-cln+n} dt \\
&\leq q_k^{-clk/16}.
\end{aligned}$$

Assim, tomando c suficientemente grande ($c > 8(1+\log c_3)$), obtemos

$$\lambda\left(I_k^{'}\right) < \frac{\lambda\left(I_k\right)}{2}. \tag{2.7}$$

Para q_{k+1} primo (escolhido a posteriori), consideramos o conjunto $I_k^{''}$ dado por todos os $x \in I_k$ para os quais existe $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\partial(\alpha) < n$, e $2 < H(\alpha) \leq q_{k+1}^{1/3n}$, tal que

$$\min\{|x-\alpha|, \left|g^{-1}(x)-\alpha\right|\} \leq H(\alpha)^{-cln}.$$

Como $\left|\left\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}};\, \partial(\alpha) < n \;\; e \;\; 2 < H(\alpha) \leq q_{k+1}^{1/3n}\right\}\right| \ll q_{k+1}^{1/3}$, temos que $I_k^{''}$ é escrito como a união de, no máximo, $\ll q_{k+1}^{1/3}$ intervalos; em particular $I_k \setminus I_k^{''}$ também admite tal escrita. Além disso, vale a inclusão $I_k^{''} \subset I_k^{'}$ donde, juntamente com (2.7), implicam: $\lambda\left(I_k \setminus I_k^{''}\right) > \lambda\left(I_k\right)/2$. Agora, sendo g um difeomorfismo, da última desigualdade, obtemos $\lambda\left(g^{-1}\left(I_k \setminus I_k^{''}\right)\right) \gg \lambda\left(g^{-1}\left(I_k\right)\right)$, então podemos fazer uso do Lema 2.1 para concluir que, com q_{k+1} suficientemente grande, existem $\gg q_{k+1}$ inteiros p_{k+1}, $(p_{k+1}, q_{k+1}) = 1$, tais que os intervalos da forma

$$\left[\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\gamma_{k+1} - q_{k+1}^{-l(k+1)}, \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\gamma_{k+1} + q_{k+1}^{-l(k+1)}\right]$$

estão todos contidos em $g^{-1}\left(I_k \setminus I_k^{''}\right)$. Escolhemos um desses intervalos e chamamo-lo de I_{k+1}.

Pela definição de I_k'', vemos que a Propriedade (iii) é satisfeita para o intervalo I_{k+1} sob a restrição: α algébrico, $\partial(\alpha) < n$ e $2 < H(\alpha) \le q_{k+1}^{1/3n}$. Resta-nos então checar os casos onde

$$q_{k+1}^{1/3n} \le H(\alpha) \le q_{k+1}^{(k+1)/4n}. \tag{2.8}$$

Para lidarmos com os α remanecentes, empregaremos de início o Teorema de Güting (ver Teorema 1.14); para facilitar a escrita, tomamos $\tilde{\gamma}_{k+1} := (p_{k+1}/q_{k+1})\gamma_{k+1}$. Sejam $x \in I_{k+1}$ e α um algébrico de grau menor do que n tal que sua altura respeita a Desigualdade (2.8), então

$$\begin{aligned}
|x-\alpha| &\ge |\alpha - \tilde{\gamma}_{k+1}| - |x - \tilde{\gamma}_{k+1}| \\
&\ge |\alpha - \tilde{\gamma}_{k+1}| - q_{k+1}^{-l(k+1)} \\
&\overset{\text{Teo. 1.14}}{\gg} (H(\tilde{\gamma}_{k+1})H(\alpha))^{-n} - q_{k+1}^{-l(k+1)} \\
&\overset{(2.4)}{\gg} \left(q_{k+1}^{3n} H(\alpha)\right)^{-n} - q_{k+1}^{-l(k+1)} \\
&\overset{(2.8)}{\gg} H(\alpha)^{-10n^3} - H(\alpha)^{-4ln} \\
&\ge H(\alpha)^{-cln},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

para l suficientemente grande ($l > 5n^2$).

Trataremos agora do segundo termo da Propriedade (iii) envolvendo a nossa função implícita. Seja m o grau do polinômio P, escrevemos

$$P(X,Y) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j \le m}} a_{i,j} X^i Y^j,$$

onde $a_{i,j}$ são todos inteiros, logo

$$\begin{aligned}
\theta = P(x, g(x)) &= P\left(x - \tilde{\gamma}_{k+1} + \tilde{\gamma}_{k+1},\, g(x) - \alpha + \alpha\right) \\
&= \sum_{\substack{i,j \\ i+j \le m}} a_{i,j} \left\{(x - \tilde{\gamma}_{k+1}) + \tilde{\gamma}_{k+1}\right\}^i \left\{(g(x)-\alpha) + \alpha\right\}^j \\
&= \sum_{\substack{i,j \\ i+j \le m}} a_{i,j} \left\{\sum_{r \le i} \binom{i}{r} (x - \tilde{\gamma}_{k+1})^r \tilde{\gamma}_{k+1}^{i-r}\right\} \left\{\sum_{s \le j} \binom{j}{s} (g(x)-\alpha)^s \alpha^{j-s}\right\} \\
&= \sum_{\substack{i,j \\ i+j \le m}} a_{i,j} \left\{\sum_{\substack{0 \le r \le i \\ 0 \le s \le j}} \binom{i}{r}\binom{j}{s} (x - \tilde{\gamma}_{k+1})^r (g(x)-\alpha)^s \tilde{\gamma}_{k+1}^{i-r} \alpha^{j-s}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{r\le m\\ s\le m}} \left\{ \sum_{\substack{i\ge r\\ j\ge s\\ i+j\le m}} a_{i,j} \binom{i}{r} \binom{j}{s} \tilde{\gamma}_{k+1}^{i-r} \alpha^{j-s} \right\} (x-\tilde{\gamma}_{k+1})^r (g(x)-\alpha)^s .$$

A última igualdade é, nada mais, que a expansão de Taylor no ponto $(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha)$.

Chamando de $b_{r,s} = b_{r,s}(\alpha)$ os últimos termos entre chaves, obtemos

$$\theta = \sum_{r\le m} b_{r,0} (x-\tilde{\gamma}_{k+1})^r + \sum_{\substack{r\le m\\ 0<s\le m}} b_{r,s} (x-\tilde{\gamma}_{k+1})^r (g(x)-\alpha)^s .$$

Quando $|g(x)-\alpha| > 1$, a Propriedade (iii) envolvendo a função implícita é imediata, deste modo, podemos assumir que $|g(x)-\alpha| \le 1$ e, consequentemente, $|\alpha| \ll 1$ (mais precisamente, $|\alpha| \le 1 + \sup_{x\in I} |g(x)|$). Com isso, os coeficientes $b_{r,s}$ são todos uniformemente limitados com relação aos algébricos α e, portanto,

$$\left| \theta - \sum_{r\le m} b_{r,0} (x-\tilde{\gamma}_{k+1})^r \right| \ll |g(x)-\alpha|$$

mas

$$\begin{aligned} \left| \theta - \sum_{r\le m} b_{r,0} (x-\tilde{\gamma}_{k+1})^r \right| &\ge |\theta - b_{0,0}| - \left| \sum_{0<r\le m} b_{r,0} (x-\tilde{\gamma}_{k+1})^r \right| \\ &\ge |\theta - b_{0,0}| - O\left(q_{k+1}^{-l(k+1)} \right), \end{aligned}$$

assim

$$|\theta - b_{0,0}| \ll |g(x)-\alpha| + q_{k+1}^{-l(k+1)}.$$

Através das expressões para $b_{r,s}$, vemos facilmente que $b_{0,0} = P(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha)$ e, consequentemente,

$$|\theta - P(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha)| \ll |g(x)-\alpha| + q_{k+1}^{-l(k+1)}. \tag{2.10}$$

Uma vez que α e $\tilde{\gamma}_{k+1}$ são algébricos de graus menor que ou igual a $n-1$ e n respectivamente, temos $\partial P(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha) \le n(n-1)$. Como θ é um S-número ou um T-número, existe uma constante positiva η tal que

$$|\theta - \beta| \ge H(\beta)^{-\eta}, \tag{2.11}$$

para todo algébrico β de grau, no máximo, $n(n-1)$. Agora, tomando $\beta = P(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha)$ na última desigualdade, obtemos

$$|\theta - P(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha)| \ge H(P(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha))^{-\eta}, \tag{2.12}$$

assim, por (2.10) e (2.12), chegamos à

$$H\left(P\left(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha\right)\right)^{-\eta} \ll |g(x)-\alpha| + q_{k+1}^{-l(k+1)}.$$

Visto que, por (2.4) e Corolário 1.16, vale $H\left(P\left(\tilde{\gamma}_{k+1},\, \alpha\right)\right) \ll \left(q_{k+1}H(\alpha)\right)^{3mn^3}$, obtemos

$$|g(x)-\alpha| \gg \left(q_{k+1}H(\alpha)\right)^{-3\eta mn^3} - q_{k+1}^{-l(k+1)}$$

donde, por um argumento semelhante à (2.9), para l suficientemente grande ($l > 15\eta mn^2$), temos

$$|g(x)-\alpha| \geq H\left(\alpha\right)^{-cln},$$

para todo α algébrico de grau menor do que n tal que $q_{k+1}^{\frac{1}{3n}} \leq H(\alpha) \leq q_{k+1}^{(k+1)/4n}$. $\square$

Observação 2.2. *Destacamos aqui que o Teorema A é verdadeiro também no caso onde θ é um A-número ou um U-número de grau maior que $n(n-1)$. Isso se deve em razão da sua demonstração usar a hipótese relativa as Classes de Mahler somente para justificar a Desigualdade (2.11) e esta é ainda satisfeita com θ algébrico, $\partial(\theta) > n(n-1)$, via o Teorema de Güting e pela própria definição quando θ é um U-número de grau maior que $n(n-1)$.*

2.2 Aplicações e comentários

Nesta seção, daremos uma versão do Teorema A para pares de soluções de U-números algebricamente independentes. Para isso, além do nosso resultado principal, precisaremos do clássico Teorema de Bézout para curvas planas.

Sejam K um corpo e $P(X,Y)$ um polinômio não nulo em $K[X,Y]$. Denotamos por $V_K(P)$ o conjunto dos pontos em $K \times K$ da curva plana afim determinada por $P(X,Y)$, isto é,

$$V_K(P) := \{(x,y) \in K \times K;\, P(x,y) = 0\}.$$

Teorema 2.3 (Bézout)**.** *Sejam $P(X,Y)$ e $Q(X,Y)$ dois polinômios em $K[X,Y]$ de graus n e m respectivamente. Se P e Q não tem fator comum em $K[X,Y]$, então*

$$|V_K(P) \cap V_K(Q)| \leq n \cdot m.$$

Ou seja, o conjunto de soluções comuns aos polinômios P e Q é finito.

Demonstração. Vide ([10], Capítulo 4, Seção 3). □

Por meio de um aprimoramento feito em [14] de um argumento de Burger [7], obtemos:

Proposição 2.4. *Sejam n um número natural, θ um S-número ou um T-número e $P(X,Y)$ um polinômio em duas variáveis com coeficientes inteiros tal que existe $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $P(x_0,y_0)=\theta$, com*

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x_0,y_0) \neq 0 \qquad e \qquad \frac{\partial P}{\partial Y}(x_0,y_0) \neq 0.$$

Então existem U_n-números σ e τ algebricamente independentes tais que $P(\sigma,\tau)=\theta$.

Demonstração. Pelo Teorema A, existe uma quantidade não enumerável de pares $(\sigma,\tau) \in U_n \times U_n$ tais que $P(\sigma,\tau)=\theta$. Assumimos, por contradição, que todos esses pares são algebricamente dependentes. Como o conjunto $\mathbb{Z}[X,Y]$ é enumerável, existe um polinômio $Q(X,Y)$ não nulo e com coeficientes inteiros, tal que infinitos pares de soluções (σ,τ) são zeros deste polinômio e, portanto, $Q(X,Y)$ e $P(X,Y)-\theta$ possuem uma infinidade de zeros comuns.

Pelo Teorema de Bézout, existe um polinômio irredutível $R(X,Y)$ em $\overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$ tal que $R(X,Y)$ é um divisor de $P(X,Y)-\theta$ no anel de polinômios $\overline{\mathbb{Q}(\theta)}[X,Y]$. Ou seja, existe $T(X,Y) \in \overline{\mathbb{Q}(\theta)}[X,Y]$ satisfazendo

$$P(X,Y)-\theta = R(X,Y)T(X,Y).$$

Como o coeficiente que acompanha o monômio X^iY^j em T é

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial X^i \partial Y^j}\left(\frac{P(X,Y)-\theta}{R(X,Y)}\right)(0,0),$$

temos que este é um polinômio em $\overline{\mathbb{Q}}[\theta,X,Y]$ cujo grau com relação a variável θ é igual a 1; isto é, $T(X,Y)=A(X,Y)+\theta B(X,Y)$, para alguns A e B em $\overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$ e, portanto,

$$B(X,Y)R(X,Y)=-1,$$

contradizendo o fato de R ser irredutível. □

Capítulo 3

O Conjunto Produto de U_n-números

Na demonstração do Teorema A, a construção indutiva dos intervalos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ apresenta certas restrições quando θ é um algébrico (isto é, um A-número) ou um U-número ambos de graus menores que ou iguais a $n(n-1)$ (ver Observação 2.2). Mais especificamente, todas as etapas da construção do intervalo I_{k+1} à partir de I_k não levam em conta a natureza aritmética de θ até o momento em que se faz necessário encontrarmos estimativas inferiores, similares à Desigualdade (2.12), para a quantidade

$$|\theta - P(\gamma, \alpha)|,$$

onde γ é um algébrico de grau n e α é um algébrico de grau menor do que n, com $H(\alpha)$ tomando valores em um determinado intervalo. No caso em que θ é algébrico, abriríamos a possibilidade de

$$\theta = P(\gamma, \alpha)$$

e, no caso em que θ é um U-número, os algébricos da forma $P(\gamma, \alpha)$ poderiam ser bons aproximantes de θ. Para certos tipos de polinômios, os resultados da Seção 1.2 permitirão escolhas de γ de tal forma a contornar essas possíveis complicações ao ponto de ganharmos os Teoremas B e C.

3.1 Resultados complementares

Relembramos da Introdução que estamos denotando por $\mathfrak{F}$ a família de polinômios da forma $P(X)Q(Y)$ e $P(X)+Q(Y)$, onde P e Q são polinômios com coeficientes inteiros.

Teorema B. *Sejam n um natural, θ um algébrico e $P(X,Y)$ um polinômio em $\mathfrak{F}$ tal que existe $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ satisfazendo $P(x_0,y_0)=\theta$, com*

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x_0,y_0)\neq 0 \qquad e \qquad \frac{\partial P}{\partial Y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de pares $(\sigma,\tau)\in U_n\times U_n$ tais que $P(\sigma,\tau)=\theta$.

Demonstração. Observamos que podemos repetir o argumento da demonstração do Teorema A, com $P(X,Y)\in\mathfrak{F}$, até o momento onde usamos a hipótese sobre a natureza aritmética de θ para obtermos a Estimativa (2.12). Neste ponto, desenvolveremos um novo argumento para obtermos uma desigualdade substitutiva à (2.12).

Sejam $P(X)$ e $Q(Y)$ polinômios com coeficientes inteiros tais que $P(X,Y)$ é a soma ou o produto destes dois. Para $d:=\partial P(X)$, o Corolário 1.10 assegura a existência de um γ algébrico real de grau n, tal que

$$\partial\left(\frac{\gamma^d}{\theta}\right)=n\cdot\partial(\theta) \qquad \text{e} \qquad \partial\left(\theta+\gamma^d\right)=n\cdot\partial(\theta). \tag{3.1}$$

Escrevendo

$$P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_dX^d,$$

com $a_0,\ldots,a_d$ inteiros, consideramos os polinômios definidos por

$$\begin{aligned} P_1(X) &:= \frac{P(\gamma X)}{\theta} \\ &= \sum_{0\le i\le d} a_i\frac{\gamma^i}{\theta}X^i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_2(X) &:= \theta-P(\gamma X) \\ &= (\theta-a_0)-\sum_{1\le i\le d} a_i\gamma^iX^i. \end{aligned}$$

No caso onde $\theta=0$, tomamos $P_1(X):=P(\gamma X)$.

Sejam K_1 e K_2 os corpos gerados sobre $\mathbb{Q}$ pelos coeficientes de $P_1(X)$ e $P_2(X)$ respectivamente. Como $\gamma^d/\theta\in K_1$ e $\theta+\gamma^d\in K_2$ temos, por (3.1), que

$$[K_1:\mathbb{Q}]=n\cdot\partial(\theta) \quad \text{e} \quad [K_2:\mathbb{Q}]=n\cdot\partial(\theta).$$

Assim, pela Proposição 1.11, para todo q_{k+1} suficientemente grande, valem as igualdades

$$\begin{aligned} \partial\left(\frac{P\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\gamma\right)}{\theta}\right) &= \partial\left(P_1\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)\right) \\ &= n\cdot\partial(\theta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \partial\left(P\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\gamma\right)-\theta\right) &= \partial\left(P_2\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)\right) \\ &= n\cdot\partial(\theta) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$P\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\gamma\right)Q(\alpha) \quad \text{e} \quad P\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\gamma\right)+Q(\alpha)$$

são diferentes de θ, para todo α algébrico de grau menor do que n com a possível exceção de um número finito deles.

Escolhendo $\gamma_{k+1}=\gamma$, temos $\theta \neq P\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\gamma_{k+1},\alpha\right)$ em (2.10) e, assim, podemos fazer uso do Teorema de Güting para obtermos

$$\begin{aligned} |\theta - P(\tilde{\gamma}_{k+1},\alpha)| &\overset{Teo.\,1.14}{\gg} H(\theta)^{-n(n-1)}H\left(P\left(\tilde{\gamma}_{k+1},\alpha\right)\right)^{-\partial\theta} \\ &\gg H\left(P\left(\tilde{\gamma}_{k+1},\alpha\right)\right)^{-\partial\theta}. \end{aligned}$$

De posse desta última estimativa, para finalizarmos a demonstração, basta seguirmos os argumentos utilizados na prova do Teorema A após a Desigualdade (2.12). □

Para alcançarmos representações à classe dos U-números de graus relativamente baixos, restringiremos ainda a família $\mathfrak{F}$ ao conjunto $\mathfrak{D}$ dos polinômios da forma $X^dQ(Y)$ e $X^d+Q(Y)$, onde Q é um polinômio com coeficientes inteiros e d um natural qualquer.

Teorema C. *Sejam n um natural, θ um U-número e $P(X,Y)$ um polinômio em $\mathfrak{D}$ tal que existe $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ satisfazendo $P(x_0,y_0)=\theta$, com*

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x_0,y_0)\neq 0 \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial Y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de pares $(\sigma,\tau)\in U_n\times U_n$ tais que $P(\sigma,\tau)=\theta$.

Demonstração. Como destacado na prova do Teorema B, precisamos obter uma desigualdade substitutiva à (2.12), quando $P(X,Y)$ for um polinômio em $\mathfrak{D}$. Suponhamos que θ é um U-número de grau t. Iniciamos com a seguinte afirmação cuja justificativa é uma consequência imediata da definição de um U_t-número.

Afirmação. *Se θ é um U_t-número então para qualquer real positivo s, existe infinitos algébricos δ de grau t tal que*

$$|\theta - \delta| < H(\delta)^{-s}.$$

Sejam X^d e $Q(Y)$ polinômios tais que $P(X,Y)$ é a soma ou o produto destes dois. Tomando $\alpha = 1$ no Corolário 1.10, encontramos um algébrico real γ de grau n tal que

$$\partial\left(\gamma^d\right) = n. \tag{3.2}$$

Novamente, via o Corolário 1.10, existe um algébrico real γ' de grau n satisfazendo

$$\partial\left(\frac{\gamma^d}{\gamma'^d}\right) = n^2 \quad \text{e} \quad \partial\left(r\gamma^d + \gamma'^d\right) = n^2, \tag{3.3}$$

para todo r racional não nulo .

Para $s = l(k+1)$, escolheremos γ_{k+1} da seguinte forma: se existirem infinitos aproximantes δ na Afirmação acima na forma $P\left(r\gamma, \alpha\right)$, onde r é um racional e α um algébrico de grau menor do que n, escolheremos γ_{k+1} como sendo γ'; em caso contrário, tomamos $\gamma_{k+1} = \gamma$. Pelas relações (3.3), podemos escolher δ na Afirmação, com $H(\delta)$ suficientemente grande, tal que

$$\delta \neq P\left(r\gamma_{k+1}, \alpha\right),$$

para todo r racional não nulo e qualquer α algébrico de grau menor do que n.

Pelo Postulado de Bertrand, podemos escolher um primo q_{k+1} satisfazendo

$$q_{k+1} \in (H(\delta), 2H(\delta)). \tag{3.4}$$

Como $\delta \neq P\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\gamma_{k+1}, \alpha\right)$, temos

$$\begin{aligned}
|\theta - P\left(\tilde{\gamma}_{k+1}, \alpha\right)| &\geq |\delta - P\left(\tilde{\gamma}_{k+1}, \alpha\right)| - |\theta - \delta| \\
&\overset{Teo. 1.14}{\gg} H(\delta)^{-n(n-1)} H\left(P\left(\tilde{\gamma}_{k+1}, \alpha\right)\right)^{-t} - H(\delta)^{-l(k+1)} \\
&\overset{(3.4)}{\gg} \left(q_{k+1} H\left(P\left(\tilde{\gamma}_{k+1}, \alpha\right)\right)\right)^{-tn(n-1)} - \left(\frac{q_{k+1}}{2}\right)^{-l(k+1)}.
\end{aligned}$$

De posse desta última estimativa, basta seguirmos os mesmo argumentos utilizados na demonstração do Teorema A após a Desigualdade (2.12). $\square$

3.2 Aplicações e comentários

Como mencionamos na introdução, Pollington [24] demonstrou que todo número real pode ser escrito como soma de dois U_n-números, para todo n natural. Pelos Teoremas A, B e C, obtemos de imediato a versão multiplicativa deste resultado.

Corolário 3.1. *Sejam n um natural qualquer e θ um número real não nulo . Então existe uma quantidade não enumerável de pares $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ tais que*

$$\sigma \cdot \tau = \theta.$$

A próxima proposição cuja prova é similar à Proposição 2.4 nos dá um critério de transcendência através da classe dos U-números.

Proposição 3.2. *Sejam θ um número real não nulo e n um natural qualquer. Então, θ é um número transcendente se, e somente se, existem U_n-números σ e τ algebricamente independentes tais que*

$$\sigma \cdot \tau = \theta.$$

Demonstração. Para a implicação, basta tomarmos $P(X, Y) = XY$ e o Coralário 3.1 no lugar do Teorema A na demonstração da Proposição 2.4. Quanto a volta, suponhamos que exista $(\sigma, \tau) \in U_n \times U_n$ como no enunciado; então θ algébrico implicaria que (σ, τ) é uma solução da equação polinomial a coeficientes algébricos $XY - \theta$ e, consequentemente, σ e τ são algebricamente dependentes. Uma contradição!

□

3.2.1 U-números em curvas planas

Uma curva algébrica real

$$V_{\mathbb{R}}(F),$$

onde $F(X, Y)$ é um polinômio irredutível em duas variáveis a coeficientes inteiros, é dita racional se existem duas funções racionais $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ não constantes e com coeficientes racionais tais que

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$$

identicamente em t.

Alniaçik [3] estabeleceu que curvas algébricas reais racionais admitem infinitos pontos cujas coordenadas são U_n-números, para todo n natural. O círculo

$$X^2 + Y^2 = a^2 \ \ (a \in \mathbb{Q}) \tag{3.5}$$

e a curva hiperelíptica

$$Y^2 = X^2 + X^3, \tag{3.6}$$

com as parametrizações dadas por

$$t \longmapsto a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

e

$$t \longmapsto \left(t^2 - 1,\, t(t^2-1)\right)$$

respectivamente, são exemplos de tais curvas.

Dizemos que um ponto (x, y) em $V_{\mathbb{R}}(F)$ é regular se

$$\left(\frac{\partial P}{\partial X}(x,y),\ \frac{\partial P}{\partial Y}(x,y)\right) \neq (0,0).$$

Pelo Teorema de Bézout, as interseções

$$V_{\mathbb{R}}(F) \cap V_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) \qquad \text{e} \qquad V_{\mathbb{R}}(F) \cap V_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)$$

são finitas, assim, o conjunto dos pontos regulares sobre uma curva algébrica é também finito e, portanto, pelo Teorema da Função Implícita, a existência de um ponto regular em $V_{\mathbb{R}}(F)$ implica na existência de um ponto (x_0, y_0) satisfazendo as condições dos teoremas A, B e C.

Para a família de polinômios $\tilde{\mathfrak{F}}$ da forma $P(X) + Q(Y)$ e $P(X)Q(Y) + a$, onde $P(X)$ e $Q(Y)$ são polinômios com coeficientes inteiros e a um inteiro não nulo temos, diretamente do Teorema B, a seguinte proposição:

Proposição 3.3. *Sejam n um natural e $F \in \tilde{\mathfrak{F}}$ com pelo menos um ponto regular, então existe uma quantidade não enumerável de pontos em $V_{\mathbb{R}}(F)$ cujas coordenadas são U_n-números.*

Destacamos que as curvas dos exemplos (3.5) e (3.6) satisfazem as condições da proposição. Finalizamos essa subseção nos perguntando se dado n natural, toda curva plana com certa regularidade possui uma infinidade de pontos cujas coordenadas são U_n-números; melhor dizendo, se a Proposição 3.3 é válida para todo F polinômio irredutível em $\mathbb{Z}[X, Y]$.

Bibliografia

[1] K. Alniacik. On the subclasses U_m in Mahler's classification of the transcendental numbers. *İstanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics Physics and Astronomy*, 44:39–82, 1972.

[2] K. Alniaçik. Representation of real numbers as sums of U_2-numbers. *Acta Arithmetica*, 55(4):301–310, 1990.

[3] K. Alniacik. The points on curves whose coordinates are U-numbers. *Rendiconti di Matematica Serie VII Vo*, 18:649–653, 1998.

[4] A. Baker. *Transcendental Number Theory.* Cambridge university press, 2022.

[5] Y. Bugeaud. *Approximation by Algebraic Numbers*, volume 160. Cambridge University Press, 2004.

[6] E. Burger. On Liouville decompositions in local fields. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(11):3305–3310, 1996.

[7] E. Burger. Diophantine inequalities and irrationality measures for certain transcendental numbers. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 32(10):1591–1599, 2001.

[8] A. Drungilas, P. Dubickas and C. Smyth. A degree problem for two algebraic numbers and their sum. *Publicacions Matemàtiques*, 56 (2):413–448, 2012.

[9] P. Erdős. Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers. *Michigan Math J.*, 9:59–60, 1962.

[10] A. Garcia and Y. Lequain. *Elementos de Álgebra.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

[11] M. M. Kapranov I. M. Gelfand and A. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants.* Birkhiiuser Boston, 1994.

[12] O. S. Içen. Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen I und II". *Istanbul Univ. Fen Fak. Mecm., Seri A*, 38:25–35, 1973.

[13] J. F. Koksma. Über die mahlersche klasseneinteilung der transzendenten zahlen und die approximation komplexer zahlen durch algebraische zahlen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 48(1):176–189, 1939.

[14] R. Kumar, K. S. Thangadurai and M. Waldschmidt. Liouville numbers and Schanuel's Conjecture. *Archiv der Mathematik*, 102(1):59–70, 2014.

[15] W. J. LeVeque. On Mahler's U-numbers. *J. London Math. Soc.*, 82:220–229, 1953.

[16] J. Liouville. Sur des classes tres-etendues de quantites dont la valeur n'est ni algebrique ni meme reductible a des irrationnelles algebriques. *CR Acad. Sci. Paris*, 18:883–885, 1844.

[17] K. Mahler. Zur approximation der exponentialfunktion und des logarithmus I, II. *J. M.*, 166, 1932.

[18] E. Maillet. *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.* Gauthier-Villars, 1906.

[19] D. Marques. *Teoria dos Números Transcendentes.* SBM, 2013.

[20] D. Morduchai-Boltovskoj. On transcendental numbers with sucessive approximations defined by algebraic equations. *Mat. Sb.*, 41, 1934.

[21] W. Narkiewicz. *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, volume 57. Springer, 1974.

[22] J. Neukirch. *Algebraic Number Theory*, volume 322. Springer Science & Business Media, 2013.

[23] A. Perna. *Sui numeri trascendenti in generale e sulla loro costruzione in base al criterio di* Liouville*.* 1914.

[24] A. D. Pollington. Sum sets and U-numbers. In *Number Theory with an Emphasis on the Markoff Spectrum*, pages 207–214. Routledge, 1993.

[25] J. Popken. Zur transzendenz von e. *Mathematische Zeitschrift*, 29(1):525–541, 1929.

[26] W. M. Schmidt. T-numbers do exist. *Symposia Math. IV, Inst. Naz. di Alta Math., Academic Press, Rome*, 6:3–26, 1968.

[27] J. Stroyls. Topics in Diophantine Approximations. *Ph.D. Thesis, SUNY, Buffalo, N.Y.*, 1974.

[28] E. Wirsing. Approximation mit algebraischen zahlen beschränkten grades. *J. reine angew. Math.*, 1961.