Um estudo sobre as soluções de um problema elíptico com crescimento crítico no gradiente

Leandro Oliveira Rezende

Orientadora: Dra. Manuela Caetano Martins de Rezende

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre em Matemática*

Brasília, 15 de Dezembro de 2023

Dedico este trabalho ao meu irmão Henrique.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais pelo apoio necessário para que eu pudesse seguir o caminho que eu sigo. Agradeço a minha orientadora, professora Manuela Rezende, por sua dedicação e atenção, durante todo o período do meu mestrado, e também ao professor Elves Alves, por contribuições cruciais durante a escrita deste trabalho. Agradeço a todos os bons professores que tive durante minha vida, desde o ensino básico, mas principalmente durante meus estudos na área de matemática. Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro, que me possibilitou focar no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço aos membros integrantes da banca, professores Claudiney Goulart, Ricardo Ruviaro e Marcelo Furtado, pela leitura atenciosa, correções e sugestões, que sem dúvida despenderam tempo valioso para garantir a qualidade desta dissertação. Finalmente, agradeço aos meus amigos, que formaram e ainda formam uma rede de apoio essencial para mim. Eu tento aprender com vocês todos os dias.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as soluções do problema

$$-\Delta u = c(x)u + \mu(x)|\nabla u|^2 + f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

em que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$ e $c, f \in L^q(\Omega)$, para algum $q > \dfrac{N}{2}$. Inicialmente, baseados no artigo de Jeanjean e Quoirin (2016), supondo que c pode trocar de sinal, c^+ não identicamente nula, $f \gneqq 0$ e μ é uma constante positiva, utilizamos um argumento de semicontinuidade inferior e o Teorema do Passo da Montanha para encontrarmos duas soluções distintas para o problema. A seguir, baseados nos artigos de De Coster e Fernández (2018), (2020), supondo que $c \leq 0$ e μ é uma constante positiva, encontramos uma condição necessária e suficiente para que o problema possua solução. Por fim, usamos o método de sub e supersolução para mostrarmos que a existência de solução se mantém quando $\mu \in L^\infty(\Omega)$.

Abstract

In this work, we study the solutions for the problem

$$-\Delta u = c(x)u + \mu(x)|\nabla u|^2 + f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

in which Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$ and $c, f \in L^q(\Omega)$, for some $q > \dfrac{N}{2}$. Firstly, based on Jeanjean and Quoirin (2016), we suppose c is allowed to change sign, $c^+ \not\equiv 0$, $f \gneqq 0$, $\mu > 0$ constant, and, using a lower semicontinuity argument together with the Mountain Pass Theorem, we find two distinct solutions for our problem. Then, based on De Coster and Fernández (2018), (2020), supposing $c \lneqq 0$ and $\mu > 0$ constant, we find a necessary and sufficient condition such that our problem has a solution. Finally, using the lower and upper solutions method, we show the existence of solutions is kept when $\mu \in L^\infty(\Omega)$.

Conteúdo

Notações

$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$\overline{\Omega}$	Fecho do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$C(X, Y)$	Espaço das funções contínuas de X em Y
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espaço das aplicações lineares contínuas de X em Y
$C^k(\Omega)$	Espaço das funções de classe C^k em Ω, $1 \leq k \leq \infty, k \in \mathbb{N}$
$C_0^k(\Omega)$	Espaço das funções de classe C^k com suporte compacto em Ω
$C^{k,\alpha}$	Espaço das funções Hölder contínuas de classe C^k
$L^p(\Omega)$	Espaço de Lebesgue usual
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev usual
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espaço dual de $W^{k,p}(\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$	Fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ na norma de $W^{1,2}(\Omega)$
$L^k(\Omega)^{N\times N}$	Espaço das matrizes quadradas $N \times N$ com elementos em $L^k(\Omega)$
$T\|_X$	Restrição da aplicação T ao conjunto X
$\|\|.\|\|$	Norma usual do espaço $H_0^1(\Omega)$
$\|\|.\|\|_*$	Norma usual do espaço dual de $H_0^1(\Omega)$
$\|\|.\|\|_p$	Norma usual do espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$
$\|\|.\|\|_X$	Norma dada no espaço X
$B_r(x)$	Bola aberta centrada em $x \in \Omega$ e de raio r
Id	Função Identidade
$Supp(f)$	O suporte da função f em $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq +\infty$
$\|\Omega\|$	A medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$d(x, y)$	A distância entre os pontos $x \in \Omega$ e $y \in \Omega$
$\subset\subset$	Compactamente contido
$X \hookrightarrow Y$	X é imerso em Y
$u_n \rightharpoonup u$	u_n converge fracamente para u
f^+	$\max\{0, f\}$
f^-	$\max\{0, -f\}$
χ_A	Função característica do conjunto A

Introdução

O estudo de problemas quasilineares com dependência do gradiente até o expoente crítico vem sendo feito desde pelo menos 1965, com o artigo "Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder" [24], publicado por Jean Leray e Jacques-Louis Lions. Nele, os autores demonstraram a existência de soluções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, para o problema

$$\begin{cases} -div(a(x,u,\nabla u)) = F(x,u,\nabla u), \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ são duas funções Carathéodory satisfazendo as seguintes propriedades ([9]):

(1) existe $\beta > 0$ tal que $|a(x,s,\zeta)| \leq \beta[|s|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}]$;

(2) existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $\zeta \in \mathbb{R}^N$, $a(x,s,\zeta) \cdot \zeta \geq \alpha|\zeta|^p$;

(3) $[a(x,s,\zeta) - a(x,s,\eta)] \cdot [\zeta - \eta] > 0$, se $\zeta \neq \eta$;

(4) existe $f \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $|F(x,s,\zeta)| \leq f(x)$.

O Problema (1) veio a ser conhecido como problema geral de Leray-Lions, devido aos autores de [24]. Para mais referências do estudo do problema de Leray-Lions, citamos [9].

Um dos objetivos desta dissertação é apresentar os resultados obtidos por Jeanjean e Quoirin [22], em 2016, que consideraram o seguinte problema:

$$-\Delta u = c(x)u + \mu|\nabla u|^2 + f(x), \qquad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{P}$$

em que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, e

$$\mu > 0, \quad f \gneqq 0 \quad e \quad c, f \in L^q(\Omega), \;\; para \;\; algum \;\; q > \frac{N}{2}. \tag{$\mathcal{H}$}$$

Observe que este problema é um caso específico de (1), em que $a(x,u,\nabla u) = \nabla u$ e $F(x,u,\nabla u) = c(x)u + \mu|\nabla u|^2 + f(x)$.

Em [22], os autores provam que o Problema (P) possui duas soluções distintas, uma delas obtida através do Teorema do Passo da Montanha, e a outra, por técnicas de minimização dentro de uma bola escolhida adequadamente no espaço tratado.

O resultado principal que adaptamos de Jeanjean e Quoirin [22] é o seguinte:

Teorema 0.1. Suponha $(\mathcal{H})$, $c^+ \not\equiv 0$ e $c \in \Omega$. Então (P) tem duas soluções positivas se qualquer uma das duas seguintes condições é satisfeita:

1. $\lambda_1(-\mu f) > 0$ e $\|c^+\|_q < K$, em que K é uma constante que depende de f e u;

2. $\lambda_1(-c) > 0$ e $\|\mu f\|_q < K$, em que K é uma constante que depende de c.

No teorema acima, λ_1 é o primeiro autovalor do Problema (1.5) - veja Teorema 1.10.

Este resultado está relacionado ao trabalho de 2015 de Arcoya et al [4], em que os autores estudaram a existência e multiplicidade de soluções $u \in H_0^1(\Omega) \cup L^\infty(\Omega)$ para o problema

$$-\Delta u = \lambda c(x)u + \mu(x)|\nabla u|^2 + f(x),$$

em que $c, f \in L^p(\Omega)$ para algum $p > \dfrac{N}{2}$, $N \geq 3$, $c \gneqq 0$, e $\mu \in L^\infty(\Omega)$. Em nosso trabalho, μ é uma constante. Além disso, devemos considerar as restrições sobre os sinais de μ, f, e c, quando comparamos os dois problemas.

O seguinte teorema complementa parcialmente os resultados apresentados em [4] (veja o Corolário 3.2 e a Observação 3.2), em que ao autores mostram que, quando $c \equiv 0$, o Problema (P) tem uma solução se, e somente se, $\lambda_1(-\mu f) > 0$.

Teorema 0.2. Suponha $(\mathcal{H})$. Então:

1. se $c \geq 0$, então $\lambda_1(-c-\mu f) > 0$ é uma condição necessária para que (P) tenha solução não-negativa;

2. $\lambda_1(-c) > 0$ é condição necessária para que (P) tenha solução não negativa e, sob esta condição, toda solução de (P) é não-negativa.

Juntos, esses dois resultados nos fornecem condições segundo as quais (P) possui duas soluções distintas, dependendo de c, f, e μ.

O sinal de c desempenha um papel central no estudo de (P), tanto na existência quanto na multiplicidade de soluções. Esse problema já foi estudado extensamente quando c não troca de sinal, especialmente quando $c \leq 0$, chamado caso coercivo. Considerando este caso, o segundo objetivo desta dissertação é, baseados nos artigos de De Coster e Fernández [12] [13], estudar o problema (P), sob as hipóteses

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2 \text{ é um domínio limitado com } \partial\Omega \text{ de classe } \mathcal{C}^{0,1}, \\ c, f \in L^q(\Omega) \text{ para algum } q > \dfrac{N}{2}, \\ \mu > 0, \ c \lneqq 0. \end{cases} \tag{$\mathcal{H}_0$}$$

Definindo

$$m_c := \begin{cases} \displaystyle\inf_{u \in W_c} \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \mu f(x) u^2) dx, & \text{se } W_c \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{se } W_c = \emptyset, \end{cases} \tag{2}$$

em que

$$W_c := \{w \in H_0^1(\Omega) : c(x)w(x) = 0 \text{ em quase todos os pontos } x \in \Omega, \|w\| = 1\}. \tag{3}$$

De Coster e Fernández [13] utilizaram minimização global para demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 0.3. Suponha ($\mathcal{H}_0$). Então (P) possui solução se, e somente se, $m_c > 0$.

Substituindo $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ por $\mu \in L^\infty(\Omega)$ em ($\mathcal{H}_0$), e definindo m_c^+ e m_c^- como em (2), com $\|\mu^+\|_\infty$ e $\|\mu^-\|_\infty$ no lugar de μ, respectivamente, o método de sub e supersolução foi utilizado por De Coster e Fernández [12] para obter resultado semelhante. Particularizando o que lá foi feito para o caso $p = 2$, enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 0.4. Se $m_c^+ > 0$ e $m_c^- > 0$, então o problema (P) possui solução.

Outros trabalhos sobre esta classe de problemas com $c \leq 0$ são [7], [8] e [5], por exemplo.

Em 1995, Barles e Murat [7] demonstraram a unicidade de soluções do problema

$$-\Delta u + H(x, u, Du) = 0, \qquad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

quando

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, p) \geqq 0 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, p)\right| \leqq C(1 + |p|).$$

O artigo de Barles e Murat demonstrou a unicidade de soluções para uma classe abrangente de problemas, que inclui o caso particular de (P) em que $c \leq 0$.

Em 2006, Barles e Porretta [8] estudaram o problema

$$\begin{cases} \lambda u - div(A(x)\nabla u) = \gamma|\nabla u|^q + f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

em que $q > 1$, $\lambda \geq 0$ e $A(x) = [a_{ij}(x)]$ é uma matriz de funções uniformemente elípticas em $L^\infty(\Omega)$. O resultado principal de [8] trata do caso $q \geq 1 + \dfrac{2}{N}$, e descreve condições sob as quais (4) possui exatamente uma solução.

Em 2010, Arcoya e Segura de León [5] consideraram o problema

$$\begin{cases} -div(\alpha(u)\nabla u) + \beta(u)|\nabla u|^2 = f(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

em que α e β são funções reais contínuas definidas em um intervalo aberto $I =]0, b[$ para $0 < b \leq +\infty$, com $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ em I. Nessa estrutura, os autores provaram um princípio de comparação para soluções de (5), e assim, demonstraram unicidade de soluções para esta classe de problemas.

O caso $c \equiv 0$ foi estudado em [1], [20] e [21], dentre outras publicações.

No ano de 2006, Abdellaoui, Dall'Aglio e Peral [1] analisaram a existência, inexistência, multiplicidade e regularidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \beta(u)|\nabla u|^2 + \lambda f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

em que β é uma função contínua positiva não-decrescente e f pertence a espaços de Lebesgue adequados. O estudo de (6) considerou como as soluções para o problema se comportam de acordo com λ e β. Primeiramente, os autores de [1] estudaram o caso $\beta(u) \equiv 1$, e analisaram as soluções $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Fazendo a mudança de variáveis $v = e^u - 1$, os autores transformaram o problema (6) no problema linear

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda f(x)(v+1), & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e demonstraram que, quando λ é pequeno o suficiente, (6) possui exatamente uma solução u tal que $e^u - 1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Os autores também consideraram os casos em que β é uma função contínua não decrescente tal que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \beta(t) = +\infty$ e mostraram que existe $\Lambda > 0$ tal que (6) não possui soluções positivas quando $\lambda > \Lambda$. Por fim, Abdellaoui, Dall'Aglio e Peral consideraram o caso mais geral, quando β é uma função contínua não negativa, e mostraram que, sob algumas hipóteses adicionais, (6) possui infinitas soluções, quando λ é pequeno o suficiente.

O caso $c \geq 0$ começou a ser estudado mais recentemente; referimos o leitor a [23], [26] e [15].

Em 2013, Jeanjean e Sirakov [23] buscaram soluções $u \in H_0^1(\Omega)$ para o problema

$$-\Delta u = c_0(x)u + \mu|\nabla u|^2 + f(x), \tag{7}$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$, $c_0, f \in L^p(\Omega)$, $p > \dfrac{N}{2}$. No artigo, Jeanjean e Sirakov demonstraram que, quando $\|[\mu f]^+\|_{\frac{N}{2}}$ é pequeno o suficiente, então (7) possui pelo menos duas soluções limitadas. O trabalho de Jeanjean e Quoirin [22] complementa esse resultado, que está de acordo com um dos teoremas principais apresentados aqui.

Em 2010, Sirakov [26] considerou, entre diversos resultados, o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u + \mu|Du|^2 + cu = 0, \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

O principal resultado acerca deste problema demonstrado por Sirakov no Teorema 1 de [26] é que, se $\mu > 0$ e $c > 0$ é arbitrariamente pequeno, então as soluções de (8) não são únicas. Cabe notar que [26] também considera o caso $c < 0$. Em particular, se $c < 0$, então (8) sempre possui solução. Cabe notar que este último resultado mais geral que o descrito aqui, mas estamos considerando apenas a existência de solução para (8).

Em 2017, De Coster e Jeanjean [15] consideraram o problema

$$-\Delta u = \lambda c(x)u + \mu(x)|\nabla u|^2 + h(x), \tag{P_λ}$$

que tem a mesma estrutura do problema estudado em [4]. Em [15], Ω é um domínio limitado com fronteira suave, $c, h \in L^p(\Omega)$ para algum $p > N$, $c \gneqq 0$, e $\mu \in L^\infty(\Omega)$ é tal que $\mu \geq \mu_1 > 0$ para algum $\mu_1 \in \mathbb{R}$. De Coster e Jeanjean estudaram a existência de soluções para (P_λ) dependendo do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Este é um dos trabalhos mais completos acerca do problema (P_λ), e alguns dos resultados complementam diretamente o trabalho de Jeanjean e Quoirin em [22]. Em particular, cabe notar que [15] retira a restrição de que μ precisa ser uma constante do Teorema 2 de [23], que afirma que o problema (7) possui duas soluções positivas quando $\|\mu f^+\|_{\frac{N}{2}}$ é suficientemente pequeno . Além disso, [15] mostrou que, quando $\lambda_1(-c - \mu f) \leq 0$, ($P$) pode possuir soluções negativas ou com sinal variável.

Dois artigos que devem ser mencionados no caso em que c troca de sinal são [14] e [13].

Em 2019, De Coster, Fernández e Jeanjean [14] estudaram as soluções $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para o problema

$$-\Delta u = c_\lambda(x)u + \mu(x)|\nabla u|^2 + h(x), \tag{9}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{1,1}$, $N \geq 2$, $c_\lambda, h \in L^q(\Omega)$ para algum $q > \dfrac{N}{2}$ e $\mu \in L^\infty(\Omega)$. Aqui, c_λ é um parâmetro que depende de $\lambda \in \mathbb{R}$, mais especificamente, $c_\lambda = \lambda c^+ - c^-$. Os autores de [14] acrescentaram a hipótese $|\Omega_+| > 0$, em que $\Omega_+ := Supp(c^+)$, e a hipótese de que existe $\varepsilon > 0$ tal que $c^- = 0$ em $\{x \in \Omega : d(x, \Omega_+) < \varepsilon\}$. Sob essas hipóteses, os autores mostraram os seguintes resultados:

1. se $\lambda \leq 0$, então (9) possui uma solução única;
2. existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda < \lambda_0$, (9) possui pelo menos duas soluções.

Em 2020, De Coster e Fernández [13] estudaram o mesmo problema (9), com $\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0$, e demonstraram a existência de soluções sem as hipóteses adicionais sobre Ω_+ e c^-. Nesse artigo, os autores demonstraram que, se (9) possui solução u_0 para $\lambda = 0$ tal que $c^+ u_0 \gneqq 0$, então existe $\lambda_0 > 0$ tal que (Teorema 1.4):

- (9) possui pelo menos duas soluções para $0 < \lambda < \lambda_0$;
- (9) possui exatamente uma solução para $\lambda = \lambda_0$;
- (9) não possui solução positiva para $\lambda > \lambda_0$.

De Coster e Fernández também demonstraram resultados semelhantes para os casos $c^+ u_0 \lneqq 0$ e $c^+ u_0 \equiv 0$.

Assim, essa classe de problemas tem sido estudada extensivamente nas últimas cinco décadas.

Cabe notar que alguns dos artigos citados anteriormente, como [21], tratam de problemas mais abrangentes que (P), no sentido de que envolvem o estudo de problemas com o operador p-Laplaciano, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, e o expoente relacionado ao termo envolvendo o gradiente de u é o mesmo p desse operador. O Problema (P) pode ser entendido, nesse sentido, como o caso específico em que $p = 2$ do problema mais geral

$$-\Delta_p u = c(x)u + \mu|\nabla u|^p + f(x), \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Em [21], publicado por Haydar Abdel Hamid e Marie François Bidaut-Veron em 2010, os autores compararam os problemas

$$-\Delta_p u = \beta(u)|\nabla u|^p + \lambda f(x) + \alpha \tag{10}$$

e

$$-\Delta_p v = \lambda f(x)(1 + g(v))^{p-1} + \mu, \tag{11}$$

em que $\beta \in C^0([0,L])$, $L \leqq \infty$, $\beta \not\equiv 0$ é não negativo, $\lambda > 0$, $f \in L^1(\Omega)$, $f \geqq 0$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, $f \not\equiv 0$, $g \in C^1(0,\Lambda)$, $\Lambda \leqq \infty$, $g(0) = 0$, g é não-decrescente, e $g \not\equiv 0$. Dentre outros resultados, os autores mostraram que, em algumas condições específicas para os parâmetros de (10) e (11), as soluções para (11) fornecem soluções para o problema (10). Cabe notar que f cumpre o papel de c, no nosso trabalho.

Em [12], publicado por Colette De Coster e Antonio Fernandéz em 2018, os autores consideraram soluções $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para o problema

$$-\Delta_p u = \lambda c(x)|u|^{p-2}u + \mu(x)|\nabla u|^p + h(x), \tag{12}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 2$, $c, h \in L^q(\Omega)$ para algum $q > \max\left\{\dfrac{N}{p}, 1\right\}$, $c \gneqq 0$ e $\mu \in L^\infty(\Omega)$. Os autores também definiram

$$m_{p,\lambda}^+ := \begin{cases} \inf\limits_{u \in W_\lambda} \displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \left(\frac{\|\mu^+\|_\infty}{p-1} \right)^{p-1} h(x)|u|^p \right) dx, & \text{se } W_\lambda \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{se } W_\lambda = \emptyset \end{cases}$$

e

$$m_{p,\lambda}^- := \begin{cases} \inf\limits_{u \in W_\lambda} \displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^p + \left(\frac{\|\mu^-\|_\infty}{p-1} \right)^{p-1} h(x)|u|^p \right) dx, & \text{se } W_\lambda \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{se } W_\lambda = \emptyset \end{cases}$$

em que
$W_\lambda := \{w \in W_0^{1,p}(\Omega) : \lambda c(x)w(x) = 0 \text{ em quase todos os pontos } x \in \Omega, \|w\| = 1\}$.

Sob as condições $\lambda \leq 0$, $m_{p,\lambda}^+ > 0$ e $m_{p,\lambda}^- > 0$, De Coster e Fernández mostraram que (12) possui pelo menos uma solução. Além disso, substituindo a hipótese $\mu \in L^\infty(\Omega)$ por μ ser uma constante positiva, os autores mostraram que o sinal de λ é crucial para determinar se (12) possui soluções e se elas são únicas.

Este trabalho tem como referências principais os artigos [22], [12] e [13]. Baseados nestes trabalhos, estudamos a existência e a multiplicidade de soluções para o problema

$$-\Delta u = c(x)u + \mu(x)|\nabla u|^2 + f(x), \qquad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{P}$$

sob os conjuntos de hipóteses estabelecidos por [22], [12] e [13].

A tabela a seguir sintetiza as hipóteses, métodos utilizados, e resultados obtidos nos três artigos supracitados. Cabe notar que o escopo dos artigos de De Coster e Fernández não é completamente abrangido por nosso trabalho, de forma que consideramos apenas o problema do Laplaciano, e não consideramos o caso $c \gneqq 0$.

Jeanjean e Quoirin, 2016	De Coster e Fernández, 2018	De Coster e Fernández, 2020
$\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ $c, f \in L^q(\Omega)$, $q > N/2$ $N \geq 3$, $c \in C(\Omega)$ $c^+ \not\equiv 0$	$\mu \in L^\infty(\Omega)$, $\mu \neq 0$ $c, f \in L^q(\Omega)$, $q > N/2$ $N \geq 2$, $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^{0,1}$	$\mu \in \mathbb{R}$ $c_\lambda, f \in L^q(\Omega)$, $q > N/2$ $N \geq 2$, $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^{0,1}$, $c^+ \not\equiv 0$
Semicontinuidade Inferior, Teorema do Passo da Montanha	Método de Sub e Super Soluções, Teorema do Passo da Montanha	Método de Sub e Super Soluções, Teorema do Passo da Montanha
Duas soluções distintas quando c e μf possuem normas suficientemente pequenas	Solução única quando $c \leq 0$, múltiplas soluções quando $c \gneqq 0$	Solução única quando $\lambda \leq 0$, múltiplas soluções quando $\lambda > 0$. Existe solução se, e somente se, $m_c > 0$

Nosso trabalho está estruturado da seguinte maneira:

O Capítulo 1, *Resultados preliminares*, contém alguns teoremas e resultados bem estabelecidos na literatura matemática, assim como breves comentários acerca do uso que fazemos destes resultados, no decorrer do trabalho.

O Capítulo 2, *Estudo do problema* (P), é baseado na referência [22] e está dividido em três seções. Na primeira, apresentamos mais detalhadamente o problema principal com o qual trabalharemos, e enunciamos alguns teoremas, que serão úteis nas demonstrações envolvendo as duas soluções obtidas. Na segunda seção, buscamos uma solução para (P) dentro de uma bola apropriadamente escolhida, através de um argumento de semicontinuidade inferior. Na terceira seção, mostramos que, se $c \in C(\Omega)$, o funcional associado ao problema satisfaz a geometria do Passo da Montanha, e encontramos a segunda solução para (P), além de mostrarmos que essa solução é distinta da encontrada na seção anterior.

O Capítulo 3, *Estudo do problema* (P) *sob um conjunto distinto de hipóteses*, é baseado nas referências [12] e [13], e está dividido em três seções. Na primeira seção, mostramos que $m_c > 0$ é uma condição necessária para que (P) possua solução, em que m_c é definido por (2). Na segunda seção, mostramos que $m_c > 0$ é condição suficiente para que (P) possua solução, ficando assim provada a equivalência entre $m_c > 0$ e (P) possuir solução, sob as hipóteses deste capítulo. Na terceira seção, mostramos que (P) possui pelo menos uma solução, quando $m_p^+, m_p^- > 0$ e $\mu \in L^\infty(\Omega)$, para o caso particular em que $p = 2$.

Finalmente, no *Apêndice A, Demonstrações auxiliares*, provamos alguns lemas técnicos sobre as funções e os funcionais definidos anteriormente, como algumas convergências de sequências de integrais, e propriedades das funções envolvidas.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Primeiramente, vamos enunciar três desigualdades que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. As demonstações dessas desigualdades podem ser encontradas em [18], páginas 622 e 623.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Young [18])**.** Sejam $1 < p, q < +\infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

para todos $a, b > 0$.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Hölder generalizada [18])**.** Sejam $1 \leq p_1, ..., p_m \leq +\infty$ tais que $\dfrac{1}{p_1} + ... + \dfrac{1}{p_m} = 1$. Sejam também $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$, para k = 1, ... , m. Então:

$$\int_\Omega |u_1 ... u_m| dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{p_k}.$$

Teorema 1.3 (Desigualdade de Minkowski [18])**.** Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$. Então:

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Essas desigualdades nos permitem realizar estimativas inferiores para produtos de integrais, e serão utilizadas, principalmente, para mostrar limitação e convergência de integrais e normas. Os dois resultados seguintes também nos permitem realizar estimativas para integrais, especificamente de sequências de integrais.

Lema 1.1 (Fatou [18]). Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Então

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Teorema 1.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11]). Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo:

- $f_n(x) \to f(x)$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$;
- existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Teorema 1.5 (Gilbarg, Trudinger (Teorema 7.8) [19]). Seja f uma função suave por partes definida em $\mathbb{R}$ com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, se $u \in W^1(\Omega)$, temos que $f \circ u \in W^1(\Omega)$. Além disso, se L denota o conjunto de pontos em que f não é suave, temos:

$$D(f\circ u) = \begin{cases} f'(u)Du, & \text{se } u \notin L, \\ 0, & \text{se } u \in L. \end{cases}$$

Observação 1.1. O resultado do Teorema 1.5 se estende para os espaços $W^{1,p}(\Omega)$, e também $W_0^{1,p}(\Omega)$, se $f(0) = 0$. Além disso, funções em $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ com suporte compacto pertencem a $W_0^{k,p}(\Omega)$, como observado na página 154 de [19], terceiro e quarto parágrafos.

Teorema 1.6 (Brezis (Proposição 9.4) [11]). Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Então $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Teorema 1.7 (Gilbarg, Trudinger (Teorema 8.19) [19]). Seja L um operador da forma

$$Lu = D_i(a^{ij}(x)D_ju + b^i(x)u) + c^i(x)D_iu + d(x)u, \tag{1.1}$$

com as seguintes propriedades:

1. L é estritamente elíptico em Ω;
2. L possui coeficientes $a^{ij}, b^i, c^i, d (i, j = 1, ..., N)$ limitados;

3.
$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v)dx \leq 0, \quad \text{para todo } v \geq 0,\ v \in C_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Seja também $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo $Lu \geq 0$ em Ω. Então, se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$ nós temos:
$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0,$$
a função u deve ser constante em Ω e a igualdade vale em (1.2) quando $u \not\equiv 0$.

Observação 1.2. Como consta na página 209 de [19], os resultados das seções (8.6) a (8.10) são ainda válidos quando a condição de limitação sobre os coeficientes b, c e d são substituídos por $b, c \in L^q(\Omega)$ e $d \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$, para algum $q > N$.

Teorema 1.8 (Struwe (Teorema 1.2) [27])**.** Suponha que X é um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|_X$ e seja $M \subset X$ um subconjunto fracamente fechado de X. Suponha que $I : M \to \mathbb{R} \cup +\infty$ é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente em M com respeito a X, isto é, que as seguintes condições são cumpridas:

1. $I(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_X \to +\infty$;

2. dado $u \in M$, para qualquer sequência em M tal que $u_m \rightharpoonup u$ fracamente em X, temos: $I(u) \leq \liminf_{m \to \infty} I(u_m)$.

Então I é limitado inferiormente em M e seu ínfimo é atingido em M.

Definição 1.1 ([27])**.** Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale, a qual denotaremos condição (PS), se toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que
$$\sup|I(u_n)| < +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} I'(u_n) = 0, \tag{1.3}$$
possui uma subsequência convergente.

Observação 1.3. Quando uma sequência (u_n) satisfaz (1.3), dizemos que ela é uma sequência de Palais-Smale, ou uma sequência (PS).

A condição de Palais-Smale é exigida no enunciado do Teorema do Passo da Montanha, formulado primeiramente por Ambrosetti e Rabinowitz em 1973 ([3]). O Teorema do Passo da Montanha é um teorema de caráter variacional, que nos possibilita encontrar pontos críticos de funcionais satisfazendo certas condições que serão descritas a seguir, e será uma ferramenta essencial no Capítulo 2 para encontrarmos a segunda solução positiva para o problema (P). Segue então o enunciado do Teorema do Passo da Montanha, adaptado por Struwe:

Teorema 1.9 (Teorema do Passo da Montanha, Struwe (Lema 6.1) [27]). Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que I satisfaz (1.3). Suponha que

1. I(0) = 0;

2. existem $\rho > 0$, $\alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B(0,\rho)} \geq \alpha$;

3. existe $u_1 \in X$ tal que $\|u_1\|_X \geq \rho$ e $I(u_1) < \alpha$.

Defina

$$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1]; X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}.$$

Então

$$\beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma} I(u) \geq \alpha$$

é um valor crítico de I.

A seguir, teremos a definição de sub e supersolução para uma equação diferencial.

Definição 1.2 ([12]). Dizemos que $\underline{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma subsolução de

$$-\Delta u + H(x, u, \nabla u) = f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{1.4}$$

em que $f \in L^1(\Omega)$ e $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory, quando $(\underline{u})^+ \in H_0^1(\Omega)$ e, para todo $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \geq 0$, temos

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \phi dx + \int_\Omega H(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \phi dx \leq \int_\Omega f(x) \phi dx.$$

De maneira semelhante, dizemos que $\beta \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma supersolução de (1.4) quando $(\overline{u})^- \in H_0^1(\Omega)$ e, para todo $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \geq 0$, temos

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \phi dx + \int_\Omega H(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \phi dx \geq \int_\Omega f(x) \phi dx.$$

O teorema a seguir é um resultado importante da Análise Funcional, que nos permite caracterizar as autofunções de uma classe ampla de problemas, de modo que conseguimos garantir que estas autofunções sejam positivas:

Teorema 1.10 ([25],[16]). Seja $V \in L^q(\Omega), q > \dfrac{N}{2}$. Então o primeiro autovalor $\lambda_1(V) = \lambda_1(V, \Omega)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

é dado por

$$\lambda_1(V) = \inf \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right) dx; u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_2 = 1 \right\}.$$

Além disso, $\lambda_1(V)$ é simples e é atingido por uma única autofunção positiva, ϕ_1, tal que $\|\phi_1\|_2 = 1$.

O teorema a seguir é um resultado clássico do estudo de Equações Diferenciais Parciais, e nos garante a existência de solução fraca para o problema de Dirichlet em um domínio limitado, para funções apropriadas.

Teorema 1.11 ([2] (Teorema 1.10))**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, e considere o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = h(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

em que $h : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função de $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. Então (1.6) possui uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq c\|h\|_p,$$

para alguma constante $c > 0$.

Os dois próximos teoremas nos garantem imersões contínuas em espaços apropriados. O primeiro resultado é bastante conhecido, e é usado frequentemente na área de Equações Diferenciais Parciais, quando falamos de soluções fracas. Ele nos garante uma limitação para as normas em $L^p(\Omega)$ das funções de $H_0^1(\Omega)$, para p suficientemente pequeno.

Teorema 1.12 (Teorema da Imersão de Sobolev ([19], Corolário 7.11))**.** Temos as seguintes imersões:

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-kp}}(\Omega), \qquad \text{se } kp < N,$$

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \qquad \text{se } 0 \leq m < k - \frac{N}{p}.$$

Teorema 1.13 ([19] (Teorema 7.26))**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de classe $\mathcal{C}^{0,1}$. Então:

(i) se $kp < N$, o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é continuamente imerso em $L^{p^*}(\Omega)$, $p^* = \dfrac{Np}{N-kp}$, e compactamente imerso em $L^q(\Omega)$, para qualquer $q < p^*$;

(ii) se $0 \leq m < k - \dfrac{N}{p} < m+1$, o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é continuamente imerso em $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, para $\alpha = k - \dfrac{N}{p} - m$, e compactamente imerso em $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$, para qualquer $\beta < \alpha$.

O teorema a seguir nos fornece um resultado clássico da área de Equações Diferenciais Parciais, relacionado ao método de sub e supersoluções. Ele nos fornece condições sob as quais a existência de uma subsolução e uma supersolução para um problema nos garantem a existência de uma solução para o mesmo problema.

Teorema 1.14 (Boccardo, Murat, Puel ([10]), Teorema 3.1 e Teorema 4.2)**.** Suponha que existam uma função $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ não-decrescente e uma função $k \in L^1(\Omega)$ tais que

$$|H(x, s, \zeta)| \leq b(|s|)[k(x) + |\zeta|^2]$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$, para todos $(s, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Então, se existem uma subsolução α e uma supersolução β de

$$-\Delta u + H(x, u, \nabla u) = f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{1.7}$$

com $\alpha \leq \beta$, então existe uma solução u de (1.7) tal que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Os resultados a seguir são necessários para provar o Lema 3.5 do Capítulo 3, item (i): Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \hat{h}(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_s}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\hat{h} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory satisfazendo

$$|\hat{h}(x, s)| \leq a(x)(1 + |s|), \tag{1.8}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e em quase todos os pontos $x \in \Omega$, $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 1.15 (Struwe ([27]), caso particular do Lema B.3)**.** Suponha que $\hat{h}$ satisfaça (1.8) e que $u \in H_0^1(\Omega)$ seja uma solução fraca de (P_s). Então $u \in L^r(\Omega)$, para $r \in [1, +\infty)$.

Teorema 1.16 (Dinca, Jebelean, Mawhin ([17]), Teorema 13)**.** Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory satisfazendo $|f(x, s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x)$, para uma constante $C \geq 0$, $q \in (1, 2^*)$, $b \in L^{q'}(\Omega)$, e suponha que exista $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\alpha(x) < \lambda_1$ em um conjunto de medida positiva de forma que

$$\limsup_{s \to \pm\infty} \frac{2F(x,s)}{|s|^2} \leq \alpha(x) \leq \lambda_1, \quad \text{uniformemente em } \Omega,$$

em que λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, e

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau.$$

Então, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em } \Omega, \\ 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_f}$$

possui solução.

Capítulo 2

Estudo do Problema (P)

2.1 Motivação e Teoremas

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$. Vamos tratar do problema

$$-\Delta u = c(x)u + \mu|\nabla u|^2 + f(x), \qquad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{P}$$

em que

$$\mu > 0, \quad f \gneqq 0 \quad e \quad c, f \in L^q(\Omega), \;\; para \;\; algum \;\; q > \frac{N}{2}. \tag{$\mathcal{H}$}$$

O objetivo principal do artigo de Jeanjean e Quoirin [22] é estudar a multiplicidade de soluções para o problema (P). O sinal de c desempenha um papel fundamental na existência e na unicidade de soluções de (P). Em particular, o caso $c \leq -\alpha_0$, exceto possivelmente em um conjunto de medida nula, para algum $\alpha_0 > 0$, é chamado de caso coercivo, e já foi bem estudado. Veja, por exemplo, as referências [7], [6]. Em [22], os autores consideram o caso em que c pode mudar de sinal.

Sob a condição $(\mathcal{H})$, mostraremos a existência de uma primeira solução positiva para o problema (P). Posteriormente, uma segunda solução positiva será obtida, sob as hipóteses adicionais $c \in C(\Omega)$ e $c^+ \not\equiv 0$.

Em primeiro lugar, observamos que (P) é equivalente a

$$-\Delta w = c(x)w + |\nabla w|^2 + \mu f(x), \qquad w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{P'}$$

De fato, se u é solução de (P), podemos tomar $w = \mu u$ para obtermos:

$$-\Delta w = -\Delta(\mu u) = \mu(-\Delta u) = \mu c(x)u + \mu^2|\nabla u|^2 + \mu f(x) = c(x)w + |\nabla w|^2 + \mu f(x).$$

De forma semelhante, se w é solução de (P'), podemos tomar $u = \dfrac{w}{\mu}$ e verificar que u satisfaz (P).

Agora fazemos a mudança de variáveis $v = e^w - 1$, que reduz (P') ao problema semilinear com estrutura variacional

$$-\Delta v - [c(x) + \mu f(x)]v = c(x)g(v) + \mu f(x), \qquad v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \qquad (Q)$$

em que

$$g(s) = \begin{cases} (1+s)ln(1+s) - s, & \text{se } s \geq 0, \\ 0, & \text{se } s < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

De fato, se $v \geq 0$:

$$\begin{aligned} -\Delta v = -\Delta(e^w - 1) &= e^w \left(-\Delta w - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial w}{\partial w_i} \right)^2 \right) \\ &= e^w \left(-\Delta w - |\nabla w|^2 \right) = e^w [c(x) w + \mu f(x)], \end{aligned}$$

e usando o fato que $e^w = v + 1$ e $w = \ln(v+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} -\Delta v - [c(x) + \mu f(x)]v &= (v+1)[c(x)\ln(v+1) + \mu f(x)] - [c(x) + \mu f(x)]v \\ &= c(x)[(v+1)\ln(v+1) - v] + \mu f(x) = c(x)g(v) + \mu f(x). \end{aligned}$$

Será provado no Lema 2.1 que se v é uma solução não negativa de (Q), então $w = ln(1+v)$ é uma solução não-negativa (na verdade, positiva) de (P').

As soluções de (Q) serão obtidas como pontos críticos do funcional de classe C^1

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla v|^2 - [c(x) + \mu f(x)](v^+)^2] dx - \int_\Omega c(x) G(v^+) dx - \mu \int_\Omega f(x) v dx, \tag{2.2}$$

definido em $H_0^1(\Omega)$, com $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)\, dt$.

Como $f \geq 0$, os pontos críticos de I são necessariamente não-negativos, como será mostrado no Lema 2.1.

Para obter dois pontos críticos, mostraremos que I toma valores positivos em uma esfera $\|v\| = \rho$, para algum número real $\rho > 0$, se c ou μf forem suficientemente pequenos. Também mostraremos que, desde que $f \not\equiv 0$, I assume valores negativos em $B(0,\rho)$. Além disso, $I(0) = 0$, e, desde que $c^+ \not\equiv 0$, é possível mostrar que $I(v_0) < 0$, para algum

$v_0 \notin B(0,\rho)$. Assim, a geometria do Passo da Montanha é satisfeita. Portanto, é razoável buscar um ponto crítico em $B(0,\rho)$ através de um argumento de semicontinuidade inferior, e um ponto crítico distinto, pelo Teorema do Passo da Montanha.

A principal dificuldade de demonstrar que o funcional I satisfaz a condição (PS) é mostrar que as sequências de Palais-Smale são limitadas. Mostrando isso, podemos verificar que elas admitem subsequência fortemente convergente, desde que a norma $\|c+\mu f\|_q$ seja pequena o suficiente. Observamos que, em nosso caso, g não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (veja [3]):

$$\text{existem } \theta > 2 \text{ e } s_1 > 0 \text{ tais que } 0 < \theta G(s) \le s g(s), \quad \text{para todo } s \ge s_1, \tag{AR}$$

em que $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)dt$.

Esta condição é central na verificação de que sequências (PS) são limitadas. Quando o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e a não-linearidade é subcrítica, a limitação da sequência (PS) implica na existência de uma subsequência que converge fortemente em $H_0^1(\Omega)$, como demonstraremos no Lema 2.8. Para contornar a ausência da condição (AR) neste trabalho, é necessário impor a restrição $c \in C(\Omega)$, como veremos mais detalhadamente no Teorema 2.5.

Dado $V \in L^q(\Omega)$, com $q > \dfrac{N}{2}$, denotamos por $\lambda_1(V) = \lambda_1(V,\Omega)$ o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

lembrando que

$$\lambda_1(V) = \inf\left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx; u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_2 = 1 \right\}.$$

Temos que $\lambda_1(V)$ é simples e é atingido por uma única autofunção positiva ϕ_1 tal que $\|\phi_1\|_2 = 1$, como enunciado no Teorema 1.10 ([25], [16]).

A seguir, apresentaremos o principal resultado sobre existência e multiplicidade de soluções de (P) que será demonstrado neste capítulo:

Teorema 2.1. Suponha $(\mathcal{H})$, $c^+ \not\equiv 0$, e $c \in C(\Omega)$. Então (P) tem duas soluções positivas se qualquer uma das duas seguintes condições é satisfeita:

1. $\lambda_1(-\mu f) > 0$ e $\|c^+\|_q < K$, em que K é uma constante que depende de f e μ;

2. $\lambda_1(-c) > 0$ e $\|\mu f\|_q < K$, em que K é uma constante que depende de c.

Além disso,

Teorema 2.2. Suponha ($\mathcal{H}$). Então:

1. se $c \geq 0$, então $\lambda_1(-c - \mu f) > 0$ é uma condição necessária para que (P) tenha solução não-negativa;

2. $\lambda_1(-c) > 0$ é condição necessária para que (P) tenha solução não negativa e suficiente para que toda solução de (P) seja não-negativa.

O Teorema 2.1 mostra que (P) possui mais de uma solução positiva, desde que c ou μf satisfaçam a condição de possuírem norma suficientemente pequena em $L^q(\Omega)$. A primeira solução descrita no Teorema 2.1 será obtida na Seção 2.2, Teorema 2.3. Para obter essa solução, não precisamos da hipótese $c \in C(\Omega)$. A segunda solução de (P) será obtida no final da seção 2.3, e todas as hipóteses do Teorema 2.1 são necessárias para encontrar essa solução. Nesta seção também será apresentada a demonstração do Teorema 2.2.

O lema a seguir mostra que as soluções não-negativas de (Q) são soluções de (P’). Como já demonstramos a relação entre as soluções de (P’) e (P), isso nos garante que, encontrando soluções de (Q), também encontramos soluções para nosso problema original (P). Isso, associado aos outros dois itens do lema, nos mostra que, para encontrarmos soluções positivas de (P), basta encontrarmos pontos críticos do funcional associado ao problema (Q), definido em (2.2).

Lema 2.1. Suponha ($\mathcal{H}$). Então:

1. se v é uma solução não-negativa de (Q), então $w = \ln(1 + v)$ é uma solução não-negativa de (P’). Se w é uma solução não-negativa de (P’), então $v = e^w - 1$ é uma solução não-negativa de (Q);

2. se v é um ponto crítico de I, então v é uma soluçâo não-negativa de (Q);

3. se u é uma solução não-negativa de (P), então u é positiva.

Demonstração. 1 Seja $v \geq 0$ solução de (Q). Usando a definição de g, obtemos:

$$-\Delta v = c(x)(1 + v)ln(1 + v) + \mu f(x)(1 + v). \tag{2.3}$$

Sejam $w = \ln(1 + v)$ e $\phi \in C_0^1(\Omega)$. Como demonstrado no Apêndice A, Lema A.1, temos que $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\psi = \dfrac{\phi}{1 + v} \in H_0^1(\Omega)$.

Assim, de (2.3), temos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v \nabla \psi &= \int_\Omega c(x)(1+v)\ln(1+v)\psi + \mu\int_\Omega f(x)\psi(1+v)\\ &= \int_\Omega c(x)\ln(1+v)\phi + \mu\int_\Omega f(x)\phi.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Agora, como $\nabla v = e^w \nabla w$ e $\nabla \psi = \dfrac{\nabla\phi}{1+v} - \dfrac{\phi\nabla v}{(1+v)^2}$, temos:

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\psi = \int_\Omega e^w\nabla w\left(\frac{\nabla\phi}{1+v} - \frac{\phi\nabla v}{(1+v)^2}\right).$$

Como $e^w = 1+v$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\psi = \int_\Omega \nabla w\left(\nabla\phi - \frac{\phi e^w\nabla w}{1+w}\right) = \int_\Omega (\nabla w\nabla\phi - |\nabla w|^2\phi). \tag{2.5}$$

Além disso, como $c(x)\ln(1+v)\phi = c(x)w\phi$, por (2.4) e (2.5), temos que:

$$\int_\Omega \nabla w\nabla\phi = \int_\Omega c(x)w\phi + \int_\Omega |\nabla w|^2\phi + \mu\int_\Omega f(x)\phi,$$

ou seja, w é solução de (P').

Seja agora $w \geq 0$ solução de (P'). Temos:

$$-\Delta w = c(x)w + |\nabla w|^2 + \mu f(x), \quad w \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \tag{2.6}$$

Seja então $v = e^w - 1$. Afirmamos que $v \in L^\infty(\Omega)$. De fato, como $w \in L^\infty(\Omega)$, existe $M > 0$ tal que $\|w\|_\infty < M$. Como $w \geq 0$, então $0 \leq w(x) < M$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$.
Com isto, $v = e^w - 1$ é tal que $0 \leq v(x) < e^M - 1$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$, portanto, $\|v\|_\infty < e^M - 1$, isto é, $v \in L^\infty(\Omega)$.
Com o intuito de aplicar o Teorema 1.5 dos Resultados Preliminares e a Observação 1.1, definimos

$$h(s) = \begin{cases} 0, & \text{se s} \leq 0,\\ e^s - 1, & \text{se } 0 < s \leq M,\\ e^M - 1, & \text{se s} \geq M.\end{cases}$$

Note que h é suave por partes, $h(0) = 0$, e $h' \in L^\infty(\mathbb{R})$ é dada por

$$h'(s) = \begin{cases} 0, & \text{se s} < 0, \\ e^s, & \text{se } 0 < s < M, \\ 0, & \text{se s} > M. \end{cases}$$

Portanto, $v = (h \circ w) \in H_0^1(\Omega)$.

Se $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $\phi = (1+v)\psi \in H_0^1(\Omega)$, pelo Teorema 1.5.

De (2.6), temos:

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi dx = \int_\Omega c(x) w \phi dx + \int_\Omega [|\nabla w|^2 \phi + \mu f(x)\phi] dx. \tag{2.7}$$

Como $\nabla w = \dfrac{\nabla v}{1+v}$ e $\nabla \phi = (1+v)\nabla\psi + \psi\nabla v$, (2.7) nos leva a:

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{\nabla v}{1+v}\left((1+v)\nabla\psi + \psi\nabla v\right) dx = \int_\Omega \left[\nabla v \nabla \psi + \frac{|\nabla v|^2}{1+v}\psi\right] dx. \tag{2.8}$$

Assim, de (2.7) e (2.8), obtemos:

$$\int_\Omega \left[\nabla v \nabla \psi + \frac{|\nabla v|^2}{1+v}\psi\right] dx = \int_\Omega c(x) w \phi dx + \int_\Omega |\nabla w|^2 \phi dx + \mu \int_\Omega f(x)\phi dx. \tag{2.9}$$

As expressões de w e ϕ nos fornecem $|\nabla w|^2\phi = \left(\dfrac{\nabla v}{1+v}\right)^2 \cdot (1+v)\psi = \dfrac{|\nabla v|^2}{1+v}\psi$. Como $\phi = (1+v)\psi$, também podemos concluir que $\mu f(x)\phi = \mu f(x)(1+v)\psi$. Além disso, como $w = \ln(1+v)$, temos $c(x)w\phi = c(x)\ln(1+v)(1+v)\psi$. Assim, de (2.9):

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega c(x)(1+v)\ln(1+v)\psi dx + \mu \int_\Omega f(x)(1+v)\psi dx,$$

ou seja, v é solução positiva de (Q).

(2) Seja v um ponto crítico de I. Pela definição de I temos, para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$I'(v)\cdot\varphi = \int_\Omega [\nabla v\nabla\varphi - (c(x)+\mu f(x))v^+\varphi]dx - \int_\Omega c(x)g(v^+)\varphi dx - \mu\int_\Omega f(x)\varphi dx = 0. \tag{2.10}$$

Tomando $\varphi = -v^-$ em (2.10), obtemos:

$$\int_\Omega [-\nabla v\nabla v^- + (c(x)+\mu f(x))v^+v^-]dx + \int_\Omega c(x)g(v^+)v^- dx + \mu\int_\Omega f(x)v^- dx = 0.$$

Como $\nabla v\nabla v^- = |\nabla v^-|^2$, $v^+v^- \equiv 0$ e $g(v^+)v^- \equiv 0$ pela definição de g, a equação acima é equivalente a:

$$\int_\Omega |\nabla v^-|^2 dx + \mu\int_\Omega f(x)v^- dx = 0.$$

Sendo $f \geq 0$, obtemos $\int_\Omega |\nabla v^-|^2 \leq 0$, ou seja, $v^- \equiv 0$, ou ainda, $v \geq 0$. O fato de que $v \in L^\infty(\Omega)$ pode ser demonstrado de forma análoga ao que foi feito no item (i) do Lema 3.5.

Note agora que, sendo $v = v^+$, (2.10) e a definição de g nos fornecem diretamente que v é uma solução não-negativa de (Q).

3 Se $u \geq 0$ é uma solução de (P), isto é, se

$$-\Delta u = c(x)u + \mu|\nabla u|^2 + f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega),$$

então como $\mu > 0$ e $f \geq 0$, u é uma supersolução fraca limitada de

$$-\Delta u = c(x)u, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Nosso objetivo é usar o Teorema 1.7. Temos

$$-\Delta u \geq c(x)u = c^+(x)u - c^-(x)u.$$

Portanto,

$$-\Delta u + c^-(x)u \geq c^+(x)u \geq 0, \qquad \text{para todo } x \in \Omega,$$

ou ainda,

$$\Delta(-u) - c^-(x)(-u) \geq 0, \qquad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Tomando $z = -u$, como $u \geq 0$, temos $z \leq 0$ em Ω e

$$\Delta z - c^{-}(x)z \geq 0. \tag{2.11}$$

Verificando se as hipóteses do Teorema 1.7 são satisfeitas por (2.11), observamos que $a^{ij} = \delta^{ij}, b^i = c^i \equiv 0$ e $d(x) = -c^{-}(x)$, ou seja, $Lz = \Delta z - c^{-}(x)z$ em Ω.

L é um operador estritamente elíptico em Ω e $d(x) = -c^{-}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. A Observação 1.2 nos permite, então, aplicar o Teorema 1.7 ao problema (2.11), já que $c \in L^q(\Omega)$, com $q > \dfrac{N}{2}$, o que implica em $-c^{-} \in L^q(\Omega)$. Sabemos que $z \leq 0$ em Ω. Seja $B \subset\subset \Omega$ uma bola arbitrária e suponha que exista $x_0 \in B$ tal que $z(x_0) = 0$. Neste caso, $\sup\limits_{B} z = 0 = \sup\limits_{\Omega} z$.

Pelo Teorema 1.7, concluímos que $z \equiv 0$ em Ω. Porém, como $z = -u$, isso implica em $u \equiv 0$ em Ω, o que contradiz o fato de u ser solução do problema (P), já que $f \not\equiv 0$. Logo, não pode existir $x_0 \in B \subset \Omega$ tal que $z(x_0) = 0$, portanto, não pode existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$. Isso implica em $u > 0 \in \Omega$.

□

2.2 Primeira solução

Nesta seção, vamos supor que $c \in L^q(\Omega)$, $q > \dfrac{N}{2}$, e mostraremos que o funcional I, dado por (2.2), possui um ponto crítico no interior de uma bola $B_\rho(0)$, e que este ponto crítico está associado a uma solução positiva do Problema (P). Essa demonstração será feita através do seguinte teorema:

Teorema 2.3. Suponha ($\mathcal{H}$). Então (P) tem uma solução positiva em uma bola $B_\rho(0)$ se qualquer uma das duas seguintes condições é satisfeita:

1. $\lambda_1(-\mu f) > 0$ e $\|c^{+}\|_q < K$, em que K é uma constante que depende de f e μ;

2. $\lambda_1(-c) > 0$ e $\|\mu f\|_q < K$, em que K é uma constante que depende de c.

Este teorema nos fornece uma solução positiva para (P), e nos garante que sua existência depende somente de c e de μf. Obter a primeira solução positiva para (P) não exige a hipótese adicional de que $c \in C(\Omega)$, portanto, o Teorema 2.3 nos permite encontrar uma solução sob condições mais gerais que segunda solução dada pelo Teorema 2.1. Para demonstrar o Teorema 2.3, precisamos primeiro mostrar que, sob qualquer uma das duas hipóteses acima é satisfeita, então o primeiro autovalor do problema associado a $(-c-\mu f)$ é positivo. A partir disso, podemos encontrar uma estimativa para I, que nos garantirá que o funcional é positivo na fronteira de uma bola. Mostrando que I toma valores negativos nesta bola, estaremos prontos para demonstrar a existência de solução positiva para (P), através de um argumento de semicontinuidade inferior.

Lema 2.2. Existe $K>0$ tal que $\lambda_1(-c-\mu f)>0$, se alguma das duas seguintes condições é satisfeita:

- $\lambda_1(-\mu f)>0$ e $\|c^+\|_q<K$;
- $\lambda_1(-c)>0$ e $\|\mu f\|_q<K$.

Demonstração. Consideraremos cada uma das condições separadamente:

- $\lambda_1(-\mu f)>0$: Neste caso, argumentando por contradição, encontramos $(c_n^+)\subset L^q(\Omega)$ tal que $\|c_n^+\|_q<\dfrac{1}{n}$ e $\lambda_1(-\mu f-c_n)\leq 0$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Consequentemente, existe uma sequência $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$, com $\|u_n\|_2=1$, satisfazendo

$$\int_\Omega \left[|\nabla u_n|^2+(-\mu f-c_n)u_n^2\right]dx\leq 0,\quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Como $c_n\leq c_n^+$ e $u_n^2\geq 0$ em Ω, obtemos

$$\int_\Omega \left[|\nabla u_n|^2-\mu f u_n^2\right]dx\leq \int_\Omega c_n u_n^2 dx\leq \int_\Omega c_n^+u_n^2dx. \tag{2.12}$$

Considerando $z_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, obtemos, de (2.12):

$$1=\|z_n\|^2\leq \mu\int_\Omega f z_n^2dx+\int_\Omega c_n z_n^2 dx. \tag{2.13}$$

Como (z_n) é limitado e (c_n) converge a 0 em $L^q(\Omega)$, segue que $\int_\Omega c_n z_n^2 dx$ converge a 0. Além disso, pelo Lema A.2 (veja apêndice), temos que existe $z\in H_0^1(\Omega)$ tal que $z_n\rightharpoonup z$ em $H_0^1(\Omega)$ e $\mu\int_\Omega f z_n^2 dx$ converge para $\mu\int_\Omega f z^2dx$. Portanto, de (2.13), obtemos

$$\|z\|^2\leq \liminf_{n\to+\infty}\|z_n\|^2=1\leq \mu\int_\Omega f z^2dx.$$

Como $f\gneqq 0$, temos então que $z\not\equiv 0$. Considerando $w=\dfrac{z}{\|z\|_2}$, a desigualdade acima e a caracterização variacional de λ_1, obtemos

$$0\leq \lambda_1(-\mu f)\leq \|w\|^2-\mu\int_\Omega f w^2dx\leq 0,$$

uma contradição.

- $\lambda_1(-c) > 0$: Este item é análogo ao anterior.

Assim, o Lema 2.2 está demonstrado. □

O Lema a seguir nos ajudará a encontrar uma estimativa para o funcional I, a partir da qual demonstraremos que I toma valores positivos na fronteira de uma bola devidamente escolhida.

Lema 2.3. Seja $V \in L^q(\Omega)$, com $q > \frac{N}{2}$. Se $\lambda_1(V) > 0$, então existe $K_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 + V(x)(v^+)^2)dx \geq K_1\|v\|^2, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que existe uma constante $K_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 + V(x)v^2)dx \geq K_1\|v\|^2, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Afirmação: para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\lambda_1(V)\|u\|_2^2 \leq \int_\Omega (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx. \tag{2.16}$$

Prova da afirmação: se $u \equiv 0$, a desigualdade acima é claramente satisfeita. Se $u \not\equiv 0$, há duas possibilidades: $\|u\|_2 = 1$ ou $\|u\|_2 \neq 1$. O primeiro caso segue da definição de $\lambda_1(V)$. No segundo caso, tome $w = \frac{u}{\|u\|_2} \in H_0^1(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned}\lambda_1(V) \leq \int_\Omega (|\nabla w|^2 + V(x)w^2)dx &= \int_\Omega \left[\left|\nabla\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)\right|^2 + V(x)\frac{u^2}{\|u\|^2}\right]dx \\ &= \frac{1}{\|u\|^2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx,\end{aligned} \tag{2.17}$$

o que verifica a afirmação.

Suponha que não exista K_1 satisfazendo (2.15). Nesse caso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in H_0^1(\Omega)$, ou seja, existe uma sequência $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 + V(x)(v_n)^2)dx < \frac{\|v_n\|^2}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pela desigualdade acima e por (2.16), temos:

$$\lambda_1(V)\|v_n\|_2^2 \leq \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 + V(x)v_n^2)dx < \frac{\|v_n\|^2}{n}, \tag{2.18}$$

o que nos garante que $v_n \not\equiv 0$.

Vamos então definir $w_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|}$. Como $\|w_n\| = 1$, (w_n) é limitada. Portanto, a menos de subsequência, temos que existe $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $w_n \rightharpoonup w_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$.

Como $V \in L^q(\Omega)$, $q > \dfrac{N}{2}$, segue do Lema A.2 (veja apêndice) que

$$\int_\Omega V(x)(w_n)^2 dx \to \int_\Omega V(x)(w_0)^2 dx. \tag{2.19}$$

Também temos, por (2.18), que

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \left(\|w_n\|^2 + \int_\Omega V(x) w_n^2 \right) dx \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0. \tag{2.20}$$

Como $w_n \rightharpoonup w_0$ fracamente, temos que $\|w_0\|^2 \leq \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|w_n\|^2$. Portanto, podemos usar (2.20) para obter

$$\|w_0\|^2 + \int_\Omega V(x) w_0^2 dx \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \left(\|w_n\|^2 + \int_\Omega V(x) w_n^2 \right) dx \leq 0. \tag{2.21}$$

Afirmamos que $w_0 \not\equiv 0$. Caso contrário, de (2.18) teríamos que $\int_\Omega V(x)(w_n)^2 \to 0$. Consequentemente, de (2.20) obteríamos que $\liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|w_n\| = 0$, o que contradiz o fato de $\|w_n\| = 1$.

Portanto, $w_0 \not\equiv 0$. Segue de (2.21) que $\lambda_1 \leq 0$, o que é uma contradição. Logo, (2.15) está provado.

Sem perda de generalidade, podemos supor $K_1 \leq 1$, de modo que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|\nabla v|^2 + V(x)(v^+)^2) dx &= \int_\Omega |\nabla v^-|^2 dx + \int_\Omega (|\nabla v^+|^2 + V(x)(v^+)^2) dx \\
&\geq \|v^-\|^2 + K_1 \|v^+\|^2 \geq K_1 \|v\|^2.
\end{aligned}$$

No próximo teorema, usaremos o seguinte resultado: para $p \in (1,2)$, existe $C > 0$ tal que

$$0 \leq G(s) \leq C|s|^{p+1}, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Esta desigualdade é o item (v) do Lema 2.5, e encontra-se demonstrada no apêndice deste trabalho.

Teorema 2.4. Suponha $\lambda_1(-c - \mu f) > 0$. Dado $R > 0$ suficientemente grande, então existem $K, M > 0$ dependendo de R tais que:

1. se $\|c^+\|_q < K$, então $I(v) \geq M$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| = R$;

2. se $\|\mu f\|_q < K$, então $I(v) \geq M$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| = R^{-1}$.

Demonstração. Como $\lambda_1(-c-\mu f) > 0$, pelo Lema 2.3, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 - [c(x) + \mu f(x)](v^+)^2)dx \geq K_1\|v\|^2, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Seja $p \in (1,2)$. Por (2.22), temos:

$$I(v) \geq \frac{K_1}{2}\|v\|^2 - C_1\|c^+\|_q\|v\|^{p+1} - C_2\|\mu f\|_q\|v\|$$

para alguns $C_1, C_2 > 0$, pois

$$I(v) \geq \frac{K_1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega c(x)G(v^+)dx - \mu\int_\Omega f(x)vdx,$$

$$\int_\Omega c(x)G(v^+)dx \leq C_1\|c^+\|_q\|v\|^{p+1},$$

e

$$\int_\Omega \mu f(x)vdx \leq C_2\|\mu f\|_q\|v\|.$$

Se $\|v\| = R$ e $\|c^+\|_q \leq R^{-\beta}$, com $\beta > p-1$, então

$$I(v) \geq \frac{K_1}{2}R^2 - C_1R^{p+1-\beta} - C_2\mu\|f\|_qR \geq R$$

para R suficientemente grande, o que prova o item 1, com $K = R^{-\beta}$ e $M = R$. De maneira semelhante, se $\|v\| = R^{-1}$ e $\|\mu f\|_q \leq R^{-\beta}$, com $\beta > 1$, então

$$I(v) \geq \frac{K_1}{2}R^{-2} - C_1\|c^+\|_qR^{-p-1} - C_2R^{-\beta-1} \geq R^{-3}$$

para R suficientemente grande, o que prova o item 2, com $K = R^{-\beta}$ e $M = R^{-3}$. □

Como acabamos de demonstrar, sob as hipóteses do Teorema 2.4, existe uma bola centrada na origem em $H_0^1(\Omega)$, tal que I é positivo na fronteira dessa bola. Agora, vamos verificar que I toma valores negativos no interior dessa bola. Demonstrando isso, estaremos prontos para mostrar a existência de solução positiva para (P) dentro dessa bola, através de um argumento de semicontinuidade inferior.

Lema 2.4. Seja $f \gneqq 0$. Então, para todo $\rho > 0$, o funcional I toma valores negativos na bola $B_\rho(0)$.

Demonstração. Seja ϕ_1 a primeira autofunção positiva associada ao autovalor λ_1 de

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1, & \text{em } \Omega, \\ \phi_1 = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|\phi_1\| = 1$. Como $\phi_1 > 0$ em Ω e $f \gneqq 0$, temos que $\phi_1 f \gneqq 0$ em Ω, portanto,

$$l := \int_\Omega f(x)\phi_1(x)dx > 0. \tag{2.23}$$

Dado $0 < t < \rho$, temos que $v_t = t\phi_1 \in B(0,\rho)$. Assim,

$$I(t\phi_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_\Omega [c(x) + \mu f(x)]\phi_1^2\right)t^2dx - \int_\Omega c(x)G(t\phi_1)dx - \mu t l. \tag{2.24}$$

Por (2.22), temos:

$$\left|\int_\Omega c(x)G(t\phi_1)\right|dx \le C\int_\Omega |c(x)|t^{p+1}\phi_1^{p+1}dx \le C\|c\|_q\|\phi_1\|_q^{p+1}t^{p+1} = C_1t^{p+1},$$

em que $C_1 = C\|c\|_q\|\phi_1\|_{q'}^{p+1}$. Assim, colocando t em evidência em (2.24), obtemos:

$$I(t\phi_1) \le t\left[\frac{1}{2}\left(1 - \int_\Omega [c(x) + \mu f(x)]\phi_1^2dx\right)t + C_1t^p - \mu l\right] < 0,$$

para t suficientemente pequeno. $\square$

Antes de demonstrarmos que I é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, precisaremos das seguintes estimativas sobre g e G:

Lema 2.5. Temos as seguintes propriedades sobre g e G:

(i) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{g(s)}{s} = 0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{s\to +\infty}\frac{g(s)}{s} = +\infty$;

(iii) $\displaystyle\lim_{s\to +\infty}\frac{G(s)}{s^2} = +\infty$;

(iv) seja $p \in (1,2)$. Então existe $C > 0$ tal que

$$0 \le g(s) \le C|s|^p, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R};$$

(v) seja $p \in (1,2)$. Então existe $C > 0$ tal que

$$0 \leq G(s) \leq C|s|^{p+1}, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

A demonstração do Lema (2.5) se encontra no Apêndice A.

O seguinte resultado será importante para mostrar a existência de ponto crítico de I através do método de minimização:

Lema 2.6. *I é um funcional fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. Sejam $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Queremos mostrar que

$$I(u) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} I(u_n). \tag{2.25}$$

De fato, como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert,

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|^2. \tag{2.26}$$

Além disso, como $f \in L^p(\Omega)$ e $(c+\mu f) \in L^p(\Omega)$, segue, do Lema A.2 (veja apêndice), que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (c(x)+\mu f(x))(u_n^+)^2 dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega (c(x)+\mu f(x))(u^+)^2 dx \tag{2.27}$$

e

$$\mu\int_\Omega f(x)u_n dx \to \mu\int_\Omega f(x)u dx, \tag{2.28}$$

Pelo Lema A.4 (veja apêndice), temos que

$$\int_\Omega c(x)G(u_n^+)dx \to \int_\Omega c(x)G(u^+)dx. \tag{2.29}$$

Assim, por (2.26), (2.27), (2.28) e (2.29), temos:

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (c(x)+\mu f(x))(u^+)^2 dx - \int_\Omega c(x)G(u^+)dx - \mu\int_\Omega f(x)u dx \\ &\leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (c(x)+\mu f(x))(u_n^+)^2 dx - \int_\Omega c(x)G(u_n)^+ dx - \mu\int_\Omega f(x)u_n dx\right) \\ &= \liminf_{n\longrightarrow+\infty} I(u_n), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Antes de demonstrar que (P) possui solução, vamos provar a seguinte versão do Teorema 1.8:

Lema 2.7. Suponha que X é um espaço de Banach reflexivo e que $M \subset X$ é fracamente fechado e limitado. Se $I : M \to \mathbb{R}$ é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, então I é limitado inferiomente e seu ínfimo é atingido em M.

Demonstração. Considere $m = \inf_M I$. Seja $(u_n) \subset M$ tal que $m = \lim_{n \to +\infty} I(u_n)$. Sendo $M \subset X$ limitado, segue que $(u_n) \subset M$ é limitada. Sendo E reflexivo e fracamente fechado, tomando uma subsequência, se necessário, obtemos que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em M. Como I é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, temos que

$$m \leq I(u) \leq \lim_{n \to +\infty} I(u_n) = m.$$

Concluímos que $m \in \mathbb{R}$ e $I(u) = m$. $\square$

Agora podemos provar a existência da primeira solução de (P) anunciada pelo Teorema 2.3.

Demonstração do Teorema 2.3. Pelo Lema 2.2, temos que existe $K > 0$ tal que $\lambda_1(-c - \mu f) > 0$ se uma das duas seguintes condições é satisfeita:

1. $\lambda_1(-\mu f) > 0$ e $\|c^+\|_q < K$, ou

2. $\lambda_1(-c) > 0$ e $\|\mu f\|_q < K$.

Diminuindo K se necessário, fixamos R suficientemente grande, tal que, pelo Teorema 2.4, $I(v) \geq M > 0$ para $\|v\| = R$, se $\|c^+\|_q < K$, ou $\|v\| = R^{-1}$, se $\|\mu f\|_q < K$. Seja $\rho = R$ no primeiro caso, e $\rho = R^{-1}$, no segundo. Como $f \gneqq 0$, pelo Lema 2.4, temos que I toma valores negativos em $B_\rho(0)$. Como, pelo Lema 2.6, I é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, então o Lema 2.7 nos garante que I é limitado inferiormente e seu ínfimo é atingido em $B_\rho(0)$ por algum $v_0 \not\equiv 0$, que é um ponto crítico de I, e portanto, uma solução de (P). Logo, pelo Lema 2.1, isso nos dá uma solução positiva de (P).

$\square$

2.3 Segunda solução

Nesta seção, incluiremos as hipóteses adicionais $c \in C(\Omega)$, $c^+ \not\equiv 0$, além das hipóteses da seção anterior.

Primeiro, vamos definir

$$\alpha_c = \inf \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \mu f(x)(u^+)^2 \right) dx; u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_2 = 1, cu^+ \equiv 0 \right\}. \tag{2.30}$$

O valor de α_c nos dará condições de garantir que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale, o que nos permitirá encontrar um segundo ponto crítico de I, usando o Teorema do Passo da Montanha.

No próximo teorema, usaremos a expressão explícita de G, obtida da definição de g, dada por (2.1), a saber

$$G(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2}{2}\ln(s+1) - \dfrac{3}{4}s^2 + s\ln(s+1) - \dfrac{s}{2} + \dfrac{\ln(s+1)}{2}, & \text{se } s \geq 0, \\ 0, & \text{se } s < 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Teorema 2.5. Suponha $\alpha_c > 0$ e $c \in C(\Omega)$, $c^+ \not\equiv 0$. Sob essas hipóteses, I satisfaz a condição de Palais-Smale.

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.5, precisaremos do seguinte lema, que nos permitirá mostrar que as sequências de Palais-Smale limitadas satisfazem (PS):

Lema 2.8. Toda sequência de Palais-Smale limitada $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ do funcional I possui subsequência convergente.

Demonstração. Como a sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada, a menos de subsequência, temos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

1. $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$;
2. $u_n \to u$ fortemente em $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2^*$;
3. $u_n(x) \to u(x)$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, e
4. Existe $h_r \in L^r(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h_r(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$ e para qualquer $1 \leq r < 2^*$.

Afirmamos que u é um ponto crítico de I. De fato, dada $z \in H_0^1(\Omega)$, como $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada e $\|I'(u_n)\|_* \to 0$ quando $n \to +\infty$, temos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla z dx - \int_\Omega [c(x) + \mu f(x)] u_n^+ z dx - \int_\Omega c(x) g(u_n^+) z dx - \mu \int_\Omega f(x) z dx = o(1). \tag{2.32}$$

Utilizando 1, obtemos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla z dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla z dx, \tag{2.33}$$

quando $n \to +\infty$. Segue de 3 e da continuidade de g que

$$c(x)g(u_n^+(x))z(x) \to c(x)g(u^+(x))z(x), \tag{2.34}$$

quando $n \to +\infty$, e em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

A seguir, aplicamos a Desigualdade de Young (Lema 1.1), para obter

$$|c(x)g(u_n^+(x))z(x)| \leq \frac{1}{q}|c(x)|^q + \frac{1}{r_1}|g(u_n^+(x))|^{r_1} + \frac{1}{2^*}|z(x)|^{2^*},$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$, com $\dfrac{1}{r_1} = 1 - \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2^*} = \dfrac{N+2}{N} - \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2^*}$, de onde segue que $1 < r_1 < 2^*$.

Tomando $1 < p < 2$ tal que $r = r_1 p < 2^*$ e aplicando o item (iv) do Lema 2.5 e 4, encontramos $c_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |c(x)g(u_n^+(x))z(x)| &\leq \frac{1}{q}|c(x)|^q + c_1|u_n^+|^r + \frac{1}{2^*}|z(x)|^{2^*} \\ &\leq \frac{1}{q}|c(x)|^q + c_1 h_r^r(x) + \frac{1}{2^*}|z(x)|^{2^*}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

A seguir, considerando (2.34), (2.35) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.4), obtemos

$$\int_\Omega c(x)g(u_n^+)zdx \to \int_\Omega c(x)g(u^+)zdx, \tag{2.36}$$

quando $n \to +\infty$.

Argumentando de maneira análoga, podemos verificar que

$$\int_\Omega [c(x) + \mu f(x)]u_n^+ zdx \to \int_\Omega [c(x) + \mu f(x)]u^+ zdx, \tag{2.37}$$

quando $n \to +\infty$. Segue das relações (2.32), (2.33), (2.36) e (2.37) que

$$\langle I'(u), z\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla z dx - \int_\Omega [c(x)+\mu f(x)]u^+ zdx - \int_\Omega c(x)g(u^+)zdx - \mu\int_\Omega f(x)zdx = 0,$$

para todo $z \in H_0^1(\Omega)$. Em particular,

$$\|u^2\| = \int_\Omega [c(x) + \mu f(x)](u^+)^2 dx + \int_\Omega c(x)g(u^+)(u^+)^2 dx + \mu\int_\Omega f(x)udx. \tag{2.38}$$

Utilizando mais uma vez que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada e que $\|I'(u_n)\| \to 0$ quando $n \to +\infty$, temos que

$$\|u_n\|^2 = \int_\Omega [c(x) + \mu f(x)](u_n^+)^2 dx + \int_\Omega c(x) g(u_n^+) u_n^+ dx + \mu \int_\Omega f(x) u_n dx + o(1). \quad (2.39)$$

Argumentando de maneira semelhante ao que fizemos acima, verificamos que

$$\int_\Omega [c(x) + \mu f(x)](u_n^+)^2 dx \to \int_\Omega [c(x) + \mu f(x)](u^+)^2 dx,$$

$$\int_\Omega c(x) g(u_n^+) u_n^+ dx \to \int_\Omega c(x) g(u^+) u^+ dx,$$

$$\mu \int_\Omega f(x) u_n dx \to \mu \int_\Omega f(x) u dx.$$

Os limites acima e as relações (2.38) e (2.39) implicam que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n\|^2 = \|u\|^2$. Consequentemente, $u_n \to u$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. O lema está demonstrado. $\square$

Também precisaremos do seguinte resultado:

Lema 2.9. Sejam $(a_n) \subset (0, +\infty)$ e $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ satisfazendo:

(i) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$;

(ii) $v_n \geq 0$ e $v_n \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Então, para toda $c \in L^q(\Omega)$, $q > \dfrac{N}{2}$, temos:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega c(x) v_n^2 \ln(v_n + a_n) dx \to 0. \quad (2.40)$$

Demonstração. Defina $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dado por:

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s = 0, \\ s^2 |\ln(s)|, & \text{se } s > 0. \end{cases}$$

Afirmação 1: dado $a > 0$, então

$$s^2 \ln(s + a) \leq \eta(s) + as, \quad \text{para todo } s \geq 0. \quad (2.41)$$

Verificação: Basta considerar $s > 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$\ln(s + a) = \ln(s) + \frac{1}{s + ta} a.$$

Logo,

$$|s^2 \ln(s+a)| \leq s^2|\ln(s)| + \frac{s^2 a}{s+ta} \leq \eta(s) + as.$$

Afirmação 2: Para todo $p > 2$, existe $d > 0$ tal que

$$|\eta(s)| \leq |s|^p + d, \text{para todo } s \geq 0. \tag{2.42}$$

Verificação: Como $p > 2$, temos

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} \frac{|s|^p}{\eta(s)} = \lim_{s \longrightarrow +\infty} \frac{|s|^p}{s^2 |\ln s|} = +\infty.$$

Portanto, existe $s_0 > 0$ tal que

$$\eta(s) = |s^2 \ln(s)| \leq |s|^p, \text{para todo } s \geq s_0. \tag{2.43}$$

Para $0 \leq s \leq s_0$, basta considerar que $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua, portanto, atinge máximo $d > 0$ no intervalo $[0, s_0]$. Este fato e (2.43) concluem a verificação da Afirmação 2.

Agora vamos demonstrar o Lema 2.9. Tomando uma subsequência se necessário, temos que existe $h_r \in L^r(\Omega), 1 \leq r < 2^*$, tal que

$$\begin{cases} |v_n(x)| \leq h_r(x), & \text{em quase todos os pontos } x \in \Omega, \\ v_n(x) \to 0, & \text{em quase todos os pontos } x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.44}$$

Definindo $\phi_n(x) := c(x) v_n^2(x) \ln(v_n(x) + a_n)$, para $x \in \Omega$, temos, pela estimativa (2.41),

$$|\phi_n(x)| \leq |c(x)| \eta(v_n(x)) + |c(x)| v_n(x) a_n,$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$. Logo, pela hipótese (i), por (2.44), e pela continuidade de η, temos que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \phi_n(x) = 0, \quad \text{em quase todos os pontos } x \in \Omega. \tag{2.45}$$

A seguir, utilizando as estimativas (2.41) e (2.42), com $p > 2$ e $pq' < 2^*$, temos que existe $d > 0$ tal que

$$|\phi_n(x)| \leq |c(x)|(|v_n(x)|^p + d) + a_n |c(x)||v_n(x)|, \quad \text{em quase todos os pontos } x \in \Omega.$$

Consequentemente, pelo Teorema 1.1 (Desigualdade de Young),

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{|c(x)|^q}{q} + \frac{|v_n(x)|^{pq'}}{q'} + d|c(x)| + \frac{a_n|c(x)|^q}{q} + \frac{a_n|v_n(x)|^{q'}}{q'}.$$

Segue de (2.44) e da hipótese (i) que existem $h_{pq'} \in L^{pq'}(\Omega)$, $h_{q'} \in L^{q'}(\Omega)$ e $M > 0$ tais que

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{(1+M)|c(x)|^q}{q} + \frac{h_{pq'}^{pq'}(x)}{pq'} + \frac{Mh_{q'}^{q'}}{q'} + d|c(x)|.$$

Observando que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que o lado direito da relação acima está em $L^1(\Omega)$. Este fato, juntamente com (2.45) e o Teorema 1.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue), nos fornecem a conclusão da demonstração do lema. □

Agora, estamos prontos para demonstrar que a condição (PS) é satisfeita:

Demonstração do Teorema 2.5. Seja (u_n) uma sequência de Palais-Smale no nível $d \in \mathbb{R}$, isto é,

$$I(u_n) \to d, \qquad \|I'(u_n)\|_* \to 0, \tag{2.46}$$

o que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u_n|^2 - (c(x)+\mu f(x))(u_n^+)^2]dx - \int_\Omega c(x)G(u_n^+)dx - \mu\int_\Omega f(x)u_n dx = d + o(1) \tag{2.47}$$

e

$$\left|\int_\Omega [\nabla u_n \nabla\psi - (c(x)+\mu f(x))u_n^+\psi]dx - \int_\Omega c(x)g(u_n^+)\psi dx - \mu\int_\Omega f(x)\psi dx\right| \leq \varepsilon_n\|\psi\|, \tag{2.48}$$

para alguma sequência (ε_n) tal que $\varepsilon_n \to 0$ e para todo $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Em particular, temos

$$|\langle I'(u_n), u_n\rangle| \leq \varepsilon_n\|u_n\|.$$

Queremos mostrar que a sequência (u_n) é limitada. Vamos supor, por contradição, que $\|u_n\| \to +\infty$ e definir $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. A menos de subsequência, temos que existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$, $v_n \to v_0$ em $L^r(\Omega)$ para qualquer $1 \leq r < 2^*$, e $v_n \to v_0$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Seja $R > 1$ dado por $R = \dfrac{2Nq}{N(q-2)+2q}$.

Como $\dfrac{\partial}{\partial q}\left[\dfrac{2Nq}{N(q-2)+2q}\right] = -\dfrac{4N^2}{(Nq-2N+2q)^2} < 0$ e $q > \dfrac{N}{2}$, temos que

$$1 < R < \frac{2N(\frac{N}{2})}{N(\frac{N}{2}-2)+2(\frac{N}{2})} = \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Além disso, $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{2^*} = 1$. Consequentemente, pelo Teorema 1.2 (Desigualdade de Hölder), obtemos

$$\left|\int_\Omega c(x)(v_n^+ - v_0^+)\psi dx\right| \leq K\|\psi\|_{2^*}\|c\|_q\|v_n^+ - v_0^+\|_R \to 0,$$

em que K é a melhor constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Portanto,

$$\int_\Omega c(x)v_n^+\psi dx \to \int_\Omega c(x)v_0^+\psi dx.$$

De maneira semelhante, obtemos

$$\left|\mu\int_\Omega f(x)(v_n^+ - v_0^+)\psi dx\right| \leq \mu K\|\psi\|_{2^*}\|f\|_q\|v_n^+ - v_0^+\|_R \to 0.$$

Assim, $\mu\displaystyle\int_\Omega f(x)v_n^+\psi dx \to \mu\int_\Omega f(x)v_0^+\psi dx$. Dividindo a expressão em (2.48), por $\|u_n\|$, obtemos

$$\left|\int_\Omega \frac{c(x)g(u_n^+)}{\|u_n\|}\psi dx - \int_\Omega[\nabla v_n\nabla\psi - (c(x)+\mu f(x))v_n^+\psi]dx + \frac{\mu}{\|u_n\|}\int_\Omega f(x)\psi dx\right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}\psi.$$

Logo, para todo $\psi \in H_0^1(\Omega)$, utilizamos as convergências acima para obter

$$\int_\Omega \frac{c(x)g(u_n^+)}{\|u_n\|}\psi dx = \int_\Omega[\nabla v_0\nabla\psi - (c(x)+\mu f(x))v_0^+\psi]dx + o(1) < +\infty, \tag{2.49}$$

pois

$$\int_\Omega c(x)v_0^+\psi dx \leq \|c\|_q\|v_0^+\|_R\|\psi\|_{2^*} < +\infty,$$

$$\int_\Omega \mu f(x)v_0^+\psi dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla v_0\nabla\psi dx \leq \|v_0\|\|\psi\| < +\infty.$$

Esse resultado deve ser válido para qualquer $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Vamos então mostrar, por contradição, que $cv_0^+ \equiv 0$. Suponha que $cv_0^+ \not\equiv 0$. Seja $\Omega_+ = \{x \in \Omega; c(x) > 0\} \subset \Omega$. Como $c^+ \not\equiv 0$, sabemos que $\Omega_+ \neq \emptyset$. Seja $x_0 \in \Omega_+$. Segue da continuidade de c e de Ω_+ ser aberto que existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega_+ \subset \Omega$.

Seja ϕ_r uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(r)$, o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi_r = \lambda_1(r)\phi_r, & B_r(x_0), \\ \phi_r = 0, & \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

Retomando (2.49), tomamos $\psi = \phi_r$ para obter

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega c(x)\frac{g(u_n^+)}{\|u_n\|}\phi_r dx = \int_\Omega \left[\nabla v_0 \nabla \phi_r - (c(x) + \mu f(x))v_0^+\phi_r dx\right] < +\infty.$$

Observando que $u_n = u_n^+ - u_n^-$, temos $\dfrac{u_n}{\|u_n\|} = v_n = \dfrac{u_n^+}{\|u_n\|} - \dfrac{u_n^-}{\|u_n\|} = v_n^+ - v_n^-$; Assim,

$$h_n(x) := c(x)\frac{g(u_n^+)}{\|u_n\|}\phi_r = \begin{cases} c(x)v_n^+\dfrac{g(\|u_n\|v_n^+)}{\|u_n\|v_n^+}\phi_r, & \text{se } v_n^+ > 0, \\ 0, & \text{se } v_n^+ = 0 \end{cases}$$

Então $h_n(x) \geq 0$, para todo $x \in B_r(x_0) \subset \Omega_+$, pois $c(x) > 0$ em $B_r(x_0) \subset \Omega_+$, $\phi_r > 0$ em $B_r(x_0)$, $v_n^+ \geq 0$ em Ω, e $g(\|u_n\|v_n^+) \geq 0$.

Pelo Lema de Fatou (Lema 1.1), podemos afirmar que

$$\int_{B_r(x_0)} \liminf_{n \longrightarrow +\infty} h_n(x)dx \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_{B_r(x_0)} h_n(x)dx. \tag{2.50}$$

Observe que, pelo Lema 2.5 (ii), $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty$. Como $v_n^+(x) \to v_0^+(x)$ em quase todos os pontos $x \in B_r(x_0)$, temos que, no conjunto $E_r = \{x \in B_r(x_0); v_0^+(x) > 0\} \subset \Omega_+$, $\displaystyle\liminf_{n \longrightarrow +\infty} h_n(x) = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} c(x)\frac{g(\|u_n\|v_n^+)}{\|u_n\|v_n^+}\phi_r = +\infty$.

Se $|E_r| > 0$,

$$\infty = \int_{E_r} \liminf_{n \longrightarrow +\infty} h_n(x)dx \leq \int_{B_r(x_0)} \liminf_{n \longrightarrow +\infty} h_n(x)dx < \infty,$$

o que é uma contradição. Logo, $|E_r| = 0$, para toda bola $B_r(x_0) \subset \Omega_+$. Com isso, podemos afirmar que $v_0^+ \equiv 0$, em quase todos os pontos $x \in B_r(x_0)$. Uma vez que qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ é a união enumerável de bolas abertas centradas em seus pontos e $\Omega_+ \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, temos que $v_0^+ \equiv 0$, em quase todos os pontos $x \in \Omega_+$.

De forma análoga, mostra-se que $v_0^+ \equiv 0$ em quase todos os pontos $x \in \Omega_- = \{x \in \Omega; c(x) < 0\}$, usando $\psi = -\phi_r < 0$ em (2.49). Portanto, $cv_0^+ \equiv 0$ em Ω.

Vamos agora tomar $\psi = u_n^-$ em (2.48), obtendo

$$\left|\int_\Omega \left[\nabla u_n \nabla u_n^- - (c(x) + \mu f(x))u_n^+ u_n^-\right] dx - \int_\Omega c(x)g(u_n^+)u_n^- dx - \mu \int_\Omega f(x)u_n^- dx\right| \leq \varepsilon_n \|u_n^-\|.$$

Temos que $\|u_n^-\| \leq \|u_n\|$, $u_n^+ u_n^- \equiv 0$ e $\nabla u_n \nabla u_n^- = |\nabla u_n^-|^2$, ou seja,

$$\left|-\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 - \mu f(x)u_n^- dx\right| \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| \leq \varepsilon_n \|u_n\|.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $\|u_n\|^2$, isso nos dá

$$\|v_n^-\|^2 + \frac{\mu}{\|u_n\|} \int_\Omega f(x)v_n^- dx \leq \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}.$$

Como $\|u_n\| \to +\infty$, $\int_\Omega f(x)v_n^- dx \leq M$, para algum $M > 0$ e $\varepsilon_n \to 0$, isso implica em $\|v_n^-\| \to 0$ quando $n \to +\infty$, portanto $v_0(x) = v_0^+(x)$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Tomando $\psi = v_0$ em (2.48) e dividindo ambos os lados por $\|u_n\|$, temos que

$$\left|\int_\Omega [\nabla v_n \nabla v_0 - (c(x) + \mu f(x))v_n^+ v_0] dx - \int_\Omega c(x)\frac{g(u_n^+)}{\|u_n\|} v_0 dx - \frac{\mu}{\|u_n\|} \int_\Omega f(x)v_0 dx\right| \leq \varepsilon_n \frac{\|v_0\|}{\|u_n\|}.$$

Uma vez que $cv_0 \equiv 0$ e $\|u_n\| \to +\infty$, obtemos

$$\int_\Omega [\nabla v_n \nabla v_0 - \mu f(x)v_n^+ v_0] dx \to 0. \tag{2.51}$$

Por outro lado, as convergências anteriormente citadas nos garantem que

$$\int_\Omega [\nabla v_n \nabla v_0 - \mu f(x)v_n^+ v_0] dx \to \int_\Omega [|\nabla v_0|^2 - \mu f(x)v_0^2] dx. \tag{2.52}$$

Consequentemente, por (2.51), segue da unicidade do limite que $\int_\Omega [|\nabla v_0|^2 - \mu f(x)v_0^2] dx = 0$. Afirmamos que $v_0 \equiv 0$. De fato, se $v_0 \not\equiv 0$, temos que $\|v_0\|_2 \neq 0$. Seja então $w_0 = \dfrac{v_0}{\|v_0\|_2}$. Temos que $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\|w_0\|_2 = 1$, e $w_0 = w_0^+$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$, $cw_0^+ \equiv 0$, e $\int_\Omega [|\nabla w_0|^2 - \mu f(x)(w_0^+)^2] dx = 0$. Assim, $\alpha_c \leq 0$, o que contradiz a hipótese $\alpha_c > 0$. Logo, $v_0 \equiv 0$.

No que segue, nosso objetivo será mostrar que não podemos ter $v_0 \equiv 0$ e, portanto, a sequência (u_n) deve ser limitada.

Tomando $\psi = u_n$ em (2.48) e usando a definição da função g, obtemos

$$\left|\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \mu f(x)(u_n^+)^2)dx - \int_\Omega c(x)(1+u_n^+)ln(1+u_n^+)u_n^+ dx - \mu\int_\Omega f(x)u_n\right| dx \leq \varepsilon_n\|u_n\|. \tag{2.53}$$

Dividindo (2.53) por $\|u_n\|^2$, obtemos:

$$\left|1 - \int_\Omega \mu f(x)(v_n^+)^2 dx - \int_\Omega c(x)\frac{(u_n^+(u_n^+)^2)}{\|u_n\|^2}\ln(1+u_n^+)dx - \frac{\mu}{\|u_n\|}\int_\Omega f(x)v_n dx\right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}. \tag{2.54}$$

Pelo Lema A.2 e pela limitação de $\int_\Omega f(x)v_n dx$, temos

$$-\int_\Omega \mu f(x)(v_n^+)^2 dx - \frac{\mu}{\|u_n\|}\int_\Omega f(x)v_n dx \to -\int_\Omega \mu f(x)(v_0^+)^2 dx = 0, \quad \text{quando } n \to +\infty,$$

uma vez que $v_0^+ = v_0 \equiv 0$.

A seguir, observando que $\ln(1+s) \leq s$, para todo $s \geq 0$, utilizamos o Lema A.2 mais uma vez para obter:

$$\left|\int_\Omega c(x)\frac{u_n^+}{\|u_n\|^2}\ln(1+u_n^+)dx\right| \leq \int_\Omega |c(x)||v_n^+|^2 dx \to \int_\Omega |c(x)|(v_0^+)^2 dx = 0.$$

Segue das convergências acima e de (2.54) que

$$1 - \int_\Omega c(x)(v_n^+)^2 ln(1+\|u_n\|v_n^+)dx \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty,$$

ou ainda,

$$1 - \ln\|u_n\|\int_\Omega c(x)(v_n^+)^2 dx - \int_\Omega c(x)(v_n^+)^2\ln\left(v_n^+ + \frac{1}{\|u_n\|}\right)dx \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Vamos mostrar que

$$\ln\|u_n\|\int_\Omega c(x)(v_n^+)^2 dx \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty. \tag{2.55}$$

Nesse caso, teríamos que

$$\int_\Omega c(x)(v_n^+)^2\ln\left(v_n^+ + \frac{1}{\|u_n\|}\right)dx \to 1, \quad \text{quando } n \to +\infty, \tag{2.56}$$

o que não pode ocorrer, já que, pelo Lema 2.9, a integral acima deveria convergir para 0.

Resta mostrar (2.55). Para obter este resultado, definimos $H(s) = \frac{1}{2}g(s)s - G(s)$, para todo $s \geq 0$. Segue de (2.1) e (2.31) que isto é o mesmo que

$$H(s) = \frac{s^2}{4} - \frac{s}{2}\ln(s+1) + \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\ln(s+1), \quad s \geq 0. \tag{2.57}$$

Utilizando a definição de I, obtemos:

$$I(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega c(x)H(u_n^+)dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega f(x)u_n dx.$$

Consequentemente, (2.57) nos fornece

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_\Omega c(x)(u_n^+)^2 dx = I(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u_n^+ dx - \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u_n^+ \ln(1+u_n^+)dx \\ + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)\ln(1+u_n^+)dx + \frac{\mu}{2}\int_\Omega f(x)u_n dx, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Portanto, multiplicando os dois lados da igualdade por $4\frac{ln(\|u_n\|)}{\|u_n\|^2}$ e utilizando (2.46), obtemos

$$\begin{aligned}\ln\|u_n\|\int_\Omega c(x)(v_n^+)dx = \frac{4\ln\|u_n\|}{\|u_n\|}\Big[\frac{1}{2}\int_\Omega c(x)v_n^+ dx - \int_\Omega c(x)v_n^+ ln(1+u_n^+)dx \\ + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)\frac{ln(1+u_n^+)}{\|u_n\|}dx + \frac{\mu}{2}\int_\Omega f(x)v_n dx + o(1)\Big].\end{aligned}$$

Como $\int_\Omega c(x)v_n^+ dx \to \int_\Omega c(x)v_0^+ dx = 0$ e $\int_\Omega f(x)v_n dx \to \int_\Omega f(x)v_0 dx = 0$, quando $n \to +\infty$, a relação acima implica que

$$\begin{aligned}\ln\|u_n\|\int_\Omega c(x)(v_n^+)^2 dx = -\frac{4\ln\|u_n\|}{\|u_n\|}\int_\Omega c(x)v_n^+\ln(1+u_n^+)dx \\ + \frac{2\ln\|u_n\|}{\|u_n\|^2}\int_\Omega c(x)\ln(1+u_n^+)dx + o(1).\end{aligned} \tag{2.58}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder, com $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2^*} = 1$, e a continuidade da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, encontramos $c_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega c(x)v_n^+\ln(1+u_n^+)dx\right| &\leq \|c\|_q\|v_n^+\|_r\|\ln(1+u_n^+)\|_{2^*} \\ &\leq c_1\|c\|_q\|\ln(1+u_n^+)\|_{2^*},\end{aligned}$$

uma vez que $\|v_n^+\| \leq \|v_n\| \leq 1$. A seguir, usamos a relação $\ln(1+s) \leq 2s^{\frac{1}{2}}$, para todo $s \geq 0$, e a continuidade da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$, para obter $c_2 > 0$ tal que

$$\|\ln(1+u_n^+)\|_{2^*} \leq 2\|u_n^+\|_{\frac{N}{N-2}}^{\frac{1}{2}} \leq c_2\|u_n\|^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Combinando as duas estimativas acima, podemos afirmar que existe $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{4\ln\|u_n\|}{\|u_n\|}\int_\Omega c(x)v_n^+\ln(1+u_n^+)dx\right| \leq C\frac{\ln\|u_n\|}{\|u_n\|^{\frac{1}{2}}}.$$

Esta estimativa e o fato de termos $\|u_n\| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, implicam que

$$\frac{4\ln\|u_n\|}{\|u_n\|}\int_\Omega c(x)v_n^+\ln(1+u_n^+)dx \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

De maneira análoga, obtemos

$$\frac{2\ln\|u_n\|}{\|u_n\|^2}\int_\Omega c(x)\ln(1+u_n^+)dx \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Os dois limites acima e (2.58) nos permitem verificar (2.55).

Temos então que a sequência (PS) (u_n) é limitada e, pelo Lema 2.8, I satisfaz a condição de Palais-Smale. □

Corolário 2.1 (Corolário do Teorema 2.5)**.** Suponha $\lambda_1(-c-\mu f) > 0$ e $c \in C(\Omega)$, $c^+ \not\equiv 0$. Sob essas hipóteses, I satisfaz (PS).

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u\|_2 = 1$ e $cu^+ \equiv 0$. Como $\lambda_1(-c-\mu f) > 0$, pelo Lema 2.3 existe uma constante $K_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \mu f(x)(u^+)^2)dx &= \int_\Omega(|\nabla u|^2 - (c(x)+\mu f(x))(u^+)^2)dx \\ &\geq K_1\|u\|^2 \geq SK_1\|u\|_2^2 = SK_1 > 0,\end{aligned} \tag{2.59}$$

em que S é a melhor constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Assim, segue de (2.30) que $\alpha_c > 0$, e pelo Teorema 2.5, I satisfaz (PS). □

Agora, estamos prontos para provar os resultados principais desta seção:

Demonstração do Teorema 2.1. Como $c \in C(\Omega)$ e $c^+ \not\equiv 0$, sabemos que existem $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ e $c > 0$ em $B_\varepsilon(x_0)$. Seja agora $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v \gneqq 0$ e supp $v = B_\varepsilon(x_0)$. Temos:

$$\int_\Omega c(x)G(tv)dx = \int_{B_\varepsilon(x_0)} c(x)G(tv)dx > 0, \quad \text{para todo } t > 0. \tag{2.60}$$

Avaliando agora $I(tv)$, para $v \in H_0^1(\Omega)$ encontrado acima, temos:

$$I(tv) = \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \frac{t^2}{2}\int_\Omega (c(x)+\mu f(x))v^2dx - \int_\Omega c(x)G(tv)dx - t\mu\int_\Omega f(x)vdx,$$

ou ainda,

$$I(tv) = t^2\left(\frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (c(x)+\mu f(x))v^2dx - \int_\Omega c(x)\frac{G(tv)}{t^2}dx - \frac{\mu}{t}\int_\Omega f(x)vdx\right).$$

Segue do item (iii) do Lema 2.5, da escolha de v e do Lema 1.1 (Lema de Fatou), que

$$\liminf_{t\longrightarrow+\infty}\int_\Omega c(x)\frac{G(tv)}{t^2}dx = \liminf_{t\longrightarrow+\infty}\int_{\{v>0\}} c(x)\frac{G(tv)}{(tv)^2}v^2dx \geq \int_{\{v>0\}} c(x)v^2\liminf_{t\longrightarrow+\infty}\frac{G(tv)}{(tv)^2}dx = +\infty.$$

Segue que

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} I(tv) = -\infty. \tag{2.61}$$

Portanto, tomando $\rho > 0$ encontrado no Teorema 2.3, podemos fixar $t > 0$ tal que $v_0 = tv$ satisfaz $\|v_0\| > \rho$ e $I(v_0) < 0$. Vamos considerar

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v_0\right\} \tag{2.62}$$

e

$$d := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)). \tag{2.63}$$

Pelo Lema 2.2, $\lambda_1(-c-\mu f) > 0$. Isso, associado ao Corolário 2.1 do Teorema 2.5, nos dá que I satisfaz (PS). Portanto, Pelo Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.9), I possui um ponto crítico v_1, o qual, pelo Teorema 2.4, satisfaz $I(v_1) = d > 0$. Como observado na demonstração do Teorema 2.3, a primeira solução do problema (P) é tal que $I(v_0) < 0$. Consequentemente, temos $v_0 \neq v_1$. Por fim, o Lema 2.1 nos garante que esses pontos críticos distintos de I nos fornecem duas soluções positivas de (P).

□

Demonstração do Teorema 2.2. 1. Se $c \geq 0$ e $u \geq 0$ é uma solução de (P), então o Lema 2.1 nos garante que u é positivo, portanto, $w = \mu u$ é uma solução positiva de (P'). Assim, $v = e^w - 1$ é uma solução positiva de (Q). Tomando $\varphi > 0$, uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(-c-\mu f)$, como função teste em (Q), obtemos:

$$\int_\Omega (\nabla v \nabla \varphi - c(x)\varphi - \mu f(x) v\varphi)dx = \int_\Omega [c(x)g(v)\varphi + \mu f(x)\varphi]dx > 0,$$

já que $c \geq 0$, $g \geq 0$, $\mu > 0$ e $f \gneqq 0$. Assim:

$$\lambda_1(-c-\mu f)\int_\Omega v\varphi dx = \int_\Omega [\nabla v \nabla \varphi - (c(x) + \mu f(x) v)\varphi]dx > 0,$$

de onde obtemos $\lambda_1(-c-\mu f) > 0$.

2. Seja $\varphi > 0$ uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(-c)$ e suponha que (P) possui solução não-negativa. Neste caso, tomando φ como função teste em (P), obtemos:

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - c(x)u\varphi)dx = \int_\Omega (\mu|\nabla u|^2\varphi + f(x)\varphi)dx > 0,$$

ou seja,

$$\lambda_1(-c)\int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega [\nabla u \nabla \varphi - c(x)u\varphi]dx > 0,$$

de onde obtemos $\lambda_1(-c) > 0$. Por fim, se $\lambda_1(-c) > 0$ e u é uma solução de (P), podemos usar u^- como função teste em (P) para obtermos:

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla u^- - c(x)uu^-)dx = \int_\Omega (\mu|\nabla u|^2 u^- + f(x)u^-)dx \geq 0,$$

ou ainda,

$$-\int_\Omega (|\nabla u^-|^2 - c(x)|u^-|^2)dx \geq 0.$$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega (|\nabla u^-|^2 - c(x)|u^-|^2)dx \leq 0,$$

portanto,

$$\lambda_1(-c)\int_\Omega |u^-|^2 dx \leq 0.$$

Como $\lambda_1(-c) > 0$, isso implica em $u^- \equiv 0$, ou seja, $u \geq 0$.

$\square$

Capítulo 3

Estudo do Problema (P) sob um conjunto distinto de hipóteses

Baseados nos artigos de De Coster e Fernández [12], [13], neste capítulo estudaremos o problema

$$-\Delta u = c(x)u + \mu|\nabla u|^2 + f(x), \qquad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{P}$$

sob as hipóteses

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2, \text{ é um domínio limitado com } \partial\Omega \text{ de classe } \mathcal{C}^{0,1}, \\ c, f \in L^q(\Omega) \text{ para algum } q > \dfrac{N}{2}, \\ \mu > 0, \ c \leq 0. \end{cases} \tag{$\mathcal{H}_0$}$$

Note que as diferenças entre as hipóteses $(\mathcal{H}_0)$ e as hipóteses $(\mathcal{H})$, assumidas no Capítulo 2, são a regularidade de Ω e os sinais das funções f e c. Mais especificamente, aqui c tem um sinal definido, enquanto f pode mudar de sinal.

Há diferenças também na metodologia. Sob as hipóteses $(\mathcal{H})$, usamos o Teorema do Passo da Montanha e um argumento de semicontinuidade inferior local para demonstrar a existência de duas soluções positivas para o problema (P). Neste capítulo, a solução de (P) será obtida como um mínimo global para o funcional associado a um problema auxiliar —veja (Q') na Seção 3.2.

O principal resultado deste capítulo encontra-se em [13] e estabelece uma condição necessária e suficiente para que o problema (P) possua solução. Para isso, defina

$$m_c := \begin{cases} \inf\limits_{u\in W_c} \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \mu f(x)u^2)dx, & \text{se } W_c \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{se } W_c = \emptyset, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que

$$W_c := \{w \in H_0^1(\Omega) : c(x)w(x) = 0 \text{ em quase todos os pontos } x \in \Omega, \|w\| = 1\}. \tag{3.2}$$

Teorema 3.1 (Teorema 1.1 de [13])**.** Suponha $(\mathcal{H}_0)$. Então, (P) possui solução se, e somente se, $m_c > 0$.

Dividiremos a demonstração do Teorema 3.1 em duas partes: na Seção 3.1, verificaremos que $m_c > 0$ é uma condição necessária para que (P) possua solução, enquanto que, na Seção 3.2, mostraremos que a hipótese $m_c > 0$ é suficiente para que o Problema (P) possua solução. Após demonstrarmos estes resultados, trataremos do Problema (P) considerando $\mu \in L^\infty(\Omega)$, com μ podendo trocar de sinal. Esse caso será tratado na Seção 3.3, em que usaremos o método de Sub e Supersolução para mostrarmos que (P) possui solução.

3.1 Condição necessária

Teorema 3.2. Suponha $(\mathcal{H}_0)$. Se o Problema (P) possui solução, então $m_c > 0$.

Inicialmente vamos supor que $c \equiv 0$ para depois demonstrarmos o caso em que $c \not\equiv 0$. Para tratarmos do primeiro caso, precisaremos do seguinte resultado, conhecido como Identidade de Picone:

Teorema 3.3 (Proposição 2.4 de [12])**.** Sejam $u \geq 0, v > 0$ em $H^1(\Omega)$, com $\dfrac{u}{v} \in L^\infty(\Omega)$. Denote

$$L(u,v) = |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{v^2}|\nabla v|^2 - 2\frac{u}{v}\nabla u \nabla v, \tag{3.3}$$

$$R(u,v) = |\nabla u|^2 - \nabla\left(\frac{u^2}{v}\right)\nabla v.$$

Então $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$, e $L(u,v) = 0$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$, se e somente se $u = kv$, para algum k constante.

Demonstração. Como $\nabla\left(\dfrac{u^2}{v}\right) = \dfrac{\nabla(u^2)v - u^2\nabla v}{v^2} = \dfrac{2u\nabla u}{v} - \nabla v\dfrac{u^2}{v^2}$, a igualdade $L(u,v) = R(u,v)$ segue imediatamente. Segue do Lema 1.1 (Desigualdade de Young) que $(|\nabla u|)\left(\dfrac{u|\nabla v|}{v}\right) \leq$

$\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{u^2|\nabla v|^2}{2v^2}$. Portanto, de (3.3), temos:

$$L(u,v) \geq |u|^2 + \frac{u^2}{v^2}|u|^2 - 2\left(\frac{|u|^2}{2} + \frac{u^2|\nabla v|^2}{2v^2}\right) = 0.$$

Assim, $L(u,v) \geq 0$. Além disso, podemos reescrever $L(u,v)$ como

$$L(u,v) = |\nabla u|^2 - 2\frac{u}{v}\nabla u \nabla v + \frac{u^2}{v^2}|\nabla v|^2 + 2\frac{u}{v}[|\nabla u||\nabla v| - \nabla u \nabla v] =$$
$$\left(\nabla u - \frac{u}{v}\nabla v\right)^2 + 2\frac{u}{v}[|\nabla u||\nabla v| - \nabla u \nabla v].$$

Se $L(u,v)(x_0) = 0$ e $u(x_0) \neq 0$, como $|\nabla u(x_0)\nabla v(x_0)| \leq |\nabla u(x_0)||\nabla v(x_0)|$, segue que $\nabla u(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}\nabla v(x_0)$, ou ainda, $\nabla\left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = 0$. Por outro lado, se $S = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$, então $\nabla u = 0$ em quase todos os pontos $x \in S$. Logo, $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, ou seja, $u = kv$, para alguma constante k. □

De posse deste resultado, podemos provar o Teorema 3.2 quando $c \equiv 0$.

Lema 3.1 (Proposição 7.1 de [12])**.** Suponha ($\mathcal{H}_0$). Se $c \equiv 0$ e (P) possui solução, então $m_c > 0$.

Demonstração. Vamos supor que (P) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então, temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi^2 dx - \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi^2 dx - \int_\Omega f(x)\phi^2 dx = 0, \tag{3.4}$$

para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Como $\nabla u \nabla(\phi)^2 = 2\phi\nabla\phi\nabla u$, podemos aplicar o Lema 1.1 (Desigualdade de Young), de forma que $\nabla u \nabla(\phi^2) = 2(\sqrt{\mu}\nabla u \phi)\left(\frac{\nabla \phi}{\sqrt{\mu}}\right) \leq \mu|\nabla u|^2\phi^2 + \frac{|\nabla \phi|^2}{\mu}$. Assim, temos:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi^2 dx \leq \mu \int_\Omega \phi^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\mu}\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx, \tag{3.5}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Substituindo (3.5) em (3.4) e multiplicando por μ, obtemos:

$$\int_\Omega \left(|\nabla \phi|^2 - \mu f(x)\phi^2\right) dx \geq 0, \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega \left(|\nabla \phi|^2 - \mu f(x)|\phi|^2\right) \geq 0, \quad \text{para toda } \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

De fato, como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, dada $\phi \in H_0^1(\Omega)$ existe uma sequência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to \phi$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Uma vez que $f \in L^q(\Omega)$, $q > \dfrac{N}{2}$, temos que

$$\int_\Omega \left(|\nabla \phi_n|^2 - \mu f(x)\phi_n^2\right) dx \to \int_\Omega \left(|\nabla \phi|^2 - \mu f(x)\phi^2\right) dx, \tag{3.7}$$

o que conclui a verificação da afirmação. Supomos, por contradição, que

$$\inf\left\{\int_\Omega \left(|\nabla \phi|^2 - \mu f(x)|\phi|^2\right) dx : \phi \in H_0^1(\Omega), \|\phi\| = 1\right\} = 0.$$

Neste caso, vamos considerar uma sequência minimizante $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\phi_n) \subset H_0^1(\Omega)$, $\|\phi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\int_\Omega \left(|\nabla \phi_n|^2 - \mu f(x)\phi_n^2\right) \to 0$. Como (ϕ_n) é limitada, temos que existe $\phi_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência:

1. $\phi_n \rightharpoonup \phi_0$ em $H_0^1(\Omega)$;
2. $\phi_n \to \phi_0$ em $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2^*$;
3. $\phi_n(x) \to \phi_0(x)$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, e
4. existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|\phi_n(x)| \leq h_p(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$ e para qualquer $1 \leq p < 2^*$.

O Lema A.2 (veja apêndice) nos garante que $\int_\Omega f(x)\phi_n^2 dx \to \int_\Omega f(x)\phi_0^2 dx$. Além disso, como $\phi_n \rightharpoonup \phi_0$ fracamente, temos que $\|\phi_0\|^2 \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|\phi_n\|^2$. Assim, segue que $\int_\Omega \left(|\nabla \phi_0|^2 - \mu f(x)\phi_0^2\right) = 0$, ou seja:

$$\int_\Omega |\nabla \phi_0|^2 dx = \mu \int_\Omega f(x)|\phi_0|^2 dx. \tag{3.8}$$

Portanto, pelo Teorema 1.10, ϕ_0 é uma autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1 = 0$ do problema

$$-\Delta\phi - \mu f(x)\phi = \lambda\phi, \quad \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema 1.10, temos que $\phi_0 > 0$ em Ω.

Susbtituindo (3.8) em (3.4), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_0^2 dx - \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi_0^2 dx - \frac{1}{\mu} \int_\Omega |\nabla \phi_0|^2 dx = 0.$$

Usando agora o fato que $\nabla u \cdot \nabla \phi_0^2 = 2\phi_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla u$, multiplicamos a igualdade acima por $(-\mu)$ para concluir que

$$\int_\Omega \left(|\nabla \phi_0|^2 + \mu^2 \phi_0^2 |\nabla u|^2 - 2\mu\phi_0 \nabla u \nabla \phi_0 \right) dx = 0. \tag{3.9}$$

Como $\mu \nabla u = \dfrac{1}{e^{\mu u}} \nabla e^{\mu u}$, (3.9) pode ser reescrita como

$$\int_\Omega \left(|\nabla \phi_0|^2 + \left(\frac{\phi_0}{e^{\mu u}} \right)^2 |\nabla e^{\mu u}|^2 - 2 \left(\frac{\phi_0}{e^{\mu u}} \right) \nabla e^{\mu u} \nabla \phi_0 \right) dx = 0.$$

Como $u \in L^\infty(\Omega)$, temos que $0 < e^{\mu u} < M$, para algum $M > 0$. Portanto, $\left(\dfrac{\phi_0}{e^{\mu u}} \right) \in L^\infty(\Omega)$ e, pelo Teorema 3.3, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_0 = k e^{\mu u}$. Como $\phi_0 = 0$ em $\partial\Omega$ e $e^{\mu u} = 1$ em $\partial\Omega$, segue que $k = 0$, de onde $\phi_0 = 0$, o que contradiz o fato de termos $\phi_0 > 0$ em Ω. Assim, $m_c > 0$. $\square$

A partir de agora, vamos considerar $c \not\equiv 0$. Preliminarmente observamos que

$$W_c \subset W_0, \tag{3.10}$$

desde que $W_0 = \partial B_1(0) = \{w \in H_0^1(\Omega); \|w\| = 1\}$.

Demonstração do Teorema 3.2. Vamos supor que (P) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Se $W_c = \emptyset$, então $m_c = +\infty$, logo este caso é trivial. Caso contrário, existe $w \in W_c$. Se $c \equiv 0$, então o Lema 3.1 nos garante que $m_c > 0$. Vamos então supor que $c \lneqq 0$. Como (P) possui solução, temos que

$$\int_\Omega \left(\nabla u \nabla(\phi^2) - c(x) u \phi^2 - \mu |\nabla u|^2 \phi^2 - f(x)\phi^2 \right) dx = 0, \tag{3.11}$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Procedendo como na prova do Lema 3.1, temos que

$$\int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi|^2}{\mu} - c(x) u \phi^2 - f(x)\phi^2 \right) dx \geq 0, \tag{3.12}$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Se $\phi \in W_c$, então $c(x)\phi = 0$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, o que acarreta em $c(x)u\phi^2 = 0$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$. Logo, $\int_\Omega c(x)u\phi^2 dx = 0$, para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Por (3.1), (3.10) e (3.12), temos que

$$\frac{m_c}{\mu} = \inf_{\phi \in W_c} \int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi|^2}{\mu} - f(x)\phi^2 \right) dx = \inf_{\phi \in W_c} \int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi|^2}{\mu} - c(x)u\phi^2 - f(x)\phi^2 \right) dx$$
$$\geq \inf_{\phi \in W_0} \int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi|^2}{\mu} - c(x)u\phi^2 - f(x)\phi^2 \right) dx \geq 0. \quad (3.13)$$

Portanto, $m_c \geq 0$. Vamos supor, então, que $m_c = 0$. Neste caso, vamos considerar uma sequência minimizante $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\phi_n) \subset W_c$ e $\int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi_n|^2}{\mu} - f(x)\phi_n^2 \right) dx \to 0$. Como (ϕ_n) é limitada, obtemos, de forma análoga ao que foi feito na prova do Lema 3.1, que $\int_\Omega f(x)\phi_n^2 dx \to \int_\Omega f(x)\phi_0^2 dx$ e $\int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi_0|^2}{\mu} - f(x)\phi_0^2 \right) dx = 0$.

Como $\phi_0 \in W_c \subset W_0$ e $\int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi_0|^2}{\mu} - f(x)\phi_0^2 \right) dx = 0$, por (3.13) segue que

$$\inf_{\phi \in W_0} \int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi|^2}{\mu} - c(x)u\phi^2 - f(x)\phi^2 \right) dx = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla \phi_0|^2}{\mu} - c(x)u\phi_0^2 - f(x)\phi_0^2 \right) dx = 0.$$

Portanto, ϕ_0 é uma autofunção associada ao primeiro autovalor ($\lambda = 0$) do problema

$$-\frac{1}{\mu}\Delta \phi + (-c(x)u - f(x))\phi = \lambda \phi, \quad \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema 1.10, temos que $\phi_0 > 0$ em Ω_0. Como $c \lneqq 0$, isso contradiz a hipótese $\phi_0 \in W_c$. Portanto, $m_c > 0$. $\square$

3.2 Condição suficiente

Teorema 3.4. Suponha $(\mathcal{H}_0)$. Se $m_c > 0$, então o Problema (P) possui solução.

Para construir o problema auxiliar (*Q'*), anunciado no início deste capítulo, precisaremos mostrar a existência de uma subsolução para o Problema (P).

Lema 3.2. Sob as hipóteses $(\mathcal{H}_0)$, existe $\underline{u} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ subsolução de (P) tal que $\underline{u} \leq 0$ em Ω.

Demonstração. Vamos considerar inicialmente o problema

$$-\Delta u = -f^-(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \quad (3.14)$$

Pelo Teorema 1.11, temos que (3.14) possui uma solução $\underline{u} \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega)$. Além disto, como $-f^- \leq 0$ em Ω, também temos que $\underline{u} \leq 0$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$. Observando que $2 - \dfrac{N}{q} > 0$ e que Ω é um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^{0,1}$, o Teorema 1.13 nos garante que $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $m \in \{0,1\}$, tal que $0 \leq m < 2 - \dfrac{N}{q} < m+1$ e $\gamma = 2 - \dfrac{N}{q} - m > 0$. Este fato nos permite afirmar que $\underline{u} \in L^\infty(\Omega)$. Resta mostrar que $\underline{u}$ é uma subsolução de (P). De fato, como $\underline{u}$ é uma solução de (3.14), temos que

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \phi dx = -\int_\Omega f^- \phi dx, \quad \text{para toda } \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.15}$$

Queremos mostrar que

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \phi dx - \int_\Omega (c(x)\underline{u} + \mu |\nabla \underline{u}|^2)\phi dx \leq \int_\Omega f \phi dx, \tag{3.16}$$

para toda $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \phi \geq 0$. Substituindo (3.15) em (3.16), obtemos que (3.16) é equivalente a

$$-\int_\Omega (c(x)\underline{u} + \mu |\nabla \underline{u}|^2)\phi dx \leq \int_\Omega f^+ \phi dx, \tag{3.17}$$

para toda $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \phi \geq 0$.

Como $\underline{u} \leq 0$, $c \leq 0$ em Ω, e $\mu > 0$, temos que $-(c\underline{u} + \mu|\nabla \underline{u}|^2) \leq 0$ em Ω. Segue do fato de termos $f^+ \geq 0$ em Ω que a relação (3.17) é válida. Isto conclui a demonstração do Lema 3.2.

□

Considere o problema

$$-\Delta v = h(x,v), \tag{Q'}$$

em que

$$h(x,v) = \begin{cases} c(x)g_1(v) + (1+\mu v)f(x), & \text{se } v \geq \alpha_1(x), \\ c(x)g_1(\alpha_1(x)) + (1+\mu\alpha_1(x))f(x), & \text{se } v \leq \alpha_1(x), \end{cases} \tag{3.18}$$

g_1 é dado por

$$g_1(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}(1+\mu s)\ln(1+\mu s), & \text{se } s > -\dfrac{1}{\mu}, \\ 0, & \text{se } s \leq -\dfrac{1}{\mu}, \end{cases} \tag{3.19}$$

e $\alpha_1(x) = \alpha_1 = \dfrac{1}{\mu}(e^{\mu\underline{u}} - 1)$, sendo $\underline{u}$ a subsolução fornecida pelo Lema 3.2.

O funcional associado a (*Q'*) é dado por:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega H(x,v)dx, \tag{3.20}$$

com

$$H(x,s) = \begin{cases} c(x)G_1(s) + \dfrac{1}{2\mu}(1+\mu s)^2 f(x), & \text{se } s \geq \alpha_1(x), \\ [c(x)g_1(\alpha_1(x)) + (1+\mu\alpha_1(x))f(x)]\,(s-\alpha_1(x)) & \\ +\, c(x)G_1(\alpha_1(x)) + \dfrac{1}{2\mu}(1+\mu\alpha_1(x))^2 f(x), & \text{se } s \leq \alpha_1(x), \end{cases} \tag{3.21}$$

e $G_1(s) = \displaystyle\int_0^s g_1(t)dt$.

O lema a seguir será utilizado algumas vezes ao decorrer desta seção.

Lema 3.3. Temos as seguintes propriedades sobre g_1 e G_1:

(i) $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{g_1(s)}{s} = +\infty$;

(ii) $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{G_1(s)}{s^2} = +\infty$;

(iii) seja $p \in (1,2)$. Então existem $C > 0$ e $D > 0$ tais que

$$g_1(s) \leq C|s|^p + D, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R};$$

(iv) sejam $p \in (1,2)$. Então existem $C > 0$ e $D > 0$ tais que

$$G_1(s) \leq C|s|^{p+1} + D, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R};$$

(v) a função g_1 é contínua em $\mathbb{R}$, $g_1(s) > 0$, quando $s > 0$, e existe $D > 0$ tal que $-D \leq g_1(s) \leq 0$, quando $s \leq 0$;

(vi) $G_1(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, e existe $D > 0$ tal que $|G_1(s)| \leq D|s|$ para todo $s \leq 0$.

A demonstração do Lema 3.3 se encontra no Apêndice A.

Observamos que $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ está bem definido, é de classe $\mathcal{C}^1$ e os pontos críticos de J serão soluções de (*Q'*).

Antes de demonstrarmos o Teorema 3.4, precisaremos de alguns resultados:

Lema 3.4. Sob as hipóteses ($\mathcal{H}_0$), dado $\delta > 0$, existe $m_1 \in L^q(\Omega)$ tal que

$$|h(x,s)| \leq m_1(x)(|s|^{1+\delta} + 1),$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Demonstração. Note que a definição de h, o item (v) do Lema 3.3 e o fato de termos $-\dfrac{1}{\mu} < \alpha_1 \leq 0$ em Ω, nos permitem encontrar $c_1 > 0$ tal que

$$|h(x,s)| \leq c_1(|c(x)| + |f(x)|), \tag{3.22}$$

para todo $s \leq 0$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$. Por outro lado, se $s \geq 0$, dado $\delta > 0$, utilizamos mais uma vez a definição de h e o item (iii) do Lema 3.3, com $p = 1 + \delta$, para obter c_2, $c_3 > 0$ tais que

$$|h(x,s)| \leq c_2(|c(x)| + |f(x)|)|s|^{1+\delta} + c_3(|c(x)| + |f(x)|), \tag{3.23}$$

para todo $s \geq 0$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

De fato, $|h(x,s)| \leq |c(x)|(C|s|^{1+\delta} + D) + \mu|f(x)||s| + |f(x)|$.
Como $|s| \leq 1 + |s|^{1+\delta}$, para todo $s \geq 0$, reescrevemos

$$|h(x,s)| \leq (C|c(x)| + \mu|f(x)|)|s|^{1+\delta} + D|c(x)| + (1+\mu)|f(x)|.$$

Obtemos (3.23) tomando $c_2 = \max\{C, \mu\}$ e $c_3 = \max\{D, 1+\mu\}$.

Segue agora de (3.22) e (3.23) que

$$\begin{aligned} |h(x,s)| &\leq (|c(x)| + |f(x)|)(c_2|s|^{1+\delta} + (c_1 + c_3)) \\ &\leq (c_1 + c_2 + c_3)(|c(x)| + |f(x)|)(|s|^{1+\delta} + 1), \end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$. Esta relação nos fornece a conclusão do Lema 3.4 com $m_1(x) = (c_1 + c_2 + c_3)(|c(x)| + |f(x)|) \in L^q(\Omega)$. $\square$

Lema 3.5. Suponha ($\mathcal{H}_0$). Então:

(i) toda solução de (*Q'*) pertence a $C(\overline{\Omega})$;

(ii) toda solução v de (*Q'*) satisfaz $v \geq \alpha_1$;

(iii) se $v \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução de (*Q'*), então

$$u = \frac{1}{\mu}\ln(1 + \mu v) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

é uma solução de (P). Além disso, $u \in C(\overline{\Omega})$.

Demonstração.

(i) Inicialmente, iremos verificar que toda solução $v \in H_0^1(\Omega)$ de (Q') pertence a $L^r(\Omega)$, para todo $r \in [1, +\infty)$. Observe que, se $N = 2$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, para todo $r \in [1, +\infty)$. Portanto, basta considerar $N \geq 3$.

Considerando $\hat{h} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\hat{h}(x, s) = \frac{h(x, v(x))}{1 + |v(x)|}(1 + |s|), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

notamos que o problema (Q') é equivalente ao problema (P_s), que precede o Teorema 1.15, uma vez que $\hat{h}(x, v(x)) = h(x, v(x))$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

A seguir, considerando $\delta = \dfrac{(2q - N)}{2q} 2^*$, e aplicando o Lema 3.4, obtemos

$$|\hat{h}(x, s)| \leq a(x)(1 + |s|), \tag{3.24}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$, com $a(x) := \dfrac{m_1(x)(1 + |v(x)|^{1+\delta})}{1 + |v(x)|}$, $x \in \Omega$.

Utilizando a estimativa $(1 + |s|^{1+\delta}) \leq (1 + |s|^\delta)(1 + |s|)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, temos que $a(x) \leq m_1(x)|v(x)|^\delta + m_1(x)$, $x \in \Omega$.

Evidentemente, $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ se tivermos $m_1|v|^\delta \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Para verificarmos este fato, aplicamos a Desigualdade de Hölder (Teorema 1.2) com $r_1 = \dfrac{2q}{N}$ e $r_2 = r_1' = \dfrac{2q}{2q - N}$, obtendo

$$\|m_1|v|^\delta\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} = \int_\Omega \left| m_1 |v|^{\frac{2q-N}{2q}2^*} \right|^{\frac{N}{2}} dx \leq \|m_1\|_q^{\frac{N}{2}} \left(\int_\Omega |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{2q-N}{2q}} = \|m_1\|_q^{\frac{N}{2}} \|v\|_{2^*}^{\frac{(2q-N)}{2q}2^*} < +\infty,$$

uma vez que $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

Como mencionado acima, isto nos permite afirmar que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Consequentemente, considerando a estimativa (3.24), podemos aplicar o Teorema 1.15 e concluir que $v \in L^r(\Omega)$, para todo $r \in [1, +\infty)$.

Nosso próximo objetivo é aplicar o Teorema 1.11 ao problema (Q'). Para tal, tomamos $\hat{f}(x) := h(x, v(x))$, $x \in \Omega$, e fixamos $q_1 \in \left(\dfrac{N}{2}, q\right)$. Utilizando o Lema 3.4 mais uma vez, obtemos

$$|\hat{f}(x)| \leq m_1(x)|v(x)|^{1+\delta} + m_1(x), \tag{3.25}$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$. A Desigualdade de Minkowski (Teorema 1.3) e Desigualdade de Hölder (Teorema 1.2), com $r_1 = \dfrac{q}{q_1}$ e $r_2 = r_1' = \dfrac{q}{q - q_1}$, nos fornecem

$$\|\hat{f}\|_{q_1} \leq \|m_1|v|^\delta\|_{q_1} + \|m_1\|_{q_1} \leq \|m_1\|_q \|v\|_r^{1+\delta} + \|m_1\|_{q_1},$$

em que $r = \dfrac{(1+\delta)qq_1}{q - q_1}$.

O fato de termos $v \in L^r(\Omega)$, $m_1 \in L^q(\Omega)$ e $q_1 < q$, nos permite aplicar o Teorema 1.11 para concluir que $v \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q_1}(\Omega)$. Consequentemente, como $q_1 > \dfrac{N}{2}$ e $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^{0,1}$, o Teorema 1.13 nos garante que $v \in C^{m, 2 - \frac{N}{q_1} - m}(\overline{\Omega})$, $0 \leq m < 2 - \dfrac{N}{q_1} < m + 1$, $m \in \{0, 1\}$. Em particular, $v \in C(\overline{\Omega})$.

(ii) Primeiro, vamos mostrar que α_1 é uma subsolução de (*Q'*), ou seja,

$$\int_\Omega \nabla\alpha_1 \nabla\phi dx - \int_\Omega c(x) g_1(\alpha_1(x))\phi dx - \int_\Omega \mu\alpha_1(x) f\phi dx \leq \int_\Omega f\phi dx, \tag{3.26}$$

para toda $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \geq 0$ em Ω. Como $\alpha_1 = \dfrac{1}{\mu}(e^{\mu\underline{u}} - 1)$, temos que $\nabla\alpha_1 = e^{\mu\underline{u}}\nabla\underline{u}$. Também temos que $\alpha_1 > -\dfrac{1}{\mu}$, ou seja, $g_1(\alpha_1(x)) = \underline{u}e^{\mu\underline{u}}$, de modo que (3.26) pode ser reescrita como

$$\int_\Omega e^{\mu\underline{u}}\nabla\underline{u}\nabla\phi dx - \int_\Omega c(x)\underline{u}e^{\mu\underline{u}}\phi dx - \mu\int_\Omega \frac{1}{\mu}(e^{\mu\underline{u}} - 1) f\phi dx \leq \int_\Omega f\phi dx,$$

ou ainda,

$$\int_\Omega e^{\mu\underline{u}}\nabla\underline{u}\nabla\phi dx - \int_\Omega c(x)e^{\mu\underline{u}}\underline{u}\phi dx - \int_\Omega e^{\mu\underline{u}} f\phi dx \leq 0. \tag{3.27}$$

Como $\underline{u}$ é subsolução de (*P*), temos, para todo $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\phi dx + \int_\Omega (-c(x)\underline{u} - \mu|\nabla\underline{u}|^2)\phi dx \leq \int_\Omega f\phi dx. \tag{3.28}$$

Tomando $\hat{\phi} = e^{\mu\underline{u}}\phi$, temos que $\hat{\phi} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $\hat{\phi} \geq 0$ em Ω. Além disso, $\nabla\hat{\phi} = \mu e^{\mu\underline{u}}\nabla\underline{u}\phi + e^{\mu\underline{u}}\nabla\phi$, de forma que, tomando $\phi = \hat{\phi}$ em (3.28), obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla\underline{u}(\mu e^{\mu\underline{u}}\nabla\underline{u}\phi + e^{\mu\underline{u}}\nabla\phi) dx + \int_\Omega (-c(x)\underline{u} - \mu|\nabla\underline{u}|^2) e^{\mu\underline{u}}\phi dx \\ &\leq \int_\Omega e^{\mu\underline{u}} f\phi dx, \quad \text{para todo } \phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \phi \geq 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

ou ainda,
$$\int_\Omega e^{\mu\underline{u}}\nabla\underline{u}\nabla\phi dx - \int_\Omega c(x)\underline{u}e^{\mu\underline{u}}\phi dx - \int_\Omega e^{\mu\underline{u}} f\phi dx \leq 0,$$
a mesma expressão de (3.27). Portanto, α_1 é subsolução de ($\mathcal{H}_0$).

Seja v uma solução de (*Q'*). Pelo item (i), temos que $v \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Como α_1 é uma subsolução de (*Q'*), dado $\phi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \geq 0$ em Ω, temos:

$$\int_\Omega \nabla(\alpha_1 - v)\nabla\phi dx \leq \int_\Omega (h(x,\alpha_1) - h(x,v))\phi dx. \tag{3.30}$$

Tomando $\phi = (\alpha_1 - v)^+ = \max\{0, \alpha_1 - v\}$ em (3.30), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla(\alpha_1 - v)^+|^2 dx = \int_\Omega \nabla(\alpha_1 - v)\cdot\nabla(\alpha_1 - v)^+ dx\\ &\leq \int_\Omega (h(x,\alpha_1) - h(x,v))\,(\alpha_1 - v)^+ dx = \int_{\{\alpha_1 \geq v\}} (h(x,\alpha_1) - h(x,\alpha_1))\,(\alpha_1 - v)^+ dx = 0.\end{aligned}$$

Logo, $(\alpha_1 - v)^+ = 0$, ou seja, $\alpha_1 \leq v$.

(iii) Suponha que v seja uma solução de (*Q'*). Pelos itens (*i*) e (*ii*), temos que $v \in C(\overline{\Omega})$, com $v \geq \alpha_1 > -\dfrac{1}{\mu}$, de forma que $u \in C(\overline{\Omega})$. O Lema A.1 nos garante que $u \in H_0^1(\Omega)$. Queremos provar que u é uma solução de (P). Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função arbitrária. Definindo $\psi = \dfrac{\phi}{1+\mu v}$, temos, pelo Lema A.1, que $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Como $e^{\mu u} = 1 + \mu v$, temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v\nabla\psi dx &= \int_\Omega e^{\mu u}\nabla u\left(\frac{\nabla\phi}{1+\mu v} - \frac{\mu\phi\nabla v}{(1+\mu v)^2}\right)dx\\ &= \int_\Omega \frac{e^{\mu u}}{1+\mu v}\nabla u\left(\nabla\phi - \frac{\mu\phi e^{\mu u}\nabla u}{1+\mu v}\right)dx\\ &= \int_\Omega \nabla u(\nabla\phi - \mu\phi\nabla u)dx\\ &= \int_\Omega \nabla u\nabla\phi dx - \mu\int_\Omega \phi|\nabla u|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Além disso, pela definição de g_1 e o item (ii), temos:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [c(x)g_1(v) + (1+\mu v)f(x)]\,\psi dx\\ &= \int_\Omega \left[c(x)\left(\frac{1}{\mu}\ln(1+\mu v)\right) + f(x)\right]\psi(1+\mu v)dx\\ &= \int_\Omega [c(x)u + f(x)]\phi dx.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Como v é uma solução de (Q'), de (3.31) e (3.32), deduzimos que u é uma solução de (P). $\square$

Lema 3.6. *J é um funcional fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. Sejam $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Queremos mostrar que

$$J(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} J(u_n). \tag{3.33}$$

De fato, como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert,

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|^2. \tag{3.34}$$

Podemos reescrever H como:

$$\begin{aligned} H(x,s) &= c(x)G_1[\alpha_1(x) + (s - \alpha_1(x))^+] - c(x)g_1(\alpha_1(x))(s - \alpha_1(x))^- \\ &+ \frac{1}{2\mu} f(x)(1 + \mu\alpha_1(x) + \mu(s - \alpha_1(x))^+)^2 \\ &- f(x)(1 + \mu\alpha_1(x))(s - \alpha_1(x))^-. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Note que a afirmação $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente a $(u_n - \alpha_1) \rightharpoonup (u - \alpha_1)$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, também temos que $(u_n - \alpha_1)^+ \rightharpoonup (u - \alpha_1)^+$ e $(u_n - \alpha_1)^- \rightharpoonup (u - \alpha_1)^-$.

Temos que $-\dfrac{1}{\mu} < \alpha_1(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. Pelo item (v) do Lema 3.3, temos que $g_1(\alpha_1) \in L^\infty(\Omega)$, já que $\alpha_1 \leq 0$. Junte-se a isto o fato de $c \in L^q(\Omega), q > \dfrac{N}{2}$, e teremos $c(x)g_1(\alpha_1) \in L^q(\Omega), q > \dfrac{N}{2}$. Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q'}(\Omega)$, a aplicação linear $T_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_1(w) = \int_\Omega c(x)g_1(\alpha_1(x))w(x)dx$$

é contínua. Portanto, utilizando o fato de $(u_n - \alpha_1)^- \rightharpoonup (u - \alpha_1)^-$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, obtemos que

$$\int_\Omega c(x)g_1(\alpha_1(x))(u_n - \alpha_1(x))^- dx \to \int_\Omega c(x)g_1(\alpha_1(x))(u - \alpha(x))^- dx. \tag{3.36}$$

De maneira análoga, como $(1 + \mu\alpha_1) \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega), q > \dfrac{N}{2}$, temos que

$$\int_\Omega f(x)(1 + \mu\alpha_1(x))(u_n - \alpha_1(x))^- dx \to \int_\Omega f(x)(1 + \mu\alpha_1(x))(u - \alpha_1(x))^- dx. \tag{3.37}$$

Como $\alpha_1 \in L^\infty(\Omega)$, podemos usar o Lema A.2, de forma que

$$\int_\Omega \frac{1}{2\mu} f(x)(1+\alpha_1(x)+(u_n-\alpha_1(x))^+)^2 dx \to \int_\Omega \frac{1}{2\mu} f(x)(1+\alpha_1(x)+(u-\alpha_1(x))^+)^2 dx. \tag{3.38}$$

Por fim, o Lema A.4 (Observação A.3, ver apêndice), associado ao fato de que $\alpha_1 \in L^\infty(\Omega)$, nos garante a convergência

$$\int_\Omega c(x)G_1(\alpha_1(x)+(u_n-\alpha_1(x))^+)dx \to \int_\Omega c(x)G_1(\alpha_1(x)+(u-\alpha_1)^+)dx. \tag{3.39}$$

Portanto, de (3.36), (3.37), (3.38) e (3.39), obtemos $\int_\Omega H(x,u_n)dx \to \int_\Omega H(x,u)dx$, de forma que

$$J(u) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} J(u_n),$$

como queríamos demonstrar. □

Por fim, o próximo lema nos dá uma estimativa para a função H, o que será útil para estimarmos $\dfrac{J(v_n)}{\|v_n\|^2}$, no Lema 3.2.

Lema 3.7. Existe $m \in L^q(\Omega)$, $q > \dfrac{N}{2}$, tal que, para todo $s \leq 0$:

$$|H(x,s)| \leq m(x)(1+|s|),$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Demonstração. Inicialmente, observe que, se $s \leq 0$, então

$$\alpha_1(x)+[s-\alpha_1(x)]^+ \in [\alpha_1(x),0] \subset \left[-\frac{1}{\mu},0\right]. \tag{3.40}$$

Consequentemente, de acordo com o Lema 3.3 e a definição de G_1, temos que

$$|c(x)G_1(\alpha_1(x)+(s-\alpha_1(x))^+)| \leq \frac{1}{\mu}|c(x)|D, \tag{3.41}$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Utilizando a relação (3.40) mais uma vez, também obtemos

$$\left|\frac{f(x)}{2\mu}[1+\mu(\alpha_1(x)+(s-\alpha_1(x))^+)]^2\right| \leq \frac{2}{2\mu}|f(x)|\left(1+\mu^2\frac{1}{\mu^2}\right) = \frac{2}{\mu}|f(x)|, \tag{3.42}$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

A seguir, utilizamos o Lema 3.3, o fato de termos $-\dfrac{1}{\mu} < \alpha_1 \leq 0$ em Ω e a estimativa $|(s - \alpha_1(x))^-| \leq |s| + |\alpha_1(x)|$, $x \in \Omega$, para concluir que, se $s \leq 0$, então

$$|c(x)g_1(\alpha_1(x))(s - \alpha_1(x))^-| \leq |c(x)|D\left(|s| + \frac{1}{\mu}\right), \tag{3.43}$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Finalmente, usando as estimativas acima, também temos

$$|f(x)(1 + \mu\alpha_1(x))(s - \alpha_1(x))^-| \leq 2|f(x)|\left(|s| + \frac{1}{\mu}\right), \tag{3.44}$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Retomando (3.35), segue de (3.41), (3.42), (3.43), (3.44) que

$$\begin{aligned} |H(x,s)| &\leq \frac{1}{\mu}|c(x)|D + |c(x)|D\left(|s| + \frac{1}{\mu}\right) + \frac{2}{\mu}|f(x)| + 2|f(x)|\left(|s| + \frac{1}{\mu}\right) \\ &= (|c(x)|D + 2|f(x)|)|s| + \frac{2|c(x)|D + 4|f(x)|}{\mu}, \end{aligned}$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$.

Tomando $m(x) = \max\left\{1, \dfrac{2}{\mu}\right\}(|c(x)D + 2|f(x)|) \in L^q(\Omega)$, $q > \dfrac{N}{2}$, concluímos a demonstração do Lema 3.7. $\square$

Corolário 3.1. Existe $c > 0$ tal que, para todo $v = v^+ - v^- \in H_0^1(\Omega)$,

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega c(x)G_1(v^+)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(v^+)^2 f(x)dx - c(1 + \|v\|). \tag{3.45}$$

Demonstração. De acordo com o Lema 3.7, a Desigualdade de Hölder (Teorema 1.2), $q > \dfrac{N}{2}$ e o Teorema da Imersão de Sobolev (Teorema 1.12), existe $c_1 > 0$ tal que, dada $v = v^+ - v^- \in H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$\left|\int_{\{v \leq 0\}} H(x,v)dx\right| \leq c_1(\|v^-\| + 1). \tag{3.46}$$

Como

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega H(x,v^+)dx - \int_\Omega H(x,-v^-)dx,$$

a estimativa (3.46) nos fornece

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega H(x, v^+)dx - c_1(\|v^-\| + 1).$$

Consequentemente, em vista de (3.21) e do fato de termos $v^+(x) \geq \alpha_1(x)$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, temos que

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega c(x)G_1(v^+)dx - \frac{1}{2\mu}\int_\Omega (1 + \mu v^+)^2 f(x)dx - c_1(\|v^-\| + 1). \tag{3.47}$$

Tendo em vista que $(1 + \mu v^+)^2 = 1 + 2\mu v^+ + \mu^2(v^+)^2$, utilizamos que $f \in L^q(\Omega)$, $q > \dfrac{N}{2}$, o Teorema 1.2 (Desigualdade de Hölder), e o Teorema da Imersão de Sobolev (Teorema 1.12), para encontrar $c_2 > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega [(1 + \mu v^+)^2 - \mu(v^+)^2] f(x)dx\right| \leq c_2(\|v^+\| + 1).$$

Esta estimativa, combinada com (3.47), nos permite escrever

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega c(x)G_1(v^+)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(v^+)^2 f(x)dx - c_1(\|v^-\| + 1) - c_2(\|v^+\| + 1).$$

Observando que $\|v^+\| \leq \|v\|$, $\|v^-\| \leq \|v\|$, a estimativa acima implica que (3.45) é satisfeita com $c = c_1 + c_2$. $\square$

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 3.4.

Demonstração do Teorema 3.4. Queremos mostrar que o funcional J possui um mínimo global. Com o objetivo de utilizar o Teorema 1.8, verificaremos que J é um funcional coercivo.

Argumentando por contradição, suponhamos que existam $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ e $M > 0$ tais que

$$\begin{cases} \|v_n\| \to +\infty, & \text{quando } n \to +\infty, \\ J(v_n) \leq M, & \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.48}$$

Tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $v_n \not\equiv 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que podemos considerar a sequência normalizada $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $w_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observando que $w_n^+ = \dfrac{v_n^+}{\|v_n\|}$ e $w_n^- = \dfrac{v_n^-}{\|v_n\|}$, e $(w_n^\pm)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências limitadas em $H_0^1(\Omega)$, temos que existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência:

1. $w_n \rightharpoonup w$, $w_n^{\pm} \rightharpoonup w^{\pm}$, fracamente em $H_0^1(\Omega)$;

2. $w_n \to w$, fortemente em $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2^*$;

3. $w_n(x) \to w(x)$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$, e

4. existe $h_p \in L^p(\Omega)$ tal que $|w_n(x)| \leq h_p(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$ e para qualquer $1 \leq p < 2^*$.

Afirmamos que $w^+ \not\equiv 0$. De fato, tendo em vista que $c \leq 0$ e $G_1(s) \geq 0$, devido à hipótese $(\mathcal{H}_0)$ e ao item (vi) do Lema 3.3, da relação (3.48) e do Corolário 3.1, obtemos:

$$M \geq J(v_n) \geq \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(v_n^+)^2 f(x)dx - c(1 + \|v_n\|),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dividindo a relação acima por $\|v_n\|^2$ e tomando o limite quando $n \to +\infty$, aplicando (3.48), 2, e o Lema A.2, temos

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(w^+)^2 f(x)dx.$$

Consequentemente, $w^+ \neq 0$, o que verifica a afirmação.

Este fato nos permite considerar $y = \dfrac{w^+}{\|w^+\|} \in H_0^1(\Omega)$. Segue que $\|y\| = 1$ e vislumbramos duas possibilidades:

Possibilidade 1: $y \notin W_c$.

Neste caso, definindo o conjunto

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : c(x)y(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega : c(x)w^+(x) \neq 0\},$$

temos que Ω_0 possui medida positiva. Portanto, por 3 e $c \leq 0$,

$$\begin{cases} -c(x)(w_n^+(x))^2 \to -c(x)(w^+(x))^2 > 0, & \text{em quase todos os pontos } x \in \Omega_0, \\ v_n^+(x) = \|v_n\| w_n^+(x) \to +\infty, & \text{em quase todos os pontos } x \in \Omega_0. \end{cases} \tag{3.49}$$

Consequentemente, pelo item (ii) do Lema 3.3,

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{-c(x)G_1(v_n^+(x))}{\|v_n\|^2}\right] = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{G_1(v_n^+(x))}{(v_n^+(x))^2}[-c(x)(w_n^+(x))^2]\right] = +\infty,$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega_0$.

Portanto, como $-c(x) \geq 0$ e $G_1 \geq 0$, podemos aplicar o Lema 1.1 (Lema de Fatou) e o limite acima para concluir que

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega -c(x)\frac{G_1(v_n^+)}{\|v_n\|^2}dx \geq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} -c(x)\frac{G_1(v_n^+)}{\|v_n\|^2}dx \geq \int_{\Omega_0} \liminf_{n \longrightarrow +\infty} -c(x)\frac{G_1(v_n^+)}{\|v_n\|^2}dx = +\infty.$$

Este limite, (3.48), O Corolário 3.1, e o Lema A.2 (veja apêndice) nos fornecem

$$\begin{aligned} 0 \geq \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \frac{J(v_n)}{\|v_n\|^2} &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(w^+)^2 f(x)dx \\ &+ \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega -c(x)\frac{G_1(v_n^+)}{\|v_n\|^2}dx = +\infty. \end{aligned}$$

Esta contradição implica que esta possibilidade não pode ocorrer

Possibilidade 2: $y \in W_c$.

Neste caso, utilizamos o Corolário 3.1, o fato de termos $c \leq 0$ em Ω, $G_1 \geq 0$ em $\mathbb{R}$ e a relação (3.48) para obter

$$M \geq \frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(v_n^+)^2 f(x)dx - c(1 + \|v_n\|).$$

Dividindo a desigualdade acima por $\|v_n\|^2$ e tomando o limite $n \to +\infty$, utilizamos (3.48), o Lema A.2 (veja apêndice), $y \in W_c$ e o fato de $w^+ \neq 0$, para concluir que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2}\|w^+\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(w^+)^2 f(x)dx \\ &= \frac{\|w^+\|^2}{2}\left(\|y\|^2 - \int_\Omega \mu y^2 f(x)dx\right) \geq \frac{\|w^+\|^2}{2}m_c. \end{aligned}$$

No entanto, isto contradiz a hipótese de que $m_c > 0$. Portanto, J é um funcional coercivo em $H_0^1(\Omega)$.

Como J é coercivo e, pelo Lema 3.6, J é um funcional fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, o Teorema 1.8 nos garante que J possui mínimo global $v \in H_0^1(\Omega)$, e este mínimo é um ponto crítico do funcional, que nos dá uma solução de (Q'). Assim, pelo Lema (3.5), $u = \dfrac{1}{\mu}\ln(1 + \mu v)$ é uma solução de (P). □

3.3 Estudo do Problema (P), quando $\mu \in L^\infty(\Omega)$

Agora, estudaremos o problema

$$-\Delta u = c(x)u + \mu|\nabla u|^2 + f(x), \qquad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{P}$$

sob as hipóteses

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2, \text{ é um domínio limitado com } \partial\Omega \text{ de classe } \mathcal{C}^{0,1}, \\ c, f \in L^q(\Omega), \text{ para algum } q > \dfrac{N}{2}, \\ \mu \in L^\infty(\Omega), \ c \leq 0. \end{cases} \tag{$\mathcal{H}_1$}$$

Vamos definir

$$m_c^+ := \begin{cases} \inf\limits_{u \in W_c} \displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \|\mu^+\|_\infty f(x)|u|^2\right) dx, & \text{se } W_c \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{se } W_c = \emptyset, \end{cases}$$

e

$$m_c^- := \begin{cases} \inf\limits_{u \in W_c} \displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \|\mu^-\|_\infty f(x)|u|^2\right) dx, & \text{se } W_c \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{se } W_c = \emptyset, \end{cases}$$

em que

$$W_c := \{w \in H_0^1(\Omega) : c(x)w(x) = 0 \text{ em quase todos os pontos } x \in \Omega, \|w\| = 1\}, \tag{3.50}$$

como definido em (3.2). O principal teorema desta seção é uma adaptação do Teorema 1.1 de De Coster e Fernández [12] para o caso $p = 2$.

Teorema 3.5. Suponha ($\mathcal{H}_1$) e $m_c^+, m_c^- > 0$. Então, o problema (P) possui pelo menos uma solução.

A demonstração do Teorema 3.5 se baseia em argumentos de sub e supersolução. Mais especificamente, nosso objetivo séra utilizar o Teorema 1.14. Nesta direção, o próximo resultado estabelece um princípio de comparação para o problema

$$-\Delta u = \mu|\nabla u|^2 + f(x,u), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \tag{3.51}$$

sob as condições

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2, & \text{é um domínio limitado com } \partial\Omega \text{ de classe } \mathcal{C}^{0,1}, \\ f(x,s) \leq f(x,t), & \text{para todo } t \leq s, \text{ em quase todos os pontos } x \in \Omega, \\ \mu > 0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Teorema 3.6. Suponha (3.52). Se $u_1, u_2 \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ são, respectivamente, uma subsolução e uma supersolução de (3.51), então $u_1 \leq u_2$.

Demonstração. Vamos considerar a função teste

$$\phi = \left[e^{2\mu u_1} - e^{2\mu u_2}\right]^+ \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Observando que

$$\nabla\phi = 2\mu\left[\nabla u_1 e^{2\mu u_1} - \nabla u_2 e^{2\mu u_2}\right]_{\chi\{u_1>u_2\}},$$

as hipóteses (3.52) nos garantem que $f(x,u_1) \leq f(x,u_2)$ em quase todos os pontos $x \in \{u_1 > u_2\}$. Portanto, levando em conta que u_1 é uma subsolução e que u_2 é uma supersolução de (3.51), temos:

$$\begin{aligned} &\int_{\{u_1>u_2\}} ([\nabla u_1 - \nabla u_2](2\mu\nabla u_1 e^{2\mu u_1} - 2\mu\nabla u_2 e^{2\mu u_2}) \\ &\qquad -\mu[|\nabla u_1|^2 - |\nabla u_2|^2](e^{2\mu u_1} - e^{2\mu u_2}))dx \\ \leq &\int_{\{u_1>u_2\}} (f(x,u_1) - f(x,u_2)(e^{2\mu u_1} - e^{2\mu u_2})dx \leq 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Observe que

$$\begin{aligned} &([\nabla u_1 - \nabla u_2](2\mu\nabla u_1 e^{2\mu u_1} - 2\mu\nabla u_2 e^{2\mu u_2}) \\ &\qquad -\mu[|\nabla u_1|^2 - |\nabla u_2|^2](e^{2\mu u_1} - e^{2\mu u_2}))dx \\ &= e^{2\mu u_1}[\mu|\nabla u_1|^2 + \mu|\nabla u_2|^2 - 2\mu\nabla u_1\nabla u_2] \\ &+ e^{2\mu u_2}[\mu|\nabla u_1|^2 + \mu|\nabla u_2|^2 - 2\mu\nabla u_1\nabla u_2]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Como $\nabla e^{2\mu u_i} = 2\mu\nabla u_i e^{2\mu u_i}$, $i = 1, 2$, temos

$$|\nabla u_i|^2 = \frac{|\nabla e^{2\mu u_i}|^2}{4\mu^2 e^{4\mu u_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &e^{2\mu u_1}[\mu|\nabla u_1|^2 + \mu|\nabla u_2|^2 - 2\mu\nabla u_1\nabla u_2] \\ &= \frac{1}{4\mu e^{2\mu u_1}}[|\nabla e^{2\mu u_1}|^2 + \left(\frac{e^{2\mu u_1}}{e^{2\mu u_2}}\right)^2 |\nabla e^{2\mu u_2}|^2 - 2\frac{e^{2\mu u_1}}{e^{2\mu u_2}}\nabla e^{2\mu u_1}\nabla e^{2\mu u_2}] \end{aligned} \tag{3.55}$$

e

$$\begin{aligned} &e^{2\mu u_2}[\mu|\nabla u_1|^2 + \mu|\nabla u_2|^2 - 2\mu\nabla u_1\nabla u_2] \\ &= \frac{1}{4\mu e^{2\mu u_2}}[|\nabla e^{2\mu u_1}|^2 + \left(\frac{e^{2\mu u_2}}{e^{2\mu u_1}}\right)^2 |\nabla e^{2\mu u_2}|^2 - 2\frac{e^{2\mu u_2}}{e^{2\mu u_1}}\nabla e^{2\mu u_1}\nabla e^{2\mu u_2}]. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Portanto, de (3.53), (3.54), (3.55) e (3.56), temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\{u_1>u_2\}} \frac{1}{4\mu e^{2\mu u_1}} \left[|\nabla e^{2\mu u_1}|^2 + \left(\frac{e^{2\mu u_1}}{e^{2\mu u_2}}\right)^2 |\nabla e^{2\mu u_2}|^2 - 2\frac{e^{2\mu u_1}}{e^{2\mu u_2}} \nabla e^{2\mu u_1} \nabla e^{2\mu u_2} \right] dx \\
&+ \int_{\{u_1>u_2\}} \frac{1}{4\mu e^{2\mu u_2}} \left[|\nabla e^{2\mu u_1}|^2 + \left(\frac{e^{2\mu u_2}}{e^{2\mu u_1}}\right)^2 |\nabla e^{2\mu u_2}|^2 - 2\frac{e^{2\mu u_2}}{e^{2\mu u_1}} \nabla e^{2\mu u_1} \nabla e^{2\mu u_2} \right] dx \leq 0.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Por outro lado, podemos aplicar a identidade de Picone (Teorema 3.3) com $u = e^{2\mu u_1}$, $v = e^{2\mu u_1}$ na primeira integral, e $u = e^{2\mu u_2}$, $v = e^{2\mu u_1}$ na segunda integral, e obter a desigualdade contrária em (3.57). Disto segue que a soma de integrais acima é zero, e usamos novamente a identidade de Picone para garantir que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $e^{2\mu u_1} = ke^{2\mu u_2}$ no conjunto $\{u_1 > u_2\}$. Como u_1 e u_2 são funções contínuas em $\overline{\Omega}$ e $u_1 - u_2 \leq 0$ em $\partial\Omega$, deduzimos que $u_1 = u_2$ em $\partial\{u_1 > u_2\}$. Portanto, a identidade de Picone nos garante que $k = 1$, de forma que $u_1 = u_2$ em $\{u_1 > u_2\}$, o que é uma contradição. Consequentemente, $u_1 \leq u_2$, como queríamos demonstrar. □

Corolário 3.2. Sob as hipóteses ($\mathcal{H}_0$), se $u_1, u_2 \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ são, respectivamente, uma subsolução e uma supersolução de (P), então $u_1 \leq u_2$.

Demonstração. Vamos definir a função $\tilde{f} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x, s) = c(x)s + f(x).$$

Como as hipóteses ($\mathcal{H}_0$) são satisfeitas e $\tilde{f}$ satisfaz (3.52), já que $c \leq 0$, então o resultado segue diretamente do Teorema 3.6. □

Estamos prontos para demonstrar o Teorema 3.5.

Demonstração do Teorema 3.5. Primeiramente, vamos supor que $\|\mu^+\|_\infty > 0$ e $\|\mu^-\|_\infty > 0$. Observe que qualquer solução de

$$-\Delta u = c(x)u + \|\mu^+\|_\infty |\nabla u|^2 + f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \tag{3.58}$$

é uma supersolução de (P), já que $\|\mu^+\|_\infty \geq \mu(x)$, e qualquer solução de

$$-\Delta u = c(x)u - \|\mu^-\|_\infty |\nabla u|^2 + f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \tag{3.59}$$

é uma subsolução de (P), já que $-\|\mu^-\|_\infty \leq \mu(x)$.

Como $m_c^+ > 0$, o Teorema 3.4 nos garante que existe uma solução $\beta \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para (3.58). Da mesma forma, como $m_c^- > 0$, o Teorema 3.4 da seção 3.2 nos garante que existe uma solução $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para

$$-\Delta u = c(x)u + \|\mu^-\|_\infty |\nabla u|^2 - f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

de forma que $\alpha = -v$ é uma solução de (3.59). Além disso, pelo item (iii) do Lema 3.5, $\alpha, \beta \in C(\overline{\Omega})$. Observando que $\alpha = -v$ é também uma subsolução de (3.58), aplicamos o Corolário 3.2 ao problema (3.58) para garantir que $\alpha \leq \beta$. Assim, pelo Teorema 1.14, tomando $b(|s|) = \max\{|s|, \|\mu\|_\infty, 1\}$ e $k(x) = -c(x)$, temos que existe uma solução u de (P) tal que $\alpha \leq u \leq \beta$, concluindo a demonstração.

Caso $\|\mu^+\|_\infty = 0$, o Teorema 1.16 nos garante que o problema

$$-\Delta u = c(x)u + f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

possui solução, e sabemos que esta solução corresponde a uma supersolução de (P). Para aplicarmos o Teorema 1.16, precisamos mostrar que

$$|c(x)s + f(x)| \leq C|s|^{p-1} + b(x), \tag{3.60}$$

para algum $p \in (1, 2^*)$, $b \in L^{p'}(\Omega)$, e

$$\limsup_{s \to \pm\infty} \frac{2F(x,s)}{|s|^2} \leq \alpha(x) \leq \lambda_1, \quad \text{uniformemente em } \Omega, \tag{3.61}$$

para alguma $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\alpha(x) < \lambda_1$ em um conjunto de medida positiva. De fato, tomando $\alpha \equiv 0$, temos que $\alpha < \lambda_1$, e, como $\dfrac{2F(x,s)}{|s|^2} = c(x) + \dfrac{f(x)s}{|s|^2}$ e $c \lneqq 0$, temos que (3.61) é satisfeita.

Agora vamos mostrar que (3.60) é satisfeita. Note que, como $q > \dfrac{N}{2}$, temos $2 < \dfrac{2q}{q-1} < \dfrac{2N}{N-2} = 2^*$, de forma que, tomando $\dfrac{2q}{q-1} < p < 2^*$, obtemos $\dfrac{q(p-2)}{p-1} > \dfrac{p}{p-1}$.

Seja agora $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Se $|c(x)| \leq |s|^{p-2}$, então a relação (3.60) é satisfeita, com $C = 1$ e $b(x) = f(x) \in L^{p'}(\Omega)$. Caso contrário, $|c(x)| > |s|$, de forma que

$$\begin{aligned} |c(x)s + f(x)| &\leq |c(x)|(|s|^{p-2})^{\frac{1}{p-2}} + |f(x)| \\ &< |c(x)||c(x)|^{\frac{1}{p-2}} + |f(x)| = |c(x)|^{\frac{p-1}{p-2}} + |f(x)|. \end{aligned}$$

Como $c \in L^q(\Omega)$, isso nos garante que $|c|^{\frac{p-1}{p-2}} \in L^{\frac{q(p-2)}{p-1}}(\Omega)$. Assim, temos que (3.60) é satisfeita, com $C = 1$ e $b(x) = |c(x)|^{\frac{p-1}{p-2}} + |f(x)|$.

De forma análoga, encontramos uma subsolução de (P) quando $\|\mu^-\|_\infty = 0$. Assim, a demonstração está concluída. $\square$

Apêndice A

Demonstrações auxiliares

Lema A.1. Sejam $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq -1+\varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$. Então $w = \ln(1+v) \in H_0^1(\Omega)$ e $\psi = \dfrac{\phi}{1+v} \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Vamos mostrar que $w \in H_0^1(\Omega)$. Para isso, podemos usar o Teorema 1.5. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(s) = \begin{cases} \ln(1+s), & \text{se s} \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Claramente, f é suave por partes. Também temos que f' é dada por:

$$f'(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+s}, & \text{se s} \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $v \in H_0^1(\Omega)$, e $f(0) = 0$, segue, pelo Teorema 1.5 [19], que $w = f \circ v \in H_0^1(\Omega)$.

Vamos mostrar agora que $\psi = \dfrac{\phi}{1+v} \in H_0^1(\Omega)$. De fato, seja g uma função dada em $\mathbb{R}$ por:

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+s}, & \text{se s} \geq -1+\varepsilon, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que g é suave por partes, e g' é dada por:

$$g'(s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+s)^2}. & \text{se s} \geq -1+\varepsilon, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, $g' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, portanto, pelo Teorema 1.5 [19], $\dfrac{1}{1+v} \in H^1(\Omega)$.

Sendo $\phi \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, o Teorema 1.6 [11] nos diz que $\psi = \phi\dfrac{1}{1+v} \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$. Como $\phi \in H_0^1(\Omega)$, este fato nos garante, juntamente com a definição de $H_0^1(\Omega)$, que $\psi = \dfrac{\phi}{1+v} \in H_0^1(\Omega)$.

□

Demonstração do Lema 2.5.

(i) Para $s \leq 0$, temos que $g(s) = 0$, portanto, $\lim\limits_{s \longrightarrow 0^-} \dfrac{g(s)}{s} = 0$. Para $s > 0$, temos:

$$\frac{g(s)}{s} = \ln(1+s) + \frac{\ln(1+s)}{s} - 1.$$

Como $\lim\limits_{s \longrightarrow 0^+} \ln(1+s) - 1 = -1$, e, pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{s \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+s)}{s} = \lim_{s \longrightarrow 0^+} \frac{1}{1+s} = 1,$$

segue que

$$\lim_{s \longrightarrow 0} \frac{g(s)}{s} = 0.$$

(ii) Pela Regra de L'Hôpital, temos que

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{\ln(1+s)}{s} = \lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{1}{1+s} = 0.$$

Assim, como $\lim\limits_{s \longrightarrow +\infty} \ln(1+s) = \infty$, temos que

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s \longrightarrow +\infty} \left[\ln(1+s) - 1 + \frac{\ln(1+s)}{s}\right] = +\infty.$$

(iii) Temos que

$$\frac{G(s)}{s^2} = \frac{\ln(s+1)}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\ln(s+1)}{s} - \frac{1}{2s} + \frac{\ln(s+1)}{2s^2}.$$

Pela Regra de L'Hôpital, podemos provar que

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\ln(s+1)}{s}=\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{2s}=\lim_{s\to+\infty}\frac{\ln(s+1)}{2s^2}=0.$$

Portanto,

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{G(s)}{s^2}=\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{\ln(s+1)}{2}-\frac{3}{4}+\frac{\ln(s+1)}{s}-\frac{1}{2s}+\frac{\ln(s+1)}{2s^2}\right]=+\infty.$$

(iv) Se $s\leq 0$, então g(s) = 0, e o resultado é trivial. Caso contrário,

$$g(s)=(1+s)\ln(1+s)-s. \tag{A.1}$$

Vamos usar os seguintes resultados:
Afirmação 1: se $s>0$ e $0<r<1$, então $s^r+s^{r-1}>1$.
Verificação: se $s\geq 1$, então $s^r+s^{r-1}>s^r\geq 1$. Caso contrário, se $0<s<1$, então $s^r+s^{r-1}>s^{r-1}>1$, já que $r<1$.
Afirmação 2: se $s\geq 0$ e $1<p<2$, então $\ln(s+1)\leq\dfrac{1}{p-1}s^{p-1}$.
Verificação: seja $q=p-1$. Basta provar que $ln(s+1)\leq\dfrac{1}{q}s^q$. Como $\lim\limits_{s\to 0^+}[\dfrac{1}{q}s^q-\ln(s+1)]=0$ e $\dfrac{d}{ds}[\dfrac{1}{q}s^q-\ln(s+1)]=s^{q-1}-\dfrac{1}{s+1}$, basta provar que $s^{q-1}-\dfrac{1}{s+1}>0$, o que é equivalente a provar que $s^{q-1}(s+1)-1>0$, ou seja, $s^q+s^{q-1}>1$, o que está provado acima.

Seja agora $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $h(s)=Cs^p-(s+1)\ln(s+1)+s$

Temos que $h'(s)=Cps^{p-1}-\ln(s+1)$ e $\lim\limits_{s\to 0^+}h'(s)=0$. Como acabamos de demonstrar, $\ln(s+1)\leq\dfrac{1}{p-1}s^{p-1}$, portanto, $h'(s)\geq Cps^{p-1}-\dfrac{1}{p-1}s^{p-1}=\left(Cp-\dfrac{1}{p-1}\right)s^{p-1}$. Logo, tomando $C\geq\dfrac{1}{p^2-p}$, obtemos $h'(s)\geq 0$, para todo $s\geq 0$. Assim, $h(s)\geq 0$, para todo $s\geq 0$, ou seja, $Cs^p\geq g(s)$, para todo $s\geq 0$.

(v) O resultado segue diretamente da definição de G e do item acima.

□

Demonstração do Lema 3.3.

(i) Pela Regra de L'Hôpital, temos que

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{g_1(s)}{s}=\lim_{s\to+\infty}g_1'(s)=\lim_{s\to+\infty}\ln(1+\mu s)+1=+\infty.$$

(ii) Segue diretamente da definição de G_1 e da Regra de L'Hôpital aplicada ao limite $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{G_1(s)}{s^2}=\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{g_1(s)}{2s}=+\infty$.

(iii) $g_1(s)$ é limitado em $(-\infty,0]$, portanto, basta considerar o caso $s>0$. Usando a Afirmação 2, item (iv) do Lema 2.5 para μs, temos que $\ln(1+\mu s)\leq\dfrac{\mu^{p-1}}{p-1}s^{p-1}$. Portanto,

$$g_1(s)\leq\frac{\mu^{p-2}}{p-1}(s^{p-1}+\mu s^p).$$

Temos que $s^{p-1}<\mu s^p$ em $\left(\dfrac{1}{\mu},+\infty\right)$, e $s^{p-1}\leq\mu^{1-p}$ em $\left(0,\dfrac{1}{\mu}\right]$, de forma que o item está provado, com $C=\dfrac{2\mu^{p-1}}{p-1}$ e $D=\dfrac{1}{\mu(p-1)}$.

(iv) O resultado segue da definição de G_1, do item acima, e do fato de que s^{p+1} domina s assintoticamente.

(v) Se $s>0$, temos $g_1(s)=\dfrac{1}{\mu}(1+\mu s)\ln(1+\mu s)$. Como $\mu>0$, isso nos dá $1+\mu s>1$, de forma que $\ln(1+\mu s)>0$, ou seja, $g_1(s)>0$. Se $s\leq-\dfrac{1}{\mu}$, temos que $g_1(s)=0$, então o item é trivialmente satisfeito. Por fim, se $0\geq s>-\dfrac{1}{\mu}$, temos que $0<1+\mu s<1$, de forma que $\ln(1+\mu s)<0$, ou seja, $g_1(s)\leq 0$. Como $g_1(s)$ possui derivada $g_1'(s)=1+\ln(1+\mu s)$, temos que $g_1{}'(s)=0$ quando $s=\dfrac{1-e}{\mu e}$, e isso nos dá um mínimo global para g_1, especificamente, $D=-\dfrac{1}{\mu e}$.

(vi) O resultado é consequência imediata da definição de G_1 e do item anterior.

$\square$

O teorema a seguir nos garante a convergência de uma classe de integrais de sequências. Isso nos permite reduzir a redundância nas demonstrações de convergência de integrais, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 1.4.

Lema A.2. Sejam $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada, $V(x) \in L^q(\Omega)$ para algum $q > \dfrac{N}{2}$, e $W(x) \in L^\infty(\Omega)$. Então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$\int_\Omega V(x)(W(x)+u_n)^s dx \to \int_\Omega V(x)(W(x)+u)^s dx, \tag{A.2}$$

para $1 \leq s \leq 2$.

Demonstração. Como (u_n) é limitada, temos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência:

1. $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$;
2. $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2^*$;
3. $u_n(x) \to u(x)$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, e
4. existe $h_p \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h_p(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$ e para qualquer $1 \leq p < 2^*$.

Pelas propriedades de (u_n), temos que

$$V(x)(W(x)+u_n)^r(x) \to V(x)(W(x)+u)^r(x),$$

em quase todos os pontos $x \in \Omega$. Também temos, por 4, que existe $h_p \in L^p(\Omega)$ tal que $|W(x)+u_n(x)| \leq h_p(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em quase todos os pontos $x \in \Omega$ e para qualquer $1 \leq p < 2^*$.

Como $1 \leq r \leq 2$, temos que $1 < rq' < 2^*$, além disso, pelo Teorema 1.1 (Desigualdade de Young),

$$|V(x)(W(x)+u_n(x))^r| \leq \frac{1}{q}|V(x)|^q + \frac{1}{q'}|W(x)+u_n(x)|^{rq'}.$$

Portanto, como $W \in L^\infty(\Omega)$, o item 4 nos garante que existe $h_{rq'} \in L^{rq'}(\Omega)$ tal que

$$|V(x)(W(x)+u_n(x))^r| \leq \frac{1}{q}|V(x)|^q + \frac{1}{q'}h_{rq'}^{rq'}.$$

Como $V \in L^q(\Omega)$ e $h \in L^{rq'}(\Omega)$, segue que $\dfrac{1}{q}|V(x)|^q + \dfrac{1}{q'}h_{rq'}^{rq'} \in L^1(\Omega)$.

Logo, por 4 e pelo Teorema 1.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue), obtemos a afirmação (A.2).

□

Observação A.1. Também podemos demonstrar a convergência da integral

$$\int_\Omega V(x)W(x)(u_n)dx \to \int_\Omega V(x)W(x)udx, \tag{A.3}$$

quando $W(x) \in H_0^1(\Omega)$. De fato, o resultado é análogo ao caso em que $s = 2$, no lema anterior.

Lema A.3. Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$, $W \in L^\infty$, e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente. Então:

$$\int_\Omega c(x)W(x)g(u_n^+)dx \to \int_\Omega c(x)W(x)g(u^+)dx$$

Demonstração. Como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente, temos que, a menos de subsequência:

1. $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$;
2. $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2^*$;
3. $u_n(x) \to u(x)$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, e
4. existe $h_p \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h_p(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$ e para qualquer $1 \leq p < 2^*$.

Assim, temos que $c(x)W(x)g(u_n^+) \hookrightarrow c(x)W(x)g(u^+)$ pontualmente. Seja $p \in (1,2)$. Pelo Lema 2.5, item (iv), existe $C > 0$ tal que $c(x)W(x)g(u_n^+) \leq Cc(x)W(x)(u_n^+)^p$ Como $p < 2$ e $q > \dfrac{N}{2}$, segue que $pq' < 2^*$. Logo, por 4 e pelo Teorema 1.1 (Desigualdade de Young) , temos que existe $h_{pq'} \in L^{pq'}(\Omega)$ tal que:

$$|c(x)W(x)g(u_n^+)| \leq \|W\|_\infty |Cc(x)(u_n)^p| \leq \frac{C\|W\|_\infty}{q}|c(x)|^q + \frac{\|W\|_\infty}{q'}h_{pq'}^{pq'}.$$

Por fim, como $c(x) \in L^q(\Omega)$, usamos o Teorema 1.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) para obter a convergência desejada. □

Observação A.2. O resultado acima também é válido para a função g_1 no lugar de g (veja o Lema 3.3).

Lema A.4. Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$, $W \in L^\infty$, e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente. Então:

$$\int_\Omega c(x)G(W(x) + u_n^+)dx \to \int_\Omega c(x)G(W(x) + u^+)dx$$

Demonstração. Por um argumento análogo ao apresentado no Lema A.2, basta provarmos que $\int_\Omega c(x)G(u_n^+) \to \int_\Omega c(x)G(u^+)$. Como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente, temos que, a menos de subsequência:

(1) $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$;

(2) $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2^*$;

(3) $u_n(x) \to u(x)$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$, e

(4) existe $h_p \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h_p(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ em quase todos os pontos $x \in \Omega$ e para qualquer $1 \leq p < 2^*$.

Assim, temos que $c(x)G(u_n^+) \hookrightarrow c(x)G(u^+)$ pontualmente. Seja $p \in \left(1, \dfrac{2^*}{q'} - 1\right)$ tal que $p < 2$. Pelo Lema 2.5, item (v), existe $C > 0$ tal que $c(x)G(u_n^+) \leq Cc(x)(u_n^+)^{p+1}$. Como $p + 1 < \dfrac{2^*}{q'}$ e $q > \dfrac{N}{2}$, segue que $(p+1)q' < 2^*$. Logo, por (3) e pelo Teorema 1.1 (Desigualdade de Young) , temos que existe $h \in L^{(p+1)q'}(\Omega)$ tal que:

$$|c(x)G(u_n^+)| \leq |Cc(x)(u_n)^p| \leq \frac{C}{q}|c(x)|^q + \frac{}{q'}h_{pq'}^{pq'}.$$

Por fim, como $c(x) \in L^q(\Omega)$, usamos o Teorema 1.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) para obter a convergência desejada. $\square$

Observação A.3. O resultado acima também é válido para a função G_1 no lugar de G (veja o Lema 3.3).

Bibliografia

[1] Abdellaoui, B., Dall'Aglio, A., and Peral, I. (2006). Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient. *J. Differential Equations*, 222(1):21–62.

[2] Ambrosetti, A. and Malchiodi, A. (2007). *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, volume 104 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, 14:349–381.

[4] Arcoya, D., De Coster, C., Jeanjean, L., and Tanaka, K. (2015). Continuum of solutions for an elliptic problem with critical growth in the gradient. *J. Funct. Anal.*, 268(8):2298–2335.

[5] Arcoya, D. and Segura de León, S. (2010). Uniqueness of solutions for some elliptic equations with a quadratic gradient term. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 16(2):327–336.

[6] Barles, G., Blanc, A.-P., Georgelin, C., and Kobylanski, M. (1999). Remarks on the maximum principle for nonlinear elliptic PDEs with quadratic growth conditions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 28(3):381–404.

[7] Barles, G. and Murat, F. (1995). Uniqueness and the maximum principle for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 133(1):77–101.

[8] Barles, G. and Porretta, A. (2006). Uniqueness for unbounded solutions to stationary viscous Hamilton-Jacobi equations. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 5(1):107–136.

[9] Boccardo, L. and Croce, G. (2014). *Elliptic partial differential equations*, volume 55 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, Berlin. Existence and regularity of distributional solutions.

[10] Boccardo, L., Murat, F., and Puel, J.-P. (1988). Quelques propriétés des opérateurs elliptiques quasi linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(14):749–752.

[11] Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York.

[12] De Coster, C. and Fernández, A. J. (2018). Existence and multiplicity for elliptic p-Laplacian problems with critical growth in the gradient. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 57(3):Paper No. 89, 42.

[13] De Coster, C. and Fernández, A. J. (2020). Existence and multiplicity for an elliptic problem with critical growth in the gradient and sign-changing coefficients. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 59(3):Paper No. 97, 34.

[14] De Coster, C., Fernández, A. J., and Jeanjean, L. (2019). A priori bounds and multiplicity of solutions for an indefinite elliptic problem with critical growth in the gradient. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 132:308–333.

[15] De Coster, C. and Jeanjean, L. (2017). Multiplicity results in the non-coercive case for an elliptic problem with critical growth in the gradient. *J. Differential Equations*, 262(10):5231–5270.

[16] de Figueiredo, D. G. (1982). Positive solutions of semilinear elliptic problems. In *Differential equations (S ao Paulo, 1981)*, volume 957 of *Lecture Notes in Math.*, pages 34–87. Springer, Berlin-New York.

[17] Dinca, G., Jebelean, P., and Mawhin, J. (2001). Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian. *Port. Math. (N.S.)*, 58(3):339–378.

[18] Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.

[19] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2001). *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the 1998 edition.

[20] Hamid, H. A. and Bidaut-Véron, M. F. (2008). Correlation between two quasilinear elliptic problems with a source term involving the function or its gradient. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(23-24):1251–1256.

[21] Hamid, H. A. and Bidaut-Veron, M. F. (2010). On the connection between two quasilinear elliptic problems with source terms of order 0 or 1. *Commun. Contemp. Math.*, 12(5):727–788.

[22] Jeanjean, L. and Ramos Quoirin, H. (2016). Multiple solutions for an indefinite elliptic problem with critical growth in the gradient. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(2):575–586.

[23] Jeanjean, L. and Sirakov, B. (2013). Existence and multiplicity for elliptic problems with quadratic growth in the gradient. *Comm. Partial Differential Equations*, 38(2):244–264.

[24] Leray, J. and Lions, J.-L. (1965). Quelques résulatats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder. *Bull. Soc. Math. France*, 93:97–107.

[25] Manes, A. and Micheletti, A. M. (1973). Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine. *Boll. Un. Mat. Ital. (4)*, 7:285–301.

[26] Sirakov, B. (2010). Solvability of uniformly elliptic fully nonlinear PDE. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 195(2):579–607.

[27] Struwe, M. (2000). Variational methods. 34:xviii+274. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.