Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Doutorado acadêmico em Matemática

Diego Alves da Costa

Sobre os Problemas B e C de Mahler

Brasília/DF

2023

Diego Alves da Costa

Sobre os Problemas B e C de Mahler

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira

Brasília/DF

2023

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alves da Costa, Diego
AA474s Sobre os Problemas B e C de Mahler / Diego Alves da Costa; orientador Diego Marques Ferreira. -- Brasília, 2023.
55 p.

Tese(Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2023.

1. Problemas de Mahler. 2. Funções transcendentes unidimensionais. 3. Funções transcendentes multidimensionais. 4. Conjuntos excepcionais. 5. Comportamento aritmético. I. Marques Ferreira, Diego , orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre os problemas B e C de Mahler

por

Diego Alves da Costa

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de outubro de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira - MAT/UnB (Orientador)

Profa. Dra. Ana Paula de Araujo Chaves – UFG (Membro)

Prof. Dr. Victor Gonzalo Lopez Neumann – UFU (Membro)

Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho – MAT/UnB (Membro)

Ao meu pai e à minha mãe,
José Alves da Costa e
Gilvande dos Santos Carvalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu pai José, à minha mãe Gilvande e à minha irmã Graciela, com quem aprendi muito sobre a vida desde cedo. Eles me passaram a importância da honestidade, da bondade, da justiça e de como devemos lutar pelas nossas realizações. Muito do que sou, devo a essa base familiar que foi formada desde meu nascimento até o início da vida adulta. Amo muito vocês três, pena que meu pai não poderá ler este trecho, em 2012, ele partiu desta terra e mora no ceú do meu coração.

Em segundo lugar, quero agradecer à minha amada esposa Cristina e ao meu filho José Neto, que nasceu em dezembro de 2019, uma semana após o término do meu primeiro período de doutorado e três meses antes da pandemia de COVID. De 2019 a 2023 foram quatros anos de muitos aprendizados e muitas mudanças e Cristina esteve sempre ao meu lado me apoiando e ajudando. José Neto alegra minha vida e a enche de razão, quero repassar a ele todos os ensinamentos citados no primeiro parágrafo.

Gostaria de agradecer a todos professores que contribuiram com minha formação, compartilhando gentilmente seus conhecimentos comigo, em especial, ao professor Zaqueu Alves Ramos, que acompanhou-me e orientou-me durante o período de graduação e mestrado, com quem aprendi bastante sobre a matemática e sobre a vida. Agradeço ao Professor Diego Marques Ferreira, por ter acreditado em mim e me orientado com paciência, responsabilidade e zelo durante esses mais de quatro anos que sou aluno da UnB.

Quero agradecer à professora Ana Paula de Araújo Chaves e aos professores Hemar Teixeira Godinho e Victor Gonzalo Lopez Neumann por aceitarem participar da banca, avaliando e colaborando com este trabalho.

Por último e não menos importante, gostaria de agradecer a todos amigos e colegas que tive a sorte de conhecer durante esses 13 anos que estudo matemática, em especial, aos meus amigos matemáticos da Universidade Federal de Sergipe, Danilo Rezende, Geivison e Jonison e aos meus amigos matemáticos da UnB, Bruna, Eliana, Jean Lelis, Jesus, João Batista, Luiz Gustavo, Márcio, Ricardo e Túlio Gentil. Com vocês, aprendi matemática, compartilhei experiências e reflexões que foram fundamentais para continuidade da minha jornada.

Muito obrigado a todos.

"Não faças da tua vida um rascunho.
Poderás não ter tempo de passá-la a limpo."

Mario Quintana

RESUMO

Neste trabalho de tese, estudamos duas generalizações para problemas propostos por Mahler em 1976 sobre o comportamento aritmético de funções analíticas, a saber, o Problema B e o Problema C. Na primeira generalização, investigamos a existência de funções inteiras e transcendentes, com coeficientes racionais, tais que tanto a imagem quanto a imagem inversa do conjunto dos números algébricos por estas funções, e por todas as suas derivadas, sejam subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$. Na segunda generalização, caracterizamos quais subconjuntos $\overline{\mathbb{Q}}^m$, onde m é um natural maior ou igual a 2, podem ser o conjunto excepcional de uma função $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ inteira, transcendente e com coeficientes racionais.

Palavras-chave: problemas de Mahler, funções transcendentes unidimensionais, funções transcendentes multidimensionais, conjuntos excepcionais, comportamento aritmético.

ABSTRACT

In this thesis work, we study two generalizations for problems proposed by Mahler in 1976 on the arithmetic behavior of analytic functions, namely, Problem B and Problem C. In the first generalization, we investigate the existence of entire and transcendental functions, with rational coefficients, such that both the image and the inverse image of the set of algebraic numbers by these functions, and by all its derivatives, are subsets of $\overline{\mathbb{Q}}$. In the second generalization, we characterize which subsets $\overline{\mathbb{Q}}^m$, where m is an integer number greater than or equal to 2, can be the exceptional set of an entire transcendental function $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ with rational coefficients.

Keywords: Mahler's problems, one-dimensional transcendental functions, multidimensional transcendental functions, exceptional sets, arithmetic behavior.

SUMÁRIO

Introdução

Um número complexo é dito ser *transcendente*, se ele não é raiz de nenhum polinômio não nulo com coeficientes racionais. Esta definição data do século XVIII e é devida a Leonhard Euler (1707 -1783). No entanto, o primeiro exemplo de um número transcendente veio somente em 1844, em [11], quase 100 anos após sua definição. O responsável por esta façanha foi Joseph Liouville (1809 - 1882). A ideia de Liouville foi encontrar uma propriedade que os números algébricos deveriam satisfazer e então construir números que não obedecessem tal propriedade. Ele demonstrou que a distância de um número real algébrico α de grau $n \geq 2$ para um racional p/q (aqui p/q está escrito em sua forma irredutível) é no mínimo C/q^n, onde C é uma constante positiva dependendo de α. Então, ele definiu uma classe de números que não satisfaziam esta propriedade para nenhum natural n e demonstrou que estes números são transcendentes. Esta classe é conhecida hoje como *números de Liouville* e é denotada por $\mathbb{L}$. O primeiro exemplo de um número deste tipo é a constante de Liouville

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}.$$

Na verdade, $\mathbb{L}$ tem cardinalidade infinita e possui diversas propriedades interessantes. $\mathbb{L}$ é não enumerável mas tem medida de Lebesgue nula. Apesar disto, qualquer número real pode ser representado como soma de números de Liouville e qualquer real não nulo pode ser escrito como produto de dois elementos de $\mathbb{L}$, conforme provado por P. Erdos [4]. Asssim, podemos pensar que apesar de $\mathbb{L}$ ser um conjunto "invisível" quando disposto na reta real, os números de Liouville estão estrategicamente espalhados sobre tal reta. Como o conjunto dos números transcendentes reais tem medida de Lebesgue total, existem bem mais números transcendentes que números de Liouville.

O fato da maioria dos números complexos serem transcendentes (a medida do conjunto dos números transcendentes é total) não significa que provar a transcendência de um número seja tarefa simples. Até hoje não conseguimos provar se os números $e+\pi$ e $e\pi$ são ou não transcendentes, mesmo sabendo que ao menos um deles seja. Após os avanços feitos por Liouville, o próximo fato marcante na Teoria dos Números Trasncendentes ocorreu em 1873, quando Charles Hermite (1822 - 1901) provou em [7] que o número e de Euler era transcendente. Em 1882, Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939) estendeu o método usado por Hermite para provar em [10] o seguinte teorema mais geral:

Teorema de Hermite-Lindemann. *Se $\alpha_1, \ldots, a_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números algébricos.*

Note que, se α é um algébrico não nulo, então escolhendo $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha$, obtemos pelo Teorema de Hermite-Lindemann que e^{α} é transcendente. Daí, segue que π é um número transcendente. De fato, se π fosse algébrico, então pelo que acabamos de argumentar, $e^{i\pi} = -1$ seria transcendente, um aburdo. Assim, Lindemann também concluiu a impossibilidade da quadratura do círculo, um dos problemas clássicos da matemática grega, afinal, a essa época já se sabia que um número real construtível com régua e compasso devia ser algébrico e com grau (sobre $\overline{\mathbb{Q}}$) sendo uma potência de 2.

Uma função f analítica sobre um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é dita ser uma *função transcendente sobre* $\mathbb{C}(z)$, se o único polinômio P em duas variáveis e com coeficientes complexos satisfazendo $P(z, f(z)) = 0$, para todo $z \in \Omega$, é o polinômio nulo. Como uma função inteira é transcendente se, e somente se, ela não é uma função polinomial, temos que as funções inteiras $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ e e^z são transcendentes. Uma vez que a imagem de um algébrico não nulo pela função transcendente e^z resulta sempre em um número transcendente (o mesmo ocorre com as funções transcendentes $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$), surgiu a seguinte questão:

Questão. *Uma função analítica e transcendente quase sempre assume valores transcendentes nos pontos algébricos de seu domínio?*

Baseado neste questionamento, vários matemáticos, como Straüss, Weierstrass, Stäckel, Faber, Mahler, estudaram desde final do do Século XIX, o comportamento aritmético de funções analíticas e transcendentes. Dentre vários resultados nessa linha de pesquisa, destacamos um devido a Stäckel, provado em [20].

Teorema de Stäckel. *Existe uma função transcendente*

$$f(z) = -z + \sum_{h=2}^{\infty} f_h z^h,$$

com coeficientes racionais, que converge em uma vizinhança da origem e tem a propriedade de que tanto $f(z)$ quanto sua função inversa, assim como todas as suas derivadas, assumem valores algébricos em todos os pontos algébricos desta vizinhança.

Inspirando-se neste teorema, Kurt Mahler (1903 - 1988) em [12] questionou se este resultado (sem envolver derivadas) poderia ser estendido para funções inteiras e nomeou esta questão de Problema B.

Problema B. *Existe uma função inteira e transcendente f com coeficientes racionais tal que $f(\overline{\mathbb{Q}})$ e $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ são subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$?*

Aqui $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ denota a imagem inversa de $\overline{\mathbb{Q}}$ pela função f. Em 2017, Marques e Moreira [16] resolveram o Problema B de Mahler, provando:

Teorema (Cf. Theorem 1 of [16]). *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes $f(z)$ com coeficientes racionais tal que*

$$f(\overline{\mathbb{Q}}) = f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) = \overline{\mathbb{Q}},$$

onde $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ é a imagem inversa de $\overline{\mathbb{Q}}$ por f.

Uma vez que o Teorema de Stäckel (que motivou o questionamento de Mahler) envolvia derivadas, é natural perguntar se poderíamos estender o teorema anterior para uma versão envolvendo derivadas, como a seguir:

Problema B com derivadas. *Existe uma função inteira e transcendente $f(z)$ com coeficientes racionais tal que*

$$\left[f^{(j)}(\overline{\mathbb{Q}}) \cup \left(f^{(j)}\right)^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})\right] \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } j \geq 0?$$

Aqui $f^{(j)}$ denota a derivada de ordem j de f com $f^{(0)} = f$ e $\left(f^{(j)}\right)^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ denota a imagem inversa de $\overline{\mathbb{Q}}$ pela função $f^{(j)}$. No segundo capítulo deste trabalho, faremos uma construção indutiva que fornece uma resposta afirmativa a esta questão.

Dada uma função analítica $f : \Omega \to \mathbb{C}$, o *conjunto excepcional de f* é dado por

$$S_f = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \Omega;\ f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}.$$

Outro problema deixado em aberto por Mahler [12], questionava sobre quais subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ poderiam ser o conjunto excepcional de uma função analítica e transcendente com coeficientes racionais, precisamente:

Problema C. *Considere $\rho \in (0, \infty]$. Existe para qualquer escolha de $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$ (fechado para conjugação complexa e tal que $0 \in S$) uma função transcendente e analítica $f \in \mathbb{Q}[[z]]$, com raio de convergência ρ, para a qual $S_f = S$?*

Esta indagação foi motivada por resultados do próprio Mahler, que demonstrou que todo conjunto $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$, fechado para conjugação algébrica em $B(0, \rho)$ (isto é, se $\alpha \in S$ e β é um conjugado algébrico de α em $B(0, \rho)$, então $\beta \in S$) e tal que $0 \in S$, era o conjunto excepecional de uma função analítica e transcendente $f \in \mathbb{Q}[[z]]$, com raio de convergência ρ. O Problema C para funções inteiras (isto é, quando $\rho = \infty$) foi resolvido por Marques e Ramirez [18] em 2016. O último resultado deste trabalho se concentrou em responder uma versão multidimensional para o Problema C de Mahler para funções inteiras.

Problema C para funções inteiras em $\mathbb{C}^m$. *Existe para cada $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^m$, fechado para conjugação complexa e com $(0, \ldots, 0) \in S$, uma função inteira e transcendente tal que $S_f = S$?*

O *conjunto excepcional de uma função inteira multidimensional* $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ é definida de maneira análoga ao caso unidimensional, a saber,

$$S_f = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^m;\ f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}.$$

Conseguimos fornencer uma resposta afirmativa ao Problema C para funções inteiras em $\mathbb{C}^m$, e é sobre este tema que trataremos no terceiro capítulo desta tese.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, abordaremos noções sobre números transcendentes, funções transcendentes e ferramentas de análise complexa que serão necessários para o entendimento das construções feitas para a resolução do Problema B de Mahler com derivadas e do Problema C para funções inteiras em $\mathbb{C}^m$, provados no segundo e terceiro capítulo, respectivamente.

1.1 Números transcendentes

Definição 1.1.1. *Um número complexo α é dito ser* ***algébrico****, se ele é raiz de um polinômio não nulo com coeficientes racionais, e em tal caso, o menor natural n para o qual existe um polinômio de grau n em $\mathbb{Q}[X]$ que tem α como raiz, é chamado de* ***grau de*** *α. Se α não for algébrico, então dizemos que ele é* ***transcendente.***

Todo número racional p/q é um número algébrico, afinal ele é raiz do polinômio não nulo $qX - p \in \mathbb{Q}[X]$. Mas nem todo número algébrico é racional, por exemplo, $\sqrt{2}$ e a unidade imaginária i são números algébricos, pois eles são raízes de $X^2 - 2$ e $X^2 + 1$, respectivamente. Mais geralmente, $\sqrt[n]{a}$, onde n é um natural e a um real, é um número algébrico. Apesar de $\overline{\mathbb{Q}}$ conter estritamente $\mathbb{Q}$, eles têm a mesma cardinalidade.

Proposição 1.1.2. *O conjunto dos números algébricos $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável.*

Prova. Ver [14, p. 66].

Como $\mathbb{C}$ é não enumerável, a proposição anterior nos revela não somente que existem números transcendentes, mas que na verdade a maioria dos números são transcendentes. Isso contrasta com a dificuldade que se tem ao tentar demonstrar que um dado número é ou não transcedente. Apesar da definição de número transcendente ser do século XVIII, devido a Euler, somente após um século surgiram os primeiros exemplos de números transcendentes. Tal feito se deve ao matemático francês Joseph Liouville. Antes de discurtimos sobre os números de Liouville, destacamos algumas propriedades básicas (e fundamentais em nosso trabalho) que o conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ possui. Primeiramente, $\overline{\mathbb{Q}}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$, e disto segue diretamente que $\overline{\mathbb{Q}}$ é denso em $\mathbb{C}$, afinal $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. Por último, $\overline{\mathbb{Q}}$ é um corpo algebricamente fechado, isto é, qualquer polinômio com coeficientes em $\overline{\mathbb{Q}}$ possui uma raiz neste corpo. Ao leitor que deseje uma leitura mais aprofundada sobre estas propriedades, recomendamos o capítulo 4 de [14] e o capítulo VI de [6].

Retornando à construção dos primeiros números transcendentes, devido a Liouville, podemos dizer que sua ideia foi relativamente simples, ele observou uma propriedade que todo número real algébrico de grau $n \geq 2$ deveria satisfazer e definiu uma classe de números que não satisfazia essa propriedade para nenhum natural n.

Teorema 1.1.3 (Liouville)**.** *Seja α um número real algébrico com grau $n \geq 2$. Então, existe uma constante positiva $C = C(\alpha)$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^n}, \text{ para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Prova. [14, p.81-82].

Baseado neste teorema, temos a seguinte definição:

Definição 1.1.4. *Um número real α é chamado um **número de Liouville**, se existir uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ (com infinitos termos) de números racionais com $q_j > 1$ para todo $j \geq 1$, tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}, \text{ para todo } j \geq 1.$$

O conjunto dos números de Liouville (que veremos a seguir que não é vazio) será denotado por $\mathbb{L}$.

Exemplo 1.1. *A constante de Liouville*

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

é um número de Liouville. De fato, defina para cada natural n,

$$p_n = \sum_{j=1}^{n} 10^{n!-j!} \quad e \quad q_n = 10^{n!}.$$

Então, usando que $(r+s)! \geq r! + s$, *para quaisquer* $r, s \in \mathbb{N}$, *obtemos,*

$$\begin{aligned} \left| \ell - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-(n+j+1)!} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-(n+1)!-j} \\ &< 10^{-(n+1)!+1} \\ &< 10^{-(n)!n} \\ &= \frac{1}{q_n^n}. \end{aligned}$$

Portanto, ℓ *é um número de Liouville.*

Mais geralmente, se $b \geq 2$ é um inteiro, então $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n!}$ é um número de Liouville, onde $a_n \in \{1, \ldots, b-1\}$, para todo $n \geq 0$. Estes exemplos juntamente com o próximo teorema fornecem infinitos números transcendentes.

Teorema 1.1.5. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Prova. Ver [14, p.84].

Em 1962, P. Erdos [4] demonstrou que qualquer número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville e qualquer real não nulo pode ser expresso como produto de dois elementos de $\mathbb{L}$. Note que disto concluímos que $\mathbb{L}$ é não-enumerável, pois do contrário, teríamos que $\mathbb{R}$ seria enumerável, afinal a aplicação

$$\varphi : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

é sobrejetora.

O resultado de P. Erdos é surpreendente pois o conjunto dos números de Liouville tem a mesma medida (de Lebesgue) que qualquer conjunto enumerável, isto é, tem medida nula (ver [14, p. 85]). Assim, intuitivamente podemos pensar que apesar de $\mathbb{L}$ ser invisível quando disposto na reta real, os números de Liouville estão espalhados de maneira engenhosa sobre tal reta.

Como o conjuntos dos números transcendentes tem medida total, existem bem mais números transcendentes que números de Liouville. Após as descobertas de Liouville, o próximo marco importante na Teoria dos Números Transcendentes ocorreu em 1873, quando Charles Hermite provou a transcendência do número e de Euler. Em 1882, inspirado nas ideias de Hermite, Ferdinand von Lindemann provou a transcendência de π. Ele também demonstrou que a transcedência de e e π são casos particulares de um teorema mais geral.

Teorema 1.1.6 (Hermite-Lindemann). *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos distintos. Então, o conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ é linearmente independente sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Prova. Ver [14, p. 165-176].

Uma consequência direto do teorema anterior é:

Corolário 1.1.7 (Teorema de Lindemann). *Se α é um número algébrico não nulo, então e^α é um número transcendente.*

Prova. Como 0 e α são dois números algébricos distintos, temos pelo Teorema de Hermite-Lindemann que o conjunto $\{e^0, e^\alpha\}$ é linearmente independente sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Suponhamos por absurdo que e^α fosse algébrico, então 0 poderia ser escrito como a seguinte combinação linear com coeficientes algébricos não nulos

$$0 = e^\alpha \cdot e^0 - 1 \cdot e^\alpha,$$

contrariando a independência linear de $\{e^0, e^\alpha\}$ sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Portanto, e^α é transcendente. □

A partir do Teorema de Lindemann, obtemos que π é transcendente. De fato, se π fosse algébrico, então pelo Teorema de Lindemann, $e^{\pi i} = -1$ seria transcendente, o que é um absurdo. Assim, Lindemann foi o responsável por concluir a impossibilidade da quadratura do círculo, afinal tal probelma equivale ao fato do número π ser construtível (com régua e compasso), e nessa época, já se sabia que um número real construtível deveria ser algébrico e com grau sendo uma potência de 2.

Finalizamos esta seção com outras consequências do Teorema de Hermite-Lindemann. O resultado abaixo, juntamente com o Teorema de Lindemann, podem ser vistos como motivações para umas das questões norteadoras do estudo do comportamento aritmético de funções analíticas e transcendentes, a saber: uma função analítica e transcendente quase sempre assume valores transcendentes nos pontos algébricos de seu domínio? Discutiremos sobre esse assunto na terceira seção deste capítulo.

Proposição 1.1.8. *Seja α um algébrico não nulo. Então,* $\operatorname{sen}\alpha$ *e* $\cos\alpha$ *são números transcendentes.*

Prova. Uma vez que $0, i\alpha$ e $-i\alpha$ são algébricos distintos, segue pelo Teorema de Hermite-Lindemann que o conjunto $\beta = \{0, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$ é linearmente independente sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Por outro lado, se $\cos\alpha$ ou $\operatorname{sen}\alpha$ fosse algébrico, obteríamos a partir das igualdades

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{sen } \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

que β seria linearmente dependente sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, um absurdo. Portanto, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ são números transcendentes. □

Outro importante teorema da teoria transcendente dos números que usaremos para gerar exemplos de conjuntos excepecionais é o seguinte:

Teorema 1.1.9 (Gelfond-Schneider)**.** *Sejam $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0,1\}$ e $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}$. Então α^β é transcendente.*

Prova. Ver [14, p. 177 - 190].

1.2 Alguns resultados de Análise Complexa

Nesta seção, estudaremos alguns resultados advindos da Análise Complexa que são de fundamental importância para o estudo do comportamento aritmético de funções transcendentes, que começaremos a estudar na próxima seção.

A junção dos dois primeiros resultados que veremos fornecem uma ótima ferramenta para garantir a analiticidade de funções definidas por séries.

Teorema 1.2.1 (M-teste de Weierstrass)**.** *Seja $\{u_n : X \to \mathbb{C}\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções, onde X é um conjunto não vazio. Se existir uma sequência de constantes positivas $\{M_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\sum_{n\geq 1} M_n < \infty$ e para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$|u_n(x)| \leq M_n, \text{ para todo } x \in X,$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente em X.

Prova. Ver [3, p. 29].

Teorema 1.2.2. *Sejam $\{f_n : G \to \mathbb{C}\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções analíticas, onde $G \subseteq \mathbb{C}$ é um domínio (aberto e conexo). Se f_n converge uniformemente nas partes compactas de G para uma função $f : G \to \mathbb{C}$, então f é analítica em G e $f_n^{(k)}$ converge unifomemente nas partes compactas de G para $f^{(k)}$, para todo $k \geq 1$.*

Prova. Ver [3, Chapter VII].

Como uma consequência direta do teorema acima, temos:

Corolário 1.2.3. *Sejam $\{f_n : G \to \mathbb{C}\}$ uma sequência de funções analíticas, onde $G \subseteq \mathbb{C}$ é um domínio. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente nas partes compactas de G para uma função $f : G \to \mathbb{C}$, então f é analítica em G e para todo $k \geq 1$,*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \ \forall \ z \in G.$$

Prova. Ver [3, Chapter VII].

Na resolução do Problema B de Mahler envolvendo derivadas, por vezes definiremos subconjuntos a partir da união enuméravel de imagens inversas de uma quantidade finita de elementos por uma função analítica não constante. Em nossa construção, usamos fortemente que tais subconjuntos são enumeráveis. A garantia deste fato decorre dos dois próximos resultados:

Teorema 1.2.4 (Princípio da identidade para funções analíticas)**.** *Sejam $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica, onde G é um domínio. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é identicamente nula em G;*

(ii) *Existe um ponto $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$, para todo $n \geq 0$;*

(iii) *O conjunto $G = \{z \in G; f(z) = 0\}$ tem um ponto de acumulação que pertence a G.*

Prova. Ver [3, p.78]

No próximo resultado, usaremos que todo subconjunto infinito de um conjunto compacto K, em um espaço métrico M, tem um ponto de acumulação em M (ver [9, p. 233]).

Proposição 1.2.5. *Seja Y um subconjunto não enumerável de $\mathbb{C}$. Então Y tem um ponto de acumulação.*

Prova. Temos que $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} Y_n$, onde

$$Y_n = \{\alpha \in Y;\ n \leq \mathrm{Re}(\alpha) \leq n+1\},\ \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Como Y é não enúmeravel segue que existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que Y_r é não enumerável. Agora, $Y_r = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} X_n$, onde

$$X_n = \{\alpha \in Y_r;\ n \leq \mathrm{Im}(\alpha) \leq n+1\},\ \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Uma vez que Y_r é não enumerável, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que X_s é não enumerável. Mas X_s é um subconjunto da região quadrangular

$$Q_{r,s} = \{\alpha \in \mathbb{C};\ r \leq \mathrm{Re}(\alpha) \leq r+1 \text{ e } s \leq \mathrm{Im}(\alpha) \leq s+1\},$$

que é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Portanto X_s (e consequentemente Y) tem um ponto de acumulação em $\mathbb{C}$. □

Assim, se $f : G \to \mathbb{C}$ é uma função analítica não constante, onde G é um domínio, então $f^{-1}(X)$ é um conjunto enumerável para qualquer subconjunto finito X de G. Com efeito, suponhamos por absurdo que $f^{-1}(X)$ é não enúmeravel, onde X é um conjunto finito de G. Então, existe $x \in X$ tal que $f^{-1}(\{x\})$ é não enumerável, logo, pela proposição anteiror, $f^{-1}(\{x\})$ possui um ponto de acumulação em $\mathbb{C}$. Tal ponto de acumulação deve pertencer a $f^{(-1)}(\{x\})$ (e portanto, a $f^{-1}(X)$), pois $f^{-1}(\{x\})$ é fechado (imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua). Desse modo, pelo princípio da identidade, $f(z) = x$, para todo $z \in G$, um absurdo.

1.3 Funções transcendentes e os Problemas B e C de Mahler

Definição 1.3.1. *Uma função f analítica sobre um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é dita ser uma* ***função algébrica sobre*** $\mathbb{C}(z)$*, se existe um polinômio não nulo P em duas variáveis e com coeficientes complexos satisfazendo $P(z, f(z)) = 0$, para todo $z \in \Omega$. Quando f não for algébrica sobre $\mathbb{C}(z)$, dizemos que f é uma* ***função transcendente sobre*** $\mathbb{C}(z)$.

Exemplo 1.2. *Toda função racional (em particular, toda função polinomial) é algébrica. Com efeito, consideremos uma função racional $f : G \to \mathbb{C}$, dada por*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

onde $g(X)$ e $h(X)$ são polinômios com coeficientes complexos, com $h(X)$ não nulo e $G = \{\alpha \in \mathbb{C}; h(\alpha) \neq 0\}$. Defina o polinômio (não nulo) em duas variáveis $P(X,Y) = h(X)Y - g(X)$ pertencente a $\mathbb{C}[X,Y]$. Temos que $P(z, f(z)) = 0$, para todo $z \in G$, confirmando a algebricidade de f.

Responder se uma função analítica é ou não transcendente nem sempre é uma tarefa fácil. No entanto, para funções inteiras temos uma caracterização bastante útil.

Teorema 1.3.2. *Uma função inteira é algébrica se, e somente se, ela é uma função polinomial.*

Prova. Ver [8, p.14]

Uma outra prova deste resultado pode ser encontrado em [13, Capítulo 3].

Exemplo 1.3. *Segue diretamente do teorema anterior que as funções inteiras $e^z, \cos z$ e $\operatorname{sen} z$ são transcendentes.*

Após os resultados provados por Lindemann no século XIX, pôde-se constatar que a imagem de um número algébrico não nulo pelas três funções transcendentes listadas no Exemplo 1.3, é um número transcendente. Diante disso, surgiu a seguinte questão:

Questão. *Uma função analítica e transcendente quase sempre assume valores transcendentes nos pontos algébricos de seu domínio?*

Neste sentido, Straüs em 1886, tentou provar que uma função analítica e transcendente em uma vizinhança da origem, não podia assumir valores racionais em todos os pontos racionais do seu domínio. Entretanto, ele foi surpreendido quando Karl Weierstrass (1815 - 1897) apresentou-lhe um contraexemplo neste mesmo ano. Weierstrass também conjecturou que existiam funções inteiras e transcendentes que assumiam valores algébricos em todos os números algébricos. Tal conjectura foi confirmada por Paul Stäckel (1862 - 1919) que provou o seguinte resultado mais geral [21]: se Σ é um subconjunto enumerável de $\mathbb{C}$ e T é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$, então existe uma função inteira e transcendente f tal que $f(\Sigma) \subseteq T$. A conjectura de Weierstrass é obtida quando fazemos $\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}$. Neste contexto de comportamento aritmético de funções analíticas e transcendentes, Stäckel tem outros resultados, dos quais destacamos o seguinte, provado em [20].

Teorema de Stäckel. *Existe uma função transcendente*

$$f(z) = -z + \sum_{h=2}^{\infty} f_h z^h,$$

com coeficientes racionais, que converge em uma vizinhança da origem e tem a propriedade de que tanto $f(z)$ quanto sua função inversa, assim como todas as suas derivadas, assumem valores algébricos em todos os pontos algébricos desta vizinhança.

Baseado neste teorema, Kurt Mahler (1903 - 1988) em [12] questionou se este resultado (sem envolver derivadas) poderia ser estendido para funções inteiras e nomeou esta questão de Problema B. Transcrevemos abaixo exatamente o enunciado do problema proposto por Mahler em [12]:

Problem B. *Does there exist an entire transcendental function*

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h z^h$$

with rational coefficients f_h such that both $f(z)$ and its inverse function are algebraic in all algebraic points?

Como pelo Grande Teorema de Picard, uma função inteira e transcendente não é nem injetiva (quem dirá admitir inversa), acredita-se que Mahler quando enunciou o Problema B, na verdade estava se referindo a imagem inversa ao invés de função inversa, como pode parecer em uma primeira leitura. Este entendimento foi adotado por Marques e Moreira [16], que em 2017 resolveram o Problema B de Mahler, provando:

Teorema 1.3.3 (Cf. Theorem 1 of [16])**.** *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes $f(z)$ com coeficientes racionais tais que*

$$f(\overline{\mathbb{Q}}) = f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) = \overline{\mathbb{Q}},$$

onde $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ é a imagem inversa de $\overline{\mathbb{Q}}$ por f.

Marques e Moreira também forneceram em [17] uma generalização para o resultado anterior, substitutindo $\overline{\mathbb{Q}}$ por conjuntos X e Y que são densos em $\mathbb{C}$ e fechados para conjugaçao complexa (além de outras condições técnicas).

Uma vez que o Teorema de Stäckel (que motivou o questionamento de Mahler) envolvia derivadas, é natural perguntar se poderíamos estender o teorema anterior para uma versão envolvendo derivadas, como a seguir:

Problema B com derivadas. *Existe uma função inteira e transcendente $f(z)$ com coeficientes racionais tal que*

$$\left[f^{(j)}(\overline{\mathbb{Q}}) \cup \left(f^{(j)}\right)^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})\right] \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } j \geq 0?$$

Aqui $f^{(j)}$ denota a derivada de ordem j de f com $f^{(0)} = f$ e $\left(f^{(j)}\right)^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ denota a imagem inversa de $\overline{\mathbb{Q}}$ pela função $f^{(j)}$.

No segundo capítulo deste trabalho, faremos uma construção indutiva que fornece uma resposta afirmativa para esta questão.

Definição 1.3.4. *Dada uma função analítica $f : \Omega \to \mathbb{C}$, definimos o conjunto excepcional de f por*

$$S_f = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \Omega;\ f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}.$$

Exemplo 1.4. *Considere $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dadas por*

$$f(z) = e^z + e^{z+1},\ g(z) = \cos(z - \alpha),\ h(z) = 2^z,$$

onde α é um número complexo qualquer. Pelo teorema de Hermite-Lindemann, temos $S_f = \emptyset$. Com efeito, se $z \in \{0, -1\}$, então $f(z) \in \{e + 1, e^{-1} + 1\}$. Por outro lado, suponhamos por absurdo que $z \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, -1\}$ e que $f(z)$ seja algébrico. Em tal caso, os números algébricos 0, z e $z + 1$ são distintos e teríamos

$$-f(z)e^0 + 1 \cdot e^z + 1 \cdot e^{z+1} = 0,$$

o que contraria a independência linear de e^0, e^z e e^{z+1} sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, dada pelo Teorema de

Hermite-Lindemann. Segue diretamente da Proposição 1.1.8 que $S_g = \{\alpha\}$. Por fim, do Teorema de Gelfond-Schneider, obtemos que $S_h = \mathbb{Q}$.

Só existem duas opções para o conjunto excepcional de uma função inteira e algébrica, a saber, ou ele é um conjunto finito ou ele é todo $\overline{\mathbb{Q}}$ (ver [1, p.43-44])

Outro questão deixada em aberto por Mahler [12], a respeito do comportamento aritmético de funções analíticas, indagava sobre quais subconjuntos de $B(0,\rho)\cap\overline{\mathbb{Q}}$ podiam ser o conjunto excepcional de uma função transcendente, analítica em $B(0,\rho)$ e com coeficientes racionais cuja sua série de potências tenha raio de convergência ρ, onde $\rho \in (0,\infty]$. Denote por T_ρ o conjunto de todas as séries de potências

$$f(z) = \sum_{h\geq 0} f_h z^h$$

com coeficientes racionais e com raio de convergência ρ.

Problema C. *Existe para cada $S \subseteq B(0,\rho)\cap\overline{\mathbb{Q}}$, fechado para conjugação complexa e com $0 \in S$, uma função transcendente representada por uma série de potências em T_ρ tal que $S_f = S$?*

Esta pergunta foi motivada por resultados do próprio Mahler. Ele provou a existência de tais funções quando a hipótese de fechamento complexo era substituida pela condição mais forte de fechamento algébrico (isto é, se $\alpha \in S$ e β é um conjugado algébrico de α pertecente a $B(0,\rho)$, então $\beta \in S$). O Problema C quando $\rho = \infty$ (isto é, para funções inteiras) foi solucionado por Marques e Ramirez [18]. Em 2018, Marques e Moreira [15], forneceram uma resposta positiva ao Problema C para qualquer $\rho \in (0,\infty)$, respondendo completamente o Problema C de Mahler.

O último resultado deste trabalho se concentrou em responder uma versão multidimensional para o Problema C de Mahler no contexto de funções inteiras.

Problema C para funções inteiras em $\mathbb{C}^m$. *Existe para cada $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^m$, fechado para conjugação complexa e com $(0,\ldots,0) \in S$, uma função inteira e transcendente com coeficientes racionais tal que $S_f = S$?*

Conseguimos fornencer uma resposta afirmativa a esta questão, que será apresentada no terceiro capítulo desta tese.

Capítulo 2

Uma generalização do Problema B de Mahler envolvendo derivadas

No capítulo 3 do seu clássico livro [12], Kurt Mahler apresenta três problemas em abertos sobre o comportamento aritmético de funções analíticas e transcendentes, os quais ele nomeou de Problema A, Problema B e Problema C. Neste capítulo, abordaremos sobre o Problema B, que foi resolvido completamente por Marques e Moreira em [16]. O Problema B de Mahler foi motivado por um resultado devido a Stäckel, que enunciamos a seguir:

Teorema de Stäckel. *Existe uma função transcendente*

$$f(z) = -z + \sum_{h=2}^{\infty} f_h z^h,$$

com coeficientes racionais, que converge em uma vizinhança da origem e tem a propriedade de que, tanto $f(z)$, quanto sua inversa e suas derivadas, assumem valores algébricos em todos os pontos algébricos nesta vizinhança.

Baseado nesse teorema, Mahler questionou se este resultado (sem envolver derivadas) não poderia ser estendido para funções inteiras, e nomeou tal questão de Problema B. Precisamente, transcrevemos abaixo (ipsis litteris) o enunciado da questão proposta por Mahler:

Problem B. *Does there exist an entire transcendental function*

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h z^h$$

with rational coefficients f_h such that both $f(z)$ and its inverse function are algebraic in all algebraic points?

Uma tradução literal poderia nos levar a entender que Mahler estava questionando sobre a existência de uma função inteira e transcendente com coeficientes racionais tal que f e sua função inversa fossem algébricas em todos os pontos algébricos. No entanto, se assim fosse, a resposta seria negativa, pois pelo Grande Teorema de Picard, uma função inteira e transcendente não pode ser nem injetora, quem dirá admitir inversa, explicaremos este fato a seguir. Antes porém, necessitamos relembrar alguns fatos e resultados de Análise Complexa, começando por apresentar o Grande Teorema de Picard.

Grande Teorema de Picard. *Seja f uma função analítica que tem uma singularidade essencial em $z = b$. Então, em cada vizinhança de b, a função f assume cada valor complexo, com uma possível exceção, um número infinito de vezes.*

Prova. Ver [3, Chapter XII].

Definição 2.0.1. *Considere o conjunto $G = \{z; |z| > R\}$, onde $R > 0$. Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que:*

*(i) f tem uma **singularidade removível no infinito**, se a função $f(1/z)$ tem uma singularidade removível na origem.*

*(ii) f tem uma **polo de ordem m no infinito**, se a função $f(1/z)$ tem um polo de ordem m na origem.*

*(iii) f tem uma **singularidade essencial no infinito**, se a função $f(1/z)$ tem uma singularidade essencial na origem.*

A respeito de singularidades no infinito, temos a seguinte caracterização.

Proposição 2.0.2. *Seja f uma função inteira. Então:*

(a) f tem uma singularidade removível em ∞ se, e somente se, f é constante.

(b) f tem um polo de ordem m em ∞ se, e somente se, f é um polinômio de grau m.

Prova. Ver [3, Chapter V].

Portanto, se f é uma função inteira e transcendente, então pelo Teorema 1.3.2 ela não é polinomial, logo, pela Proposição 2.0.2, a função $g(z) = f(1/z)$ tem uma singularidade essencial em $z = 0$. Desse modo, pelo Grande Teorema de Picard, em cada vizinhança de 0, a função g (e portanto a função f) assume cada valor complexo, com uma possível exceção, um número infinito de vezes. Em particular, f não é injetora.

Acredita-se que Mahler, ao enunciar o Problema B, na verdade estava se referindo a imagem inversa em vez função inversa, como pode parecer em uma primeira leitura. Esse entendimento foi adotado por Marques e Moreira [16], que em 2017, resolveram o problema B de Mahler provando o seguinte resultado:

Teorema 2.0.3 (Cf. Theorem 1 of [16]). *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes $f(z)$ com coeficientes racionais tais que*

$$f(\overline{\mathbb{Q}}) = f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) = \overline{\mathbb{Q}},$$

onde $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ é a imagem inversa de $\overline{\mathbb{Q}}$ pela função f.

Como o resultado de Stäckel envolvia derivadas, é natural questionar se não poderíamos estender o teorema anterior para uma versão envolvendo derivadas, conforme a seguir:

Problema B com derivadas. *Existem funções inteiras e transcendentes f com coeficientes racionais tais que*

$$\left[f^{(j)}(\overline{\mathbb{Q}}) \cup \left(f^{(j)}\right)^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})\right] \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } j \geq 0?$$

Aqui $f^{(j)}$ denota a j-ésima derivada de f com $f^{(0)} = f$ e $\left(f^{(j)}\right)^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ denota a imagem inversa de $\overline{\mathbb{Q}}$ pela função $f^{(j)}$. Conseguimos demonstrar que tal questionamento também tem uma resposta afirmativa, e este é o resultado principal deste capítulo, que enunciamos a seguir:

Teorema 2.0.4. *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes f com coeficientes racionais tais que*

$$f^{(j)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \text{ e } \left(f^{(j)}\right)^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } j \geq 0.$$

Para demonstrar este resultado, adpatamos as técnicas de interpolação utilizadas por Marques e Moreira [16] na demonstração do Problema B de Mahler. Para uma exposição mais didática, revisaremos alguns fatos básicos sobre zeros de funções analíticas em uma variável complexa.

2.1 Zeros de funções analíticas em uma variável complexa

Nesta seção apresentaremos noções básicas sobre zeros de funções e resultados que são de fundamental importância na construção que fornece uma resposta positiva para o Problema B com derivadas.

Definição 2.1.1. *Sejam G um domínio e $f : G \to \mathbb{C}$ e uma função analítica. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é um **zero de** f se $f(\alpha) = 0$.*

Observação 2.1.2. *Quando α é um zero de uma função polinomial f, também dizemos que α é uma raiz de f.*

Dada uma função polinomial não constante f, sabemos que um número complexo α é raiz de f se, e somente se, existe uma outra função polinomial g tal que

$$f(z) = (z - \alpha)g(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

O próximo teorema pode ser interpretado como uma generalização deste resultado para funções analíticas.

Teorema 2.1.3. *Sejam D um domínio e f uma função analítica e não constante em D. Se $\alpha \in D$ é um zero de f, então existem um número natural m e uma função g analítica em D com $g(\alpha) \neq 0$ tais que*

$$f(z) = (z - \alpha)^m g(z), \textit{ para todo } z \in D.$$

Além disso, essa representação de f é única, isto é, se n é um número natural e h é uma função analítica em D com $h(\alpha) \neq 0$, satisfazendo

$$f(z) = (z - \alpha)^n h(z), \textit{ para todo } z \in D,$$

então $m = n$ e $g(z) = h(z)$, para todo $z \in D$.

Prova. Ver [5, Chapter 6].

Definição 2.1.4. *Sejam f, D e α conforme enunciado no teorema anterior. Dizemos que α é um **zero de multiplicidade** m **de** f.*

Observação 2.1.5. *Note que, se um elemento α do domínio D é um zero de multiplicidade m da função f, segue diretamente da Definição 2.1.4 e da regra do produto para derivadas que:*

$$m = \min\{n \in \mathbb{N};\ f^{(n)}(\alpha) \neq 0\}.$$

Sob certas hipóteses, é possível comparar a quantidade de zeros de duas funções analíticas em um domínio no qual ambas estão definidas. É sobre esse tópico que os próximos dois teoremas abordam.

Teorema de Rouché. *Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ um domínio e sejam $f, g : U \to \mathbb{C}$ funções analíticas. Seja $V \subseteq U$ uma região fechada e limitada cuja fronteira ∂V é uma curva suave por partes fechada e simples e tal que $V - \partial V$ é um domínio. Se*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \textit{ para todo } z \in \partial V, \tag{2.1}$$

então f e g tem o mesmo número de zeros no interior de V, cada um deles contado tantas vezes quanto for a sua multiplicidade.

Prova. Ver [19, Chapter 6].

Teorema de Hurwitz. *Sejam G um domínio e $\{f_n : G \to \mathbb{C}\}_n$ uma sequência de funções analíticas em G que converge uniformemente nas partes compactas de G para uma função não nula $f : G \to \mathbb{C}$. Se existe $R > 0$ tal que $\overline{B(a,R)} \subseteq G$ e f não se anula em nenhum ponto de $\partial B(a,r)$, então para n suficientemente grande, f e f_n tem o mesmo número de zeros (contando multiplicidades) em $B(a,R)$.*

Prova. Ver [3, Chapter VII].

Nas aplicações feitas neste trabalho, trabalharemos com funções inteiras e o conjunto V sempre será uma bola fechada. Nas notações do Teorema de Rouché, teremos $U = \mathbb{C}$ e $V = \overline{B(a,R)}$, com $R > 0$. Desta forma, para aplicar o Teorema de Rouché, nossa única preocupação será verificar se a desigualdade (2.1) é satisfeita.

Agora, estamos prontos para demonstrar o resultado principal deste capítulo.

2.2 Demonstração do Teorema 2.0.4

Denotaremos por $\mathbb{A} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$. Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ uma enumeração de $\overline{\mathbb{Q}}$ tal que

- $\alpha_1 = 0$;
- $\alpha_{3n-1}, \alpha_{3n} \notin \mathbb{R}$ com $\alpha_{3n-1} = \overline{\alpha}_{3n}$, para cada $n \geq 1$;
- $\alpha_{3n+1} \in \mathbb{R}$, para cada $n \geq 1$.

Construiremos a função desejada indutivamente. Iniciamos com $f_1(z) = z^2$ e $P_1(z) = 1$. Note que $f_1(\{\alpha_1\}) = f_1^{-1}(\{\alpha_1\}) = \{0\} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. Construiremos uma sequência de funções analíticas $f_2(z), f_3(z), \ldots$ da forma

$$f_m(z) = f_{m-1}(z) + \epsilon_m z^{m+1} P_m(z) = \sum_{i=2}^{t_m} a_i z^i,$$

com

(i) $f_m(z), P_m(z) \in \mathbb{A}[z] - \{0\}$, com $a_{t_m} \neq 0$, onde $t_m \geq m+1$;

(ii) $P_{m-1}(z) | P_m(z)$ e $P_m(0) \neq 0$;

(iii) $\epsilon_m \in \mathbb{A}$;

(iv) $0 < |\epsilon_m| < \dfrac{1}{L(P_m) m^{m+1+\deg P_m}} := \Gamma_m$;

(v) $a_2, \ldots, a_{m+1} \in \mathbb{Q} - \{0\}$,

onde $L(P_m)$ é o comprimento do polinômio P_m, dado pela soma dos valores absolutos de seus coeficientes. A função desejada terá a forma

$$f(z) = z^2 + \sum_{n \geq 2} \epsilon_n z^{n+1} P_n(z).$$

Agora, usando que $|P(z)| \leq L(P) \max\{1, |z|\}^{\deg P}$, para todo $P(z) \in \mathbb{C}[z]$, obtemos que para todo $z \in B(0, R)$,

$$|\epsilon_n z^{n+1} P_n(z)| < \frac{\max\{1, |z|\}^{n+1} L(P_n) \max\{1, |z|\}^{\deg P_n}}{L(P_n) n^{n+1+\deg P_n}} \leq \left(\frac{\max\{1, R\}}{n} \right)^{n+1+\deg P_n} := u_n.$$

Como $u_n < (1/2)^n$, para n suficientemente grande, segue pelo teste da comparação que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ converge, logo, pelo M-teste de Weierstrass, a série

$$f(z) = z^2 + \sum_{n \geq 2} \epsilon_n z^{n+1} P_n(z)$$

converge uniformemente em cada bola $B(0, R)$ (o que implica na convergência uniforme nas partes compactas de $\mathbb{C}$). Em particular, f é uma função inteira.

Suponhamos que tenhamos construído f_n satisfazendo as condições (i) a (v). Agora, construiremos f_{n+1} com as propriedades desejadas. Como f_n é um polinômio de grau maior que n, o conjunto A_n definido abaixo é finito

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{n} (f_n^{(j)})^{-1}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{3n+1}\}) = \{0, y_1, \ldots, y_s\}.$$

Então, definimos

$$f_{n+1}(z) = f_n(z) + \epsilon_{n+1} z^{n+2} P_{n+1}(z),$$

onde

$$P_{n+1}(z) = P_n(z)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_{3n+1}) \prod_{i=1}^{s} (z - y_i)^{\deg f_n + n + 1}$$

e ϵ_{n+1} será escolhido em breve. Note que $P_{n+1}(z) \in \mathbb{A}[z]$. Com efeito, se $y_k \notin \mathbb{R}$, como y_k é um zero de $f_n^{(j)}(z) - \alpha_i$, para alguns $j \in [0, \ldots, n]$ e $i \in [1, 3n+1]$ e $f_n(z) \in \mathbb{A}[z]$, temos que $\overline{y}_k$ é um zero de $f_n^{(j)}(z) - \overline{\alpha}_i$, e uma vez que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{3n+1}\}$ é fechado para conjugação complexa, segue que $\overline{y}_k \in A_n$. Desse modo, $P_{n+1}(z) \in \mathbb{A}[z]$, afinal, $P_n(z) \in \mathbb{A}[z]$ e o conjunto de números algébricos $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_{3n+1}, y_1, \ldots, y_s\}$ é composto de números reais e pares de números complexos (não reais) conjugados. Também, temos $P_{n+1}(0) \neq 0$, pois $P_n(0) \neq 0$ e $\alpha_2, \ldots, \alpha_{3n+1}, y_1, \ldots, y_s$ são não nulos. Como A_n é um conjunto finito, podemos escolher um real positivo r_{n+1} tal que

$$n+1 < r_{n+1} < n+2 \text{ e } A_n \cap \partial B(0, r_{n+1}) = \emptyset.$$

Então, para todos $j \in [0,n]$ e $i \in [1, 3n+1]$, temos $\min\limits_{|z|=r_{n+1}} |f_n^{(j)}(z) - \alpha_i| > 0$. Desse modo, podemos escolher ϵ_{n+1} satisfazendo

$$|\epsilon_{n+1}| < \frac{\min\limits_{|z|=r_{n+1}} |f_n^{(j)}(z) - \alpha_i|}{\max\limits_{0 \le k \le n} \max\limits_{|z|=r_{n+1}} |\left(z^{n+2} P_{n+1}(z)\right)^{(k)}|} = \Lambda_{i,j}, \ \forall\ i \in [1, 3n+1] \text{ e } \forall\ j \in [0,n]. \tag{2.2}$$

Logo, para quaisquer $j \in [0,n]$ e $i \in [1, 3n+1]$, obtemos que para todo $w \in \partial B(0, r_{n+1})$

$$\begin{aligned} \left|f_n^{(j)}(w) - \alpha_i\right| &\ge \min_{|z|=r_{n+1}} |f_n^{(j)}(z) - \alpha_i| \\ &> |\epsilon_{n+1}| |\max_{0 \le k \le r} \max_{|z|=r_{n+1}} |\left(z^{n+2} P_{n+1}(z)\right)^{(k)}| \\ &\ge |\epsilon_{n+1}| \left| \left[\left(z^{n+2} P_{n+1}(z)\right)^{(j)} \right]_{|z=w} \right| \\ &= |f_{n+1}^{(j)}(w) - \alpha_i - (f_n^{(j)}(w) - \alpha_i)|. \end{aligned}$$

Então, pelo teorema de Rouché, $f_n^{(j)}(z) - \alpha_i$ e $f_{n+1}^{(j)}(z) - \alpha_i$ têm o mesmo número de zeros (contando multiplicidades) em $B(0, r_{n+1})$, para quaisquer $j \in [0,n]$ e $i \in [1, 3n+1]$. Note que, se 0 é uma raiz de multiplicidade $m \ge 1$ de $f_n^{(j)}(z) - \alpha_i$, então 0 é uma raiz de multiplicidade m de $f_{n+1}^{(j)}(z) - \alpha_i$. Com efeito, se $j = 0$, como $f_n^{(0)}(z) = f_n(z)$ e $f_{n+1}^{(0)}(z) = f_{n+1}(z)$ tem os mesmos coeficientes até a ordem 2, sendo o coeficiente de ordem 2 não nulo, segue que $m = 2$ e 0 é uma raiz de multiplicidade $m = 2$ de $f_{n+1}^{(j)}(z) - \alpha_i$. Se $j \ge 1$, a multiplicidade m é igual a 1, pois

$$\left[\left(f_n^{(j)}(z) - \alpha_i\right)^{[1]}\right]_{|z=0} = f_n^{(j+1)}(0) = (j+1)! a_{j+1},$$

que é não nulo pois $2 \le j+1 \le n+1$ e $a_2, \ldots, a_{n+1}$ são não nulos. Uma vez que os coeficientes de $f_n(z)$ e $f_{n+1}(z)$ coincidem até a ordem $n+1$, temos $f_n^{(j)}(0) = f_{n+1}^{(j)}(0)$, para todo $j \in [0, n+1]$, de modo que $f_{n+1}^{(j)}(0) - \alpha_i = f_n^{(j)}(0) - \alpha_i = 0$ e

$$\left[\left(f_{n+1}^{(j)}(z) - \alpha_i\right)^{[1]}\right]_{|z=0} = f_{n+1}^{(j+1)}(0) = f_n^{(j+1)}(0) = (j+1)! a_{j+1} \neq 0,$$

portanto, 0 é uma raiz de multiplicidade $m = 1$ de $f_{n+1}^{(j)}(z) - \alpha_i$.

Por outro lado, se $\lambda \in B(0, r_{n+1}) - \{0\}$ é um zero de multiplicidade $m \ge 1$ de $f_n^{(j)}(z) - \alpha_i$, então $\lambda = y_l$ para algum $l \in \{1, \ldots, s\}$, de modo que λ é um zero de multiplicidade maior que $\deg f_n$ de $[z^{n+2} P_{n+1}(z)]^{(j)}$, afinal $j \le n$. Portanto, λ é um zero de multiplicidade m de $f_{n+1}^{(j)}(z)-\alpha_i$. Destes fatos, obtemos que os polinômios $f_{n+1}^{(j)}(z)-\alpha_i$ e $f_n^{(j)}(z)-\alpha_i$ (para quaisquer $j\in[0,n]$ e $i\in[1,3n+1]$) têm exatamente os mesmos zeros com as respectivas multiplicidades em $B(0,r_{n+1})$. Em particular, para todos $i\in[1,3n+1]$ e $j\in[0,n]$, temos

$$(f_n^{(j)})^{-1}(\alpha_i)\cap B(0,r_{n+1})=(f_{n+1}^{(j)})^{-1}(\alpha_i)\cap B(0,r_{n+1}). \tag{2.3}$$

Esse argumento certifica que em nossa construção nenhuma nova pré-imagem do conjunto $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{3n+1}\}$ por $f_{n+1}^{(j)}$ em $B(0,r_{n+1})$, com $j\in[0,n]$, aparecerá além daquelas que já existiam pela função $f_n^{(j)}$. Note também que, como $f_{n+1}\in\mathbb{A}[z]$ tem grau maior que n e $\overline{\mathbb{Q}}$ é algebricamente fechado, $f_{n+1}^{(j)}(\{\alpha_1,\dots,\alpha_{3n+1}\})$ e $\left(f_{n+1}^{(j)}\right)^{-1}(\{\alpha_1,\dots,\alpha_{3n+1}\})$, com $j\in[0,n]$, são subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Escrevamos

$$f_{n+1}(z)=\sum_{i=2}^{t_{n+1}}a_iz^i.$$

Os coeficientes de f_{n+1} da ordem 2 até a ordem $n+1$ coincidem com os coeficientes de f_n, e portanto, são racionais não nulos. Mostremos que é possível escolher $\epsilon_{n+1}\in\mathbb{A}$ satisfazendo (2.2), (iv) e tal que a_{n+2} também seja um número racional não nulo. De fato, seja c_{n+2} o coeficiente de z^{n+2} em $f_n(z)$, então

$$a_{n+2}=c_{n+2}+\epsilon_{n+1}P_{n+1}(0).$$

Como $P_{n+1}(0)\neq 0$, podemos escolher $p/q\in\mathbb{Q}-\{0\}$ tal que

$$0<|c_{n+2}-p/q|<|P_{n+1}(0)|\min\{\Gamma_{n+1},\Lambda_{1,0},\dots,\Lambda_{3n+1,0},\dots,\Lambda_{1,n}\dots,\Lambda_{3n+1,n}\}.$$

Definimos $\epsilon_{n+1}=(p/q-c_{n+2})/P_{n+1}(0)$, então $\epsilon_{n+1}\in\mathbb{A}$, satisfaz (iv) e (2.2) e além disso, $a_{n+2}=p/q\in\mathbb{Q}-\{0\}$.

Assim, por construção, a função $f(z)=z^2+\sum_{n=2}^{\infty}\epsilon_nz^{n+1}P_n(z)$ é uma função inteira e tem coeficientes racionais. Agora, vamos verificar que

$$f^{(j)}(\overline{\mathbb{Q}})\subseteq\overline{\mathbb{Q}} \text{ e } (f^{(j)})^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})\subseteq\overline{\mathbb{Q}}$$

para todo $j\geq 0$. Para isso, provaremos algumas afirmações.

Afirmação 1: Dado $i\in\mathbb{N}$, temos:

(A) $f_n(\alpha_i)=f_i(\alpha_i)$, para todo $n\geq i$;

(B) Para $j \in \mathbb{N}$, existe $m = m(j,i)$ tal que

$$f_n^{(j)}(\alpha_i) = f_m^{(j)}(\alpha_i) \text{ para todo } n \geq m;$$

(C) $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$.

Dem. da Afirmação 1: (A) Se $i = 1$, não há o que fazer pois $f_k(\alpha_1) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assumamos então que $2 \leq i \leq n$, nesse caso α_i é um zero dos polinômios $P_{i+1}(z), \ldots, P_n(z)$, e uma vez que,

$$f_n(z) = f_i(z) + \epsilon_{i+1} z^{i+2} P_{i+1}(z) + \ldots + \epsilon_n z^{n+1} P_n(z),$$

segue que $f_n(\alpha_i) = f_i(\alpha_i)$.
(B) Como a multiplicidade de α_i em P_n tende a infinito quando n tende a infinito, temos pela regra geral de Leibniz, que existe $m = m(j,i) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left[(z^{n+1}P_n(z))^{(j)}\right]_{|z=\alpha_i} = 0 \text{ para todo } n \geq m,$$

logo, segue (B).
(C) Temos

$$f(z) = z^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \epsilon_k z^{k+1} P_k(z) = z^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} [f_k(z) - f_{k-1}(z)] = \lim_{n\to\infty} f_n(z),$$

concluindo a prova da Afirmação 1.

Note que de (A) e de (C) obtemos que $f(\alpha_i) = f_i(\alpha_i) \in \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $i \geq 1$. Também, como f_n converge uniformemente para f nas partes compactas de $\mathbb{C}$, temos que $f_n^{(j)}$ converge uniformemente para $f^{(j)}$ nas partes compactas de $\mathbb{C}$, para todo $j \geq 1$. Disto e de (B), temos $f^{(j)}(\alpha_i) = \lim f_n^{(j)}(\alpha_i) = f_{m(j,i)}^{(j)}(\alpha_i) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Portanto, $f^{(j)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, para todo $j \geq 0$.

Observe que, se $i \leq 3n+1$ e $t, j \leq n$, então

$$(f_n^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0, r_t) = (f_{n+1}^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0, r_t). \tag{2.4}$$

Isso segue diretamente de (2.3) e de $r_t \leq r_{n+1}$.
Afirmação 2: Sejam i, t inteiros positivos, j um inteiro não negativo e $l = \max\{t, i, j\}$, então

$$(f_n^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0, r_t) = (f_l^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0, r_t) \text{ para todo } n \geq l.$$

Dem. da Afirmação 2: Se $n = l$ o resultado é óbvio, suponhamos então $n \geq l+1$. Nesse caso, $\max\{t,i,j\} = l \leq n-1$, donde $i \leq 3l+1 \leq 3(n-1)+1$, logo, por (2.4),

$$\begin{aligned}
\left(f_l^{(j)}\right)^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t) &= \left(f_{l+1}^{(j)}\right)^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t) \\
&= \qquad \vdots \\
&= \left(f_{n-1}^{(j)}\right)^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t), \\
&= \left(f_n^{(j)}\right)^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t),
\end{aligned}$$

provando a Afirmação 2.

A Afirmação 2 implica que

$$(f_l^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t) \subseteq (f^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t), \text{ onde } l = \max\{t,i,j\}.$$

De fato, seja $y \in (f_l^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t)$, então, pela Afirmação 2, segue que $f_n^{(j)}(y) = \alpha_i$ para todo $n \geq l$, e consequentemente, $f^{(j)}(y) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(j)}(y) = \alpha_i$. Portanto, y pertence $(f^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t)$. Afirmamos que

$$(f_l^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t) = (f^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t), \text{ onde } l = \max\{t,i,j\}. \tag{2.5}$$

Suponhamos por absurdo que exista $w \in (f^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t) \setminus (f_l^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t)$, então w estaria a uma distância positiva δ do conjunto finito $(f_l^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0,r_t)$. Seja

$$S = (f^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \bigcup \left[\bigcup_{n\geq l} (f_n^{(j)})^{-1}(\alpha_i)\right].$$

Como $f^{(j)}$ é inteira não constante (afinal $a_u \neq 0$ para todo $u \geq 2$) e para cada $n \geq l$, f_n é um polinômio de grau maior que l, que por sua vez é maior ou igual a j, temos que S é enumerável. Logo, é possível escolher $\beta < \delta$ tal que

$$B = B(w,\beta) \subset B(0,r_t) \text{ e } S \cap \partial B = \emptyset.$$

Como $f_n^{(j)}(z) - \alpha_i$ converge uniformemente nas partes compactas de $\mathbb{C}$ para a função inteira não nula $f^{(j)}(z) - \alpha_i$ e $f^{(j)}(z) - \alpha_i$ não se anula em nenhum ponto de ∂B, segue pelo Teorema de Hurwitz que $f^{(j)}(z) - \alpha_i$ e $f_n^{(j)}(z) - \alpha_i$ têm o mesmo número de zeros em $B(w,\beta)$ para n suficientemente grande. Mas, pela Afirmação 2, os zeros de $f_n^{(j)}(z) - \alpha_i$ e $f_l^{(j)}(z) - \alpha_i$ em $B(0,r_t)$ coincidem para $n \geq l$. Logo, como $f_l^{(j)}(z) - \alpha_i$ não tem zeros em $B(w,\beta)$, segue que para n suficientemente grande, $f_n^{(j)}(z) - \alpha_i$ não tem zeros em $B(w,\beta)$, e consequentemente, $f^{(j)}(z) - \alpha_i$ não tem zeros em $B(w,\beta)$. No entanto, $w \in B(w,\beta)$ e $f^{(j)}(w) - \alpha_i = 0$, uma contradição. Portanto, vale a igualdade (2.5). Disto segue que

$(f^{(j)})^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, para todo $j \geq 0$. De fato, basta notar que $(f^{(j)})^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(f^{(j)})^{-1}(\alpha_i)$, e usando (2.5), obtemos

$$(f^{(j)})^{-1}(\alpha_i) = \bigcup_{t=\max\{i,j\}}^{\infty} (f^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0, r_t) = \bigcup_{t=\max\{i,j\}}^{\infty} (f_t^{(j)})^{-1}(\alpha_i) \cap B(0, r_t) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

Por construção, f é uma função inteira e não é polinomial (pois seus coeficientes de ordem maior ou igual a 2 são não nulos), logo, f é uma função transcendente. Também, note que existe uma quantidade não enumerável de escolhas possíveis para f, pois em cada passo, temos infinitas possibilidades de escolhas para ϵ_{n+1} e assim também para a_{n+2}. Desse modo, construimos uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes f, com coeficientes racionais e tais que

$$\left[f^{(j)}(\overline{\mathbb{Q}}) \cup (f^{(j)})^{-1}(\overline{\mathbb{Q}})\right] \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } j \geq 0.$$

$\square$

Capítulo 3

Uma versão multidimensional do problema C de Mahler

Kurt Mahler [12] estabeleceu que, dados $\rho \in (0, \infty]$ e $S \subseteq B(0, \rho) \cap \overline{\mathbb{Q}}$ fechado para conjugação algébrica em $B(0, \rho)$ (isto é, se $\alpha \in S$ e β é um conjugado algébrico de α em $B(0, \rho)$, então $\beta \in S$) e com $0 \in S$, existe uma função f transcendente e analítica em $B(0, \rho)$ e com coeficientes racionais tal que $S_f = S$. Baseado neste resultado, em [12], ele questionou se seria possível enfraquecer a hipótese de fechamento algébrico para a condição (necessária) de fechamento complexo:

Problema C. *Seja $\rho \in (0, \infty]$ um número real. Existe para qualquer escolha de $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$ (fechado para conjugação complexa e tal que $0 \in S$) uma função transcendente e analítica $f \in \mathbb{Q}[[z]]$, com raio de convergência ρ, para a qual $S_f = S$?*

Em 2016, Marques e Ramirez [18] provaram que a resposta à questão acima é afirmativa para funções inteiras, isto é quando $\rho = \infty$. Na verdade, eles provaram um resultado mais geral sobre o comportamento da imagem de um conjunto enumerável A por algumas funções inteiras em termos de uma coleção enumerável de subconjuntos densos de $\mathbb{C}$. Enunciaremos este resultado como um lema, pois usaremos na demonstração de sua respectiva generalização (para o caso multidimensional):

Lema 3.0.1 (Cf. Theorem 1.3 of [18])**.** *Sejam A um subconjunto enumerável de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{K}$ um subconjunto denso de $\mathbb{C}$. Para cada $\alpha \in A$, fixe um subconjunto denso $E_\alpha \subseteq \mathbb{C}$. Então, existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes $f \in \mathbb{K}[[z]]$ tais que $f(\alpha) \in E_\alpha$, para todo $\alpha \in A$.*

Este resultado foi melhorado por Marques e Moreira em [15], que provaram que o Problema C de Mahler tem resposta afirmativa para qualquer $\rho \in (0, \infty]$.

Neste capítulo, consideraremos o Problema C de Mahler no contexto multidimenisonal de funções inteiras e transcendetes.

3.1 Funções algébricas e transcendentes no contexto multidimensional

A generalização dos conceitos de funções algébricas, funções transcendentes e conjuntos excepcionais para funções com mais de uma variável complexa é feita de maneira natural. Por questão completeza, nesta seção, iniciaremos abordando esses conceitos. Finalizaremos esta seção com a caracterização de funções inteiras e transcendentes no contexto multidimensional. Ao longo desta seção, m denotará um inteiro não negativo e dado um polinômio $P(X_1, \ldots, X_m) \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m]$, o conjunto de zeros de P em $\mathbb{C}^m$ será denotado por $Z(P)$.

Definição 3.1.1. *Uma função analítica f sobre um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^m$ (dizemos também que f é* ***inteira*** *se $\Omega = \mathbb{C}^m$) é dita* ***algébrica*** *sobre $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_m)$, se ela é a solução de uma equação polinomial*

$$P(z_1, \ldots, z_m, f(z_1, \ldots, z_m)) = 0, \ \forall\, (z_1, \ldots, z_m) \in \Omega,$$

para algum polinômio não nulo $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}]$. A função f é dita ***transcendente*** *se ela não for algébrica.*

Exemplo 3.1. *Qualquer função polinomial $f(z_1, \ldots, z_m)$ é uma função algébrica. De fato, considerando o polinômio não nulo $P(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}) = X_{m+1} - f(X_1, \ldots, X_m)$, temos*

$$P(z_1, \ldots, z_m, f(z_1, \ldots, z_m)) = 0, \ \forall\, (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m.$$

Mais geralmente, qualquer função racional (quociente de duas funções polinomiais) é uma função algébrica.

Para fornecer exemplos de funções inteiras e transcendentes com mais de uma variável, demonstraremos que vale para o caso multidimensional a mesma caracterização que temos para funções inteiras e algébricas em uma variável, a saber: uma função inteira é algébrica se, e somente se, é uma função polinomial.

Teorema 3.1.2. *Toda função $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ inteira e não polinomial é transcendente.*

Prova. Se $m = 1$ o resultado é válido. Suponhamos que o resultado valha para $m = n$. Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ uma função inteira que não é polinomial e suponhamos por absurdo que ela satisfaça a seguinte equação polinomial (não nula) de grau t

$$P_0(z_1, \ldots, z_{n+1}) + P_1(z_1, \ldots, z_{n+1}) f(z_1, \ldots, z_{n+1}) + \cdots + P_t(z_1, \ldots, z_{n+1}) f^t(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0,$$

para todo $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Como f é inteira e não é polinomial, existe $j \in [1, n+1]$, sem perda de generalidade, podemos supor $j = 1$, de tal modo que f não pode ser escrita como um polinômio em $z_j = z_1$ com coeficientes em $\mathbb{C}[z_2, \ldots, z_{n+1}]$. Assim, podemos escrever

$$f(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) = \sum_{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0} Q_{(i_1, \ldots, i_n)}(z_{n+1}) z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n},$$

onde o conjunto $X = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n \,;\, Q_{(i_1, \ldots, i_n)} \neq 0\}$ é infinito. Como P_t é um polinômio não nulo, digamos que de grau s quando visto como um polinômio no domínio $(\mathbb{C}[z_{n+1}])\,[z_1, \ldots, z_n]$, podemos escrever

$$P_t(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n \leq s} R_{(i_1, \ldots, i_n)}(z_{n+1}) z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n},$$

onde existe uma n-upla $(j_1, \ldots, j_n)$ de inteiros não negativos tal que $j_1 + \cdots + j_n = s$ e $R_{(j_1, \ldots, j_n)} \neq 0$.

Como o conjunto $\Gamma = \bigcup_{i \in X} Z(Q_i) \bigcup Z(R_{j_1, \ldots, j_n})$ é enumerável, podemos escolher um número complexo α não pertecente a Γ. Deste modo, a função inteira e não polinomial em n variáveis $g(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_n, \alpha)$ satisfaria a equação polinomial não nula

$$P_0(z_1, \ldots, z_n, \alpha) + P_1(z_1, \ldots, z_n, \alpha) g(z_1, \ldots, z_n) + \cdots + P_t(z_1, \ldots, z_n, \alpha) g^t(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

para todo $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Portanto, g seria algébrica, mas isso é um absurdo, pois g é uma função em n variáveis que é inteira e não é polinomial, de modo que, por hipótese indutiva, g é transcendente. Esse absurdo finaliza a demonstração. $\square$

Exemplo 3.2. *As funções $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, dadas por*

$$f(w, z) = e^{w+z} \text{ e } g(w, z) = e^{wz},$$

são transcendentes. De fato, como f e g são funções inteiras, pelo Teorema 3.1.2 basta que verifiquemos que f e g não são polinomiais. Note que $f(0, z) = g(1, z) = e^z$, logo, se f ou g fosse polinomial, obteríamos que a função exponencial (unidimensional) seria polinomial, o que é um abusrdo, afinal, tal função não admite zeros em $\mathbb{C}$.

Exemplo 3.3. *Consideremos a função $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, definida por*

$$f(z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m) = \prod_{i=1}^{m} \cos z_i,$$

onde $m \geq 2$. Afirmamos que f é uma função transcendente. Com efeito, note que f não é polinomial, pois do contrário a função inteira unidimensional $g(z) = (0, \ldots, 0, z) = \cos z$

seria uma função polinomial, o que não pode ser verdade pois $g(z) = \cos z$ é não nula e possui infinitos zeros, enquanto que uma função polinomial não nula unidimensional possui somente uma quantidade finita de zeros. Portanto, f é uma função inteira e não polinomial, de modo que ela é transcendente pelo Teorema 3.1.2. Analogamente, concluimos que a função inteira g, definida por

$$g(z_1, \ldots, z_m) = \cos\left(\prod_{i=1}^{m} z_i\right)$$

é uma função transcendente.

Dado um subconjunto $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ e uma função analítica f no polidisco $\Delta(0, \rho) := B(0, \rho_1) \times \cdots \times B(0, \rho_m) \subseteq \mathbb{C}^m$, para algum $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m) \in (0, \infty]^m$, dizemos que $f \in \mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_m]]$ se

$$f(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^m} c_{k_1,\ldots,k_m} z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m},$$

com $c_{k_1,\ldots,k_m} \in \mathbb{K}$, para todo $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ e para todo $(z_1, \ldots, z_m) \in \Delta(0, \rho)$.

Definição 3.1.3. *O conjunto excepcional S_f de uma função analítica $f : \Omega \subseteq \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, é definido por*

$$S_f := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Omega \cap \overline{\mathbb{Q}}^m : f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \overline{\mathbb{Q}}\}.$$

Exemplo 3.4. *Considere as funções inteiras e transcendentes $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, dadas por*

$$f(w, z) = e^{w+z} \quad e \quad g(w, z) = e^{wz}.$$

Então, pelo teorema de Hermite-Lindemann, temos

$$S_f = \{(\alpha, -\alpha) : \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\} \quad e \quad S_g = \left(\overline{\mathbb{Q}} \times \{0\}\right) \cup \left(\{0\} \times \overline{\mathbb{Q}}\right).$$

Exemplo 3.5. *Se $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ é uma função polinomial com coeficientes algébricos, então o conjunto excepcional de f é o maior possível, isto é, $S_f = \overline{\mathbb{Q}}^2$.*

Exemplo 3.6. *Qualquer subconjunto unitário $\{(a, b)\}$ de $\overline{\mathbb{Q}}^2$ é o conjunto excepcional de uma função inteira. De fato, basta considerar $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $f(w, z) = e^{w-a} + e^{z-b}$. Claramente $(a, b) \in S_f$. Seja (x, y) um elemento de $\overline{\mathbb{Q}}^2$ diferente de (a, b), mostraremos que $(x, y) \notin S_f$. Dividiremos em casos:*

Caso 1: *$x = a$.*

Nesse caso, $y \neq b$ e $f(x, y) = 1 + e^{y-b} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, pelo teorema de Lindemann.

Caso 2: *$x \neq a$ e $y = b$.*
Aqui, $f(x,y) = 1 + e^{x-a} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, pelo teorema de Lindemann.
Caso 3: *$x \neq a$ e $y \neq b$.*
Neste último caso,

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{x-a} + e^{y-b}, & se \quad x - a \neq y - b \\ 2e^{x-a} & se \quad x - a = y - b, \end{cases}$$

que não é algébrico pelo teorema de Hermite-Lindemann.
Em todos os três casos acima, (x,y) não pertence a S_f, como desejávamos.

De modo mais geral, qualquer subconjunto finito $\overline{\mathbb{Q}}^2$, é o conjunto excepcional de uma função inteira. Para provar isto, primeiramente observamos que se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números algébricos (não necessariamente distintos) com pelo menos um deles não nulo, então, segue pelo Teorema de Hermite-Lindemann que

$$e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_n}$$

é um número transcendente. Também introduziremos algumas notações para facilitar a escrita. O conjunto dos inteiros maiores que 0 e menores que $n+1$ será denotado por $[1,n]$. Denotaremos por T_n o conjunto das funções tendo como domínio $[1,n]$ e como contradomínio o conjunto $\{a,b\}$. Dada $\sigma \in T_n$, definimos $\sigma^* : [1,n] \to \{w,z\}$, dada por

$$\sigma^*(k) = \begin{cases} w, & \text{se} \quad \sigma(k) = a, \\ z, & \text{se} \quad \sigma(k) = b, \end{cases}$$

para todo $k \in [1,n]$.

Exemplo 3.7. *Qualquer conjunto finito $S = \{(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)\}$ de $\overline{\mathbb{Q}}^2$, é o conjunto excepcional de uma função inteira. Com efeito, basta considerar $f_n : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, dada por*

$$f_n(w,z) = \sum_{\sigma \in T_n} \exp\left[\prod_{i=1}^{n} (\sigma^*(i) - \sigma(i)_i)\right].$$

Por exemplo, para $n = 2$, temos

$$f_2(w,z) = e^{(w-a_1)(w-a_2)} + e^{(w-a_1)(z-b_2)} + e^{(z-b_1)(w-a_2)} + e^{(z-b_1)(z-b_2)}.$$

Claramente, $S \subseteq S_{f_n}$. Por outro lado, dado $(x,y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \setminus S$, temos dois casos a considerar:
Caso 1: *$x \neq a_i$, para todo $i \in [1,n]$.*
Neste caso, o expoente $(x-a_1)\cdots(x-a_n)$, que aparece no desenvolvimento de $f_n(x,y)$ é um algébrico não nulo, e conforme a observação anterior a este exemplo, temos que

$f_n(w,z)$ é transcendente.
Caso 2: *$x = a_j$, para algum $j \in [1,n]$.*
Se $x = a_i$, para todo $i \in [1,n]$, então $y \neq b_i$, para todo $i \in [1,n]$, de modo que o expoente $(y-b_1)\cdots(y-b_n)$, que aparece na expansão de $f_n(x,y)$ é um algébrico não nulo, e portanto, $f_n(x,y)$ é transcendente. Caso, contrário, consideremos os conjuntos não vazios

$$X = \{k \in [1,n]; x = a_k\} = \{i_1,\ldots,i_r\} \text{ e } [1,n] - X = \{j_1,\ldots,j_s\}.$$

Note que, se $k \in X$, então $y \neq b_k$, afinal $(x,y) \neq (a_k,b_k)$. Deste modo, o expoente $(x-a_{j_1})\cdots(x-a_{j_n})(y-b_{i_1})\cdots(y-b_{i_n})$, que ocorre no desenvolvimento de $f_n(x,y)$ é um algébrico não nulo, e consequentemente $f_n(x,y)$ é transcendente. Portanto, $S_{f_n} = S$.

Exemplo 3.8. *Consideremos a função $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, definida por $f(w,z) = 2^w z$. Então, pelo teorema de Gelfond-Schneider, temos $S_f = \left(\mathbb{Q} \times \overline{\mathbb{Q}}\right) \bigcup \left(\overline{\mathbb{Q}} \times \{0\}\right)$.*

Exemplo 3.9. *Seja $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ a função dada por $g(w,z) = e^w(e-1)+z$. Então, pelo teorema de Hermite-Lindemann, $S_g = \emptyset$.*

Apesar dos exemplos acima estarem enunciados em $\mathbb{C}^2$, eles podem ser, com pequenas adaptações, generalizados para $\mathbb{C}^m$, onde m é um inteiro qualquer maior ou igual 2. Neste sentindo, no Exemplo 3.4, considerando $P_1(X_1,\ldots,X_m),\ldots,P_n(X_1,\ldots,X_m) \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1,\ldots,X_m]$, então a função inteira

$$f(w_1,\ldots,w_m) = \exp\left(\prod_{k=1}^{n} P_k(w_1,\ldots,w_m)\right)$$

tem conjunto excepcional dado por

$$S_f = \bigcup_{k=1}^{n} Z(P_k) \cap \overline{\mathbb{Q}}^2.$$

3.2 O Problema C de Mahler para funções de várias variáveis

No resultado principal deste capítulo, provaremos que qualquer subconjunto S de $\overline{\mathbb{Q}}^m$ (sob simples condições) é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes em m variáveis e com coeficientes racionais. Precisamente:

Teorema 3.2.1. *Seja m um inteiro positivo. Então, qualquer subconjunto S de $\overline{\mathbb{Q}}^m$, fechado para conjugação complexa e tal que $(0,\ldots,0) \in S$, é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumarável de funções inteiras e transcendentes $f \in \mathbb{Q}[[z_1,\ldots,z_m]]$.*

Para demonstrar o teorema acima, provaremos um resultado mais geral, que mostra como podemos controlar a imagem de um conjunto enumerável X de $\mathbb{C}^m$, por uma quantidade não enumuerável de funções multidimensionais inteiras e transcendentes (com coeficientes em um denso de $\mathbb{C}$) em termos de uma coleção $\{E_u\}_{u\in X}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{C}$, conforme a seguir:

Teorema 3.2.2. *Sejam X um subconjunto enumerável de $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{K}$ um subconjunto denso de $\mathbb{C}$. Para cada $u \in X$, fixe um subconjunto denso $E_u \subseteq \mathbb{C}$ e suponha que, se $(0,\dots,0) \in X$, então $E_{(0,\dots,0)} \cap \mathbb{K} \neq \emptyset$. Então, existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes $f \in \mathbb{K}[[z_1,\dots,z_m]]$ tais que $f(u) \in E_u$, para todo $u \in X$.*

Este último teorema é uma extensão para o caso multidimensional de um resultado devido a Marques e Ramirez [18, Theorem 1.3] (caso $m = 1$). Para provar o Teorema 3.2.2 precisaremos de um resultado auxiliar, o qual provaremos a seguir. Dados $u = (u_1,\dots,u_m), v = (v_1,\dots,v_m) \in \mathbb{C}^m$, o produto interno usual de u por v em $\mathbb{C}^m$ será denotado por $u \cdot v$, isto é,

$$u \cdot v = u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

Seja S um subconjunto de $\mathbb{C}^m$. Definimos o *o conjunto ortogonal a S* por

$$S^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^m;\ v \cdot w = 0,\ \forall\ w \in S\}.$$

Dado um subespaço vetorial (sobre $\mathbb{C}$) W de $\mathbb{C}^m$, temos que $W^{\perp}$ é um subespaço vetorial (sobre $\mathbb{C}$) de $\mathbb{C}^m$ e além disso, $\mathbb{C}^m$ é soma direta de W com $W^{\perp}$, isto é, $\mathbb{C}^m = W \oplus W^{\perp}$ (ver [2, p.191-192]).

Lema 3.2.3. *Sejam $u = (u_1,\dots,u_m)$ e $v = (v_1,\dots,v_m)$ pertencentes a $\mathbb{C}^m \setminus \{(0,\dots,0)\}$ com $u \neq v$, onde $m \geq 2$. Então existe um hiperplano*

$$H_{u,v} := \{(z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{C}^m; \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_m z_m - \lambda = 0\}$$

tal que $u \in H, v \notin H$ e $\lambda \neq 0$.

Prova. Primeiramente, consideraremos o caso em que o vetor $u \in \mathbb{C}v = \{\alpha v; \alpha \in \mathbb{C}\}$. Assim, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $u = \alpha v$. Como $u \notin \{(0,\dots,0), v\}$, temos $\alpha \notin \{0,1\}$. Logo, em tal caso, basta considerar $H_{u,v}$ como sendo o hiperplano dado por

$$(z_1 - u_1,\dots,z_m - u_m) \cdot (v_1,\dots,v_m) = 0,$$

isto é,

$$H_{u,v} : \{(z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{C}^m;\ \overline{v}_1 z_1 + \cdots + \overline{v}_m z_m - \lambda = 0\},$$

onde $\lambda = u \cdot v = \alpha||v||^2 \neq 0$. Obviamente, $u \in H_{u,v}$. Também, $v \notin H_{u,v}$, pois do contrário, teríamos $(1-\alpha)||v||^2 = 0$, o que é impossível pois $\alpha \neq 1$ e $v \neq (0,\ldots,0)$.

Por outro lado, se $u \notin \mathbb{C}v$, considere o subespaço ortogonal a $\mathbb{C}v$, a saber,

$$(\mathbb{C}v)^{\perp} = \{w \in \mathbb{C}^m;\ v \cdot w = 0\}.$$

Como $\mathbb{C}^m = (\mathbb{C}v) \oplus (\mathbb{C}v)^{\perp}$, temos que a dimensão (sobre $\mathbb{C}$) de $(\mathbb{C}v)^{\perp}$ é igual $m-1$, a qual é positiva pois $m \geq 2$. Seja $\beta = \{v_2,\ldots,v_m\} \subseteq \mathbb{C}^m$ uma base de $(\mathbb{C}v)^{\perp}$. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos supor, sem perda de generalidade, que β é um conjunto ortogonal, isto é, os vetores de β são dois a dois ortogonais. Note que u não pode ser ortogonal a todos vetores da base β. De fato, suponhamos por absurdo que $u \cdot v_i = 0$, para todo $i = 2,\ldots m$. Uma vez que $\{v\} \cup \beta$ é uma base de $\mathbb{C}^m$, existem números complexos $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$u = \alpha v + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m.$$

Então, efetuando o produto interno de u por v_i, para $i = 2,\ldots,m$, obteríamos

$$0 = u \cdot v_i = \alpha(v \cdot v_i) + \alpha_2(v_2 \cdot v_i) + \ldots + \alpha_m(v_m \cdot v_i).$$

Como os elementos de β são ortogonais dois a dois e $\beta \subseteq (\mathbb{C}v)^{\perp}$, a igualdade acima se resumiria a

$$0 = \alpha_i ||v_i||^2,$$

donde segue que $\alpha_i = 0$. Assim, $\alpha_i = 0$ para todo $i = 2,\ldots,m$, contrariando o fato de u não pertencer a $\mathbb{C}v$. Deste modo, podemos considerar $b = (b_1,\ldots,b_m) \in \mathbb{C}^m$ não nulo, ortogonal a v e não ortogonal u. Então, definimos $H_{u,v}$ como sendo o hiperplano dado por

$$(z_1 - u_1, \ldots, z_n - u_m) \cdot (b_1, \ldots, b_m) = 0,$$

ou seja,

$$H_{u,v} : \{(z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m;\ \overline{b_1} z_1 + \cdots + \overline{b_m} z_m - \lambda = 0\},$$

onde $\lambda = u \cdot b \neq 0$. Claramente $u \in H$, e como $(v-u)\cdot b = v \cdot b - u \cdot b = -u \cdot b \neq 0$, temos que $v \notin H_{u,v}$, finalizando a demonstração. $\square$

Agora, dispomos de todas as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema 3.2.1 e o Teorema 3.2.2. Começaremos demonstrando que o segundo teorema implica na prova do primeiro, e posteriormente provaremos o segundo.

Prova de que o Teorema 3.2.2 implica no Teorema 3.2.1

Consideremos $X = \overline{\mathbb{Q}}^m$, que é enumerável, e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}^* + i\mathbb{Q}^*$, que é denso em $\mathbb{C}$, onde $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Escrevamos $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ e $\overline{\mathbb{Q}}^m \setminus S = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ (um deles pode ser finito). Então, definimos

$$E_u := \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}, & \text{se} \quad u \in S, \\ \mathbb{K} \cdot \pi^n, & \text{se} \quad u = \beta_n, \text{ para algum } n \geq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Pelo Teorema 3.2.2, existe um conjunto não enumerável Γ de funções inteiras e transcendentes

$$f(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0} c_{k_1, \ldots, k_m} z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m} \in \mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_m]]$$

tal que $f(u) \in E_u$, para todo $u \in \overline{\mathbb{Q}}^m$.

Para cada $f \in \Gamma$, definimos as seguintes funções inteiras em $\mathbb{Q}^*[[z_1, \ldots, z_m]]$ (que são transcendentes, afinal, são funções inteiras e não polinomiais)

$$\psi_f(z_1, \ldots, z_m) := \frac{f(z_1, \ldots, z_m) + \overline{f(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m})}}{2} = \sum_{k_1 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0} \mathrm{Re}(c_{k_1, \ldots, k_m}) z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m},$$

$$\varphi_f(z_1, \ldots, z_m) := \frac{-if(z_1, \ldots, z_m) + i\overline{f(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m})}}{2} = \sum_{k_1 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0} \mathrm{Im}(c_{k_1, \ldots, k_m}) z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m}.$$

Note que $\mathcal{G} = \{\psi_f;\ f \in \Gamma\} \cup \{\varphi_f;\ f \in \Gamma\}$ é não enumerável, pois do contrário $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ seria enumerável e consequentemente a imagem da aplicação

$$\begin{array}{rccc} \xi: & \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \to & \mathcal{F}(\mathbb{C}^m; \mathbb{C}) \\ & (\psi, \varphi) & \mapsto & \psi + i\varphi \end{array}$$

que contém Γ, seria enumerável, o que é um absurdo. Portanto, para concluir esta demonstração, é suficiente provar que $S_{\psi_f} = S_{\varphi_f} = S$, para qualquer $f \in \Gamma$, e é isso que faremos agora. Se $u = (u_1, \ldots, u_m) \in S$, então $\overline{u} = (\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) \in S$, pois S é fechado para conjugação complexa. Assim, $f(u) \in E_u = \overline{\mathbb{Q}}$ e $f(\overline{u}) \in E_{\overline{u}} = \overline{\mathbb{Q}}$, e consequentemente, $\psi_f(u), \varphi_f(u) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Quando $u = \beta_n$, para algum $n \geq 1$, dividimos em dois casos:

Caso 1: $u = \beta_n \in \mathbb{R}^m$.

Neste caso, temos $\psi_f(u), \varphi_f(u) \in \mathbb{R}$ e $f(u) = \psi_f(u) + i\varphi_f(u) \in E_u = (\mathbb{Q}^* + i\mathbb{Q}^*)\pi^n$, logo, $\psi_f(u), \varphi_f(u) \in \mathbb{Q}^*\pi^n$, e portanto, são transcendentes.

Caso 2: $u = \beta_n \notin \mathbb{R}^m$.

Nesse caso, como S é fechado para conjugação complexa, existe um natural $m \neq n$, tal que $\overline{u} = \beta_m$. Assim,

$$\psi_f(u) = \frac{f(\beta_n) + \overline{f(\beta_m)}}{2} \quad \text{e} \quad \varphi_f(u) = \frac{-if(\beta_n) + i\overline{f(\beta_m)}}{2}.$$

Como $f(\beta_r) \in (\mathbb{Q}^* + i\mathbb{Q}^*)\pi^r$, para todo $r \geq 1$, segue que existem números algébricos não nulos $\gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \lambda_2$ tais que

$$\psi_f(u) = \frac{\gamma_1\pi^n + \gamma_2\pi^m}{2} \quad \text{e} \quad \varphi_f(u) = \frac{\gamma_1\pi^n + \gamma_2\pi^m}{2}.$$

Logo, como π é transcendente e $\overline{\mathbb{Q}}$ é algebricamente fechado, segue que $\psi_f(u), \varphi_f(u)$ são transcendentes. Portanto, $S_{\varphi_f} = S_{\psi_f} = S$, como desejávamos. $\square$

Prova do Teorema 3.2.2

A prova será por inducão sobre m. O caso $m = 1$ está provado pelo Lemma 3.0.1, feito por Marques e Ramirez [18]. Para um melhor entendimento, faremos a demonstração do caso $m = 2$, antes da segunda etapa do processo indutivo. Assim, seja X um subconjunto enumerável de $\mathbb{C}^2$ tal que para cada $u \in X$, nós temos um subconjunto denso E_u de $\mathbb{C}$. Sem perda de generalidade, podemos supor $(0,0) \in X$, e neste caso, $E_{(0,0)} \cap \mathbb{K} \neq \emptyset$. Seja $a_0 \in E_{(0,0)} \cap \mathbb{K}$. Considere a seguinte partição de X :

$$X = \{(0,0)\} \cup X_1 \cup X_2 \cup X^*,$$

onde $X_1 = X \cap (\mathbb{C}^* \times \{0\})$, $X_2 = X \cap (\{0\} \times \mathbb{C}^*)$ e $X^* = X \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$.

Nosso objetivo é mostrar que existe uma quantidade não enumerável de formas de construir uma função inteira e transcendente $f \in \mathbb{K}[[w,z]]$, dada por

$$f(w,z) = a_0 + wf_1(w) + zf_2(z) + f^*(w,z)$$

tal que:

(i) $f^*(x,0) = f^*(0,x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{C}$;

(ii) $f_1(\alpha) \in \dfrac{E_{(\alpha,0)} - a_0}{\alpha}$, $\forall\ (\alpha,0) \in X_1$ e $f_2(\beta) \in \dfrac{E_{(0,\beta)} - a_0}{\beta}$, $\forall\ (0,\beta) \in X_2$;

(iii) $f^*(\alpha,\beta) \in E_{(\alpha,\beta)} - \alpha f_1(\alpha) - \beta f_2(\beta) - a_0$, $\forall\ (\alpha,\beta) \in X^*$.

Observe que de (i), (ii) e (iii) e da definição de f segue que $f(u) \in E_u$, para todo $u \in X$.

Primeiramente, sejam $\{(\alpha_1,0), (\alpha_2,0), \ldots\}$ e $\{(0,\beta_1), (0,\beta_2), \ldots\}$ enumerações de X_1 e X_2, respectivamente. Como α_i e β_i são não nulos para todo $i \geq 1$ e E_u é denso em $\mathbb{C}$ para todo $u \in X$, segue pelo Lema 3.0.1 que existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes $f_1 \in \mathbb{K}[[w]]$ e $f_2 \in \mathbb{K}[[z]]$ tais que

$$f_1(\alpha_i) \in \frac{E_{(\alpha_i,0)} - a_0}{\alpha_i} \text{ e } f_2(\beta_i) \in \frac{E_{(0,\beta_i)} - a_0}{\beta_i}, \text{ para todo } i \geq 1.$$

Agora, seja $\{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots\}$ uma enumeração de X^*. Construiremos a função

$$f^*(w, z) = \sum_{n \geq 2} P_n(w, z) = \sum_{i \geq 1, j \geq 1} c_{i,j} w^i z^j \in \mathbb{K}[[w, z]],$$

onde $P_n(w, z)$ é um polinômio homogêneo de grau n, composto por monômios que tem grau positivo tanto em w quanto em z, e além disso, os coeficientes $c_{i,j} \in \mathbb{K}$ serão escolhidos convenientemente de modo que sejam satisfeitas as condições desejadas.

Nossa primeira condição é:

$$0 < |c_{i,j}| < s_{i+j} := \frac{1}{(i+j-1)(i+j)!}, \text{ para todos } i \geq 1, j \geq 1.$$

Denote por $L(P)$ o comprimento do polinômio $P(w, z) \in \mathbb{K}[w, z]$, dado pela soma dos valores absolutos de seus coeficientes. Como

$$|P_n(w, z)| \leq L(P_n) \max\{1, |w|, |z|\}^n, \text{ para todo } (w, z) \in \mathbb{C}^2,$$

nós temos que para todos $n \geq 2$ e (w, z) pertencente a $B((0, 0), R)$

$$|P_n(w, z)| \leq (|c_{1,n-1}| + \cdots + |c_{n-1,1}|) \max\{1, R\}^n \leq \frac{\max\{1, R\}^n}{n!}.$$

Portanto, a série $\sum_{n \geq 2} P_n(w, z)$ converge uniformemente em qualquer uma destas bolas, consequentemente f^* é uma função inteira. Além disso, por construção, $f^*(x, 0) = f^*(0, x)$, para todo $x \in \mathbb{C}$.

Dado um natural n, com o objetivo de construir o polinômio P_n, observe que para cada inteiro $j \in [1, n]$, existem infinitas retas (em $\mathbb{C}^2$) passando por (α_j, β_j), e como $(\alpha_j, \beta_j), (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ e a origem são dois a dois distintos, no máximo duas dessas infinitas retas passam pela origem ou por $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$. Consideremos então, uma reta

$$\pi_{n,j} : z - \mu_{n,j} w = \lambda_{n,j}$$

que passa por (α_j, β_j) mas não passa (a_{n+1}, β_{n+1}) e nem pela origem, desta última condição, segue que $\lambda_{n,j} \neq 0$. Então, definimos

$$A_n(w,z) = \prod_{j=1}^{n}(z - \mu_{n,j}w - \lambda_{n,j}), \text{ para cada } n \geq 1.$$

Note que, os polinômios A_n satistafazem as seguintes propriedades:

(I) $A_n(\alpha_j, \beta_j) = 0$, para $j \in [1, n]$;

(II) $A_n(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \neq 0$ e $A_n(0,0) \neq 0$.

Para simplificar a escrita, denotaremos

$$\Theta_i := a_0 + \alpha_i f_1(\alpha_i) + \beta_i f_2(\beta_i) \text{ e } \lambda_i = \prod_{j=1}^{i}(-\lambda_{i,j}) \text{ para cada } i \geq 1.$$

Construiremos recursivamente funções polinomias $f_1^*, f_2^*, \ldots$ em $\mathbb{K}[[w,z]]$ da seguinte forma. Primeiramente escolha $\delta_{1,0} \in B(0, s_2/2)$ tal que

$$\Theta_1 + \delta_{1,0}\alpha_1\beta_1 \in E_{(\alpha_1,\beta_1)},$$

o que é possível pois $E_{(\alpha_1,\beta_1)}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$ e $\alpha_1\beta_1 \neq 0$. De fato, basta escolher $\delta_{1,0} \in \left(\dfrac{E_{(\alpha_1,\beta_1)} - \Theta_1}{\alpha_1\beta_1}\right) \cap B(0, s_2/2)$. Então, nós definimos

$$f_{1,0}^*(w,z) = \delta_{1,0}wz.$$

Como $\mathbb{K}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$ e $\lambda_1 \neq 0$, existe $\delta_{1,1} \in \mathbb{C}$ tal que o coeficiente $c_{1,1} = \delta_{1,0} + \lambda_1\delta_{1,1}$ na função

$$f_{1,1}^*(w,z) = f_{1,0}^*(w,z) + \delta_{1,1}wzA_1(w,z) = (\delta_{1,0} + \lambda_1\delta_{1,1})wz + \delta_{1,1}wz^2 - \delta_{1,1}\mu_{1,1}w^2z$$

pertença a $\mathbb{K}^* \cap B(0, s_2)$. Com efeito, basta escolher $\delta_{1,1} \in \left(\dfrac{\mathbb{K}^* - \delta_{1,0}}{\lambda_1}\right) \cap B(0, s_2(2|\lambda_1|)^{-1})$. Desse modo, definimos

$$f_1^*(w,z) = f_{1,1}^*(w,z) \text{ e } P_2(w,z) = c_{1,1}wz.$$

Agora, no segundo passo, como $E_{(\alpha_2,\beta_2)}$ é denso em $\mathbb{C}$ e $\alpha_2\beta_2A_1(\alpha_2,\beta_2) \neq 0$, podemos escolher $\delta_{2,0} \in B(0, s_3/3)$ tal que a função

$$f_{2,0}^*(w,z) = f_1^*(w,z) + \delta_{2,0}w^2zA_1(w,z)$$

satisfaça $\Theta_2 + f^*_{2,0}(\alpha_2, \beta_2) \in E_{(\alpha_2,\beta_2)}$.

Como $\mathbb{K}$ é denso em $\mathbb{C}$ e $\lambda_2 \neq 0$, existem $\epsilon_{2,1}$ e $\delta_{2,1}$ tais que os coeficientes $c_{1,2} = \delta_{1,1} + \lambda_2\epsilon_{2,1}$ e $c_{2,1} = -\delta_{1,1}\mu_{1,1} + \delta_{2,0}\lambda_1 + \delta_{2,1}\lambda_2$ na função

$$f^*_{2,1}(w,z) = f^*_{2,0}(w,z) + \left(\delta_{2,2}w^2z + \delta_{2,1}wz^2\right) A_2(w,z) = c_{1,1}wz + c_{1,2}wz^2 + c_{2,1}w^2z + K_1(w,z)$$

pertencem a $\mathbb{K}^* \cap B(0, s_3)$. De fato, basta escolher

$$\epsilon_{2,1} \in B\left(\frac{-\delta_{1,1}}{\lambda_2}, \frac{s_3}{|\lambda_2|}\right) \bigcap \left(\frac{K^* - \delta_{1,1}}{\lambda_2}\right) \text{ e } \delta_{2,1} \in B\left(\frac{\eta}{\lambda_2}, \frac{s_3}{|\lambda_2|}\right) \bigcap \left(\frac{K^* + \eta}{\lambda_2}\right),$$

onde $\eta = \delta_{1,1}\mu_{1,1} - \delta_{2,0}\lambda_1$. Assim, definimos

$$f^*_2(w,z) = f^*_{2,1}(w,z) \text{ e } P_3(w,z) = c_{1,2}wz^2 + c_{2,1}w^2z \in \mathbb{K}[w,z].$$

Recursivamente, podemos construir a função

$$f^*_{n,0}(w,z) = f^*_{n-1}(w,z) + \delta_{n,0}w^n z A_{n-1}(w,z),$$

onde $\delta_{n,0} \in B(0, s_{n+1}/n+1)$ é escolhido de modo que

$$\Theta_n + f^*_{n,0}(\alpha_n, \beta_n) \in E_{(\alpha_n,\beta_n)},$$

o que é possível pela densidade de $E_{(\alpha_n,\beta_n)}$ em $\mathbb{C}$ e pelo fato de $A_{n-1}(\alpha_n, \beta_n)$ ser não nulo.

Agora, pela densidade de $\mathbb{K}$ e pelo fato de λ_n ser não nulo, podemos escolher números complexos $\delta_{n,i}$ e $\epsilon_{n,i}$ tais que os coeficientes de $c_{n+1-i,i}$ e $c_{i,n+1-i}$ de $w^{n+1-i}z^i$ e $w^i z^{n+1-i}$, respectivamente, na função

$$f^*_{n,i}(w,z) = f^*_{n,i-1}(w,z) + \left(\delta_{n,i}w^{n+1-i}z^i + \epsilon_{n,i}w^i z^{n+1-i}\right) A_n(w,z),$$

pertençam a $\mathbb{K}^* \cap B(0, s_{n+1})$, para todo $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = t_n$. Então, definimos

$$f^*_n(w,z) = f^*_{n,t_n}(w,z) \text{ e } P_{n+1}(w,z) = c_{n,1}w^n z + \ldots + c_{1,n}wz^n.$$

Note que $|c_{i,j}| < s_{n+1}$, para todo par (i,j) tal que $i,j \geq 1$ e $i+j = n+1$.

Esta construção implica que a sequência de funções $\{f^*_n\}_n$ converge para uma função inteira e transcendente $f^* \in \mathbb{K}[[w,z]]$ quando $n \to \infty$ de tal modo que

$$f^*(\alpha_j, \beta_j) = f^*_n(\alpha_j, \beta_j) = f^*_j(\alpha_j, \beta_j)$$

para todo $n \geq j \geq 1$. Note que, por construção, temos $f^*(x,0) = f^*(0,x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$. Além disso, os coeficientes $c_{i,j}$ de f^*, com $i, j \geq 1$, pertencem a $\mathbb{K}$ e

$$\Theta_i + f^*(\alpha_i, \beta_i) = \Theta_i + f_i^*(\alpha_i, \beta_i) \in E_{(\alpha_i,\beta_i)}, \text{ para todo } \ i \geq 1.$$

Logo, definindo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ como sendo a função inteira dada por

$$f(w,z) = a_0 + wf_1(w) + zf_2(z) + f^*(w,z),$$

nós temos que $f \in \mathbb{K}[[w,z]]$ e $f(u) \in E_u$, para todo $u \in X$. Como f é uma função inteira e não é polinomial, segue pelo Teorema 3.1.2 que f é transcendente. Por último, note que existe uma quantidade não enumerável de escolhas das constantes $\delta_{n,j}$ e $\epsilon_{n,j}$, o que implica em uma quantidade não enumerável de maneiras diferentes de definir a função f, completando a demonstração do caso $m = 2$.

Agora, provaremos a segunda etapa do processo indutivo. Suponhamos então que o teorema valha para todo inteiro positivo $j \in [1, m-1]$, ou seja, se $\mathbb{K}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$ e X é subconjunto de $\mathbb{C}^j$ tal que para cada $u \in X$, está fixado um subconjunto denso $E_u \subseteq \mathbb{C}$, então existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes $f \in \mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_j]]$ de tal modo que $f(u) \in E_u$, para todo $u \in X$, e isto é verdadeiro para qualquer inteiro $j \in [1, m-1]$.

Consideremos então, X um subconjunto enumerável de $\mathbb{C}^m$, para o qual E_u é um subconjunto denso fixado de $\mathbb{C}$, para cada $u \in X$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $(0, \ldots, 0) \in X$. Neste caso, por hipótese, nós temos que $\mathbb{K} \cap E_{(0,\ldots,0)} \neq \emptyset$. Com o intuito de aplicar a hipótese de indução, consideraremos a seguinte partição de X :

$$X = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_m} X_S,$$

onde $\mathcal{P}_m$ denota o conjunto das partes de $[1,m] = \{1, \ldots, m\}$ e X_S denota o conjunto de todos $z = (z_1, \ldots, z_m) \in X \subseteq \mathbb{C}^m$ tal que $z_i \neq 0$ se, e somente se, $i \in S$. Em particular, temos $X_\emptyset = \{(0, \ldots, 0)\}$ e $X_{[1,m]} = X \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\})^m$.

Dados $S = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{Q}_m = \mathcal{P}_m \setminus \{\emptyset, [1,m]\}$ e $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, denotaremos por z_S o elemento $(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}) \in \mathbb{C}^k$. Aqui, e em toda a demonstração, com o propósito de simplificar a exposição, estaremos assumindo sempre que $i_1 < \ldots < i_k$, para todo $S = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{Q}_m$. Nosso objetivo é mostrar que existe uma quantidade não enumerável de formas de construir uma função inteira e transcendente $f \in \mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_m]]$, dada por

$$f(z_1,\dots,z_m) = a_0 + \left(\sum_{S\in\mathcal{Q}_m}\left(\prod_{i\in S} z_i\right) f_S(z_S)\right) + f^*(z_1,\dots,z_m),$$

onde $a_0 \in E_{(0,\dots,0)} \cap \mathbb{K}$ e para todo $S = \{i_1,\dots,i_k\} \in \mathcal{Q}_m$, temos que $f_S : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ é uma função inteira transcendente tal que

$$f_S(u_S) \in \frac{1}{\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}} \cdot (E_u - \Theta_{S,u}) := E_{S,u}, \tag{3.2}$$

para todo $u = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in X_S$, com

$$\Theta_{S,u} = a_0 + \sum_{T\in\mathcal{Q}_m, T\neq S}\left(\prod_{i\in T}\alpha_i\right) f_T(u_T) \in \mathbb{C}.$$

Observe que, por hipótese de indução, f_S existe para todo $S = \{i_1,\dots,i_k\}$ em $\mathcal{Q}_m$. De fato, como cada E_u é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$ e $\alpha_{i_1},\dots\alpha_{i_k}$ são números complexos não nulos, segue que cada $E_{S,u}$ também é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$, e então por hipótese indutiva, podemos escolher f_S satisfazendo (3.2). Além disso, construiremos a função $f^*(z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{K}[[z_1,\dots,z_m]]$ satisfazendo a condição

$$f^*(u) \in \left(E_u - a_0 - \sum_{S\in\mathcal{Q}_m}\left(\prod_{i\in S}\alpha_i\right) f_S(u_S)\right), \tag{3.3}$$

para todo $u = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in X_{[1,m]}$ e $f^*(z_1,\dots,z_m) = 0$ sempre que $z_i = 0$ para algum $i \in [1,m]$, em particular, sempre que $z \in X \setminus X_{[1,m]}$. Note que, sob estas condições, segue diretamente que, se $S \in \mathcal{Q}_m$ e $u \in X_S$, então $f^*(u) = 0$ e $f(u) \in E_u$.

Para construir a função $f^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, consideremos $\{u_1, u_2, \dots\}$ uma enumeração de $X_{[1,m]}$, onde denotaremos $u_j = (\alpha_1^{(j)},\dots,\alpha_m^{(j)})$. Nossa função $f^* \in \mathbb{K}[[z_1,\dots,z_m]]$ será dada por

$$f^*(z_1,\dots,z_m) = \sum_{n=m}^{\infty} P_n(z_1,\dots,z_m) = \sum_{i_1\geq 1,\dots,i_m\geq 1} c_{i_1,\dots,i_m} z_1^{i_1}\cdots z_m^{i_m},$$

onde P_n é um polinômio homogêneo de grau n, composto por monômios que têm grau positivo em cada variável e os coeficientes $c_{i_1,\dots,i_m} \in \mathbb{K}$ serão escolhidos convenientemente de modo que f^* satisfaça as propriedades desejadas.

A primeira condição é

$$|c_{i_1,\ldots,i_m}| < s_{i_1+\cdots+i_m} := \frac{1}{\binom{i_1+\cdots+i_m-1}{m-1}(i_1+\cdots+i_m)!},$$

onde $c_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0$ para infinitas m-uplas de inteiros $i_1 \geq 1 \ldots i_m \geq 1$. Esta condição garante que f^* é uma funcão inteira. Com efeito, denotaremos por $L(P)$ o comprimento do polinômio $P(z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_m]$, dado pela soma dos valores absolutos de seus coeficientes. Como

$$|P_n(z_1,\ldots,z_m)| \leq L(P_n)\max\{1,|z_1|,\ldots,|z_m|\}^n,$$

temos que para todo $n \geq m$ e $(z_1,\ldots,z_m)$ pertencente à bola aberta $B((0,\ldots,0),R)$,

$$|P_n(z_1,\ldots,z_m)| < \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n-1}{m-1}n!}\max\{1,R\}^n = \frac{\max\{1,R\}^n}{n!},$$

onde usamos que $P_n(z_1,\ldots,z_m)$ tem no máximo $\binom{n-1}{m-1}$ monômios de grau n nos quais cada variável aparece com grau positivo. Assim, a série $\sum_{n\geq m} P_n(z_1,\ldots,z_m)$ converge uniformemente em qualquer uma destas bolas, e consequentemente, f^* é uma função inteira. Note que $f^*(0,z_2,\ldots,z_m) = f^*(z_1,0,z_3,\ldots,z_m) = f^*(z_1,z_2,\ldots,0) = 0$, para todos $z_1,\ldots,z_m \in \mathbb{C}$.

Para que obtenhamos que os coeficientes $c_{i_1,\ldots,i_m}$ pertençam a $\mathbb{K}$ de modo que f^* satisfaça a condição (3.3), usaremos o Lema 3.2.3. Por tal resultado, dado um natural n, para cada inteiro positivo $j \in [1,n]$, podemos considerar um hiperplano

$$\pi(n,j) : \mu_{n,1}^{(j)} z_1 + \cdots + \mu_{n,m}^{(j)} z_m - \lambda_n^{(j)} = 0$$

tal que u_j pertença a $\pi(n,j)$, u_{n+1} não pertença $\pi(n,j)$ e $\lambda_n^{(j)} \neq 0$.

Agora, definimos os polinômios $A_0(z_1,\ldots,z_m) := z_1\cdots z_m$ e

$$A_n(z_1,\ldots,z_m) := \prod_{j=1}^{n}(\mu_{n,1}^{(j)} z_1 + \cdots + \mu_{n,m}^{(j)} z_m - \lambda_n^{(j)}),$$

para todo $n \geq 1$. Pela definição de $\pi(n,j)$, temos que $A_n(u_j) = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$. Também temos que $A_n(u_{n+1})$ e $A_n(0,\ldots,0)$ são não nulos para todo $n \geq 1$. Pela densidade de E_{u_1} em $\mathbb{C}$ e pelo fato de todas as coordenadas de u_1 serem não nulas, podemos definir a função

$$f_{1,0}^*(z_1,\ldots,z_m) := \delta_{1,0}A_0(z_1,\ldots,z_m) = \delta_{1,0}z_1\cdots z_m,$$

de tal modo que $\Theta_1 + f^*_{1,0}(u_1) \in E_{u_1}$ e $0 < |\delta_{1,0}| < s_m/m$, onde

$$\Theta_j := a_0 + \sum_{S \in \mathcal{Q}_m} \left(\prod_{i \in S} \alpha_i^{(j)} \right) f_S(u_{j,S})$$

e $u_{j,S} = (\alpha_{i_1}^{(j)}, \ldots, \alpha_{i_k}^{(j)})$, para todo $S = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{Q}_m$ e para todo inteiro $j \geq 1$.

Além disso, como $\mathbb{K}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$ e $A_1(0, \ldots, 0) \neq 0$, podemos escolher $\delta_{1,1} \in \mathbb{C}$ tal que o coeficiente $c_{1,1,\ldots,1}$ de $z_1 \cdots z_m$ na função

$$f^*_{1,1}(z_1, \ldots, z_m) := f^*_{1,0}(z_1, \ldots, z_m) + \delta_{1,1} z_1 \cdots z_m A_1(z_1, \ldots, z_m)$$

pertença a $\mathbb{K}$ com $|c_{1,1,\ldots,1}| < s_m$. Com efeito, basta escolher

$$\delta_{1,1} \in B\left(\frac{\delta_{1,0}}{\lambda_1^{(1)}}, \frac{s_m}{|\lambda_1^{(1)}|} \right) \bigcap \left(\frac{\delta_{1,0} - \mathbb{K}}{\lambda_1^{(1)}} \right).$$

Então, definimos

$$f^*_1(z_1, \ldots, z_m) := f^*_{1,1}(z_1, \ldots, z_m), \text{ com } P_m(z_1, \ldots, z_m) = c_{1,1,\ldots,1} z_1 \cdots z_m.$$

Para a construção de f^*_2, iniciamos observando que como E_{u_2} é denso em $\mathbb{C}$, todas as coordenadas de u_2 são não nulas e $A_1(u_2) \neq 0$, podemos escolher $\delta_{2,0}$ com $0 < |\delta_{2,0}| < s_{m+1}/(m+1)$ tal que a função

$$f^*_{2,0}(z_1, \ldots, z_m) = f^*_1(z_1, \ldots, z_m) + \delta_{2,0} z_1^2 z_2 \cdots z_m A_1(z_1, \ldots, z_m)$$

satisfaça $\Theta_2 + f^*_{2,0}(u_2) \in E_{u_2}$.

Agora, ordenamos os monômios de grau $m+1$ com grau positivo em cada variável pela ordem lexicográfica de seus expoentes, isto é, primeiro o monômio $z_1 \ldots z_{m-1} z_m^2$ e por último o monômio $z_1^2 z_2 \ldots z_m$. Pela densidade de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{C}$ e pelo fato de $\lambda_2^{(1)}$ e $\lambda_2^{(2)}$ serem não nulos, podemos escolher uma constante $\delta_{2,l}$ tal que o coeficiente $c_{j_1,\ldots,j_m}$ do l-ésimo monômio (segundo a ordenação lexicográfica feita acima) $z_1^{j_1} \cdots z_m^{j_m}$ na função

$$f^*_{2,l}(z_1, \ldots, z_m) := f^*_{2,l-1}(z_1, \ldots, z_m) + \delta_{2,l} z_1^{j_1} \cdots z_m^{j_m} A_2(z_1, \ldots, z_m)$$

seja um elemento de $\mathbb{K}$ com $|c_{j_1,\ldots,j_m}| < s_{m+1}$. De fato, basta escolher

$$\delta_{2,l} \in B\left(\frac{-b}{\lambda_2}, \frac{s_{m+1}}{|\lambda_2|} \right) \bigcap \left(\frac{\mathbb{K} - b}{\lambda_2} \right),$$

onde $\lambda_2 = \lambda_2^{(1)}\lambda_2^{(2)}$ e b é o coeficiente de $z_1^{j_1}\cdots z_m^{j_m}$ em $f_{2,l-1}$. Desse modo, definimos

$$f_2^*(z_1,\ldots,z_m) := f_{2,L}^*(z_1,\ldots,z_m) \text{ e } P_{m+1}(z_1,\ldots,z_m) = \sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in B_{m+1}} c_{j_1,\ldots,j_m} z_1^{j_1}\cdots z_m^{j_m}.$$

onde $B_{m+1} = \{(j_1,\ldots,j_m)\in\mathbb{N}^m;\ j_1+\cdots+j_m = m+1\}$ e L é a cardinalidade de B_{m+1}. Portanto, temos que $f_2^*(z_1,\ldots,z_m)$ é uma função polinomial tal que $c_{j_1,\ldots,j_m}\in\mathbb{K}$, para toda m-upla $(j_1,\ldots,j_m)$ tal que $j_1,\ldots,j_m\geq 1$ e $j_1+\cdots+j_m\leq m+1$ e $\Theta_2+f_2^*(u_2)\in E_{u_2}$.

Recursivamente, podemos construir uma função $f_{n,0}^*(z_1,\ldots,z_m)$, dada por

$$f_{n,0}^*(z_1,\ldots,z_m) := f_{n-1}^*(z_1,\ldots,z_m) + \delta_{n,0} z_1^n z_2\cdots z_m A_{n-1}(z_1,\ldots,z_m)$$

onde $\delta_{n,0}\neq 0$ é escolhido na bola $B(0, s_{n+m-1}/(n+m-1))$ de tal modo que

$$\Theta_n + f_{n,0}^*(u_n)\in E_{u_n},$$

o que é possível pois E_{u_n} é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$, todas as coordenadas de u_n são não nulas e $A_{n-1}(u_n)\neq 0$.

Agora, ordenamos os monômios de grau $n+m-1$ com grau positivo em cada variável pela ordem lexicográfica de seus expoentes, isto é, primeiro o monômio $z_1\ldots z_{m-1}z_m^n$ e por último o monômio $z_1^n z_2\ldots z_m$. Como $\mathbb{K}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$ e $A_n(0,\ldots,0)\neq 0$, podemos escolher uma constante $\delta_{n,l}$ tal que o coeficiente $c_{j_1,\ldots,j_m}$ do l-ésimo monômio $z_1^{j_1}\cdots z_m^{j_m}$ na função

$$f_{n,l}^*(z_1,\ldots,z_m) := f_{n,l-1}^*(z_1,\ldots,z_m) + \delta_{n,l} z_1^{j_1}\cdots z_m^{j_m} A_n(z_1,\ldots,z_m)$$

pertença a $\mathbb{K}$ com $|c_{j_1,\ldots,j_m}| < s_{n+m-1}$. Assim, definimos

$$f_n^*(z_1,\ldots,z_m) := f_{n,M}^*(z_1,\ldots,z_m)$$

$$P_{m+n-1}(z_1,\ldots,z_m) = \sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in B_{m+n-1}} c_{j_1,\ldots,j_m} z_1^{j_1}\cdots z_m^{j_m}.$$

onde $B_{m+n-1} = \{(j_1,\ldots,j_m)\in\mathbb{N}^m;\ j_1+\cdots+j_m = m+n-1\}$ e M é a cardinalidade de B_{n+m-1}. Portanto, temos que $f_n^*(z_1,\ldots,z_m)$ é uma função polinomial tal que $c_{j_1,\ldots,j_m}\in\mathbb{K}$, para toda m-upla $(j_1,\ldots,j_m)$ tal que $j_1,\ldots,j_m\geq 1$ e $j_1+\cdots+j_m\leq m+n-1$ e além disso, $f_n^*(u_i)+\Theta_i\in E_{u_i}$, para todo $i\in[1,n]$.

Finalmente, esta construção implica que a sequência de funções $\{f_n^*\}_n$ converge para a função inteira $f^* \in \mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_m]]$ quando $n \to \infty$ de tal modo que

$$f^*(u_j) = f_n^*(u_j) = f_j^*(u_j)$$

para todo $n \geq j \geq 1$. Assim, definindo $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ como sendo a função inteira dada por

$$f(z_1, \ldots, z_m) = a_0 + \left(\sum_{S \in \mathcal{Q}_m} \left(\prod_{i \in S} z_i \right) f_S(z_S) \right) + f^*(z_1, \ldots, z_m),$$

nós temos que $f \in \mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_m]]$, $f(u) \in E_u$ para todo $u \in X$. Como f é uma função inteira e não é polinomial, segue pelo Teorema 3.1.2 que f é transcendente. Por último, note que existe uma quantidade não enumerável de escolhas das constantes $\delta_{n,j}$, o que implica em uma quantidade não emumerável de maneiras diferentes de definir a função f, concluindo a demonstração. $\square$

Bibliografia

[1] J.J.R. Aguirre, *Sobre o comportamento aritmético de funções transcendentes*, Tese de doutorado, Universidade Brasília, Brasil, 2016.

[2] F.U. Coelho, M.L. Lourenço, *Um curso de álgebra linear*, 2. ed., São Paulo: Edusp, 2018.

[3] J.B. Conway, *Functions of one complex variable I*, 2 ed., New York: Springer-Verlag, 1978.

[4] P. Erdös, Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers, *Michigan Math. J.* 9 (1962), 59-60.

[5] C.S. Fernades, N.C. Bernandes, *Introdução às funções de uma variável complexa*, 4 ed., Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[6] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, 7. ed., Londres: Pearson, 2002.

[7] C. Hermite, Sur la fonction exponentielle, *C. R.* 77 (1873), 18-24.

[8] A.S.B. Holland, *An introduciton to the theory of entire functions*, 1 ed., New York: Academic Press, 1973.

[9] E.L. Lima, *Espaços métricos*, 1 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[10] F. Lindemann, Über die Zahl π, *Math. Annalen* 20 (1882), 213-225.

[11] J. Liouville, Sur des classes très-étendue de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni mêne reductibles à des irrationelles algébriques, *C. R* 18 (1844), 883-885.

[12] K. Mahler, *Lectures on Transcendental Numbers*, Lecture Notes in Math., vol. 546, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[13] D. Marques, *O problema de Lang e uma generalização dos teoremas de Stackel*, Tese de doutorado, Universidade Brasília, Brasil, 2009.

[14] D. Marques, *Teoria dos Números Transcendentes*, 1. ed., Rio de Janeiro: SBM,2013.

[15] D. Marques, C.G. Moreira, A note on a complete solution of a problem posed by Mahler, *Bull. Aust. Math. Soc.* 98 (2018), (1) 60-63.

[16] D. Marques, C.G. Moreira, A positive answer for a question proposed by K. Mahler, *Mathematische Annalen* 368 (2017) 1059-1062.

[17] D. Marques, C.G. Moreira, On a stronger version of a question proposed by K.Mahler, *Journal Number Theory* 194 (2019), 372 - 380.

[18] D. Marques, J. Ramirez, On exceptional sets: the solution of a problem posed by K. Mahler, *Bull. Aust. Math. Soc.* 94 (2016), 15–19.

[19] M.G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, 5 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[20] P. Stäckel, Arithmetische eingenschaften analytischer Functionen, *Acta Math.* 25 (1902), 371-383.

[21] P. Stäckel, Ueber arithmetische Eingenschaften analytischer Functionen, *Math. Ann.* 46 (1895), 513–520.

[22] M. Waldschmidt, Algebraic values of analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.* 160 (2003), 323–333.