Universidade de Brasília

Existência e regularidade de solução para uma equação elíptica semilinear com não linearidade singular

Jadde Thaine dos Santos Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Luís Henrique de Miranda

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre(a) em Matemática

Brasília, 11 de março de 2024

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me manter forte para realizar esse sonho, juntamente a minha família que é e sempre será responsável por todo sucesso que eu tiver na vida. Especialmente aos meus pais, Gilson e Eldir, e aos meus irmãos, Allan e Eric, que me deram educação, amor, colo, esperança e tudo que precisei ao longo dessa caminhada.

Ao meu orientador, Luís, que tenho grande admiração, que aceitou me orientar antes mesmo que eu terminasse a qualificação e pacientemente me ensinou. Aos membros da banca, Marcos Carvalho, Ma To Fu e Marcelo Furtado que se dispuseram a avaliar o meu trabalho.

Aos professores que acreditaram em mim, durante a graduação na Unimontes, e fizeram o possível para que eu fosse aprovada no mestrado, em especial, Dayane, Warley, Janine, Rieuse, Rômulo, Antonio Wilson e Leandro. Aos professores e funcionários do MAT/UnB pelo apoio.

Às pessoas excepcionais que conheci em Brasília-DF e que tornaram os dias dos últimos dois anos mais tranquilos, são elas: Henrylla, Willian, Millena, Daniel, Marcus, Manoel, Talita, Débora, Ayana, Dalila e Josiene. Aos meus amigos mineiros que fizeram parte de toda a minha trajetória acadêmica, Marcio, Saulo, Nicole, Thayslane, Igor, Matheus e Tiago, muito obrigada por toda paciência e cuidado.

À CAPES e à FAP-DF pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a existência e regularidade de solução para uma equação elíptica semilinear com não linearidade singular, seguindo os estudos de Lucio Boccardo e Luigi Orsina em [3]. Tal problema é dado por:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ u > 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado de classe C^1, $N \geq 2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função pertencente a algum Espaço de Lebesgue, $\gamma > 0$ e M é uma matriz elíptica limitada.

Palavras-chave: Equação elíptica semilinear. Regularidade. Singularidade.

Abstract

In this work, we investigate the existence and regularity of solutions for a semilinear elliptic equation with singular nonlinearity, following the studies of Lucio Boccardo and Luigi Orsina in [3]. This problem is given by:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^{\gamma}}, & \text{in } \Omega \\ u > 0, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded subset of $\mathbb{R}^N$ of class C^1, $N \geq 2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ is a function belonging to some Lebesgue Space, $\gamma > 0$ and M is a bounded elliptic matrix.

Keywords: Semilinear elliptic equation. Regularity. Singularity.

Conteúdo

Notações

$\mathbb{R}_+^*$	Espaço dos números reais positivos.
$\mathbb{R}^N$	Espaço euclidiano N-dimensional.
$B_r(x)$	Bola aberta de centro x e raio r.
Ω	Subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$.
$\overline{\Omega}$	Fecho do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$	$\overline{\widehat{\Omega}} \subset \Omega$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	O conjunto das funções testes.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	O conjunto das distribuições.
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\longrightarrow$	Convergência.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	Convergência fraca estrela.
$\hookrightarrow$	Imersão contínua.
q.t.p.	Para quase todo ponto $x \in \Omega$.
$C^k(\Omega)$	Espaço das funções de classe C^k em Ω.
$C_c^\infty(\Omega)$	Espaço das funções de classe C^∞ de suporte compacto contido em Ω.
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev.
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com repeito a norma de $W^{k,p}(\Omega)$.
$L_{loc}^1(\Omega)$	Espaço das funções localmente integráveis em Ω.
$(L^p(\Omega))^N$	Produto cartesiano dos $L^p(\Omega)$'s, ou seja, $(L^p(\Omega))^N = \prod_{i=1}^{N} L^p(\Omega)$.

$\partial u/\partial x_i$	Derivada parcial de u com respeito à i-ésima coordenada.
$(\partial^\alpha T/\partial x^\alpha)(\phi)$	α-ésima derivada de $T \in D'(\Omega)$.
∇u	$(\partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_N)$ para $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
$u^+(x)$	Para $u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in W^{1,p}(\Omega)$ é definido como $\max\limits_{x\in\Omega}\{u(x), 0\}$.
$u^-(x)$	Para $u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in W^{1,p}(\Omega)$ é definido como $\max\limits_{x\in\Omega}\{-u(x), 0\}$.
p^*	Expoente crítico de Sobolev dado por $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$.
$\lvert \cdot \rvert$	Norma usual do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$.
$\lVert \cdot \rVert_{L^p(\Omega)}$	Norma usual do espaço $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$.
$\lVert \cdot \rVert_{W^{1,p}(\Omega)}$	Norma usual do espaço $W^{1,p}(\Omega)$.
$\lVert \cdot \rVert_{W_0^{1,p}(\Omega)}$	Norma usual do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.
div u	Divergente da função u.
supp u	Suporte da função u.
$\max\limits_{\Omega} u$	$\max\{u(x) : x \in \Omega\}$.

Introdução

Nesta dissertação, seguindo os estudos de Lucio Boccardo e Luigi Orsina em [3], vamos investigar a existência e regularidade de solução do seguinte problema elíptico semilinear com não linearidade singular:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^{\gamma}} & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1, $N \geq 2$, $\gamma > 0$, $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$, e M é uma matriz elíptica limitada, isto é, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que:

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \quad |M(x)| \leq \beta \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Até onde pudemos verificar, problemas com singularidade similares a (1), foram estudados inicialmente por Stuart em [16] em 1976. Tal problema era definido da seguinte forma:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x, u(x)) & \text{para } x \in \Omega \\ u(x) = \phi(x) & \text{para } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

sendo L um operador linear de segunda ordem definido em Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$. Supondo $\phi(y) = 0$ e que

$$f(x,p) \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } p \longrightarrow 0 \text{ e } x \longrightarrow y, \quad y \in \partial\Omega$$

Um ano mais tarde, Crandall, Rabinowitz e Tartar trabalharam em [6], o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu = g(x,u) & \text{para } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{para } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

em que L é um operador linear de segunda ordem e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto. Neste caso, supondo que

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to+\infty} g(x,r) = +\infty & \text{uniformemente para x } \in \overline{\Omega} \\ g(x,r) & \text{é não crescente em } r \in (0,+\infty) \text{ para } x \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

os autores provaram a existência de solução clássica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, em que $u > 0$ em Ω.

Para uma não linearidade específica, Lazer e McKenna estudaram em [12] o caso em que

$$\begin{cases} \Delta u(x) + p(x)u(x)^{-\gamma} = 0 & \text{para } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{para } \partial\Omega \end{cases}$$

e garantiram a existência de uma única solução u em $C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$. Além disso, mostraram que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ se $\gamma < 3$ e que $u \notin C^1(\overline{\Omega})$ se $\gamma > 1$.

Posteriormente, um ano antes do artigo de Boccardo e Orsina ser produzido, Arcoya et. al. publicaram [1], onde estudaram a existência e não-existência de soluções não negativas para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\text{div}(M(x,u)\nabla u) + g(x,u)|\nabla u|^2 = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

sendo M uma matriz elíptica limitada cujas entradas são funções Carathéodory. Além disso, g é Carathéodory e positiva se a última entrada também o for. Consideraram, nesse trabalho, a g ser singular no $s = 0$, como por exemplo, $g(x,s) = 1/s$.

Assim como em [3], o Problema (1) foi divido em três partes com respeito a γ, quando é igual a 1, maior que 1 e menor que 1. Para obter os resultados, consideramos inicialmente um problema aproximado e garantimos a existência de uma única solução u_n positiva, desse problema, em $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Ainda em [3], os autores, ao iniciarem o caso $\gamma = 1$, provaram uma estimativa para u_n em $W_0^{1,2}(\Omega)$, passo necessário para passagem do limite no problema aproximado. No caso $\gamma > 1$, não foi possível obter solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$, mas sim em $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$. Assim, foi necessário definir o sentido de $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Quanto a integrabilidade, nos casos $\gamma = 1$ e $\gamma > 1$, foi mostrado que quando $f \in L^m(\Omega)$, com $m > N/2$, u pertence a $L^\infty(\Omega)$ e quando $1 \leq m < N/2$, u está em $L^s(\Omega)$, no primeiro caso com $s = 2mN/(N-2m)$ e no segundo caso com $s = Nm(\gamma+1)/(N-2m)$. Para o caso $\gamma < 1$, Boccardo e Orsina provaram uma estimativa para u_n em $W_0^{1,2}(\Omega)$ quando o dado é colocado em $L^m(\Omega)$, com $m = [2^*/(1-\gamma)]'$, na intenção de fazer a passagem do limite para mostrar a existência de solução de (1). Logo após, estudaram a regularidade da solução quando $m \geq [2^*/(1-\gamma)]'$. Foi feita uma observação, durante o texto, que quando $m > [2^*/(1-\gamma)]'$, a prova da existência de solução de (1) seria através de minimização de um funcional. Isso nos motivou a mostrar que quando m está nesse intervalo, a solução u de (1) é o mínimo para o funcional explícito:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f v^{1-\gamma}, \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2}$$

Quando $\gamma < 1$ e $f \in L^m(\Omega)$ com $1 \leq m < [2^*/(1-\gamma)]'$, os autores garantiram a existência de solução um espaço mais fraco que $W_0^{1,2}(\Omega)$. Para tanto, provaram uma estimativa de u_n em $W_0^{1,q}(\Omega)$, em que $q = Nm(\gamma+1)/[N-m(1-\gamma)]$ e fizeram a passagem do limite.

Dividimos em quatro capítulos a investigação de existência e regularidade do problema em (1). O primeiro deles é um capítulo de preliminares constando resultados essenciais para a discussão dos demais capítulos, sendo eles: Espaços $L^p(\Omega)$, Espaços de Sobolev, Aproximação e Minimização de um Funcional. Em particular, na Seção 1.3, estudamos o seguinte problema aproximado:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) = \dfrac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

sendo f é uma função mensurável não negativa, $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \min\{f, n\}$ e M uma matriz elíptica limitada. Acrescentamos, nessa seção, teoremas cruciais para a discussão de (1), como por exemplo, os Princípios do Máximo. Em particular, o Princípio do Máximo Forte, posto em [11], foi indispensável para preenchermos as lacunas identificadas na prova do lema de existência de uma constante $K_{\widehat{\Omega}} > 0$, independente de n, tal que se u_n é solução de (3), então

$$u_n(x) \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0,$$

para todo $x \in \Omega$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Os Capítulos 2 e 3, compomos pelos resultados de existência e regularidade da solução do Problema (1) quando $\gamma = 1$ e $\gamma > 1$, respectivamente. No Capítulo 3, especificamente, garantimos a existência de solução u em $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, e portanto, foi necessário definirmos o sentido de $u = 0$ em $\partial\Omega$. Para tanto, nos inspiramos na Definição 1.3 e na Proposição 1.5 do trabalho produzido em [5] para mostrar que se v é uma função não-negativa tal que $v^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $v|_{\partial\Omega} = 0$. Ressaltamos que tal definição não estava explícita em [3], e por isso, a visualização dessa propriedade para o Problema (1), quando $\gamma > 1$, foi feita com bastante cautela. Devido ao teorema auxiliar utilizado para mostrar resultados nesse capítulo, foi necessário exigir que Ω seja de classe C^1.

Já o Capítulo 4, é composto também por resultados de existência e regularidade de solução quando $\gamma < 1$, com o diferencial de que fora acrescentado a prova da existência de solução de (1) utilizando o funcional explicitado em (2) na Subseção 4.1.1. Para isso, começamos mostrando, utilizando o Teorema de De Giorgi, que o funcional aproximado em (4) definido em $W_0^{1,2}(\Omega)$, possui um mínimo.

$$J_n(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}. \tag{4}$$

Com o auxílio do Teorema de Weiertrass, provamos que esse mínimo satisfaz a Equação de Euler e, portanto, o problema aproximado (3). Com isso, iniciamos o processo de passagem do limite para mostrarmos que o mínimo de J, definido em (2), satisfaz a Equação de Euler. Destacamos que, nessa Subseção, considerando u o mínimo para J, foi preciso mostrar que J é Gâteaux diferenciável em $u > 0$, num compacto $\widehat{\Omega} \subset \Omega$ tal que $u \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0$.

Diferente do que foi feito em [3], vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado de classe C^1 para construirmos a definição de $u|_{\partial\Omega} = 0$ no Capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo desse capítulo é trazer tópicos iniciais que serão necessários para discutir o Problema (1). Começaremos com a Seção 1.1 sobre Espaços $L^p(\Omega)$.

A Seção 1.2 é dividida em duas subseções. Na Subseção 1.2.1 definiremos Distribuições e provaremos propriedades básicas sobre seus elementos. Já na Subseção 1.2.2 definiremos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, o Subespaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ e destacaremos resultados importantes como a Desigualdade de Poincaré, a Regra da Cadeia Localmente Lipschitz e a Regra do Produto. Finalizaremos essa seção com algumas imersões de Sobolev.

Na Seção 1.3 serão discutidos resultados de Aproximação, parte necessária para estudar o Problema (1). Nesta, trataremos dentre outros, resultados de existência e unicidade sobre um problema aproximado ao original.

Finalizaremos com o tópico "Mínimo de um Funcional e Equação de Euler" pontuando definição de um funcional semicontínuo inferior fraco, Gâteaux diferenciabilidade e equação de Euler. Além disso, alguns resultados como Teorema de Weierstrass e De Giorgi serão incluídos na seção. Utilizaremos esses conceitos no Capítulo 4 onde provamos a existência de solução para (1) quando colocamos a f em algum Espaço $L^p(\Omega)$ específico.

Como posto na introdução, estaremos considerando durante todo o texto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado de classe C^1.

1.1 Espaços L^p

Definição 1.1. *Quando $1 \leq p < +\infty$, definimos o Espaço $L^p(\Omega)$ como*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p < +\infty \right\}$$

e, quando $p = +\infty$*, definimos* $L^\infty(\Omega)$ *como*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e existe } C > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

A norma de u em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ é dada por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e quando $p = +\infty$, a norma é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{\, C \,:\, |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

A desigualdade de Hölder a seguir faz uma comparação entre a norma em $L^1(\Omega)$ do produto de duas funções e o produto da norma dessas funções em $L^p(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$, respectivamente, sendo p e q expoentes conjugados, ou seja, $1/p + 1/q = 1$.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$*, com* $1 \leq p \leq \infty$*, e* $v \in L^q(\Omega)$*, em que* q *é o expoente conjugado de* p*, ou seja*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

então $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Primeiro, supondo $p = 1$, temos que $q = +\infty$. Daí:

$$\int_\Omega |uv| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u| = \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

A demonstração é análoga caso $p = +\infty$ e $q = 1$.

Agora, suponha que $1 < p < +\infty$. Então, lembrando da desigualdade de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad a, b \geq 0$$

temos o seguinte:

$$|u(x)v(x)| \leq \frac{|u(x)|^p}{p} + \frac{|v(x)|^q}{q} \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Então,

$$\int_\Omega |uv| \leq \int_\Omega \left(\frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q} \right),$$

ou seja

$$\int_\Omega |uv| \leq \frac{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}}{p} + \frac{\|v\|^q_{L^q(\Omega)}}{q}.$$

Da última desigualdade, ganhamos que $uv \in L^1(\Omega)$. Tomando $\left(\|u\|^{-1}_{L^p(\Omega)} \|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)} \right) u$ no lugar de u, então como $\|u\|^{-1}_{L^p(\Omega)} \|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)} \geq 0$, obtemos:

$$\|u\|^{-1}_{L^p(\Omega)} \|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)} \int_\Omega |uv| \leq \frac{\left(\|u\|^{-1}_{L^p(\Omega)} \|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)} \right)^p \|u\|^p_{L^p(\Omega)}}{p} + \frac{\|v\|^q_{L^q(\Omega)}}{q}.$$

Ajustando os termos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |uv| &\leq \frac{\left(\|u\|^{-1}_{L^p(\Omega)} \|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)} \right)^{p-1} \|u\|^p_{L^p(\Omega)}}{p} + \frac{\|v\|^q_{L^q(\Omega)}}{\left(\|u\|^{-1}_{L^p(\Omega)} \|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)} \right) q} \\
&= \frac{\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|^{\frac{q(p-1)}{p}}_{L^q(\Omega)} \right)}{p} + \frac{\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|^{\frac{q(p-1)}{p}}_{L^q(\Omega)} \right)}{q} \\
&= \frac{\|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}}{p} + \frac{\|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} (p-1)}{p} \\
&= \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Adiante, o teorema que resulta em convergência fraca e forte de funções em $L^p(\Omega)$ e será utilizado em muitas demonstrações de resultados do texto para garantir a unicidade do limite.

Teorema 1.3. *Seja u_n uma sequência de funções e $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, tal que*

i) *u_n é limitada em $L^p(\Omega)$;*

ii) *$u_n \longrightarrow u$ q.t.p. em Ω.*

Então $u_n \longrightarrow u$ em $L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p)$, e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [2, Theorem 3.1].

□

Para mostrar alguns resultados de regularidade, o Lema 1.4 e o Teorema 1.26 serão ferramentas necessárias. Em suma, o lema garante uma estimativa para f em $L^\infty(\Omega)$ sendo f uma função em $L^1(\Omega)$. Já o teorema traz duas estimativas, uma em $L^\infty(\Omega)$ (caso $p > N$) e outra em $L^{p^*}(\Omega)$ (caso $2 \leq p < N$).

Lema 1.4. *Dado $j \in \mathbb{R}_+^*$, considere a função $G_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$G_j(x) = \begin{cases} 0, & se\ |x| \leq j \\ x - j, & se\ x > j \\ x + j, & se\ x < -j \end{cases}$$

uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pertencente a $L^1(\Omega)$ e

$$g(j) = \int_\Omega |G_j(f)|.$$

Se $g(j)$ satisfaz, para todo j,

$$g(j) \leq C \cdot med(\{|f| > j\})^\eta$$

com $\eta > 1$ e $C > 0$, então $f \in L^\infty(\Omega)$ e existe uma constante $m = m(\eta, \Omega)$ tal que

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \cdot m.$$

Demonstração. Ver [2, Lemma 6.2].

□

O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue é um dos mais importantes teoremas de convergência e será utilizado em muitos resultados desse trabalho para passagem do limite sob sinal de integral.

Teorema 1.5 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que:*

a) *$f_n \longrightarrow f$ q.t.p. em Ω.*

b) *Existe uma função não-negativa $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p. em Ω e para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int f_n = \int f$.

Demonstração. Ver [10, 2.24 The Dominated Convergence Theorem].

□

O próximo resultado é consequência do Teorema 1.5 e será utilizado para calcular a derivada de um funcional integral no Capítulo 4.

Corolário 1.6. *Suponha $f : \Omega \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f é integrável para todo $t \in [a,b]$. Considere $F(t) = \int_{\Omega} f(x,t)dx$.*

i) *Se existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$, para todo $(x,t) \in \Omega \times [a,b]$ e $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$, para todo $x \in \Omega$, então $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$.*

ii) *Suponha que $\partial f / \partial t$ exista para todo $t \in [a,b]$ e q.t.p. $x \in \Omega$, e que exista $h \in L^1(\Omega)$ tal que $|(\partial f / \partial t)(x,t)| \leq h(x)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [a,b]$, então F é diferenciável e $F'(x) = \int_{\Omega} (\partial f / \partial t)(x,t)dx$.*

Demonstração. Para provar o item **i)**, considere $f_n(x) = f(x,t_n)$ uma sequência de funções em que $\{t_n\}$ é uma sequência que converge para t_0.

Como $|f(x,t)| \leq g(x)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [a,b]$, então, em particular, $|f(x,t_n)| = |f_n(x)| \leq g(x)$. Além disso, do fato de

$$\lim_{t \to t_0} f(x,t) = f(x,t_0) \quad \forall\, x \in \Omega,$$

ganhamos que

$$\lim_{t_n \to t_0} f_n(x) = \lim_{t_n \to t_0} f(x,t_n) = f(x,t_0). \tag{1.1}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.5, garantimos:

$$\lim_{t_n \to t_0} \int_{\Omega} f_n(x) = \int_{\Omega} \lim_{t_n \to t_0} f_n(x).$$

Concluindo, da última equação e de (1.1):

$$\lim_{t \to t_0} F(t_n) = \lim_{t_n \to t_0} \int_{\Omega} f_n(x) = \int_{\Omega} f(x,t_0) = F(t_0).$$

Para o item **ii)**, considere, novamente, $\{t_n\}$ uma sequência convergindo para t_0 e observe que:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) = \lim_{t_n \to t_0} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

Segue que $\partial f/\partial t$ é mensurável, já que é o limite de funções mensuráveis, e utilizando o Teorema do Valor Médio, garantimos que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\left|\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t_n}(x,c)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq h(x) \quad \forall\,(x,t)\in\Omega\times[a,b]$$

então, invocando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.5), temos:

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t_n\to t_0}\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} \\ &= \lim_{t_n\to t_0}\int_\Omega \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}dx \\ &= \int_\Omega \lim_{t_n\to t_0}\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}dx \\ &= \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dx. \end{aligned}$$

O resultado segue.

□

1.2 Distribuições e Espaços de Sobolev

Nessa seção, vamos começar estudando as Distribuições como motivação para estudar os Espaços de Sobolev.

1.2.1 Distribuições

Começamos definindo a seguinte noção de convergência.

Definição 1.7. *Dada uma sequência $\{\phi_n\}\subset C_c^\infty(\Omega)$, dizemos que ela converge para $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ no sentido das distribuições se satisfaz as condições:*

i) *Existe um conjunto compacto K de Ω tal que supp $\phi_n\subset K$;*

ii) *$\{D^\alpha\phi_n\}$ converge uniformemente para $D^\alpha\phi$ em K, para todo multi-índice α.*

Definição 1.8. *Chamamos de $\mathcal{D}(\Omega)$ o conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência acima. Denominamos $\mathcal{D}'(\Omega)$ os elementos do dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

A seguir, definiremos derivada no sentido distribucional.

Definição 1.9. *Considere $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice. Definimos α-ésima derivada de T como*
$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}(\phi) := (-1)^{|\alpha|} T\left(\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}\right).$$

Proposição 1.10. *A α-ésima derivada de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é também uma distribuição.*

Demonstração. De fato, considere K um compacto de Ω. Sendo T contínua, então existe um $j \in \mathbb{N}$ e uma constante $C > 0$, dependente de K, tal que

$$|T(\phi)| \leq C\|\phi\|_{K,j} \tag{1.2}$$

em que
$$\|\phi\|_{K,j} := \sup \left\{\left|\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(x)\right|\right\} \quad \text{com } |\alpha| \leq j.$$

Note que tal norma está bem definida. Então, pela desigualdade (1.2), vale que

$$\left|\frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}(\phi)\right| = \left|(-1)^{|\alpha|} T\left(\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}\right)\right| = \left|T\left(\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}\right)\right| \leq C\left\|\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}\right\|_{K,j}.$$

Como sempre que $|\beta| + |\alpha| \leq j$, temos

$$\left\|\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}\right\|_{K,j} = \sup\left\{\left|\frac{\partial^\beta\left(\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}\right)}{\partial x^\beta}\right|\right\} = \sup\left\{\left|\frac{\partial^{\beta+\alpha} \phi}{\partial x^{\beta+\alpha}}\right|\right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}(\phi)\right| &\leq C\left\|\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}\right\|_{K,j} \\
&= C \sup\left\{\left|\frac{\partial^{\beta+\alpha} \phi}{\partial x^{\beta+\alpha}}\right|\right\} \\
&\leq C \sup\left\{\left|\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}\right|\right\} \\
&= C\|\phi\|_{K,j}.
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

□

O Lema de Urysohn a seguir garante que, para todo compacto de $\mathbb{R}^N$ contido num aberto, vai existir uma função contínua, com derivadas de todas as ordens contínuas, tal que essa função é identicamente 1 nesse compacto e possui suporte contido nesse aberto.

Lema 1.11 (Urysohn)**.** *Seja $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ um compacto e A um conjunto aberto tal que $\widehat{\Omega} \subset A$. Então existe $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le \phi \le 1$, $\phi = 1$ em $\widehat{\Omega}$ e $supp(\phi) \subset A$.*

Demonstração. Ver [10, 8.18 The C^∞ Urysohn Lemma].

□

O resultado seguinte é um importante teorema utilizado especialmente em provas com argumentos de aproximação.

Teorema 1.12 (Friedrichs)**.** *Dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \le p < +\infty$, então existe uma sequência $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_n|_\Omega \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega)$$

e para qualquer $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, temos:

$$\nabla u_n|_{\widehat{\Omega}} \longrightarrow \nabla u|_{\widehat{\Omega}} \quad \text{em } (L^p(\widehat{\Omega}))^N.$$

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $1 \le p < +\infty$, existe uma sequência $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{em } (L^p(\mathbb{R}^N))^N.$$

Demonstração. Ver [4, Theorem 9.2].

□

1.2.2 Espaços de Sobolev

Definição 1.13. *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. A α-ésima derivada fraca ou derivada distribucional de u é a distribuição $\partial^\alpha T_u / \partial x^\alpha$.*

Mesmo que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, não podemos garantir que a derivada distribucional de u ainda esteja em $L^1_{loc}(\Omega)$. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in (0, +\infty) \\ 0, \text{ se } x \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

dado um compacto $K \subset \mathbb{R}$, temos

$$\int_K |f(x)| dx \leq \text{ med}(K) < +\infty,$$

ou seja, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entretanto, $f' \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$, pois $f' = \delta_0$ (Medida de Dirac) (ver [7, Exemplo 1.8]). Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.14. *Considere $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos o Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\}.$$

Observação 1.15. *Neste caso, ∇u é tomado no sentido distribucional (ou fraco).*

Definimos a norma de u em $W^{1,p}(\Omega)$, no caso em que $1 \leq p < +\infty$, como

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, no caso em que $p = +\infty$, definimos a norma de u em $W^{1,\infty}(\Omega)$ como

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}.$$

O próximo resultado de [4] nos revela uma caracterização do Espaço $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.16. *Seja $u \in L^p(\Omega)$, com $1 < p \leq +\infty$. Então são equivalentes:*

i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

ii) *Existe uma constante C tal que para todo $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, e $h \in \mathbb{R}^N$ com $|h| < d(\widehat{\Omega}, \partial\Omega)$, temos*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega)} < C|h|$$

onde $\tau_h u(x) = u(x+h)$.

Demonstração. Ver [4, Proposition 9.18]. □

A seguir será definido o conjunto $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Poderíamos, também, definir a partir do operador Traço, veja [4, Theory of traces, ii)].

Definição 1.17. *Definimos o Espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, ou seja, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência u_n de $C_c^\infty(\Omega)$ tal que u_n converge para u em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Sendo Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado, podemos considerar a norma de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O Teorema 1.18 é uma caracterização do Espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ posto em [4].

Teorema 1.18. *Seja $u \in L^p(\Omega)$, com $1 < p \leq +\infty$. Então são equivalentes:*

i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

ii) *A função*

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x), & se\ x \in \Omega \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

pertence a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e nesse caso

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Demonstração. Ver [4, Proposition 9.3].

□

O resultado a seguir propõe uma condição suficiente para que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 1.19. *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e u admite suporte compacto contido em Ω, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Considere $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$ tal que $\mathrm{supp}(u) \subset \widehat{\Omega}$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi = 1$ em $\widehat{\Omega}$ (garantimos a existência dessa função ϕ graças ao lema de Urysohn (ver Lema 1.11). Então, temos que $\phi u = u$ e pelo Teorema de Friedrichs (Teorema 1.12), existe uma sequência u_n de $C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$u_n|_\Omega \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega)$$

e

$$\nabla u_n|_{\widehat{\Omega}} \longrightarrow \nabla u|_{\widehat{\Omega}} \quad \text{em } (L^p(\widehat{\Omega}))^N$$

segue então que $\phi u_n \longrightarrow \phi u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Daí, pela definição, temos que $\phi u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e portanto, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

O próximo teorema é um importante resultado nomeado como Desigualdade de Poincaré. Essa desigualdade nos permite majorar a norma $L^p(\Omega)$ de uma função em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pela norma $L^p(\Omega)$ do seu gradiente.

Teorema 1.20 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha $1 \leq p < +\infty$, então a desigualdade abaixo é verdadeira:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [13, Theorem 12.17].

□

Note que $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é a norma de u em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

A seguir, vamos mostrar os resultados da Regra da Cadeia localmente Lipschitz e a Regra do Produto para funções em Espaços de Sobolev. Para mostrar o primeiro resultado, precisaremos da Regra da Cadeia Lipschitz, Teorema 1.21 e um lema auxiliar.

Teorema 1.21 (Regra da Cadeia Lipschitz)**.** *Considere $1 \leq p < +\infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz. Se $f \circ u \in L^p(\Omega)$, então $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial f \circ u}{\partial x_i} = f'(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad q.t.p.\ x \in \Omega, i = 1, \ldots, N.$$

Além disso, se $f(0) = 0$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [17, Theorem 2.1.1].

□

Para finalmente mostrarmos a Regra da Cadeia localmente Lipschitz, vamos mostrar o próximo lema auxiliar.

Lema 1.22. *A função Truncamento de Stampacchia* $T_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $j \in \mathbb{R}_+^*$ *definida por:*

$$T_j(x) = \max\{-j, \min\{x, j\}\} = \begin{cases} x, & se\ |x| \leq j \\ j, & se\ x > j \\ -j, & se\ x < -j \end{cases}$$

é Lipschitz.

Demonstração. Com efeito, considere $x, y \in \mathbb{R}$.

- Caso $|x| \leq j$:

$$T_j(x) - T_j(y) = \begin{cases} x - y, & \text{se } |y| \leq j \\ x - j, & \text{se } y > j \\ x + j, & \text{se } y < -j. \end{cases} .$$

  Se $T_j(x) - T_j(y) = x - y$, então $|T_j(x) - T_j(y)| = |x - y|$.

  Supondo $T_j(x) - T_j(y) = x - j$, então

$$\begin{aligned} |T_j(x) - T_j(y)| &= |x - j| \\ &\leq |x - y| + |y - j| \\ &\leq |x - y| + |y - x| \\ &= 2|x - y|. \end{aligned}$$

  Agora, se $T_j(x) - T_j(y) = x + j$, então

$$|T_j(x) - T_j(y)| = |x + j| \leq |x - y|.$$

- Caso $x > j$:

$$T_j(x) - T_j(y) = \begin{cases} j - y, & \text{se } |y| \leq j \\ 0, & \text{se } y > j \\ 2j, & \text{se } y < -j. \end{cases}$$

  Se $T_j(x) - T_j(y) = j - y$, segue que

$$|T_j(x) - T_j(y)| = |j - y| < |x - y|.$$

Por outro lado, se $T_j(x) - T_j(y) = 0$, temos que $|T_j(x) - T_j(y)| \leq |x-y|$.

Na última opção desse caso, se $T_j(x) - T_j(y) = 2j$, garantimos:

$$\begin{aligned} |T_j(x) - T_j(y)| &= |2j| \\ &< |x-y|. \end{aligned}$$

- Caso $x < -j$:

$$T_j(x) - T_j(y) = \begin{cases} -j-y, & \text{se } |y| \leq j \\ -2j, & \text{se } y > j \\ 0, & \text{se } y < -j. \end{cases}$$

Se $T_j(x) - T_j(y) = -j-y$, obtemos:

$$|T_j(x) - T_j(y)| = |j+y| < |-x+y| = |x-y|.$$

Supondo $T_j(x) - T_j(y) = -2j$, temos:

$$\begin{aligned} |T_j(x) - T_j(y)| &= |2j| \\ &< |x-y|. \end{aligned}$$

Por fim, se $T_j(x) - T_j(y) = 0$, temos $|T_(x) - T_j(y)| \leq |x-y|$.

Provadas todas as possibilidades, a afirmação segue.

□

Teorema 1.23 (Regra da Cadeia localmente Lipschitz)**.** *Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz, $1 \leq p < +\infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então, $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u \quad q.t.p. \ x \in \Omega.$$

Além disso, se $f(0) = 0$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, teremos $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u \quad q.t.p. \ x \in \Omega.$$

Demonstração. Para a primeira parte, suponha $j > \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 0$ e considere o Truncamento de Stampacchia T_j definido no Lema 1.22. Tomemos então a função $h : f \circ T_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e vamos mostrar que h é localmente Lipschitz.

De fato, seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto. Então, sendo f localmente Lipschitz, existe C_K que satisfaz:

$$|f(x) - f(y)| \leq C_K |x - y| \quad \forall\, x, y \in K.$$

Ora, então seja $\widetilde{K} \subset Im(T_j) \subset \mathbb{R}$ um compacto e $T_j(\widetilde{x}), T_j(\widetilde{y}) \in K$. Daí,

$$|f(T_j(\widetilde{x})) - f(T_j(\widetilde{y}))| \leq C_{\widetilde{K}} |T_j(\widetilde{x}) - T_j(\widetilde{y})|$$

como T_j é Lipschitz, garantimos que:

$$|f(T_j(\widetilde{x})) - f(T_j(\widetilde{y}))| \leq \widetilde{C} |\widetilde{x} - \widetilde{y}| \quad \forall\, \widetilde{x}, \widetilde{y} \in T_j^{-1}(K).$$

A afirmação está provada.

Como $\text{med}(\Omega) < +\infty$ e $u \in L^\infty(\Omega)$, então

$$|h(u)| = |f(T_j(u))| < \widehat{M}$$

ou seja, $h(u) \in L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Assim, segue do Teorema 1.21 que $h \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(u(x)) = h'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Note que

$$h'(u(x)) = f'(T_j(u(x))) \cdot T_j'(u(x)) \tag{1.3}$$

já que $|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < j$ q.t.p. $x \in \Omega$, segue que $T_j(u(x)) = u(x)$ e $T_j'(u(x)) = 1$. Daí, de (1.3):

$$h'(u(x)) = f'(u(x))$$

ademais, $h \circ u = h(u) = f(T_j(u)) = f(u) = f \circ u$ q.t.p. Ω. Logo, $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(u) = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, segue que $\nabla f \circ u = f'(u) \nabla u$ q.t.p. em Ω.

Para segunda parte, sendo $f(0) = 0$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e considerando, ainda, a função h como definida anteriormente, ganhamos que $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

Seguiremos com o Teorema da Regra do Produto.

Teorema 1.24 (Regra do Produto)**.** *Sejam* $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$*,* $1 \leq p < +\infty$*. Então* $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *para todo* $i = 1, ..., N$ *e*

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Demonstração. Como $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, pelo Teorema de Friedrichs, Teorema 1.12, existem $u_n, v_n \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\begin{cases} u_n|_{\Omega} \longrightarrow u & \text{em } L^p(\Omega) \text{ e q.t.p. em } \Omega, \\ v_n|_{\Omega} \longrightarrow v & \text{em } L^p(\Omega) \text{ e q.t.p. em } \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

e para qualquer que seja $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, temos:

$$\begin{cases} \nabla u_n|_{\widehat{\Omega}} \longrightarrow \nabla u|_{\widehat{\Omega}} & \text{em } (L^p(\widehat{\Omega}))^N, \\ \nabla v_n|_{\widehat{\Omega}} \longrightarrow \nabla v|_{\widehat{\Omega}} & \text{em } (L^p(\widehat{\Omega}))^N. \end{cases} \tag{1.5}$$

Considere $\widetilde{\rho}_n, \widehat{\rho}_n \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\begin{aligned} u_n = \widetilde{\rho}_n * u \longrightarrow u \quad & \text{em } L^p(\Omega), \\ v_n = \widehat{\rho}_n * v \longrightarrow v \quad & \text{em } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\|u_n\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\widetilde{\rho}_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Analogamente,

$$\|v_n\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq \|v\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Usando a definição de Derivada Fraca, ganhamos:

$$\int_{\Omega} u_n v_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + \frac{\partial v_n}{\partial x_i} u_n \right) \phi + \int_{\partial\Omega} u_n v_n \eta^i \quad \forall\, \phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

donde a última parcela da integral é igual a zero, pois u_n, v_n têm suporte contido em Ω. Daí,

$$\int_{\Omega} u_n v_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + \frac{\partial v_n}{\partial x_i} u_n \right) \phi \quad \forall\, \phi \in C_c^{\infty}(\Omega).$$

De (1.4), garantimos que

$$u_n v_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \longrightarrow uv \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, sendo u_n, v_n limitadas em $L^{\infty}(\Omega)$, garantimos que

$$\left| u_n v_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|v\|_{L^{\infty}(\Omega)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \in L^1(\Omega)$$

então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.5):

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} u_n v_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} uv \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

Por outro lado, de (1.5), garantimos que dado $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, temos:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{em } L^p(\widehat{\Omega}) \hookrightarrow L^1(\widehat{\Omega})$$

e ainda, $v_n \phi$ converge pontualmente para $v\phi$. Sendo v_n limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, garantimos a existência de $C > 0$ tal que:

$$|v_n| \leq C \quad \text{q.t.p. em } \widehat{\Omega}$$

o que implica que

$$|v_n \phi| \leq C|\phi| \in L^{\infty}(\widehat{\Omega}).$$

Então,

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v_n \phi \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^1(\widehat{\Omega})$$

sendo que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} (v_n \phi - v\phi) \right| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\phi| (|v_n| + |v|) \leq 2C \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\phi| \in L^1(\widehat{\Omega}),$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(v_n\phi - v\phi) \longrightarrow 0 \quad \text{pontualmente.}$$

Por fim, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.5, que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\widehat{\Omega}} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n\phi = \int_{\widehat{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial x_i} v\phi \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Analogamente, mostra-se que:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\widehat{\Omega}} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} u_n\phi = \int_{\widehat{\Omega}} \frac{\partial v}{\partial x_i} u\phi,$$

e então está provado o teorema.

□

Neste trabalho, em quase todas as demonstrações, utilizaremos imersões de Sobolev a fim de garantir estimativas. Essencialmente, usaremos a imersão $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. O Teorema seguinte apresenta algumas dessas imersões.

Teorema 1.25. *Considere $1 \le p < \infty$. As imersões são válidas:*

- *$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*]$, em que $p^* = Np/(N-p)$, quando $p < N$;*
- *$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \ge 1$, quando $p = N$.*

Em particular $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*]$, em que $p^* = Np/(N-p)$, quando $p < N$. Neste caso, não é exigido que Ω seja de classe C^1.

Demonstração. Para as duas primeiras imersões, veja o Corollary 9.14 de [4].

Para o caso particular, dividiremos em dois casos. Seja $q = p^*$, então pela desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg, ver [4, Theorem 9.9], temos que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall\, u \in C_c^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.6}$$

Vamos mostrar que existe $\widehat{C} > 0$ que satisfaz:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le \widehat{C}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então existe $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Façamos a seguinte extensão:

$$\overline{u_n}(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Então, por (1.6) garantimos a existência de $\widehat{C} \geq 0$ tal que:

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\overline{u_n}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \widehat{C}\|\nabla \overline{u_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \widehat{C}\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.7}$$

Ora, pelo Teorema de Friedrichs, Teorema 1.12, garantimos:

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{em } (L^p(\Omega))^N$$

então usando (1.6), temos:

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \widehat{C}\|\nabla(u_m - u_l)\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$$

isto é, $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{p^*}(\Omega)$. Daí, existe $\widehat{u} \in L^{p^*}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow \widehat{u}$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Como $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Então, $\widehat{u} = u$. Passando ao limite em (1.7), temos:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \widehat{C}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.8}$$

e o resultado segue.

Agora, suponha $q \in [1, p^*)$ e considere $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Note que, usando desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, com p^*/q e $(p^* - q)/p^*$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_\Omega |u|^q &\leq \left(\int_\Omega |u|^{p^*}\right)^{\frac{q}{p^*}} \cdot \operatorname{med}(\Omega)^{\frac{p^*-q}{p^*}} \\ &= \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^q \cdot \operatorname{med}(\Omega)^{\frac{p^*-q}{p^*}}. \end{aligned}$$

Concluímos de (1.8) que:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \lambda \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

em que λ depende de p, q, N e $\operatorname{med}(\Omega)$.

□

Para finalizar a subseção, o próximo teorema é um resultado de equações diferenciais parciais que será utilizado para garantir estimativas de $u \in L^{\infty}(\Omega)$.

Teorema 1.26. *Suponha que L seja um operador definido como segue:*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N}(a_{ij}u_{x_i} + d_j u)_{x_j} + \sum_{i=1}^{N}(b_i u_{x_i} + cu)$$

em que a_{ij} são funções limitadas, mensuráveis e de valor real. Assumimos que L é uniformemente elíptico, isto é, existe uma constante τ que satisfaz:

$$\tau|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i \cdot \xi_j \quad \forall\, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Além disso, considere que a forma $a(u,v)$ é coerciva em $W_0^{1,2}(\Omega)$, ou seja,

$$a(u,u) \geq \beta \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Suponha, ainda, que

i) $\begin{cases} |a_{ij}(x)| \leq M \\ b_i(x), d_i(x) \in L^N(\Omega), \quad (i = 2, ..., N) \\ c(x) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega) \end{cases}$

ii) $f \in L^p(\Omega)$ *com* $p \geq 2$

iii) *no sentido das distribuições:*

$$c - \sum (d_i)_{x_i} \geq C_0 > -\infty.$$

Considere $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solução fraca de $Lu = f$. Então existem duas constantes K_0, não dependentes de Ω, e K_1 tais que:

a) *Se $N/2 < p < N$, temos*

$$\max_{\Omega}|u| \leq K_0 \sum \|f_i\|_{L^p(\Omega)} (med\ \Omega)^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p^*}}.$$

b) *Se $1 \leq p < N/2$, temos*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq K_0 \|f_i\|_{L^p(\Omega)},$$

em que $p^{**} = Np/(N-2p)$.

Demonstração. Considere G_i tal que div $G_i = f$, $i = 1,...,N$. Como Ω é aberto, limitado e suave, a partir de resultados clássicos de E.D.P., sabemos que $G_i \in W^{1,p}(\Omega)$, $i = 1,...,N$. Para concluir, usamos [15, Théorème 4.2].

□

1.3 Aproximação

Para estudarmos o Problema (1), vamos obter alguns resultados para o seguinte problema aproximado

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) = \dfrac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}} & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.9}$$

em que f é uma função mensurável não negativa, $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \min\{f, n\}$ e M é uma matriz elíptica limitada, ou seja, vale que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{1.10}$$

e

$$|M(x)| \leq \beta \tag{1.11}$$

Para iniciar, o lema abaixo garante a existência de solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$, do problema acima, caso o dado seja uma função de $L^2(\Omega)$.

Lema 1.27. *Dado $g \in L^2(\Omega)$ não negativa, então existe uma única $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} -\,div(M(x)\nabla u) = g & em\ \Omega \\ u = 0 & em\ \partial\Omega \end{cases}$$

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} a : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) \qquad &\longmapsto \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v \end{aligned}$$

De (1.11) e utilizando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, temos:

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \int_\Omega |M(x)\nabla u \cdot \nabla v| \\
&\leq \beta \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \\
&\leq \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \beta \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Além disso, de (1.10) garantimos:

$$\alpha \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla u = a(u,u).$$

Ou seja, a é contínua e coerciva.

Agora, consideremos $T : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, um funcional definido por $T(v) = \int_\Omega gv$. Note que usando desigualdade de Hölder e Imersão de sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$
\begin{aligned}
|T(v)| &\leq \int_\Omega |gv| \\
&\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq S\|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

isto é, T é contínuo. Logo, pelo Teorema de Lax Milgram, existe um único $u_T \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$T(v) = a(u_T, v) \quad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

O resultado segue.

□

O Teorema 1.28 é um Princípio do Máximo posto em [2], que nos auxiliará a mostrar que a solução de (1.9) é não negativa.

Teorema 1.28 (Princípio do Máximo)**.** *Assuma que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e M seja uma matriz elíptica limitada.*

a) *Se $\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v \leq 0$, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ positivo, então $u \leq 0$.*

b) *Se $\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v \geq 0$, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ positivo, então $u \geq 0$.*

Demonstração. Para **a)**, como $\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v \leq 0$, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ positivo, escolha $v = u^+$. Então temos:

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u^+ - u^-) \cdot \nabla u^+ = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla u^+ \leq 0$$

o que implica que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u^+ \cdot \nabla u^+ \leq \int_\Omega M(x)\nabla u^+ \cdot \nabla u^- = 0$$

utilizando a elipticidade da M em (1.10), obtemos

$$0 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla u^+|^2 \leq 0$$

logo,

$$\|u^+\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = 0$$

e então, $u \leq 0$.

Para a parte **b)**, basta considerar $v = u^-$ e repetir o mesmo argumento para obter $u \geq 0$.

□

Proposição 1.29. *O Problema* (1.9) *admite solução* $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *não negativa.*

Demonstração. Seja $h \in L^2(\Omega)$ e $n \in \mathbb{N}$ fixo. Note que

$$\left| \frac{f_n}{(|h| + \frac{1}{n})^\gamma} \right| \leq \frac{|f_n|}{(\frac{1}{n})^\gamma} = n^\gamma |f_n| \leq n^{\gamma+1}$$

o que implica que

$$\frac{f_n}{(|h| + \frac{1}{n})^\gamma} \in L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Então, podemos utilizar o Lema 1.27 para definir $v := P(h)$ a única solução de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla v) = \dfrac{f_n}{(|h| + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

em que $P : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$. Como provado, $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então escolhendo v como função teste em (1.10), temos:

$$\alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v = \int_\Omega \frac{f_n v}{(|h| + \frac{1}{n})^\gamma}$$

Sendo $f_n = \min\{f, n\} \leq n$, conseguimos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{f_n v}{(|h| + \frac{1}{n})^\gamma} &\leq \int_\Omega \frac{nv}{(|h| + \frac{1}{n})^\gamma} \\
&= \int_\Omega \frac{nv}{\left(\frac{n|h|+1}{n}\right)^\gamma} \\
&= \int_\Omega \frac{n^{\gamma+1} v}{(n|h|+1)^\gamma}.
\end{aligned}$$

Segue do fato de $n|h| + 1 \geq 1$ que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{n^{\gamma+1} v}{(n|h|+1)^\gamma} &\leq n^{\gamma+1} \int_\Omega v \\
&\leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |v|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |v|.$$

Usando as desigualdades de Poincaré, Teorema 1.20, e Hölder, Teorema 1.2, dos lados esquerdo e direito, respectivamente, temos:

$$\alpha K \int_\Omega |v|^2 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |v| \leq \text{med}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\gamma+1} \left(\int_\Omega |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja,

$$\int_\Omega |v|^2 \leq C \cdot n^{\gamma+1} \left(\int_\Omega |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nesse caso, C depende de α, $\text{med}(\Omega)$ e da constante de Poincaré. Daí,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot n^{\gamma+1}.$$

Ou seja, a bola de $L^2(\Omega)$ de raio $C \cdot n^{\gamma+1}$ é invariante para P. Defina $\mathbb{B} := \overline{B(0; C \cdot n^{\gamma+1})}$ em $L^2(\Omega)$. Sabendo que $P(L^2(\Omega)) \subset \mathbb{B}$, $P|_{\mathbb{B}} \subset \mathbb{B}$,

$$P(\mathbb{B}) \subset W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

e sendo a última imersão compacta, temos, pelo Teorema de Ponto Fixo de Schauder, ver [4, Theorem (Schauder)], que existe $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ que satisfaz $u_n = P(u_n)$, ou seja,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) = \dfrac{f_n}{(|u_n| + \frac{1}{n})^{\gamma}} & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Agora, tomemos como função teste $\phi_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma função não negativa. Sendo $f_n/(|u_n| + 1/n)^{\gamma} \geq 0$, segue que

$$\int_{\Omega} M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \phi_n = \int_{\Omega} \frac{f_n \phi_n}{(|u_n| + \frac{1}{n})^{\gamma}} \geq 0.$$

Então, pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.28), garantimos que $u_n \geq 0$. Por fim, pelo Teorema 1.26, temos:

$$\max_{\Omega} |u_n| \leq \widehat{C} \cdot \|f_n\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

para alguma $\widehat{C} > 0$. Como f_n está em $L^{\infty}(\Omega)$, segue que a u_n também está.

□

O teorema seguinte, que denominamos como Princípio do Máximo Forte Generalizado, é um resultado crucial para mostrar as ideias do Teorema 1.32, item **ii)**. Este foi inspirado na Proposição 22.2 em [14].

Teorema 1.30 (Princípio do Máximo Forte Generalizado)**.** *Consideremos $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ não negativa tal que*

$$-\Delta u \geq 0$$

no sentido das distribuições. Suponhamos que $u \equiv 0$ em um conjunto de medida de Lebesgue positiva. Então

$$u = 0 \quad \textit{q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração. Usamos a Proposição 22.2, [14, Proposition 22.2], combinada com a observação no último parágrafo da página 355 da mesma referência, onde consideramos o potencial $V \equiv 0$.

Observamos que se $E \subset \Omega$ for tal que $\text{med}(E) > 0$, em particular, $\text{cap}_{1,2}(E) > 0$, ver [9, Theorem 2 (vi)].

□

O próximo resultado é o Princípio do Máximo Forte encontrado em [11] e será utilizado para mostrar o item **iii)** do Teorema 1.32.

Teorema 1.31 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Considere L um operador definido por*

$$Lu = (a_{ij}(x)u_j + b_i(x)u)_i + c_i(x)D_i u + d(x)u$$

em que $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$*. Suponha que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

i) $\tau|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i \cdot \xi_j \quad \forall\, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N$*;*

ii) *Existem constantes* $\mu_1, \mu_2 > 0$ *tais que:*

$$\begin{cases} \sum |a_{ij}(x)|^2 \leq \mu_1^2 \\ \tau^{-2} \sum (|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|) + \tau^{-1}|d(x)| \leq \mu_2^2 \quad \forall\, x \in \Omega; \end{cases}$$

iii) $\displaystyle\int_\Omega (dv - b_i D_i v)dx \leq 0 \quad \forall\, v \geq 0, v \in C_c^\infty(\Omega)$*;*

e suponha ainda que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *e* $Lu \leq 0$ *em* Ω*. Então, se para alguma bola* $B \subset\subset \Omega$ *nós tivermos*

$$\inf_B u = \inf_\Omega u \geq 0$$

a função u deve ser constante em Ω *e a igualdade valem no item* ***iii)*** *quando* $u = 0$*.*

Demonstração. Ver [11, Theorem 8.19].

□

O próximo teorema é um resultado que garante que u_n é crescente com relação a n, é positiva e está distante do zero. Para mostrá-lo, foi necessário construir um argumento paralelo ao feito na referência principal, ver [3, Lemma 2.2], com o acréscimo de alguns detalhes. Para isso, utilizamos o Princípio do Máximo Forte, Teorema 1.31.

Teorema 1.32. *Se* u_n *é solução do Problema* (1.9)*, então valem as propriedades a seguir.*

i) *u_n é crescente com relação a n;*

ii) *$u_n > 0$ em Ω;*

iii) *Para todo $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, existe um $K_{\widehat{\Omega}} > 0$, independente de n, tal que*

$$u_n(x) \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0 \tag{1.12}$$

para todo $x \in \widehat{\Omega}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. **i)** Já que $f_n = \min\{f,n\}$, ou seja, $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ e $\gamma > 0$, então no sentido distribucional, temos que

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) = \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} \leq \frac{f_{n+1}}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}. \tag{1.13}$$

Daí,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(M(x)\nabla(u_n - u_{n+1})) &= -\operatorname{div}(M(x)(\nabla u_n - \nabla u_{n+1})) \\ &= -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n - M(x)\nabla u_{n+1}) \\ &= -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) + \operatorname{div}(M(x)\nabla u_{n+1}) \\ &= \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} - \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}. \end{aligned}$$

De (1.13), segue que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(M(x)\nabla(u_n - u_{n+1})) &= \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} - \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}} \\ &\leq \frac{f_{n+1}}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}} - \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}} \\ &= f_{n+1}\left[\frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}} - \frac{1}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}\right] \\ &= f_{n+1}\left[\frac{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma} - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}\right]. \end{aligned}$$

Escolhendo $(u_n - u_{n+1})^+$ como função teste, observe que se $u_n \leq u_{n+1}$, então

$$\left[\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma} - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}\right](u_n - u_{n+1})^+ = 0, \tag{1.14}$$

e se $u_n > u_{n+1}$, ocorre

$$\left[\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}-\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}\right](u_n-u_{n+1})^+ < 0. \tag{1.15}$$

Assim, de (1.14) e (1.15), garantimos que

$$\left[\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}-\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}\right](u_n-u_{n+1})^+ \leq 0$$

Como $f_{n+1} \geq 0$ e $[u_n+1/(n+1)]^{\gamma}[u_{n+1}+1/n+1]^{\gamma} \geq 0$, de (1.10), vale:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha\int_{\Omega}|\nabla(u_n-u_{n+1})^+|^2 \\ &\leq \int_{\Omega} f_{n+1}\left[\frac{\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}-\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}{\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}\right](u_n-u_{n+1})^+ \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|(u_n-u_{n+1})^+\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = 0$$

o que implica que

$$(u_n-u_{n+1})^+ = 0.$$

Logo, $u_n \leq u_{n+1}$.

Para provar o item **ii)**, lembremos que $u_1 \in L^{\infty}(\Omega)$ e que, pela estimativa produzida no Teorema 1.26, existe uma constante $\widehat{C}$ tal que

$$\|u_1\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \widehat{C}\cdot\|f_1\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \widehat{C}\cdot\|\min\{f,1\}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \widehat{C}.$$

Daí,

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla u_1) = \frac{f_1}{(u_1+1)^{\gamma}} \geq \frac{f_1}{(\|u_1\|_{L^{\infty}(\Omega)}+1)} \geq \frac{f_1}{(\widehat{C}+1)^{\gamma}}.$$

Sendo f_1 não identicamente nula, garantimos que $-\operatorname{div}(M(x)\nabla u_1) \geq 0$, no sentido distribucional, ou ainda, $\operatorname{div}(M(x)\nabla u_1) \leq 0$. Por contradição, suponhamos que exista $E \subset \Omega$ tal que $\operatorname{med}(E) > 0$ e $u_1(x) = 0$ para todo $x \in E$. Como a medida de Lebesgue é regular interior, então existe $K \subset E$, compacto onde $\operatorname{med}(K) > 0$ e $u_1(x) = 0$ para todo $x \in K$. Assim, pelo Princípio do Máximo Forte Generalizado, Teorema 1.30, segue que

$$u_1 \equiv 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

o que é um absurdo, pois neste caso f_1 deve ser constante igual a zero. Logo, $u_1 > 0$ q.t.p. em Ω.

No item **iii)**, ainda usando o fato de $\operatorname{div}(M(x)\nabla u_1) \leq 0$, considere $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$ e seja $\{B_i\}_{1\leq i\leq m}$ uma coleção finita de abertos tais que

$$\bigcup_{i=1}^{m} B_i \supset \widehat{\Omega}.$$

Defina $K_{B_i} = \inf_{B_i} u_1$, então $u_1(x) \geq K_{B_i}$ para todo $x \in B_i$. Agora, suponha, por absurdo, que $K_{B_i} = 0$, assim

$$0 = \inf_{B_i} u_1 = \inf_{\Omega} u_1$$

mais uma vez, pelo Teorema 1.31, seque que u_1 é constante igual a zero, o que é novamente um absurdo, ou seja, $K_{B_i} > 0$. Assim, definindo $K_{\widehat{\Omega}} = \min_{1\leq i\leq m} K_{B_i}$, obtemos:

$$u_n(x) \geq u_1(x) \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0$$

para todo $x \in \widehat{\Omega}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, (1.12) é válida.

□

Observação 1.33. *Como u_n é crescente em n, podemos definir u como o limite pontual de u_n. Consequentemente, do item* ***iii)****, sabendo que $u \geq u_n > 0$, segue que para todo $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, existe $K_{\widehat{\Omega}} > 0$ satisfazendo $u(x) \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0$, para todo $x \in \widehat{\Omega}$.*

Lema 1.34. *A solução dada pela Proposição 1.29 é única.*

Demonstração. De fato, suponha que u_n e v_n sejam soluções do Problema (1.9). Note que, no sentido distribucional, temos:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(M(x)\nabla(u_n - v_n)) &= -\operatorname{div}(M(x)\nabla(u_n)) + \operatorname{div}(M(x)\nabla(v_n)) \\ &= \frac{f_n}{u_n + \frac{1}{n}} - \frac{f_n}{v_n + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Como $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, segue que:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(M(x)\nabla(u_n - v_n)) &\leq f_{n+1}\left(\frac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}} - \frac{1}{v_n + \frac{1}{n+1}}\right) \\ &= f_{n+1}\left[\frac{\left(v_n + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)\left(v_n + \frac{1}{n+1}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Escolhendo $(u_n - v_n)^+$ como função teste em (1.9) e utilizando o mesmo raciocínio produzido na prova do teorema anterior, observamos que

$$f_{n+1}\left[\frac{\left(v_n+\frac{1}{n+1}\right)-\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)\left(v_n+\frac{1}{n+1}\right)}\right](u_n-v_n)^+ \leq 0,$$

assim, seque que

$$0 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - v_n)^+|^2 \leq 0$$

ou seja,

$$\|(u_n - v_n)^+\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = 0.$$

Logo,

$$u_n \leq v_n. \tag{1.16}$$

Analogamente,

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla(v_n - u_n)) \leq f_{n+1}\left[\frac{\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)-\left(v_n+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(v_n+\frac{1}{n+1}\right)\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)}\right].$$

Escolhendo $(v_n - u_n)^+$ como função teste em (1.9) e sabendo que

$$f_{n+1}\left[\frac{\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)-\left(v_n+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(v_n+\frac{1}{n+1}\right)\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)}\right](v_n-u_n)^+ \leq 0$$

obtemos:

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(v_n - u_n)^+|^2 = 0$$

e com isso, $v_n \leq u_n$. Portanto, pela conclusão anterior e por (1.16) segue que $u_n = v_n$.

$\square$

1.4 Mínimo de um Funcional e Equação de Euler

O objetivo dessa seção é trazer definições e resultados que serão essenciais para discutir a existência de solução do Problema (1) quando $\gamma < 1$ e colocamos o dado em $L^m(\Omega)$, sendo $m > [2^*/(1-\gamma)]$ no Capítulo 4.

A seguir, serão apresentadas três definições: semicontinuidade inferior fraca, Gâteaux diferenciabilidade e equação de Euler. Para tanto, consideremos X um Espaço de Banach e $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional integral.

Definição 1.35. *J é dito fracamente semicontínuo inferiormente se para toda sequência x_n em X, tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X, tem-se*

$$\lim_{n\to+\infty} J(x_n) \geq J(x).$$

Definição 1.36. *J é dito Gâteaux diferenciável em $u \in X$ quando, para todo $v \in X$, existe o limite:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv)-J(u)}{t}.$$

Denotaremos $\langle J'(u), v\rangle$ a derivada de Gâteaux de J no ponto u, na direção de v.

Definição 1.37. *Considere J Gâteaux diferenciável e $\widehat{u}$ um mínimo para o funcional J. Definimos $\langle J'(\widehat{u}), v\rangle = 0$, $v \in X$, a equação de Euler associada a J.*

O Teorema de Weiertrasss garante a existência de um mínimo para um funcional que satisfaz três condições.

Teorema 1.38 (Weierstrass)**.** *Seja Y um Espaço de Banach reflexivo e considere $J : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional coercivo, limitado inferiormente e fracamente semicontínuo inferiormente. Então J possui um mínimo.*

Demonstração. Ver [2, Theorem 9.1]. □

O Teorema de De Giorgi a seguir é uma alternativa para mostrar que um funcional J é fracamente semicontínuo inferiormente. Para enunciá-lo, considere $j : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e tome

$$J(u) = \int_\Omega j(x, u, \nabla u) \tag{1.17}$$

um funcional definido em $W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 < p < +\infty$.

Teorema 1.39 (De Giorgi). *Suponha que j seja uma função Carathéodory e convexa com respeito à última variável. Seja $p > 1$ e $1 \leq q < p^*$ se $p < N$ e $1 \leq q < +\infty$ se $p \geq N$. Assuma que existam $h \in (L^q(\Omega))^N$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ e $\omega \in L^1(\Omega)$ tal que*

$$j(x,s,\xi) \geq h(x) \cdot \xi + \omega(x),$$

considerando $u_n, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$J(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(u_n).$$

Demonstração. Ver [8, Theorem 3.4].

□

Considerando J o funcional definido em (1.17), o Teorema 1.40 servirá de suporte para provarmos que se $\widehat{u}$ é um mínimo do funcional J, então $\widehat{u}$ satisfaz a equação de Euler.

Teorema 1.40. *Seja X um Espaço de Banach, $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional Gatêaux diferenciável e seja*

$$J(\widehat{u}) = \min\{J(u) : u \in X\},$$

então $\langle J'(\widehat{u}), \phi \rangle = 0$, para todo $\phi \in X$.

Demonstração. Dado $\phi \in X$, considere $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(t) = J(\widehat{u} + t\phi)$. Note que ψ é diferenciável em $[0,1]$, pois para qualquer que seja $t_0 \in [0,1]$, temos:

$$\begin{aligned} \psi'(t_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\psi(t_0 + h) - \psi(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{J(\widehat{u} + (t_0 + h)\phi) - J(\widehat{u} + t_0\phi)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{J((\widehat{u} + t_0\phi) + h\phi) - J(\widehat{u} + t_0\phi)}{h}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

como J é Gâteaux diferenciável em $\widehat{u} + t_0\phi \in X$, segue que o limite em (1.18) existe.

Agora, sendo $\widehat{u}$ o mínimo de J, temos que

$$\psi(0) = \min\{\psi(t) : t \in [0,1]\}$$

ou seja,

$$\psi'(0) = 0. \tag{1.19}$$

Ora, para todo $\phi \in X$, vale:

$$\psi'(0) = \frac{d}{dt}J(\widehat{u}+t\phi)|_{t=0} = \langle J'(\widehat{u}+t\phi),v\rangle|_{t=0} = \langle J'(\widehat{u}),\phi\rangle$$

usando (1.19), obtemos:

$$\langle J'(\widehat{u}),\phi\rangle = 0.$$

e o resultado segue.

$\square$

Capítulo 2

O caso $\gamma = 1$

Neste Capítulo, discutiremos a existência e regularidade de solução para o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

isto é, traremos resultados a respeito do Problema (1) quando $\gamma = 1$. Aqui seguimos com as mesmas hipóteses: f é uma função não-negativa pertencente a algum Espaço de Lebesgue e M é uma matriz elíptica limitada, ou ainda, vale que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{2.2}$$

e

$$|M(x)| \leq \beta \tag{2.3}$$

O caso $\gamma = 1$ é de certa forma mais simples. Grosseiramente, isso se deve ao fato de que ao tomar u como função teste, a singularidade é removida, veja o Lema 2.1.

2.1 Existência de solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$

No intuito de provar o que vem adiante, utilizaremos os resultados do problema aproximado na Seção 1.3 sobre Aproximação. Iniciamos com o lema a seguir que nos fornece maior regularidade do que seria esperado pela Teoria Clássica de Stampacchia, ver em [2, Proposition 11.5].

Lema 2.1. *Se u_n é solução de* (1.9)*, com $f \in L^1(\Omega)$, então a sequência u_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração. Com efeito, vamos tomar u_n como função teste e utilizar (1.10)

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 &\le \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n \\ &= \int_\Omega \frac{f_n u_n}{u_n + \frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Ora, $\dfrac{u_n}{u_n + \frac{1}{n}} \le 1$, então

$$\int_\Omega \frac{f_n u_n}{u_n + \frac{1}{n}} \le \int_\Omega f_n \le \int_\Omega f = \int_\Omega |f| = \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\alpha \|u_n\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

O resultado segue.

□

Provada uma estimativa para u_n em $W_0^{1,2}(\Omega)$, podemos agora, mostrar a existência de solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$ para (2.1).

Teorema 2.2. *No Problema* (2.1)*, considere $f \in L^1(\Omega)$ uma função nãonegativa (não identicamente nula). Então existe uma solução $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ no sentido de*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demonstração. Pelo Lema 2.1, u_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$, ou seja, a menos de subsequências, $u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ em $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então $u_n \longrightarrow \widehat{u}$ em $L^2(\Omega)$.

Por outro lado, u_n converge para u pontualmente e, portanto, q.t.p. em Ω. Assim, pelo Teorema 1.3, ganhamos que $u_n \longrightarrow u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,2)$. Ora, $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, então $u = \widehat{u}$. Com isso, garantimos que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e daí,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \phi = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \phi \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Sejam $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$ tal que supp $\phi \subset \widehat{\Omega}$ e $u_n(x)+1/n \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0$, então usando o fato de $0 \leq f_n \leq f$, temos

$$0 \leq \left| \frac{f_n \phi}{u_n + \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}}{K_{\widehat{\Omega}}} f = \widetilde{C} \cdot f \in L^1(\Omega).$$

Portanto, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.5) que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \frac{f_n \phi}{u_n + \frac{1}{n}} = \int_\Omega \frac{f\phi}{u}.$$

Logo,

$$\int_\Omega M(x) \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

□

2.1.1 Integrabilidade de solução

Provados os resultados de existência de solução para (2.1) podemos agora discutir a integrabilidade dessa solução.

Teorema 2.3. *No Problema* (2.1)*, considerando* $f \in L^m(\Omega)$*,* $m \geq 1$*, a solução* u *dada pelo Teorema 2.2 é tal que*

i) *Se* $m > N/2$*, então* $u \in L^\infty(\Omega)$*;*

ii) *Se* $1 \leq m < N/2$*, então* $u \in L^s(\Omega)$*,* $s = 2Nm/(N-2m)$*.*

Demonstração. **i)** Seja $j > 1$. Defina $G_j(s) = (s-j)^+$ e considere $G_j(u_n) = (u_n - j)^+$ como função teste. Daí, usando (2.2) e o fato de $G_j(u_n) = 0$ no conjunto $\{u_n \leq j\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega |\nabla G_j(u_n)|^2 &\leq \int_\Omega M(x) \nabla G_j(u_n) \cdot \nabla G_j(u_n) \\
&= \int_\Omega \frac{f_n G_j(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}} \\
&= \int_{\{u_n \leq j\}} \frac{f_n G_j(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}} + \int_{\{u_n > j\}} \frac{f_n G_j(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}} \\
&= \int_{\{u_n > j\}} \frac{f_n G_j(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Note que no conjunto $\{u_n > j\}$, garantimos que $u_n + 1/n > j > 1$. Assim,

$$\int_{\{u_n > j\}} \frac{f_n G_j(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}} \leq \int_\Omega f_n G_j(u_n) \leq \int_\Omega f\, G_j(u_n)$$

ou seja,

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_j(u_n)|^2 \leq \int_\Omega f_n G_j(u_n) \leq \int_\Omega f\, G_j(u_n) = \int_{\{u_n > j\}} f\, G_j(u_n). \tag{2.4}$$

Usando a Imersão de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ do lado esquerdo de (2.4), conseguimos

$$\frac{\alpha}{S^2} \left(\int_\Omega |G_j(u_n)|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_\Omega f\, G_j(u_n) = \int_{\{u_n > j\}} f\, G_j(u_n) \tag{2.5}$$

Usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, do lado direito de (2.4), temos que

$$\int_{\{u_n > j\}} f\, G_j(u_n) \leq \left(\int_{\{u_n > j\}} |G_j(u_n)|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\{u_n > j\}} |f|^{\frac{2N}{N+2}} \right)^{\frac{N+2}{2N}}$$

Usando desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, para $[m(N+2)]/2N$ e $[m(N+2)]/[m(N+2)-2N]$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\{u_n > j\}} |f|^{\frac{2N}{N+2}} \right)^{\frac{N+2}{2N}} &\leq \left(\left(\int_{\{u_n > j\}} |f|^{\frac{2N}{N+2}\left(\frac{m(N+2)}{2N}\right)} \right)^{\frac{2N}{m(N+2)}} \left(\int_{\{u_n > j\}} 1 \right)^{1-\frac{2N}{m(N+2)}} \right)^{\frac{N+2}{2N}} \\
&= \left(\int_{\{u_n > j\}} |f|^m \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \operatorname{med}(\{u_n > j\})^{\left(1-\frac{2N}{m(N+2)}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)} \\
&= \|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \operatorname{med}(\{u_n > j\})^{\left(1-\frac{2N}{m(N+2)}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)}.
\end{aligned}$$

Então, de (2.5)

$$\frac{\alpha}{S^2} \left(\int_\Omega |G_j(u_n)|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\int_{\{u_n > j\}} |G_j(u_n)|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \|f\|_{L^m(\Omega)} \operatorname{med}(\{u_n > j\})^{\left(1-\frac{2N}{m(N+2)}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)}$$

ou seja,

$$\frac{\alpha}{S^2} \left(\int_\Omega |G_j(u_n)|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \operatorname{med}(\{u_n > j\})^{\left(1-\frac{2N}{m(N+2)}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)}. \tag{2.6}$$

Novamente, usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.2,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |G_j(u_n)| &= \int_{\{u_n>j\}} |G_j(u_n)| \\ &\leq \left(\int_{\{u_n>j\}} |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \cdot \text{ med}(\{u_n > j\})^{\frac{N+2}{2N}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Multiplicando (2.6) por $\text{med}(\{u_n > j\})^{\frac{N+2}{2N}}$

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \cdot \text{ med}(\{u_n > j\})^{\frac{N+2}{2N}} &\leq \frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \text{ med}(\{u_n > j\})^{\left(1-\frac{2N}{m(N+2)}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)} \\ &\quad \cdot \text{med}(\{u_n > j\})^{\frac{N+2}{2N}} \\ &= \frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \text{ med}(\{u_n > j\})^{1+\frac{2}{N}-\frac{1}{m}}.\end{aligned}$$

De (2.6) e (2.7) garantimos

$$\int_\Omega |G_j(u_n)| \leq \frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \text{ med}(\{u_n > j\})^{1+\frac{2}{N}-\frac{1}{m}}.$$

Utilizando o Lema 1.4 com $C = (S^2/\alpha)\|f\|_{L^m(\Omega)}$, $\eta = 1+2/N-1/m$ e $g(j) = \int_\Omega |G_j(u_n)|$, então $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \widehat{C}$. Note que podemos fazer tal escolha para η, já que $1+2/N-1/m > 1$ sempre que $2/N > 1/m$, ou seja, desde que $m > N/2$.

Ora, se u_n é limitada em $L^\infty(\Omega)$, então $|u_n(x)| \leq R$ q.t.p. em Ω, e a menos de subsequências, $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty(\Omega)$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n\phi = \int_\Omega v\phi \quad \forall\, \phi \in L^1(\Omega) \tag{2.8}$$

Por outro lado, temos do fato de u_n convergir pontualmente para u que

$$u_n\phi \longrightarrow u\phi \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

e mais

$$|u_n(x)\phi(x)| \leq R \cdot |\phi(x)| \in L^1(\Omega)$$

então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.5, garantimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n\phi = \int_\Omega u\phi \quad \forall\, \phi \in L^1(\Omega). \tag{2.9}$$

Portanto, de (2.8) e (2.9), segue que $u = v$. Logo, $u \in L^{\infty}(\Omega)$.

ii) Aqui, dividiremos em duas partes. Suponha primeiro que $m = 1$, então $s = 2N/(N-2) = 2^*$. Como u_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, seque que a menos de subsequências $u_n \longrightarrow v$ em $L^{2^*}(\Omega)$. Daí, sendo u limite pontual de u_n, segue do Teorema 1.3 que $u_n \longrightarrow u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2^*)$, em particular, $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. Ora $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, logo $u = v$ e portanto $u \in L^{2^*}(\Omega)$.

Agora, suponha que $1 < m < N/2$, considere $\delta > 1$ e escolha $u_n^{2\delta-2}$ como função teste em (2.2). Tal função pode ser tomada, pois u_n está em $L^{\infty}(\Omega)$, ou seja, podemos aplicar a Regra da Cadeia localmente Lipschtiz. Então, temos

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n^{2\delta-1}) &= \alpha(2\delta-1) \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, u_n^{2\delta-2} \\ &= \alpha(2\delta-1) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{u_n + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Como $f_n \leq f$ e $1/(u_n + 1/n) \leq 1/u_n$, segue por desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{u_n + \frac{1}{n}} &\leq \int_{\Omega} \frac{f \, u_n^{2\delta-1}}{u_n} \\ &\leq \int_{\Omega} f \, u_n^{2\delta-2} \\ &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_{\Omega} u_n^{(2\delta-2)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\alpha(2\delta-1) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_{\Omega} u_n^{(2\delta-2)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{2.10}$$

Note que,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 u_n^{2(\delta-1)} = \int_{\Omega} |\nabla u_n u_n^{\delta-1}|^2 \tag{2.11}$$

então, pela Regra da Cadeia localmente Lipschitz

$$\nabla(u_n^{\delta}) = \delta u_n^{\delta-1} \nabla u_n.$$

assim,

$$|\nabla(u_n^{\delta})|^2 = \delta^2 |u_n^{\delta-1}\nabla u_n|^2.$$

Então, de (2.11) e por Imersão de Sobolev, $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, conseguimos:

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} = \int_\Omega |\nabla u_n u_n^{\delta-1}|^2 = \int_\Omega \frac{|\nabla(u_n^{\delta})|^2}{\delta^2} \geq \frac{S}{\delta^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

multiplicando por $\alpha(2\delta-1)$ na desigualdade anterior

$$\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n u_n^{\delta-1}|^2 \geq \frac{\alpha S(2\delta-1)}{\delta^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Segue de (2.10) e da última implicação que

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{2.12}$$

Agora, vamos tomar δ de forma que

$$2^*\delta = (2\delta-2)m'$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{N-2}{2N}(2\delta-2)\frac{m}{m-1} \\ &= \frac{2\delta mN - 2mN - 4\delta m + 4m}{2mN-2N} \\ &= \delta\left(\frac{2mN-4m}{2mN-2N}\right) + \frac{4m-2mN}{2mN-2N}. \end{aligned}$$

Com isso, segue que

$$\delta - \delta\left(\frac{2mN-4m}{2mN-2N}\right) = \frac{4m-2mN}{2mN-2N}$$

assim,

$$\delta\left(\frac{-2N+4m}{2mN-2N}\right) = \frac{4m-2mN}{2mN-2N}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{4m-2mN}{2mN-2N}\left(\frac{2mN-2N}{-2N+4m}\right)\\
&= \frac{4m-2mN}{-2N+4m}\\
&= \frac{m(N-2)}{N-2m}.
\end{aligned}$$

Observe que podemos fazer essa escolha, pois se $m > 1$, então

$$mN > N$$

ou seja,

$$m(N-2)+2m > N,$$

e assim,

$$\frac{m(N-2)}{N-2m} > 1.$$

Com essa escolha de δ, obtemos

$$2^*\delta = \frac{2N}{N-2}\left(\frac{m(N-2)}{N-2m}\right) = \frac{2mN}{N-2m} = s.$$

Então, de (2.12)

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}} \le \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{2.13}$$

Como $m < \dfrac{N}{2}$, segue que

$$1-\frac{1}{m} < 1-\frac{2}{N}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{m'} < \frac{2(N-2)}{2N}$$

logo,

$$\frac{1}{m'} < \frac{2}{2^*}.$$

Então, de (2.13), garantimos que

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2m'-2^*}{2^*m'}} \leq \frac{\delta^2}{\alpha S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Daí, u_n é limitada em $L^s(\Omega)$. Já que u_n converge para u q.t.p. em Ω, segue do Teorema 1.3 que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^s(\Omega)$. Logo, $u \in L^s(\Omega)$. $\square$

Capítulo 3

O caso $\gamma > 1$

Neste capítulo trataremos do problema

$$\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

quando $\gamma > 1$. Novamente, f é uma função não-negativa pertencente a algum espaço de Lebesgue e M é uma matriz satisfazendo

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.2}$$

e

$$|M(x)| \leq \beta. \tag{3.3}$$

O caso $\gamma > 1$, quando comparado com o último caso, $\gamma < 1$, ainda é mais simples. Isso porque, grosseiramente, u^γ é função teste válida.

3.1 Existência de solução em $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$

No capítulo anterior, conseguimos garantir a existência de solução em $W^{1,2}(\Omega)$. Agora, não conseguiremos solução de (3.1) nesse espaço, mas sim em $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Para fazer sentido, definiremos durante a Seção 3.1.1 o significado de $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $p \geq 2$, ser zero na fronteira de Ω.

Começamos com um lema que remete a estimativas de u_n e $u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, respectivamente. Este será essencial para a prova do Teorema 3.2.

Lema 3.1. *Seja u_n solução de* (1.9) *com $\gamma > 1$ e suponha que $f \in L^1(\Omega)$. Então $u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$, u_n é limitada em $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ e em $L^s(\Omega)$, com $s = N(\gamma+1)/(N-2)$.*

Demonstração. Vamos mostrar, primeiramente, que $u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}$ é limitada em $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$. Escolhendo u_n^γ como função teste em (1.9), nós obtemos, sabendo que $u_n^\gamma/(u_n+1/n)^\gamma \leq 1$, $f_n \leq f$ e lembrando de (1.10), temos que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla(u_n^\gamma) &= \alpha\gamma \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n u_n^{\gamma-1} \\
&= \alpha\gamma \int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1} \\
&\leq \int_\Omega \frac{f_n u_n^\gamma}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \\
&\leq \int_\Omega f_n \\
&\leq \int_\Omega f = \|f\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ora, pela Regra da Cadeia localmente Lipschitz, vale que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1} &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\frac{2(\gamma-1)}{2}} \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n u_n^{\frac{\gamma-1}{2}}|^2 \\
&= \frac{4}{(\gamma+1)^2} \cdot \frac{(\gamma+1)^2}{4} \int_\Omega |\nabla u_n u_n^{\frac{\gamma+1}{2}-1}|^2 \\
&= \frac{4}{(\gamma+1)^2} \int_\Omega \left| \frac{(\gamma+1)}{2} \nabla u_n u_n^{\frac{\gamma+1}{2}-1} \right|^2 \\
&= \frac{4}{(\gamma+1)^2} \int_\Omega \left| \nabla \left(u_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \right) \right|^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1} = \frac{4}{(\gamma+1)^2} \int_\Omega \left| \nabla \left(u_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \right) \right|^2,$$

e então

$$\frac{4}{(\gamma+1)^2}\int_\Omega \left|\nabla\left(u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right)\right|^2 \leq \frac{1}{\alpha\gamma}\|f\|_{L^1(\Omega)},$$

i.e.,

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right)\right|^2 \leq \frac{(\gamma+1)^2}{4}\|f\|_{L^1(\Omega)},$$

o que garante que $u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Agora, vamos mostrar que u_n é limitada em $L^s(\Omega)$, com $s = N(\gamma+1)/(N-2)$.

Como $s = N(\gamma+1)/(N-2) = 2N(\gamma+1)/2(N-2) = 2^*(\gamma+1)/2$, então segue de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ que

$$\left\|u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C\left\|u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

ou seja,

$$\left(\int_\Omega \left|u_n^{\frac{2^*(\gamma+1)}{2}}\right|\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C\left\|u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Dessa forma,

$$\left(\int_\Omega |u_n^s|\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C\left\|u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

de modo que elevando os dois lados da desigualdade a $2^*/s$, segue que

$$\left(\int_\Omega |u_n^s|\right)^{\frac{2^*}{2^* s}} \leq C^{\frac{2^*}{s}}\left\|u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{\frac{2^*}{s}}.$$

Logo,

$$\|u_n\|_{L^s(\Omega)} \leq C^{\frac{2^*}{s}}\left\|u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{\frac{2^*}{s}},$$

o que garante que u_n é limitada em $L^s(\Omega)$.

Por último, vamos mostrar que u_n é limitada em $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. De certa forma, essa estimativa é mais delicada.

Consideremos $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\widehat{\widehat{\Omega}} \subset\subset \widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$ tal que supp $\phi \subset \widehat{\Omega}$. Escolhendo $u_n\phi^2$ como função teste em (1.9), temos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla(u_n\phi^2) \;=\; \int_\Omega \frac{f_n u_n \phi^2}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Isso implica que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n \phi^2 + 2\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\phi u_n\phi \;=\; \int_\Omega \frac{f_n u_n \phi^2}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Lembrando-se que $\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2\phi^2 \le \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n\phi^2$, usando (3.2) e o fato de que $u_n(x) \ge K_{\widehat{\Omega}} > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^2\phi^2 + 2\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\phi u_n\phi \;&\le\; \int_\Omega \frac{f_n u_n \phi^2}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\\
&\le\; \int_\Omega \frac{f_n u_n \phi^2}{(u_n)^\gamma}\\
&=\; \int_{\widehat{\Omega}} \frac{f_n \phi^2}{(u_n)^{\gamma-1}}\\
&\le\; \frac{1}{K_{\widehat{\Omega}}^{\gamma-1}}\int_{\widehat{\Omega}} f_n\phi^2\\
&=\; \frac{1}{K_{\widehat{\Omega}}^{\gamma-1}}\int_{\Omega} f_n\phi^2 \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

pois $\gamma > 1$ e supp $\phi \subset \widehat{\Omega}$.

Lembrando da desigualdade de Young, em que $1/p + 1/q = 1$, temos

$$ab \le \varepsilon a^p + \frac{b^q}{q(\varepsilon p)^{\frac{q}{p}}}$$

e usando-a com $p = q = 2$ e $\varepsilon = \alpha/2$, conseguimos

$$\begin{aligned}
2\beta\int_\Omega|\nabla u_n\cdot\nabla\phi u_n\phi| &= \int_\Omega|\nabla u_n\phi(2\beta)\nabla\phi u_n|\\
&= \int_\Omega|\nabla u_n\phi(2\beta)||\nabla\phi u_n|\\
&\leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\phi^2+\frac{4\beta^2}{2\left(\frac{\alpha}{2}\cdot 2\right)^{\frac{2}{2}}}\int_\Omega|\nabla\phi|^2u_n^2\\
&= \frac{\alpha}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\phi^2+\frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega|\nabla\phi|^2u_n^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-2\int_\Omega M(x)\nabla u_n\cdot\nabla\phi u_n\phi &\leq 2\beta\int_\Omega|\nabla u_n\phi||\nabla\phi u_n|\\
&\leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\phi^2+\frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega|\nabla\phi|^2u_n^2. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Somando (3.4) e (3.5), obtemos

$$\alpha\int_\Omega|\nabla u_n|^2\phi^2 \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\phi^2+\frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega|\nabla\phi|^2u_n^2+\frac{1}{K_{\widehat{\Omega}}^{\gamma-1}}\int_\Omega f_n\phi^2.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\phi^2 &\leq \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega|\nabla\phi|^2u_n^2+\frac{1}{K_{\widehat{\Omega}}^{\gamma-1}}\int_\Omega f_n\phi^2\\
&\leq \frac{2\beta^2}{\alpha}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u_n^2+\frac{1}{K_{\widehat{\Omega}}^{\gamma-1}}\|\phi\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega f\\
&= \frac{2\beta^2}{\alpha}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u_n^2+\frac{1}{K_{\widehat{\Omega}}^{\gamma-1}}\|\phi\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|f\|_{L^1(\Omega)}=C(f,\phi).
\end{aligned}$$

Em particular, pelo Lema de Urysohn, Lema 1.11, considerando $\phi=1$ em $\widehat{\widehat{\Omega}}$ e $\phi=0$ em $\widehat{\widehat{\Omega}}^c$, garantimos que

$$\int_{\widehat{\Omega}}|\nabla u_n|^2\leq\widetilde{C}.$$

Logo, u_n é limitada em $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$.

$\square$

O próximo teorema garante a existência de solução do Problema (3.1) em $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ graças as estimativas provadas no lema anterior.

Teorema 3.2. *Seja $\gamma > 1$ e seja $f \in L^1(\Omega)$ não negativa e não identicamente nula. Então existe uma solução $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ do Problema* (3.1) *no sentido de*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demonstração. Por um lado, pelo lema anterior, u_n é limitada em $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, ou seja, dado $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, u_n é limitada em $W^{1,2}(\widehat{\Omega})$. Além disso, u_n converge pontualmente para u e portanto, q.t.p. em $\widehat{\Omega}$, então usando o mesmo argumento feito no início da prova do Teorema 2.2, temos que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } W^{1,2}(\widehat{\Omega}).$$

Na realidade,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } W^{1,2}_{loc}(\Omega).$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\phi = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\phi \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.6}$$

Por outro lado, como $0 \le f_n \le f$ e $u_n(x) \ge K_{\widehat{\Omega}} > 0$, segue que

$$0 \le \left| \frac{f_n\phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \right| \le \frac{\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}}{K^\gamma_{\widehat{\Omega}}} f \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

em que $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$ tal que supp $\phi \subset \widehat{\Omega}$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.5, garantimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{f_n\phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.7}$$

Então, de (3.6) e (3.7), conseguimos

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

□

3.1.1 Comportamento da solução em $\partial\Omega$

Nessa subseção, daremos sentido para $u = 0$ em $\partial\Omega$. De fato, na próxima definição seguiremos [5] para estender a noção de traço na $\partial\Omega$ e posteriormente provar que $u = 0$ no bordo.

Definição 3.3. *Seja $v \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que $v = 0$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \Omega$ e $p > 1$. Dizemos que $v \leq 0$ em $\partial\Omega$ se para todo $\varepsilon > 0$*

$$(v - \varepsilon)^+ \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Dizemos que $v = 0$ em $\partial\Omega$ se v for não negativa e $v \leq 0$ em $\partial\Omega$.

Formalmente, para justificar a definição acima, suponha que $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $v \leq 0$ em $\partial\Omega$. Note que $v - \varepsilon \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para todo $\varepsilon > 0$. Além disso, $v - \varepsilon \leq -\varepsilon$ em $\partial\Omega$ de modo que $(v - \varepsilon)^+ = 0$ em $\partial\Omega$ e então, $(v - \varepsilon)^+ \in W^{1,p}_0(\Omega)$, para todo $\varepsilon > 0$. Por fim, se $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $v \geq 0$ em Ω e $v \leq 0$ em $\partial\Omega$, pela discussão acima,

$$(v - \varepsilon)^+ = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

O lema a seguir nos fornece uma desigualdade entre números reais. Usaremos essa desigualdade para mostrar que a solução de (3.1) satisfaz a Definição 3.3.

Lema 3.4. *Sejam $q > 1$ e $\varepsilon > 0$. Considere os seguintes conjuntos*

$$S^x_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \varepsilon, y \geq 0\},$$
$$S^y_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq \varepsilon\}.$$

Então, vale a desigualdade

$$|x^q - y^q| \geq \varepsilon^{q-1}|x - y| \quad \text{em } S^x_\varepsilon \cup S^y_\varepsilon.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suporemos que $x \geq y$ e consideraremos a função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s) = s^q$. Sendo f contínua e derivável em todo o domínio, garantimos, pelo Teorema do Valor Médio, a existência de $\lambda \in (y,x)$ tal que

$$f(x) - f(y) = f'(\lambda)(x - y)$$

ou seja, como $q > 1$, segue que

$$x^q - y^q = q\lambda^{q-1}(x - y) \geq \lambda^{q-1}(x - y).$$

Daí, se $(x,y) \in S_\varepsilon^x \cap S_\varepsilon^y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq \varepsilon\}$, então

$$x^q - y^q \geq \lambda^{q-1}(x-y) \geq \varepsilon^{q-1}(x-y).$$

Agora, suponhamos que $0 \leq y < \varepsilon \leq x$. Note que f é estritamente convexa para $q > 1$, basta perceber que dados $a < b \in \mathbb{R}^+$, vale que $f'(a) = qa^{q-1} < qb^{q-1} = f'(b)$, isto é, f é estritamente crescente. Com isso, temos que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \varepsilon^{q-1}.$$

Logo,

$$\frac{x^q-y^q}{x-y} \geq \frac{x^q}{x} = x^{q-1},$$

e portanto,

$$x^q - y^q \geq \varepsilon^{q-1}(x-y).$$

Supondo $0 \leq x < \varepsilon \leq y$ e utilizando o mesmo argumento, prova-se que

$$y^q - x^q \geq \varepsilon^{q-1}(y-x),$$

e o resultado segue.

$\square$

Combinando o Lema 3.4 e a Definição 3.3 com as estimativas da subseção anterior, podemos finalmente dar sentido à condição de fronteira.

Teorema 3.5. *Seja $\gamma > 1$, $p > 1$ e v não negativa tal que $v^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então $v = 0$ em $\partial\Omega$ no sentido da Definição 3.3.*

Demonstração. Seja $h \in \mathbb{R}^N$ e considere os conjuntos

$$\Omega_h := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > |h|\}$$

e

$$\begin{cases} \Omega_h^1 = \Omega_h \cap \operatorname{supp}(v-\varepsilon)^+ \\ \Omega_h^2 = \Omega_h \cap (\operatorname{supp}(v-\varepsilon)^+)^c. \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} |(v-\varepsilon)^+(x+h)-(v-\varepsilon)^+(x)|^p &= \int_{\Omega_h^1} |(v-\varepsilon)^+(x+h)-(v-\varepsilon)^+(x)|^p \\ &+ \int_{\Omega_h^2} |(v-\varepsilon)^+(x+h)-(v-\varepsilon)^+(x)|^p \\ &= \int_{\Omega_h^1} |(v-\varepsilon)^+(x+h)-(v-\varepsilon)^+(x)|^p. \quad (3.8)\end{aligned}$$

Considerando $q=(\gamma+p-1)/p>1$, e sabendo que em Ω_h^1 temos $(v-\varepsilon)^+>0$, isto é, $v>\varepsilon$, garantimos que

$$|v^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x+h)-v^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x)| \geq \varepsilon^{\frac{\gamma+p-1}{p}-1}|v(x)-v(y)| \quad \text{em } \Omega_h^1.$$

Assim, em (3.8) garantimos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} |(v-\varepsilon)^+(x+h)-(v-\varepsilon)^+(x)|^p &= \int_{\Omega_h^1} |(v-\varepsilon)^+(x+h)-(v-\varepsilon)^+(x)|^p \\ &= \int_{\Omega_h^1} |v(x+h)-v(x)|^p \\ &\leq \varepsilon^{1-q}\int_{\Omega_h^1} |v^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x+h)-v^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x)|^p\end{aligned}$$

então, sabendo que $v^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e utilizando a Teorema 1.16, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} |(v-\varepsilon)^+(x+h)-(v-\varepsilon)^+(x)|^p &\leq \varepsilon^{1-q}\int_{\Omega_h^1} |v^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x+h)-v^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x)|^p \\ &\leq C|h|.\end{aligned}$$

Novamente, usando a Teorema 1.16, temos $(v-\varepsilon)^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ e como $(v-\varepsilon)^+=0$ em $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$, concluímos, pelo Teorema 1.18, que $(v-\varepsilon)^+\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Logo, $v=0$ em $\partial\Omega$.

□

Observação 3.6. *Para usarmos a Proposição [4, Proposition 9.18] sobre Traço na fronteira, foi necessário acrescentarmos a hipótese de $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ ser um subconjunto de classe C^1, mas poderíamos ter colocado Ω um subconjunto Lipschitz, no lugar de classe C^1, como é o caso do Teorema em [13, Theorem 10.29].*

Corolário 3.7. *Se u está nas condições do Teorema 3.2, então $u^{(\gamma+1)/2}\in W_0^{1,2}(\Omega)$, ou seja, $u=0$ em $\partial\Omega$.*

Demonstração. Do Lema 3.1, garantimos que $u_n^{(\gamma+1)/2}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$, ou seja, a menos de subsequências $u_n^{(\gamma+1)/2} \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Além disso, como u_n converge pontualmente para u e $g(x) = x^{(\gamma+1)/2}$ é uma função contínua, segue que $u_n^{(\gamma+1)/2}$ converge para $u^{(\gamma+1)/2}$ pontualmente, e portanto, q.t.p. em Ω. Assim, pelo Teorema 1.3, temos que $u_n^{(\gamma+1)/2} \longrightarrow u^{(\gamma+1)/2}$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,2)$. Mas, $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, logo $v = u^{(\gamma+1)/2}$ e portanto, $u^{(\gamma+1)/2} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

□

3.1.2 Integrabilidade de solução

Nessa seção, vamos provar exclusivamente a integrabilidade de u. Apesar de tratarmos de um tema ligeiramente diferente da subseção anterior, decidimos incluir a discussão sobre integrabilidade após a Seção 3.1.1, pois usaremos o Corolário 3.7 Vejamos no próximo resultado que tal integrabilidade depende de f.

Teorema 3.8. *No Problema* (3.1)*, considerando $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$, a solução u dada pelo Teorema 3.2 é tal que*

i) *Se $m > \dfrac{N}{2}$, então $u \in L^\infty(\Omega)$;*

ii) *Se $1 \leq m < \dfrac{N}{2}$, então $u \in L^s(\Omega)$, $s = \dfrac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$.*

Demonstração. **i)** A prova é idêntica a prova do Teorema 2.3 item **i)**. Com efeito, consideremos $j > 1$, a função $G_j(s) := (s-j)^+$ e $G_j(u_n) = (u_n - j)^+$ como função teste. Então, usando a elipticidade da M e o fato de $G_j(u_n) = 0$ no conjunto $\{u_n \leq j\}$, garantimos que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_j(u_n)|^2 \quad \leq \quad \int_{\{u_n > j\}} \frac{f_n G_j(u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Note que

$$\int_{\{u_n > j\}} \frac{f_n G_j(u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq \int_\Omega f_n G_j(u_n) \leq \int_\Omega f\, G_j(u_n)$$

pois, no conjunto $\{u_n > j\}$, garantimos que $(u_n + 1/n)^\gamma > j > 1$. Assim,

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_j(u_n)|^2 \leq \int_{\{u_n > j\}} f\, G_j(u_n). \tag{3.9}$$

Pela Imersão de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, garantimos que:

$$\frac{\alpha}{S^2}\left(\int_\Omega |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_\Omega f\, G_j(u_n) = \int_{\{u_n>j\}} f\, G_j(u_n) \tag{3.10}$$

Pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, temos:

$$\int_{\{u_n>j\}} f\, G_j(u_n) \leq \left(\int_{\{u_n>j\}} |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\{u_n>j\}} |f|^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{\frac{N+2}{2N}}$$

Novamente, usamos a desigualdade de Hölder, com $[m(N+2)]/2N$ e $[m(N+2)]/[m(N+2)-2N]$ para obtermos

$$\left(\int_{\{u_n>j\}} |f|^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \operatorname{med}(\{u_n>j\})^{\left(1-\frac{2N}{m(N+2)}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)}.$$

Assim, de (3.10)

$$\frac{\alpha}{S^2}\left(\int_\Omega |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\int_{\{u_n>j\}} |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \|f\|_{L^m(\Omega)} \operatorname{med}(\{u_n>j\})^{\left(1-\frac{2N}{m(N+2)}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)}$$

ou seja,

$$\frac{\alpha}{S^2}\left(\int_\Omega |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \operatorname{med}(\{u_n>j\})^{\left(1-\frac{2N}{m(N+2)}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)}. \tag{3.11}$$

Mais uma vez, usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.2,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |G_j(u_n)| &= \int_{\{u_n>j\}} |G_j(u_n)| \\ &\leq \left(\int_{\{u_n>j\}} |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \cdot \operatorname{med}(\{u_n>j\})^{\frac{N+2}{2N}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Multiplicando (3.11) por $\operatorname{med}(\{u_n>j\})^{\frac{N+2}{2N}}$:

$$\left(\int_\Omega |G_j(u_n)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \cdot \operatorname{med}(\{u_n>j\})^{\frac{N+2}{2N}} \leq \frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \operatorname{med}(\{u_n>j\})^{1+\frac{2}{N}-\frac{1}{m}}.$$

Finalizando, de (3.11) e (3.12), segue que

$$\int_\Omega |G_j(u_n)| \leq \frac{S^2}{\alpha} \|f\|_{L^m(\Omega)} \cdot \text{ med}(\{u_n > j\})^{1+\frac{2}{N}-\frac{1}{m}}.$$

Pelo Lema 1.4, obtemos que $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \widehat{C}$, e portanto, $u \in L^\infty(\Omega)$.

ii) Se $m = 1$, temos que $s = N(\gamma+1)/(N-2) = (2/2)N(\gamma+1)/(N-2) = 2^*(\gamma+1)/2$. Do Corolário 3.7 sabemos que $u^{\frac{\gamma+1}{2}} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então usando a Imersão de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, obtemos

$$\left\| u^{\frac{\gamma+1}{2}} \right\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C \left\| u^{\frac{\gamma+1}{2}} \right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

implicando em

$$\left(\int_\Omega \left| u^{\frac{2^*(\gamma+1)}{2}} \right| \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C \left\| u^{\frac{\gamma+1}{2}} \right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

elevando os dois lados da desigualdade por $2/(\gamma+1)$, conseguimos

$$\left(\int_\Omega |u^s| \right)^{\frac{2}{2^*(\gamma+1)}} \leq C^{\frac{2}{\gamma+1}} \left\| u^{\frac{\gamma+1}{2}} \right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

ou seja,

$$\left(\int_\Omega |u|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C^{\frac{2}{\gamma+1}} \left\| u^{\frac{\gamma+1}{2}} \right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

e portanto, $u \in L^s(\Omega)$.

Se $1 < m < N/2$, então consideremos $\delta > (\gamma+1)/2$ e $u_n^{2\delta-1}$ como função teste em (1.9). Usando (3.2), o fato de $f_n \leq f$ e a desigualdade de Hölder, Teorema 1.2

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \left(u_n^{2\delta-1}\right) &= \alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2}\\
&\leq \int_\Omega \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\\
&\leq \int_\Omega \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{(u_n)^\gamma}\\
&\leq \int_\Omega f u_n^{2\delta-1-\gamma}\\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}\\
&= \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

De forma análoga ao que foi feita no Teorema 2.3, item **ii)**, garantimos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} \geq \frac{S}{\delta^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Daí, desta última desigualdade e de (3.13), segue que

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \qquad (3.14)$$

Escolhendo δ de forma que $2^*\delta = (2\delta-1-\gamma)m'$, então

$$\frac{2N\delta}{N-2} = (2\delta-1-\gamma)\frac{m}{m-1}$$

o que implica que

$$\delta\left(\frac{2N}{N-2} - \frac{2m}{m-1}\right) = \frac{-m-m\gamma}{m-1}$$

ou ainda,

$$\delta\left(\frac{-2N+4m}{(N-2)(m-1)}\right) = \frac{-m-m\gamma}{m-1}$$

logo,

$$\delta = \frac{-m(1+\gamma)(N-2)}{4m-2N}.$$

Note que podemos fazer essa escolha de δ, pois $m > 1$ implica em

$$-m(N-2) < 2m - N$$

como $m < N/2$, então $2m - N < 2N/2 - N = 0$. Assim,

$$\frac{-m(N-2)}{2m-N} > 1$$

logo,

$$\frac{-m(1+\gamma)(N-2)}{4m-2N} > \frac{\gamma+1}{2}.$$

Novamente, utilizando o mesmo cálculo feito no Teorema 2.3, item **ii)**, temos que $2^*/2 > 1/m'$ sempre que $m < N/2$, e ainda,

$$2^*\delta = \frac{2N}{N-2} \cdot \frac{-m(1+\gamma)(N-2)}{4m-2N} = \frac{Nm(1+\gamma)}{N-2m} = s.$$

Então, de (3.14), concluímos que

$$\alpha \left(\int_\Omega u_n^s \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)} \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^s \right)^{\frac{1}{m'}}$$

então

$$\left(\int_\Omega u_n^s \right)^{\frac{2m'-2^*}{2^* m'}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)} \|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Portanto, u_n é limitada em $L^s(\Omega)$. Pelo mesmo argumento do Teorema 2.3, concluímos que $u \in L^s(\Omega)$.

$\square$

Capítulo 4

O caso $0 < \gamma < 1$

Neste capítulo trataremos do problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $0 < \gamma < 1$, M é uma matriz elíptica limitada e f é uma função não negativa.

4.1 Existência de solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$

Neste ponto, conseguiremos estimativas de u_n em $W_0^{1,2}(\Omega)$ desde que coloquemos a f em um espaço mais regular que $L^1(\Omega)$. O próximo teorema traz uma limitação para u_n supondo $f \in L^m(\Omega)$, em que $m = [2^*/(1-\gamma)]'$. Este teorema será crucial para provar a existência de solução u em $W_0^{1,2}(\Omega)$ do Problema (4.1).

Teorema 4.1. *Seja u_n solução de* (1.9) *com $\gamma < 1$ e suponha que $f \in L^m(\Omega)$, com $m = 2N/[N+2+\gamma(N-2)] = [2^*/(1-\gamma)]'$. Então u_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração. Escolhendo u_n como função teste em (1.9), usando (1.10), o fato de que $f_n \leq f$, a desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, segue que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 &= \int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla u_n \\
&\leq \int_\Omega \frac{f_n u_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \\
&\leq \int_\Omega \frac{f u_n}{(u_n)^\gamma} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \\
&= \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
(1-\gamma)m' &= (1-\gamma)\frac{m}{m-1} \\
&= \frac{(1-\gamma)\left(\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}\right)}{\frac{2N-N-2-\gamma(N-2)}{N+2+\gamma(N-2)}} \\
&= \frac{(1-\gamma)(2N)}{N-2-\gamma(N-2)} \\
&= \frac{(1-\gamma)2N}{(N-2)(1-\gamma)} \\
&= 2^*,
\end{aligned}$$

e então

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{4.2}$$

Usando a Imersão de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ do lado esquerdo de (4.2), temos

$$\frac{\alpha}{S^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{4.3}$$

e sabendo que

$$\begin{aligned}\frac{1}{m'} = 1 - \frac{1}{m} &= 1 - \frac{N+2+\gamma(N-2)}{2N}\\ &= \frac{(N-2)(1-\gamma)}{2N}\\ &= \frac{(1-\gamma)}{2^*}\\ &< \frac{2}{2^*} \quad \text{ou seja, } \frac{1}{m'} < \frac{2}{2^*}\end{aligned}$$

então, de (4.3) garantimos que

$$\frac{\alpha}{S^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{2m'-2^*}{2^*m'}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}$$

ou ainda

$$\frac{\alpha}{S^2}\|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{2m'-2^*}{m'}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}$$

elevando os dois membros da desigualdade acima a $(2^*)^2/(2m'-2^*)$ obtemos

$$\left(\|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{2m'-2^*}{m'}}\right)^{\frac{(2^*)^2}{2m'-2^*}} \leq \left(\frac{S^2}{\alpha}\right)^{\frac{(2^*)^2}{2m'-2^*}} \|f\|_{L^m(\Omega)}^{\frac{(2^*)^2}{2m'-2^*}}$$

ajustando os termos, conseguimos

$$\|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{2^*}{m'}} \leq \left(\frac{S^2}{\alpha}\right)^{\frac{(2^*)^2}{2m'-2^*}} \|f\|_{L^m(\Omega)}^{\frac{(2^*)^2}{2m'-2^*}}. \tag{4.4}$$

Como

$$\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1}{m'}} = \|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{2^*}{m'}}$$

conseguimos, de (4.2) e (4.4), que

$$
\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\frac{S^2}{\alpha}\right)^{\frac{(2^*)^2}{2m'-2^*}} \|f\|_{L^m(\Omega)}^{\frac{(2^*)^2}{2m'-2^*}} \\
&\leq \left(\frac{S^2}{\alpha}\right)^{\frac{(2^*)^2}{2m'-2^*}} \left(\|f\|_{L^m(\Omega)}\right)^{\frac{2m'-2^*+(2^*)^2}{2m'-2^*}}
\end{aligned}
$$

Portanto, u_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

□

Agora que obtemos uma estimativa para u_n em $W_0^{1,2}(\Omega)$, podemos provar um resultado de existência para (1).

Teorema 4.2. *Considerando o Problema* (4.1) *com* $f \in L^m(\Omega)$ *não negativa e não identicamente nula, em que* $m = 2N/[N+2+\gamma(N-2)] = [2^*/(1-\gamma)]'$, *existe uma solução* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *no sentido de*

$$
\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).
$$

Demonstração. Provamos anteriormente que u_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$, isto é, a menos de subsequências, $u_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então $u_n \longrightarrow v$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, u_n converge pontualmente para u e portanto, q.t.p. em Ω. Assim, pelo Teorema 1.3, garantimos que u_n converge para u em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,2)$. Mas, $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, então $u = v$. Daí, garantimos que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, logo

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \phi = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \phi \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).
$$

Além disso, considerando $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$ tal que supp $\phi \subset \widehat{\Omega}$ e usando o fato de $0 \leq f_n \leq f$, garantimos que

$$
0 \leq \left| \frac{f_n \phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \right| \leq \frac{\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}}{K_{\widehat{\Omega}}^\gamma} f = \widehat{C} \cdot f \in L^m(\Omega)
$$

Ora, como $\gamma < 1$, temos que

$$
m = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} > \frac{2N}{N+2+(N-2)} = 1
$$

ou seja, $L^m(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, e assim, conseguimos que

$$0 \leq \left| \frac{f_n\phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \right| \leq \widehat{C} \cdot f \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.5), segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{f_n\phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Portanto,

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

□

4.1.1 Existência de solução como mínimo de um funcional

Nesta subseção, vamos mostrar que se $m > [2^*/(1-\gamma)]'$, $f \in L^m(\Omega)$ e M é uma matriz simétrica, então existe solução $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de (4.1). Para isso, seguimos as ideias feitas em [3, Remark 5.4], onde foi notado que tal solução é o mínimo de um funcional integral. Neste caso, o método utilizado difere daquele usado na Seção 4.1, afinal, o argumento produzido no Teorema 4.1 foi finalizado graças a identidade $(1-\gamma)m' = 2^*$.

Supondo que $m > 2N/[N+2+\gamma(N-2)] = [2^*/(1-\gamma)]'$, os próximos resultados asseguram que a solução de (4.1) é o mínimo do funcional $J : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(v^+)^{1-\gamma} \tag{4.5}$$

quando $\gamma < 1$. Para garantir isso, mostraremos que existe um mínimo para um funcional aproximado e este mínimo satisfaz a equação (1.9). Depois, faremos cálculos similares aos anteriores para passagem do limite.

Lema 4.3. *Considere o funcional $J_n : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$J_n(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}$$

em que M é uma matriz que satisfaz as condições do Problema (4.1) e é simétrica, $\gamma < 1$, $f \in L^m(\Omega)$, com $m > 2N/[N+2+\gamma(N-2)] = [2^*/(1-\gamma)]'$, e $f_n = \min\{f, n\}$. Então J_n possui mínimo u_n e este mínimo é solução de (1.9). Além disso, $u_n \geq 0$ q.t.p Ω.

Demonstração. Para verificar que J_n possui mínimo, vamos mostrar que J_n é coercivo, limitado inferiormente e fracamente semicontínuo inferiormente. Assim, o resultado seguirá pelo Teorema de Weierstass, Teorema 1.38.

Note que da hipótese de elipticidade da M, temos

$$J_n(v) \geq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}, \tag{4.6}$$

usando desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, na última integral da desigualdade (4.6), conseguimos que

$$\int_\Omega f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} \leq \|f_n\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega \left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{4.7}$$

Como $m > 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$, então

$$1 - \frac{1}{m} > \frac{N-2+\gamma(N-2)}{2N}$$

ou seja,

$$m' < \frac{2N}{(N-2)(1-\gamma)}.$$

Assim,

$$(1-\gamma)m' < \frac{2N(1-\gamma)}{(N-2)(1-\gamma)} = 2^*. \tag{4.8}$$

Agora vamos separar em dois casos, em que $(1-\gamma)m' \geq 1$ e $(1-gamma)m' < 1$. Começamos com o caso em que $(1-\gamma)m' \geq 1$. Então, por (4.8), segue que $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{(1-\gamma)m'}(\Omega)$, então de (4.7) garantimos que

$$\int_\Omega f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} \leq S\|f_n\|_{L^m(\Omega)}\left\|v^+ + 1/n\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{1-\gamma}.$$

Logo, voltando em (4.6), obtemos

$$J_n(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{S_1}{1-\gamma}\|f_n\|_{L^m(\Omega)}\left\|v^+ + 1/n\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{1-\gamma}. \tag{4.9}$$

Como $1-\gamma<2$, garantimos que

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\to+\infty} J_n(v)=+\infty.$$

Por outro lado, vamos supor que $(1-\gamma)m'<1$, ou seja, $(1-\gamma)<1$. Consideremos os conjuntos

$$\begin{cases} \Omega_n^+ := \left\{v^+ + 1/n \geq 1\right\} \\ \Omega_n^- := \left\{v^+ + 1/n < 1\right\}. \end{cases}$$

De (4.6), temos

$$\int_\Omega f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} = \int_{\Omega_n^+} f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} + \int_{\Omega_n^-} f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}$$

onde usando Imersão $L^m(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n^-} f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} &\leq \int_{\Omega_n^-} f_n \\ &\leq \int_\Omega f_n \\ &= \|f_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C\|f_n\|_{L^m(\Omega)} \end{aligned}$$

e ainda, usando desigualdade de Hölder e Imersão de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n^+} f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} &\leq \int_{\Omega_n^+} f_n\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{m'}} \\ &\leq \|f_n\|_{L^m(\Omega)}\left[\int_{\Omega_n^+}\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{m'}} \\ &\leq S_2\|f_n\|_{L^m(\Omega)}\|v^+ + 1/n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{1/m'}. \end{aligned}$$

Assim, de (4.6), temos

$$J_n(v)\geq\frac{\alpha}{2}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - \frac{C+S_2}{1-\gamma}\|f_n\|_{L^m(\Omega)}\left(1+\|v^+ + 1/n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{1/m'}\right)$$

donde $1/m' < 2$. Então,

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\to+\infty} J_n(v) = +\infty,$$

e portanto, J_n é coercivo.

A desigualdade (4.9) também garante que J_n é limitado inferiormente. Agora, para mostrar que o funcional é fracamente semicontínuo inferiormente, utilizaremos o Teorema de De Giorgi, Teorema 1.39. Para tanto, considere a função

$$\begin{array}{rcl} j:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,s,\xi) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}M(x)\xi\cdot\xi - \dfrac{1}{1-\gamma}\left[f_n\left(s^+ + \dfrac{1}{n}\right)^{1-\gamma}\right] \end{array}$$

Observe inicialmente que $j(x,\cdot,\cdot)$ é contínua, para quase todo ponto $x\in\Omega$ e $j(\cdot,s,\xi)$ é mensurável, já que M e f_n são mensuráveis. Assim, j é uma função Carathéodory.

Note ainda que dados $(x,s,\xi_1),(x,s,\xi_2)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ e $t\in[0,1]$, temos que

$$\begin{aligned} & j((x,s,t\xi_1+(1-t)\xi_2)) - tj((x,s,\xi_1)) - (1-t)j((x,s,\xi_2)) = \frac{t^2}{2}M(x)\xi_1\cdot\xi_1 \\ + \quad & t(1-t)M(x)\xi_1\cdot\xi_2 + \frac{(1-t)^2}{2}M(x)\xi_2\cdot\xi_2 - \frac{1}{1-\gamma}f_n\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} - \frac{t}{2}M(x)\xi_1\cdot\xi_1 \\ + \quad & \frac{t}{1-\gamma}f_n\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} - \frac{(1-t)}{2}M(x)\xi_2\cdot\xi_2 + \frac{1-t}{1-\gamma}f_n\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} & j((x,s,t\xi_1+(1-t)\xi_2)) - tj((x,s,\xi_1)) - (1-t)j((x,s,\xi_2)) \\ = \quad & \frac{1}{2}(t^2-t)M(x)\xi_1\cdot\xi_1 + \frac{1}{2}[(1-t)^2-(1-t)]M(x)\xi_2\cdot\xi_2 + t(1-t)M(x)\xi_1\cdot\xi_2 \\ = \quad & \frac{1}{2}(t^2-t)[M(x)\xi_1\cdot\xi_1 + M(x)\xi_2\cdot\xi_2 - 2M(x)\xi_1\cdot\xi_2] \\ = \quad & \frac{1}{2}(t^2-t)M(x)(\xi_1-\xi_2)\cdot(\xi_1-\xi_2). \end{aligned}$$

Como $t^2-t\le 0$ e $M(x)(\xi_1-\xi_2)\cdot(\xi_1-\xi_2)\ge 0$, segue que $[1/2](t^2-t)M(x)(\xi_1-\xi_2)^2 \le 0$ e portanto, $j((x,s,t\xi_1+(1-t)\xi_2)) \le tj((x,s,\xi_1)) + (1-t)j((x,s,\xi_2))$. Logo, j é convexa com relação à última variável.

Ademais, sendo $f_n \leq n$ e utilizando a elipticidade da M, ganhamos

$$\begin{aligned} f(x,s,\xi) &\geq \frac{\alpha}{2}|\xi|^2 - \frac{n}{1-\gamma}\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} \\ &\geq -\frac{n}{1-\gamma}\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Então, fazendo $h(x) = (0,...,0) \in (L^2(\Omega))^N$, $\alpha_0 = 0$ e $\omega(x) = [-n/(1-\gamma)]\left(s^+ + 1/n\right)^{1-\gamma} \in L^1(\Omega)$ e considerando $u, u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, garantimos pelo Teorema de De Giorgi, Teorema 1.39, que

$$J_n(u) = \int_\Omega j(x,u,\nabla u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega j(x,u_n,\nabla u_n) = \liminf_{n\to+\infty} J_n(u_n)$$

isto é, J_n é fracamente semicontínuo inferiormente. Portanto, pelo Teorema de Weierstrass, Teorema 1.38, J_n possui um mínimo e o denominaremos como u_n.

Para provar a segunda parte do lema, vamos mostrar, com o auxílio do Teorema 1.40, que $\langle J_n'(u_n), \phi\rangle = 0$ para todo $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, ou seja, u_n é solução da Equação de Euler. Para tanto, vamos iniciar mostrando que J_n é Gâteaux diferenciável. De fato, dados $\phi, \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos

$$\langle J_n'(\phi), \psi\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{J_n(\phi + t\psi) - J_n(\phi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{I_1}{t} + \frac{I_2}{t}$$

em que

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla\phi\cdot\nabla(t\psi) + \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla(t\psi)\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla(t\psi)\cdot\nabla(t\psi) \\ &= \frac{t}{2}\int_\Omega M(x)\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \frac{t}{2}\int_\Omega M(x)\nabla\psi\cdot\nabla\phi + \frac{t^2}{2}\int_\Omega M(x)\nabla\psi\cdot\nabla\psi \end{aligned}$$

e

$$I_2 = -\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n\left[\left(\phi + t\psi + \frac{1}{n}\right)^+\right]^{1-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n\left(\phi^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}.$$

Então pela simetria da M, garantimos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{I_1}{t} = \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla\psi\cdot\nabla\phi = \int_\Omega M(x)\nabla\phi\cdot\nabla\psi$$

e ainda, fazendo $g(t) = -\dfrac{1}{1-\gamma} f_n \left((\phi+t\psi)^+ + 1/n\right)^{1-\gamma}$, obtemos

$$g'(t) = \begin{cases} -\dfrac{f_n\psi}{\left(\phi+t\psi+\frac{1}{n}\right)^\gamma}, & \text{se } \phi+t\psi>0 \\ 0, & \text{se } \phi+t\psi\leq 0 \end{cases}$$

Com isso,

$$|g'(t)| \leq |\psi| \left| \frac{f_n}{\left(\phi+t\psi+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \right| \leq n^\gamma |\psi||f_n| \in L^1(\Omega),$$

definindo $F(t) := \displaystyle\int_\Omega g(t)$ e usando o Corolário 1.6, garantimos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t} = F'(0) = \int_\Omega \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \int_\Omega \frac{f_n\psi}{\left(\phi^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma},$$

mas, $\displaystyle\lim_{t\to 0}[F(t)-F(0)]/t = \lim_{t\to 0}\frac{I_2}{t}$. Então,

$$\langle J_n'(\phi),\psi\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{J_n(\phi+t\psi)-J_n(\phi)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{I_1}{t}+\frac{I_2}{t} = \int_\Omega M(x)\nabla\phi\cdot\nabla\psi - \int_\Omega \frac{f_n\psi}{\left(\phi^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Assim, segue do Teorema 1.40 que

$$\langle J_n'(u_n),\phi\rangle = 0 \quad \forall\, \phi \in u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

isto é,

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\phi = \int_\Omega \frac{f_n\phi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \quad \forall\, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Em outras palavras, u_n é solução de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) = \dfrac{f_n}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

como queríamos mostrar.

Utilizando o mesmo raciocínio produzido no Teorema 1.32, ou ainda, usando o Princípio do Máximo, Teorema 1.28, garantimos que $u_n \geq 0$. $\square$

Observação 4.4. *Nas condições do Lema 4.3, u_n satisfaz o Teorema 1.32 e o Lema 1.34, e portanto,*

i) *u_n é crescente com relação a n;*

ii) *$u_n > 0$ em Ω;*

iii) *para todo $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, existe um $K_{\widehat{\Omega}} > 0$, independente de n e vale*

$$u_n(x) \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0$$

para todo $x \in \widehat{\Omega}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) *u_n é única.*

Já mostrada a existência e unicidade de solução para o problema aproximado, podemos provar uma estimativa para u_n em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e posteriormente, mostrar a existência de solução para o Problema (4.1) supondo que f está nas condições anteriores.

Lema 4.5. *No Problema* (1.9)*, com $\gamma < 1$ e $f \in L^m(\Omega)$, $m > 2N/[N+2+\gamma(N-2)] = [2^*/(1-\gamma)]'$, a solução u_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração. Da observação e do lema anterior temos que $u_n > 0$ e u_n é o mínimo do funcional J_n, então $J_n(u_n) \leq J_n(0)$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} \leq -\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n u_n^{1-\gamma}$$

então, somando $-1/(1-\gamma)\displaystyle\int_\Omega f_n\,(u_n+1/n)^{1-\gamma}$ nos dois membros da desigualdade acima e usando a hipótese de elipticidade de M, conseguimos

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n u_n^{1-\gamma}$$

sendo $f_n \leq f$ e utilizando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, do lado direito, temos que

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \frac{\|f\|_{L^m(\Omega)}}{1-\gamma} \cdot \left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Ora, $(1-\gamma)m' < 2^*$, então $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{(1-\gamma)m'}(\Omega)$, daí

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 &\leq \frac{\|f\|_{L^m(\Omega)}}{1-\gamma}\cdot\left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \\ &\leq C\cdot\frac{\|f\|_{L^m(\Omega)}}{1-\gamma}\cdot\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1-\gamma}{2^*}}. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Utilizando imersão de Sobolev, $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, do lado esquerdo, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2S}\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \\ &\leq C\cdot\frac{\|f\|_{L^m(\Omega)}}{1-\gamma}\cdot\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1-\gamma}{2^*}},\end{aligned}$$

pois $2/2^* > (1-\gamma)/2^*$. Então

$$\frac{\alpha}{2S}\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}} \leq C\cdot\frac{\|f\|_{L^m(\Omega)}}{1-\gamma}.$$

Elevando a $(1-\gamma)^2/2\cdot 2^*$ nos dois lados da desigualdade anterior, temos que

$$\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1-\gamma}{2^*}} \leq \left(\frac{2\cdot S\cdot C\|f\|_{L^m(\Omega)}}{\alpha(1-\gamma)}\right)^{\frac{(1-\gamma)^2}{2\cdot 2^*}}.$$

Então da última desigualdade e de (4.10), ganhamos

$$\|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \widetilde{C}(f,\gamma,S,C,\alpha).$$

Logo, u_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

□

Agora, podemos finalmente mostrar a existência de solução $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ caso $f \in L^m(\Omega)$ e $m > [2/(1-\gamma)]'$.

Teorema 4.6. *O Problema* (4.1) *possui solução* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *quando* $f \in L^m(\Omega)$ *e* $m > 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$, *no sentido de*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demonstração. De fato, ainda usando o funcional J_n definido no Lema 4.3, temos que, sendo u_n o mínimo do funcional, então $J_n(u_n) \leq J_n(v)$, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} \\ \leq \quad & \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Tomando o limite inferior na desigualdade anterior, segue que

$$\begin{aligned} & \liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}\right] \\ \leq \quad & \liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Note que f_n converge para f pontualmente e $\lim\limits_{n\to+\infty}(u+1/n)^{1-\gamma} = u^{1-\gamma}$, então $f_n\,(u+1/n)^{1-\gamma}$ converge pontualmente para $fu^{1-\gamma}$. Além disso,

$$\left| f_n \left(u + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} \right| \leq f \cdot \left(u + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} \in L^1(\Omega),$$

daí, sendo J_n fracamente semicontínuo inferiormente, o que foi provado no Lema 4.3, e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.5, garantimos no lado esquerdo desigualdade (4.11) que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla u - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega fu^{1-\gamma} \\ \leq \quad & \liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}\right]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Pelo mesmo argumento, concluímos que

$$\begin{aligned} & \liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f_n \left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma}\right] \\ = \quad & \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(v^+)^{1-\gamma}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

De (4.12) e (4.13), temos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla u - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f u^{1-\gamma} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v\cdot\nabla v - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(v^+)^{1-\gamma},$$

considerando J o funcional definido em (4.5), garantimos que $J(u) \leq J(v)$, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Logo, u é um mínimo para J.

Pelo Princípio do Máximo, Teorema 1.28, podemos afirmar que $u \geq 0$. Daí, pelo Teorema 1.32, $u(x) \geq u_n(x) \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0$, para todo $x \in \widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$.

Agora, vamos mostrar que J é Gâteaux diferenciável em u para toda $\psi \in C_c^\infty(\widehat{\Omega})$, sendo $\widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$. Dado $K_{\widehat{\Omega}} > 0$ tal que $u \geq K_{\widehat{\Omega}}$, considere $\psi \in C_c^\infty(\widehat{\Omega})$ com a propriedade de $\|\psi\|_{L^\infty(\widehat{\Omega})} \leq K_{\widehat{\Omega}}$ e defina $\widehat{\psi} := \dfrac{\psi}{2\|\psi\|_{L^\infty(\widehat{\Omega})}} K_{\widehat{\Omega}}$.

Note que

$$\widehat{\psi} \leq \|\widehat{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} = \frac{\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}}{2\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}} K_{\widehat{\Omega}} = \frac{K_{\widehat{\Omega}}}{2}, \tag{4.14}$$

e então, dado $t \in (0,1)$, temos que

$$\begin{aligned} u + t\widehat{\psi} &\geq K_{\widehat{\Omega}} - \widehat{\psi} \\ &\geq K_{\widehat{\Omega}} - \frac{K_{\widehat{\Omega}}}{2} \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim sendo, podemos calcular a seguinte derivada

$$\langle J'(u), \widehat{\psi}\rangle \lim_{t\to 0} = \frac{J(u+t\widehat{\psi}) - J(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{I_1}{t} + \frac{I_2}{t}$$

em que

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla(u+t\widehat{\psi})\cdot\nabla(u+t\widehat{\psi}) - \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla u$$

e

$$I_2 = -\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(u+t\widehat{\psi})^{1-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(u)^{1-\gamma}.$$

Como feito no Lema 4.3, temos que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{I_1}{t} = \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\widehat{\psi}$$

e ainda, considerando $g(t) = -\frac{1}{1-\gamma} f(u+t\widehat{\psi})^{1-\gamma}$, ganhamos que

$$g'(t) = -\frac{f\widehat{\psi}}{(u+t\widehat{\psi})^{\gamma}}.$$

Então, por (4.14) e (4.15), conseguimos

$$|g'(t)| = \left|\frac{f\widehat{\psi}}{(u+t\widehat{\psi})^{\gamma}}\right| \leq \frac{\|\widehat{\psi}\|_{L^\infty(\widehat{\Omega})}}{\left(\frac{K_{\widehat{\Omega}}}{2}\right)^{\gamma}} f \leq \left(\frac{K_{\widehat{\Omega}}}{2}\right)^{1-\gamma} f \quad \in L^m(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Definindo $F(t) := \int_\Omega g(t)$ e usando o Corolário 1.6, garantimos

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t} = F'(0) = \int_\Omega \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \int_\Omega \frac{f\widehat{\psi}}{u^{\gamma}}.$$

Do Teorema 1.40, temos que

$$\langle J'(u), \widehat{\psi}\rangle = 0$$

ou ainda,

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\widehat{\psi} = \int_\Omega \frac{f\widehat{\psi}}{u^{\gamma}}$$

ora, $\widehat{\psi} = c\cdot\psi$, sendo c uma constante que depende de $K_{\widehat{\Omega}}$ e $\|\psi\|_{L^\infty(\widehat{\Omega})}$. Então segue

$$c\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\psi = c\int_\Omega \frac{f\psi}{u^{\gamma}},$$

portanto,

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\psi = \int_\Omega \frac{f\psi}{u^{\gamma}} \quad \forall\ \psi \in C_c^\infty(\widehat{\Omega}).$$

Note que J não é diferenciável em $W_0^{1,2}(\Omega)$, mas como u satisfaz $u(x) \geq u_n(x) \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0$, para todo $x \in \widehat{\Omega} \subset\subset \Omega$, a equação de Euler está bem definida.

Logo, u satisfaz:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f}{u^{\gamma}} & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e o teorema está provado.

$\square$

4.1.2 Integrabilidade de solução

Como, mais uma vez, a integrabilidade da solução depende da integrabilidade de f, pondo $f \in L^m(\Omega)$, podemos colocar a u em algum espaço, dependendo do m, que varia em duas situações: quando $m > N/2$ e quando $2N/[N+2+\gamma(N-2)] \leq m < N/2$. Quando $1 \leq m < 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$, não conseguimos assegurar a existência de solução u em $W_0^{1,2}(\Omega)$, mas sim, em um Espaço de Sobolev mais amplo: $W_0^{1,q}(\Omega)$, sendo $q = [Nm(\gamma+1)]/[N-m(1-\gamma)]$, como feito na Seção 4.2.

Teorema 4.7. *Considere, no Problema* (4.1), $f \in L^m(\Omega)$, *com* $m \geq 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$. *Então a solução u dada pelos Teoremas 4.2 e 4.6 é tal que:*

i) *Se* $m > N/2$, *então* $u \in L^\infty(\Omega)$;

ii) *Se* $2N/[N+2+\gamma(N-2)] \leq m < \dfrac{N}{2}$, *então* $u \in L^s(\Omega)$, $s = Nm(\gamma+1)/(N-2m)$.

Demonstração. **i)** Novamente, a prova é idêntica a prova do Teorema 2.3 item **i)**.

ii) Se $m = 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$, então

$$\begin{aligned} s &= \frac{N\left(\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}\right)(\gamma+1)}{N-2\left(\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}\right)} \\ &= \frac{2N(\gamma+1)}{N+2+\gamma(N-2)-4} \\ &= \frac{2N(\gamma+1)}{(N-2)(\gamma+1)} \\ &= 2^*. \end{aligned}$$

Como $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pelo teorema anterior, e $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, então

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} = \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Logo, $u \in L^s(\Omega)$.

Se $2N/[N+2+\gamma(N-2)] \leq m < N/2$, então consideremos $\delta > 1$ e escolha $u_n^{2\delta-1}$ como função teste em (1.9). Então, repetindo os mesmos cálculos do Teorema 3.8, item **ii)**, obtemos a mesma equação em (3.14)

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{4.16}$$

Escolhendo δ tal que $2^*\delta = (2\delta-1-\gamma)m'$, como no Teorema 3.8, item **ii)**, conseguimos que

$$\delta = \frac{-m(1+\gamma)(N-2)}{4m-2N}.$$

Note que podemos fazer a escolha desse δ, pois

$$m > \frac{2N}{N-2-\gamma(N+2)} \quad \text{sempre que} \quad -m[N-2-\gamma(N+2)] < -2N$$

ou ainda,

$$m > \frac{2N}{N-2-\gamma(N+2)} \quad \text{quando} \quad -m(1+\gamma)(N+2) < 2m-N$$

como $2m-N<0$, então

$$m > \frac{2N}{N-2-\gamma(N+2)} \quad \text{sempre que} \quad \frac{-m(1+\gamma)(N+2)}{2m-N} > 1$$

logo,

$$m > \frac{2N}{N-2-\gamma(N+2)} \quad \text{é equivalente a} \quad \delta > 1.$$

Assim, juntando os fatos de $2/2^* > 1/m'$ quando $m < N/2$ e $s = 2^*\delta$ (provados no item **ii)** do Teorema 3.8, e a inequação (4.16), obtemos

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{\alpha S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{1}{m'}}$$

isso implica em

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2m'-2^*}{2^*m'}} \leq \frac{\delta^2}{\alpha S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Logo, u_n é limitada em $L^s(\Omega)$ e portanto, $u \in L^s(\Omega)$.

$\square$

4.2 Existência de solução quando a regularidade do dado é enfraquecida

Se $m < 2N/[N+2+\gamma(N-2)] = [2^*/(1-\gamma)]'$ nós não garantimos mais a existência de solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$, mas sim, num Espaço de Sobolev maior. Vamos mostrar, primeiro, uma estimativa para u_n.

Lema 4.8. *Seja u_n solução dada pela Proposição 1.29, com $\gamma < 1$, $f \in L^m(\Omega)$ em que $1 \leq m < 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$. Então u_n é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$, em que $q = Nm(\gamma+1)/[N-m(1-\gamma)]$.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que u_n é limitada em $L^s(\Omega)$, sendo $s = Nm(\gamma+1)/(N-2m)$, e posteriormente, em $W_0^{1,q}(\Omega)$, com $q = Nm(\gamma+1)/[N-m(1-\gamma)]$.

Vamos escolher, para n fixado, $\varepsilon < 1/n$ e $(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1} - \varepsilon^{2\delta-1}$ como função teste em (1.9) em que $(\gamma+1)/2 \leq \delta < 1$. Então, usando a elipticidade da M, o fato de $f_n \leq f$ e $(u_n+1/n)^\gamma > (u_n+\varepsilon)^\gamma$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega \nabla u_n \nabla[(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1} - \varepsilon^{2\delta-1}] &= \alpha(2\delta-1)\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \\
&= \alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \\
&\leq \int_\Omega \frac{f_n[(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1} - \varepsilon^{2\delta-1}]}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \\
&\leq \int_\Omega \frac{f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1}}{(u_n+\varepsilon)^\gamma} \\
&= \int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\gamma}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \leq \int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\gamma}. \tag{4.17}$$

Então, pela Regra da Cadeia localmente Lipschitz e pela Imersão de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} &= \frac{1}{\delta^2}\int_\Omega |\nabla[(u_n+\varepsilon)^\delta - \varepsilon^\delta]|^2 \\ &\geq \frac{1}{S\delta^2}\left(\int_\Omega [(u_n+\varepsilon)^\delta - \varepsilon^\delta]^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}. \end{aligned}$$

Portanto, segue de (4.17) que

$$\alpha\left(\int_\Omega [(u_n+\varepsilon)^\delta - \varepsilon^\delta]^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{S\delta^2}{(2\delta-1)}\int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\gamma} \quad \forall\, \varepsilon < \frac{1}{n}.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, ganhamos

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{S\delta^2}{(2\delta-1)}\int_\Omega f u_n^{2\delta-1-\gamma}. \tag{4.18}$$

Se $m=1$, então $s = N(\gamma+1)/(N-2) = 2^*(\gamma+1)/2$. Escolhendo $\delta = (\gamma+1)/2$, teremos $2^*\delta = 2^*(\gamma+1)/2$ e $2\delta-1-\gamma = [2(1+\gamma)]/2-1-\gamma = 0$. Isso implica, de (4.18), que

$$\begin{aligned} \alpha\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \frac{S\delta^2}{(2\delta-1)}\int_\Omega f \\ &= \frac{S\delta^2}{(2\delta-1)}\|f\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, u_n é limitada em $L^s(\Omega)$.

Se $1 < m < 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$, partindo da desigualdade (4.18) e usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, do lado direito, temos

$$\frac{S\delta^2}{(2\delta-1)}\int_\Omega f u_n^{2\delta-1-\gamma} \leq \frac{S\delta^2}{(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{4.19}$$

Escolhendo δ de forma que $2^*\delta = (2\delta-1-\gamma)m'$, conseguimos $\delta = -m(1+\gamma)(N-2)/(4m-2N)$ e $2^*\delta = s$ com o mesmo cálculo feito no Teorema 3.8 item **ii)**. Note que podemos fazer a escolha de tal δ, pois $m > 1$ sempre que

$$N(-m+1) < 0$$

ou seja, quando

$$-mN + 2m < 2m - N.$$

Como $2m - N < 0$, a desigualdade acima implica em

$$\frac{-m(N-2)}{2m-N} > 1$$

assim, $m \geq 1$ sempre que

$$\frac{-m(1+\gamma)(N-2)}{4m-2N} > \frac{\gamma+1}{2}.$$

Por outro lado, $m < 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$ implica que

$$-m[(1+\gamma)(N-2)+4] \geq -2N$$

ou ainda,

$$-m(1+\gamma)(N-2) \geq 4m-2N.$$

Em particular, $m < 2N[N+2+\gamma(N-2)]$ implica que $-m(1+\gamma)(N-2)/(4m-2N) < 1$.

Além disso,

$$1 - \frac{1}{m} < 1 - \frac{N+2+\gamma(N-2)}{2N}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m'} &< \frac{N-2-\gamma(N-2)}{2N} \\ &= \frac{(N-2)(1-\gamma)}{2N} \\ &= \frac{1-\gamma}{2^*} \\ &< \frac{2}{2^*}. \end{aligned}$$

Finalmente, de (4.18) e (4.19), garantimos que

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{S\delta^2}{\alpha(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Logo,

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2m'-2^*}{2^*m'}} \leq \frac{S\delta^2}{\alpha(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Portanto, u_n é limitada em $L^s(\Omega)$.

Agora, vamos mostrar a limitação de u_n em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Note que, como garantimos que u_n é limitada em $L^s(\Omega)$, o lado direito de (4.17),

$$\int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\gamma}$$

é limitado com respeito a n e ε. Então, sendo $\delta < 1$, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(u_n+\varepsilon)^{2-2\delta}} &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2(u_n+\varepsilon)^{2\delta-2}\\ &\leq \frac{1}{\alpha(2\delta-1)}\int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\gamma}\\ &\leq C_1. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Observe que

$$\begin{aligned} q &= \frac{Nm(\gamma+1)}{N-m(1-\gamma)}\\ &< \frac{N\left(\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}\right)(\gamma+1)}{N-\left(\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}\right)(1-\gamma)}\\ &= \frac{2N(\gamma+1)}{[N+2+\gamma(N-2)-2(1-\gamma)]}\\ &= \frac{2N(\gamma+1)}{N(\gamma+1)}\\ &= 2, \end{aligned}$$

ou seja, $q < 2$. Então, usando desigualdade de Hölder, Teorema 1.2, com $2/q$ e $(2-q)/2$, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^q &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(u_n+\varepsilon)^{(1-\delta)q}}\cdot(u_n+\varepsilon)^{(1-\delta)q}\\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{\frac{2\cdot q}{q}}}{(u_n+\varepsilon)^{(1-\delta)\frac{2q}{q}}}\right)^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega (u_n+\varepsilon)^{(1-\delta)q\left(\frac{2}{2-q}\right)}\right)^{\frac{2-q}{2}}\\ &= \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(u_n+\varepsilon)^{2\delta-2}}\right)^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega (u_n+\varepsilon)^{\frac{(2-2\delta)q}{2-q}}\right)^{1-\frac{q}{2}}.\end{aligned}$$

Daí, segue de (4.20) que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq (C_1)^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega (u_n+\varepsilon)^{\frac{(2-2\delta)q}{2-q}}\right)^{1-\frac{q}{2}}. \tag{4.21}$$

Agora, basta escolher δ de forma que $(2-2\delta)q/(2-q)=s$, sendo que $s=Nm(\gamma+1)/(N-2m)$, ou seja

$$\frac{(2-2\delta)q}{2-q}=\frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}.$$

Temos assim

$$-2\delta q=\frac{Nm(\gamma+1)(2-q)}{N-2m}-2q$$

ou seja,

$$\delta=\frac{-Nm(\gamma+1)(2-q)+2q(N-2m)}{(N-2m)2q}.$$

Com isso, concluímos que

$$\delta=\frac{-Nm(\gamma+1)(2-q)}{(N-2m)2q}+1.$$

Note que podemos fazer a escolha desse δ, pois sendo $m < 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{-Nm(\gamma+1)(2-q)}{(N-2m)2q} &< \frac{-N\left(\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}\right)(\gamma+1)(2-q)}{\left[N-2\left(\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}\right)\right](2q)} \\
&= \frac{-(\gamma+1)(2-q)(2N)}{[N+2+\gamma(N-2)-4]2q} \\
&= \frac{(\gamma+1)}{2}\cdot\frac{-(2-q)(2N)}{(N-2)(1+\gamma)2q} \\
&= \frac{-(2-q)}{4q}\cdot\frac{2N}{N-2} \\
&= \frac{-(2-q)2^*}{4q} < 0,
\end{aligned}$$

o que implica que $\delta < 1$. Ademais, $\delta > (\gamma+1)/2$, pois caso não fosse, como $1/2 < (\gamma+1)/2 < 1$, teríamos

$$\delta \leq \frac{1}{2}$$

ou seja,

$$\frac{Nm(\gamma+1)(2-q)}{(N-2m)2q} > \frac{1}{2},$$

com $q = Nm(\gamma+1)/[N-m(1-\gamma)]$. Assim, seguiria que

$$Nm(\gamma+1)\left(2-\frac{Nm(\gamma+1)}{N-m(\gamma+1)}\right) > \left(\frac{N-2m}{2}\right)2\left(\frac{Nm(\gamma+1)}{N-m(\gamma-1)}\right).$$

Em particular,

$$2N-2m(1-\gamma)-Nm(\gamma+1) > N-2m.$$

Logo,

$$N(1-m)+\gamma m(2-N) > 0.$$

Como $N \geq 2$ e $m \geq 1$ garantimos um absurdo na desigualdade anterior. Isto é, a escolha do δ foi apropriada. Com isso, podemos voltar a estimativa (4.21):

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq (C_1)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega (u_n + \varepsilon)^s \right)^{1-\frac{q}{2}}.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, obtemos que

$$\|u_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq (C_1)^{\frac{q}{2}} \|u_n\|^{s\left(1-\frac{q}{2}\right)}_{L^s(\Omega)}$$

e o resultado segue.

$\square$

Teorema 4.9. *O Problema* (4.1) *possui solução* $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $q = Nm(\gamma+1)/[N - m(1-\gamma)]$, *quando* $f \in L^m(\Omega)$ *e* $1 \leq m < 2N/[N+2+\gamma(N-2)]$, *no sentido de*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demonstração. Primeiro, observe que

$$q^* = \frac{qN}{N-q} = \frac{\frac{Nm(\gamma+1)N}{N-m(1-\gamma)}}{N - \frac{Nm(\gamma+1)}{N-m(1-\gamma)}} = \frac{Nm(\gamma+1)N}{N^2 - Nm(1-\gamma) - Nm(\gamma+1)} = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m} = s$$

ou seja, $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$.

Do Lema 4.8, temos que u_n é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$, ou seja, a menos de subsequências, $u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ em $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, isto é, $u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ em $L^s(\Omega)$. Além disso, u_n converge para u pontualmente e, portanto, q.t.p. em Ω. Com isso, pelo Teorema 1.3, garantimos que u_n converge para u em $L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1,s)$. Ora, $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, assim, $u = \widehat{u}$. Daí, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Consideremos $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e consideremos o funcional $I : W_0^{1,q}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \phi.$$

Note que usando desigualdade de Hölder, o fato de M ser limitada, e desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
|I(u)| &\leq \int_\Omega |M(x)||\nabla u||\nabla v| \\
&\leq \|M\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}\|\nabla\phi\|_{L^{q'}(\Omega)} \\
&\leq C\cdot\beta\|\phi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \\
&= \widehat{C}\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}
\end{aligned}$$

ou seja, I é contínuo e claramente é linear. Logo, $I \in \left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)'$. Então, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega M(x)\nabla u_n\cdot\nabla\phi = \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\phi \quad \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Além disso, sendo $(u_n(x)+1/n) \geq K_{\widehat{\Omega}} > 0$, garantimos que: $(u_n(x)+1/n)^\gamma \geq K_{\widehat{\Omega}}^\gamma > 0$, então para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e usando o fato de $0 \leq f_n \leq f$, garantimos que

$$0 \leq \left|\frac{f_n\phi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\right| \leq \frac{\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}}{K_{\widehat{\Omega}}^\gamma} f = \widehat{C}\cdot f \in L^m(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

em que $\widehat{\Omega}$ é o conjunto $\{\phi \neq 0\}$.

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.5, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{f_n\phi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Portanto,

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma} \quad \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

□

Observação 4.10. *No Lema 4.8, gostaríamos de escolher $u_n^{2\delta-1}$ como função teste em* (1.9)*, mas tal função não é admissível quando $(\gamma+1)/2 \leq \delta < 1$. De fato, suponha que pudéssemos aplicar a Regra da Cadeia localmente Lipschitz em $u_n^{2\delta-1}$, então $\nabla(u_n^{2\delta-1}) = (2\delta-1)u_n^{2\delta-2}\nabla u_n$, com $-1 \leq 2\delta-2 < 0$. Ou seja, o gradiente de $u_n^{2\delta-1}$ seria singular em $u_n = 0$.*

Observação 4.11. *Ainda na demonstração do Lema 4.8, garantimos que* $s = q^*$ *e portanto,* $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$*, ou seja, o fato de* $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *não garante melhora na integrabilidade de u usando Imersão de Sobolev.*

Bibliografia

[1] D. Arcoya, J. Carmona, T. Leonori, P. J. M. Aparicio, L. Orsina, and F. Petitta. Existence and nonexistence of solutions for singular quadratic quasilinear equations. *J. Differential Equations 246, 4006-4042*, 2009.

[2] L. Boccardo and G. Croce. *Elliptic Partial Differential Equations: Existence and Regularity of Distributional Solutions*. De Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, 2013.

[3] L. Boccardo and L. Orsina. Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations 37 (3-4), 363-380*, 2010.

[4] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[5] A. Canino, L. Montoro, B. Sciunzi, and M. Squassina. Nonlocal problems with singular nonlinearity. *Bulletin des Sciences Mathématiques 141, 223-250*, 2017.

[6] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, and L. Tartar. On a dirichlet problem with a singular nonlinearity. *Comm. Partial Differential Equations 2, 193-808*, 1977.

[7] L. A. da Justa Medeiros and M. M. Miranda. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*. IM-UFRJ, 2019.

[8] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2007.

[9] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1991.

[10] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013.

[11] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[12] A. C. Lazer and P. J. McKenna. On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem. *Proc. Amer. Math. Soc. 111, 721-730*, 1991.

[13] G. Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc., 2009.

[14] A.C. Ponce. *Elliptic PDEs, Measures and Capacities: From the Poisson Equation to Nonlinear Thomas-Fermi Problems*. EMS tracts in mathematics. European Mathematical Society, 2016.

[15] G. Stampacchia. Le problème de dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Annales de l'institut Fourier*, 15(1):189–257, 1965.

[16] C. A. Stuart. Existence and approximation of solutions of non-linear elliptic equations. *Math. Z. 147, 53-63*, 1976.

[17] W. P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.