UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Departamento de Matemática

DECOMPOSIÇÃO SOBRE $\mathbb{Z}_p$ DE GRUPOS PRO-p

Tese para obtenção do grau de Doutor em Matemática

JESUS EDUARDO BERDUGO DE LA OSSA

Orientador: Pavel Zalesski.

Brasília, Brasil.
Setembro, 2023

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DECOMPOSIÇÃO SOBRE $\mathbb{Z}_p$ DE GRUPOS PRO-p

Estudante: Jesus Eduardo Berdugo De La Ossa[1]

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de:

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Banca Examinadora:

____
Dra. DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA,
UNICAMP

____
Dr. JOHN WILLIAM MACQUARRIE,
UFMG

____
Dr. THEO ALLAN DARN ZAPATA,
UnB

____
Dr. PAVEL ZALESSKI,
UnB

29 de Setembro de 2023

[1] O autor teve apoio financiero de CAPES e CNPq.

Agradecimentos

Dedico essa tese principalmente a Deus, por me dar as forças que precisei para poder terminar e alcançar essa meta.

Para meus pais Eduardo, Astrith e a minha irmã Katy, que sempre me acompanharam e apoiaram-me em todo o caminho difícil do doutorado, e para minha irmã espero ser um exemplo a seguir como pessoa. Também a meus amigos mais próximos por me brindar seu apoio em todo momento, especialmente Ándres, Alex, Carlos, Jean Carlos, Jersson, e Hector. Por último agradeço todos meus professores que me guiaram pelo caminho das Matemáticas desde a graduação até o Doutorado, particularmente Carlos Araujo, Tovias Castro e Pavel Zalesskii.

Por fim agradeçer a CAPES e CNPq pelo apoio financiero durante todo meu doutorado.

Conteúdo

Resumo

Nessa tese estudamos as decomposições de um grupo pro-p G como um produto pro-p livre com um subgrupo pro-cíclico infinito amalgamado ou como uma HNN-extensão com subgrupo pro-cíclico infinito associado, e provamos no Teorema 2.2.2 a versão pro-p do Teorema 2.1 de Rips e Sela (Annals of Mathematics; 1997), e nos teoremas 2.3.5 e 2.3.13 a versão pro-p e a versão pro-2 respectivamente do Teorema 3.6 de Rips e Sela (Annals of Mathematics; 1997). Além disso, usando a definição de comensurador de um subgrupo, provamos no Teorema 3.0.4 que quando um grupo pro-cíclico C age livremente sobre uma árvore pro-p, o quociente do comensurador de C sobre um subgrupo normal contido em um G-estabilizador de arestas é pro-cíclico infinito ou diedral pro-p infinito, que é uma versão mais generalizada da Proposição 8.1 de Chatzidakis e Zalesskii (Israel Journal of Mathematics; 2022). Finalmente no Teorema 3.0.8 mostramos que um grupo pro-p finitamente gerado G agindo sobre uma árvore pro-p localmente finita seja igual ao comensurador de um G-estabilizador de aresta.

Abstract

In this thesis we study splittings of a pro-p group G as a free pro-p product with an amalgamated over an infinite pro-cyclic subgroup or as an HNN-extension with infinite pro-cyclic subgroup associated, and we prove in Theorem 2.2.2 the pro-p versions of Theorem 2.1 of [RS97] and in the theorems 2.3.5 and 2.3.13 the pro-p version and pro-2 version respectively of Theorem 3.6 of [RS97]. Furthermore, using the definition of a commensurator of a subgroup, we prove in Theorem 3.0.4 that when a pro-cyclic group C acts freely on a p-tree, the quotient of the commensurator of C over a normal subgroup contained in a G-stabilizer edge is pro-cyclic infinite or pro-2 infinite dihedral, which is a generalized version of Proposition 8.1 of [CZ22]. Finally, we show in Theorem 3.0.8 that a finitely generated pro-p group G acting on a locally finite pro-p tree is equal to the commensurator of a G-stabilizer edge.

Introdução

Na década de 1970 foi desenvolvida a Teoria de Bass-Serre e formalizada em [S80]. Essa teoria analisa a estrutura de um grupo G por meio da ação de G sobre uma árvore, empelando principalmente o conceito de grupo fundamental de grafo de grupos, e as construções livres tais como produto livre amalgamado, produto livre e HNN-extensão. A versão profinita da Teoria de Bass-Serre foi desenvolvida por L. Ribes, O. Melnikov, e P. Zalesski (orientador dessa tese) em livros e artigos tais como [R17], [RZ00a], [MZ89] e alguns outros artigos.

No ano 1997, Z. Sela no artigo [S97], "traduziu" a noção das subvariedades características JSJ (Jaco-Shalen-Johanson) da topologia tridimensional para o contexto de grupos hiperbólicos, obtendo uma decomposição canônica para grupos hiperbólicos, que foi chamada como decomposição canônica JSJ (em [S97]). Esta decomposição canônica "contém" todas as pequenas decomposições cíclicas (essenciais) de um grupo hiperbólico livremente indecomponível e livre de torção. Logo E. Rips e Z. Sela em [RS97] estudaram a decomposição sobre um subgrupo cíclico-infinito ($\mathbb{Z}$-decomposição) de grupos finitamente gerados como um produto livre amalgamado ou uma HNN-extensão. Para poder entender melhor todas as $\mathbb{Z}$-decomposições de um grupo finitamente apresentado G, eles precisavam estudar cuidadosamente e detalhadamente a "interação" entre qualquer par de $\mathbb{Z}$-decomposições elementares de G. Tendo em conta que a uma $\mathbb{Z}$-decomposição elementar de G, podem ser um produto livre amalgamado $A *_{\mathbb{Z}} B$ com grupo amalgamado cíclico-infinito $\mathbb{Z}$ ou uma HNN-extensão $HNN(A, \mathbb{Z}, t)$ com subgrupo associado cíclico-infinito $\mathbb{Z}$. Agora supondo que temos duas $\mathbb{Z}$-decomposições para G as quais são: $A_1 *_{C_1} B_1$ ou $HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $A_2 *_{C_2} B_2$ ou $HNN(A_2, C_2, t_2)$, tais que $C_1 = \langle c_1 \rangle \cong \mathbb{Z} \cong \langle c_2 \rangle = C_2$. Com árvores Bass-Serre T_1 e T_2 respectivamente para primeira e segunda $\mathbb{Z}$-decomposição (árvores Bass-Serre definidas em [S80, Seção 5.3]), dizemos que essas $\mathbb{Z}$-decomposições são:

- Elíptica-Elíptica: Se c_1 estabiliza um vértice em T_2 e c_2 estabiliza um vértice em T_1.

- Hiperbólica-Hiperbólica: Se c_1 não estabiliza vértice em T_2 e c_2 não estabiliza vértice em T_1.

- Hiperbólica-Elíptica: Se c_1 não estabiliza vértice em T_2 e c_2 estabiliza um vértice em T_1.

Lembrando que um grupo é livremente decomponível se ele pode ser escrito como um produto livre com fatores não triviais; na Seção 2 de [RS97] no Teorema 2.1 Rips-Sela provaram o seguinte teorema:

Teorema: *[RS97, Teorema 2.1] Qualquer par de $\mathbb{Z}$-decomposições de um grupo que seja livremente indecomponível não pode ser elíptico-hiperbólico.*

Agora um grupo G não se decompõe sobre um grupo de ordem 2, quer dizer que o G não pode ser escrito como um produto livre amalgamado $A \amalg_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} B$, com subgrupo amalgamado de ordem 2, ou uma HNN-extensão $HNN(A, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, t)$, com grupo associado de ordem 2; na terceira seção de [RS97] Rips e Sela provam o seguinte teorema:

Teorema: *[RS97, Teorema 3.6] Seja G um grupo livremente indecomponível e que não se decompõe sobre um grupo de ordem 2, e G admite duas $\mathbb{Z}$-decomposições hiperbólica-hiperbólica nas quais os subgrupos cíclicos-infinitos amalgamados (ou associado quando é uma HNN-extensão) comutam, então o grupo G é isomorfo algum dos seguintes grupos: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, ou $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$, ou $(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$.*

O objetivo desta tese é definir os objetos definidos em [RS97] para o caso pro-p, e provar a versão pro-p dos dois Teoremas mencionados anteriormente [RS97, Teoremas 2.1 e Teorema 3.6]. A tese esta dividida em 3 capítulos. No primeiro capitulo definimos todos os objetos e apresentamos alguns resultados que usamos da versão pro-p da Teoria de Bass-Serre; além disso, na Seção 1.1 damos as definições das construções livres que vamos usar no desenvolvimento da tese, tais como produto pro-p livre amalgamado, produto pro-p livre e HNN-extensão. No Capitulo 2 vamos começar definindo o que é uma $\mathbb{Z}_p$-decomposição de um grupo pro-p G, pegando o completamento pro-p do grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$ como o nosso grupo pro-p cíclico infinito sobre o qual vamos descompor o nosso grupo pro-p G (em produto pro-p livre amalgamando $\mathbb{Z}_p$, e HNN-extensão com subgrupo associado $\mathbb{Z}_p$). Na Seção 2.1, no Corolário 2.1.4 obtemos que quando temos uma $\mathbb{Z}_p$-decomposição, sua ação sobre a p-árvore padrão é 2-acilíndrica, i.e. cada geodésica de comprimento maior que 2 estabilizada por grupo trivial; seria a Versão pro-p do Lema 4.1 de [RS97]. Logo na

Seção 2.2 provamos o Teorema 2.2.2 que diz:

Teorema 1: *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não admite decomposição como produto livre pro-p não trivial. Então qualquer duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições de G são Elíptica-Elíptica ou Hiperbólica-Hiperbólica.*

Esse teorema é a versão pro-p do Teorema 2.1 de [RS97], adicionamos a hipótese do grupo G ser pro-p finitamente gerado e também a ideia da prova foi diferente que no caso abstrato pois no caso abstrato usam firmemente o Teorema da estrutura [S80, Teorema 13], e tal teorema na versão pro-p nem sempre vale.

Depois na Seção 2.3 provamos a versão pro-p do Teorema 3.6 de [RS97], para isso tivemos que procurar uma ideia diferente que no caso abstrato pois no caso abstrato temos a existência de um eixo quando um elemento de um grupo age hiperbolicamente sobre uma árvore. Dividimos a demonstração do Teorema em dois casos: quando o número primo p é maior do que 2 na Subseção 2.3.1, e quando $p = 2$ na Subseção 2.3.2.

Quando consideramos $p > 2$, na Subseção 2.3.1 provamos primeiro a Proposição 2.3.1 que fala como é a cara do normalizador de um grupo que age hiperbolicamente, e logo a versão pro-p do Teorema 3.6 de [RS97] que é o Teorema 2.3.5 que diz:

Teorema 2: *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não se decompõe como um produto livre pro-p não trivial, tal que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ são duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica para G. Suponha que $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico. Então $G = N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

No final da subseção obtivemos um resultado sobre a ação de duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições hiperbólica-hiperbólica no Teorema 2.3.7:

Teorema 3: *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não é pro-p abeliano, e também não se decompor como um produto livre pro-p não trivial, tal que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ são duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica de G. Então a ação do G sobre sua árvore pro-p padrão S é 2-acilíndrica.*

Na Subseção 2.3.2, onde estamos considerando $p = 2$ mostramos primeiro uma proposição (Proposição 2.3.8) que mostra os grupos aos quais o normalizador é isomorfo.

Proposição 4: Suponha que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$, são duas $\mathbb{Z}_2$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica. Seja $1 \neq H_i \leq C_i$. Então $N_G(H_i)$ é isomorfo à um dos seguintes grupos:

(i) Grupo pro-cíclico infinito $\mathbb{Z}_2$;

(ii) Grupo diedral pro-2 infinito $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

(iii) Grupo pro-2 abeliano livre de posto 2 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;

(iv) Garrafa de Klein pro-2 $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$;

(v) Produto semidireto $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, onde a ação de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ é por inversão, ou

(vi) Produto semidireto $(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Depois provamos uns lemas que vão ajudar na demonstração da versão pro-2 do Teorema 3.6 de [RS97], que foi provado no Teorema 2.3.13 (observe que obtemos os pro-2 completamentos do caso abstrato):

Teorema 5: *Seja G um grupo finitamente gerado pro-2 que não decompõe sobre um grupo de ordem no máximo 2, com $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$, são duas $\mathbb{Z}_2$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica de G. Suponha que $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico infinito nem diedral pro-2 infinito. Então $G = N_G(C_1)$ é isomorfo a um dos grupos pro-2 listado desde (iii) até (vi) da Proposição 2.3.8.*

Por fim no capítulo 3 trazemos a forma do comensurador de um subgrupo fechado de um grupo pro-p G. Provamos uma versão generalizada da Proposição 8.2 de [CZ22], no Teorema 3.0.4:

Teorema 6: *Seja G um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p T e C um subgrupo pro-cíclico não trivial de G que age livremente sobre T. Se $Comm_G(C)$ é finitamente gerado, então existe um subgrupo normal K de $Comm_G(C)$, tal que $Comm_G(C)/K$ não tem um subgrupo livre pro-p não abeliano, onde K está contido em um estabilizador de uma aresta em T.*

Além disso, no Teorema 3.0.8 conseguimos que com certas hipóteses provarmos que um grupo G que age sobre uma árvore pro-p T localmente finita é igual ao comensurador de um estabilizador de aresta de T. O teorema diz:

Teorema 7: *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não se decompõe como um produto pro-p livre. Suponha que G age sobre uma árvore pro-p T sem ponto fixo global, e com $G\backslash T$ finito. Se T é localmente finito, então $G = Comm_G(G_e)$, para qualquer $e \in E(T)$, e existe um $J \leq_o G_e$ tal que $G = N_G(J)$.*

Capítulo 1

Versão Pro-p da Teoria de Bass Serre

Nesse capítulo vamos apresentar definições de conceitos básicos da teoria Bass Serre para o caso pro-p, e especificar uma notação para os conceitos definidos. Além disso apresentaremos alguns resultados sobre a versão pro-p da teoria Bass Serre, que vamos precisar nos próximos capítulos. O capítulo esta dividido em seções e sua estrutura é a seguinte. Na Seção 1.1 vamos começar definindo construções livres, tais como um produto pro-p livre amalgamado, produto pro-p livre e por fim definindo uma HNN-extensão pro-p. Imediatamente na Seção 1.2 continuamos definindo conceitos básicos de grafos profinitos, mostramos como definimos as árvores pro-p que são um "objeto"muito importante para nosso proposito. Logo na Seção 1.3 definimos como age um grupo profinito sobre um grafo profinito, além disso na Seção 1.4 definimos um grupo e um conjunto muito relevantes como são o grupo fundamental de um grafo de grupos pro-p, e uma árvore pro-p padrão; também mostraremos alguns resultados que tem um papel importante no desenvolvimento da tese. Finalmente na Seção 1.5 vamos apresentar dois resultados que são muito usados nas demonstrações dos teoremas principais do Capítulo 2.

1.1 Construções Livres

Nessa seção vamos apresentar as construções livres baseando-nos em [RZ00b, Seção 9].

Definição 1.1.1. ([RZ00b, Seção 9.2]) Sejam G_1, G_2 e H grupos pro-p e consideremos $f_i : H \longrightarrow G_i$ $(i = 1, 2)$ os monomorfismos de grupos pro-p. Definimos um produto pro-p livre amalgamado de G_1 e G_2 com H um subgrupo amalgamado como G um grupo pro-p junto com homomorfismos contínuos $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ $(i = 1, 2)$ tal que $\varphi_1(f_1) = \varphi_2(f_2)$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: Para qualquer par de homomorfismos contínuos $\psi_i : G_i \longrightarrow K$ $(i = 1, 2)$ para um grupo pro-p K tal que $\psi_1 f_1 = \psi_2 f_2$, existe um único homomorfismo continuo $\psi : G \longrightarrow K$ que faz que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, "\psi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[drr, "\psi_2"'] & G \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\
& & K
\end{tikzcd}$$

Esse produto livre pro-p amalgamado, também podemos referi-nos como produto livre pro-p com amalgamação, e denotamos por $G = G_1 \amalg_H G_2$.

Além disso, podemos definir um produto pro-p amalgamado $G_1 \amalg_H G_2$ com a seguinte apresentação (consultar em [RZ00b, Seção 9.2])

$$G_1 \amalg_H G_2 = \langle \varphi_1(G_1), \varphi_2(G_2) \mid rel(\varphi_i(G_i)), \varphi_1(f_1)(h) = \varphi_2(f_2)(h), h \in H, i = 1, 2 \rangle. \tag{1.1}$$

Como no caso abstrato, podemos considerar H como um subgrupo comum de G_1 e G_2 e pensar f_1 e f_2 como inclusões. Agora nem sempre os homomorfismos

$$\varphi_i : G_i \longrightarrow G_1 \amalg_H G_2$$

$(i = 1, 2)$ são injetivos (como no caso abstrato), i.e. que o produto livre pro-p com amalgamação não sempre é próprio (na terminologia de [RZ00b]). Mas para o caso pro-p podemos fazer ele próprio substituindo G_1, G_2, H com as suas respectivas imagens em G (como explicado em [RZ00a, Seção 4]). Se $G_1 \amalg_H G_2$ é própria, podemos identificar G_1, G_2 e H com as suas imagens em G, e assim podemos dizer que G se decompõe como um produto livre pro-p amalgamado se $G = G_1 \amalg_H G_2$.

Como nesta tese vamos trabalhar com grupos pro-p com subgrupo amalgamado pro-cíclico, pelo provado em [R71, Teorema 3.2] podemos dizer, que todo produto livre pro-p com subgrupo amalgamado pro-cíclico, é sempre próprio.

Se $G = G_1 \amalg_H G_2$ é própria e $H = G_1$, então $G = G_2$ e chamamos essa decomposição fictícia.

Definição 1.1.2. Seja $G = G_1 \amalg_H G_2$ um produto livre pro-p com subgrupo amalgamado H. Quando $H = 1$ o chamamos um produto pro-p livre, e denotamos por $G = G_1 \amalg G_2$. Assim podemos definir a sua apresentação como segue:

$$G_1 \amalg G_2 = \langle \varphi_1(G_1), \varphi_2(G_2) \mid rel(\varphi_i(G_i)),\ i = 1, 2\rangle.$$

Agora como no caso abstrato os homomorfismos

$$\varphi_i : G_i \longrightarrow G_1 \amalg G_2$$

$(i = 1, 2)$ são injetivos.

Se $G = G_1 \amalg G_2$, com $G_1 \neq 1$ e $G_2 \neq 1$ dizemos que G é livremente decomponível.

Definição 1.1.3. ([RZ00b, Seção 9.4]) Seja H um grupo pro-p e $f : A \longrightarrow B$ um isomorfismo continuo entre A e B, dois subgrupos fechados de H. Uma HNN-extensão pro-p de H com grupos associados A, B consiste de $G = HNN(H, A, t)$ um grupo pro-p, um elemento $t \in G$ chamado letra estável, e um homomorfismo continuo $\varphi : H \longrightarrow G$ com $t^{-1}(\varphi(a))t = \varphi f(a)$ e satisfazendo a seguinte propriedade universal: Para K algum grupo pro-p, algum $k \in K$ e $\psi : H \longrightarrow K$ um homomorfismo continuo satisfazendo $k^{-1}(\psi(a))k = \psi f(a)$ para todo $a \in A$, existe um único homomorfismo continuo $\omega : G \longrightarrow K$ com $\omega(t) = k$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, dashed, "\omega"] & \\ H \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & K \end{tikzcd}$$

Uma HNN-extensão pro-p $HNN(H, A, t)$ tem a seguinte apresentação (para mais informação [RZ00b, Seção 9.4]).

$$HNN(H, A, t) = \langle \varphi(H), t \mid rel(\varphi(H)), (\varphi(a))^t = \varphi(f(a)), a \in A\rangle. \tag{1.2}$$

O homomorfismo canônico $\varphi : H \longrightarrow G = HNN(H, A, t)$ nem sempre é um monomorfismo, i.e. não sempre é própria (seguindo a terminologia de [RZ00b]). Embora, podemos tornar-la própria trocando-se H, A e $f(A)$ com as suas imagens em G (como está explicado em [RZ00a, Seção 4]). Se $HNN(H, A, t)$ é própria, identificamos H, A e $f(A)$ com a suas imagens em G e assim podemos dizer que G se decompõe como uma HNN-extensão pro-p $G = HNN(H, A, t)$.

Observação 1.1.4. Observe que se $G = A \amalg_C B$ é um produto livre pro-p amalgamado próprio. Logo identificamos G_1, G_2 e H com as suas imagens em G, e seja $g \in G$. Consideremos o monomorfismo $f_3 : C^g \longrightarrow (f_1(C))^g \leq A^g$, e o monomorfismo $f_4 : C^g \longrightarrow (f_2(C))^g \leq B^g$, e obtemos o seguinte produto livre pro-p amalgamado:

$$\begin{aligned} A^g \amalg_{C^g} B^g \quad &= \langle A^g, B^g \mid rel(A^g),\, rel(B^g),\, f_3(h^g) = f_4(h^g),\, h \in C\rangle \\ &= \langle A^g, B^g \mid rel(A)^g,\, rel(B)^g,\, (f_1(h))^g = (f_2(h))^g,\, h \in C\rangle \\ &\cong \langle A, B \mid rel(A),\, rel(B),\, f_1(h) = f_2(h),\, h \in C\rangle \\ &= A \amalg_C B \\ &= G. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Além disso, se $G = HNN(A, C, t)$ uma HNN-extensão própria, e identificamos H, A e $f(A)$ com a suas imagens em G. Podemos obter o seguinte isomorfismo $f_5 : C^g \longrightarrow (f(C))^g$, definido como $f_5(h^g) = f(h)^g$, e assim obtemos a HNN-extensão:

$$\begin{aligned} HNN(A^g, C^g, t^g) \quad &= \langle A^g, t^g \mid rel(A^g), (h^g)^{t^g} = f_5(h^g), h \in C\rangle \\ &= \langle A^g, t^g \mid rel(A)^g, (h)^{tg} = f(h)^g, h \in C\rangle \\ &= (\langle A, t \mid rel(A), h^t = f(h), h \in C\rangle)^g \\ &\cong \langle A, t \mid rel(A), h^t = f(h), h \in C\rangle \\ &= HNN(A, C, t) \\ &= G. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Lema 1.1.5. ([SZ14, Lema 3.1]) Suponha que G é um grupo finitamente gerado pro-p, com $d(G)$ número mínimo de geradores maior que 2, então:

a. Se $G = A \amalg_C B$ é um produto livre pro-p amalgamado com C pro-cíclico, temos que $d(G) \geq d(A) + d(B) - 1$.

b. Se $G = HNN(A, C, t)$ uma HNN-extensão pro-p com C pro-cíclico, então $d(G) \geq d(A)$

1.2 Conceitos Básicos da Versão pro-p da Teoria de Bass-Serre

Definição 1.2.1. Um *espaço Profinito* ou *espaço Booleano* Γ é o limite inverso de espaços topológicos finitos que tem a topologia discreta, i.e.

$$\Gamma = \varprojlim_{i \in I} \Gamma_i,$$

onde Γ_i são espaços topológicos finitos com a topologia discreta. Também podemos definir um *espaço Profinito* como sendo um espaço topológico compacto, hausdorff e totalmente desconexo. [RZ00b, Teorema 1.1.12].

Definição 1.2.2. Um *grafo* Γ é a união disjunta $E(\Gamma)\dot{\cup}V(\Gamma)$, com duas aplicações $d_0, d_1 : \Gamma \longrightarrow V(\Gamma)$, onde a restrição em $V(\Gamma)$ é a aplicação identidade, e para algum $e \in E(\Gamma)$, $d_0(e)$ e $d_1(e)$ são chamados o vértice inicial e o vértice final de e respectivamente.

Definição 1.2.3. Um *Grafo Profinito* Γ é um espaço profinito com um subconjunto fechado não vazio $V(\Gamma)$, o conjunto de vértices do grafo Γ, e duas aplicações contínuas $d_0, d_1 : \Gamma \longrightarrow V(\Gamma)$ onde a restrição em $V(\Gamma)$ é a aplicação identidade $Id_{V(\Gamma)}$. Os elementos de $V(\Gamma)$ são chamados vértices e os elementos de $E(\Gamma) = \Gamma - V(\Gamma)$ arestas. Chamaremos as aplicações d_0 e d_1 como aplicações de incidência.

Definição 1.2.4. Sejam Γ e Δ dois grafos profinitos. Um *q-morfismo* ou *quase-morfismo* de grafos profinitos $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Delta$, é uma aplicação continua tal que $d_i(\alpha(m)) = \alpha(d_i(m))$ para qualquer $m \in \Gamma$, com $i \in \{0, 1\}$. Além disso se $\alpha(e) \in E(\Delta)$ para qualquer $e \in \Gamma$ dizemos que o α é um morfismo de grafos profinitos. Observe que a igualdade $d_i(\alpha(m)) = \alpha(d_i(m))$ implica que o q-morfismo α envia vértices em vértices.

Definição 1.2.5. Dizemos que um subconjunto não vazio e fechado Δ de um grafo profinito Γ é um *subgrafo profinito* de Γ, se sempre que $m \in \Delta$, então $d_i(m)$ está em Γ, para $i \in \{0, 1\}$.

Exemplo 1.2.6. (*Colapsando Subgrafos*) Suponha que Δ é um subgrafo do grafo profinito Γ. Consideremos a aplicação canônica entre espaços topologicos $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Delta$ (lembra que essa aplicação é sobrejetiva). Agora vamos definir uma estrutura de grafo profinito sobre o espaço quociente Γ/Δ da seguinte forma: $V(\Gamma/\Delta) = \alpha(V(\Gamma))$; com $d_i(\alpha(m)) = \alpha(d_i(m))$, para todo $m \in \Gamma$, e todo $i = 0, 1$. Pela Definição 1.2.4, temos que α claramente é um q-morfismo de grafos. Dizemos que Γ/Δ é obtido de Γ *colapsando* Δ para um ponto. Praticamente o que esta ocorrendo é no quociente Γ/Δ, o subgrafo Δ vira um vértice, então podemos ver que se Δ tem arestas, α envia essas arestas em um ponto.

Definição 1.2.7. Um grafo profinito Γ é chamado um *Grafo Conexo*, se para todo q-morfismo $\varphi : \Gamma \longrightarrow J$ sobrejetivo de Γ para um grafo finito J, o grafo J é conexo como grafo abstrato.

Definição 1.2.8. Dizemos que uma *componente conexa profinita* de um grafo profinito Γ, é um subgrafo profinito conexo maximal. Se $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Delta$ é um epimorfismo de grafos profinitos, com a topologia quociente em Δ. Chamamos Δ como *grafo quociente* de Γ, e ao α como q-morfismo quociente de grafos.

Agora, na seguinte subseção vamos definir pro-p árvore e também resultados muito importantes que utilizaremos neste trabalho.

1.2.1 Árvores Pro-p

Seja Γ um grafo profinito. Definimos $E^*(\Gamma) = \Gamma/V(\Gamma)$. Consideremos $\mathbb{Z}_p$ (o completamento pro-p dos números inteiros) como um anel profinito e considere os $\mathbb{Z}_p$-módulos livres profinitos $[\![\mathbb{Z}_p(E^*(\Gamma),*)]\!]$ e $[\![\mathbb{Z}_pV(\Gamma)]\!]$ sobre o espaço profinito $(E^*(\Gamma),*)$ e o espaço profinito $V(\Gamma)$, respetivamente. Denotamos por $C(\Gamma,\mathbb{Z}_p)$ a seguinte sequência:

$$0 \longrightarrow [\![\mathbb{Z}_p(E^*(\Gamma),*)]\!] \xrightarrow{d} [\![\mathbb{Z}_pV(\Gamma)]\!] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

onde os $\mathbb{Z}_p$-homomorfismos (contínuos) são definidos da seguinte forma $d(\bar{e}) = d_1(e) - d_0(e)$, com $\bar{e}$ é a imagem da aresta $e \in E(\Gamma)$ no espaço quociente $E^*(\Gamma)$, e $d(*) = 0$; e $\epsilon(v) = 1$, para $v \in V(\Gamma)$. Podemos ver que $\epsilon(d(\bar{e})) = \epsilon(d_1(e) - d_0(e)) = \epsilon(d_1(e)) - \epsilon(d_0(e)) = 1 - 1 = 0$, por tanto $Im(d) \subseteq Ker(\epsilon)$. Definimos agora os grupos de homologia do grafo profinito Γ, como: $H_0(\Gamma,\mathbb{Z}_p) = Ker(\epsilon)/Im(d)$, e $H_1(\Gamma,\mathbb{Z}_p) = Ker(d)$. Para uma maior informação pode consultar em [R17, Subseção 2.3].

Nota 1.2.9. Temos uma caracterização para grafos profinitos conexos; um grafo profinito Γ é conexo se somente se $H_0(\Gamma,\mathbb{Z}_p) = 0$ (como está provado em [R17, Proposição 2.3.2]).

Agora um q-morfismo $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Delta$ de grafos profinitos induz naturalmente aplicações contínuas $\alpha_V : V(\Gamma) \longrightarrow V(\Delta)$, e $\alpha_{E^*} : (E^*(\Gamma),*) \longrightarrow (E^*(\Delta),*)$, os quais na sua vez podem ser estendidos para $\mathbb{Z}_p$-morfismos $\widetilde{\alpha}_V : [\![\mathbb{Z}_pV(\Gamma)]\!] \longrightarrow [\![\mathbb{Z}_pV(\Delta)]\!]$, e $\widetilde{\alpha}_{E^*} : [\![\mathbb{Z}_p(E^*(\Gamma),*)]\!] \longrightarrow [\![\mathbb{Z}_p(E^*(\Delta),*)]\!]$. Definimos o triple $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha}_{E^*}, \widetilde{\alpha}_V, Id_{\mathbb{Z}_p})$ como $\widetilde{\alpha} : C(\Gamma,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow C(\Delta,\mathbb{Z}_p)$ um morfismo entre as duas sequencias complexas $C(\Gamma,\mathbb{Z}_p)$ e $C(\Delta,\mathbb{Z}_p)$.

Definição 1.2.10. Sabendo que $\mathbb{Z}_p$ denota o completamento pro-p do anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$ (mais informação em [RZ00b, Exemplo 2.1.6 (2)]). Um grafo profinito Γ é chamado uma *árvore pro-p* se Γ é conexo e $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_p) = 0$. Em outras palavras se a sequência $C(\Gamma, \mathbb{Z}_p)$ é exata.

Definição 1.2.11. Seja T uma árvore pro-p e suponha que v, $w \in V(T)$, a menor subárvore pro-p de T contendo o conjunto $\{v, w\}$ chamamos de *Geodésica* conetando *v com w* e denotamos $[v, w]$. Essa menor subárvore pro-p sempre existe (consultar [R17, Proposição 2.4.9]).

1.3 Grupos Agindo sobre Grafos Profinitos

Definição 1.3.1. Seja G um grupo profinito e Γ um grafo profinito. Dizemos que G age sobre o grafo profinito Γ (à esquerda), ou que Γ é um G-grafo, se:

a) Existe um mapa contínuo $G \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$, definido como $(g, m) \mapsto gm$, $g \in G$, $m \in \Gamma$, tal que: $(gh)m = g(hm)$ e $1m = m$, para todo $g, h \in G$, $m \in \Gamma$; onde 1 é o elemento identidade do grupo G.

b) $d_i(gm) = gd_i(m)$ para todo $g \in G$, $m \in \Gamma$, $i = 0, 1$.

Observe que se G age sobre um grafo profinito Γ, existe um homomorfismo continuo $\rho : G \longrightarrow Aut(\Gamma)$, onde $Aut(\Gamma)$ é o grupo de automorfismos do grafo profinito Γ, com a topologia induzida pela topologia compacto-aberto (consultar [RZ00b, Seção 2.9]). O *Kernel* (ou *Núcleo*) da ação do G sobre Γ é $Ker(\rho) = \{g \in G : gm = m, \forall m \in \Gamma\}$.

Definição 1.3.2. Seja G um grupo profinito que age sobre um grafo profinito Γ. Definimos o *estabilizador* (*G-estabilizador*, se precisamos especificar o grupo G) do elemento $m \in \Gamma$, como $G_m = \{g \in G : gm = m\}$. Claramente temos que: $G_m \leq G_{d_i(m)}$, para qualquer $m \in \Gamma$, $i = 0, 1$. Dizemos que G *age livremente* sobre o grafo profinito Γ, se $G_m = 1$ para todo $m \in \Gamma$. Considerando $m \in \Gamma$ a *G-orbita* de m é o conjunto fechado $Gm = \{gm : g \in G\}$.

Observe que se um grupo pro-p G sobre um grafo profinito Γ, com o seguinte mapa $\varphi : G \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$, e consideremos $Pr_G : G \times \Gamma \longrightarrow G$ a projeção sobre G. Podemos ver que o estabilizador $G_m = Pr_G(\varphi^{-1}(m) \cap (G \times \{m\}))$. Pela continuidade de φ, Pr_G, e por G ser Hausdorff e sua compacidade, G_m é fechado em G.

Definição 1.3.3. Se G é um grupo profinito agindo sobre o grafo profinito Γ. O espaço das G-orbitas $G\backslash\Gamma = \{Gm : m \in \Gamma\}$ com a topologia quociente é um espaço profinito que admite uma estrutura natural de grafo profinito, tomando como conjunto de vértices $V(G\backslash\Gamma) = G\backslash V(\Gamma)$, e as aplicações contínuas $d_i(Gm) = Gd_i(m)$, $i = 0, 1$. Chamamos $G\backslash\Gamma$ como o *grafo quociente* de Γ pela ação de G. O mapa quociente correspondente $\Gamma \longrightarrow G\backslash\Gamma$ é o epimorfismo de grafos profinitos definido como $m \mapsto Gm$ ($m \in \Gamma$, $g \in G$).

Definição 1.3.4. Suponha que um grupo profinito G age sobre uma árvore pro-p. Chamamos *o subconjunto dos pontos fixos de* T pela ação de G, ao subconjunto T^G definido como $T^G = \{m \in T : gm = m, \forall\, g \in G\}$. Esse subconjunto T^G pode ser vazio ou uma subárvore pro-p de T (consultar [R17, Teorema 4.1.5 (a)]).

Corolário 1.3.5. *([R17, Corolário 4.1.6]) Suponha G um grupo pro-p que age sobre uma árvore pro-p T, e $v, w \in V(T)$, com $v \neq w$. Então $G_v \cap G_w \leq G_e$, para qualquer $e \in [v, w]$.*

Proposição 1.3.6. *([R17, Proposição 2.4.12]) Seja G um grupo profinito agindo sobre T uma árvore pro-p. Então existe uma p-subárvore minimal D não vazia G-invariante de T. Além disso, se $|D| > 1$, então D é única.*

Definição 1.3.7. Dizemos que a ação de G um grupo pro-p sobre uma árvore pro-p T é *irredutível* se T é uma minimal subárvore pro-p G-invariante. Dizemos que ação é *fiel* se o núcleo da ação é trivial.

Observação 1.3.8. ([R17, Obervação 4.2.1 (b)]) Suponha que H é um subgrupo fechado de G um grupo pro-p, tal que G age sobre T uma árvore pro-p. Observe que se G age sobre T fielmente, então a ação induzida de H sobre o T é fiel (os H estabilizadores são da forma $H \cap G_m$ para $m \in T$). Agora se a ação induzida por H sobre o T é irredutível, a ação do G sobre T também é irredutível.

Teorema 1.3.9. *([RZ00a, Teorema 3.4]) Suponha que G é um grupo pro-p agindo livremente sobre uma árvore pro-p T. Então G é um grupo livre pro-p.*

Teorema 1.3.10. *([RZ00a, Teorema 3.13]) Seja G um grupo pro-p agindo irredutivelmente sobre uma árvore pro-p T, e seja N um subgrupo finito normal de G. Então N age trivialmente sobre T.*

Teorema 1.3.11. *([RZ00a, Teorema 3.9]) Suponha que um p-grupo finito G age sobre uma árvore pro-p T. Então $G = G_v$ para algum vertice $v \in V(T)$.*

Teorema 1.3.12. *([RZ00a, Teorema 3.15]) Seja G um grupo pro-p não trivial agindo fielmente e irredutivelmente sobre uma árvore pro-p T. Então temos uma das seguentes opções:*

(a) G tem um subgrupo pro-p livre não-abeliano agindo livremente sobre T;

(b) $G \cong \mathbb{Z}_p$;

(c) $G \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ é o grupo diedral infinito pro-2.

Definição 1.3.13. Dizemos que um espaço topológico X é *segundo contável* se X tem uma base contável de conjuntos abertos.

Teorema 1.3.14. *([R17, Teorema 9.6.1]) Suponha que G é um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p T com estabilizadores de arestas triviais. Se G é segundo contável então G é um produto livre pro-p*

$$G = \Big(\coprod_{\overline{v} \in G\backslash V(T)} G_{\sigma(\overline{v})}\Big) \amalg F,$$

onde F é um grupo livre pro-p e $\sigma : G\backslash V(T) \longrightarrow V(T)$ é uma seção da projeção canonica $\eta : V(T) \longrightarrow G\backslash V(T)$.

Observação 1.3.15. Observe que se G é um grupo pro-p finitamente gerado, por [RZ00b, proposição 2.5.1 (b)] temos que G é segundo contável. Agora se esse G age sobre uma árvore pro-p com estabilizadores de arestas triviais, então pelo Teorema 1.3.14, G é um produto livre pro-p de estabilizadores de alguns vértices em T.

Teorema 1.3.16. *([CZ22, Teorema 4.2]) Seja G um grupo pro-p finitamente gerado agindo sobre uma árvore pro-p sem pontos fixos globais. Então G se decompõe como um produto livre amalgamado não trivial ou como uma HNN-extensão pro-p sobre um estabilizador de uma aresta de T.*

Lembrando que ação de um grupo pro-p G sobre uma árvore pro-p T é sem pontos fixos globais, se G não estabiliza um vértice na árvore pro-p T.

1.4 O Grupo Fundamental de um grafo de grupos pro-p

Definição 1.4.1. Seja Γ um grafo profinito conexo e finito com aplicações de incidência $d_0, d_1 : \Gamma \longrightarrow V(\Gamma)$. Logo $(\mathcal{G}, \Gamma)$ um *Grafo de grupos pro-p* sobre Γ, consiste em grupos pro-p $\mathcal{G}(m)$ para cada $m \in \Gamma$, e contínuos monomorfismos $\partial_i : \mathcal{G}(e) \longrightarrow \mathcal{G}(d_i(e))$, para cada $e \in E(\Gamma)$, com $i \in \{0, 1\}$.

A teoria sobre o grupo fundamental de um grafo de grupos pro-p está melhor explicada em [R17, Subseção 6.2]. A seguinte definição é a que vamos precisar para nosso desenvolvimento da tese (pode consultar em [R17, Exemplo 6.2.3 (c)]).

Definição 1.4.2. Seja $(\mathcal{G}, \Gamma)$ um grafo de grupos pro-p sobre um grafo conexo finito Γ. Seja T uma subárvore maximal de Γ. Definimos *o grupo fundamental de um grafo de grupos pro-p* da seguinte forma:

$$\Pi = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) = ((\amalg_{v \in V(\Gamma)} \mathcal{G}(v)) \amalg F_p)/N,$$

onde F_p é o grupo pro-p livre com base $\{t_e : e \in E(\Gamma)\}$, e N é o menor subgrupo normal fechado de $(\amalg_{v \in V(\Gamma)} \mathcal{G}(v)) \amalg F_p$ contendo o conjunto

$$\{t_e : e \in E(T)\} \cup \{\partial_0(g)^{-1} t_e \partial_1(g) t_e^{-1} : g \in \mathcal{G}(e), e \in E(\Gamma)\}.$$

Definição 1.4.3. Dizemos que um grafo de grupos pro-p é *injetivo* se o mapa $\mathcal{G}(v) \to \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ é injetivo. Em [CZ22] chamam esse grafo de *próprio*.

Exemplo 1.4.4. Consideremos H um pro-p grupo abeliano finitamente gerado de ordem p^n, com $1 \leq n \leq \infty$. Seja $K = H \times H$, e C um grupo pro-cíclico de ordem p^n. Define duas ações de C sobre K, a primeira definida $c(h_1, h_2) = (h_1(h_2)^c, h_2)$, e a segunda assim $c(h_1, h_2) = (h_1, (h_1)^c h_2)$, para $c \in C$ e $(h_1, h_2) \in K$. (ver a Seção 4.1 para ver como se poderia definir $(h_1)^c$, e $(h_2)^c$ quando $C = \mathbb{Z}_p$). Essas duas ações definem $G_1 = K \rtimes C$, e $G_2 = K \rtimes C$ dois produtos semidiretos usando a primeira e segunda ação respetivamente. Consideremos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ o seguinte grafo de pro-p grupos:

$$\underset{G_1}{\bullet} \xrightarrow[K]{} \underset{G_2}{\bullet}$$

Assim temos que o grupo fundamental desse grafo de pro-p grupos é $\Pi = G_1 \amalg_K G_2$ o produto livre pro-p com subgrupo amalgamado K (mais informação em [R17, Exemplo 6.2.3 (d)]). Vemos que o grafo $(\mathcal{G}, \Gamma)$ não é injetivo, pois se for teríamos que $G_1 \amalg_K G_2$ é um produto livre pro-p amalgamado próprio, o que é um absurdo pois ele não é próprio (consultar [RZ00b, Exemplo 9.2.9]).

Observação 1.4.5. Como se viu no Exemplo 1.4.4 quando temos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ um grafo de grupos pro-p não sempre é injetivo. Embora podemos trocar os grupos vértices e grupos arestas por suas imagens em $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ o grupo fundamental desse grafo de grupos pro-p, então o grafo $(\mathcal{G}, \Gamma)$ se transforma em um grafo injetivo e o grupo fundamental $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ não muda (mais detalhes em [R17, Subseção 6.4]). Assim pelo resto do trabalho vamos considerar todo grafo de grupos pro-p injetivo.

Observação 1.4.6. Observe que considerando a Definição 1.4.2 podemos dizer que $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ o grupo fundamental do grafo finito de grupos pro-p $(\mathcal{G},\Gamma)$ tem a seguinte apresentação:

consideremos T uma árvore maximal de Γ.

$$\begin{aligned}\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma) = \langle \mathcal{G}(v), t_e : v \in V(\Gamma), e \in E(\Gamma), rel(\mathcal{G}(v)),\ t_e = 1 \,\text{para}\, e \in E(T),\\ \partial_1(g) = \partial_0(g)^{t_e}, g \in \mathcal{G}(e)\rangle.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Teorema 1.4.7. *([WZ17, Teorema 3.1]) Seja G um grupo pro-p finitamente gerado agindo sobre uma p-árvore T. Então o grupo $G = \Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ é o grupo fundamental de um grafo de grupos pro-p $(\mathcal{G},\Gamma)$, onde os grupos vértices e arestas de $(\mathcal{G},\Gamma)$ são estabilizadores de certos vértices e arestas de T respectivamente. Além disso, os estabilizadores de vértices e arestas de T em G são conjugados a subgrupos de grupos vértices e arestas de $(\mathcal{G},\Gamma)$.*

Corolário 1.4.8. *([WZ17, Corolário 3.3]) Seja G um grupo pro-p finitamente gerado agindo sobre uma p-árvore com estabilizadores de arestas pro-cíclicos. Então G é o grupo fundamental de um grafo finito de grupos pro-p $(\mathcal{G},\Gamma)$.*

1.4.1 Árvore pro-p Padrão

Definição 1.4.9. Seja Γ um grafo profinito conexo e finito, $(\mathcal{G},\Gamma)$ um grafo de grupos pro-p, e $\Pi = \Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ seu grupo fundamental, Definimos S a *árvore pro-p Padrão do grafo de grupos pro-p* da seguinte forma:

$$V(S) = \bigcup_{v\in V(\Gamma)} \Pi/\mathcal{G}(v) \quad \text{e} \quad E(S) = \bigcup_{e\in E(\Gamma)} \Pi/\mathcal{G}(e)$$

com aplicações de incidência: $d_0(g\mathcal{G}(e)) = g\mathcal{G}(d_0(e))$, $d_1(g\mathcal{G}(e)) = gt_e\mathcal{G}(d_1(e))$, $g \in \Pi$, $e \in E(\Gamma)$. (Para comprovar que é uma árvore pro-p, ver [R17, Teorema 6.3.5 e Corolário 6.3.6]).

Observação 1.4.10. Tomando as mesmas notações da Definição 1.4.9, não é difícil ver que Π age naturalmente sobre S. Aliás que os estabilizadores dos vértices de S são conjugados dos $\mathcal{G}(v)$ e os estabilizadores das arestas de S são conjugados de $\mathcal{G}(e)$. Além disso, temos que $G\backslash S \cong \Gamma$ (provado em [R17, Lema 6.3.2 (a)]).

Nos seguintes exemplos vamos mostrar o uso de todas as definições feitas nesta seção e de sua relevância no uso dessa tese, em particular dos elementos definidos nesta subseção. Vamos mostrar como estaria definida uma árvore pro-p padrão de G um grupo pro-p quando esse grupo G é uma HNN-extensão ou um produto livre pro-p amalgamado.

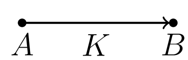
Exemplo 1.4.11. Consideremos a HNN-extensão pro-p $G = HNN(H, K, t)$, podemos vê-la como o grupo fundamental do seguinte grafo de pro-p grupos:

Então sua árvore padrão é definida como:

$$V(S) = G/H, \quad E(S) = G/K, \quad d_0(gK) = gH,\, d_1(gK) = gtH,$$

considerando t como a letra estável da HNN-extensão. Também pela Observação 1.4.10, os estabilizadores dos vértices de S são conjugados de H e os estabilizadores das arestas são conjugados de K.

Exemplo 1.4.12. Consideremos um produto livre pro-p amalgamado $G = A \amalg_K B$, podemos vê-lo como o grupo fundamental do seguinte grafo de pro-p grupos:



Então sua árvore padrão é definida como:

$$V(S) = G/A \cup G/B, \quad E(S) = G/K, \quad d_0(gK) = gA,\, d_1(gK) = gB,$$

Também pela Observação 1.4.10, temos que os estabilizadores dos vértices de S são conjugados de A ou B, e os estabilizadores das arestas são conjugados de K.

Teorema 1.4.13. *([R17, Teorema 6.6.1]) Suponha que G é um grupo pro-p agindo sobre uma p-árvore Σ com grafo quociente finito $\Gamma = G \backslash \Sigma$. Construindo o grafo de grupos pro-p $(\mathcal{G}, \Gamma)$ (como em [R17, Seção 6.6]), temos $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) \cong G$. Além disso, a p-árvore Σ é isomorfa à p-árvore padrão S do grafo de grupos pro-p $(\mathcal{G}, \Gamma)$.*

Teorema 1.4.14. *([RZ00a, Teorema 4.3])*

(a) *Seja* $G = \coprod_{i=1}^{n} G_i$ *um produto livre pro-p. Então* $G_i \cap G_j^g = 1$ *sempre que* $1 \leq i \neq j \leq n$ *ou* $g \notin G_i$.

(b) *Suponha que* $G = G_1 \amalg_H G_2$ *é um produto livre amalgamado próprio pro-p. Então* $G_i \cap G_j^g \leq H^b$ *com* $b \in G_i$*, sempre que* $1 \leq i \neq j \leq 2$ *ou* $g \notin G_i$.

(c) *Seja* $HNN(G_1, H, t)$ *uma HNN-extensão própria pro-p. Então* $G_1 \cap G_1^g \leq H^b$ *para algum* $b \in G_1$*, sempre que* $g \notin G_1$.

1.5 Normalizadores

As seguintes proposições foram provadas por Chatzidakis e Zalesskii.

Proposição 1.5.1. *([CZ22, Proposição 8.1]) Suponha que p é um numero primo,* C *um grupo pro-cíclico pro-p, e* $1 \neq U \leq C$*. Então:*

- *Se* $G = A \amalg_C B$ *é um produto livre pro-p com amalgamação próprio. Então* $N_G(U) = N_A(U) \amalg_C N_B(U)$.
- *Se* $G = HNN(A, C, t)$ *é uma HNN-extensão própria, então:*
  - *Se existe algum* $g \in A$ *tal que* $U^g = U^t$*, então:* $N_G(U) = HNN(N_A(U), C, t')$ *e* $G = HNN(A, C, t')$.
  - *Se* U *e* U^t *não são conjugados em* A *então* $N_G(U) = N_1 \amalg_C N_2$*, onde* $N_1 = N_{A^{t^{-1}}}(U)$ *e* $N_2 = N_A(U)$.

Proposição 1.5.2. *([CZ22, Proposição 8.2]) Seja* G *um grupo pro-p agindo sobre uma p-árvore* T *e* U *é um subgrupo pro-cíclico de* G *que não estabiliza aresta. Então uma das seguintes condições acontece:*

1. *Para algum vértice* v*,* $U \leq G_v$*: então* $N_G(U) = N_{G_v}(U)$.
2. *Para todo vértice* v*,* $U \cap G_v = \{1\}$*. Então* $N_G(U)/K$ *é isomorfo a* $\mathbb{Z}_p$ *ou* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \amalg \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *o grupo infinito diedral pro-2, onde* K *é algum subgrupo normal de* $N_G(U)$ *contido num estabilizador de aresta.*

1.6 Alguns resultados sobre grupos pro-p

Proposição 1.6.1. *[RZ00b, Proposition 2.7.1 (b)] Suponha que p é um primo e que p^n é um número supernatural* ($0 \leq n \leq \infty$). *Então o grupo $\mathbb{Z}_p$ tem um único subgrupo fechado H de índice p^n. Além disso, $H = p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$ se n é finito, e $H = 1$ se n é infinito.*

Lema 1.6.2. Suponha G um grupo pro-p e $C \cong \mathbb{Z}_p$ um subgrupo pro-cíclico de G. Suponha que H é um subgrupo não trivial de C, tal que H^g está contido em C, para algum $g \in G$. Então $g \in N_G(H)$.

Demonstração. Temos que o índice $[C : H]$ é finito, i.e, que $[C : H] = p^n$, com n um número finito. Consideremos g um elemento de g tal que $H^g \leq C$. Agora vamos provar que $[C : H] = [C : H^g]$. Lembrando o isomorfismo por conjugação de g. Logo a imagem de H^g, e H em C/N são isomorfas (tomando N como um subgrupo normal aberto de C), i.e. $HN/N \cong H^gN/N$. No caso finito temos que:

$$|C : HN| = |C/N : HN/N| = |C/N : H^gN/N| = |C : H^gN|.$$

logo consideremos o seguinte índice:

$$\begin{aligned}
[C : H^g] &= m.m.c\{|C : H^gN| : N \lhd_o C\} \\
&= m.m.c\{|C : HN| : N \lhd_o C\} \quad \text{(Pois estamos no caso finito)} \\
&= [C : H]
\end{aligned}$$

Como $[C : H^g] = [C : H] = p^n < \infty$, pela Proposição 1.6.1 temos que C tem um único subgrupo com índice finito p^n, por tanto $H = H^g$, i.e $g \in N_G(H)$ o que queríamos provar.

□

Lema 1.6.3. Suponha que $p > 2$ e $G = J \rtimes K$ um grupo pro-p tal que $J, K \cong \mathbb{Z}_p$. Se H é um subgrupo não trivial de K que centraliza à L um subgrupo não trivial de J. Então G é abeliano, em particular $G = J \times K$.

Demonstração. Temos que $G = J \rtimes K (\cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p)$, vamos observar qual é a ação de K sobre J.

Como $p \neq 2$, como $\varphi : K \longrightarrow Aut(J) \cong Aut(\mathbb{Z}_p) \cong (\mathbb{Z}_p)^* \cong U \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}_p \times (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})$ (com $U = 1 + p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$). Vemos que uma ação não trivial sobre

$J \cong \mathbb{Z}_p$ é por multiplicação pelas unidades do anel $\mathbb{Z}_p$, por tanto essa ação é fiel. Então a ação de $H = \overline{\langle h \rangle}$ sobre J é fiel. Assim, a ação é por multiplicação por unidades (não trivial) de $\mathbb{Z}_p$, i.e. que temos $\varphi(h) \neq 1$ (além disso note que como $H = \overline{\langle h \rangle}$ não é trivial, logo $\varphi(h) \neq 0$). Agora pela hipótese $1 \neq H \leq K$ centraliza um subgrupo não trivial $L = \overline{\langle l \rangle}$ de J, o que quer dizer que $\varphi(h)l = l$. Então $l = 0$ (pois temos que $\varphi(h) \neq 1$), mas L não é trivial por tanto $l \neq 0$. Isso quer dizer que ação de H sobre J não pode ser fiel, o que é um absurdo pois a ação de K sobre J é fiel (não trivial). Assim obtemos que a ação de K sobre J tem que ser trivial, por tanto podemos concluir que $G = J \times K$, i.e. G é abeliano. □

Lema 1.6.4. Suponha que G é um grupo pro-p finitamente gerado que age sobre uma p-árvore T, com $G\backslash T$ finito. Então $G = \overline{\langle g_1, g_1, \dots, g_m \rangle}$, com cada g_i contido em um estabilizador de vértice de T, ou g_i é uma letra estável.

Demonstração. Como $G\backslash T$ é finito, pelo Teorema 1.4.13, $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$, com $\Gamma = G\backslash T$. Lembrando que pela apresentação do grupo fundamental $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ do grafo finito de grupos pro-p $(\mathcal{G}, \Gamma)$ mostrada na Observação 1.4.6, que $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ é gerado por grupos vértices e letras estáveis. □

O seguinte lema mostra como podemos decompor um grupo pro-p G como um produto pro-p livre amalgamado (resp. como uma HNN-extensão) em que o normalizador $N_{A_1}(C_1)$ o subgrupo amalgamado (resp. o subgrupo associado).

Lema 1.6.5. Seja G um grupo pro-p, tal que $G = A \amalg_C B$ (ou $G = HNN(A, C, t)$) $C \cong \mathbb{Z}_p$ e são decomposições próprias de G (i.e, que o produto amalgamado é próprio e HNN-extensão é própria). Então o grupo G se decompõe como um produto livre pro-p com $N_{A_1}(C_1)$ como o subgrupo amalgamado ou como uma HNN-extensão com $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$ o subgrupo associado .

Demonstração. Suponha a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição que é $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ um produto livre amalgamado, logo pela Proposição 1.5.1 $N_G(C_1) = N_{A_1}(C_1) \amalg_{C_1} N_{B_1}(C_1)$ e assim G admite uma decomposição como segue:

$$
\begin{aligned}
G &= A_1 \amalg_{C_1} B_1 \\
&= A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_{A_1}(C_1) \amalg_{C_1} B_1 \\
&= A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_{A_1}(C_1) \amalg_{C_1} N_{B_1}(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1 \\
&= \boxed{A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} (N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1)}.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

G se decompõe como um produto livre pro-p com $N_{A_1}(C_1)$ como o subgrupo amalgamado.

Por outro lado se $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ é uma HNN-extensão, pela Proposição 1.5.1 o normalizador $N_G(C_1)$ é um produto livre amalgamado $N_G(C_1) = N_{A_1}(C_1) \amalg_{C_1} N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$, pegamos $C_1^{t_1} = C'$, então temos que:

$$\boxed{G = HNN(A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1), N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1), t_1).} \tag{1.7}$$

De fato, temos que a relação $(N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1))^{t_1} = N_{A_1}(C')$ ocorre se somente se $(C_1)^{t_1} = C'$. Por essa razão podemos tirar o $N_G(C_1)$ do grupo base e chegamos na seguinte apresentação $\overline{\langle A_1, t_1 : (C_1)^{t_1} = C' \rangle} = G$.
Se $N_G(C_1) = HNN(N_{A_1}(C_1), C_1, t_1)$ uma HNN-extensão assim o grupo ficaria:

$$\begin{aligned} G &= HNN(A_1, C_1, t_1) \\ &= \overline{\langle A_1, t_1 \mid C_1^{t_1} = C_1 \rangle} \\ &= A_1 \amalg_{C_1} C_1 \times \overline{\langle t_1 \rangle} \\ &= A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_{A_1}(C_1) \amalg_{C_1} C_1 \times \overline{\langle t_1 \rangle} \\ &= A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} HNN(N_{A_1}(C_1), C_1, t_1) \\ &= \boxed{A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1)} \end{aligned} \tag{1.8}$$

No primeiro caso G se decompõe como uma HNN-extensão com grupo associado $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$ e no ultimo caso o grupo G se decompõe como um produto livre pro-p com $N_{A_1}(C_1)$ como o subgrupo amalgamado. $\square$

Capítulo 2

$\mathbb{Z}_p$-Decomposições

Nesse capítulo vamos mostrar todos os resultados principais que obtemos na pesquisa. Vamos começar definindo que é uma $\mathbb{Z}_p$-decomposição, quais são os elementos que vamos pesquisar em nessa tese. Além disso, na primeira seção vamos dar alguns resultados gerais que conseguimos provar sobre as $\mathbb{Z}_p$-decomposições. Logo na Seção 2.2 mostramos um dos objetivos da nossa tese, o Teorema 2.2.2 que prova que duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições não podem ser Elíptica-Hiperbólica. Na parte final deste capítulo, na Seção 2.3 provamos o que acontece quando duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições são Hiperbólica-Hiperbólica, que era nosso outro objetivo principal; aqui conseguimos mostrar que o grupo G acaba sendo o mesmo normalizador de nosso grupo pro-cíclico sobre o qual o grupo se decompõe, sempre que esse normalizador não seja pro-cíclico. Esse resultado é dividido em duas subseções, a Subseção 2.3.1 quando o número primo $p > 2$ foi provado no Teorema 2.3.5 e outra a subseção 2.3.2 quando $p = 2$ que foi provado no Teorema 2.3.13.

Definição 2.0.1. Sejam G um grupo pro-p, C_1 e C_2 subgrupos de G isomorfos a $\mathbb{Z}_p$, o completamento pro-p do grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros (consultar [RZ00b, Seção 3.2]). Definimos uma $\mathbb{Z}_p$-*decomposição de* G como uma decomposição em um produto pro-p livre não fictício com um subgrupo infinito pro-cíclico amalgamado ou como uma HNN-extensão própria pro-p com um subgrupo infinito pro-cíclico associado.

Definição 2.0.2. Suponha que G é um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p T, dizemos que um elemento g é elíptico em T se estabiliza um vértice em T, e caso contrario dizemos que g é hiperbólico em T.

Definição 2.0.3. Consideremos duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições para G:

- $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$;
- $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$.

Em que $C_i = \overline{\langle c_i \rangle}$, para $i \in \{1, 2\}$. Considere T_1 a árvore pro-p padrão correspondente à primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição, similarmente T_2 a árvore pro-p padrão correspondente à segunda $\mathbb{Z}_p$-decomposição. Agora vamos dizer que as duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições dadas para G são:

- Elíptica-Elíptica: Se c_1 é elíptico em T_2 e c_2 é elíptico em T_1.
- Hiperbólica-Hiperbólica: Se c_1 é hiperbólico em T_2 e c_2 é hiperbólico em T_1.
- Hiperbólica-Elíptica: Se c_1 é hiperbólico em T_2 e c_2 é elíptica em T_1.

Observação 2.0.4. Suponha que temos a seguinte $\mathbb{Z}_p$-decomposição $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ para um grupo pro-p G. Suponha que c_2 é hiperbólico em T_1, mostraremos que $C_2 = \overline{\langle c_2 \rangle} \cong \mathbb{Z}_p$ age livremente sobre T_1. Vamos provar com absurdo. Consideremos que $C_2 \cap G_v \neq 1$ para algum $v \in V(T_1)$, i.e. $T_1^{(C_2 \cap G_v)} \neq \emptyset$ o que diz que $T_1^{(C_2 \cap G_v)}$ é uma p-árvore (ver Definição 1.3.4). Além disso, como $C_2 \cong \mathbb{Z}_p$, então temos que $C_2/(C_2 \cap G_v)$ é finito, e age naturalmente sobre a p-árvore $T_1^{(C_2 \cap G_v)}$. Então temos que $(T_1^{(C_2 \cap G_v)})^{C_2/(C_2 \cap G_v)} \neq \emptyset$ (pois cada grupo finito fixa um vértice pelo Teorema 1.3.11), i.e. que $\emptyset \neq (T_1^{(C_2 \cap G_v)})^{C_2/(C_2 \cap G_v)} = T_1^{C_2}$, o que é absurdo, pois c_2 é hiperbólico em T_1.

2.1 Amalgamação pro-cíclica

Nessa primeira parte do capítulo vamos considerar G um grupo pro-p que admite a seguinte $\mathbb{Z}_p$-decomposição $G = A \amalg_C B$ (resp. $G = HNN(A, C, t)$) como um produto pro-p livre amalgamado ou uma HNN-extensão. Agora se assumimos que o normalizador $N_G(H)$ é pro-cíclico para qualquer subgrupo aberto não trivial H de C, conseguimos provar no Corolário 2.1.4 que se $G = A \amalg_C B$ ou $G = HNN(A, C, t)$ a ação sobre sua árvore padrão é 2-acilíndrica. Antes disso vamos provar uma proposição, para a que recordaremos uma definição.

Definição 2.1.1. Seja G um grupo pro-p e H um subgrupo de G. Dizemos que H é *malnormal em G se $H \cap H^g = 1$, para qualquer $g \in G \setminus H$.*

Proposição 2.1.2. *Seja* $G = A\amalg_C B$ *(resp.* $G = HNN(A, C, t)$*) uma* $\mathbb{Z}_p$*-decomposição de* G*. Suponha que* $N_G(H)$ *é pro-cíclico para qualquer* H *subgrupo aberto não trivial de* C*. Então* C *é malnormal em* A *ou* B *(resp.* C *ou* C^t *é malnormal em* A*).*

Demonstração. Vamos provar por contrapositiva. Supor que C não é malnormal nem em A nem em B (resp. C e C^t não são malnormais em A).

Caso 1: Se $G = A \amalg_C B$. Como C não é malnormal nem A nem B, existem $a \in A - C$, $b \in B - C$ tal que $C^a \cap C \neq 1 \neq C \cap C^b$. Então onde $(C^a \cap C)^a \leq C^a$, e $(C^b \cap C)^b \leq C^b$, pelo Lema 1.6.2, $a \in N_A(C^a \cap C)$ e $b \in N_B(C \cap C^b)$.

Consideremos $H = C \cap C^a \cap C^b$, observe que $[C : H] = [C : (C \cap C^a)][(C \cap C^a) : H]$ é finito. De fato, lembre que $(C \cap C^b)$ é aberto em C, pois $[C : (C \cap C^b)]$ é finito. Então $C \cap C^a \cap C^b = C \cap C^a \cap (C \cap C^b)$ é aberto em $(C \cap C^a)$. Assim $H = C \cap C^a \cap C^b \neq 1$ pela Proposição 1.6.1 (pois C é pro-cíclico e o índice de H em C é finito).

Como H é um subgrupo não trivial de C e lembre que $H^a = C \cap C^a \cap C^{ba} \leq C$ deduzimos pelo Lema 1.6.2 que $a \in N_A(H)$ e $a \notin H$ (pois se $a \in H \leq C$, e sabemos que $a \in A - C$), similarmente para $H^b = C \cap C^{ab} \cap C^b \leq C$ temos que $b \in N_B(H)$ com $b \notin H$. Pela Proposição 1.5.1 $N_G(H) = N_A(H) \amalg_C N_B(H)$. Portanto $N_G(H)$ não é pro-cíclico.

Caso 2: Agora suponha que $G = HNN(A, C, t)$. Como C, C^t não são malnormais em A, existem $a_1 \in A - C$, $a_2 \in A - C^t$ tal que $C^{a_1} \cap C$ nem $C^{ta_2} \cap C^t$ são triviais. Então pelo Lema 1.6.2 $a_1 \in N_A(C \cap C^{a_1})$, pois $(C \cap C^{a_1})^{a_1}$, $(C \cap C^{a_1})$ são subgrupos de C^{a_1}. Analogamente podemos ver que $a_2 \in N_A(C^{ta_2} \cap C^t)$, e assim $a_2^{t^{-1}} \in N_{A^{t^{-1}}}(C^{a_2^{t^{-1}}} \cap C)$.

Pegando $H = C \cap C^{a_1} \cap C^{a_2^{t^{-1}}}$. Note que $[C : H] = [C : (C \cap C^{a_1})][(C \cap C^{a_1}) : H]$ é finito. De fato, considerando o isomorfismo de C^t para C definido como o conjugado sobre t^{-1}, temos que são isomorfos os seguintes subgrupos $(C^{ta_2} \cap C^t) \cong (C^{ta_2} \cap C^t)^{t^{-1}} = (C^{a_2^{t^{-1}}} \cap C)$, e como $(C^{ta_2} \cap C^t)$ é aberto em C^t, então $(C^{a_2^{t^{-1}}} \cap C)$ é aberto em C. Assim podemos concluir que $C \cap C^{a_1} \cap C^{a_2^{t^{-1}}}$ é aberto em $(C \cap C^{a_1})$. Como $[C : H] < \infty$, e C é pro-cíclico $H = C \cap C^{a_1} \cap C^{a_2^{t^{-1}}} \neq 1$ pela Proposição 1.6.1.

Observe que $H^{a_1} = C \cap C^{a_1} \cap C^{a_2^{t^{-1}} a_1} \leq C$ e $H \leq C$. Pelo Lema 1.6.2 temos $a_1 \in N_A(H)$. Além disso, $H^{a_2^{t^{-1}}} = C \cap C^{a_1 a_2^{t^{-1}}} \cap C^{a_2^{t^{-1}}} \leq C \leq A^{t^{-1}}$ e $H \leq C \leq A^{t^{-1}}$, e logo

$(a_2)^{t^{-1}} \in N_{A^{t^{-1}}}(H)$ pelo Lema 1.6.2. Agora pela Proposição 1.5.1, o normalizador $N_G(H)$ é um produto pro-p livre amalgamado

$$N_G(H) = N_A(H) \amalg_C N_{A^{t^{-1}}}(H)$$

ou uma HNN-extensão pro-p

$$N_G(H) = HNN(N_A(H), C, t).$$

No primeiro caso observemos que $a_1 \in N_A(H)$, e $a_1 \notin H$. Além disso, $(a_2)^{t^{-1}} \in N_{A^{t^{-1}}}(H)$, e $a_2^{t^{-1}} \notin H$ (pois se $a_2^{t^{-1}} \in H \leq C$, então $a_2 \in C^t$, o que é um absurdo porque $a_2 \in A - C^t$) vemos que o normalizador:

$$N_G(H) = N_A(H) \amalg_C N_{A^{t^{-1}}}(H)$$

não é pro-cíclico. Agora para o segundo caso, quando $N_G(H) = HNN(N_A(H), C, t)$. Observe que $a_1 \in N_A(H)$, com $a_1 \in A - C$ (logo $a_1 \in A - H$) por isso o seguinte normalizador:

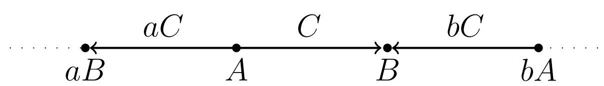
$$N_G(H) = HNN(N_A(H), C, t)$$

não é pro-cíclico. □

Definição 2.1.3. A ação de um grupo pro-p G sobre uma árvore pro-p T é chamada *k-acilíndrica*, para k uma constante, se para qualquer elemento g não trivial do grupo G, a subárvore pro-p T^g de pontos fixos (consultar em Definição 1.3.4) tem diâmetro no máximo k, i.e, que T^g tem no máximo k arestas.

Corolário 2.1.4. *Seja G um grupo pro-p tal que $G = A \amalg_C B$ ou $HNN(A, C, t)$, com $C \cong \mathbb{Z}_p$, é uma $\mathbb{Z}_p$-decomposição de G. Suponha que $N_G(H)$ é pro-cíclico para qualquer subgrupo aberto não trivial H de C. Então a ação de G sobre a sua p-árvore padrão $S(G)$ dessa decomposição é 2-acilíndrica.*

Demonstração. Supondo que $G = A \amalg_C B$, consideremos um elemento não trivial $g \in G$. Por absurdo vamos considerar que g estabiliza no minimo 3 arestas, então pelo Corolário 1.3.5 tem arestas consecutivas e_1, e_2, e_3 estabilizadas por g. Logo transladando se precisar podemos assumir que $e_2 = 1 \cdot C$. Assim pela definição da árvore pro-p padrão para produto livre pro-p amalgamado temos que $e_1 = a \cdot C$ e $e_3 = b \cdot C$, para algum $a \in A - C$, $b \in B - C$.

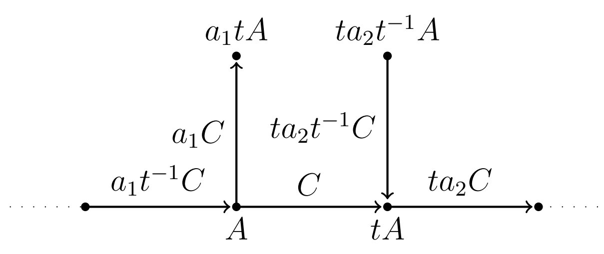


Observe que os estabilizadores das arestas e_1, e_2, e e_3 são $G_{e_1} = C^{a^{-1}}$, $G_{e_2} = C$, e $G_{e_3} = C^{b^{-1}}$ respetivamente. Então temos que: $g \in C^{a^{-1}} \cap C \cap C^{b^{-1}} = 1$. Um absurdo pois pela Proposição 2.1.2 o subgrupo C é malnormal em A ou B. Por tanto podemos concluir que a ação de G é 2-acilíndrica.

Agora suponha que $G = HNN(A, C, t)$ uma HNN-extensão pro-p, se C e C^t são conjugados em A. Pela Proposição 1.5.1 o normalizador $N_G(C) = HNN(N_A(C), C, t)$. Sabemos que $H \leq C$ e que $H^t \leq C^t = C$, assim $t \in N_G(H)$ pelo Lema 1.6.2. Então $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p \cong H \rtimes \overline{\langle t\rangle} = \overline{\langle H, t\rangle} \leq N_G(H) = HNN(N_A(H), C, t)$. O qual é um absurdo, pois pela hipótese $N_G(H)$ é pro-cíclico.

Por outro lado $C \cap C^{at^{-1}} = 1$ para algum $a \in A$. De fato, se $C \cap C^{at^{-1}} \neq 1$, sabemos que $(C \cap C^{at^{-1}}) \leq C^{at^{-1}}$ e $(C \cap C^{at^{-1}})^{at^{-1}} \leq C^{at^{-1}}$. Logo pelo Lema 1.6.2 temos que $at^{-1} \in N_G(C \cap C^{at^{-1}})$ e assim $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p \cong \overline{\langle (C \cap C^{at^{-1}}), at^{-1}\rangle} \leq N_G(C \cap C^{at^{-1}})$. portanto $N_G(C \cap C^{at^{-1}})$ não é pro-cíclico o que é um absurdo pela hipótese.

Como $C \cap C^{at^{-1}} = 1$ para $a \in A$. Pela Proposição 1.5.1 o normalizador de C é $N_G(C) = N_A(C) \amalg_C N_{A^{t^{-1}}}(C)$. Fazendo um raciocínio similar ao caso pro-p amalgamado, podemos tomar $g \in G$ um elemento não trivial, tal que g estabilize no minimo 3 arestas. Então de novo pelo Corolário 1.3.5 tem arestas consecutivas e_1, e_2, e_3 estabilizadas por g. Logo transladamos se for preciso e podemos assumir que $e_2 = 1 \cdot C$. Assim pela definição da árvore pro-p padrão para HNN-extensão pro-p temos que $e_1 = a_1 t^{-\delta} \cdot C$ e $e_3 = ta_2 t^{-\epsilon} \cdot C$, para $\delta, \epsilon \in \{0, 1\}$, e $a_1 t^{-\delta}, ta_2 t^{-\epsilon} \notin C$.



Sabemos que $C \cap C^{at^{-1}} = 1$ para qualquer $a \in A$ (observe que $C^{ta} \cap C = 1$ para qualquer $a \in A$). Também temos que $G_{e_1} = C^{t^{\delta} a_1^{-1}}$, $G_{e_2} = C$, e $G_{e_3} = C^{t^{\epsilon} a_2^{-1} t^{-1}}$ são os estabilizadores das arestas e_1, e_2 e e_3 respectivamente. Observe que quando $\epsilon = 0$, temos que: $C^{t^\delta a_1^{-1}} \cap C \cap C^{a_2^{-1}t^{-1}} = 1$ e quando $\delta = 1$, $C^{ta_1^{-1}} \cap C \cap C^{t^\epsilon a_2^{-1}t^{-1}} = 1$.

Pela Proposição 2.1.2 se C é malnormal em A, temos que $C \cap C^a = 1$ para todo $a \in A - C$. Então para quando $\delta = 0$, ocorre que $C^{a^{-1}} \cap C \cap C^{t^\epsilon a_2^{-1}t^{-1}} = 1$. Assim podemos dizer que quando C é malnormal em A

$$g \in G_{e_1} \cap G_{e_2} \cap G_{e_3} = C^{t^\delta a_1^{-1}} \cap C \cap C^{t^\epsilon a_2^{-1}t^{-1}} = 1,$$

que é um absurdo, por tanto a ação de G é 2-acilíndrica.

Por outro lado se C^t é malnormal em A, então C é malnormal em $A^{t^{-1}}$, i.e, $C \cap C^{a^{t^{-1}}} = 1$, para todo $a^{t^{-1}} \in A^{t^{-1}} - C$. Assim quando $\epsilon = 1$, temos que $C^{t^\delta a_1^{-1}} \cap C \cap C^{ta_2^{-1}t^{-1}} = 1$. Logo

$$g \in G_{e_1} \cap G_{e_2} \cap G_{e_3} = C^{t^\delta a_1^{-1}} \cap C \cap C^{t^\epsilon a_2^{-1}t^{-1}} = 1,$$

que é um absurdo, por tanto a ação de G é 2-acilíndrica.

□

2.2 Excluindo $\mathbb{Z}_p$-Decomposição Hiperbólica-Elíptica

Nessa seção vamos provar um dos resultados principais, que é a versão pro-p do Teorema 2.1 de [RS97], o resultado mostra que duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições não podem ser Hiperbólica-Elíptica. Mostramos a prova no Teorema 2.2.2. Para conseguir provar o resultados tivemos que procurar uma ideia diferente que no caso abstrato. Pois no caso abstrato se usa fortemente o Teorema da estrutura [S80, Teorema 13] e na versão pro-p não sempre é certo esse teorema.

O seguinte resultado que vamos provar vai ajudar para obter um dos objetivos principais desta tese.

Proposição 2.2.1. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que admite uma $\mathbb{Z}_p$-decomposição $G = A \amalg_C B$ (resp.$G = HNN(A, C, t)$). Se A admite uma decomposição como produto pro-p livre não trivial tal que C esta contido em um conjugado de um fator livre de A (resp. C^t também está contido em um conjugado de um fator livre de A). Então G também se decompõe como um produto pro-p livre não trivial.*

Demonstração. Considerando um espaço profinito I suponha que $A = \coprod_{i \in I} \mathcal{A}(i)$ é um produto livre pro-p não trivial. Consideremos $C \leq \mathcal{A}^a(k)$ para algum $k \in I$, e $a \in A$, i.e. $C^{a^{-1}} \leq \mathcal{A}(k)(\leq A)$ podemos assumir sem perda de generalidade que $C \leq \mathcal{A}(k)$ com $k \in I$. De fato, com a mesma notação que na Seção 1.1 temos que:

$$G = A \amalg_C B = \langle A, B \mid rel(A),\ rel(B),\ f_1(h) = f_2(h),\ h \in C\rangle, \tag{2.1}$$

ou

$$G = HNN(A, C, t) = \langle A, t \mid rel(A), h^t = f(h), h \in C\rangle. \tag{2.2}$$

Se G é um produto livre pro-p amalgamado ou uma HNN-extensão respectivamente. Portanto por Observação 1.1.4 podemos assumir sem perda de generalidade que $C \leq \mathcal{A}(k)$. Para o caso da HNN-extensão podemos assumir também sem perda de generalidade que C^{ta} para algum $a \in A$, está em algum fator livre de A. A explicação é similar como para C (tendo em conta que mudamos a letra estável t por ta).

Se $G = A \amalg_C B$, podemos apresentar o grupo G como:

$$\begin{aligned} G &= (\coprod_{i \in I} \mathcal{A}(i)) \amalg_C B \\ &= (\coprod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathcal{A}(i) \amalg \mathcal{A}(k)) \amalg_C B \\ &= (\coprod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathcal{A}(i)) \amalg (\mathcal{A}(k) \amalg_C B). \end{aligned}$$

Vemos que o G pode se decompor em produto pro-p livre não trivial, i.e,

$$G = (\coprod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathcal{A}(i)) \amalg J,$$

tomando $J = \mathcal{A}(k) \amalg_C B$ que sabemos que não é trivial, e que $I \neq \{k\}$, portanto $\coprod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathcal{A}(i) \neq 1$.

Suponha agora que $G = HNN(A, C, t)$. Como C^t está contido em um fator livre de A, existe $j \in I$ tal que C^t está em $\mathcal{A}(j)$. Então o grupo G pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
G &= HNN(A, C, t) \\
&= HNN(\coprod_{i \in I} \mathcal{A}(i), C, t) \\
&= HNN((\coprod_{i \in I \setminus \{j,k\}} \mathcal{A}(i)) \amalg (\mathcal{A}(j) \amalg \mathcal{A}(k)), C, t) \\
&= (\coprod_{i \in I \setminus \{j,k\}} \mathcal{A}(i)) \amalg HNN(\mathcal{A}(j) \amalg \mathcal{A}(k), C, t).
\end{aligned}
$$

Se $I \neq \{j,k\}$ então $\coprod_{i \in I \setminus \{j,k\}} \mathcal{A}(i) \neq 1$ e vemos que o G pode ser escrito como um produto pro-p livre não trivial $G = (\coprod_{i \in I \setminus \{j,k\}} \mathcal{A}(i)) \amalg K$, onde $K = HNN(A(j) \amalg A(k), C, t)$.

Por outro lado suponha que $I = \{j,k\}$, i.e. $G = HNN(\mathcal{A}(j) \amalg \mathcal{A}(k), C, t)$. Assim concluímos que $j \neq k$, porque se $j = k$ então $A = \mathcal{A}(j) = \mathcal{A}(k)$. O que é um absurdo, pois estamos assumindo que a decomposição $A = \coprod_{i \in I} \mathcal{A}(i)$ é um produto livre pro-p não trivial. Então temos:

$$
\begin{aligned}
G &= HNN(\mathcal{A}(j) \amalg \mathcal{A}(k), C, t) \\
&= \overline{\langle \mathcal{A}(j), \mathcal{A}(k), t : rel(\mathcal{A}(j)), rel(\mathcal{A}(k)), h^t = f(h), h \in C \rangle} \\
&= \overline{\langle \mathcal{A}^{t^{-1}}(j), \mathcal{A}(k) : rel(\mathcal{A}(j)), rel(\mathcal{A}(k)), h = (f(h))^{t^{-1}}, h \in C \rangle} \amalg \overline{\langle t \rangle} \\
&= \mathcal{A}^{t^{-1}}(j) \amalg_C \mathcal{A}(k) \amalg \overline{\langle t \rangle}
\end{aligned}
$$

portanto G é um produto livre pro-p não trivial.

$\square$

O seguinte resultado é a versão pro-p análoga do Teorema 2.1 de [RS97], que é um de nossos objetivos, e um dos Teoremas mais importantes nesta tese.

Teorema 2.2.2. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não admite decomposição como produto livre pro-p não trivial. Então quaisquer duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições de G são Elíptica-Elíptica ou Hiperbólica-Hiperbólica.*

Demonstração. Suponha que temos duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições de G que são $G = A_i \amalg_{C_i} B_i$ ou $G = HNN(A_i, C_i, t_i)$ para $i = 1, 2$. Vamos fazer a prova usando contradição. Suponha que o caso Hiperbólico-Elíptico é possível. Seja T_1, T_2 as p-árvores padrões das decomposições respectivamente e suponha que c_1 é hiperbólico em T_2 e c_2 é elíptico em T_1.

Como c_2 é elíptica em T_1, C_2 estabiliza um vértice de T_1, i.e. a subárvore de pontos fixos $T_1^{C_2} \neq \emptyset$. Sabemos que A_2 age sobre a árvore pro-p T_1, com estabilizadores de arestas triviais. Pois, esses estabilizadores de arestas são conjugados de C_1 e c_1 é hiperbólico em T_2. Como A_2 é finitamente gerado (pelo Lema 1.1.5) agindo sobre uma árvore pro-p T_1 com A_2-estabilizadores de arestas triviais. pelo Teorema 1.3.16 se A_2 não tem ponto fixo global, então A_2 se decompõe como produto livre pro-p não trivial. Pelo Teorema 1.4.7 C_2 (resp. $C_2^{t_2}$) esta em algum conjugado dos grupos vértices (fatores do produto livre). Agora pela Proposição 2.2.1 se A_2 decompõe sobre produto livre não trivial temos que G também se decompõe como um produto livre pro-p não trivial. Que é absurdo pela hipótese. Assim A_2 deveria fixar um vértice v em $V(T_1)$. Agora vamos considerar os seguintes casos possíveis.

Caso 1: $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$.
Igual que acima para A_2, temos que B_2 deveria estabilizar um vértice w em T_1. De fato, caso contrario B_2 age sobre T_1 com estabilizadores de arestas triviais. Logo pela Proposição 2.2.1 se B_2 decompõe sobre produto livre não trivial teríamos um absurdo. Assim se a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição é um produto livre amalgamado pro-p, temos que A_2, B_2 estão contidos em algum conjugado de A_1 ou B_1. Digamos sem perda de generalidade que $A_2 \leq A_1$, note que se a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição for uma HNN-extensão, não teria a opção de B_1. Então afirmamos que o B_2 também tem que estar em A_1. Pois se ele não estiver em A_1 temos que os vértices $v \neq w$ são diferentes, e pelo Corolário 1.3.5 $A_2 \cap B_2 \leq G_v \cap G_w \leq G_e = C_1^g$ para algum $g \in G$, i.e, $A_2 \cap B_2 \leq C_1^g$. O que é absurdo dado que $C_2 \leq A_2 \cap B_2$. Portanto A_2, $B_2 \leq A_1$, absurdo porque $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2 \leq A_1$.

Caso 2: $HNN(A_2, C_2, t_2)$.
Lembrando que A_2 fixa um vértice em T_1, então podemos dizer que $A_2^{t_2}$ fixa um vértice em T_1. Assim se a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição é um produto livre amalgamado pro-p (resp. uma HNN extensão), podemos dizer que $A_2 \leq A_1$ ou $A_2 \leq B_1$ (resp. $A_2 \leq A_1$). Sem perda de generalidade suponha que $A_2 \leq A_1$. Vamos provar agora que t_2 este contido em A_1. Pelo absurdo, para isso vamos assumir que $t_2 \notin A_1$. Sabemos que C_2 e $C_2^{t_2}$ estão em $A_2 \leq A_1$. Assim temos que $C_2 \leq (A_1)^{t_2^{-1}}$, por

tanto $C_2 \leq A_1 \cap A_1^{t_2^{-1}}$ e pelo Teorema 1.4.14 $C_2 \leq A_1 \cap A_1^{t_2^{-1}} < C_1^a$, para algum $a \in A_1$. Observe que usamos Teorema 1.4.14 (b) e (c) para o caso que a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição seja um produto livre amalgamado pro-p e uma HNN-extensão respectivamente. Logo temos que $C_2^{a^{-1}} \in C_1$, que é absurdo, porque c_1 é hiperbólico em T_2 (C_1 age livremente sobre T_2). Finalmente A_2 e t_2 estão em A_1, e como $G = HNN(A_2, C_2, t_2) = \overline{\langle A_2, t_2 \rangle} < A_1$, i.e., $G < A_1$, ao final uma contradição.

Portanto as únicas opções que tem duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições são elas ser Hiperbólica-Hiperbólica ou Elíptica-Elíptica. $\square$

2.3 $\mathbb{Z}_p$-Decomposição Hiperbólica-Hiperbólica

Nosso objetivo principal nessa seção é provar o caso pro-p do Teorema 3.6 de [RS97]. Vamos fixar duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição de G e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ a segunda $\mathbb{Z}_p$-decomposição de G. Para o caso abstrato temos a existência de um eixo quando o elemento de um grupo age hiperbolicamente sobre uma árvore. Agora para o caso pro-p temos pela Proposição 1.3.6 a existência de uma sub-árvore na qual o subgrupo gerado pelo elemento hiperbólico age irredutivelmente. Por essa razão tivemos que procurar uma outra ideia completamente diferente ao caso abstrato. Consideremos T_1 a árvore pro-p padrão da primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição hiperbólica de G. Denotamos por T_2 a árvore pro-p padrão da segunda $\mathbb{Z}_p$-decomposição hiperbólica de G. Note que se c_1 é um elemento hiperbólico sobre T_2, pela Proposição 1.3.6 existe uma única sub-árvore pro-p C_1-invariante minimal D_1 contida na árvore T_2, i.e, que C_1 age irredutivelmente sobre D_1.

Para o caso abstrato E. Rips e Z. Sela em [RS97] consideram o normalizador do subgrupo gerado pelo elemento hiperbólico que chamaram o anti-centralizador desse elemento hiperbólico. Para o caso pro-p vamos considerar o normalizador do subgrupo (topologicamente) gerado pelo elemento hiperbólico. Vejamos que o normalizador $N_G(C_1)$ age sobre D_1. De fato, considere $n \in N_G(C_1)$, logo $C_1 = C_1^{n^{-1}}$ age sobre nD_1, temos que $nD_1 = D_1$. Assim D_1 também é $N_G(C_1)$-invariante. Como $C_1 \triangleleft_c N_G(C_1)$ e C_1 age irredutivelmente sobre D_1 da Observação 1.3.8 o normalizador $N_G(C_1)$ age irredutivelmente sobre D_1. Denotemos por K_{D_1} o núcleo da ação do $N_G(C_1)$ sobre D_1. Assim deduzimos que $N_G(C_1)/K_{D_1}$ age fiel e irredutivelmente sobre D_1. Além disso, observe que $D_1 \subseteq T_2$, então $K_{D_1} \leq C_2^g$ para algum $g \in G$. Podemos dizer então que $K_{D_1} \cong 1$ ou $K_{D_1} \cong \mathbb{Z}_p$. Similarmente temos que C_2 age sobre D_2 uma única sub-árvore C_2-invariante minimal contida em T_1 e todo o escrito anteriormente para C_1, D_1, e $N_G(C_1)$ vale para C_2, D_2, e $N_G(C_2)$ respetivamente.

Para provar a versão pro-p do Teorema 3.6 de [RS97] vamos dividir em duas subseções nas quais consideraremos $p > 2$ e $p = 2$.

2.3.1 $\mathbb{Z}_p$-Decomposição Hiperbólica-Hiperbólica, com $p > 2$

Nessa subseção vamos considerar $p > 2$. Nesse caso as ideias das provas são mais explícitas e, consequentemente, são mais elegantes.

A seguinte Proposição é a versão pro-p para $p > 2$ das Proposições 3.1 e 3.3 de [RS97]. De fato, o caso (i) da Proposição 2.3.1, seria a Proposição 3.1 de [RS97]; e o caso (ii) é a versão pro-p ($p > 2$) da Proposição 3.3 de [RS97]. Podemos notar que nossa versão é um pouco mais geral. Já que no caso abstrato se assume que c_1 e c_2 comutam; na nossa prova conseguimos que quando acontece o caso (ii), se tem que C_1 comuta com C_2 a menos de conjugação.

Proposição 2.3.1. *Suponha que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$, são duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica. Seja H_i um subgrupo não trivial de C_i. Então $N_G(H_i)$ é um dos seguintes grupos:*

(i) Grupo pro-cíclico infinito $\mathbb{Z}_p$;

(ii) Grupo pro-p abeliano $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Nesse caso temos que C_1 comuta com um conjugado de C_2.

Demonstração. Como $1 \neq H_1 \leq C_1$ age hiperbolicamente (portanto livremente) sobre T_2 a árvore pro-p da segunda $\mathbb{Z}_p$-decomposição. Pela Proposição 1.3.6, existe um $D_1' \subset T_2$, tal que H_1 age irredutivelmente. Assim da mesma forma $N_G(H_1)$ age irredutivelmente sobre D_1'. Suponha que K_1 é o núcleo da ação do $N_G(H_1)$ sobre D_1'. Logo pelo Teorema 1.3.12 temos que $N_G(H_1)/K_1$ tem uma das seguintes formas (pois $N_G(H_1)/K_1$ age fielmente e irredutivelmente sobre D_1' uma árvore pro-p):

- $N_G(H_1)/K_1 \cong \mathbb{Z}_p$, o grupo pro-cíclico infinito;
- $N_G(H_1)/K_1 \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, o grupo diedral infinito pro-2;

- $N_G(H_1)/K_1$ tem um subgrupo pro-2 livre não abeliano agindo livremente sobre D'_1.

O último não acontece pela Proposição 1.5.2. Dado que G age sobre T_2, na qual $\mathbb{Z}_p \cong H_1(\leq C_1)$ age sobre T_2 livremente. Dessa forma, é necessário analisar o que ocorre quando $N_G(H_1)/K_1$ é o grupo pro-cíclico infinito. Pois, como $p > 2$ $N_G(H_1)/K_1$ não pode ser o grupo diedral infinito pro-2. Agora onde $K_1 \leq C_2^g$, para algum $g \in G$, e temos então que $K_1 \cong J \leq \mathbb{Z}_p$.

Suponha que $K_1 = 1$, então temos (i). Isso quer dizer que $N_G(H_1)$ é o grupo pro-cíclico infinito $\mathbb{Z}_p$.

Suponha agora que $K_1 \cong \mathbb{Z}_p$. Como $N_G(H_1)/K_1 \cong \mathbb{Z}_p$, logo $N_G(H_1) \cong K_1 \rtimes \mathbb{Z}_p(\cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p)$. Note que $C_2^g, N_G(H_1) \leq N_G(K_1)$. Porque $K_1 \leq C_2^g$ e como $C_2^g \cong \mathbb{Z}_p$ é abeliano, C_2^g comuta com K_1, e particularmente normaliza o K_1. Além disso, observe que $K_1 \trianglelefteq N_G(H_1)$, o que quer dizer que $N_G(H_1)$ está contido em $N_G(K_1)$.

Por outro lado, observe que $K_1 \leq_o C_2^g$ portanto ele age livremente sobre T_1. Assim pela Proposição 1.3.6 existe uma p-árvore $D'_2 \subseteq T_1$, tal que K_1 age irredutivelmente sobre D'_2. Logo podemos dizer que $N_G(K_1)$ age irredutivelmente sobre D'_2. Note que $N_G(K_1)$ não pode agir fielmente sobre D'_2. Pois, se age fielmente, pelo Teorema 1.5.2 teríamos que $N_G(K_1)$ é o grupo pro-cíclico infinito, e como $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p \cong N_G(H_1) \leq N_G(K_1)$, que é um absurdo. Então existe um núcleo K não trivial da ação de $N_G(K_1)$ sobre D'_2. Quer dizer que pelo Teorema 1.5.2 $N_G(K_1)/K \cong \mathbb{Z}_p$, i.e. $N_G(K_1) \cong K \rtimes \mathbb{Z}_p$.

Vamos provar que $N_G(H_1)\cap K$ é um subgrupo não trivial. Sabemos que $N_G(K_1)/K \cong \mathbb{Z}_p$. Assim como $N_G(H_1)/(N_G(H_1) \cap K) \cong N_G(H_1)K/K \leq N_G(K_1)/K \cong \mathbb{Z}_p$, i.e. $N_G(H_1)/(N_G(H_1) \cap K) \leq \mathbb{Z}_p$. Se $N_G(H_1)/(N_G(H_1) \cap K) = 1$, temos que $N_G(H_1) \cap K = N_G(H_1) \neq 1$. Por outro lado, se $N_G(H_1)/(N_G(H_1) \cap K) \cong \mathbb{Z}_p$, observe que $N_G(H_1) \cap K \neq 1$. Pois, se $N_G(H_1) \cap K = 1$, então $N_G(H_1) \cong \mathbb{Z}_p$ o que é absurdo (porque $N_G(H_1) \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$). Portanto podemos dizer que o subgrupo $K \cap N_G(H_1)$ não é trivial. Sabemos que K é normal em $N_G(K_1)$. Desse modo $K \cap N_G(H_1)$ é normal em $N_G(H_1)$. Além disso, sabemos que K_1 é normal em $N_G(H_1)$. Como K_1 age livremente sobre D'_2, logo $K \cap K_1 = 1$. Então temos que: $K_1 \rtimes (K \cap N_G(H_1)) \cong \overline{\langle K_1, K \cap N_G(H_1)\rangle} \cong (K \cap N_G(H_1)) \rtimes K_1$, logo $\overline{\langle K_1, K \cap N_G(H_1)\rangle} = (K \cap N_G(H_1)) \times K_1$, i.e. K_1 centraliza $K \cap N_G(H_1)$.

Como temos que $N_G(K_1) \cong K \rtimes \mathbb{Z}_p$, mas $1 \neq K_1 \leq \mathbb{Z}_p$ centraliza $K \cap N_G(H_1)$ um subgrupo não trivial de K. Pelo Lema 1.6.3 concluímos que $N_G(K_1) \cong K \times \mathbb{Z}_p$. Dado que $N_G(H_1) \leq N_G(K_1)$, então $N_G(H_1) \cong K_1 \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Em particular, como $C_1 \cap C_2^g = 1$, $C_1 \leq N_G(H_1) \leq N_G(K_1)$, e $C_2^g \leq N_G(K_1)$, podemos observar que C_1 comuta com C_2^g. □

Na seguinte observação mostramos que quando supomos as mesmas hipóteses da Proposição 2.3.1 e se o normalizador do subgrupo C_1 não é pro-cíclico infinito, então o normalizador de C_1 é isomorfo à normalizador de um conjugado de C_2.

Observação 2.3.2. Note que com as hipóteses da Proposição 2.3.1 os normalizadores $N_G(C_1) \cong N_G(C_2^g)$ para algum $g \in G$ são isomorfos. Pois, suponha que $N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, então os subgrupos C_1 e C_2^g comutam, i.e. que o subgrupo $N_G(C_2^g)$ não é pro-cíclico, agora pela Proposição 2.3.1 temos que $N_G(C_2^g) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \cong N_G(C_1)$.

Proposição 2.3.3. *Consideremos duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$, para G um grupo pro-p, com A_1 abeliano não pro-cíclico. Então $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Note que pela Proposição 1.5.1 o normalizador $N_G(C_1)$ pode ser uma HNN-extensão $N_G(C_1) = HNN(N_{A_1}(C_1), C_1, t_1)$ ou um produto livre pro-p amalgamado $N_G(C_1) = N_{A_1}(C_1) \amalg_{C_1} N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$. Se o normalizador é uma HNN-extensão pro-p, então $N_G(C_1) = HNN(N_{A_1}(C_1), C_1, t_1) = HNN(A_1, C_1, t_1) = G$. Portanto pela Proposição 2.3.1 o normalizador não é pro-cíclico infinito, i.e. $G = N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.
Por outro lado vamos provar que o caso quando o normalizador é um produto livre pro-p amalgamado não é possível. De fato, se o normalizador é um produto livre pro-p amalgamado $N_G(C_1) = N_{A_1}(C_1) \amalg_{C_1} N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1) = A_1 \amalg_{C_1} A_1^{t_1^{-1}}$. Como A_1 é abeliano não pro-cíclico, então $A_1 \ncong \mathbb{Z}_p$. Logo vemos que é um produto livre amalgamado pro-p não fictício. Por conseguinte o normalizador $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico infinito, então a única opção (por Proposição 2.3.1) é que o $N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Mas $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ não pode ser um produto livre pro-p amalgamado não fictício.
□

O fato a seguir é de ajuda para provar um dos teoremas principais dessa tese, que é o Teorema 2.3.5 que faz referência à versão pro-p com $p > 2$ do Teorema 2.1 de [RS97].

Lema 2.3.4. Seja G um grupo pro-p finitamente gerado, tal que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ são duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica para G, tal que $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico. Suponha que $N_{A_1}(C_1) \neq A_1$. Então G se decompõe como um produto livre pro-p não trivial.

Demonstração. Vamos supor que a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição é $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ um produto livre amalgamado. Logo pelo Lema 1.6.5 G admite uma decomposição como (1.6) i.e:

$$G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} (N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1). \tag{2.3}$$

Por outro lado se $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ é uma HNN-extensão, então pelo Lema 1.6.5 o grupo G pode ser como (1.7) ou (1.8), e temos:

$$G = HNN(A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1), N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1), t_1) \tag{2.4}$$

ou que o grupo ficaria

$$G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1). \tag{2.5}$$

Sabemos que A_1 e $A_1^{t_1^{-1}}$ agem sobre T_2 com A_1-estabilizadores (resp. $A_1^{t_1^{-1}}$-estabilizadores) de arestas triviais. Pois a interseção de A_1 (resp. $A_1^{t_1^{-1}}$) com qualquer conjugado de C_2 é trivial (C_2 age livremente sobre a p-árvore padrão T_1). Além disso, C_1 age livremente sobre a árvore pro-p padrão T_2 (lembrando que T_2 é a p-árvore padrão da segunda $\mathbb{Z}_p$-decomposição). Logo pela Proposição 1.5.2 o normalizador $N_{A_1}(C_1)$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$) é pro-cíclico infinito. Note que $N_{A_1}(C_1)$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$) é hiperbólico em T_2 (pois se $N_{A_1}(C_1)$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$) é elíptico está em algum conjugado de A_2 ou também de B_2 depende o que seja a segunda $\mathbb{Z}_p$-decomposição. Que é um absurdo, porque c_1 é hiperbólico em T_2).

Observe que como $N_{A_1}(C_1) \neq A_1$, as decomposições de G da forma (2.3), (2.4) e (2.5), seriam $\mathbb{Z}_p$-decomposições. Logo pela Proposição 2.3.1 (*ii*) C_1 comuta com um conjugado de C_2. Pela Observação 1.1.4 o mostrado em (1.3) e (1.4), podemos dizer sem perda de generalidade que C_1 comuta com C_2, i.e. $C_2 \leq N_G(C_1)$. Por tanto C_2 é elíptico em S_1, onde S_1 é a árvore pro-p padrão de (2.3), (2.4) e (2.5).

Por conseguinte temos $\mathbb{Z}_p$-decomposições Elíptica-hiperbólica, e pelo Teorema 2.2.2, nosso grupo G se decompõe como um produto livre pro-p não trivial. $\square$

Observe que com as hipoestes do lema anterior e quando $G = HNN(A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1), N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1), t_1)$ não precisamos a hipótese de que $A_1 \neq N_{A_1}(C_1)$ para provar que G é um produto livre pro-p não trivial.

O seguinte Teorema é um dos objetivos principais dessa tese, pois seria a versão pro-p (quando $p > 2$) do Teorema 3.6 de [RS97]. Usando as hipótese da proposição anterior, conseguimos provar que quando o normalizador $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico infinito, então o grupo ambiente G é igual à normalizador $N_G(C_1)$.

Teorema 2.3.5. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não se decompõe como um produto livre pro-p não trivial. Sejam $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica para G. Suponha que $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico. Então $G = N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Vamos começar provando que a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição tem que ser uma HNN-extensão. De fato, como $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico, então $K_1 \neq 1$ (O núcleo da ação de $N_G(C_1)$ sobre $D_1 \subset T_2$). Então temos que $N_G(C_1)/K_1 \cong \mathbb{Z}_p$, i.e. $N_G(C_1) = HNN(K_1, K_1, t) \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p \cong HNN(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p, t)$. Observe, que $N_G(C_1)$ não pode ser escrita como um produto livre pro-p amalgamado fictício. Pois, se fosse escrita como um produto livre pro-p amalgamado fictício teríamos que $N_{A_1}(C_1) = C_1$ ou $N_{B_1}(C_1) = C_1$, quando G for um produto livre pro-p amalgamado. Agora se G for uma HNN-extensão teríamos $N_{A_1}(C_1) = C_1$ ou $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1) = C_1$. Sabemos que $C_2 \leq N_G(C_1)$ (pela Proposição 2.3.1), sem perda de generalidade se $N_{A_1}(C_1) = C_1$, então $C_2 \leq N_{B_1}(C_1) \leq B_1$ (resp. $C_2 \leq N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1) \leq A^{t_1^{-1}}$). O que é absurdo, dado que C_2 é hiperbólico em T_1.

Assim a decomposição de $N_G(C_1)$ não é um produto livre amalgamado fictício e pela proposição 1.5.1 a primeira $\mathbb{Z}_p$-decomposição de G tem que ser uma HNN-extensão $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ tal que $N_G(C_1) = HNN(N_{A_1}(C_1), C_1, t_1)$. Isso quer dizer que C_1 é normalizado por t_1. Assim pelo Lema 1.6.5 o grupo G pode ser reescrito como no caso (1.8), que seria como o seguinte produto livre pro-p amalgamado:

$$G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1).$$

Pelo Lema 2.3.4 o normalizador $N_{A_1}(C_1) = A_1$, portanto $G = N_G(C_1)$. Quer dizer que $G = N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ pela Proposição 2.3.1 (ii). (porque pela hipótese $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico).

□

Observe que a combinação do Teorema 2.3.5 com a Proposição 2.1.2 obtemos o seguinte Corolário:

Corolário 2.3.6. *Sob as hipóteses do Teorema 2.3.5, suponha que G é um grupo pro-p não abeliano. Então C_i é malnormal em A_i ou B_i (Resp. C_i ou $C_i^{t_i}$ é malnormal em A_i), $i \in \{1, 2\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.5 temos que $N_G(C_i)$ é pro-cíclico. Portanto pela Proposição 2.1.2, vemos que o resultado segue. □

Em seguida vamos descrever a ação de G um grupo pro-p não abeliano finitamente gerado G quando se descompõe em duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica. A ação do grupo G sobre a árvore pro-p padrão será 2-acilíndrica.

Teorema 2.3.7. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não é abeliano, e também não se decompõe como um produto pro-p livre não trivial. Sejam $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica de G. Então a ação do G sobre qualquer das suas duas árvore pro-p padrão $S(G)$ é 2-acilíndrica.*

Demonstração. Vamos provar por absurdo. Suponha que ação de G sobre T_1 não é 2-acilíndrica. Pelo Corolário 2.1.4 o normalizador $N_G(H)$ não é pro-cíclico para um subgrupo aberto não trivial H de C_1. Assim pela Proposição 2.3.1 (ii) temos que $N_G(H) = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ e que C_1 comuta com um conjugado de C_2. Portanto $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico (pois $C_1 \times C_2^g \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \leq N_G(C_1)$, para algum $g \in G$). Pelo Teorema 2.3.5, G é um grupo pro-p abeliano, contradizendo a hipótese. Isso prova que a ação de G sobre T_2 tem que ser 2-acilíndrica.

Analogamente, se supormos que a ação de G sobre T_2 não é 2-acilíndrica. Pelo Corolário 2.1.4 o normalizador $N_G(H)$ não é pro-cíclico para um subgrupo aberto não trivial H de C_2. Assim pela Proposição 2.3.1 (ii) temos que $N_G(H) = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ e que C_2 comuta com um conjugado de C_1. Portanto $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico (pois $C_2 \times C_1^g \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \leq N_G(C_2)$, para algum $g \in G$). Pelo Teorema 2.3.5, G é um grupo pro-p abeliano, contradizendo a hipótese. Isso prova que a ação de G sobre T_2 tem que ser 2-acilíndrica. □

2.3.2 $\mathbb{Z}_p$-Decomposição Hiperbólica-Hiperbólica, com $p = 2$

Nessa subseção vamos começar provando a versão pro-2 das Proposições 3.1 e 3.3 de [RS97]. Diferentemente da versão pro-p com $p > 2$ porque adicionalmente temos que trabalhar com um grupo diedral infinito pro-2, por isso é mais parecido com o caso abstrato.

Proposição 2.3.8. *Suponha que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$, são duas $\mathbb{Z}_2$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica. Seja H_i um subgrupo não trivial de C_i. Então $N_G(H_i)$ é isomorfo à um dos seguintes grupos:*

(i) Grupo pro-cíclico infinito $\mathbb{Z}_2$;

(ii) Grupo diedral pro-2 infinito $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

(iii) Grupo pro-2 abeliano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;

(iv) Garrafa de Klein pro-2 $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$;

(v) Produto semidireto $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, onde a ação de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ é por inversão, ou

(vi) Produto semidireto $(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demonstração. Similar que no começo da Proposição 2.3.1, como temos que $1 \neq H_1 \leq C_1$ age hiperbolicamente (por isso age livremente) sobre T_2 a árvore pro-2 padrão da segunda $\mathbb{Z}_2$-decomposição. Então pela Proposição 1.3.6, existe um $D_1' \subset T_2$, tal que H_1 age irredutivelmente sobre D_1'. Assim $N_G(H_1)$ age também irredutivelmente sobre D_1'. Suponha que K_1 é o núcleo da ação do $N_G(H_1)$ sobre D_1'. Pelo Teorema 1.3.12, temos que $N_G(H_1)/K_1$ satisfaz algum dos seguintes (pois $N_G(H_1)/K_1$ age fielmente e irredutivelmente sobre D_1'):

- $N_G(H_1)/K_1 \cong \mathbb{Z}_2$;
- $N_G(H_1)/K_1 \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \amalg \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- $N_G(H_1)/K_1$ tem um subgrupo pro-p livre não abeliano agindo livremente sobre D_1'.

O último não acontece pela Proposição 1.5.2. Dado que C_1 age livremente sobre T_2, e por consequente $H_1 \leq C_1$ age sobre T_2 livremente. Dessa forma, é necessário analisar o que ocorre quando $N_G(H_1)/K_1$ é o grupo pro-cíclico infinito, ou o grupo diedral infinito pro-2. Como $K_1 \leq C_2^g$, para algum $g \in G$, então que $K_1 \cong J \leq \mathbb{Z}_2$.

Suponha que $K_1 = 1$. Então o normalizador $N_G(H_1)$ é o grupo pro-cíclico infinito, ou o grupo diedral infinito pro-2. Assim temos (i) e (ii).

Agora vamos supor que $K_1 \neq 1$, logo $K_1 \cong \mathbb{Z}_2$.

Se $N_G(H_1)/K_1 \cong \mathbb{Z}_2$, então $N_G(H_1) = K_1 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$. Assim vamos provar que se o normalizador $N_G(H_1)$ não é abeliano então é uma garrafa de Klein pro-2.
De fato, se o normalizador $N_G(H_1)$ não é uma garrafa de Klein pro-2 nem um pro-2 abeliano. Quer dizer que se ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre K_1 não é invertível nem trivial, então a ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre K_1 é fiel (pois $Aut(K_1) \cong Aut(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Portanto $N_G(H_1)$ tem um único subgrupo pro-cíclico normal maximal. Como e K_1 é normal em $N_G(H_1)$. Então K_1 é normalizado por $N_G(H_1)$. Agora sabemos que $K_1 \leq C_2^g$ age sobre $D_2' \subset T_1$ (considerando D_2' a árvore pro-2 de T_1 sobre a qual K_1 age irredutivelmente), Por consequente podemos dizer que $N_G(H_1)$ age sobre D_2' irredutivelmente, mas não pode agir sobre D_2' fielmente. Já que se age fielmente teríamos pela Proposição 1.5.2 (2) que o normalizador $N_G(H_1)$ é o grupo pro-cíclico infinito ou o grupo infinito diedral pro-2; que é absurdo (dado que como $K_1 \neq 1$, o normalizador $N_G(H_1)$ é diferente de um grupo pro-cíclico infinito ou o grupo infinito diedral pro-2). Sabendo que $N_G(H_1)$ não age fielmente sobre D_2', temos um subgrupo não trivial K que é o núcleo da ação de $N_G(H_1)$ sobre D_2'. Note que $K \cap K_1 = 1$ (dado que K está contido em algum conjugado de C_1 e K_1 está em algum conjugado de C_2). Contradizendo a hipótese de que o normalizador $N_G(H_1)$ só tem um único subgrupo normal pro-cíclico maximal, pois $\mathbb{Z}_p \cong K \triangleleft N_G(H_1)$ (maximalidade note que pela Proposição 1.5.2 (2) $N_G(H_1)/K \cong \mathbb{Z}_2$, ou $N_G(H_1)/K \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Por isso concluímos que $N_G(H_1) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$ é isomorfo à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou à uma garrafa de Klein pro-2. Assim temos (iii) ou (iv).

Finalmente suponha que $N_G(H_1)/K_1 \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \amalg \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ é o diedral pro-2 infinito. Nesse caso temos que $N_G(C_1) = N_1 \amalg_{K_1} N_2$ com $[N_1 : K_1] = 2 = [N_2 : K_1]$ (note que o produto amalgamado é não fictício). Se $N_G(C_1)$ é livre de torção temos que $N_1 \cong \mathbb{Z}_2 \cong N_2$, e que $N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$. A ação não é trivial pois $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ não pode ser escrito como um produto amalgamado não fictício, por tanto o normalizador $N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$ uma garrafa de Klein pro-2 (pois se a ação não é trivial, então a ação é invertível, como foi explicado no paragrafo anterior). Assim temos de novo (iv).

Se N_1 e N_2 são diedral pro-2 infinitos, temos que:

$$\begin{aligned} N_G(C_1) &= (\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \amalg_{K_1} (\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &= (K_1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \amalg_{K_1} (K_1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &\cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

com a ação inversa de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sobre o $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, pois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ age sobre K_1 por inversão.

Por fim se algum N_i é um grupo pro-cíclico infinito e o outro N_i um grupo diedral pro-2, para $i = 1, 2$. Sem perda de generalidade suponha que $N_1 \cong \mathbb{Z}_2$ e $N_2 \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. temos então que o normalizador é

$$N_G(C_1) = \mathbb{Z}_2 \amalg_{K_1} (\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \overline{\langle a, b, c : a^b = a,\ c^2 = 1,\ b^c = b^{-1} \rangle}.$$

Note que $\overline{\langle b \rangle} = K_1 \cong \mathbb{Z}_2$ e o fecho normal de $N_1 = \overline{\langle a \rangle} \cong \mathbb{Z}_2$ é $\overline{\langle a \rangle}^{N_G(C_1)} = \overline{\langle a^a, a^b, a^c \rangle} = \overline{\langle a, a, a^c \rangle} = \overline{\langle a, a^c \rangle} \cong \mathbb{Z}_2 \amalg_{K_1} \mathbb{Z}_2$ com $[\mathbb{Z}_2 : K_1] = 2 = [\mathbb{Z}_2 : K_1]$. Assim $\overline{\langle a \rangle}^{N_G(C_1)} \cong \mathbb{Z}_2 \amalg_{K_1} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$ uma garrafa de Klein. Por tanto $N_G(C_1) = (\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ um produto semidireto, e logo temos (vi).

Por ultimo note que N_i para $i = 1, 2$ não pode ser $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pois suponha sem perda de generalidade que $N_1 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isso implicaria que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = K_1 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \overline{\langle k_1 \rangle} \times \overline{\langle a \rangle}$, assim N_1 age sobre a p-árvore T_1, então pela Proposição 1.3.6 existe D tal que N_1 age sobre D, se $|D| = 1$ temos que $K_1 \leq N_1$ estabiliza um vértice em T_1, é absurdo pois K_1 age hiperbólico sobre T_1. Por outro lado supondo que $|D| > 1$, temos que N_1 age sobre D irredutivelmente, pelo Teorema 1.3.10 $\overline{\langle a \rangle}$ está em K o núcleo da ação de N_1 sobre D, assim K está contido em algum conjugado de C_1, isso é que $K = 1$ ou $K \cong \mathbb{Z}_2$; que é um absurdo pois sabemos que $\overline{\langle a \rangle} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ está em K, contradizendo que K é livre de torção. Por tanto $N_1 \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Observação 2.3.9. Note que os casos (iv), (v) e (vi) são pro-2 completamentos dos grupos $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ e $(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ respectivamente.

Corolário 2.3.10. *Sob as hipóteses da Proposição 2.3.8, se o normalizador $N_G(H_i)$ é livre de torção. Então o normalizador $N_G(H_i)$ é um dos seguintes grupos:*

(i) O grupo pro-cíclico infinito $\mathbb{Z}_2$*;*

(ii) O grupo pro-2 abeliano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(iii) A Garrafa de Klein pro-2 $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Os dois Lemas a seguir serão úteis para demonstrar o principal Teorema desta subseção, o Teorema 2.3.13 que é a versão pro-2 do Teorema 3.6 de [RS97].

Lema 2.3.11. Sejam G um grupo pro-2 finitamente gerado, e $G = A \amalg_C B$ ou $G = HNN(A, C, t)$ é uma $\mathbb{Z}_2$-decomposição. Suponha que A admite uma ação sem ponto fixo global sobre uma árvore pro-2 T, com estabilizadores de arestas de ordem menor do que ou igual que 2, e C é elíptica em T (resp. C e C^t). Então G se decompõe sobre grupos de ordem no máximo 2. (i.e, G pode ser escrito como $G = G_1 \amalg_H G_2$ ou $HNN(G_1, H, t)$ com $|H| \leq 2$).

Demonstração. Sabemos que $G = A \amalg_C B$ (resp. $G = HNN(A, C, t)$) é finitamente gerado. Logo pelo Lema 1.1.5 o subgrupo A é também finitamente gerado. Além disso, A age sobre uma árvore pro-2, T. Pelo Teorema 1.4.7, $A = \Pi_1(\mathcal{A}, \Gamma)$ com os grupos vértices e arestas de $(\mathcal{A}, \Gamma)$ são estabilizadores de certos vértices e arestas de T respectivamente. Agora como A age sobre T (com estabilizadores de arestas com ordem menor o igual que 2) e A não fixa ponto, pelo Teorema 1.3.16 A descompor como um produto livre amalgamado pro -2 $A = J_0 \amalg_H J_1$ ou como uma HNN-extensão pro-2 $A = HNN(J_1, H, t_1)$ sobre um grupo H de ordem no máximo 2. Ademais pelo Teorema 1.4.7, temos que os estabilizadores de vértices e arestas de T em G são conjugados a subgrupos de grupos vértices e arestas de $(\mathcal{A}, \Gamma)$, assim como C age elipticamente (resp. C^t), ele estabiliza um vértice em T, por tanto C (resp. C^t) está contido em algum conjugado de J_0 ou J_1, digamos num conjugado de J_1, então sem perda de generalidade podemos assumir que $C \leq J_1$.

Se G é um produto livre amalgamado pro-p $G = A \amalg_C B$, então

$$G = J_0 \amalg_H J_1 \amalg_C B = J_0 \amalg_H (J_1 \amalg_C B);$$

ou

$$G = HNN(J_1, H, t_1) \amalg_C B = HNN(J_1 \amalg_C B, H, t_1).$$

Observe que nas duas formas podemos ver que G decompõe sobre o grupo H.

Suponha agora que $G = HNN(A, C, t)$. Agora como C^t é elíptico em T, então C^{ta} está contido em J_0 ou J_1 para algum $a \in A$ logo substituindo t por ta podemos assumir que $C^t \leq J_0$ ou $C^t \leq J_1$. Assim podemos dizer que G tem uma das seguintes formas:

1) Se $A = J_0 \amalg_H J_1$ e $C, C^t \leq J_1$, temos

$$G = HNN(J_0 \amalg_H J_1, C, t) = J_0 \amalg_H HNN(J_1, C, t).$$

2) Se $A = J_0 \amalg_H J_1$ e $C^t \leq J_0$, logo

$$G = HNN(J_0 \amalg_H J_1, C, t) = HNN((J_1 \amalg_C J_0^{t^{-1}}), H, t^{-1}).$$

3) Se $A = HNN(J_1, H, t_1)$, então

$$G = HNN(HNN(J_1, H, t_1), C, t) = HNN(HNN(J_1, C, t), H, t_1).$$

Observe que em todos esses casos G se decompõe sobre o grupo H, e assim o lema está provado. $\square$

No lema a continuação vamos provar que quando podemos decompor nosso grupo G como um produto livre pro-p com subgrupo amalgamado $N_{A_1}(C_1)$.

Lema 2.3.12. Seja G um grupo pro-2 finitamente gerado com $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ duas $\mathbb{Z}_p$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica de G, tal que $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico infinito nem diedral pro-2 infinito. Suponha que $N_{A_1}(C_1) \neq A_1$. Então G se decompõe sobre um grupo de ordem ≤ 2. (i.e, G pode ser escrita como $G = G_1 \amalg_H G_2$ ou $HNN(G_1, H, t)$ com $|H| \leq 2$).

Demonstração. Vamos supor que primeira $\mathbb{Z}_2$-decomposição é $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ um produto livre amalgamado, logo pelo Lema 1.6.5 como no caso (1.6) o grupo pro-p G admite uma decomposição:

$$G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} (N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1). \tag{2.6}$$

Por outro lado se $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ é uma HNN-extensão, pelo Lema 1.6.5 o grupo pro-p pode se decompõe como no caso (1.7) ou como no caso (1.8) então temos que:

$$G = HNN(A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1), N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1), t_1) \tag{2.7}$$

ou que o grupo ficaria

$$G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1) \tag{2.8}$$

Consideremos S_1 a 2-árvore padrão de (2.6), (2.7) ou (2.8). Como $A_1 \neq N_{A_1}(C_1)$, se G é como em (2.6) temos que $N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1$ é subgrupo próprio de G; e se G é como em (2.8) o normalizador $N_G(C_1)$ é um subgrupo próprio em G.

Como temos que $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico infinito, nem diedral pro-2 infinito, então K_1 é não trivial e além disso é elíptico em S_1. Logo sabemos que $K_1 \leq C_2^g$ para algum $g \in G$, assim C_2^g também é elíptico em S_1; pois C_2^g/K_1 é finito, e pela sua ação sobre a árvore T^{K_1}, temos que $T^{C_2^g}$ é não vazia (pelo Teorema 1.3.11). Como mostramos em (1.3) e (1.4) da Observação 1.1.4 a segunda $\mathbb{Z}_2$-decomposição pode ser escrita como segue:
se G é um produto pro-2 amalgamado:

$$G \ = A_2^g \amalg_{C_2^g} B_2^g \tag{2.9}$$

Se é uma HNN-extensão:

$$G \ = HNN(A_2^g, C_2^g, t_2^g) \tag{2.10}$$

Note que como a segunda decomposição de G é $\mathbb{Z}_2$-decomposição, então temos que as decomposições (2.9) e (2.10) são também $\mathbb{Z}_2$-decomposições. Chamemos S_2 como a 2-árvore padrão de (2.9) e (2.10). Observe que como A_1 (res.p $A_1^{t_1^{-1}}$) age sobre S_2 com estabilizadores triviais (pois os estabilizadores de arestas são conjugados de C_2^g), e como C_1 age livremente sobre S_2, temos por Proposição 1.5.2 (2) que $N_{A_1}(C_1)$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$) é pro-cíclico infinito ou diedral pro-2 infinito. Note que se o normalizador $N_{A_1}(C_1)$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$) é pro-cíclico infinito, pelo Teorema 2.2.2 temos que G admite uma decomposição como produto livre pro-p; e se o normalizador $N_{A_1}(C_1) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Então $N_{A_1}(C_1)$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$) tem um subgrupo normal pro-cíclico C que é hiperbólico sobre S_2 e tem índice no máximo 2. Sabemos que $|A_2^g \cap N_{A_1}(C_1)| \leq 2$ (resp. $|A_2^g \cap N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)| \leq 2$) pois $A_2^g \cap C = 1$. Quer dizer que A_2^g age sobre uma 2-árvore S_1 com A_2^g-estabilizadores de arestas trivial ou um grupo de ordem 2.

Suponha que a segunda $\mathbb{Z}_2$-decomposição é o produto amalgamado, $G = A_2^g \amalg_{C_2^g} B_2^g$, então A_2^g e B_2^g agem sobre S_1. Se A_2^g e B_2^g são elípticos em S_1, logo A_2^g, e B_2^g não estão contidos num conjugado de A_1 pois se estiverem C_2 estaria contido num conjugado de A_1 o qual é absurdo. Por outro lado se A_2^g está contido num conjugado de $N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1$ (para (2.6)), ou $A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1)$ (para (2.7)) ou $N_G(C_1)$ (para (2.8)), pelo Corolário 1.3.5 o B_2^g debe estar no mesmo conjugado que A_2^g (porque se estiver em conjugados diferentes $C_2^g = A_2^g \cap B_2^g$ está contido num conjugado de $N_{A_1}(C_1) \leq A_1$ ou de $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1) \leq A_1^{t_1^{-1}}$ pelo Corolário 1.3.5, o que é absurdo). Portanto $G = A_2^g \amalg_{C_2^g} B_2^g$ estaria contido em algum conjugado de $N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1$ (para (2.6)), ou $N_G(C_1)$ (para (2.8)) o que é absurdo pois são subgrupos próprios em G. Logo podemos assumir sem perda de generalidade que A_2^g age sobre uma 2-árvore S_1 sem pontos fixos globais. Por tanto temos que A_2^g age sobre S_1 sem pontos fixos globais e com A_2^g-estabilizadores de arestas trivial ou um grupo de ordem 2, logo pelo Lema 2.3.11 o grupo G decompõe sobre grupo de ordem ≤ 2. Agora se G é como (2.7) temos sem perda de generalidade que $G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1)$, e como $A_1 \neq N_{A_1}(C_1)$, pelo raciocínio igual que para (2.8) temos que o grupo G decompõe sobre grupo de ordem menor ou igual que 2.

Por outro lado se a segunda $\mathbb{Z}_2$-decomposição é a HNN-extensão, $G = HNN(A_2^g, C_2^g, t_2^g)$, então A_2^g e $(A_2^g)^{t_2^g}$ agem sobre S_1. Se A_2^g é elíptico em S_1. Sabemos que A_2^g não está contido num conjugado de A_1 pois se estiver, então C_2^g estaria contido num conjugado de A_1 o qual é absurdo. Logo se A_2^g está contido num conjugado de $N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1$ (para (2.6)), ou $A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1)$ (para (2.7)) ou $N_G(C_1)$ (para (2.8)), pelo Corolário 1.3.5 o $(A_2^g)^{(t_2^g)^{-1}}$ debe estar no mesmo conjugado que A_2^g (de fato, se não estiver então pelo Corolário 1.3.5 $C_2^g = A_2^g \cap (A_2^g)^{(t_2^g)^{-1}}$ está num conjugado de $N_{A_1}(C_1) \leq A_1$ ou de $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1) \leq A_1^{t_1^{-1}}$ que é um absurdo), o qual é um absurdo, pois assim $G = HNN(A_2^g, C_2^g, t_2^g)$ estaria contido em algum conjugado de $N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1$ (para (2.6)), ou $N_G(C_1)$ (para (2.8)) o que é absurdo pois são subgrupos próprios em G. Quer dizer sem perda de generalidade que A_2^g age sobre uma 2-árvore S_1 sem pontos fixos globais. Por tanto temos que A_2^g age sobre S_1 sem pontos fixos globais e com A_2^g-estabilizadores de arestas trivial ou um grupo de ordem 2, pelo Lema 2.3.11 o grupo G se decompõe sobre grupo de ordem ≤ 2. Agora se G é como (2.7) temos sem perda de generalidade que $G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1)$, e como $A_1 \neq N_{A_1}(C_1)$, pelo raciocínio igual que para (2.8) temos que o grupo G decompõe sobre grupo de ordem menor ou igual que 2.

$\square$

Teorema 2.3.13. *Seja G um grupo finitamente gerado pro-2 que não se decompõe sobre um grupo de ordem no máximo 2. Sejam $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ ou $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, e $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ ou $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ duas $\mathbb{Z}_2$-decomposições Hiperbólica-Hiperbólica de G. Suponha que $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico infinito nem diedral pro-2 infinito. Então $G = N_G(C_1)$ isomorfo a um dos grupos pro-2 listado desde (iii) até (vi) da Proposição 2.3.8.*

Demonstração. Como $N_G(C_1)$ não é pro-cíclico infinito nem diedral pro-2 infinito temos que $K_1 \neq 1$, e que $K_1 \leq C_2^g$. Além disso, por mostrado em (1.3) e (1.4) da Observação 1.1.4 a segunda $\mathbb{Z}_2$-decomposição pode ser escrita como segue:
se G é um produto livre pro-2 amalgamado:

$$G \;= A_2^g \amalg_{C_2^g} B_2^g \tag{2.11}$$

Se é uma HNN-extensão:

$$G \;= HNN(A_2^g, C_2^g, t_2^g) \tag{2.12}$$

Note que como a segunda decomposição de G é $\mathbb{Z}_2$-decomposição, então temos que as decomposições (2.11) e (2.12) são também $\mathbb{Z}_2$-decomposições. Chamemos S_2 a 2-árvore padrão de (2.11) e (2.12).

Vamos supor que primeira $\mathbb{Z}_2$-decomposição é $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ um produto livre amalgamado, logo temos pelo Lema 1.6.5 que G pode ser escrito como (1.6):

$$G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} (N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1) \tag{2.13}$$

Por outro lado se $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$ é uma HNN-extensão, então pelo Lema 1.6.5 o G é como na (1.7) e (1.8):

$$G = HNN(A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1), N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1), t_1) \tag{2.14}$$

ou

$$G = A_1 \amalg_{N_{A_1}(C_1)} N_G(C_1). \tag{2.15}$$

Logo do Lema 2.3.12, $N_{A_1}(C_1) = A_1$. Então quando o grupo é (2.15) $G = N_G(C_1)$ que é uma HNN-extensão, assim temos (iii) e (iv) da Proposição 2.3.8.

Como $N_{A_1}(C_1) = A_1$ se G é o grupo em (2.13) (resp. em (2.14)), logo $G = N_G(C_1) \amalg_{N_{B_1}(C_1)} B_1$ (resp. $G = HNN(N_G(C_1), N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1), t_1)$), denotamos a 2-árvore padrão dessa decomposição por S_1'. Observe que como B_1 (resp. $A_1^{t_1^{-1}}$) age sobre S_2 com estabilizadores triviais (pois os estabilizadores de arestas são conjugados de C_2^g). Como C_1 age livremente sobre S_2, temos por Proposição 1.5.2 (2) que $N_{B_1}(C_1)$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$) é pro-cíclico infinito ou diedral pro-2 infinito. Note que se o normalizador $N_{B_1}(C_1)$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$) é pro-cíclico infinito, então $N_{B_1}(C_1) \cong \mathbb{Z}_p$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1) \cong \mathbb{Z}_p$), e se o normalizador é diedral pro-2 infinito $N_{B_1}(C_1) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\cong C \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (resp. $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1) \cong C \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$); com C hiperbólico em S_2. Sabemos que $|A_2^g \cap N_{B_1}(C_1)| \leq 2$ (resp. $|A_2^g \cap N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)| \leq 2$) pois $A_2^g \cap C = 1$.

Suponha que a segunda $\mathbb{Z}_2$-decomposição é $G = A_2^g \amalg_{C_2^g} B_2^g$, então A_2^g age sobre S_1'. Pelo Lema 2.3.12 o A_2^g está contido num conjugado de $N_G(C_1)$, porque $A_2^g \nleq B_1$ (lembre que $C_2^g \cap B_1 = 1$). Agora B_2^g tem que estar no mesmo conjugado que A_2^g, pois se não está pelo Teorema 1.4.14 (b.) (resp. pelo Teorema 1.4.14 (c.)) $C_2^g = A_2^g \cap B_2^g$ estaria contido em algum conjugado de $N_{B_1}(C_1)$ (resp. $C_2^g = A_2^g \cap B_2^g$ estaria contido em algum conjugado de $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$). O qual é um absurdo. Portanto B_2^g tem que estar no mesmo conjugado que A_2^g. Sem perda de generalidade teríamos que $G = A_2^g \amalg_{C_2^g} B_2^g \leq N_G(C_1) \leq G$, i.e. $G = N_G(C_1)$.

Se a segunda $\mathbb{Z}_2$-decomposição é $G = HNN(A_2^g, C_2^g, t_2^g)$, então A_2^g age sobre S_1'. Pelo Lema 2.3.12, A_2^g está contido num conjugado de $N_G(C_1)$. Logo t_2^g tem que estar no mesmo conjugado de A_2^g. pois se estivesse em conjugados diferentes pelo Teorema 1.4.14 (b.) (resp. pelo Teorema 1.4.14 (c.)) $C_2^g = A_2^g \cap (A_2^g)^{(t_2^g)^{-1}}$ estaria contido em algum conjugado de $N_{B_1}(C_1)$ (resp. $C_2^g = A_2^g \cap B_2^g$ estaria contido em algum conjugado de $N_{A_1^{t_1^{-1}}}(C_1)$). Que é um absurdo, dado que C_2^g intersetado com algum conjugado de C_1 é trivial. O que quer dizer que $G = HNN(A_2^g, C_2^g, t_2^g)$ estaria contido em algum conjugado de $N_G(C_1)$.

Portanto, sem perda de generalidade para quando G é da forma (2.13) ou (2.14) teríamos que $G = N_G(C_1)$ que é um produto pro-2 livre, portanto: (iv), (v), e (vi).

□

Capítulo 3

Comensurador

Nessa parte do trabalho vamos dar vários resultados sobre o Comensurador. Nós começamos definindo o Comensurador de um subgrupo, e dando alguns propriedades básicas do comensurador. Logo vamos mostrar um Teorema 3.0.4 que é uma generalização para a Proposição 8.2 de [CZ22] (Proposição 1.5.2). A continuação no Teorema 3.0.8 mostramos sobre quais condições um grupo pro-p finitamente gerado G que age sobre uma árvore pro-p T é igual o subgrupo comensurador de um estabilizador de aresta.

Definição 3.0.1. Seja G um grupo pro-p, e suponha H um subgrupo fechado de G. O comensurador de H em G, denotado $Comm_G(H)$, é o conjunto definido da seguinte forma:

$$Comm_G(H) = \overline{\{g \in G : H^g \cap H \leq_o H, \text{ e } H^g \cap H \leq_o H^g\}}.$$

Vamos provar agora que esse conjunto definido como comensurador é um subgrupo, além disso, vai generalizar a definição de normalizador.

Lema 3.0.2. Sejam G um grupo pro-p e H um subgrupo fechado de G. Então:

(i) $Comm_G(H)$ é um subgrupo de G.

(ii) $C_G(H) \leq N_G(H) \leq Comm_G(H)$.

Demonstração. Note que $\{g \in G : H^g \cap H \leq_o H, \text{ e } H^g \cap H \leq_o H^g\}$ é um subgrupo no grupo G. De fato é a definição de comensurador no caso abstrato [DK18, Definição 5.17 e Exercicio 5.18] com o fecho. Sabemos que o fecho de um subgrupo, é um subgrupo então $Comm_G(H)$ é um subgrupo de G. Assim provamos (i).

Agora para (ii) sabemos que $C_G(H) \leq N_G(H)$, agora suponha que $g \in N_G(H)$, vamos provar que g vai estar em $Comm_G(H)$. Sabendo que $H^g = H$, então $[H : H \cap H^g] = [H : H] = 1$, por outro lado $[H^g : H \cap H^g] = [H : H \cap H^g] = 1$. □

O próximo lema vai ser usado na demonstração do Teorema 3.0.4 e o Teorema 3.0.8. O Teorema 3.0.4 pode ser visto como uma generalização do item (b) da Proposição 1.5.2. Pois conseguimos provar que o comensurador do subgrupo pro-cíclico agindo livremente é finitamente gerado. No Teorema 3.0.8 provamos que um grupo G que age sobre uma árvore pro-p T localmente finita é igual ao comensurador de um estabilizador de aresta de T.

Lema 3.0.3. Sejam R um grupo profinito e $G = \overline{\langle g_1, \ldots, g_n \rangle}$ um subgrupo profinito finitamente gerado de R. Se H é um subgrupo de R tal que $H \cap H^{g_i}$ tem índice finito em H e H^{g_i}, então H contem um subgrupo de índice finito que é normalizado por g_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Suponha que N é um subgrupo normal aberto de R tal que $N \cap H \leq \bigcap_{i=1}^{n} H \cap H^{g_i}$, pois como $H \cap H^{g_i}$ é aberto em H para cada $i \in \{1, ..., n\}$, por tanto sua interseção finita $\bigcap_{i=1}^{n} H \cap H^{g_i}$ também é aberta, e lembre que $N \cap H$ é normal e aberto em H. Observe que para qualquer g_i, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que $(N \cap H)^{g_i} = N \cap H^{g_i} \geq H^{g_i} \cap N \cap H = (H \cap N) \cap (H \cap H^{g_i}) = H \cap N$ (porque $H \cap N \leq H \cap H^{g_i}$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$). Agora sabendo que $H \cap N \leq (N \cap H)^{g_i}$ consideremos o seguinte índice: $1 = [(N \cap H)^{g_i} : (N \cap H)^{g_i}] = [(N \cap H)^{g_i} : H \cap N]$, assim $(N \cap H)^{g_i} = N \cap H$ para qualquer g_i, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, quer dizer que $N \cap H$ é normalizado por cada g_i com $i \in \{1, \ldots, n\}$, e $N \cap H$ está contido em H e além disso tem índice finito em H (pois é aberto em H). □

Observe que com Lema 3.0.3 e Lema 3.0.2 podemos dizer que se o comensurador de um subgrupo H é finitamente gerado, então existe um subgrupo aberto H' em H, para o qual o comensurador de H é igual ao normalizador de H'.

Teorema 3.0.4. *Seja G um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p T e C um subgrupo pro-cíclico não trivial de G que age livremente sobre T. Se $Comm_G(C)$ é finitamente gerado, então existe um subgrupo normal K de $Comm_G(C)$, tal que $Comm_G(C)/K$ não tem um subgrupo livre pro-p não abeliano, onde K está contido em um estabilizador de uma aresta em T.*

Demonstração. Temos do Teorema 1.3.9, que C é um grupo pro-p livre, i.e, $C \cong \mathbb{Z}_p$. Sabemos que pela Proposição 1.3.6 existe uma subárvore pro-p C-invariante minimal

D de T. Note que o D tem mais de um vértice. Porque se D tem só um vértice, então $C \leq G_v$, com $v \in V(T)$, e isso contradiz a ação livre de C sobre T. Assim pela Proposição 1.3.6 D é único, consequentemente C age irredutivelmente sobre D.

Como $Comm_G(C)$ é finitamente gerado, pelo Lema 3.0.3 temos que $Comm_G(C) = N_G(C')$, onde $1 \neq C' \leq_o C$. Já que $C' \leq C$, C' age livremente sobre D. Assim pela Proposição 1.3.6 existe uma subárvore pro-p $D' \subseteq D$, que é minimal C'-invariante com $|D'| > 1$ (porque $|D'| = 1$, contradiria que C' age livremente sobre D), então D' é única pela Proposição 1.3.6. Consideremos K como o núcleo da ação de $N_G(C')$ sobre D' (lembre que $N_G(C')$ age irredutivelmente sobre D', pois C' age sobre D' irredutivelmente, e $C' \leq N_G(C')$). Portanto temos que $N_G(C')/K$ age irredutivelmente e fielmente sobre D'. Agora pela Proposição 1.5.2 item (b) temos que $N_G(C')/K$ é isomorfo à $\mathbb{Z}_p$ ou é um diedral pro-2 infinito. Assim temos que $Comm_G(C)/K$ não tem subgrupo pro-p livre não abeliano (porque $Comm_G(C) = N_G(C')$) . $\square$

Exemplo 3.0.5. Suponhamos que $p > 2$. Consideremos o grupo pro-cíclico $G = \mathbb{Z}_p$, sua ação sobre o grafo de Cayley $\Gamma = \Gamma(\mathbb{Z}_p, \{1\})$ (grafo de Cayley definido em [R17, Exemplo 2.2.3]). Temos que o grafo Γ é uma pro-p árvore (consultar [R17, Teorema 2.5.3]), e que ação de $\mathbb{Z}_p$ sobre Γ é livre ([R17, Exemplo 2.2.3]). Suponha que H é um subgrupo não trivial de $\mathbb{Z}_p$. Pelo Teorema 3.0.4, o $Comm_G(H)$ não tem um subgrupo livre pro-p não abeliano. Mais do que isso podemos dizer que $Comm_G(H) \cong \mathbb{Z}_p$.

Definição 3.0.6. Dizemos que um grafo profinito Γ é localmente finito se cada vértice v de Γ tem uma quantidade finita de arestas incidindo em v.

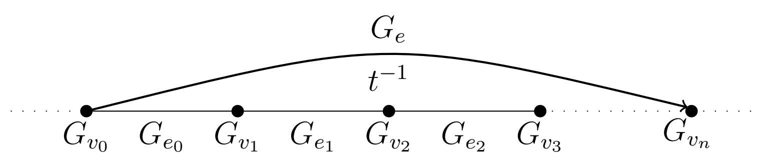
Lema 3.0.7. Suponha que G é um grupo profinito que age sobre uma árvore pro-p T localmente finita tal que $G\backslash T$ é finito. Então $[G_{d_0(e)} : G_e] < \infty$, e $[G_{d_1(e)} : G_e] < \infty$ para toda $e \in E(T)$.

Demonstração. No grafo $G\backslash T$ se define $\overline{d_i}(Gm) = Gd_i(m)$, para todo $m \in T$ e $i = 0, 1$. Consideremos um vértice $v \in V(T)$, denotamos o conjunto de todas as órbitas para o qual $v = d_i(m)$ de $m \in T$ para $i = 0, 1$, como $\overline{d_i}^{-1}(Gv)$. Então temos que $\overline{d_i}^{-1}(Gv) = \bigcup_{m \in d_i^{-1}(v)} Gm$, como $G\backslash T$ é finito. Logo $\infty > |\overline{d_i}^{-1}(Gv)| = |\bigcup_{m \in d_i^{-1}(v)} Gm|$, i.e. $\bigcup_{m \in d_i^{-1}(v)} Gm$ é finito. Note que o estabilizador G_v é um subgrupo de G, portanto $\bigcup_{m \in d_i^{-1}(v)} (G_v)m \leq \bigcup_{m \in d_i^{-1}(v)} Gm$. Quer dizer que $\bigcup_{m \in d_i^{-1}(v)} (G_v)m$ é finito. Agora sabemos que $d_i^{-1}(v)$ é finito, pois T é localmente finito. Como $|\bigcup_{m\in d_i^{-1}(v)} G_v m| = \sum_{m\in d_i^{-1}(v)} [G_v : G_m]$, podemos concluir que $[G_v : G_m]$ é finito para todo $m \in d_i^{-1}(v)$. Assim provamos para todo $v \in V(T)$, $[G_v/G_m]$ é finito para todo $m \in d_i^{-1}(v)$. Então para qualquer $e \in E(T)$ com $d_0(e) = w_0$ e $d_1(e) = w_1$, temos que $e \in d_0^{-1}(w_0)$ e $e \in d_0^{-1}(w_1)$, i.e. $[G_{d_0(e)} : G_e] = [G_{w_0} : G_e]$, e $[G_{d_1(e)} : e] = [G_{w_1} : G_e]$ são finitos. □

Teorema 3.0.8. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não se decompõe como um produto pro-p livre. Suponha que G age sobre uma árvore pro-p T sem ponto fixo global, e com $G\backslash T$ finito. Se T é localmente finito, então $G = Comm_G(G_e)$, para qualquer $e \in E(T)$, e existe um $J \leq_o G_e$ tal que $G = N_G(J)$.*

Demonstração. Sabemos que G age sobre a árvore pro-p T e $G\backslash T$ é finito. Logo pelo lema 1.6.4 $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) = \overline{\langle g_1, \dots, g_m\rangle}$, em que g_i está em um estabilizador de alguns vértices de T, ou g_i é uma letra estável, e $\Gamma \cong G\backslash T$. Como G não decompõe como um produto livre pro-p e age sem ponto fixo global sobre a árvore pro-p T, pelo Teorema 1.3.16 os G-estabilizadores das arestas tem que ser não triviais.
Note que como $G\backslash T$ é finito, e T é localmente finito, temos pelo Lema 3.0.7 que $|G_{d_0(e)} : G_e| < \infty$, e $|G_{d_1(e)} : G_e| < \infty$ para toda $e \in E(T)$.

Considere $g_i \in \{g_1, \dots, g_m\}$ tal que $g_i = t$ é uma letra estável, e lembre que o grafo $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é finito. Agora suponha que uma parte do grafo $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é da seguinte forma:



Podemos ver que $G_{v_n} = G_{v_0}^t$. Agora observe que $[G_{v_n} : G_{e_0}^t \cap G_{e_{(n-1)}}] = [G_{v_n} : G_{e_{(n-1)}}][G_{e_{(n-1)}} : G_{e_0}^t \cap G_{e_{(n-1)}}] < \infty$, porque $G_{e_0}^t \leq_o G_{v_n}$, pois $G_{e_0} \leq_o G_{v_0}$. Além disso, $[G_{v_n} : G_{e_0}^t \cap G_{e_{(n-1)}} \cap G_{e_{(n-2)}}] = [G_{v_n} : G_{e_0}^t \cap G_{e_{(n-1)}}][G_{e_0}^t \cap G_{e_{(n-1)}} : G_{e_0}^t \cap G_{e_{(n-2)}} \cap G_{e_{(n-1)}}] < \infty$, isso porque $G_{e_{(n-2)}} \leq_o G_{v_{(n-1)}}$. Agora se continuamos com o procedimento, chegamos em $[G_{v_n} : G_{e_0} \cap G_{e_1} \cap \ldots \cap G_{e_{(n-1)}} \cap G_{e_0}^t] < \infty$. Como $G_{e_0} \cap G_{e_1} \cap \ldots \cap G_{e_{(n-1)}} \cap G_{e_0}^t \leq G_{e_0} \cap G_{e_0}^t$, então:

$$[G_{v_n} : G_{e_0} \cap G_{e_0}^t] \leq [G_{v_n} : G_{e_0} \cap G_{e_1} \cap \ldots \cap G_{e_{(n-1)}} \cap G_{e_0}^t] < \infty,$$

logo como $G_{e_0}^t \leq G_{v_n}$, temos:

$$[G_{e_0}^t : G_{e_0} \cap G_{e_0}^t] < \infty. \tag{3.1}$$

Agora fazendo o mesmo procedimento acima, começando com o índice $[G_{v_0} : G_{e_0} \cap G_{e_1}]$, chegamos a que o índice $[G_{v_0} : G_{e_0} \cap G_{e_1} \cap \ldots \cap G_{e_{(n-1)}} \cap G^t_{e_0}] < \infty$. Como $G_{e_0} \cap G_{e_1} \cap \ldots \cap G_{e_{(n-1)}} \cap G^t_{e_0} \leq G_{e_0} \cap G^t_{e_0}$, então:

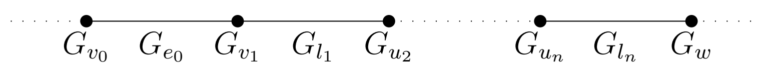
$$[G_{v_0} : G_{e_0} \cap G^t_{e_0}] \leq [G_{v_0} : G_{e_0} \cap G_{e_1} \cap \ldots \cap G_{e_{(n-1)}} \cap G^t_{e_0}] < \infty,$$

assim como $G_{e_0} \leq G_{v_0}$, temos

$$[G_{e_0} : G_{e_0} \cap G^t_{e_0}] < \infty. \tag{3.2}$$

Por (3.1) e (3.2), dizemos que $t \in Comm_G(G_{e_0})$.

Agora consideremos que $g_i \in \{g_1, \ldots, g_m\}$ tal que $g_i = g_w \in \mathcal{G}(i) = G_w$ para algum vértice w em $V(T)$, e suponhamos que uma parte de $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é:



Sabemos que $[G_{v_0} : G_{e_0} \cap G_{l_1}] = [G_{v_0} : G_{e_0}][G_{e_0} : G_{e_0} \cap G_{l_1}] < \infty$, porque $G_{l_1} \leq_o G_{v_1}$. Agora $[G_{v_0} : G_{e_0} \cap G_{l_1} \cap G_{l_2}] = [G_{v_0} : G_{e_0} \cap G_{l_1}][G_{e_0} \cap G_{l_1} : G_{e_0} \cap G_{l_1} \cap G_{l_2}] < \infty$, pois $G_{l_2} \leq_o G_{u_2}$. Continuando o mesmo raciocínio, obtemos que:

$$[G_{v_0} : G_{e_0} \cap G_{l_1} \cap \ldots \cap G_{l_n}] < \infty. \tag{3.3}$$

Similarmente $[G_w : G_{e_0} \cap G_{l_1} \cap \ldots \cap G_{l_n}] < \infty$. Como temos que $g_w \in G_w$, então $[G_w : G^{g_w}_{e_0} \cap G^{g_w}_{l_1} \cap \ldots \cap G^{g_w}_{l_n}] < \infty$. Agora observe que de (3.3) e pelo isomorfismo por conjugação de g_w sobre G_{v_0} temos o seguinte índice é finito

$$[G^{g_w}_{v_0} : G^{g_w}_{e_0} \cap G^{g_w}_{l_1} \cap \ldots \cap G^{g_w}_{l_n}] < \infty. \tag{3.4}$$

Note que:

$$[G_{e_0} \cap G_{l_1} \cap \ldots \cap G_{l_n} : (G_{e_0} \cap G^{g_w}_{e_0}) \cap (G_{l_1} \cap G^{g_w}_{l_1}) \cap \ldots \cap (G_{l_n} \cap G^{g_w}_{l_n})] < \infty. \tag{3.5}$$

$$[G^{g_w}_{e_0} \cap G^{g_w}_{l_1} \cap \ldots \cap G^{g_w}_{l_n} : (G_{e_0} \cap G^{g_w}_{e_0}) \cap (G_{l_1} \cap G^{g_w}_{l_1}) \cap \ldots \cap (G_{l_n} \cap G^{g_w}_{l_n})] < \infty. \tag{3.6}$$

Isso porque $(G_{e_0} \cap G^{g_w}_{e_0}) \cap (G_{l_1} \cap G^{g_w}_{l_1}) \cap \ldots \cap (G_{l_n} \cap G^{g_w}_{l_n}) = (G_{e_0} \cap G_{l_1} \cap \ldots \cap G_{l_n}) \cap (G^{g_w}_{e_0} \cap G^{g_w}_{l_1} \cap \ldots \cap G^{g_w}_{l_n})$ e $G^{g_w}_{e_0} \cap G^{g_w}_{l_1} \cap \ldots \cap G^{g_w}_{l_n}$ é aberto em G_w. Logo por (3.3) e (3.5):

$$[G_{v_0} : (G_{e_0} \cap G^{g_w}_{e_0}) \cap (G_{l_1} \cap G^{g_w}_{l_1}) \cap \ldots \cap (G_{l_n} \cap G^{g_w}_{l_n})] < \infty.$$

Como $(G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}) \cap (G_{l_1} \cap G_{l_1}^{g_w}) \cap \ldots \cap (G_{l_n} \cap G_{l_n}^{g_w}) \leq G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}$. Então $[G_{v_0} : G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}] < \infty$, assim $[G_{e_0} : G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}] < \infty$.

Analogamente por (3.4) e (3.6):

$$[G_{v_0}^{g_w} : (G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}) \cap (G_{l_1} \cap G_{l_1}^{g_w}) \cap \ldots \cap (G_{l_n} \cap G_{l_n}^{g_w})] < \infty.$$

Como $(G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}) \cap (G_{l_1} \cap G_{l_1}^{g_w}) \cap \ldots \cap (G_{l_n} \cap G_{l_n}^{g_w}) \leq G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}$. Então $[G_{v_0}^{g_w} : G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}] < \infty$, logo $[G_{e_0}^{g_w} : G_{e_0} \cap G_{e_0}^{g_w}] < \infty$. Isso quer dizer que $g_w \in Comm_G(G_{e_0})$. Por tanto todo gerador de G está no subgrupo $Comm_G(G_{e_0})$, i.e $G \leq Comm_G(G_{e_0})$, e sabemos que $Comm_G(G_{e_0}) \leq G$, assim $G = Comm_G(G_{e_0})$.

Agora como $G = Comm_G(G_{e_0})$ é G é finitamente gerado pelo Lema 3.0.3 temos que G_{e_0} contem um subgrupo normal J de G de índice finito em G_{e_0}. Quer dizer que $N_G(J) = G$. □

Proposição 3.0.9. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado que não se decompõe como um produto pro-p livre. Suponha que G age irredutivelmente sobre uma p-árvore T com $|T| > 1$, tal que G_v é um grupo pro-cíclico infinito para todo $v \in V(T)$. Então $Comm_G(G_e) = G$, para qualquer $e \in E(T)$.*

Demonstração. Como G age irredutivelmente sobre uma árvore pro-p T com $|T| > 1$, e não se decompõe como um produto pro-p livre, então pelo Teorema 1.3.16 todos os estabilizadores de arestas de T são isomorfos a $\mathbb{Z}_p$, pelo Corolário 1.4.8 o grupo G é o grupo fundamental de um grafo de grupos pro-p finito. Observe que para cada aresta $e \in T$, temos: $|G_{d_0(e)} : G_e| < \infty$, e $|G_{d_1(e)} : G_e| < \infty$. Agora usando a mesma ideia que no Teorema anterior (Teorema 3.0.8) obtemos o resultado. □

Bibliografia

[DD89] W. Dicks, M.J. Dunwoody (1989). *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press.

[DK18] Druțu, Cornelia; Kapovich, Michael (2018). *Geometric Group Theory*, American Mathematical Society, ISBN 9781470411046, MR 3753580

[CZ22] Zoé Chatzidakis, Pavel Zalesskii (2022). *Pro-p groups acting on trees with finitely many maximal vertex stabilizers up to conjugation.* Israel Journal of Mathematics.

[MZ89] O. V. Mel'nikov, P. A. Zalesskii (1989). *Subgroups of profinite groups acting on trees*, Math. USSR Sb.63 405.

[R71] Luis Ribes (1971). *On amalgamated products of profinite groups.* Math. Z. 123, 357-364, Springer-Verlag.

[R17] Luis Ribes (2017). *Profinite graphs and groups*, Springer.

[RZ00a] Luis Ribes, Pavel Zalesskii (2000). *Pro-p trees and applications* in New Horizons in Pro-p Groups, springer science+Business media, LLC.

[RZ00b] Luis Ribes, Pavel Zalesskii (2000). *Profinite groups*, second edition Springer-verlag, Berlin.

[RS97] E. Rips and Z. Sela (1997). *Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition*, Annals of Mathematics , Jul., 1997, Second Series, Vol. 146, No. 1, pp. 53-109, Mathematics Department, Princeton University.

[S97] Z. Sela (1997). *Structure and Rigidity in (Gromov) Hyperbolic Groups and Discrete Groups in Rank 1 Lie Groups II*, GAFA, Geometric And Functional Analysis. Vol. 7, 561-593.

[S80] J-P. Serre (1980). *Trees*, Springer-Verlag, Berlin.

[SZ14] Ilir Snopce, Pavel A. Zalesskii(2014). *Subgroup properties of pro-p extensions of centralizers*, Selecta Mathematica New Series. DOI 10.1007/s00029-013-0128-4.

[WZ17] Henry Wilton and Pavel Zalesskii (2017). *Pro-p subgroups of profinite completions of 3-manifold groups*. Journal of the London Mathematical Society.