Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Mestrado acadêmico em Matemática

SHARMENYA JANY ANDRADE CORREIA DE SOUSA

Sobre a Classificação de Grupos n-Centralizados

Brasília/DF

2023

SHARMENYA JANY ANDRADE CORREIA DE SOUSA

Sobre a Classificação de Grupos n-Centralizados

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Igor dos Santos Lima

Brasília/DF

2023

Sobre a Classificação de Grupos n-Centralizados

por

Sharmenya Jany Andrade
Correia de Sousa*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 09 de Fevereiro de 2023.

Comissão Examinadora:

Igor dos Santos Lima

___

Prof. Dr. Igor dos Santos Lima- MAT/UnB (Orientador)

Martino Garonzi

___

Prof. Dr. Martino Garonzi– MAT/UnB (Membro)

___

Prof. Dr. Mohsen Amiri– UFAM (Membro)

* O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Eu dedico este trabalho aos meus pais, Maria Lena e Raimundo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por sempre me dar forças, em especial em momentos de dificuldade, o que me permitiu seguir em frente, apesar de todos os obstáculos que surgiram no decorrer do percurso e, principalmente, durante a pandemia.

Agradeço à minha família (minha mãe Lena, meu pai Raimundo, minha irmã Rayana, meu sobrinho Miguel e minha afilhada Amarylis) por sempre se fazer presente na minha vida, apesar da distancia, me motivando a seguir em frente nos meus estudos e pelos cuidados a mim prestados.

Agradeço ao Rodolfo (meu namorado, meu companheiro, meu melhor amigo e meu braço direito) por fazer parte da minha vida, ser um dos meus maiores incentivadores na vida acadêmica e por cuidar tão bem de mim nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus pets (minhas gatas Valentina e Yoru e meu cachorrinho Stark) por todo amor em forma de lambeijos, pelas companhias nas horas de estudos e por alegrar sempre meus dias.

Agradeço aos meus amigos próximos do Ceará pelo incentivo nos meus estudos. De modo especial, agradeço à Lygia e à Jaylla por cuidarem tão bem da minha família na minha ausência, bem como às minhas tias por parte de amigas (tia Lúcia e tia Erilene) que me tratam como filha e se alegram pelo meu progresso.

Agradeço em especial a minha madrinha Noemia por estar sempre presente em minha vida e na vida dos meus pais.

Agradeço à Elaine Silva, ex-aluna do departamento por ter, de forma indireta, aberto as portas da UnB, não só para mim, bem como para outros alunos que vieram do interior do Ceará.

Agradeço aos meus colegas de departamento pelas experiencias compartilhadas no decorrer do mestrado e pelas partidas de vôlei jogadas nas sextas.

Agradeço aos professores, Rodrigo Mendes, Jorselan Perote e Amanda Feltrin pelas cartas de recomendação para o mestrado. A confiança em mim depositada me alegrou muito e foi um grande incentivo.

Agradeço ao meu orientador, o professor Igor, pela confiança em mim depositada e por todo apoio e incentivo durante esses meses de orientação.

Agradeço a todos os professores do departamento que fizeram parte da minha formação, seus ensinamentos foram essenciais para a concretização deste trabalho.

Agradeço aos membros da banca examinadora (Igor Lima, Martino Garonzi e Mohsen Amiri) pelas valorosas contribuições feitas para essa dissertação.

Agradeço a todos os funcionários do departamento por toda gentileza e apoio quando precisei.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro que me permitiu permanecer em Brasília e concluir meus mestrado.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram.

Veja tudo, deixe passar muita coisa, corrija um pouco

João XXIII

RESUMO

Seja G um grupo e denote por $\mathrm{Cent}(G)$ o conjunto de todos os seus centralizadores de elementos. Nós dizemos que G é n-centralizado quando $|\mathrm{Cent}(G)| = n$. É claro que um grupo é 1-centralizado se, e somente se, é abeliano. Além disso, não existem grupos 2 ou 3-centralizados. Uma questão natural é, se fixado o tamanho de $\mathrm{Cent}(G)$, é possível obter uma caracterização do grupo G. Neste trabalho, com base nos artigos de A. Abdollahi, S. M. J. Amiri, A. M. Hassanabadi [1] e M. Zarrin [36], estudamos e classificamos os grupos n-centralizados para $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Além disso, estudamos também o artigo de S. M. J. Amiri e H. Rostami [7], no qual foi feita uma outra abordagem, em que ao considerar a classe de todos os grupos não-abelianos de uma ordem pré-fixada, classificamos aquele que possui o menor número de centralizadores.

Palavras-chave: Centralizadores de Elementos. Grupos n-centralizados. Classificação de Grupos.

ABSTRACT

Let G be a group and denote by $\mathrm{Cent}(G)$ the set of all its centralizers of elements. We say that G is n-centralizer when $|\mathrm{Cent}(G)| = n$. Of course, a group is 1-centralizer if, and only if, it is abelian. Furthermore, 2 and 3-centralizer groups do not exist. A natural question is if it is possible to obtain a characterization of the group G knowing the size of $\mathrm{Cent}(G)$. In this work, based on articles of A. Abdollahi, S. M. J. Amiri, A. M. Hassanabadi [1] and M. Zarrin [36], we study and classify the n-centralizers groups for $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. In addition, we also study the paper of S. M. J. Amiri and H. Rostami [7], in which another approach was taken, in which, when considering the class of all non-abelian groups of a prefixed order, we classify the one that has the smallest number of centralizers.

Keywords: Centralizers of Elements. n-Centralizers Groups. Classification of Groups.

SUMÁRIO

Introdução

Um problema interessante e amplamente estudado em Teoria de Grupos é determinar propriedades de um grupo G a partir da quantidade de centralizadores que ele possui. Nesse sentido, definimos

$$\text{Cent}(G) = \{C_G(x) : x \in G\},$$

a coleção de todos os centralizadores de elementos de G. Quando $|\text{Cent}(G)| = n$, dizemos que G é um grupo n-centralizado. Observe que um grupo é 1-centralizado se, e somente se, é abeliano. Além disso, não existem grupos 2 ou 3-centralizados.

Essencialmente, nossos resultados serão de classificação. Entretanto, não obteremos informações explícitas sobre o grupo, em vez disso, conseguiremos descobrir a estrutura do grupo quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ o que nos permitirá, por exemplo, obter resultados de nilpotência e solubilidade. Outra razão para aparecer este grupo quociente se dá pelo fato do centro, denotado por $Z(G)$, ser exatamente a intersecção dos centralizadores do grupo e ao fazer o quociente, retiramos todos os elementos que comutam naturalmente no grupo. Nosso foco inicial se dará nos grupos finitos, visto que as técnicas empregadas usarão fortemente a finitude do grupo.

Os pioneiros nos estudos de classificação a partir do número de centralizadores foram Belcastro e Sherman [15] que, em 1994, mostraram que um grupo finito G é 4-centralizado se, e somente se, o grupo quociente $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$, o que mostra, em particular, que grupos finitos 4-centralizados são nilpotentes. Neste mesmo artigo, eles também provaram que um grupo finito G é 5-centralizado se, e somente se, o quociente $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3$ ou S_3, o que em particular garante que tais grupos são solúveis.

Os grupos finitos 6-centralizados foram classificados seis anos mais tarde por Ashrafi [9] que provou que se um grupo finito é 6-centralizado, então $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3, C_2^4, D_8$ ou A_4 e em particular é solúvel. Note que neste caso não foi possível obter uma condição suficiente para um grupo ser 6-centralizado, pois como veremos adiante, se $\dfrac{G}{Z(G)} \cong A_4$, poderemos ter $|\text{Cent(G)}| = 6$ ou 8.

Em 2007, Abdollahi, Jafarian Amiri e Hassanabadi [1], estudaram os grupos finitos 7 e 8-centralizados. No artigo, eles obtiveram que um grupo finito G é 7-centralizado se, e somente se, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{10}, C_5 \times C_5$ ou $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1 \text{ e } x^y = x^3 \rangle$. Quando G é finito e 8-centralizado, os autores mostraram que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3, A_4$ ou D_{12} e em particular é solúvel.

Todos os resultados comentados até aqui serão demonstrados no Capítulo 3. Para prová-los, construiremos no Capítulo 2 alguns resultados gerais da teoria de centralizadores e utilizaremos como ferramenta principal um resultado técnico devido a Tomkinson, que fora obtido em 1987 [34]. O Capítulo 1 é dedicado a uma revisão dos conceitos de Teoria de Grupos que serão importantes para este trabalho.

Até agora, falamos de resultados em que se fixava um valor para $|\mathrm{Cent}(G)|$ e se obtinha informações sobre a estrutura do grupo quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$. No Capítulo 4 faremos uma abordagem diferente. Baseados no artigo de Jafarian Amiri e Rostami [7] iremos considerar a coleção de todos os grupos não-abelianos de uma mesma ordem pré-fixada n e caracterizaremos o grupo desta coleção que possui o menor número de centralizadores. Especificamente, obteremos exatamente duas possibilidades para este grupo, a saber

(1) G é nilpotente, $|\mathrm{Cent}(G)| = p + 2$ e $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$ onde p é o menor primo tal que $p^3 \mid n$.

(2) G é não nilpotente, $|\mathrm{Cent}(G)| = p^m + 2$ e $\dfrac{G}{Z(G)} \cong (C_p)^m \rtimes C_l$ onde $l > 0$ e p^m é a menor potência de primo divisora de n tal que $p^m - 1$ e n não são coprimos.

Concluiremos este trabalho com o Capítulo 5 em que estenderemos os resultados do Capítulo 3 para grupos infinitos. Para fazer isso, utilizaremos o conceito de isoclinismo e as propriedades que são preservadas por essa relação. Com efeito, provaremos que grupos isoclínicos tem, por exemplo, o mesmo número de centralizadores, que os quocientes pelo centro são isomorfos e que dado um grupo arbitrário sempre é possível obter um grupo finito a ele isoclínico, o que permitirá a extensão natural dos resultados. O artigo base para este capítulo é o trabalho de Zarrin [36]. Como adicional, ainda obteremos um resultado de solubilidade para grupos n-centralizados.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste primeiro capítulo traremos alguns conceitos e resultados de Teoria de Grupos que se farão importantes no decorrer do trabalho. Assume-se que o leitor tenha conhecimento básico nesta área para que possamos falar apenas dos resultados que de fato serão utilizados. Iniciaremos trazendo alguns resultados sobre grupos nilpotentes e solúveis, após, falaremos brevemente sobre Grupos de Frobenius e finalizaremos com um resultado de caracterização de CA-Grupos. As nossas principais referências neste capítulo são o livros do professor D. J. S. Robinson [28], do professor H. E. Rose [29] e do professor R. Schimidt [32].

1.1 Resultados Gerais de Teoria de Grupos

Definição 1.1 (Grupos Nilpotentes)**.** *Um grupo G é dito nilpotente caso possua uma série central, isto é, se admite uma série*

$$\mathcal{S} : 1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

tal que $G_i \trianglelefteq G$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e cada fator $\dfrac{G_{j+1}}{G_j} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_j}\right)$, para todo $j \in \{0, ..., n-1\}$.

Exemplo 1.1. *Exemplos de grupos nilpotentes são os grupos abelianos. Além destes, os p-grupos finitos também são nilpotentes (veja [28], p.* 122*).*

Exemplo 1.2. *Dado p um primo, qualquer p-grupo com ordens p e p^2 é necessariamente* *abeliano. Isso não acontece nas demais potências. Particularmente, o grupo*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\},$$

é um p-grupo de ordem p^3 que não é abeliano, afinal $Z(G) \cong C_p < G$.

Lema 1.1. *Seja G um p-grupo não abeliano de ordem p^3. Então, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$.*

Demonstração. Como G é um p-grupo, $Z(G) \neq 1$. Sendo G não abeliano, $Z(G) \neq G$. Logo $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$. Temos dois casos:

<u>Caso 1:</u> $|Z(G)| = p$.

Neste caso, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = p^2$, logo $\dfrac{G}{Z(G)}$ é abeliano e consequentemente $G' \leq Z(G)$. Como $|Z(G)| = p$, então $G' = \{1\}$ ou $G' = Z(G)$. Ora, se $G' = \{1\}$, teríamos que G seria abeliano, o que não ocorre. Logo $G' = Z(G)$.

<u>Caso 2:</u> $|Z(G)| = p^2$.

Neste caso, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = p$. Deste modo, $\dfrac{G}{Z(G)}$ seria cíclico e portanto G seria abeliano, chegando a um absurdo.

Portanto $|Z(G)| = p$ e, assim, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = p^2$. Novamente, como G não é abeliano, segue que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$. □

Proposição 1.1. *Um grupo G admite uma série central, a saber $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$, se, e somente se, $[G_{i+1}, G] \leq G_i$, para todo $i \in \{0, ..., n-1\}$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Sejam $x \in G_{i+1}$ e $g \in G$. Como $\dfrac{G_{i+1}}{G_i} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$, temos

$$xgG_i = xG_igG_i = gG_ixG_i = gxG_i \implies [x, g] = x^{-1}g^{-1}xg \in G_i.$$

Assim, $[G_{i+1}, G] \leq G_i$.

($\Longleftarrow$) Por outro lado, se $[G_{i+1}, G] \leq G_i$, então $x^g = x[x, g] \in G_i$ para todo $x \in G_i$ e para todo $g \in G$, o que mostra que $G_i \trianglelefteq G$. Para verificar que a família $\{G_i\}$ forma uma série central, tomemos $x \in G_{i+i}$ e $g \in G$. Temos por hipótese que

$$x^{-1}g^{-1}xg = [x, g] \in G_i \implies gxG_i = xgG_i \implies gG_ixG_i = xG_igG_i \implies xG_i \in Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right).$$

Logo, $\dfrac{G_{i+1}}{G_i} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$ e o resultado segue. □

Proposição 1.2. *Seja G um grupo nilpotente, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Então, H é nilpotente e o grupo quociente $\dfrac{G}{N}$ também é nilpotente.*

Demonstração. Seja G um grupo nilpotente e $H \leq G$. Considere $\mathcal{S}$ uma série central para G. Provaremos que $H \cap \mathcal{S}$ é uma série central para H. Pela Proposição 1.1 é suficiente verificar que $[H_{i+1}, H] \leq H_i$. De fato, $[H_{i+1}, H] \leq H$ e

$$[H_{i+1}, H] = [G_{i+1} \cap H, H] \leq [G_{i+1}, G] \leq G_i.$$

Assim, $[H_{i+1}, H] \leq H_i$ e portanto H é nilpotente. Agora, dado $N \trianglelefteq G$, para verificar que $\dfrac{G}{N}$ é nilpotente, considere $N_i = \dfrac{NG_i}{N}$. Vejamos que $\{N_i\}$ forma uma série central para $\dfrac{G}{N}$. De fato, dados $\alpha \in \dfrac{NG_{i+1}}{N}$ e $\beta \in \dfrac{G}{N}$, existem $x \in G_{i+1}$ e $g \in G$ tais que $xN = \alpha$ e $gN = \beta$. Daí,

$$[\alpha, \beta] = [xN, gN] = [x, g]N \in \frac{N[G_{i+1}, G]}{N} \leq \frac{NG_i}{N} = N_i.$$

Com isso, $\left[N_{i+1}, \dfrac{G}{N}\right] \leq N_i$, donde segue que $\dfrac{G}{N}$ é nilpotente. □

Definição 1.2. *Dizemos que um grupo G é nilpotente de classe 2 caso $G' \leq Z(G)$.*

Definição 1.3. *Seja G um grupo. Um subgrupo M é dito maximal em G e denota-se $M \lessdot G$ caso sempre que $M \leq H \leq G$, tenha-se que $H = M$ ou $H = G$.*

Definição 1.4 (Subgrupo de Frattini)**.** *Seja G um grupo. Define-se o subgrupo de Frattini de G por*

$$\Phi(G) = \bigcap_{M \lessdot G} M.$$

No caso em que G não possui subgrupos maximais, definimos $\Phi(G) = G$.

Teorema 1.1 (Classificação dos Grupos Nilpotentes Finitos)**.** *Seja G um grupo finito. São equivalentes*

(*a*) *G é nilpotente.*

(*b*) *$G' \leq \Phi(G)$.*

(*c*) *Todos os subgrupos de Sylow de G são normais.*

(*d*) *G é o produto direto dos seus subgrupos de Sylow.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [29], p. 216. □

Uma outra classe extremamente importante de grupos é a dos grupos solúveis, a qual contém a classe dos grupos nilpotentes.

Definição 1.5. *Um grupo G é dito solúvel caso possua uma série abeliana, isto é, se admite uma série*

$$\mathcal{S} : 1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

tal que $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ *é abeliano para todo* $i \in \{1, ..., n\}$.

Exemplo 1.3. *Todo grupo nilpotente finito é solúvel (veja [29], p. 233). Por outro lado, S_3 não é nilpotente, pois $Z(S_3) = 1$, mas é um grupo solúvel já que $1 \trianglelefteq A_3 \trianglelefteq S_3$ é uma série abeliana.*

Proposição 1.3. *Seja G um grupo solúvel, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Então, H é solúvel e o grupo quociente* $\dfrac{G}{N}$ *também é solúvel.*

Demonstração. Basta proceder de maneira análoga à prova da Proposição 1.2. □

Definição 1.6. *Seja G um grupo. Denote $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$ e para todo $n \geq 2$, defina $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$. A série assim definida é chamada de série derivada.*

Observação 1.1. *Em uma série derivada têm-se que $G^{(n+1)} \trianglelefteq G^{(n)}$ e que os fatores* $\dfrac{G^{(n)}}{G^{(n+1}}$ *são abelianos. Note que, em geral, possuir uma série derivada não caracteriza que o grupo é solúvel, pois ela pode não ser abeliana.*

Teorema 1.2. *Um grupo G é solúvel se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(n)} = 1$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $\mathcal{S}$ uma série abeliana para G. Vejamos que $G^{(i)} \leq G_{n-i}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$. Para $i = 0$, vale a igualdade. Por indução, suponha que seja válido para i. Assim, como $\dfrac{G_{n-i}}{G_{n-(i+1)}}$ é abeliano, temos pela hipótese de indução que

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \leq [G_{n-i}, G_{n-i}] \leq G_{n-(i+1)}$$

e o resultado segue ao aplicá-lo para $i = n$.

($\Longleftarrow$) Se $G^{(n)} = 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então a família $\{G^{(j)}\}$ forma uma série abeliana para G. □

Corolário 1.1. *Seja $G \neq 1$ um grupo solúvel. Então, $G' \neq G$.*

Demonstração. Seja G um grupo solúvel e, suponha por absurdo, que $G' = G$. Neste caso,

$$G^{(1)} = G' = G \implies G^{(2)} = [G', G'] = [G, G] = G' = G.$$

Assim, $G^{(3)} = [G^{(2)}, G^{(2)}] = [G, G] = G' = G$. Recursivamente, obtemos que $G^{(n)} = G \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contraria o Teorema 1.2. □

Definição 1.7. *Um grupo $G \neq 1$ é dito abeliano elementar se é abeliano e existe um primo $p \in \mathbb{N}$ tal que $G^p := \{g^p : g \in G\} = \{1\}$. De forma equivalente, G é abeliano elementar quando existe um primo p e um número natural m tal que $G \cong (C_p)^m$. Neste caso, dizemos que G é p-abeliano elementar.*

Definição 1.8. *Seja G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Dizemos que N é normal minimal em G e denotamos $N \cdot\trianglelefteq G$ quando $N \neq 1$ e para todo $1 < K < N$ tem-se que $K \ntrianglelefteq G$.*

Definição 1.9. *Seja G um grupo e $H \leq G$. Dizemos que H é característico em G e denotamos H char G quando $H^\varphi \subseteq H$, para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Caso G não possua subgrupos característicos não triviais, então G é caracteristicamente simples.*

Exemplo 1.4. *Sobre subgrupos característicos, valem os seguintes resultados*

- *Se H char G, então $H \trianglelefteq G$. Em particular, se G é simples, G é caracteristicamente simples.*
- *Se $H \trianglelefteq G$ e K char H, então $K \trianglelefteq G$. Em particular, se H é normal minimal em G, então H é caracteristicamente simples.*
- *$Z(G)$ char G.*
- *G' char G.*
- *Seja $n \in \mathbb{N}$ então $G^n = \{g^n : g \in G\}$ char G.*
- *Seja $p \in \pi(G)$ e $O_p(G)$ o maior p-subgrupo normal de G, então $O_p(G)$ char G.*

Proposição 1.4. *Seja N um subgrupo normal minimal de um grupo solúvel finito G. Então existe um primo p tal que N é p-abeliano elementar.*

Demonstração. Sendo G solúvel, N é solúvel. Assim, $N' \neq N$. Por outro lado, N' char $N \trianglelefteq G$, o que implica que $N' \trianglelefteq G$. Sendo N normal minimal, $N' = 1$ e, portanto, N é abeliano. Por outro lado, dado $p \in \pi(N)$, temos que $N^p := \{x^p : x \in N\} \neq N$, pois N contém ao menos um elemento de ordem p (Teorema de Cauchy). Por outro lado, N^p char $N \trianglelefteq G$, o que faz com que $N^p \trianglelefteq G$ e, portanto, $N^p = 1$ pela minimalidade de N. Em particular, N é p-abeliano elementar. □

Corolário 1.2. *Se G é solúvel e finito, então existe $p \in \pi(G)$ e $M \trianglelefteq G$ tal que M é um p-subgrupo não trivial de G.*

Demonstração. Seja $M \trianglelefteq G$ normal minimal. Como G é solúvel, M é abeliano elementar. Em particular M é um p-subgrupo de G. $\square$

Proposição 1.5. *Seja G um grupo solúvel finito. Se G é caracteristicamente simples, então G é abeliano elementar.*

Demonstração. Sendo G solúvel, existe $M \trianglelefteq G$ tal que M é um p-subgrupo. Seja $O_p(G)$ o maior p-subgrupo normal de G. Então $1 \neq M \leq O_p(G)$ char G. Como G é caracteristicamente simples, $O_p(G) = G$ implicando que G é um p-grupo e, portanto, G é nilpotente e, consequentemente, $Z(G) \neq 1$. Por outro lado, $Z(G)$ char G e sendo G caracteristicamente simples, temos que $G = Z(G)$ o que faz com que G seja abeliano. Por fim, do Teorema de Cauchy, existe $g \in G$ tal que $g^p = 1$. Assim, $G^p = \{g^p : g \in G\} \neq G$. Como G^p char G, temos que $G^p = 1$. Portanto, G é p-abeliano elementar. $\square$

Teorema 1.3 (Base de Burnside)**.** *Seja G um p-grupo finito. Então:*

(*a*) $\Phi(G) = G'G^p$.

(*b*) $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ *é p-abeliano elementar.*

(*c*) *Se* $\left|\dfrac{G}{\Phi(G)}\right| = p^d$ *então qualquer conjunto gerador de G tem um subconjunto com d elementos que também gera G.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [28], p. 140. $\square$

Definição 1.10. *Dizemos que um grupo G é central-por-finito quando o índice $|G : Z(G)|$ é finito.*

Teorema 1.4 (Schur)**.** *Seja G um grupo central-por-finito. Então, G' é finito e $(G')^n = 1$ em que $n = |G : Z(G)|$.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [28], p. 287. $\square$

1.2 Grupos de Frobenius

Definição 1.11 (Grupo de Frobenius)**.** *Sejam G um grupo e $1 \neq H < G$. Dizemos que G é um grupo de Frobenius com respeito ao subgrupo H se $H \cap H^g = \{1\}$ para todo $g \in G \setminus H$.*

Definição 1.12. *Seja G um grupo de Frobenius com respeito ao subgrupo H. Definimos o núcleo de Frobenius de G por*

$$K := G \setminus \left(\bigcup_{g\in G} (H^g \setminus \{1\}) \right)$$

Além disso, dizemos que H é o complemento de Frobenius de G.

Proposição 1.6. *Seja G um grupo de Frobenius finito com complemento H e núcleo K. Denote $|G : H| = n$, então*

(a) *$N_G(H) = H$ e H possui n conjugados em G.*

(b) *K é um subconjunto normal de G com $|K| = n$.*

(c) *$C_K(h) = \{1\}$, para todo $h \in H \setminus \{1\}$.*

(d) *$C_H(k) = \{1\}$, para todo $k \in K \setminus \{1\}$.*

(e) *$C_G(k) \subset K$, para todo $k \in K \setminus \{1\}$.*

(f) *$Z(G) = \{1\}$.*

(g) *$|H| \mid n - 1$ e em particular $\mathrm{mdc}(|H|, n) = 1$.*

Demonstração.

(a) Temos que $H \leq N_G(H)$. Agora se $g \in N_G(H) \setminus H$ temos que $H^g = H$ implicando que $H^g \cap H = H$ o que é um absurdo pois $H \neq 1$. Logo $N_G(H) \setminus H = \emptyset$, ou seja, $N_G(H) \leq H$ seguindo assim a igualdade. Por fim o número de conjugados de H é exatamente o índice de seu normalizador no grupo, e portanto é igual a n, pelo que provamos.

(b) De fato, dado $y \in G$ temos que

$$K^y = \left(G \setminus \left(\bigcup_{g\in G} H^g \setminus \{1\} \right) \right)^y = G \setminus \left(\bigcup_{g\in G} H^{gy} \setminus \{1\} \right) = K.$$

Assim, M é um subconjunto normal de G. Agora, como $|G| = n|H|$ e H possui n conjugados em G, temos que

$$|K| = \left| G \setminus \left(\bigcup_{g\in G} H^g \setminus \{1\} \right) \right| = |G| - \left| \bigcup_{g\in G} H^g \setminus \{1\} \right| = n|H| - n(|H| - 1) = n.$$

(c) Seja $h \in H \setminus \{1\}$. Dado $x \in C_K(h)$, vale que $xh = hx$. Assim, $h = x^{-1}hx \in H^x$. Como G é grupo de Frobenius com complemento H, temos que $x \in H$. Lembre que

$H \cap K = \{1\}$ e portanto $x = 1$. Logo $C_K(h) = \{1\}$, para todo $h \in H \setminus \{1\}$.

(d) Análogo ao item anterior.

(e) Suponha que $C_G(k) \not\subset K$. Assim, existem $h \in H \setminus \{1\}$ e $g \in G$ tal que $g^{-1}hg \in C_G(k)$, afinal $K = G \setminus \left(\bigcup_{g\in G} H^g \setminus \{1\}\right)$. Logo, $h \in C_G(gkg^{-1})$ e em particular $h \in C_G(gkg^{-1}) \cap H = C_H(gkg^{-1}) = \{1\}$ pois $gkg^{-1} \in K$, visto que K é normal em G.

(f) Suponha que existe $z \in Z(G) \setminus \{1\}$. Dado $k \in K \setminus \{1\}$ temos que $z \in C_G(k) \subset K$. Do item anterior, $C_G(z) \subset K$. Como $z \in Z(G)$ então $C_G(z) = G$ implicando assim que $G \subset K$ o que é uma contradição, logo $Z(G) = \{1\}$.

(g) Temos que H age sobre $X = \{H^g, g \in G\}$ via ação de conjugação. Denote por

$$O_H(H^g) = \{H^{gh} : h \in H\},$$

a órbita de H^g. Além disso o estabilizador de H^g é o conjunto

$$\mathrm{Stab}_H(H^g) = \{h \in H : H^{gh} = H^g\}.$$

Sabemos que o tamanho da órbita é exatamente o índice do estabilizador, isto é

$$|H : \mathrm{Stab}_H(H^g)| = |O_H(H^g)|.$$

Se $g \in H$ então $H^g = H$ e portanto $H^{gh} = H$, para todo $h \in H$. Em particular, $O_H(H^g) = \{H\}$, ou seja, $|O_H(H^g)| = 1$.

Se $g \in G \setminus H$ e $h \in \mathrm{Stab}_H(H^g)$ então $H^{gh} = H^g$ e

$$H^{ghg^{-1}} = H \implies ghg^{-1} \in N_G(H) = H.$$

Daí,

$$ghg^{-1} \in H \cap H^{g^{-1}} = \{1\} \implies ghg^{-1} = 1 \implies h = 1$$

Logo, $\mathrm{Stab}_H(H^g) = \{1\}$ e $|O_H(H^g)| = |H|$. Por outro lado, X é a união disjunta das órbitas, isto é, existem $g_1, ..., g_r \in G \setminus H$ tais que

$$X = O_H(H) \cup O_H(H^{g_1}) \cup \cdots \cup O_H(H^{g_r}).$$

Ora, pelo item (a), $|X| = n$. Além disso,

$$|X| = 1 + r|H| \implies n = 1 + r|H| \implies |H||(n-1) \implies \mathrm{mdc}(|H|, n) = 1.$$

$\square$

Observação 1.2. *Sobre a Proposição 1.6 vale ressaltar que*

- *No item (b) não provamos que $K \lhd G$. De fato, é extremamente não trivial mostrar que K é subgrupo de G e é a parte principal do Teorema 1.5 que será enunciado a seguir.*
- *Do item (f), temos em particular que nenhum grupo nilpotente pode ser Frobenius e vice-versa.*

Teorema 1.5 (Frobenius-Thompson)**.** *Seja G um grupo finito que é Frobenius com complemento H e núcleo K. Então $K \lhd G$ e $G = KH$. Além disso, $K = \mathrm{Fit}(G)$.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [20], p. 80-82. $\square$

Proposição 1.7. *Seja $G = KH$ um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K. Suponha que $H \lessdot G$. Então, existe $p \in \pi(G)$ tal que K é p-abeliano elementar.*

Demonstração. Vamos provar que K é normal minimal. Suponha por absurdo que exista $1 \neq N < K$ tal que $N \trianglelefteq G$. Como $N \trianglelefteq G$, $N \cap H = \{1\}$ e $H \leq G$, segue que $NH \leq G$. Daí, $H < NH < KH = G$, o que é um absurdo pois H é maximal. Logo, K é normal minimal e, portanto, K é caracteristicamente simples. Do Teorema 1.5, K é nilpotente e em particular solúvel. Segue da Proposição 1.5 que K é p-abeliano elementar. $\square$

Proposição 1.8. *Seja H um complemento de Frobenius. Então, cada subgrupo de Sylow de H é isomorfo a um grupo cíclico ou então a um quatérnio generalizado.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [23], p. 193. $\square$

1.3 CA-Grupos

Definição 1.13. *Dizemos que G é um CA-grupo quando todo centralizador de elementos não centrais de G for abeliano.*

Teorema 1.6 (Schmidt)**.** *Seja G um grupo não abeliano. Então G é um CA-grupo se, e somente se, valer um dos seguintes itens:*

(a) *G não é abeliano e possui um subgrupo normal abeliano de índice primo.*

(b) *$\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo de Frobenius com núcleo $\dfrac{K}{Z(G)}$ e complemento $\dfrac{L}{Z(G)}$, com K e L abelianos.*

(c) $\dfrac{G}{Z(G)}$ *é um grupo de Frobenius com núcleo* $\dfrac{K}{Z(G)}$ *e complemento* $\dfrac{L}{Z(G)}$*, tal que* $K = PZ$*, onde* P *é um* p*-subgrupo de Sylow normal de* G *para algum* $p \in \pi(G)$*,* P *é um* CA*-grupo,* $Z(P) = P \cap Z(G)$ *e* $L = HZ(G)$*, onde* H *é um* p'*-subgrupo abeliano de* G*, em que* $p' = \pi(G) \setminus \{p\}$.

(d) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong S_4$ *e se* $\dfrac{V}{Z(G)}$ *é o grupo de Klein (de ordem 4) em* $\dfrac{G}{Z(G)}$*, então* V *não é abeliano.*

(e) $G = P \times A$*, onde* P *é um* CA*-grupo não abeliano de ordem potência de primo e* A *é abeliano.*

(f) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong PSL(2, p^n)$ *ou* $PGL(2, p^n)$ *e* $G' \cong SL(2, p^n)$*, onde* p *é um primo e* $p^n > 3$.

(g) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong PSL(2, 9)$ *ou* $PGL(2, 9)$ *e* G' *é isomorfo a cobertura de Schur de* $PSL(2, 9)$.

Demonstração. A prova para este resultado pode ser consultada em [32], p. 519. □

1.4 Grupos Capazes

Definição 1.14. *Um grupo* G *é dito capaz se existe um grupo* H *tal que* $G \cong \dfrac{H}{Z(H)}$.

Lema 1.2. *Os grupos* $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$*,* $C_3 \times D_{10}$*,* $S_3 \times C_5$ *e* $\langle x, y : x^6 = 1, y^2 = x^3, y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$ *não são capazes.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser verificada facilmente com o auxílio do GAP [33]. □

Observação 1.3. *Sejam* G *um grupo abeliano finito,* p *um primo e* i *um inteiro positivo. Seja* $s(G, p^i)$ *o número de somas diretas de cíclicos de ordem* p^i *na decomposição de* G *em grupos cíclicos de ordem potências de primos. Baer em [13] mostrou que um grupo* G *é capaz se, e somente se, para cada número primo* p*, sempre que* $s(G, p^i) = 1$ *tenha-se que* G *contém elemento de ordem* p^{i+1}.

Lema 1.3. (1) *Os únicos grupos capazes de ordem* 12 *são* D_{12} *e* A_4.

(2) *Os únicos grupos capazes de ordem* 20 *são* D_{20} *e* $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$

(3) *O único grupo capaz de ordem* 30 *é* D_{30}.

Demonstração. A prova para este resultado pode ser verificada facilmente com o auxílio do GAP [33]. □

Capítulo 2

Resultados Gerais sobre Grupos n-centralizados

Neste segundo capítulo, iniciaremos o estudo dos grupos n-centralizados. Nele, seguindo o artigo de Abdollahi, Jafarian Amiri e Hassanabadi [1], traremos a definição deste conceito e demonstraremos alguns resultados gerais e importantes acerca deste tema. Entretanto, um resultado que possui relevância ímpar e que merece uma seção inteiramente dedicada a ele é o Lema de Tomkinson.

2.1 Lema de Tomkinson

Em 1987, Tomkinson [34] estudando as maneiras de cobrir um grupo a partir de um número finito de subgrupos ou de classes laterias desenvolveu um lema para seus propósitos. Anos mais tarde, Abdollahi, Jafarian Amiri e Hassanabadi [1] perceberam a relação deste resultado técnico com a teoria de centralizadores.

Lema 2.1 (Lema de Tomkinson)**.** *Seja M um subgrupo próprio de um grupo finito G e sejam $H_1, ..., H_k$ subgrupos de G com $|G : H_i| = \beta_i$ e $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_k$. Se $G = M \cup H_1 \cup \cdots \cup H_k$ então $\beta_1 \leq k$. Além disso, se $\beta_1 = k$, então $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = k$ e $H_i \cap H_j \leq M$ para quaisquer dois índices distintos i e j.*

Demonstração. O conjunto $G \setminus M$ pode ser expresso como uma união de conjuntos.

$$G \setminus M = (H_1 \setminus M) \cup \cdots \cup (H_k \setminus M), \tag{2.1}$$

onde H_i são subgrupos de G. Sendo $|G : M| = \mu$, como $|G : M| = \dfrac{|G|}{|M|}$, então $|M| = \dfrac{1}{\mu}|G|$

e assim

$$|G \setminus M| = |G| - |M| = |G| - \frac{1}{\mu}|G| = |G|\left(1 - \frac{1}{\mu}\right). \tag{2.2}$$

Também $|H_i : H_i \cap M| \leq \mu$ e então $|H_i : H_i \cap M| = \dfrac{|H_i|}{|H_i \cap M|} \leq \mu$. Daí

$$|H_i \cap M| \geq \frac{|H_i|}{\mu} \implies |M| \geq |H_i \cap M| \geq \frac{|H_i|}{\mu},$$

e, portanto

$$|H_i \setminus M| = |H_i| - |M| \leq |H_i| - \frac{|H_i|}{\mu}.$$

Mas, $|G : M| = \beta_i$. Logo $\frac{|G|}{\beta_i} = |H_i|$. Daí

$$|H_i \setminus M| \leq \frac{|G|}{\beta_i} - \frac{|G|}{\beta_i}\mu = |G|\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\beta_i}. \tag{2.3}$$

Aplicando (2.2) e (2.3) em (2.1), nós temos

$$|G \setminus M| = |(H_1 \setminus M) \cup \cdots \cup (H_k \setminus M)| \leq |H_1 \setminus M| + \cdots + |H_k \setminus M|$$

$$|G|\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \leq \sum_{i=1}^{k} |G|\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\beta_i} \implies |G|\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \leq |G|\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\beta_i}.$$

Consequentemente

$$1 \leq \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_k}. \tag{2.4}$$

Como $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_k$, temos $\dfrac{1}{\beta_1} \geq \cdots \geq \dfrac{1}{\beta_k}$, ou seja, $\dfrac{1}{\beta_1} \geq \dfrac{1}{\beta_i}$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Sendo assim,

$$\frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_1} \geq \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_k} \implies \frac{k}{\beta_1} \geq \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_k} \geq 1 \implies k \geq \beta_1.$$

Agora, se $k = \beta_1$, como $\beta_i \in \mathbb{N}$, temos que $\beta_1 = \cdots = \beta_k$. Neste caso,

$$\begin{aligned} |H_1 \setminus M| + \cdots + |H_k \setminus M| &= |G|\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\beta_i} = |G|\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \\ &= |G \setminus M| = |(H_1 \setminus M) \cup \cdots \cup (H_k \setminus M)|. \end{aligned}$$

Logo, os conjuntos $H_i \setminus M$ são dois a dois disjuntos. Com isso,

$$(H_i \setminus M) \cap (H_j \setminus M) = \emptyset \implies (H_i \cap H_j) \setminus M = \emptyset \implies H_i \cap H_j \subset M.$$

$\square$

2.2 Definições e Resultados Gerais

Nesta seção, definiremos o conceito de grupos n-centralizados e abordaremos alguns resultados gerais acerca da teoria que os envolvem, os quais se farão essenciais nos resultados principais deste trabalho. Conforme mencionamos no início deste capítulo, todos os resultados aqui presentes foram retirados do artigo de Abdollahi, Jafarian Amiri e Hassanabadi [1].

De um modo geral, um grupo G é dito n-centralizado se possui n centralizadores de elementos. Relembre que um subconjunto $H \subset G$ é dito um centralizador de elemento em G caso exista $g \in G$ tal que

$$H = C_G(g) := \{x \in G : xg = gx\}.$$

Definição 2.1. *Dado um grupo G nós denotamos por $\mathrm{Cent}(G) = \{C_G(g) : g \in G\}$ o conjunto de todos os centralizadores de elementos de G. Dizemos que G é n-centralizado caso $|\mathrm{Cent}(G)| = n$. Além disso, caso*

$$\left|\mathrm{Cent}\left(\frac{G}{Z(G)}\right)\right| = |\mathrm{Cent}(G)| = n \tag{2.5}$$

dizemos que G é um grupo n-centralizado primitivo.

Observação 2.1. *Note que a igualdade dada em (2.5) não é válida no caso geral, assim é difícil obter grupos n-centralizados primitivos. De fato, dado $N \trianglelefteq G$, o que vale é a desigualdade*

$$\left|\mathrm{Cent}\left(\frac{G}{N}\right)\right| \leq |\mathrm{Cent}(G)|$$

Para prová-la, denote $\overline{\mathrm{G}} = \dfrac{G}{N}$ e para $x, y \in G$ sejam $\overline{x} = xN, \overline{y} = yN \in \overline{\mathrm{G}}$. Dado $C_G(x) \in \mathrm{Cent}(G)$, podemos considerar $C_{\overline{G}}(\overline{x})$ em $\mathrm{Cent}(\overline{\mathrm{G}})$. Assim, a cada centralizador de G associamos um centralizador de $\dfrac{G}{N}$. Por outro lado, se $C_{\overline{G}}(\overline{x}) \in \mathrm{Cent}(\overline{\mathrm{G}})$, temos associado em G o centralizador de x, afinal $\dfrac{C_G(x)N}{N} \leq C_{\overline{G}}(\overline{x})$. No entanto, se y é um outro representante de $\overline{x}$, então $\dfrac{C_G(y)N}{N} \leq C_{\overline{G}}(\overline{x})$. O resultado segue pois, em geral, $C_G(x)$ pode não ser igual a $C_G(y)$.

Ao longo deste trabalho, faremos resultados de classificação relacionando a natureza do grupo quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ com a ordem do $\mathrm{Cent}(G)$. Neste sentido, vale destacar o que ocorre nos grupos diedrais, pois eles serão recorrentes no decorrer do texto.

Proposição 2.1. *Seja $n \geq 2$ um inteiro e seja G um grupo finito de tal modo que*

$\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{2n}$, *então* $|\mathrm{Cent}(G)| = n+2$.

Demonstração. Para um elemento x em G, nós escrevemos $\overline{x}$ para $xZ(G)$. Da hipótese, existem elementos $r, s \in G$ tais que

$$\overline{G} = \frac{G}{Z(G)} = \langle \overline{r}, \overline{s} : \overline{r}^n = \overline{s}^2 = \overline{1}, \overline{rs} = \overline{sr}^{n-1} \rangle.$$

Note que
$$\overline{r}^n = \overline{1} = Z(G).$$

Logo, $r \in Z(G) \iff n = 1$, pois $\overline{r} = \overline{1} = Z(G)$, em outras palavras $rZ(G) = Z(G) \iff r \in Z(G)$. Como $n \geq 2$, temos que $r \notin Z(G)$. Desde que $r \in C_G(r) \setminus Z(G)$, temos que $\langle \overline{r} \rangle$ é um subgrupo maximal de $\overline{G}$, pois $|\overline{G} : \langle \overline{r} \rangle| = 2$, de modo que se existisse K, tal que $\langle \overline{r} \rangle \leq K \leq \overline{G}$, então

$$2 = \frac{|\overline{G}|}{|\langle \overline{r} \rangle|} = \frac{|\overline{G}|}{|K|} \frac{|K|}{\langle \overline{r} \rangle}.$$

Logo, $K = \overline{G}$ ou $K = \langle \overline{r} \rangle$. Observe que $\langle \overline{r} \rangle \leq C_{\overline{G}}(\overline{r})$. Como $\langle \overline{r} \rangle$ é maximal, então $\langle \overline{r} \rangle = C_{\overline{G}}(\overline{r})$ ou $C_{\overline{G}}(\overline{r}) = \overline{G}$. Mas se $C_{\overline{G}}(\overline{r}) = \overline{G}$, temos que $\overline{r} \in Z(\overline{G})$. Assim,

$$\overline{rs} = \overline{sr}^{n-1} \implies \overline{sr}^{n-1} = \overline{sr} \implies \overline{r}^{n-1} = \overline{r} \implies \overline{r}^{n-2} = \overline{1}.$$

Como $n \geq 3$, temos que $n - 2 \geq 1$, logo a ordem de $\overline{r}$ não seria n, o que é um absurdo. Portanto, $\langle \overline{r} \rangle = C_{\overline{G}}(\overline{r})$. Note também que

$$\frac{C_G(r)}{Z(G)} = \{aZ(G) : a \in C_G(r)\}.$$

Mas $\overline{r} = rZ(G) \in \dfrac{C_G(r)}{Z(G)}$. Em particular, $\langle \overline{r} \rangle \leq \dfrac{C_G(r)}{Z(G)}$. Como provado, $\langle \overline{r} \rangle = C_{\overline{G}}(\overline{r})$, logo

$$C_{\overline{G}}(\overline{r}) \leq \frac{C_G(r)}{Z(G)}.$$

Por outro lado, da definição de $\dfrac{C_G(r)}{Z(G)} = \{aZ(G) : a \in C_G(r)\}$. Como $a \in C_G(r)$, temos que $ar = ra$. Daí

$$a \cdot rZ(G) = r \cdot aZ(G) \implies \overline{ar} = \overline{ra}.$$

Logo, $\overline{a} \in C_{\overline{G}}(\overline{r})$. Portanto, $C_{\overline{G}}(\overline{r}) = \dfrac{C_G(r)}{Z(G)} = \langle \overline{r} \rangle$. Sabemos que se n é par então

$Z(D_{2n}) = \langle \overline{r}^{n/2} \rangle$, daí $C_{\overline{G}}(\overline{r}^i\overline{s}) = \langle \overline{r}^i\overline{s} \rangle \times \langle \overline{r}^{n/2} \rangle$. Observe que

$$C_{\overline{G}}(\overline{r}^i\overline{s}) = \frac{C_G(r^is)}{Z(G)} \implies \frac{C_G(r^is)}{Z(G)} = \langle \overline{r}^i\overline{s} \rangle \times \langle \overline{r}^{n/2} \rangle \implies \overline{r}^{n/2} \in \frac{C_G(r^is)}{Z(G)} \implies r \in C_G(r^is).$$

Logo $r^is \in C_G(r^{n/2}) = C_G(r)$, o que é um absurdo, pois r^is não é potência de r. Daí

$$\frac{C_G(r^is)}{Z(G)} = \langle \overline{r}^i\overline{s} \rangle.$$

Assim,

$$\text{Cent}(G) = \{G, C_G(r), C_G(r^is), 1 \leq i \leq n\} \implies |\text{Cent}(G)| = n + 2.$$

Agora se n é ímpar, então $Z(D_{2n}) = \{1\}$. Consequentemente, $C_{\overline{G}}(\overline{r}^i\overline{s}) = \langle \overline{r}^i\overline{s} \rangle$, logo

$$\frac{C_G(r^is)}{Z(G)} = \langle \overline{r}^i\overline{s} \rangle.$$

Portanto,

$$\text{Cent}(G) = \{G, C_G(r), C_G(r^is), 1 \leq i \leq n\} \implies |\text{Cent}(G)| = n + 2.$$

□

Lema 2.2. *Seja D_{2n} o grupo diedral de ordem $2n$, com $n > 2$. Então:*

$$|\text{Cent}(D_{2n})| = \begin{cases} n + 2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{n}{2} + 2, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

Demonstração. Sabemos que

$$D_n = \langle x, y : x^n = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle.$$

Como já provamos $C_{D_{2n}}(x) = \langle x \rangle$. No caso em que n é par,

$$C_{D_{2n}}(x^iy) = \langle x^iy \rangle \times \langle x^{n/2} \rangle = \{1, x^iy, x^{n/2}, x^{i+n/2}y\}.$$

Mas

$$C_{D_{2n}}(x^iy) = C_{D_{2n}}(x^{i+n/2}y).$$

Logo

$$|\text{Cent}(D_{2n})| = \frac{n}{2} + 2.$$

No caso em que n é ímpar

$$C_{D_{2n}}(x^iy) = \langle x^iy\rangle = \{1, x^iy\}.$$

Assim, $|\mathrm{Cent}(D_{2n})| = n + 2$. □

Corolário 2.1. *Sejam G um grupo finito e $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{2n}$. Então G é $n+2$-centralizado primitivo se, e somente se, $n > 1$ é um inteiro ímpar.*

Demonstração. Relembre que se

$$\left|\mathrm{Cent}\left(\frac{G}{Z(G)}\right)\right| = |\mathrm{Cent}(G)| = n,$$

então G é chamado n-centralizado primitivo. Ora, pela Proposição 2.1, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{2n}$, daí $|\mathrm{Cent}(G)| = n + 2$. E pelo Lema 2.2, $\left|\mathrm{Cent}\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right)\right| = n + 2$ se, e somente se, n é ímpar. □

Nosso objetivo é classificar os grupos mediante a quantidade de seus centralizadores. Veremos que é possível, em um certo sentido, cobrir um grupo utilizando exatamente estes subconjuntos. Para isso, definiremos o que seria uma cobertura *irredundante*. Além disso, como estamos tratando de centralizados, os elementos não comutativos entre si ganham especial importância e é exatamente a partir deles que construiremos centralizadores aptos a cobrir um grupo.

Definição 2.2. *Uma cobertura Γ para um grupo G é uma coleção de subgrupos próprios cuja união resulte em G. Caso nenhuma subcoleção própria de Γ forme uma cobertura para G, diremos que Γ é uma cobertura irredundante. No caso onde Γ é finita e contém r conjuntos, diremos que Γ é uma r-cobertura de G. Chamaremos de partição de G com núcleo K uma cobertura de G cuja interseção de dois quaisquer membros desta cobertura seja K.*

Definição 2.3. *Para $r \in \mathbb{N}$, considere $\mathcal{G}_r$ a coleção de todos os grupos G que possuem uma r-cobertura irredundante, com interseção igual a K_G. Definimos $f(r) = \sup_{G\in\mathcal{G}_r} |G : K_G|$.*

Definição 2.4. *Um subconjunto não-vazio $X = \{x_1, ..., x_r\}$ de um grupo finito G é chamado um conjunto de elementos dois a dois não comutativos se $x_ix_j \neq x_jx_i$ para todo $i, j \in \{1, ..., r\}$ distintos. Um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de G é dito ter tamanho máximo se sua cardinalidade é a maior entre todos esses conjuntos. Neste caso, denota-se $\omega(G) := r = |X|$.*

Proposição 2.2. *Sejam G um grupo finito e $\{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de G tendo tamanho máximo. Então*

(1) $\{C_G(x_i) : i = 1, ..., r\}$ *é uma r-cobertura irredundante com a interseção*

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{r} C_G(x_i).$$

(2) $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \leq f(r)$.

(3) $f(3) = 4$, $f(4) = 9$, $f(5) = 16$ *e* $f(6) = 36$.

(4) *Seja G um CA-grupo. Então, para todo $a, b \in G \setminus Z(G)$, ou $C_G(a) = C_G(b)$ ou $C_G(a) \cap C_G(b) = Z(G)$.*

Demonstração. (1) Caso exista $x \in G \setminus \bigcup_{i=1}^{r} C_G(x_i)$, então $\{x_1, ..., x_r, x\}$ seria um conjunto de elementos dois a dois não comutativos, o que contradiz a hipótese. Do mesmo modo, se existir um elemento $a \in \bigcap_{i=1}^{r} C_G(x_i) \setminus Z(G)$, existiria $b \in G$ tal que $[a, b] \neq 1$. Defina então

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } [x_i, b] \neq 1 \\ ax_i, & \text{se } [x_i, b] = 1 \end{cases}.$$

Se $[x_i, b] = 1$, então $y_i = ax_i$. No entanto, $a \in \bigcap_{i=1}^{r} C_G(x_i) \setminus Z(G)$, logo $y_i = ax_i = x_i a$. Daí

$$by_i = bax_i = bx_i a = x_i ba \quad \text{e} \quad y_i b = ax_i b = x_i ab.$$

Como $[a, b] \neq 1$, temos que $[b, y_i] \neq 1$. Agora, se $[x_i, b] \neq 1$, então $y_i = x_i$. Com isso, $by_i = bx_i \neq x_i b = y_i b$. Logo para todo $i \in \{1, ..., r\}$, temos que $[y_i, b] \neq 1$. Temos então 3 casos:

<u>Caso 1:</u> $[x_i, b] \neq 1$ e $[x_j, b] \neq 1$.

Neste caso, $y_i y_j = x_i x_j \neq x_j x_i = y_j y_i$.

<u>Caso 2:</u> $[x_i, b] \neq 1$ e $[x_j, b] = 1$.

Neste caso, $y_i y_j = x_i a x_j = a x_i x_j$ e $y_j y_i = a x_j x_i$. Como $x_i x_j \neq x_j x_i$, então $y_i y_j \neq y_j y_i$.

<u>Caso 3:</u> $[x_i, b] = 1$ e $[x_j, b] = 1$.

Neste caso, $y_i y_j = a x_i a x_j = a x_i x_j a$ e $y_j y_i = a x_j a x_i = a x_j x_i a$. Como

$x_i x_j \neq x_j x_i$, então $y_i y_j \neq y_j y_i$. Logo $\{y_1, ..., y_r, b\}$ é um conjunto com $r+1$ elementos dois a dois não comutativos, o que contradiz a hipótese de X ter tamanho máximo.

(2) Dada uma r-cobertura $\{X_1, ..., X_r\}$ irredundante de G cuja interseção é $D = \bigcap_{i=1}^{r} X_i$, temos que $|G : D| \leq f(r)$. Daí, pelo item anterior, fazendo $X_i = C_G(x_i)$, para todo $i \in \{1, ..., r\}$ e $D = Z(G)$, temos que $|G : Z(G)| \leq f(r)$, como queríamos.

(3) Mostraremos que $f(3) = 4$. Este resultado foi provado por G. Scorza [30] e é conhecido como Teorema de Scorza. Para $f(4) = 9$, $f(5) = 16$ e $f(6) = 36$, consulte [21], [17] e [2], respectivamente. Suponhamos que um grupo finito G seja a união de três subgrupos próprios A, B e C e denotemos $N = A \cap B \cap C$. Mostraremos que $N \trianglelefteq G$ e que $|G : N| = 4$.

A ideia é mostrar que A, B e C devem ter índice 2 em G. Sem perca de generalidade, suponha que $|A| \geq |B| \geq |C|$. Como $1 \in N = A \cap B \cap C$ a união $A \cup B \cup C = G$ não é disjunta. Daí, $|G| = |A \cup B \cup C| < |A| + |B| + |C| \leq 3|A|$ e, em particular, $|G : A| < 3$.

Como A é subgrupo próprio de G, $|G : A| > 1$. Consequentemente, $|G : A| = 2$, o que implica que $A \trianglelefteq G$. Assim, AB e AC são subgrupos de G. Além disso $A \leq AB$ e $A \leq AC$. Daí,

$$2 = |G : A| = |G : AB||AB : A| \quad \text{e} \quad 2 = |G : A| = |G : AC||AC : A|.$$

Caso $|G : AB| = 2$, então $|AB : A| = 1$, o que implicaria que $AB = A$, ou seja, $B \subset A$. De modo análogo, se $|G : AC| = 2$, teríamos $C \subset A$. Nessas condições, $G = A \cup B \cup C = A$, o que não ocorre. Logo, $|G : AB| = 1 = |G : AC|$, o que implica que $AB = G = AC$. Note que

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|} \implies |G| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|} \implies \frac{|G|}{|A|} = \frac{|B|}{|A \cap B|} \implies 2 = \frac{|B|}{|A \cap B|}.$$

Do mesmo modo, podemos concluir que $2 = \dfrac{|C|}{|A \cap C|}$. Como $G = A \cap B \cap C$, podemos escrever

$$G = A \cap (B \setminus A) \cap (C \setminus A). \tag{2.6}$$

Ora,

$$B \setminus A = B \setminus (B \cap A) \implies |B \setminus A| = |B \setminus (B \cap A)| = |B| - |B \cap A| = |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Analogamente, $|C \setminus A| = \frac{|C|}{2}$. De (2.6),

$$\begin{aligned} |G| &\leq |A| + |B \setminus A| + |C \setminus A| \\ &\leq \frac{|G|}{2} + \frac{|B|}{2} + \frac{|B|}{2} \\ &\leq |A| + \frac{|B|}{2} + \frac{|C|}{2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Daí,

$$\frac{|G|}{2} \leq |B| \implies \frac{|G|}{|B|} \leq 2 \implies |G : B| \leq 2.$$

Como B é subgrupo próprio de G, temos que $|G : B| > 1$, logo $|G : B| = 2$. Em particular, $B \trianglelefteq G$. De (2.7),

$$|G| \leq |A| + \frac{|B|}{2} + \frac{|C|}{2} \leq \frac{|G|}{2} + \frac{|G|}{4} + \frac{|C|}{2} \implies \frac{|G|}{4} \leq \frac{|G|}{|2|} \leq 2 \implies |G : C| \leq 2.$$

Como C é subgrupo próprio de G, temos que $|G : C| > 1$, logo $|G : C| = 2$ e $C \trianglelefteq G$. Assim, $N = A \cap B \cap C \trianglelefteq G$. Mostraremos que $|G : N| = 4$. Ora,

$$|G : N| = |G : A \cap B \cap C| \leq |G : A||G : B \cap C| \leq |G : A||G : B||G : C| = 8.$$

Como vimos, $|B \setminus A| = \frac{|B|}{2} = \frac{|G|}{4} = \frac{|C|}{2} = |C - A|$. Daí,

$$|G| \leq |A| + |B \setminus A| + |C \setminus A| = \frac{|G|}{2} + \frac{|G|}{4} + \frac{|G|}{4} = |G|.$$

Logo, $|G| = |A| + |B \setminus A| + |C \setminus A|$. Por (2.6), segue que $(B \setminus A) \cap (C \setminus A) = \emptyset$. Logo, $B \cap C \subset A$. Segue então que $N = A \cap B \cap C = B \cap C$. Como $|G : B \cap C| = |G : B||B : B \cap C| = 2 \cdot 2 = 4$, então $|G : N| = 4$, ou seja, $f(3) = 4$.

(4) Note que $Z(G) \subset C_G(a) \cap C_G(b)$. Suponha então $C_G(a) \neq C_G(b)$. Se $z \in (C_G(a) \cap C_G(b)) \setminus Z(G)$, então $C_G(a) \subset C_G(z)$ e $C_G(b) \subset C_G(z)$, pois dado $y \in C_G(a)$, como $z \in C_G(a)$ e $C_G(a)$ é abeliano, temos que $zy = yz$, ou seja, $y \in C_G(z)$. De modo análogo, concluímos que $C_G(b) \subset C_G(z)$.

Desde que $z \notin Z(G)$, então $C_G(z)$ é abeliano. Assim, dado $y \in C_G(z)$, como $C_G(a) \subset C_G(z)$, temos que $ay = ya$, ou seja, $y \in C_G(a)$. Daí, $C_G(z) \subset C_G(a)$. Similarmente, $C_G(z) \subset C_G(b)$. Consequentemente $C_G(b) = C_G(a) = C_G(z)$, um absurdo, pois contradiz a hipótese. Logo $(C_G(a) \cap C_G(a)) \setminus Z(G) = \emptyset$, o que implica que $C_G(a) \cap C_G(b) = Z(G)$.

Assim, o conjunto dos centralizadores próprios de G, isto é, $\{C_G(x) : x \in G \setminus Z(G)\}$ constitui uma partição para G com núcleo $Z(G)$. Segue também que

$\left\{\dfrac{C_G(x)}{Z(G)} : x \in G \setminus Z(G)\right\}$ constituem uma partição de $\dfrac{G}{Z(G)}$, cujo núcleo é o subgrupo trivial.

$\square$

Nos resultados finais desta seção mostraremos que a quantidade máxima de elementos dois a dois não comutativos está intrinsecamente relacionada ao número de centralizadores de um grupo.

Lema 2.3. *Sejam G um grupo finito não abeliano e $\{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de G com tamanho máximo. Então*

(1) $r \geq 3$.

(2) $r + 1 \leq |\mathrm{Cent}(G)|$.

(3) *Se* $|\mathrm{Cent}(G)| = 4$, *então* $r = 3$.

(4) *Se* $|\mathrm{Cent}(G)| = 5$, *então* $r = 4$.

Demonstração. (1) Observe que como G não é abeliano existem $x, y \in G$ tais que $xy \neq yx$, isto é, o conjunto $\{x, y, xy\} \in G$ se constitui de elementos dois a dois não comutativos. Logo, $r \geq 3$.

(2) Como os elementos $x_1, ..., x_r$ são dois a dois não comutativos, os centralizadores $C_G(x_i)$, $1 \leq i \leq r$ são todos distintos entre si. Além disso, como $x_i \notin Z(G)$, para todo i, então tais centralizadores são próprios. Observe também que $G = C_G(1)$. Logo $r + 1 \leq |\mathrm{Cent}(G)|$.

(3) Temos pelo item (2) que $r + 1 \leq |\mathrm{Cent}(G)|$. Assim, se $|\mathrm{Cent}(G)| = 4$, então $r \leq 3$. Do item (1), $r \geq 3$. Logo, $r = 3$ como queríamos.

(4) Observe que se $|\mathrm{Cent}(G)| = 5$, temos pelo item (2) que $r \leq 4$. Mas $r \geq 3$ e se $r = 3$, $|\mathrm{Cent}(G)| = 4$ (veja Corolário 3.1), o que não ocorre. Logo, $r = 4$.

$\square$

Observação 2.2. *Como consequência dos itens* (1) *e* (2) *do Lema* 2.3, *segue que não existem grupos* 2 *ou* 3-*centralizados.*

No último resultado, vimos que $r + 1 \leq |\mathrm{Cent}(G)|$. A seguir, veremos algumas implicações derivadas de valores particulares para $|\mathrm{Cent}(G)|$.

Proposição 2.3. *Seja G um grupo finito e seja $X = \{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de G com tamanho máximo.*

(a) *Se* $|\text{Cent}(G)| < r + 4$ *então para cada elemento* $x \in G$, $C_G(x)$ *é abeliano se, e somente se,* $C_G(x) = C_G(x_i)$ *para algum* $i \in \{1, ..., r\}$.

(b) *Se* $|\text{Cent}(G)| = r+2$, *então existe um centralizador próprio não abeliano* $C_G(x)$ *que contém* $C_G(x_{i_1})$,$C_G(x_{i_2})$ *e* $C_G(x_{i_3})$ *para três distintos* i_1, i_2, $i_3 \in \{1, ..., r\}$.

(c) *Se* $|\text{Cent}(G)| = r+3$, *então existe um centralizador próprio não abeliano* $C_G(x)$ *que contém* $C_G(x_{i_1})$ *e* $C_G(x_{i_2})$ *para dois distintos* i_1, $i_2 \in \{1, ..., r\}$.

Demonstração. (a) Suponha, por contradição, que exista um índice i de tal modo que $K = C_G(x_i)$ não é abeliano. Então $|\text{Cent}(C_G(x_i))| \geq 4$ e pelo item (3) do Lema 2.2, $C_G(x_i)$ contém pelo menos três centralizadores próprios, a saber, $C_K(y_j)$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Note que $x_i \in C_K(y_j)$ pois $y_j \in C_G(x_i)$. Em particular, $x_i \in C_G(y_j)$. Assim, para todo $t \in \{1, .., r\} \setminus \{i\}$ vale que $C_G(x_t) \neq C_G(y_j)$. Observe também que para $t = i$, $C_G(x_i) \neq C_G(y_j)$ pois se $k \neq j$, $y_k \in C_G(x_i)$ mas $y_k \notin C_G(y_j)$. Daí, ao fazer a contagem, obtemos que G possui pelo menos $r + 4$ centralizadores o que contradiz a hipótese. Logo, $C_G(x_i)$ é abeliano para todo $i \in \{1, .., r\}$.

Por outro lado, suponha que $C_G(x)$ é abeliano. Desde que $\{x_1, ..., x_r\}$ é um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo, existe um índice j de modo que $x \in C_G(x_j)$. Pela parte anterior, $C_G(x_j)$ é abeliano, o que implica que $C_G(x_j) \subset C_G(x)$. Como $x_j \in C_G(x)$, temos $C_G(x) \subset C_G(x_j)$. Logo, $C_G(x_j) = C_G(x)$.

(b) Por hipótese, $|\text{Cent}(G)| = r + 2$. Logo, existe um centralizador próprio de G, $K := C_G(x)$ tal que $K \neq C_G(x_i)$, $i \in \{1, .., r\}$. Como $|\text{Cent}(G)| < r + 4$, temos pela primeira parte do item (a) que K não é abeliano. Logo $|\text{Cent}(K)| \geq 4$. Portanto, existem $y_i \in K$, $i \in \{1, 2, 3\}$ tais que $\{C_K(y_i), i \in \{1, 2, 3\}\}$ é um conjunto de centralizadores próprios em K. Assim, existem $z_i \in K$, $i \in \{1, 2, 3\}$ tais que $z_i \notin C_K(y_i)$. Consequentemente, $z_i \notin C_G(y_i)$ logo $\{C_G(y_i),\ i \in \{1, 2, 3\}\}$ é um conjunto de centralizadores próprios em G. Logo, existem j_1,j_2,$j_3 \in \{1, ..., r\}$ tais que

$$C_G(y_1) = C_G(x_{j_1}), \quad C_G(y_2) = C_G(x_{j_2}) \quad \text{e} \quad C_G(y_3) = C_G(x_{j_3}).$$

Tome $z \in C_G(x_{j_i}) = C_G(y_i)$. Como $y_i \in C_G(x)$, temos que $x \in C_G(y_i)$. Pela primeira parte do item (a) temos que $C_G(y_i)$ é abeliano, logo $zx = xz$. Daí, $z \in C_G(x) = K$.

(c) Pelo mesmo argumento do item anterior, usando que $|\text{Cent}(G)| = r + 3$, existem $x, \tilde{x} \in G$ tais que $H = C_G(x)$ e $M = C_G(\tilde{x})$ são centralizadores próprios não abelianos. Assim, existem $w_i \in H$, $i \in \{1, 2, 3\}$ tais que $\{C_G(w_i) : i \in \{1, 2, 3\}\}$ é um conjunto de centralizadores próprios de G. Como $|\text{Cent}(G)| = r + 3$, temos que existem j_1,$j_2 \in \{1, ..., r\}$ tais que

$$C_G(w_1) = C_G(x_{j_1}) \quad \text{e} \quad C_G(w_2) = C_G(x_{j_2}).$$

Note que poderia ocorrer $C_G(w_3) = M$. Pela mesma justificativa, acima $C_G(x_{j_1}) \subset H$ e $C_G(x_{j_2}) \subset H$.

□

Vimos o que ocorre quando $|\mathrm{Cent(G)}| = r+2$ e quando $|\mathrm{Cent}(G)| = r+3$. Sabemos que $r+1$ é uma estimativa inferior para a ordem do $\mathrm{Cent}(G)$. Grupos em que esta cota é atingida são particularmente especiais. De fato,

Lema 2.4. *Seja G um grupo finito não abeliano. Então G é um CA-grupo se, e somente se,* $|\mathrm{Cent}(G)| = \omega(G) + 1$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha G um CA-grupo e seja $X = \{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo. Considere $C_G(x)$ um centralizador próprio de G. Como X tem tamanho máximo, existe $i \in \{1, ..., r\}$ tal que $x \in C_G(x_i)$. Como $C_G(x_i)$ é próprio, é também abeliano. Logo, $C_G(x_i) \leq C_G(x)$. Do mesmo modo, $x_i \in C_G(x)$ e $C_G(x)$ é abeliano. Assim, $C_G(x) \leq C_G(x_i)$, ou seja, $C_G(x) = C_G(x_i)$. Com isso, concluímos que $\mathrm{Cent}(G) = \{G, C_G(x_i) : 1 \leq i \leq r\}$. Portanto, $|\mathrm{Cent}(G)| = r + 1$.

($\Longleftarrow$) Agora suponha que $|\mathrm{Cent}(G)| = \omega(G)+1 = r+1$ e seja $K = C_G(x)$ um centralizador próprio de G. Seja $X = \{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo. Assim $K = C_G(x_i)$ para algum $i \in \{1, ..., r\}$. Como $|\mathrm{Cent}(G)|$ é inferior a $r + 4$ temos pelo item (a) da Proposição 2.3 que K é abeliano. □

Complementando estas relações entre a quantidade de centralizadores de um grupo e o número máximo de elementos dois a dois não-comutativos, enunciamos o Teorema de Pyber-Zarrin ([26] e [37]) e trazemos posteriormente suas consequências.

Teorema 2.1 (Pyber-Zarrin)**.** *Sejam G um grupo e $\omega(G)$ o tamanho máximo de um conjunto de elementos dois a dois não-comutativos em G. Existe $c > 0$ tal que*

$$\omega(G) + 1 \leq |\mathrm{Cent}(G)| \leq |G : Z(G)| \leq c^{\omega(G)} \leq c^{|\mathrm{Cent}(G)|-1}.$$

Demonstração. Vamos dividir a prova em etapas

<u>**Etapa 1:**</u> $\omega(G) + 1 \leq |\mathrm{Cent}(G)|$ e $c^{\omega(G)} \leq c^{|\mathrm{Cent}(G)|-1}$.

No item (b) do Lema 2.3, provamos que $\omega(G) + 1 \leq |\mathrm{Cent(G)}|$ se G for um grupo finito. No entanto, a finitude do grupo não teve relevância na demonstração que fizemos, podendo assim ser estendida para grupos arbitrários.

Etapa 2: $|\mathrm{Cent}(G)| \leq |G : Z(G)|$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $Z(G) \neq 1$, pois caso contrário, $|G : Z(G)| = |G|$ e a desigualdade segue naturalmente. Sendo então $Z(G) \neq 1$, considere dois elementos $x, y \in G$ tais que $xZ(G) = yZ(G)$. Neste caso, existe $z \in Z(G)$ tal que $y = z^{-1}x$. Considere então $a \in C_G(x)$. Temos que

$$ay = az^{-1}x = z^{-1}ax = z^{-1}xa = ya.$$

Assim, $C_G(x) \subset C_G(y)$ e de modo análogo obtemos a outra inclusão. Com isso, provamos que elementos na mesma classe de equivalência possuem necessariamente o mesmo centralizador. Consequentemente, $|\mathrm{Cent}(G)| \leq |G : Z(G)|$.

Etapa 3: $|G : Z(G)| \leq c^{\omega(G)}$ para alguma constante $c > 0$.

Esta última etapa é o resultado principal do artigo [26]. $\square$

Observação 2.3. *Note que o Teorema* 2.1 *diz exatamente que as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) *G tem um número finito de centralizadores.*

(b) *G é um grupo central-por-finito.*

(c) *O número máximo de elementos dois a dois não comutativos em G é finito.*

Capítulo 3

Classificação de Grupos via Centralizadores de Elementos

Neste capítulo, traremos resultados de classificação a partir do número de centralizadores do grupo. Como comentado na Observação 2.2, não existem grupos 2 ou 3-centralizados. Além disso, um grupo é 1-centralizado se, e somente se, é abeliano. Assim, nosso estudo ocorrerá para grupos com 4 ou mais centralizadores e classificaremos os grupos n-centralizados, com $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Os grupos 4 e 5-centralizados foram classificados por Belcastro e Sherman em [15]. Em [9], Ashrafi classificou os grupos 6-centralizados e em [1], Abdollahi et al classificaram os grupos 7 e 8-centralizados.

Assim como foi feito em [1] no estudo dos grupos 7 e 8-centralizados, classificaremos os grupos 4,5 e 6-centralizados utilizando como ferramenta principal o Lema de Tomkinson (veja Lema 2.1), fornecendo uma prova original e mais simples para estes resultados de classificação.

3.1 Grupos 4-centralizados

Como mencionado, os grupos 4-centralizados foram classificados por Belcastro e Sherman no Teorema 2 de [15]. Em seu artigo, os autores utilizaram estimativas sobre a ordem do grupo para obter que se G é um grupo 4-centralizado, então o grupo quociente $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$. Aqui faremos de modo diferente e simplificado. Utilizaremos o Lema de Tomkinson, obtido em [34], e argumentos similares aos usados por Abdollahi et al em [1], para obter este mesmo resultado. Quanto à recíproca, faremos do mesmo modo que Belcastro e Sherman [15], em que usaremos a estrutura do grupo de Klein.

Teorema 3.1. *Seja G um grupo finito. Então, G é 4-centralizado se, e somente se,*

$\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2.$

Demonstração. Considere $X = \{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo e denote por $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, onde $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_r$.

($\Longrightarrow$) Como $|\mathrm{Cent}(G)| = 4$ temos que $r = 3$. Aplicando o Lema de Tomkinson, temos que $\alpha_2 \leq 2$. Sendo $k = 2$, temos que $\alpha_2 = \alpha_3 = 2$ e como $1 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ temos que $\alpha_2 = \alpha_1 = 2$. Note que

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq \alpha_1\alpha_2 \implies \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 4.$$

Em outras palavras, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_4$ ou $C_2 \times C_2$. Como G não é abeliano, temos que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$. Dessa forma, existem a, b e $c \in G \setminus Z(G)$ tais que $G = Z(G) \cup aZ(G) \cup bZ(G) \cup cZ(G)$. Daí, qualquer elemento não central de G é da forma az, bz ou cz, onde $z \in Z(G)$. Vamos mostrar que

$$\begin{cases} C_G(az) = Z(G) \cup aZ(G) := A, \\ C_G(bz) = Z(G) \cup bZ(G) := B, \\ C_G(cz) = Z(G) \cup cZ(G) := C. \end{cases}$$

É suficiente mostrar a primeira igualdade, pois as demais seguirão de forma análoga. Observe que dado $az_1 \in aZ(G)$, vale que $az_1az = a^2z_1z = a^2zz_1 = azaz_1$. Com isso, $aZ(G) \subset C_G(az)$, e portanto, $A \subset C_G(az)$. Por outro lado, como $|A| = |G|/2$, temos que

$$2 = |G : A| = |G : C_G(az)||C_G(az) : A|.$$

Como $|G : C_G(az)| \neq 1$, segue que $C_G(az) = A$. Logo, $|\mathrm{Cent}(G)| = 4$. □

Como consequência do Teorema 3.1, obteremos dois resultados que complementarão o Lema 2.3 e a Proposição 2.3. Nos Corolários 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 G será um grupo finito e $X = \{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho maximal.

Corolário 3.1. *G é 4-centralizado se, e somente se, $r = 3$.*

Demonstração. A condição necessária para um grupo finito ser 4-centralizado foi obtida no Lema 2.3. Vejamos que esta condição também é suficiente. Se $r = 3$, temos pelo que foi provado na Proposição 2.2 que $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \leq f(3) = 4$. Como G não é abeliano $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \notin \{1, 2, 3\}$. Assim, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 4$ e portanto, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$. Do Teorema 3.1, $|\text{Cent}(G)| = 4$. □

Corolário 3.2. *Suponha* $|\text{Cent(G)}| < r+4$. *Se* $C_G(x_i)$ *é um subgrupo maximal de* G *para algum* $i \in \{1, ..., r\}$, *então* $Z(G) = C_G(x_i) \cap C_G(x_j)$ *para todo* $j \in \{1, ..., r\} \setminus \{i\}$. *Em particular, se* $|G : C_G(x_1)| \leq |G : C_G(x_2)| \leq 2$, *então* $|\text{Cent}(G)| = 4$.

Demonstração. Seja $x \in C_G(x_i) \cap C_G(x_j)$. Pelo item (a) da Proposição 2.3, $C_G(x_i)$ é abeliano e então $C_G(x_i) \leq C_G(x)$. Como $x_j \in C_G(x)$ e $x_i x_j \neq x_j x_i$, $C_G(x_i) \neq C_G(x)$. Por hipótese, $C_G(x_i)$ é subgrupo maximal de G. Ora, $C_G(x_i) < C_G(x) \leq G$, logo pela maximalidade de $C_G(x_i)$, segue que $C_G(x) = G$, isto é, $x \in Z(G)$. Em outras palavras, $C_G(x_i) \cap C_G(x_j) = Z(G)$.

Note que se $|G : C_G(x_1)| \leq |G : C_G(x_2)| \leq 2$, então $|G : C_G(x_1)| = |G : C_G(x_2)| = 2$. Como $H = C_G(x_1)$ e $K = C_G(x_2)$, temos $G = HK$, logo

$$|G| = |HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} \implies |G| = \frac{\dfrac{|G|}{2}\dfrac{|G|}{2}}{|Z(G)|} \implies \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 4 \implies \frac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2.$$

Pelo Teorema 3.1, temos que $|\text{Cent}(G)| = 4$. □

3.2 Grupos 5-centralizados

Novamente, faremos uso do Lema de Tomkinson para mostrar que se G é um grupo 5-centralizado, então o grupo quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ é isomorfo à S_3 ou $C_3 \times C_3$, o que se mostra uma prova mais simplificada do que a feita por Belcastro e Sherman em [15]. Para a recíproca exibiremos a mesma prova destes autores onde se utiliza basicamente a estrutura de S_3 e de $C_3 \times C_3$.

Teorema 3.2. *Seja* G *um grupo finito. Então,* G *é* 5*-centralizado se, e somente se,* $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3$ *ou* S_3.

Demonstração. Seja $X = \{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo e considere $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$ e $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_r$.

$(\Longrightarrow)$ Como $|\text{Cent}(G)| = 5$ temos que $r = 4$. Aplicando o Lema de Tomkinson temos que $\alpha_2 \leq 3$. Do Corolário 3.2, se $\alpha_2 = 2$, G seria um grupo 4-centralizado, assim $\alpha_2 = 3$ e, portanto, $\alpha_i = 3$, para todo $i \geq 2$. Assim, temos dois casos a analisar:

<u>**Caso 1:**</u> $(\alpha_1 = 2)$. Neste caso

$$6 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq \alpha_1\alpha_2 = 6 \implies \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 6.$$

Logo, $\frac{G}{Z(G)} \cong S_3$ ou C_6. Como G não é abeliano temos que $\frac{G}{Z(G)} \cong S_3$.

<u>**Caso 2:**</u> $(\alpha_2 = 3)$. Neste caso

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 9.$$

Como $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \notin \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, só nos resta que $\frac{G}{Z(G)} \cong S_3$ ou $C_3 \times C_3$. Se $\frac{G}{Z(G)} \cong S_3$, implicaria que S_3 teria 4 subgrupos de índice 3, o que é um absurdo. Logo $\frac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3$.

$(\Longleftarrow)$ Suponha que $\frac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3$. Da estrutura de $C_3 \times C_3$ temos então que

$$G = Z(G) \cup aZ(G) \cup a^2Z(G) \cup bZ(G) \cup b^2Z(G) \cup cZ(G) \cup c^2Z(G) \cup dZ(G) \cup d^2Z(G),$$

onde $a,\ b,\ c,\ d \in \frac{G}{Z(G)}$. Daí, qualquer elemento não central de G é da forma xz onde $x \in \{a, a^2, b, b^2, c, c^2, d, d^2\}$. Vamos mostrar que

$$\begin{cases} C_G(az) = C_G(a^2z) = Z(G) \cup aZ(G) \cup a^2Z(G) := A, \\ C_G(bz) = C_G(b^2z) = Z(G) \cup bZ(G) \cup b^2Z(G) := B, \\ C_G(cz) = C_G(c^2z) = Z(G) \cup cZ(G) \cup c^2Z(G) := C, \\ C_G(dz) = C_G(d^2z) = Z(G) \cup dZ(G) \cup d^2Z(G) := D. \end{cases}$$

Dado $az_1 \in aZ$, temos

$$az_1a^2z = a^3z_1z = z_1z \quad \text{e} \quad a^2zaz_1 = za^3z_1 = zz_1 = z_1z.$$

Isso implica que $A \subset C_G(az) = C_G(a^2z)$. Por outro lado, $|A| = \frac{|G|}{3}$. Daí,

$$3 = |G : A| = |G : C_G(az)||C_G(az) : A|.$$

Logo, $A = C_G(az) = C_G(a^2z)$ e de forma análoga se prova a igualdade para os demais casos. Assim, $|\mathrm{Cent}(G)| = 5$.

Por fim, suponha $\dfrac{G}{Z(G)} \cong S_3$. Da estrutura de S_3 temos que

$$G = Z(G) \cup aZ(G) \cup a^2Z(G) \cup bZ(G) \cup baZ(G) \cup ba^2Z(G),$$

onde a^3, b^2, $(ab)^2 \in Z(G)$. Daí, qualquer elemento não central de G é da forma xz, onde $x \in \{a, a^2, b, ba, ba^2\}$. Procedendo de forma análoga às provas anteriores temos que

$$\begin{cases} C_G(az) = C_G(a^2z) = Z(G) \cup aZ(G) \cup a^2Z(G), \\ C_G(bz) = Z(G) \cup bZ(G), \\ C_G(baz) = Z(G) \cup baZ(G), \\ C_G(ba^2z) = Z(G) \cup ba^2Z(G). \end{cases}$$

Logo, $|\mathrm{Cent}(G)| = 5$. □

Como consequência do Teorema 3.2, obteremos dois resultados que complementarão o Lema 2.3 e a Proposição 2.3 que foram vistos no Capítulo 2.

Corolário 3.3. *G é um grupo 5-centralizado se, e somente, se $r = 4$.*

Demonstração. A condição necessária para um grupo finito ser 5-centralizado foi obtida Lema 2.3. Vejamos que esta condição também é suficiente. Se $r = 4$, da Proposição 2.2 $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \leq f(4) = 9$. Assuma que $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$ onde $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_r$. Nós afirmamos que $\dfrac{G}{Z(G)}$ não é um 2-grupo. Caso $\dfrac{G}{Z(G)}$ seja um 2-grupo então $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 4$ ou 8. Assim, dado $x \in G \setminus Z(G)$ temos que $\left|\dfrac{C_G(x)}{Z(G)}\right| = 2$ ou 4 pois $Z(G) \subsetneq C_G(x) \subsetneq G$. Note que $Z(G) \subset Z(C_G(x))$, logo

$$|C_G(x) : Z(G)| = |C_G(x) : Z(C_G(x))||Z(C_G(x)) : Z(G)|.$$

<u>Caso 1:</u> $|C_G(x) : Z(G)| = 2$. Neste caso temos 2 possibilidades: $|C_G(x) : Z(C_G(x))| = 2$ e $|Z(C_G(x)) : Z(G)| = 1$ ou $|C_G(x) : Z(C_G(x))| = 1$ e $|Z(C_G(x)) : Z(G)| = 2$ e em ambas concluímos que $C_G(x)$ é abeliano.

<u>Caso 2:</u> $|C_G(x) : Z(G)| = 4$. Neste caso, são 3 as possibilidades: $|C_G(x) : Z(C_G(x))| = 1$ e $|Z(C_G(x)) : Z(G)| = 4$ ou $|C_G(x) : Z(C_G(x))| = 2$ e $|Z(C_G(x)) : Z(G)| = 2$ ou $|C_G(x) : Z(C_G(x))| = 4$ e $|Z(C_G(x)) : Z(G)| = 1$. Note que nas duas primeiras também obtemos que $C_G(x)$ é abeliano. No caso restante, isto é, quando $|C_G(x) : Z(C_G(x))| = 4$ e $|Z(C_G(x)) : Z(G)| = 1$, vemos que $x \in Z(G)$, o que não ocorre. Logo, pelo item (4) da Proposição 2.2, temos que $Z(G) = C_G(x) \cap C_G(y)$ caso $C_G(x) \neq C_G(y)$. Já pelo item (1) da referida proposição temos que $G = C_G(x_1) \cup C_G(x_2) \cup C_G(x_3) \cup C_G(x_4)$. Fazendo $M = C_G(x_1)$, $H_1 = C_G(x_2)$, $H_2 = C_G(x_3)$ e $H_3 = C_G(x_4)$ no Lema de Tomkinson, obtemos que $\alpha_2 = \beta_1 \leq 3$. Ora se $\alpha_2 = 1$, então $C_G(x_2) = G$, o que é um absurdo e se $\alpha_2 = 3$ então $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 3\left|\dfrac{C_G(x_2)}{Z(G)}\right|$ o que não ocorre pois $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 4$ ou 8. Logo $\alpha_2 = 2$. Em particular, $\alpha_1 = 2$, pois $1 < \alpha_1 \leq \alpha_2 = 2$. Sejam então $H = C_G(x_1)$ e $K = C_G(x_2)$. Como $Z(G) = C_G(x_1) \cap C_G(x_2) = H \cap K$ e $|G : H| = 2 = |G : K|$, segue do Segundo Teorema do Isomorfismo que

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} \implies |HK| = \frac{\frac{|G|}{2}\frac{|G|}{2}}{Z(G)} = \frac{|G|^2}{4|Z(G)|}.$$

Temos que $2 = |G : H| = |G : HK||HK : H|$. Como $x_2 \neq H$ e $x_2 \in HK$, segue que $H \subsetneq HK$, e portanto $|G : HK| = 1$, ou seja, $G = HK$. Com isso,

$$|G| = \frac{|G|^2}{4|Z(G)|} \implies 4 = \left|\frac{G}{Z(G)}\right|.$$

Como G não é abeliano, segue que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$, o que é um absurdo, pois isso implicaria que $r = 3$. Também não podemos ter $\dfrac{G}{Z(G)}$ com ordem $1, 2, 3, 5$ e 7, pois, caso contrário, G seria abeliano. Logo $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 6$ ou 9. Note que se $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 6$ então $\dfrac{G}{Z(G)} \cong S_3$ e se $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 9$ então $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3$. Pelo Teorema 3.2, segue que $|\mathrm{Cent}(G)| = 5$. □

Corolário 3.4. *Suponha* $|\mathrm{Cent(G)}| < r + 4$. *Se* $|G : C_G(x_1)| \leq |G : C_G(x_2)| \leq 3$, *então* $|\mathrm{Cent}(G)| = 5$.

Demonstração. Se $|G : C_G(x_1)| \leq |G : C_G(x_2)| = 3$, então $C_G(x_2)$ é maximal e, portanto, $C_G(x_1) \cap C_G(x_2) = Z(G)$. Se $|G : C_G(x_1)| = 2$, definindo $H = C_G(x_1)$ e $K = C_G(x_2)$, vale que $2 = |G : H| = |G : HK||HK : H|$, logo $G = HK$, daí

$$|G| = |HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{\frac{|G|}{2}\frac{|G|}{3}}{|Z(G)|} \implies \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 6 \implies \frac{G}{Z(G)} \cong S_3.$$

Analogamente, se $|G : C_G(x_1)| = 3$, obtemos

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 9 \implies \frac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3.$$

Pelo Teorema 3.2, $|\mathrm{Cent}(G)| = 5$. $\square$

3.3 Grupos 6-centralizados

Os grupos 6-centralizados foram classificados por Ashrafi em [9]. Diferentemente dos grupos 4 e 5-centralizados, não obteremos condições necessárias e suficientes para um grupo ser 6-centralizado. Ressaltamos novamente que faremos uso do Lema de Tomkinson em vez de utilizar as técnicas que o referido autor recorreu. Antes, porém, enunciaremos um resultado que será útil em um dos passos da demonstração do teorema principal desta seção.

Lema 3.1. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G de índice finito. Então, $|G : \mathrm{core}_G(H)| \mid |G : H|!$.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [31], p. 262. $\square$

Teorema 3.3. *Seja G um grupo 6-centralizado finito. Então*

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_2^3, C_2^4, D_8 \text{ ou } A_4.$$

Demonstração. Considere $X = \{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo e seja $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$ onde $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_r$.

Como $|\mathrm{Cent}(G)| = 6$ temos que $r = 5$. Pelo Lema de Tomkinson, temos que $\alpha_2 \leq 4$. Dos Corolários 3.2 e 3.4, segue que $\alpha_2 = 4$ e, portanto, $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_5 = 4$. Logo $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 4\alpha_1$. Temos os seguintes casos a analisar:

<u>**Caso 1:**</u> ($\alpha_1 = 2$). Neste caso $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 8$ e portanto $\frac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$, $C_2 \times C_4$, Q_8 ou D_8. Como $s(C_2 \times C_4, 2^2) = 1$ e $C_2 \times C_4$ não possui elemento de ordem 8, temos pelo critério de Baer (veja Observação 1.3) que este grupo não é grupo capaz. Em relação à Q_8, temos que ele só possui 4 subgrupos não triviais. Por outro lado, $\left\{\frac{C_G(x_i)}{Z(G)} : i \in \{1, ..., 5\}\right\}$ deveria formar uma partição de $\frac{G}{Z(G)}$ e, portanto, os subgrupos de Q_8 não são suficientes para formar tal partição. Assim, $\frac{G}{Z(G)}$ não pode ser isomorfo a Q_8 e, portanto, $\frac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$ ou D_8.

Caso 2: ($\alpha_1 = 3$). Neste caso

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 12 \quad \text{e} \quad \text{mmc}(3,4) = 12 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \implies \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 12.$$

Logo, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{12}$ ou A_4. Pela Proposição 2.1 se $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{12}$, teríamos que $|\text{Cent}(G)| = 8$, o que não ocorre. Logo $\dfrac{G}{Z(G)} \cong A_4$.

Caso 3: ($\alpha_1 = 4$). Neste caso

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 16 \implies \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \in \{8, 12, 16\}.$$

Analisaremos então alguns sub-casos:

Sub-caso 1: $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 8$. Neste caso, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$ ou D_8. Note que C_2^3 não pode ser coberto por 5 grupos de ordem 2, pois ele possui 7 elementos com essa ordem. Já em relação a D_8 uma coleção de 5 grupos de ordem 2 não seria uma cobertura, pois não conteria o elemento de ordem 4.

Sub-caso 2: $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 12$. Neste caso, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong A_4$ e deveríamos ter uma partição de $\dfrac{G}{Z(G)}$ com 5 grupos de ordem 3, mas A_4 só possui 4 subgrupos com essa ordem.

Sub-caso 3: $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 16$. Caso $C_G(x_i)$, $i \in \{1, ..., 5\}$, não fossem normais em G, então $\text{core}_G(C_G(x_i)) = Z(G)$. Daí, pelo Lema 3.1, $16 = |G : Z(G)| = |G : \text{core}_G(C_G(x_i))| \mid 4! = 24$, o que é um absurdo. Consequentemente, $C_G(x_i) \trianglelefteq G$, $i \in \{1, ..., 5\}$. Assim,

$$\frac{G}{C_G(x_i)} \cong C_2 \times C_2 \text{ ou } C_4 \quad \text{e} \quad \frac{C_G(x_i)}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2 \text{ ou } C_4.$$

Portanto,

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_2^4 \, , \, C_2 \times C_2 \times C_4 \, , \, C_4 \times C_4.$$

Note que $s(C_2 \times C_2 \times C_4, 2^2) = 1$ (veja Observação 1.3), mas $C_2 \times C_2 \times C_4$ não tem elemento de ordem 8 e, portanto, não é grupo capaz. Quanto à $C_4 \times C_4$ observamos que é impossível cobri-lo com apenas 5 subgrupos de ordem 4. Logo, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^4$. $\square$

3.4 Grupos 7-centralizados

Nesta seção daremos condições necessárias e suficientes para um grupo finito ser 7-centralizado. Mais precisamente, mostraremos que G é 7-centralizado se, e somente se, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_5 \times C_5$, D_{10} ou $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3 \rangle$. Este resultado, bem como a classificação para os grupos 8-centralizados que será vista na próxima seção, foram obtidos por Abdollahi, Jafarian Amiri e Hassanabadi em [1] e a principal ferramenta utilizada foi o Lema de Tomkinson. Antes de exibirmos este resultado, traremos um lema de preparação, onde veremos que um grupo 7-centralizado finito não pode ser um 2-grupo, o que nos ajudará a eliminar alguns casos no decorrer da demonstração do teorema.

Lema 3.2. *Seja G um grupo 7-centralizado finito. Então $\dfrac{G}{Z(G)}$ não é um 2-grupo.*

Demonstração. Suponha por contradição que $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um 2-grupo. Seja $X = \{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo. Como já vimos, $\{C_G(x_i) : i \in \{1, ..., r\}\}$ é uma cobertura irredundante para G com $\bigcap_{i=1}^r C_G(x_i) = Z(G)$ e seja $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, de modo que $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_r$. Como $|\text{Cent}(G)| = 7$ temos pelo Lema 2.3 e pelos Corolários 3.1 e 3.3 que $r = 5$ ou $r = 6$. Analisaremos por casos:

<u>**Caso 1:**</u> $(r = 5)$. Fazendo $M = C_G(x_1)$ e $H_i = C_G(x_{i+1})$, para $i \in \{1, ..., 4\}$, temos pelo Lema de Tomkinson que $\alpha_2 = \beta_1 \leq 4$. Se $\alpha_2 = 2$, então $C_G(x_2)$ é maximal. Além disso, $\alpha_1 \leq \alpha_2 = 2$ e, portanto, pelo Corolário 3.2, temos que $|\text{Cent}(G)| = 4$, o que é um absurdo. Se $\alpha_2 = 3$, então $C_G(x_2)$ é maximal e também $\alpha_1 \leq \alpha_2 = 3$. Novamente, pelo Corolário 3.4 temos que $|\text{Cent}(G)| = 5$, o que também é uma contradição. Logo, $\alpha_2 = 4$. Daí, pelo Lema 2.1 $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 4$. Como $|\text{Cent}(G)| = 7 = r + 2$, temos, pelo item (b) da Proposição 2.3, que existe um centralizador próprio e não abeliano $C_G(x) \subset G$ que contém pelo menos três centralizadores $C_G(x_i)$, com $i \in \{2, 3, 4\}$. Daí, $G = C_G(x_1) \cup C_G(x) \cup C_G(x_5)$. Note que

$$4 = |G : C_G(x_2)| = |G : C_G(x)| \cdot |C_G(x) : C_G(x_2)|.$$

Como $C_G(x)$ é próprio e não abeliano, $|G : C_G(x)| = 2$. Fazendo $M = C_G(x_1)$, $H_1 = C_G(x)$ e $H_2 = C_G(x_5)$ no Lema de Tomkinson, temos $2 = \beta_1 \leq k = 2$, logo $\beta_2 = \alpha_5 = 2$, o que contradiz $\alpha_5 = 4$.

<u>**Caso 2:**</u> $(r = 6)$. Como já vimos, $\left\{\dfrac{C_G(x_i)}{Z(G)} : i \in \{1, ..., 6\}\right\}$ é uma partição de $\dfrac{G}{Z(G)}$ com núcleo trivial. Seja $\left|\dfrac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right| = n_i$, $i \in \{1, ..., 6\}$. Por suposição, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um 2-grupo. Como $\dfrac{C_G(x_i)}{Z(G)} \leq \dfrac{G}{Z(G)}$ o Teorema de Lagrange garante que n_i é par para todo

$i \in \{1, .., 6\}$. Por outro lado, como o núcleo da partição é trivial temos que

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = n_1 + n_2 + \cdots + n_6 - 6 + 1 = 2k + 1,$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo, pois $\left|\frac{G}{Z(G)}\right|$ é par. Logo, $\frac{G}{Z(G)}$ não é um 2-grupo. □

Observe que provamos também que se $|\text{Cent}(G)| = 7$, então $r = 6$, pois obtivemos uma contradição no caso $r = 5$ para qualquer grupo 7-centralizado.

Faremos agora o principal teorema desta seção. Para comodidade do leitor, enunciaremos alguns resultados que usaremos no decorrer da demonstração.

Lema 3.3. *Seja G um grupo finito. Se $\frac{G}{Z(G)} \cong A_4$, então $|\text{Cent}(G)| = 6$ ou 8.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [9], p. 145. □

Lema 3.4. *Sejam p um primo e G um grupo finito. Se $\frac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$, então $|\text{Cent}(G)| = p + 2$. No caso em que p é um primo ímpar e $\frac{G}{Z(G)} \cong D_p$, então $|\text{Cent}(G)| = p + 2$.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [15], p. 371. □

Lema 3.5. *Seja G um grupo finito tal que $\frac{G}{Z(G)} \cong \langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$. Nessas condições, G é um grupo 7-centralizado.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [12], p. 407. □

Teorema 3.4. *Seja G um grupo finito. Então G é um grupo 7-centralizado se, e somente se, $\frac{G}{Z(G)} \cong C_5 \times C_5$, D_{10} ou $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que G é um grupo 7-centralizado e seja $\{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo. Defina $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$ onde $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_r$. Provamos que nestas condições $\{C_G(x_i) : i \in \{1, ..., r\}\}$ é uma r-cobertura irredundante para G com interseção $Z(G)$. Pelo Lema 2.3 e pelos Corolários 3.1 e 3.3 vale que $r = 5$ ou $r = 6$. Na demonstração do Lema 3.2 já provamos que em um grupo 7-centralizado, r só pode ser igual a 6. Como $|\text{Cent}(G)| = 7$ e, sendo, $r = 6$ temos que G é um CA-grupo pelo Lema 2.4. Fazendo $M = C_G(x_1)$ e $H_i = C_G(x_{i+1})$ para $i \in \{1, ..., 5\}$ no Lema 2.1 temos que $\alpha_2 \leq 5$. Como $|\text{Cent}(G)| = 7$, segue dos Corolários 3.2 e 3.4 que $\alpha_2 \neq 2$ e $\alpha_2 \neq 3$. Se $\alpha_2 = 4$, chamando $H = C_G(x_1)$ e $K = C_G(x_2)$, temos que $H \cap K = Z(G)$, logo pelo Segundo Teorema do Isomorfismo

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{\frac{|G|}{\alpha_1}\frac{|G|}{4}}{|Z(G)|} \implies \frac{|HK|}{|G|} = \frac{\frac{|G|}{4\alpha_1}}{|Z(G)|} \implies 4\alpha_1\frac{|HK|}{|G|} = \left|\frac{G}{Z(G)}\right|.$$

Como $|HK| \leq |G|$ e $\alpha_1 \leq \alpha_2 = 4$ temos

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 4\alpha_1 \leq 16. \tag{3.1}$$

Ora, pelo Lema 3.2 sabemos que $\frac{G}{Z(G)}$ não é um 2-grupo, logo $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 12$ e, portanto, $\frac{G}{Z(G)} \cong D_{12}$ ou A_4, pelo Lema 1.3. Entretanto, a Proposição 2.1 mostra que se $\frac{G}{Z(G)} \cong D_{12}$, então $|\mathrm{Cent}(G)| = 8$ e pelo Lema 3.3, se $\frac{G}{Z(G)} \cong A_4$ temos que $|\mathrm{Cent}(G)| = 6$ ou 8. Portanto, $\alpha_2 = 5$. Logo, temos 4 casos a considerar:

Caso 1: ($\alpha_1 = 2$) Neste caso

$$2 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \quad \text{e} \quad 5 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \implies 10 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right|.$$

De forma análoga ao feito em (3.1) temos

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 5\alpha_1 = 10.$$

Logo, $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 10$ e portanto $\frac{G}{Z(G)} \cong D_{10}$.

Caso 2: ($\alpha_1 = 3$) Neste caso

$$3 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \quad \text{e} \quad 5 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \implies 15 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right|.$$

Novamente, procedendo como em (3.1), obtemos que

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 5\alpha_1 = 15.$$

Daí, $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 15$ e portanto $\frac{G}{Z(G)} \cong C_{15}$, o que não ocorre, pois G não é abeliano.

Caso 3: ($\alpha_1 = 4$) Neste caso

$$4 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \quad \text{e} \quad 5 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \implies 20 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right|.$$

Novamente, assim como feito em (3.1), temos que

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 5\alpha_1 = 20.$$

Consequentemente, $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 20$. Utilizando o Lema 1.3, obtemos que $\frac{G}{Z(G)} \cong D_{20}$ ou $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$. Mas se $\frac{G}{Z(G)} \cong D_{20}$, então G é um grupo 12-centralizado (veja Proposição 2.1), o que contraria a hipótese.

Caso 4: ($\alpha_1 = 5$) Neste caso pelo Lema de Tomkinson, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_6 = 5$. Daí, se $n_i = \left|\frac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right|$ temos que

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = \left|\frac{G}{C_G(x_i)}\right| \cdot \left|\frac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right| = 5n_i \implies n_1 = \cdots = n_6.$$

Por outro lado, como $\left\{\frac{C_G(x_i)}{Z(G)} : 1 \leq i \leq 6\right\}$ forma uma partição de $\frac{G}{Z(G)}$ com núcleo trivial então

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = n_1 + \cdots + n_6 - 6 + 1 \implies 5n_1 = 6n_1 - 5 \implies n_1 = 5.$$

Logo,

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 5 \cdot 5 = 25 \implies \frac{G}{Z(G)} \cong C_5 \times C_5.$$

($\Longleftarrow$) Para a recíproca, temos que se $\frac{G}{Z(G)} \cong C_5 \times C_5$ ou D_{10}, então G é um 7-centralizado pelo Lema 3.4. Por fim, se $\frac{G}{Z(G)} \cong \langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$, então G é um 7-centralizado pelo Lema 3.5. $\square$

Para finalizar esta seção, deixamos como curiosidade que um grupo G é 7-centralizado primitivo se, e somente se, $\frac{G}{Z(G)} \cong D_{10}$ ou $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$. Este é o principal resultado do artigo de Ashrafi e Taeri em [12].

3.5 Grupos 8-centralizados

Os grupos 8-centralizados também foram classificados por Abdollahi, Jafarian Amiri e Hassanabadi em [1]. Assim como ocorreu no caso dos grupos 6-centralizados, só obteremos condições necessárias para um grupo finito ser 8-centralizado, mas em alguns casos, conseguiremos condições suficientes.

Daremos início a esta seção obtendo uma importante condição necessária para um grupo ser 8-centralizado: que neste caso, o grupo quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ necessita ser um $\{2,3\}$-grupo. Antes disso, enunciaremos um resultado que será utilizado em um dos passos da prova.

Definição 3.1. *Sejam G um grupo, $x \in G$ e p um primo. Dizemos que x é um p-elemento de G caso a ordem de x seja uma potência de p.*

Lema 3.6. *Suponha que um grupo finito G seja escrito como a união irredundante de n subgrupos cuja interseção seja D e seja $x \in G$ um p-elemento de G. Se $p \geq n$, então $x \in D$.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [17], p. 534-535. □

Lema 3.7. *Seja G um grupo 8-centralizado finito. Então $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um $\{2,3\}$-grupo.*

Demonstração. Seja $\{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo. Então $\{C_G(x_i) : i \in \{1, ..., r\}\}$ é uma r-cobertura irredundante, cuja interseção é o $Z(G)$. Logo $r = 5, 6$ ou 7.

Seja x um p-elemento de G com $p > 5$. Assim $p \geq 7 \geq r$. Pelo Lema 3.6, segue que $x \in Z(G)$. Pela arbitrariedade de p, segue que $Z(G)$ contém todos os elementos de G cuja ordem seja da forma $p^k, p > 5$, assim $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um $\{2,3,5\}$-grupo.

Seja $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$, onde $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_r$. Pelo Lema de Tomkinson, temos $\alpha_2 \leq 6$. Se $r \leq 6$, então, pelo item (3) da Proposição 2.2, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \leq f(6) = 36$. Se $r = 7$, então pelo Lema 2.4 e pelo item (4) da Proposição 2.2, temos que $Z(G) = C_G(x_1) \cap C_G(x_2)$. Assim,

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq \alpha_1\alpha_2 \leq \alpha_2^2 \leq 36.$$

Se 5 divide $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right|$ então $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \in \{10, 15, 20, 25, 30, 35\}$. Ora, 15 e 35 são descartados, pois qualquer grupo com essa ordem é cíclico. Se $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 10$ ou 25, o Teorema 3.4

mostra que G é um 7-centralizado. Se $\left|\frac{G}{Z(G)}\right|$ é 20 ou 30, então o Lema 1.3 garante que $\frac{G}{Z(G)}$ é isomorfo a $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$, D_{20} ou D_{30}. Logo, pela Proposição 2.1 e pelo Teorema 3.4, temos $|\mathrm{Cent}(G)| = 7, 12$ ou 17, assim 5 não divide $\left|\frac{G}{Z(G)}\right|$ e segue o resultado. $\square$

Mediante o resultado anterior, veremos o que acontece no caso particular em que $\frac{G}{Z(G)}$ é um 2-grupo.

Lema 3.8. *Seja G um grupo 8-centralizado finito. Se $\frac{G}{Z(G)}$ é um 2-grupo, então necessariamente $\frac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$.*

Demonstração. Suponha que $\{x_1, ..., x_r\}$ é um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo. Assuma que $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$ onde $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_r$. Então $\{C_G(x_i) : i \in \{1, ..., r\}\}$ é uma cobertura irredundante, cuja interseção é $Z(G)$.

Se $r = 5$, temos que $\alpha_2 \leq 4$. Pelos Corolários 3.2 e 3.4, temos que $\alpha_2 \neq 2$ e $\alpha_2 \neq 3$, logo $\alpha_2 = 4$ e pelo Lema de Tomkinson $\alpha_i = 4$, para todo $i \geq 2$. Pelo item (c) da Proposição 2.3, como $8 = |\mathrm{Cent}(G)| = r + 3$ então existe $K = C_G(x)$ centralizador próprio não abeliano tal que $C_G(x_1) \subset K$ e $C_G(x_2) \subset K$. Desta forma, podemos escrever $G = C_G(x_3) \cup C_G(x_4) \cup C_G(x_5) \cup K$, o que faz com que $\alpha_i \leq 3$, para algum $i \in \{3, 4, 5\}$, o que é uma contradição.

Se $r = 6$, pelo Lema de Tomkinson temos que $\alpha_2 \leq 5$. Caso $\alpha_2 \in \{2, 3, 5\}$ temos que $C_G(x_2)$ é maximal. Em particular, se $\alpha_2 = 2$ ou $\alpha_2 = 3$, obtemos uma contradição usando os Corolários 3.2 e 3.4. Se $\alpha_2 = 5$, então pela Proposição 2.3, $Z(G) = C_G(x_1) \cap C_G(x_2)$, daí pelo Segundo Teorema do Isomorfismo

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 5\alpha_1,$$

o que contradiz o Lema 3.7. Assim, $\alpha_2 = 4$. Pelo item (b) da Proposição 2.3, existe $K = C_G(x)$ centralizador próprio não abeliano que contém ao menos três centralizadores, a saber $C_G(x_1)$, $C_G(x_2)$, $C_G(x_3)$. Com isso, $G = C_G(x_4) \cup C_G(x_5) \cup C_G(x_6) \cup C_G(x)$, donde segue que $\alpha_i \leq 3$, para algum $i \in \{4, 5, 6\}$, o que é uma contradição.

Se $r = 7$, pelo Lema 2.4 temos que $C_G(x_i)$ é abeliano para todo $i \in \{1, ..., 7\}$ e pelo item (4) da Proposição 2.2 segue que $Z(G) = C_G(x_i) \cap C_G(x_j)$, para $i \neq j$. Como $\frac{G}{Z(G)}$

é um 2-grupo não podemos ter $\alpha_2 = 5$ ou $\alpha_2 = 6$. Assim, $\alpha_2 = 4$ e $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \leq \alpha_1\alpha_2 \leq 16$. Com isso, temos 2 casos:

Caso 1: Se $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 8$, então $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$, pois os demais grupos de ordem 8 ou não possuem uma quantidade suficiente de subgrupos próprios para formar uma 7-cobertura ou, quando possuem, esta não seria uma cobertura irredundante.

Caso 2: Se $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 16$, então $\alpha_1 = 4$. Se $C_G(x_1)$ ou $C_G(x_2)$ não fossem normais em G, então $\mathrm{core}_G(C_G(x_i)) = Z(G)$, para $i \in \{1,2\}$. Como $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$, então pelo Lema 3.1, $|G : Z(G)| = |G : \mathrm{core}_G(C_G(x_i))| \mid 4! = 24$, o que é uma contradição. Consequentemente, $C_G(x_i) \trianglelefteq G, i \in \{1,2\}$. Assim,

$$\frac{G}{C_G(x_i)} \cong C_2 \times C_2 \text{ ou } C_4 \quad \text{e} \quad \frac{C_G(x_i)}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2 \text{ ou } C_4.$$

Portanto, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^4$ ou $C_4 \times C_4$ ou $C_2 \times C_2 \times C_4$.

Note que $s(C_2 \times C_2 \times C_4, 2^2) = 1$, mas $C_2 \times C_2 \times C_4$ não tem elemento de ordem 8, logo $C_2 \times C_2 \times C_4$ não é um grupo capaz pela Observação 1.3. Além disso, $C_4 \times C_4$ não possui uma 7-cobertura irredundante. De fato, seja $n_i = \left|\dfrac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right|$, temos então

$$n_1 = n_2 = 4 \text{ e } 16 = \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = \sum_{i=1}^{7} n_i - 7 + 1 \implies \sum_{i=1}^{7} n_i = 22 \implies \sum_{i=3}^{7} n_i = 14.$$

Assim, como $n_i \mid 16$, para todo i e $2 \leq n_i \leq 4$. Segue que $n_3 = n_4 = 4$ e $n_5 = n_6 = n_7 = 2$. Desta forma $C_4 \times C_4$ teria mais de 3 elementos de ordem 2, o que não ocorre.

Agora mostraremos que $\dfrac{G}{Z(G)} \ncong C_2^4$. Sejam

$$B_i = \frac{C_G(x_i)}{Z(G)} \text{ para } 1 \leq i \leq 7 \quad \text{e} \quad P = \left\{\frac{C_G(x_i)}{Z(G)} : i \in \{1, ..., 7\}\right\}.$$

Sabemos que B_1 e B_2 tem ordem 4. Assim, podemos escrever $B_1 = \{\overline{1}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}\}$ e $B_2 = \{\overline{1}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{cd}\}$ para alguns $a, b, c, d \in G \setminus Z(G)$. Além disso, pelo mesmo raciocínio anterior $|B_3| = |B_4| = 4$ e $|B_5| = |B_6| = |B_7| = 2$. Assim, P tem que ser uma das seguintes partições

(1) $\{\{B_1, B_2, \{\overline{1}, \overline{bc}, \overline{ad}, \overline{abcd}\}, \{\overline{1}, \overline{bd}, \overline{abc}, \overline{acd}\}, \{\overline{1}, \overline{ac}\}, \{\overline{1}, \overline{abd}\}, \{\overline{1}, \overline{bcd}\}\},$

(2) $\{\{B_1, B_2, \{\overline{1}, \overline{bc}, \overline{abd}, \overline{acd}\}, \{\overline{1}, \overline{ad}, \overline{abc}, \overline{bcd}\}, \{\overline{1}, \overline{ac}\}, \{\overline{1}, \overline{abcd}\}, \{\overline{1}, \overline{bd}\}\}$,

(3) $\{\{B_1, B_2, \{\overline{1}, \overline{ac}, \overline{bd}, \overline{abcd}\}, \{\overline{1}, \overline{ad}, \overline{abc}, \overline{bcd}\}, \{\overline{1}, \overline{bc}\}, \{\overline{1}, \overline{abd}\}, \{\overline{1}, \overline{acd}\}\}$,

(4) $\{\{B_1, B_2, \{\overline{1}, \overline{ac}, \overline{bd}, \overline{abcd}\}, \{\overline{1}, \overline{bc}, \overline{abd}, \overline{acd}\}, \{\overline{1}, \overline{ad}\}, \{\overline{1}, \overline{bcd}\}, \{\overline{1}, \overline{abc}\}\}$,

(5) $\{\{B_1, B_2, \{\overline{1}, \overline{ac}, \overline{abd}, \overline{bcd}\}, \{\overline{1}, \overline{bd}, \overline{abc}, \overline{acd}\}, \{\overline{1}, \overline{bc}\}, \{\overline{1}, \overline{ad}\}, \{\overline{abcd}\}\}$,

(6) $\{\{B_1, B_2, \{\overline{1}, \overline{ac}, \overline{abd}, \overline{bcd}\}, \{\overline{1}, \overline{bc}, \overline{ad}, \overline{abcd}\}, \{\overline{1}, \overline{bd}\}, \{\overline{1}, \overline{acd}\}, \{\overline{1}, \overline{abc}\}\}$.

Note que deveríamos ter $[x, y] = 1$ quando $\overline{x}$,$\overline{y} \in A_i$ e $[x, y] \neq 1$ quando $\overline{x} \in A_i \setminus \{1\}$ e $\overline{y} \in A_j \setminus \{1\}$ e $i \neq j$. Mas $[bc, ad] = 1$ e

$$[bc, ad] = [b, ad]^c[c, ad] = [b, ad][c, d][c, a]^d = [b, ad][c, a] = ([b, d][b, a]^d)[c, a] = [b, d][c, a].$$

$$\therefore [b, d][c, a] = 1.$$

Além disso, $[bd, abc] = 1$, mas

$$\begin{aligned} [bd, abc] &= [b, abc]^d[d, abc] = [b, abc][d, c][d, ab]^c = [b, abc][d, ab] = ([b, bc][b, a]^{bc}[d, ab]) \\ &= [b, bc][d, ab] = [b, c][b, b]^c[d, b][d, a]^b = [b, c][d, b][d, a] = [b, c][d, a][d, b]. \end{aligned}$$

$$\therefore [b, c][d, a][d, b] = 1.$$

Note que

$$\begin{aligned} [abd, bcd] &= [ab, bcd]^d[d, bcd] = [ab, bcd][d, d][d, bc] = [ab, bcd][d, bc] = [ab, bcd]([d, c][d, b]^c \\ &= [ab, bcd][d, b] = [a, bcd]^b[b, bcd][d, b] = [a, bc][b, cd][b, b]^{cd}[d, b] \\ &= [a, cd][a, b]^{cd}[b, cd][d, b] = [a, d][a, c]^d[b, d][b, c]^d[d, b] = [a, d][a, c][b, d][b, c][d, b] \\ &= [b, d][c, a][b, c][d, a][d, b] = 1. \end{aligned}$$

Observe que no decorrer das contas utilizamos dois fatos importantes para facilitar os cálculos: Primeiro que $[x, y] \in Z(G)$, para todo $x, y \in G$, pois $\dfrac{G}{Z(G)}$ é abeliano e portanto $G' \leq Z(G)$ e o segundo, que $[x, y]^2 = 1$, para todo $x, y \in G$. $\square$

O próximo resultado servirá apenas para descartar alguns casos na prova do resultado principal desta seção.

Lema 3.9. *Seja G um grupo 8-centralizado finito. Então* $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \neq 24, 36.$

Demonstração. Seja $\{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo. Então $\{C_G(x_i) : i \in \{1, ..., r\}\}$ é uma r-cobertura irredundante com interseção $Z(G)$. Assuma que $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, onde $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_r$.

Suponha por contradição que $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 36$. Como G é um 8-centralizado temos que $r \leq 7$ e pela Proposição 2.2 devemos ter $r \geq 6$. Assim, $r = 6$ ou $r = 7$. Suponha $r = 6$. Como $\alpha_2 \mid \left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 36$, temos pelo Lema de Tomkinson que $\alpha_2 \leq 4$. Pelos Corolários 3.2 e 3.4 vale que $\alpha_2 \neq 2$ e $\alpha_2 \neq 3$. Portanto $\alpha_2 = 4$. Observe que se $\alpha_1 \leq 3$, então

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq \alpha_1\alpha_2 \leq 12,$$

o que não ocorre. Logo, $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$ e $\alpha_i \geq 4$, para todo i. Por outro lado, como $8 = |\mathrm{Cent}(G)| = r+2$ temos pelo item (b) da Proposição 2.3 que G possui um centralizador próprio não abeliano que contém três centralizadores $C_G(x_i)$, com $i \in \{1, ..., 6\}$. Assim, $G = C_G(x) \cup (\cup_{i\in T} C_G(x_i))$, para algum $T \subset \{1, ..., 6\}$ com $|T| = 3$. Assim o Lema 2.1 mostra que algum α_i deve ser menor que 4, o que é um absurdo. Consequentemente, $r = 7$ e $\{C_G(x_i) : i \in \{1, ..., 7\}\}$ forma uma partição de G cujo núcleo é $Z(G)$, sendo assim $Z(G) = C_G(x_i) \cap C_G(x_j)$, $i \neq j$. Novamente, pelo Lema de Tomkinson, temos $\alpha_2 \leq 6$. Ora, como $5 \nmid 36$ e pelos Corolários 3.2 e 3.4 não podemos ter $\alpha_2 \in \{2, 3, 5\}$.

Se $\alpha_2 = 4$, temos $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \leq 16$ pois $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Assim, $\alpha_2 = 6$ e portanto $\alpha_i = 6$, para todo $i \geq 2$. Note que também não podemos ter $\alpha_1 \in \{2, 3, 5\}$. Se $\alpha_1 = 4$, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \leq 24$, o que não ocorre. Logo, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_7 = 6$.

Note que

$$36 = \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = |G : C_G(x_i)| \cdot |C_G(x_i) : Z(G)| = \alpha_i \left|\frac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right|$$

$$\therefore \left|\frac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right| = 6, \forall i \in \{1, ..., 7\}.$$

Assim, $\left\{\dfrac{C_G(x_i)}{Z(G)} : i \in \{1, ..., 7\}\right\}$ forma uma partição de $\dfrac{G}{Z(G)}$ constituída por um grupo de ordem 6. Como um grupo de ordem 6 possui exatamente 2 elementos de ordem 3, segue que $\dfrac{G}{Z(G)}$ tem 14 elementos de ordem 3. No entanto, podemos verificar, com o auxílio do GAP [33], que nenhum grupo de ordem 36 tem essa quantidade de elementos de ordem 3.

Agora, suponha que $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 24$. Note que pela mesma justificativa dada para $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 36$, temos que $r = 7$. Logo pelo Lema de Tomkinson, temos $\alpha_2 \leq 6$. Novamente,

$\alpha_2 \neq \{2,3,5\}$ e se $\alpha_2 = 4$ temos

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq \alpha_1\alpha_2 \leq 16,$$

o que contradiz a hipótese. Logo $\alpha_2 = 6$, ou seja, $\alpha_i = 6$, para todo $i \geq 2$. Note que $\alpha_1 \notin \{2,3,5\}$ e se $\alpha_1 = 6$, então

$$24 = \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = |G : C_G(x_i)| \cdot |C_G(x_i) : Z(G)| = \alpha_i \left|\frac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right| \implies \left|\frac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right| = 4, \forall i \in \{1, ..., 7\},$$

o que implicaria que $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 7 \cdot 4 - 7 + 1 = 22$. Logo $\alpha_1 = 4$ e, consequentemente, $\frac{C_G(x_1)}{Z(G)}$ é o único subgrupo de $\frac{G}{Z(G)}$ com ordem 6.

Como $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 24 = 2^3 \cdot 3$, podemos ter $n_3 = 1$ ou $n_3 = 4$. Além disso, cada 3-Sylow tem ordem 3. Se $n_3 = 4$, então $\frac{G}{Z(G)}$ teria pelo menos 4 subgrupos cíclicos de ordem 6, que seriam obtidos ao multiplicar cada 3-Sylow por C_2. Assim, $n_3 = 1$ e portanto $\frac{G}{Z(G)}$ só possui um único 3-Sylow $\overline{U} = \langle \overline{w} \rangle$, onde $\overline{w} = wZ(G)$, para algum $w \in G$. Como $\frac{C_G(x_i)}{Z(G)}$ forma uma partição de $\frac{G}{Z(G)}$ com núcleo trivial e $\alpha_1 = 4$ e $\alpha_i = 6$, para todo $i \geq 2$, segue que em $\frac{G}{Z(G)}$ existem $6 \cdot 4 - 6 + 1 = 19$ elementos de ordem 4 ou 2. Assim $n_2 = 3$, pois do contrário não haveria essa quantidade de elementos com ordem 2 ou 4.

Como $C_6 \lesssim \frac{G}{Z(G)}$ ($\lesssim$ denota 'é isomorfo a um subgrupo de') então $\frac{G}{Z(G)}$ possui 4 elementos de ordem 3 ou 6, assim só restam 20 elementos para serem encaixados nos 2-Sylows. Denotando-os por P_1,P_2 e P_3, temos que $|\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_1}| = 20$ o que implica que $|\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_1}| = 2$, ou seja, $|\mathrm{core}_{\overline{G}}(\overline{P_1})| = 2$. Além disso, $\overline{U} \trianglelefteq \frac{G}{Z(G)}$, $|\overline{U}||\overline{P_1}| = 24$ e $\overline{U} \cap \overline{P_1} = \{1\}$, o que implica $\frac{G}{Z(G)} = \overline{UP_1}$. Assim, denotando $\overline{G} = \frac{G}{Z(G)}$, temos que $C_{\overline{G}}(\overline{U}) = \overline{U}\mathrm{core}_{\overline{G}}(\overline{P_1})$. De fato, como $\overline{G} = \overline{UP_1}$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{g} \in C_{\overline{G}}(\overline{U}) &\iff \overline{gu} = \overline{ug}, \forall \overline{u} \in \overline{U} \\ &\iff \overline{g} = \overline{u}\tilde{u}\overline{pu}^{-1} \\ &\iff \overline{g} = \tilde{u}\overline{upu}^{-1} \in \overline{U}\mathrm{core}_{\overline{G}}(\overline{P_1}). \end{aligned}$$

Consequentemente, $|C_{\overline{G}}(\overline{U})| = 6$. Por outro lado, como $\overline{U} \trianglelefteq \overline{G}$ e $\overline{U} \cong C_3$, então $\frac{\overline{G}}{C_{\overline{G}}(\overline{U})} \lesssim \mathrm{Aut}(\overline{U}) \cong C_2$ e portanto, $|\overline{G}| \leq 12$, o que contradiz a hipótese. $\square$

Com estes resultados, temos:

Teorema 3.5. *Seja G um grupo 8-centralizado finito. Então*

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_2^3, A_4 \text{ ou } D_{12}.$$

Demonstração. Seja $\{x_1, ..., x_r\}$ um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de G com tamanho maximal. Então $\{C_G(x_i) : i \in \{1, ..., r\}\}$ é uma r-cobertura irredundante, cuja interseção é $Z(G)$. Assuma que $|G : C_G(x_i)| = \alpha_i$, onde $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_r$. Dadas as hipóteses e usando o Lema 2.3 e os Corolários 3.1 e 3.3, temos que $r = 5$, 6 ou 7.

Caso 1: ($r = 5$). Neste caso

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq f(5) = 16,$$

e $\alpha_2 \leq 4$, pelo Lema de Tomkinson. Se $\alpha_2 \leq 3$, teríamos $|\text{Cent}(G)| = 4$ ou 5 pelos Corolários 3.2 e 3.4, o que não é verdade. Logo, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_i = 4$, para todo $i \in \{2, ..., 5\}$, também pelo Lema de Tomkinson. Agora temos alguns sub-casos a analisar:

Sub-caso 1: ($\alpha_1 = 2$). Neste caso, $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq 8$. Note que $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \notin \{2, 3, 5, 7\}$, pois do contrário G seria abeliano. Como G não é abeliano, se $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 4$, então $\frac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$, o que é uma contradição com o Teorema 3.1. De forma análoga, se $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 6$, então $\frac{G}{Z(G)} \cong S_3$, o que contradiz o Teorema 3.2. Como $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 8$, pelo Lema 3.8, temos que $\frac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$.

Sub-caso 2: ($\alpha_1 = 3$). Neste caso

$$3 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \quad \text{e} \quad 4 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right| \implies 12 \mid \left|\frac{G}{Z(G)}\right|.$$

Mas $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq \alpha_1\alpha_2 = 12$. Portanto, $\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 12$ e pelo Lema 1.3 temos que

$$\frac{G}{Z(G)} \cong D_{12} \text{ ou } A_4.$$

Como $\alpha_2 = \cdots = \alpha_5 = 4$ então $\frac{G}{Z(G)}$ tem pelo menos 4 subgrupos de índice 4, logo $\frac{G}{Z(G)} \ncong D_{12}$. Portanto, $\frac{G}{Z(G)} \cong A_4$.

Sub-caso 3: ($\alpha_1 = 4$). Como $|\text{Cent}(G)| = r + 3$, temos pelo item (c) da Proposição 2.3

que existe um centralizador próprio não abeliano $C_G(x)$ que contém dois centralizadores $C_G(x_i)$, $i \in \{1, ..., 5\}$. Logo

$$G = \left(\bigcup_{i \in T} C_G(x_i) \right) \cup C_G(x),$$

para algum $T \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $|T| \leq 3$. Dessa forma, temos pelo Lema de Tomkinson que $\alpha_i \leq 3$, para algum $i \in T$, o que sabemos que não ocorre.

Caso 2: $(r = 6)$. Neste caso, pelo Lema de Tomkinson, temos que $\alpha_2 \leq 5$. Ora, dos Corolários 3.2 e 3.4 e do Lema 3.7, temos que $\alpha_2 = 4$. Logo, temos os seguintes sub-casos:

Sub-caso 1: $(\alpha_1 = 2)$. Neste caso, $\left| \dfrac{G}{Z(G)} \right| = 8$, ou seja, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$, o que é uma contradição, pois como $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 4$, uma 6-cobertura de $\dfrac{G}{Z(G)}$ não seria irredundante pois retirando um dos elementos de índice 4 da cobertura, os membros restantes continuariam formando uma cobertura.

Sub-caso 2: $(\alpha_1 = 3)$. Neste caso,

$$\left| \frac{G}{Z(G)} \right| = 12 \implies \frac{G}{Z(G)} \cong D_{12} \text{ ou } A_4.$$

Como D_{12} possui um elemento de ordem 6, então qualquer cobertura irredundante de D_{12} necessita ter $\alpha_1 = 2$ e assim excluímos esse caso. Já em A_4, como $\alpha_1 = 3$ uma cobertura irredundante só pode ter 5 membros, o que é um absurdo, pois $r = 6$.

Sub-caso 3: $(\alpha_1 = 4)$. Como $r + 2 = |\mathrm{Cent}(G)|$, segue do item (b) da Proposição 2.3 que existe um centralizador próprio $C_G(x)$ não abeliano que contém pelo menos três centralizadores $C_G(x_i)$, com $i \in \{1, ..., 6\}$. Logo,

$$G = \left(\bigcup_{i \in T} C_G(x_i) \right) \cup C_G(x),$$

para algum $T \subset \{1, ..., 6\}$ com $|T| \leq 3$, portanto $\alpha_i \leq 3$, pelo Lema de Tomkinson para algum $i \in T$, o que é um absurdo.

Caso 3: $(r = 7)$. Neste caso $\{C_G(x_i) : i \in \{1, ..., 7\}\}$ é uma partição de G cujo núcleo é $Z(G)$, pela Proposição 2.2 e pelo Lema 2.4. Pelos Lemas 2.1 e 3.7 e pelos Corolários 3.2 e 3.4, temos que $\alpha_2 = 4$ ou $\alpha_2 = 6$.

Se $\alpha_2 = 4$, temos alguns sub-casos:

Sub-caso 1: $(\alpha_1 = 2)$. Neste caso, $\left| \dfrac{G}{Z(G)} \right| = 8$, logo $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$, o que é uma contradição pela mesma justificativa do caso $r = 6$.

Sub-caso 2: ($\alpha_1 = 3$). Neste caso, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 12$ e portanto $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{12}$ ou A_4 o que é uma contradição pelo mesmo motivo apresentado no caso $r = 6$.

Sub-caso 3: ($\alpha_1 = 4$). Neste caso, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| \leq 16$ e é um múltiplo de 4. Com o Lema 3.8, excluímos 4 e 16. Assim, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 8, 12$. Como $\alpha_1 = 4$, então $\dfrac{G}{Z(G)} \ncong D_{12}$, pois o maior membro da cobertura seria isomorfo à C_3, o que a impediria de coletar o elemento de ordem 6 presente em D_{12}, o qual pertence apenas ao subgrupo de D_{12} isomorfo à C_6. Ora, se $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 8$ então pelo Lema 3.8, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$ e se $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 12$, então $\dfrac{G}{Z(G)} \cong A_4$, pelo Lema 1.3.

Agora, se $\alpha_2 = 6$, temos que $\alpha_i = 6$, para todo $i \geq 2$. Como os conjuntos $\dfrac{C_G(x_i)}{Z(G)}$, $i \in \{1, ..., 7\}$ formam uma partição de $\dfrac{G}{Z(G)}$ com núcleo trivial, então

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = \sum_{i=1}^{7}\left|\frac{C_G(x_i)}{Z(G)}\right| - 6 = \sum_{i=1}^{7}\frac{1}{\alpha_i}\left|\frac{G}{Z(G)}\right| - 6 = \left(\frac{1}{\alpha_1} + 1\right)\left|\frac{G}{Z(G)}\right| - 6.$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{1}{\alpha_1} + 1 - 6\frac{|Z(G)|}{|G|} \Longrightarrow \frac{1}{\alpha_1} = 6\frac{|Z(G)|}{|G|} \Longrightarrow \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = 6\alpha_1.$$

Novamente, temos alguns sub-casos a analisar:

Sub-caso 1: ($\alpha_1 = 2$). Neste caso, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 12$, o que implica que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong A_4$ ou D_{12}. Como A_4 não tem subgrupos de índice 2, temos que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{12}$.

Sub-caso 2: ($\alpha_1 = 3$). Neste caso, $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 18$ e $\overline{K} := \dfrac{C_G(x_1)}{Z(G)}$ é o único subgrupo de $\dfrac{G}{Z(G)}$ com ordem 6. Portanto, existe um elemento $\overline{y} = yZ(G)$, com $y \in C_G(x_1)$ tal que $|\overline{y}| = 2$ e portanto $\langle\overline{y}\rangle \leq Z\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right)$. Temos que $18 = 2 \cdot 3^2$ assim $n_3 = 1$, logo $\overline{P} \trianglelefteq \dfrac{G}{Z(G)}$ onde $\overline{P}$ é um 3-Sylow e $|\overline{P}| = 9$. Assim $\dfrac{G}{Z(G)} = \langle\overline{y}\rangle\overline{P}$ e portanto é abeliano. Consequentemente, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_3 \times C_3$, mas $s(C_2 \times C_3 \times C_3, 2^1) = 1$ e tal grupo não tem elemento de ordem 4 e, portanto, não é um grupo capaz (veja Observação 1.3).

Sub-caso 3: ($\alpha_1 = 4$ ou $\alpha_1 = 6$). Nestes casos, temos $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = 24$ ou 36, o que é impossível, em virtude do Lema 3.9. $\square$

Teorema 3.6. *Não existe um grupo* 8*-centralizado primitivo.*

Demonstração. Lembre que um grupo é chamado de n-centralizado primitivo se

$$\left|\mathrm{Cent}\left(\frac{G}{Z(G)}\right)\right| = |\mathrm{Cent}(G)| = n.$$

Note que se G é um 8-centralizado então pelo Teorema 3.5,

$$\frac{G}{Z(G)} \cong A_4, D_{12} \text{ ou } C_2^3.$$

Mas $|\mathrm{Cent}(A_4)| = 6$, $|\mathrm{Cent}(D_{12})| = 5$ e $|\mathrm{Cent}(C_2^3)| = 1$, donde segue o resultado. $\square$

Nós sabemos que para um grupo finito G, cujo $\dfrac{G}{Z(G)} \cong A_4$ ou D_{12}, nós temos que $|\mathrm{Cent}(G)| = 6$ ou 8, pelo Lema 3.3 e pela Proposição 2.1. Para o caso em que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$ temos:

Proposição 3.1. *Seja* G *um grupo finito. Se* $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^3$*, então* $|\mathrm{Cent}(G)| = 6$ *ou* 8*.*

Demonstração. Suponha que $\{x_1, ..., x_r\}$ é um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho máximo. Pela Proposição 2.2, $\left\{\dfrac{C_G(x_i)}{Z(G)} : i \in \{1, ..., r\}\right\}$ forma uma r-cobertura irredundante com núcleo trivial para $\dfrac{G}{Z(G)}$. Por outro lado, uma cobertura para C_2^3 tem no máximo 7 membros. Assim, $r \leq 7$. Dado $x \in G \setminus Z(G)$, temos que $\dfrac{C_G(x)}{Z(G)} \cong C_2$ ou $C_2 \times C_2$, logo como $Z(G)$ é abeliano, segue que $C_G(x)$ é abeliano. Da arbitrariedade de x, temos que todo centralizador próprio de G é abeliano, isto é, G é um CA-grupo e, portanto, $|\mathrm{Cent}(G)| = r + 1 \leq 8$, pelo Lema 2.4. Pelos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.4, $|\mathrm{Cent}(G)| \neq 4, 5, 7$. Logo, $|\mathrm{Cent}(G)| = 6$ ou 8. $\square$

Capítulo 4

Centralizadores de grupos com a mesma ordem

Até este momento, nosso trabalho teve a seguinte perspectiva: fixar um valor para $|\mathrm{Cent}(G)|$ e procurar informações sobre o grupo. Neste capítulo faremos uma outra abordagem: fixaremos um valor para a ordem do grupo e investigaremos propriedades do grupo não abeliano com esta ordem, que possui o menor número de centralizadores. Os resultados a seguir encontram-se no artigo de S. M. J. Amiri e H. Rostami [7].

4.1 Centralizadores, Nilpotência e Grupos de Frobenius

Esta seção é destinada aos resultados preliminares que serão necessários para obter o resultado principal deste capítulo. O primeiro deles trata sobre propriedades esperadas do conjunto dos centralizadores de um grupo.

Lema 4.1. *Sejam $G, G_1, G_2, ..., G_n$ grupos finitos. Então*

(1) *Se $H \leq G$, então $|\mathrm{Cent}(H)| \leq |\mathrm{Cent}(G)|$.*

(2) *Se $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$, então $|\mathrm{Cent}(G)| = \prod_{i=1}^{n} |\mathrm{Cent}(G_i)|$.*

Demonstração. De fato,

(1) Dados $x, y \in H$, se $C_G(x) = C_G(y)$, então

$$C_H(x) = H \cap C_G(x) = H \cap C_G(y) = C_H(y)$$

.

(2) Sejam $G = G_1 \times G_2$ e $(a, b) \in G$, temos que

$$\begin{aligned} C_G((a,b)) &= \{(x,y) \in G : (a,b)(x,y) = (x,y)(a,b)\} \\ &= \{(x,y) \in G = G_1 \times G_2 : (ax, by) = (ax, yb)\} \\ &= \{x \in G_1 : ax = xa\} \times \{y \in G_2 : by = yb\} \\ &= C_{G_1}(a) \times C_{G_2}(b). \\ &\therefore\ |\mathrm{Cent}(G)| = |\mathrm{Cent}(G_1)| \cdot |\mathrm{Cent}(G_2)|. \end{aligned}$$

Para generalizar o resultado, por indução, basta tomar $H_1 = G_1 \times \cdots \times G_{n-1}$ e $H_2 = G_n$ e aplicar o passo anterior. $\square$

Para p um número primo, sempre existe um p-grupo não abeliano. Em [9], mais precisamente no Lema 2.7 deste trabalho, Ashrafi provou que se G é um p-grupo nessas condições, então $|\mathrm{Cent}(G)| \geq p+2$, e vale a igualdade se, e somente se, $\frac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$. O resultado a seguir generaliza este fato, pois ele permanece válido para grupos nilpotentes, desde que os mesmos contenham um p-Sylow não abeliano.

Lema 4.2. *Sejam G um grupo nilpotente e p um primo que divide $|G|$ para o qual G possua um p-Sylow não-abeliano. Então, $|\mathrm{Cent}(G)| \geq p + 2$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$.*

Demonstração. Seja P um p-Sylow não abeliano de G. Pelo Lema 4.1 temos que

$$|\mathrm{Cent}(P)| \leq |\mathrm{Cent}(G)|.$$

Por outro lado, como P é um p-grupo não abeliano segue do Lema 2.7 de [9] que

$$p + 2 \leq |\mathrm{Cent}(P)| \leq |\mathrm{Cent}(G)|. \tag{4.1}$$

Supondo que $p + 2 = |\mathrm{Cent}(G)|$, temos por (4.1) que

$$p + 2 = |\mathrm{Cent}(G)| \geq |\mathrm{Cent}(P)| \geq p + 2 \implies |\mathrm{Cent}(P)| = p + 2. \tag{4.2}$$

Como G é nilpotente, temos pelo Teorema 1.1 que G pode ser escrito como o produto direto dos seus subgrupos de Sylow, assim

$$G = \prod_{i=1}^{n} G_i, \tag{4.3}$$

onde $P = G_j$ para algum $j \in \{1, ..., n\}$. Daí, por (4.2) e pelo Lema 4.1

$$\begin{aligned} p+2 &= |\mathrm{Cent}(G)| = \prod_{i=1}^{n} |\mathrm{Cent}(G_i)| = |\mathrm{Cent}(P)| \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |\mathrm{Cent}(G_i)| \\ &= (p+2) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |\mathrm{Cent}(G_i)| \therefore |\mathrm{Cent}(G_i)| = 1, \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$

Logo, todos os q-Sylows de G com $q \neq p$ são abelianos. Aplicando isto em (4.3) temos que:

$$\frac{G}{Z(G)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{G_i}{Z(G_i)} \cong \frac{P}{Z(P)},$$

pois $\dfrac{G_i}{Z(G_i)} \cong \{1\}$, para todo $i \neq j$. No entanto, como $|\mathrm{Cent}(P)| = p+2$, segue novamente do Lema 2.7 de [9] que

$$\frac{P}{Z(P)} \cong C_p \times C_p \implies \frac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p.$$

Por outro lado, se $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$ então $\dfrac{P}{Z(P)} \lesssim C_p \times C_p$ isto é $\dfrac{P}{Z(P)} \cong \{1\}$, C_p ou $C_p \times C_p$. Como P não é abeliano só podemos ter $\dfrac{P}{Z(P)} \cong C_p \times C_p$. Segue do Lema 2.7 de [9] que $|\mathrm{Cent}(P)| = p+2$. Da nilpotência de G podemos escreve-lo como em (4.3). Daí,

$$\frac{P}{Z(P)} \cong \frac{G}{Z(G)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{G_i}{Z(G_i)} \implies \frac{G_i}{Z(G_i)} \cong \{1\}, \quad \forall i \neq j.$$

Assim, todos os q-Sylows de G com $q \neq p$ são abelianos. Usando o Lema 4.1, temos que

$$p+2 \leq |\mathrm{Cent}(G)| = \prod_{i=1}^{n} |\mathrm{Cent}(G_i)| = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |\mathrm{Cent}(G_i)| \cdot |\mathrm{Cent}(P)| = p+2.$$

Logo, $|\mathrm{Cent}(G)| = p+2$. □

Um grupo não nilpotente é dito minimal não nilpotente quando todos os seus subgrupos próprios são nilpotentes. Acerca destes grupos valem os seguintes resultados

Teorema 4.1 (O. J. Schmidt)**.** *Seja G um grupo não nilpotente tal que cada um de seus subgrupos maximais é nilpotente. Então*

(*a*) *G é solúvel,*

(*b*) *$|G| = p^m q^n$, onde p e q são primos distintos,* (*c*) *G possui um único p-subgrupo de Sylow P e um q-subgrupo de Sylow Q que é cíclico. Consequentemente, $G = PQ$ e $P \trianglelefteq G$.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [28], p. 258-259. □

Proposição 4.1. *Seja $G = PQ$ um grupo minimal não nilpotente em que P e Q são os subgrupos de Sylow obtidos no Teorema* 4.1. *Então*

(*a*) $\Phi(Q) \leq Z(G)$,

(*b*) *$P = [P, Q]$ e $\Phi(P) \leq Z(G)$. Em particular, P é nilpotente de classe no máximo* 2.

(*c*) *Se p é ímpar, $P^p = 1$, enquanto que $P^4 = 1$ se $p = 2$.*

A seguir, mostraremos uma relação entre grupos minimais não nilpotentes e grupos de Frobenius. Para maior comodidade do leitor, iremos primeiramente enunciar um resultado devido a Taunt que será utilizado em um passo da demonstração.

Lema 4.3 (Taunt)**.** *Seja G um grupo finito em que todos os subgrupos de Sylow são abelianos. Então, $G' \cap Z(G) = 1$.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [28], p. 289. □

Lema 4.4. *Seja G um grupo minimal não nilpotente. Então $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo de Frobenius tal que o núcleo de Frobenius é abeliano elementar e o complemento de Frobenius tem ordem prima.*

Demonstração. Como G é um grupo minimal não nilpotente, o Teorema de O. J. Schmidt garante que $G = PQ$ onde P é o único p-Sylow de G e Q é um q-Sylow cíclico de G, onde $p \neq q$. Pela Proposição 4.1, os subgrupos de Frattini de P e de Q estão contidos em $Z(G)$. Assim,

$$\Phi(P) \subset Z(G) \cap P \quad \text{e} \quad \Phi(Q) \subset Z(G) \cap Q.$$

Pelo Teorema da Base de Burnside (veja Teorema 1.3) temos que $\dfrac{P}{\Phi(P)}$ é p-abeliano elementar e que $\dfrac{Q}{\Phi(Q)}$ é cíclico de ordem q. Assim, $\dfrac{P}{Z(G) \cap P}$ é p-abeliano elementar e como $\Phi(Q) \subset Z(G) \cap Q$, então

$$\left| \frac{Q}{Q \cap Z(G)} \right| \mid \left| \frac{Q}{\Phi(Q)} \right| = q \implies \left| \frac{Q}{Q \cap Z(G)} \right| \in \{1, q\}.$$

Ora, se $\left| \dfrac{Q}{Q \cap Z(G)} \right| = 1$ então $Q \cap Z(G) = Q$ o que implicaria que $Q \subset Z(G)$ e portanto $Q \trianglelefteq G$. Com isso, G seria um grupo nilpotente (veja Teorema 1.1), o que não ocorre.

Logo, $\dfrac{Q}{Q \cap Z(G)}$ é cíclico de ordem q. Usando o Segundo Teorema do Isomorfismo, concluímos que $\dfrac{PZ(G)}{Z(G)}$ é p-abeliano elementar e $\dfrac{QZ(G)}{Z(G)}$ é cíclico de ordem q. Consequentemente, os subgrupos de Sylow de $\dfrac{G}{Z(G)}$ são abelianos. Do Lema 4.3, $\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right)' \cap Z\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right) = 1$ e usando novamente a Proposição 4.1, temos que $P = [P, Q] \leq [G, G] = G'$. Assim,

$$\frac{PZ(G)}{Z(G)} \leq \frac{G'Z(G)}{Z(G)} \cong \frac{G'}{G' \cap Z(G)}.$$

Considerando a projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G & \to & \dfrac{G}{Z(G)} \\ & g & \mapsto & gZ(G) \end{array},$$

temos que $\pi(G') = \left(\dfrac{G}{Z(G)}\right)'$. Como $\ker(\pi) = Z(G)$, então $\ker\left(\pi\Big|_{G'}\right) = Z(G) \cap G'$. Daí, pelos Teoremas do Isomorfismo

$$\frac{G'Z(G)}{Z(G)} \cong \frac{G'}{G' \cap Z(G)} \cong \left(\frac{G}{Z(G)}\right)'.$$

Assim,

$$\frac{PZ(G)}{Z(G)} \cap Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \{1\} \implies Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \leq \frac{QZ(G)}{Z(G)}.$$

Em particular, como $\dfrac{QZ(G)}{Z(G)}$ é cíclico de ordem q, então $Z\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right) = \{1\}$ ou $\dfrac{QZ(G)}{Z(G)}$.

No caso em que $Z\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right) = \dfrac{QZ(G)}{Z(G)}$, teríamos que $\dfrac{QZ(G)}{Z(G)} \trianglelefteq \dfrac{G}{Z(G)}$ o que implicaria que $\dfrac{G}{Z(G)}$ seria nilpotente, o que é contraria a hipótese. Logo $Z\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right) = 1$. Com isso, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo de Frobenius com complemento $H = \dfrac{QZ(G)}{Z(G)}$ e núcleo $M = \dfrac{PZ(G)}{Z(G)}$, como queríamos. $\square$

Dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é um número nilpotente quando todo grupo de ordem n é nilpotente. Como exemplo, todo primo (e toda potência de primo) é um número nilpotente.

Definição 4.1. *Seja $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m} \in \mathbb{N}$. Dizemos que n possui uma fatoração* *nilpotente quando* $p_i^k \not\equiv 1 \mod p_m$*, para todo* $i, j \in \{1, ..., m\}$ *e para todo* $k \in \{1, ..., k_i\}$.

Teorema 4.2. *Um número* $n \in \mathbb{N}$ *é nilpotente se, e somente se, ele possui uma fatoração nilpotente.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [25], p. 631-632. $\square$

Como último resultado desta seção, encontraremos uma fórmula bastante útil para a ordem do $\mathrm{Cent}(G)$ na situação, a qual será muito recorrente na próxima seção, em que $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo de Frobenius.

Proposição 4.2. *Seja* $\dfrac{G}{Z(G)} = \dfrac{K}{Z(G)} \rtimes \dfrac{H}{Z(G)}$ *um grupo de Frobenius tal que* H *é abeliano. Se* $Z(G) < Z(K)$*, então* $|\mathrm{Cent}(G)| = |\mathrm{Cent}(K)| + \left|\dfrac{K}{Z(G)}\right| + 1$*. E se* $Z(G) = Z(K)$*, então* $|\mathrm{Cent}(G)| = |\mathrm{Cent}(K)| + \left|\dfrac{K}{Z(G)}\right|$.

Demonstração. Defina $\overline{G} = \dfrac{G}{Z(G)}$, $\overline{H} = \dfrac{H}{Z(G)}$, e $\overline{K} = \dfrac{K}{Z(G)}$. Note que se $h \in H \setminus Z(G)$ então $H \leq C_G(h)$, pois H é abeliano. Agora observe que se existisse $y \in C_G(h) \setminus H$ então

$$yh = hy \implies h = y^{-1}hy \in H^y \implies \overline{h} = hZ(G) \in \overline{H}^{\overline{y}},$$

ou seja, $\overline{h} \in \overline{H} \cap \overline{H}^{\overline{y}}$. Como $\overline{G}$ é um grupo de Frobenius com complemento $\overline{H}$ então $\overline{H} \cap \overline{H}^{\overline{y}} = \{\overline{1}\}$, assim $\overline{h} = \{\overline{1}\} = Z(G)$. Isto é, $h \in Z(G)$, o que é uma contradição. Portanto, $C_G(h) = H$.

Observe também que dado $y \in H^g$ temos $y = g^{-1}h_1g$, com $h_1 \in H$ e que

$$h^g y = g^{-1}hgg^{-1}h_1g = g^{-1}hh_1g = g^{-1}h_1hg = g^{-1}h_1gg^{-1}hg = yh^g \implies y \in C_G(h^g).$$

Dado $x \in C_G(h^g) \setminus H^g$, temos

$$xh^g = h^gx \implies h^g = x^{-1}h^gx \in (H^g)^x = H^{gx},$$

ou seja, $\overline{h^g} \in \overline{H}^{\overline{g}} \cap \overline{H}^{\overline{gx}}$. Ora, se $\overline{z} \in \overline{H}^{\overline{g}} \cap \overline{H}^{\overline{gx}}$, então

$$\overline{z} = \overline{g^{-1}}\,\overline{h_2}\,\overline{g} = \overline{x^{-1}g^{-1}}\,\overline{h_3}\,\overline{gx} \implies \overline{h_2} = \overline{g}\,\overline{x^{-1}g^{-1}}\,\overline{h_3}\,\overline{gx}\,\overline{g^{-1}} \implies \overline{h_2} \in \overline{H} \cap \overline{H}^{\overline{k}},$$

em que $k = x^g$. Mas $\overline{G}$ é um grupo de Frobenius, logo $\overline{h_2} = 1$, o que implica que $\overline{z} = \overline{g^{-1}}\,\overline{h_2}\,\overline{g} = \overline{1}$. Logo, $\overline{H}^{\overline{g}} \cap \overline{H}^{\overline{gx}} = 1$ e $\overline{h}^{\overline{g}} = \overline{1}$, isto é, $h^g \in Z(G)$. Daí,

$$h^g = z_1 \implies g^{-1}hg = z \implies h = gzg^{-1} = z \in Z(G),$$

o que é um absurdo pois $h \notin Z(G)$. Portanto, $C_G(h^g) = H^g$.

Também do fato de $\overline{G}$ ser um grupo de Frobenius, temos pela Proposição 1.6 que $C_{\overline{G}}(\overline{x}) \leq \overline{K}$ para todo $x \in K \setminus Z(G)$ e dado $a \in C_G(x)$, vale que

$$ax = xa \implies \overline{ax} = \overline{xa} \implies \overline{a} \in C_{\overline{G}}(\overline{x}) \leq \overline{K}.$$

Desta forma, $a \in K$, ou seja, $a \in K \cap C_G(x) = C_K(x)$. Logo, $C_G(x) = C_K(x)$, para todo $x \in K \setminus Z(G)$.

Além disso, se $b \notin K$ então $\overline{b} \notin \overline{K}$ e sendo $\overline{G}$ um grupo de Frobenius, existe $\overline{g} \in \overline{G}$ tal que $\overline{b} \in \overline{H}^{\overline{g}}$. Daí,

$$\overline{b} = \overline{g^{-1}}\overline{h}\overline{g} \implies b(g^{-1}hg)^{-1} = z_2 \implies b = z_2(g^{-1}hg).$$

Note que dado $s \in C_G(b)$, temos que

$$sb = bs \implies s = bsb^{-1} = zg^{-1}hgsg^{-1}h^{-1}gz^{-1} = zh^g s(h^g)^{-1}z^{-1} \implies sh^g = h^g s.$$

Portanto, $s \in C_G(h^g) = H^g$. Agora, dado $r \in C_G(h^g)$:

$$rh^g = h^g r \implies rbz_2^{-1} = bz_2^{-1}r \implies rb = bz_2^{-1}rz_2 \implies rb = br \implies r \in C_G(b).$$

Consequentemente, $C_G(b) = C_G(h^g) = H^g$. Novamente, por $\overline{G}$ ser um grupo de Frobenius, temos que

$$|\overline{K}| = |\{\overline{H}^{\overline{g}} : \overline{g} \in \overline{G}\}| = |\{H^g : g \in G\}| = |\{C_G(b) : b \notin K\}|.$$

Com os resultados obtidos, temos para um elemento $x \in G \setminus Z(G)$ arbitrário dois possíveis casos:

Caso 1: $x \in K$. Neste caso, $C_G(x) = C_K(x)$ e obtemos

$$|\{C_G(x) : x \in K\}| = |\{C_K(x) : x \in K\}| = |\mathrm{Cent}(K)|.$$

Caso 2: $x \notin K$ e obtemos

$$|C_G(x) : x \notin K| = |\overline{K}| = \left|\frac{K}{Z(G)}\right|.$$

Como $G = C_G(z)$, $z \in Z(G)$, obtemos que $|\mathrm{Cent}(G)| = 1 + \left|\frac{K}{Z(G)}\right| + |\mathrm{Cent(K)}|$, se

$Z(G) < Z(K)$ e se $Z(K) = Z(G)$, então $|\mathrm{Cent}(G)| = \left|\dfrac{K}{Z(G)}\right| + |\mathrm{Cent}(K)|$. $\square$

4.2 Classificação dos grupos com menor número de centralizadores

Como mencionamos, neste capítulo a abordagem será fixar um valor para a ordem do grupo e caracterizar aquele que possua o menor número de centralizadores. Mais precisamente, obteremos duas alternativas para este grupo.

Teorema 4.3. *Seja G um grupo não abeliano de ordem n. Se $|\mathrm{Cent}(G)| \leq |\mathrm{Cent}(H)|$ para todos os grupos não abelianos H de ordem n, então uma das afirmações seguintes é válida:*

(1) *G é nilpotente, $|\mathrm{Cent}(G)| = p + 2$ e $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$ onde p é o menor primo tal que $p^3 \mid n$.*

(2) *G é não nilpotente, $|\mathrm{Cent}(G)| = p^m + 2$ e $\dfrac{G}{Z(G)} \cong (C_p)^m \rtimes C_l$ onde $l > 0$ e p^m é a menor potência de primo divisora de n tal que $p^m - 1$ e n não são coprimos.*

Demonstração. (1) Primeiramente, provaremos que se p é o menor primo tal que $p^3 \mid n$, então $|\mathrm{Cent}(G)| \geq p+2$. De fato, sendo G um grupo nilpotente, podemos escrevê-lo como o produto direto de seus subgrupos de Sylow (veja Teorema 1.1). Como G não é abeliano deve existir um número primo $q \in \pi(G)$ tal que o seu respectivo q-Sylow não é abeliano. Daí, o Lema 4.2 nos dá que $|\mathrm{Cent}(G)| \geq q+2$. Além disso, sendo esse q-Sylow um grupo não abeliano ele deve possuir ordem pelo menos igual a q^3 (veja Exemplo 1.2). Em particular $q^3 \mid n$. Sendo p o menor primo com esta propriedade, temos que $p + 2 \leq q + 2 \leq |\mathrm{Cent}(G)|$. Por outro lado, do Exemplo 1.2, existe P não abeliano com ordem p^3. Nestas condições, defina $H = P \times C_{n/p^3}$. Temos que $|H| = n$ e, por hipótese

$$p + 2 \leq |\mathrm{Cent}(G)| \leq |\mathrm{Cent}(H)|.$$

Por outro lado, usando os Lemas 4.1, 1.1 e 4.2, temos que

$$|\mathrm{Cent}(H)| = |\mathrm{Cent}(P)| \cdot |\mathrm{Cent}(C_{n/p^3})| = |\mathrm{Cent}(P)| = p + 2,$$

pois $\dfrac{P}{Z(P)} \cong C_p \times C_p$. Logo $|\mathrm{Cent}(G)| = p+2$. Por fim, usando novamente o Lema 4.2, temos que

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p.$$

(2) Se G é não nilpotente então n não é um número nilpotente. Consequentemente, pelo Teorema 4.2, existem q e r primos divisores de n tais que $q \mid r^k - 1$ para algum inteiro k.

Afirmação: Se p^m é a menor potência de primo divisora de n tal que $p^m - 1$ e n não são coprimos, então $|\mathrm{Cent}(G)| \geq p^m + 2$.

Como G é não nilpotente então ele possui um subgrupo minimal não nilpotente M (que eventualmente pode ser igual a G no caso do próprio G ser minimal). Em todo caso, segue do Lema 4.4 que $\dfrac{M}{Z(M)}$ é um grupo de Frobenius, com núcleo $\dfrac{K}{Z(M)}$ abeliano elementar de ordem p_1^t e complemento $\dfrac{H}{Z(M)}$ cíclico de ordem p_2, onde p_1 e p_2 primos divisores da ordem de M e em particular são divisores de n. Além disso, como $\dfrac{M}{Z(M)}$ é Frobenius segue da Proposição 1.6 que

$$\left|\frac{H}{Z(M)}\right| = p_2 \mid \left|\frac{K}{Z(M)}\right| - 1 = p_1^t - 1.$$

Como H é abeliano, usando a Proposição 4.2 temos

$$|\mathrm{Cent}(M)| = \left|\frac{K}{Z(M)}\right| + |\mathrm{Cent(K)}| + 1 \geq \left|\frac{K}{Z(M)}\right| + 2 = p_1^t + 2 \geq p^m + 2, \quad (4.4)$$

onde usamos que $p_1^t \mid n$, $\mathrm{mdc}(p_1^t - 1, n) \geq p_2 > 1$ e a hipótese de que p^m é a menor potência de primo satisfazendo essas duas condições. Como $M \leq G$ vale que

$$p^m + 2 \leq |\mathrm{Cent}(M)| \leq |\mathrm{Cent}(G)|,$$

concluindo a prova da afirmação.

Agora suponha que $|\mathrm{Cent}(G)| = p^m + 2$. Aplicando em (4.4) temos que

$$p_1^t + 2 = p^m + 2 \implies p_1^t = p^m,$$

e, portanto, $\left|\dfrac{K}{Z(M)}\right| = p^m$. Usando a Proposição 4.2 e o Lema 4.1, temos que

$$p^m + |\mathrm{Cent}(K)| = \left|\frac{K}{Z(M)}\right| + |\mathrm{Cent}(K)| \leq |\mathrm{Cent}(M)| \leq |\mathrm{Cent}(G)| = p^m + 2.$$

Assim, $|\mathrm{Cent}(K)| \leq 2$. Como não existem grupos 2-centralizados, temos que $|\mathrm{Cent}(K)| = 1$, ou seja, K é abeliano. Como K e H são abelianos, temos que M é um CA-grupo pelo Teorema 1.6. Como $K = Z(K)$, temos $Z(M) < Z(K)$ e portanto, da Proposição 4.2, segue que

$$|\mathrm{Cent}(M)| = |\mathrm{Cent}(K)| + \left|\frac{K}{Z(M)}\right| + 1 = p^m + 2.$$

Do Lema 2.4, temos

$$\omega(M) + 1 = |\mathrm{Cent}(M)| = p^m + 2 \implies \omega(M) = p^m + 1,$$

ou seja,

$$p^m + 1 = \omega(M) \leq \omega(G) \leq |\mathrm{Cent}(G)| - 1 = p^m + 1 \implies \omega(G) = p^m + 1.$$

Usando novamente o Lema 2.4, temos que G é um CA-grupo.

Afirmação: $8 \nmid n$.

Afinal, se $8 \mid n$ então definindo $H_1 = D_8 \times C_{n/8}$, temos $|H_1| = n$ e por hipótese

$$|\mathrm{Cent}(G)| \leq |\mathrm{Cent}(H_1)| = |\mathrm{Cent}(D_8)| \cdot |\mathrm{Cent}(C_{n/8})| = |\mathrm{Cent}(D_8)| = 4,$$

onde usamos o Lema 4.1 e o Corolário 2.1. Daí, $|\mathrm{Cent}(G)| = 4$ e, portanto, pelo Teorema 3.1, temos que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$, o que é uma contradição pois nesse caso G seria nilpotente. Assim $8 \nmid n$.

Afirmação: Se $6 \mid n$, o resultado é válido.

De fato, se $6 \mid n$ então definindo $H_2 = S_3 \times C_{n/6}$ temos que $|H_2| = n$ e por hipótese:

$$|\mathrm{Cent}(G)| \leq |\mathrm{Cent}(H_2)| = |\mathrm{Cent}(S_3)| \cdot |\mathrm{Cent}(C_{n/6})| = |\mathrm{Cent}(S_3)| = 5.$$

Logo, $|\mathrm{Cent}(G)| = 5$. Como G é não nilpotente, temos que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong S_3$, que pode ser visto como o produto semi-direto $C_3 \rtimes C_2$ e nesse caso o resultado é válido com $p = 3$, $m = 1$ e $l = 2$.

Vamos então assumir que $6 \nmid n$. Como G é um CA-grupo, um dos sete itens do Teorema 1.6 é válido. Observe que n não sendo um múltiplo de 6 podemos excluir os itens (d), (f) e (g). Como G é não nilpotente também excluímos o item (e). Assim, G satisfaz (a), (b) ou (c). Logo, temos alguns casos a analisar:

<u>**Caso 1:**</u> G possui um subgrupo normal abeliano A de índice primo.

Para este caso, combinaremos dois resultados auxiliares em um Lema que será muito importante. As provas para tais proposições podem ser encontradas em [14], p. 55 e em [16], p. 303, respectivamente.

Lema 4.5. *Seja G um grupo não abeliano que possui um subgrupo normal H de índice primo igual a p. Então, $|\mathrm{Cent}(G)| = |G'| + 2$. Além disso, se H é abeliano, $|G| = p|G'||Z(G)|$ e $|G : C_G(x)| = |G'|$ para todo $x \in G \setminus H$.*

Com isso, utilizando o Lema 4.5, temos que

$$p^m + 2 = |\mathrm{Cent}(G)| = |G'| + 2 \implies |G'| = p^m.$$

Além disso, denotando $r = |G : A|$ temos que $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = p^m r$. Pelo Teorema de Sylow, existe $Z(G) \trianglelefteq L \leq G$ tal que $\left|\dfrac{L}{Z(G)}\right| = r$. Além disso, observe que $Z(G) \leq A$.

De fato, se existisse $y \in Z(G) \setminus A$, então $\dfrac{G}{A} = \langle yA \rangle$, pois $\dfrac{G}{A} \cong C_r$. Assim para qualquer $x \in G$ existe $0 \leq k < r$ tal que

$$xA = (yA)^k = y^k A \implies x(y^k)^{-1} \in A,$$

o que implica que existe $a \in A$ tal que $x = y^k a$. Assim, dado $z \in G$ podemos escrever $z = y^s a'$, logo

$$xz = y^k a y^s a' = y^k y^s a a' = y^k y^s a' a = y^s y^k a' a = y^s a' y^k a = zx,$$

o que faria de G abeliano, o que é uma contradição. Logo, $Z(G) \leq A$. Por outro lado,

$$r = \left|\frac{G}{A}\right| = \frac{\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right|}{\left|\dfrac{A}{Z(G)}\right|} = \frac{p^m r}{\left|\dfrac{A}{Z(G)}\right|} \implies \left|\frac{A}{Z(G)}\right| = p^m.$$

Em particular, $\dfrac{A}{Z(G)}$ é um p-Sylow de $\dfrac{G}{Z(G)}$. Logo, $\dfrac{A}{Z(G)} \cap \dfrac{L}{Z(G)} = \{\overline{1}\}$ e, portanto, $\dfrac{G}{Z(G)} = \dfrac{A}{Z(G)} \rtimes \dfrac{L}{Z(G)}$. Ainda pelo Teorema de Sylow, temos que $n_r \equiv 1 \mod r$ e $n_r \mid p^m$. Note que se $n_r = 1$, então $\dfrac{L}{Z(G)} \trianglelefteq \dfrac{G}{Z(G)}$ o que faria de $\dfrac{G}{Z(G)}$ um grupo nilpotente. Logo, $n_r = p^s$ com $1 \leq s \leq m$.

Ora, se $s < m$, então $p^s \mid n$, pois $p^m \mid n$ e $\mathrm{mdc}(p^s - 1, n) \geq r > 1$ pois $r \mid n$ e $r \mid (n_r - 1) = p^s - 1$, o que contraria a propriedade de p^m. Assim, $s = m$ e portanto $n_r = p^m$.

Em seguida, mostraremos que $\overline{G} = \dfrac{G}{Z(G)}$ é Frobenius com núcleo $K = \dfrac{A}{Z(G)}$ e complemento $H = \dfrac{L}{Z(G)}$. Para tanto, veremos que $H \cap H^g = \{1\}$ para todo $g \in \overline{G} \setminus H$.

Como $H \cong C_r$, então $H \cap H^g = \{1\}$ ou H. Ora, pelo Teorema de Sylow, dado $R \neq H$ um outro r-Sylow de $\overline{G}$, existe $g \in \overline{G} \setminus H$ tal que $R = H^g$. Por outro lado, necessariamente devemos ter $R \cap H = \{1\}$ e cada R está associado a um distinto g. Como $n_r = p^m = |\overline{G} : H|$, temos exatamente que $H \cap H^g = \{1\}$, para todo $g \in \overline{G} \setminus H$. Logo $\dfrac{G}{Z(G)}$ é Frobenius.

Além disso, $\dfrac{A}{Z(G)}$ é normal minimal em $\dfrac{G}{Z(G)}$, pois se existisse $\{1\} \neq \dfrac{T}{Z(G)} < \dfrac{A}{Z(G)}$ tal que $\dfrac{T}{Z(G)} \trianglelefteq \dfrac{G}{Z(G)}$ então $T \trianglelefteq G$ e $Z(G) \trianglelefteq T \trianglelefteq A \trianglelefteq G$. Como A é abeliano, temos que H é abeliano e em particular nilpotente. Assim, $\dfrac{G}{T}$ não pode ser nilpotente. Por outro lado, se $\left|\dfrac{T}{Z(G)}\right| = p^s$, $1 < s \leq m-1$ então

$$\left|\frac{G}{T}\right| = \frac{\left|\frac{G}{Z(G)}\right|}{\left|\frac{T}{Z(G)}\right|} = p^{m-s}r.$$

Desse modo $n_p = 1$, isto é, o p-Sylow é normal em $\dfrac{G}{T}$. Como $\dfrac{G}{H}$ não é nilpotente $n_r \neq 1$. No entanto, pelo Teorema de Sylow,

$$n_r \mid p^{m-s}, \quad p^{m-s} \mid p^m, \quad p^m \mid n \quad \text{e} \quad n_r \equiv 1 \mod r \implies r \mid (n_r - 1),$$

como $n_r \neq 1$, $n_r = p^t$, $1 \leq t \leq m-s < m$. Daí, $p^t \mid n$ e $r \mid (p^t-1)$, como $r \mid n$ temos $\mathrm{mdc}(n, p^t-1) \geq r > 1$, o que contraria a propriedade de p^m. Logo, $\dfrac{A}{Z(G)}$ é normal minimal em $\dfrac{G}{Z(G)}$ e, em particular, é caracteristicamente simples. Como $\dfrac{A}{Z(G)}$ é um p-grupo, então da Proposição 1.5, $\dfrac{A}{Z(G)}$ é abeliano elementar, isto é, $\dfrac{A}{Z(G)} \cong (C_p)^m$. E portanto

$$\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{A}{Z(G)} \rtimes \frac{L}{Z(G)} \cong (C_p)^m \rtimes C_r.$$

.

<u>Caso 2:</u> $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo de Frobenius com núcleo $\dfrac{K}{Z(G)}$ e complemento $\dfrac{L}{Z(G)}$, com K e L abelianos.

Neste caso, temos que

$$\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{K}{Z(G)} \rtimes \frac{L}{Z(G)}.$$

Note que $K = Z(K) > Z(G)$, pois caso isso não ocorresse, G seria nilpotente. Como L é abeliano usando a Proposição 4.2 temos

$$p^m + 2 = |\mathrm{Cent}(G)| = \left|\frac{K}{Z(G)}\right| + |\mathrm{Cent}(K)| + 1 \implies \left|\frac{K}{Z(G)}\right| = p^m.$$

Mostraremos que $\dfrac{K}{Z(G)}$ é p-abeliano elementar. Em virtude da Proposição 1.7, basta mostrar que $\dfrac{L}{Z(G)}$ é maximal. Caso não o fosse, existiria $Z(G) \trianglelefteq Q \leq G$ tal que

$$\frac{L}{Z(G)} < \frac{Q}{Z(G)} < \frac{G}{Z(G)}.$$

Defina $\left|\dfrac{L}{Z(G)}\right| = l$. Como $\dfrac{L}{Z(G)} < \dfrac{Q}{Z(G)}$ temos que $\left|\dfrac{G}{Z(G)} : \dfrac{Q}{Z(G)}\right| \mid \left|\dfrac{G}{Z(G)} : \dfrac{L}{Z(G)}\right|$. Sendo $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = p^m l$, temos que: $\left|\dfrac{G}{Z(G)} : \dfrac{Q}{Z(G)}\right| \mid p^m$. Isto é,

$$\left|\frac{G}{Z(G)} : \frac{Q}{Z(G)}\right| = p^t \implies \left|\frac{Q}{Z(G)}\right| = \frac{p^m l}{p^t} = p^{m-t} l.$$

Além disso, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é Frobenius com complemento $\dfrac{L}{Z(G)}$, ou seja,

$$\frac{L}{Z(G)} \cap \left(\frac{L}{Z(G)}\right)^g = \{1\}, \quad \forall g \in \frac{G}{Z(G)} \setminus \frac{L}{Z(G)}.$$

Em particular, é válido que

$$\frac{L}{Z(G)} \cap \left(\frac{L}{Z(G)}\right)^g = \{1\}, \quad \forall g \in \frac{Q}{Z(G)} \setminus \frac{L}{Z(G)},$$

o que faz $\dfrac{Q}{Z(G)}$ um grupo de Frobenius com complemento $\dfrac{L}{Z(G)}$. Denote $\dfrac{M}{Z(G)} \triangleleft \dfrac{Q}{Z(G)}$ seu respectivo núcleo. Como $\left|\dfrac{M}{Z(G)}\right| = p^{m-t}$, temos pela Proposição 1.6 que

$$l \mid p^{m-t} - 1 \implies \mathrm{mdc}(p^{m-t} - 1, n) \geq l > 1,$$

pois $l \mid n$, $p^{m-t} \mid n$. Como $p^{m-t} < p^m$, contrariamos a propriedade de p^m. Logo, $\dfrac{L}{Z(G)}$ é maximal o que implica que $\dfrac{K}{Z(G)}$ é p-abeliano elementar. Assim, $\dfrac{K}{Z(G)}$ é isomorfo a $(C_p)^m$.

Como $\dfrac{L}{Z(G)}$ é complemento de Frobenius de $\dfrac{G}{Z(G)}$, temos pela Proposição 1.8 que os subgrupos de Sylow de $\dfrac{L}{Z(G)}$ são cíclicos ou quatérnios generalizados. Como L é abeliano, $\dfrac{L}{Z(G)}$ é abeliano e portanto os subgrupos de Sylow de $\dfrac{L}{Z(G)}$ são cíclicos. Nessas condições, podemos utilizar o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [23], p. 161.

Lema 4.6. *Seja G um grupo cujos todos os seus subgrupos de Sylow são cíclicos. Então, G' e $\dfrac{G}{G'}$ são cíclicos e possuem ordens coprimas.*

Com isso, $\dfrac{L}{Z(G)}$ é cíclico e sendo $\left|\dfrac{L}{Z(G)}\right| = l$ temos que

$$\frac{G}{Z(G)} = \frac{K}{Z(G)} \rtimes \frac{L}{Z(G)} \cong (C_p)^m \rtimes C_l$$

.

<u>**Caso 3:**</u> $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo de Frobenius com núcleo $\dfrac{K}{Z(G)}$ e complemento $\dfrac{L}{Z(G)}$, tal que $K = QZ(G)$, onde Q é um q-subgrupo de Sylow normal de G para algum $q \in \pi(G)$. Q é um CA-grupo, $Z(Q) = Q \cap Z(G)$ e $L = HZ(G)$, sendo que H é um q'-subgrupo abeliano de G.

Como $K = QZ(G)$ temos que $\left|\dfrac{K}{Z(G)}\right| = |Q| = q^a$, pois Q é um q-grupo. Como $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo de Frobenius então da Proposição 1.6 temos

$$\left|\frac{L}{Z(G)}\right| \mid q^a - 1 \implies \mathrm{mdc}(q^a - 1, n) > 1 \quad \text{e} \quad q^a \mid n$$

Da propriedade de p^m, segue que $p^m \leq q^a$. Por outro lado, da Proposição 4.2, sendo L abeliano, temos que

$$p^m + 2 = |\mathrm{Cent}(G)| \geq \left|\frac{K}{Z(G)}\right| + 2 = q^a + 2 \implies p^m \geq q^a \implies p^m = q^a$$

Assim,

$$|\mathrm{Cent}(G)| = \left|\frac{K}{Z(G)}\right| + |\mathrm{Cent}(K)| + 1 = p^m + 1 + |\mathrm{Cent}(K)| \implies |\mathrm{Cent}(K)| = 1,$$

isto é, K é abeliano. Sendo K e L abelianos recaímos no Caso 2 e, portanto o resultado segue.

$\square$

Observação 4.1. *É interessante observar que, apesar de parecer contra-intuitivo, as duas alternativas do teorema acima podem valer simultaneamente para o mesmo valor de* n. *De fato, exstem dois grupos* G_1 *e* G_2 *5-centralizados de ordem* 54 *em que* $\dfrac{G_1}{Z(G_1)} \cong C_3 \times C_3$ *e* $\dfrac{G_2}{Z(G_2)} \cong S_3$.

Capítulo 5

Grupos isoclínicos e um critério de solubilidade para grupos n-centralizados

Neste capítulo introduziremos o conceito de isoclinismo, o qual é uma relação de equivalência entre grupos um pouco mais fraca que o isomorfismo. A principal aplicação dessa ferramenta será estender para grupos infinitos os resultados que obtivemos no Capítulo 3 para grupos n-centralizados finitos. Como 'cereja do bolo', ao final do capítulo, faremos uma outra aplicação: obteremos um critério de solubilidade para tais grupos.

5.1 Grupos Isoclínicos

Em 1940, Hall [22] buscando resultados de classificação para p-grupos, introduziu um conceito mais fraco que o de isomorfismo. Este conceito foi chamado de isoclinismo. De um modo geral, dois grupos G e H são isoclínicos quando existe um isomorfismo entre os grupos quocientes $\dfrac{G}{Z(G)}$ e $\dfrac{H}{Z(H)}$ que induz um isomorfismo em seus subgrupos derivados. Mais precisamente

Definição 5.1. *Dizemos que dois grupos G e H são isoclínicos quando existem isomorfismos $\beta : \dfrac{G}{Z(G)} \to \dfrac{H}{Z(H)}$ e $\gamma : G' \to H'$ tais que se $\beta(g_1Z(G)) = h_1Z(H)$ e $\beta(g_2Z(G)) = h_2Z(G)$, então $\gamma([g_1, g_2]) = [h_1, h_2]$.*

Observação 5.1. *Note que se dois grupos são isoclínicos, então existem duas aplicações*

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \dfrac{G}{Z(G)} \times \dfrac{G}{Z(G)} & \to & G' \\ & (xZ(G), yZ(G)) & \mapsto & [x, y] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \alpha' : & \dfrac{H}{Z(H)} \times \dfrac{H}{Z(H)} & \to & H' \\ & (xZ(H), yZ(H)) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

tais que $\alpha' \circ (\beta \times \beta) = \gamma \circ \alpha$, *onde*

$$\beta \times \beta : \frac{G}{Z(G)} \times \frac{G}{Z(G)} \longrightarrow \frac{H}{Z(H)} \times \frac{H}{Z(H)}.$$

Usaremos as propriedades de isoclinismo para estender para grupos infinitos os resultados que obtivemos até o momento para grupos n-centralizados. A motivação disso é observada nos resultados a seguir

Lema 5.1. *Para todos dois grupos isoclínicos* G *e* H *temos que* $\omega(G) = \omega(H)$.

Demonstração. Suponha que G e H são grupos isoclínicos. Considere as aplicações α, α' dadas na Observação 5.1. Assuma que $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ seja um conjunto de elementos dois a dois não comutativos de tamanho maximal em G. Deste modo, $x_iZ(G) \neq x_jZ(G)$, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$ distintos e, sendo β um isomorfismo, temos que existem n elementos $y_i \in H$ tais que $\beta(x_iZ(G)) = y_iZ(H)$. Logo, é suficiente mostrar que $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ é um conjunto de elementos dois a dois não comutativos.

Ssuponha por contradição que Y não o seja. Assim, existem y_i, y_j com $i, j \in \{1, .., n\}$ distintos tais que $([y_i, y_j]) = 1$. No entanto, $\alpha' \circ (\beta \times \beta) = \gamma \circ \alpha$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} 1 = [y_i, y_j] = \alpha'(y_iZ(H), y_jZ(H)) &= \alpha'(\beta \times \beta)((x_iZ(G), x_jZ(G))) \\ &= \gamma(\alpha)((x_iZ(G), x_jZ(G))) = [x_i, x_j], \end{aligned}$$

o que mostraria que x_i e x_j comutariam, o que é um absurdo. Portanto

$$\omega(G) = |X| = |Y| \leq \omega(H) \implies \omega(G) \leq \omega(H).$$

Repetindo o mesmo raciocínio, obtemos que $\omega(H) \leq \omega(G)$ e segue o resultado. $\square$

O resultado a seguir será utilizado na demonstração do Teorema 5.1, mais especificamente para mostrar que para qualquer grupo G, sempre existe um grupo finito isoclínico a ele, o que será a peça chave para transferir para grupos infinitos os resultados obtidos para grupos n-centralizados finitos.

Lema 5.2. *Dado um grupo* G *existe um grupo* K *isoclínico a* G *tal que* $Z(K) \leq K'$.

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [22], p. 135. $\square$

Teorema 5.1. *Sejam* n *um inteiro positivo e* G *um grupo arbitrário tal que* $\omega(G) = n$. *Então* (*a*) *Existem apenas um número finito de grupos* H *a menos de isoclinismo tal que* $\omega(H) = n$.

(*b*) *Existe um grupo finito* K *tal que* K *é isoclínico a* G *e* $\omega(K) = \omega(G)$

Demonstração. (*a*) Seja G um grupo com $\omega(G) = n$. Da Observação 2.3, G é central-por-finito e assim, do Teorema de Schur (veja Teorema 1.4) o subgrupo derivado G' é finito. Denote $m = |G : Z(G)|$ e $k = |G'|$. Como sabemos, o número de grupos com ordem igual a m é finito e é limitado por m^{m^2}. Da mesma forma, o número de grupos com ordem igual a k é limitado por k^{k^2}. Assim, existe um número finito de aplicações da forma $\dfrac{G}{Z(G)} \times \dfrac{G}{Z(G)} \mapsto G'$. Com isso, existe uma quantidade finita de grupos isoclínicos a G (a menos de isomorfismo) e a conclusão segue do Lema 5.1.

(*b*) Como $\omega(G) = n$, temos que $\dfrac{G}{Z(G)}$ é finito. Do Lema 5.2 existe um grupo K tal que G é isoclínico a K e $Z(K) \subset K'$. Sendo assim, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong \dfrac{K}{Z(K)}$ e, portanto, K é central-por-finito. Do Teorema de Schur, K' é finito e em particular $Z(K)$ é finito, donde segue que K é finito. Por fim, do Lema 5.1, $\omega(K) = \omega(G)$.

□

Os resultados que obtivemos para $\omega(G)$ também valem para $|\mathrm{Cent}(G)|$. De fato

Lema 5.3. *Para quaisquer dois grupos isoclínicos* G *e* H*, vale que* $|\mathrm{Cent}(G)| = |\mathrm{Cent}(H)|$.

Demonstração. Sejam α, α', β e γ as aplicações utilizadas no Lema 5.1. Dado $x \in G$ seja $Z(H) \leq K \leq H$ tal que $\beta\left(\dfrac{C_G(x)}{Z(G)}\right) = \dfrac{K}{Z(H)}$. Seja $y \in H$ tal que $\beta(xZ(G)) = yZ(H)$. Note que $y \in K$.

Dado $z \in K$, existe $u \in C_G(x)$ tal que $\beta(uZ(G)) = zZ(H)$. Utilizando que $[u, x] = 1$ e que $\alpha' \circ (\beta \times \beta) = \gamma \circ \alpha$, temos

$$\begin{aligned} 1 = [u, x] &= \gamma(\alpha(uZ(G), xZ(G))) \\ &= \alpha'((\beta \times \beta)(uZ(G), xZ(G))) \\ &= \alpha'(zZ(H), yZ(H)) = [z, y]. \end{aligned}$$

Logo, $z \in C_H(y)$, mostrando que $K \leq C_H(y)$. Por outro lado, dado $w \in C_H(y)$ seja

$v \in G$ tal que $\beta(vZ(G)) = wZ(H)$. Novamente, por $\alpha' \circ (\beta \times \beta) = \gamma \circ \alpha$, temos

$$\begin{aligned} 1 = [y, w] &= \alpha'(yZ(H), wZ(H)) \\ &= \alpha'((\beta \times \beta)(xZ(G), vZ(G))) \\ &= \gamma(\alpha(xZ(G), vZ(G))) = [x, v]. \end{aligned}$$

Portanto, $K = C_H(y)$. Em particular, $\beta\left(\dfrac{C_G(x)}{Z(G)}\right) = \dfrac{C_H(y)}{Z(H)}$. Da arbitrariedade de $x \in G$, concluímos que $|\mathrm{Cent}(G)| \leq |\mathrm{Cent}(H)|$. De forma similar, obtemos a desigualdade reversa e o resultado segue. $\square$

Teorema 5.2. *Sejam n um inteiro positivo e G um grupo n-centralizado. Então*

(a) Existem apenas um número finito de grupos H, a menos de isoclinismo, tal que $|\mathrm{Cent}(H)| = n$.

(b) Existe um grupo finito K tal que K é isoclínico a G e $|\mathrm{Cent}(K)| = |\mathrm{Cent}(G)|$.

Demonstração. Como $\omega(G) \leq |\mathrm{Cent}(G)| - 1 = n - 1$, podemos replicar toda a prova do Teorema 5.1. $\square$

Finalmente, estamos aptos à provar um teorema mais geral de classificação para grupos n-centralizados, sem a necessidade de supor a finitude do grupo, como ocorrera no Capítulo 3. É claro que, sem aquele capítulo não seria possível a realização do resultado a seguir, pois usaremos fortemente a validade dos resultados para grupos finitos e o isoclinismo para transferí-los para grupos infinitos, utilizando o isomorfismo entre seus grupos quocientes.

Teorema 5.3 (Classificação dos grupos n-centralizados)**.** *Seja G um grupo n-centralizado arbitrário. Então*

(a) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2 \iff n = 4.$

(b) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3$ *ou* $S_3 \iff n = 5.$

(c) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_8, A_4, C_2^3$ *ou* C_2^4, *se* $n = 6.$

(d) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_5 \times C_5, D_{10},$ *ou* $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3 \rangle \iff n = 7.$

(e) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{12}, A_4$ *ou* C_2^3, *se* $n = 8.$

Demonstração. Vamos efetuar uma prova geral que servirá para todos os itens.

Inicialmente, suponha $\dfrac{G}{Z(G)} \cong A$, em que A é um grupo qualquer dentre os listados nos itens (a), (b) ou (d). Desde que A é finito, G é central-por-finito. Assim, pela Observação 2.3, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\text{Cent}(G)| = n$. Daí, pelo Teorema 5.2, existe um grupo finito K isoclínico a G e vale $|\text{Cent}(K)| = n$. Do isoclinismo, $\dfrac{K}{Z(K)} \cong \dfrac{G}{Z(G)} \cong A$ e, portanto, dos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.4, temos $n = 4, 5$ ou 7.

Agora, seja G n-centralizado com $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Pelo Teorema 5.2, existe um grupo finito K isoclínico a G e também n-centralizado. Em particular, $\dfrac{G}{Z(G)} \cong \dfrac{K}{Z(K)}$ e, portanto, o resultado segue pelos Teoremas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5. □

5.2 Solubilidade de grupos n-centralizados

Nesta seção, faremos outra aplicação dos resultados de isoclinismo estudados na seção anterior (Seção 5.1). Mais precisamente, obteremos um resultado de solubilidade para grupos n-centralizados. Como recorreremos novamente ao isoclinismo, precisamos primeiramente obter a classificação para grupos finitos.

Para tanto, iremos definir o que significa dizer que um grupo satisfaz a condição $(\mathcal{X}, n)$ em que $\mathcal{X}$ é uma classe de grupos (abelianos, nilpotentes, solúveis, etc.) e n é um número natural.

Definição 5.2. *Sejam $\mathcal{X}$ uma classe de grupos e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que um grupo G satisfaz a condição $(\mathcal{X}, n)$ quando todo subconjunto de G com $n+1$ elementos possui dois elementos x, y tais que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{X}$.*

Exemplo 5.1. *Vejamos dois exemplos principais*

- *Considere $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ a classe dos grupos abelianos. Neste caso G satisfaz a condição $(\mathcal{A}, n)$ quando o tamanho de um conjunto de elementos dois a dois não comutativos é no máximo n.*

- *Seja $\mathcal{X} = \mathcal{N}$ a classe dos grupos nilpotentes. Neste caso como $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ então todo grupo que satisfaz $(\mathcal{A}, n)$ satisfaz $(\mathcal{N}, n)$.*

Proposição 5.1. *Sejam n um inteiro positivo e G um grupo n-centralizado (não necessariamente finito). Então G satisfaz a condição $(\mathcal{A}, n-1)$.*

Demonstração. Este resultado é consequência do Teorema de Pyber-Zarrin (veja Teorema 2.1), mais especificamente, do fato de que $\omega(G) \leq |\text{Cent}(G)| - 1$. □

Observação 5.2. *A recíproca da proposição acima não é verdadeira, pois S_4 satisfaz a condição $(\mathcal{A}, 10)$ enquanto é um grupo 14-centralizado.*

O resultado a seguir justifica o motivo de termos introduzido o conceito de um grupo satisfazer a condição $(\mathcal{X}, n)$. Ele foi provado por G. Endimioni em 1994 [19].

Lema 5.4. *Todo grupo satisfazendo $(\mathcal{N}, n)$ para $n \leq 20$ é solúvel.*

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [19], p. 1246-1247. $\square$

Combinando a Proposição 5.1 e o Lema 5.4 conseguimos obter o seguinte critério de solubilidade para grupos n-centralizados

Teorema 5.4. *Seja G um grupo finito n-centralizado com $n \leq 21$. Então, G é solúvel. Além disso esta estimativa é a melhor possível, pois A_5 não é solúvel e é um grupo 22-centralizado.*

Demonstração. Como $|\mathrm{Cent}(G)| \leq 21$, temos pela Proposição 5.1 que G satisfaz a condição $(\mathcal{A}, k)$ e portanto satisfaz a condição $(\mathcal{N}, k)$, para algum $k \leq 20$. Segue do Lema 5.4 que G é solúvel. Utilizando o GAP [33], podemos ver que A_5 é um grupo 22-centralizado. $\square$

Com as ferramentas de isoclinismo podemos generalizar este resultado sem levar em conta a finitude do grupo.

Teorema 5.5. *Todo grupo arbitrário G com $\omega(G) \leq 20$ é solúvel e esta estimativa é a melhor possível.*

Demonstração. Do Teorema 5.1, existe um grupo finito K que é isoclínico a G. Assim, $\omega(K) = \omega(G) \leq 20$. Deste modo, K satisfaz a condição $(\mathcal{A}, n)$ e portanto a condição $(\mathcal{N}, n)$ com $n \leq 20$. Como K é finito, temos que K é solúvel pelo Lema 5.4. Assim $\dfrac{K}{Z(K)}$ é solúvel e como G é isoclínico a K, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é solúvel, o que implica que G é solúvel. Por fim, com o auxílio do GAP [33], vemos que $\omega(A_5) = 21$. $\square$

Corolário 5.1. *Seja G um grupo arbitrário n-centralizado, com $n \leq 21$. Então, G é solúvel e esta estimativa é a melhor possível.*

Demonstração. Basta notar que $\omega(G) \leq |\mathrm{Cent}(G)| - 1 \leq 20$ e assim o resultado segue do Teorema 5.5. Por fim, lembre que A_5 possui 22 centralizadores. $\square$

Considerações Finais

Neste trabalho classificamos os grupos n-centralizados para $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Contudo, vale ressaltar que foram classificados completamente os grupos 9-centralizados [6] e 10-centralizados [5] e, de forma parcial, os grupos 11-centralizados [27]. Combinamos todos os resultados existentes no teorema a seguir

Teorema. Seja G um grupo n-centralizado arbitrário. Então

(a) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2 \iff n = 4.$

(b) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3$ ou $S_3 \iff n = 5.$

(c) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_8, A_4, C_2^3$ ou C_2^4, se $n = 6$.

(d) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_5 \times C_5, D_{10}$, ou $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle \iff n = 7.$

(e) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{12}, A_4$ ou C_2^3, se $n = 8$.

(f) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong D_{14}, C_3 \rtimes C_7, C_7 \times C_7$ ou $\mathrm{Hol}(\mathbb{Z}_7) \iff n = 9.$

(g) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2^4, C_4 \times C_4, (C_4 \times C_2) \rtimes C_2, D_{16}, C_2 \times D_8, C_2^4 \times C_2, C_2^4 \times C_2 \times C_2, (C_2^3) \rtimes C_7$ ou o grupo de Frobenius de ordem 56, se $n = 10$.

(h) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong (C_9 \times C_3) \rtimes C_3$, se G é um 11-centralizado primitivo de ordem ímpar.

Com isso, indicamos como pesquisa futura o estudo dos grupos n-centralizados com $n \geq 11$ em vista de continuar completando o resultado acima. Entretanto, gostaríamos de enfatizar que outra abordagem interessante seria de tentar desenvolver um método em que não fosse tão necessário o valor explícito de $|\mathrm{Cent}(G)|$ para que se possa tentar fazer um estudo mais geral.

Nesse sentido, citamos o resultado de Zarrin [36] que mostrou que todo grupo n-centralizado com $n \leq 21$ é solúvel. Também sobre solubilidade, mencionamos o trabalho de Lima e Rodrigues [24] em que provaram que se G é um grupo finito n-centralizado, $n \geq 4$, tal que $|G| < \dfrac{30n}{19}$, então G é um grupo solúvel não-nilpotente. Além disso, Zarrin em [35], mostrou que se G é um grupo finito e semi-simples com $|\mathrm{Cent}(G)| \leq 73$, então $G \cong A_5$ ou $G \cong S_5$.

Em 1994, Belcastro e Shermann [15] perguntaram se poderia existir um grupo finito n-centralizado além de Q_8 e D_{2p}, p primo, tal que $|G| \leq 2n$. Em 2000, Ashrafi [9] enunciou diversos contra-exemplos à pergunta de Belcastro e Shermann e propôs a seguinte conjectura, com uma nova estimativa

Conjectura. (Ashrafi [9]). Seja G um grupo finito n-centralizado. Se $|G| \leq \dfrac{3n}{2}$, então $G \cong S_3, S_3 \times S_3$ ou D_{10}.

No ano de 2015, Jafarian Amiri, Mohsen Amiri, Madadi e Rostami [3] deram uma resposta positiva à esta conjectura para o caso em que o grupo é 2-nilpotente e em 2017, Jafarian Amiri, Mohsen Amiri e Rostami [4] concluíram a prova da conjectura para o caso geral.

Um caso particular do estudo de centralizadores de elementos ocorre quando se dá ênfase apenas nos centralizadores não abelianos. De forma semelhante ao que fizemos neste trabalho, define-se $\mathrm{naCent}(G)$ como o conjunto de todos os centralizadores não-abelianos de G. Grupos em que $|\mathrm{naCent}(G)| = 1$ são os já conhecidos CA-grupos, os quais foram caracterizados por R. Schmidt [32]. Jafarian Amiri e Rostami classificaram em [8] todos os grupos finitos em que $|\mathrm{naCent}(G)| = 2$ ao obter o seguinte resultado

Teorema. (Jafarian Amiri e Rostami [8]). Sejam G um grupo finito com $|\mathrm{naCent}(G)| = 2$ e $C_G(a)$ o seu centralizador próprio não-abeliano. Então vale uma das alternativas

(a) $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um p-grupo para algum primo p.

(b) $C_G(a)$ é o subgrupo de Fitting de G com índice primo p. Além disso, $p \mid |C_G(a)|$ e $|\mathrm{Cent}(G)| = |\mathrm{Cent}(C_G(a))| + j + 1$, em que j é o número de centralizadores distintos $C_G(x)$, com $x \in G \setminus C_G(a)$.

(c) $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo de Frobenius com complemento de Frobenius cíclico igual a $\dfrac{C_G(x)}{Z(G)}$, para algum $x \in G$.

Em nosso trabalho, classificamos grupos a partir de centralizadores de elementos. De forma análoga, podemos considerar os centralizadores de 2 elementos em um grupo: Seja G um grupo e $x, y \in G$ distintos. Definimos

$$C_G(x, y) = \{g \in G : gx = xg \text{ e } gy = yg\} = C_G(x) \cap C_G(y).$$

Deste modo, de maneira análoga à definição de $\mathrm{Cent}(G)$, podemos considerar

$$2 - \mathrm{Cent}(G) = \{C_G(x, y) : x, y \in G \text{ e } x \neq y\}$$

Assim, para $n \in \mathbb{N}$ dizemos que um grupo é $(2, n)$-centralizado quando $|2-\mathrm{Cent}(G)| = n$. Um trabalho notável sobre a classificação de grupos finitos a partir de centralizadores de 2 elementos é o artigo de Ashrafi, Koorepazan-Moftakhar e Salahshour [10] que obteve a classificação dos grupos finitos $(2, n)$-centralizados para $n \leq 9$.

Teorema. (Ashrafi, Koorepazan-Moftakhar e Salahshour [10]). As afirmações a seguir são válidas para qualquer grupo finito G.

(a) Não existem grupos $(2, 4)$-centralizados.

(b) G é $(2, 5)$-centralizado se, e somente se, $G \cong S_3$ ou G possui centro não-trivial e $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_2 \times C_2$. Além disso, G é um grupo $(2, 5)$-centralizado primitivo se, e somente se, $G \cong S_3$.

(c) G é $(2, 6)$-centralizado se, e somente se, $G \cong A_4$ ou G possui centro não-trivial e $\dfrac{G}{Z(G)} \cong C_3 \times C_3$ ou S_3. Além disso, G é um grupo $(2, 6)$-centralizado primitivo se, e somente se, $G \cong A_4$.

(d) G é $(2, 7)$-centralizado se, e somente se, $G \cong D_{10}, \langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$ ou G possui centro não-trivial e é um grupo 6-centralizado. Além disso, G é um grupo $(2, 7)$-centralizado primitivo se, e somente se, $G \cong D_{10}$ ou $\langle x, y : x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3\rangle$.

(e) G é $(2, 8)$-centralizado se, e somente se, G é um grupo 7-centralizado com centro não-trivial. Além disso, não existem grupos $(2, 8)$-centralizados primitivos.

(f) G é $(2, 9)$-centralizado se, e somente se, $G \cong D_{14}, \mathrm{Hol}(\mathbb{Z}_7)$, um grupo não-abeliano de ordem 21 ou G é um grupo 8-centralizado. Além disso, G é um grupo $(2, 9)$-centralizado primitivo se, e somente se, $G \cong D_{14}, \mathrm{Hol}(\mathbb{Z}_7)$ ou um grupo não-abeliano de ordem 21.

Vale destacar que ainda neste mesmo artigo, Ashrafi, Koorepazan-Moftakhar e Salahshour obtiveram um critério de solubilidade análogo ao obtido para grupos n-centralizados por Zarrin em [37]. Especificamente

Teorema. (Ashrafi, Koorepazan-Moftakhar e Salahshour [10]). Seja G um grupo finito. Se $|2 - \mathrm{Cent}(G)| < 22$, então G é solúvel.

Em 2005, Ashrafi e Taeri [11], propuseram a seguinte conjectura acerca de grupos

n-centralizados

Conjectura. (Ashrafi, Taeri [11]). Sejam G e H grupos simples e finitos. Se $|\mathrm{Cent}(G)| = |\mathrm{Cent}(H)|$, então $G \cong H$.

Uma resposta negativa para esta conjectura foi dada em 2009 por Zarrin em [35] que mostrou que os grupos simples A_7 e $PSL(2, 23)$ tem 807 centralizadores e não são isomorfos. Ashrafi, Koorepazan-Moftakhar e Salahshour [10] propuseram uma conjectura similar para o caso de grupos $(2, n)$-centralizados

Conjectura. (Ashrafi, Koorepazan-Moftakhar e Salahshour [10]). Sejam G e H grupos simples e finitos. Se $|2 - \mathrm{Cent}(G)| = |2 - \mathrm{Cent}(H)|$, então $G \cong H$.

Referências Bibliográficas

[1] ABDOLLAHI, A. AMIRI, S. M. J. HASSANABADI, A. M. **Groups with specific number of centralizers**. Houston J. Math. **33** (2007), 43-57.

[2] ABDOLLAHI, A. ATAEI, M. J. AMIRI, S. M. J. HASSANABADI, A. M. **On groups with a maximal irredundant 6-cover**. Comm. Algebra **33** (2005), 3225-3238.

[3] AMIRI, S. M. J. AMIRI, M. MADADI, H. ROSTAMI, H. **Finite groups have even more centralizers**. Bull. Iran. Math. Soc. **41** (2015), 1423-1431.

[4] AMIRI, S. M. J. AMIRI, M., ROSTAMI, H. **Finite groups determined by the number of element centralizers**. Comm. Algebra **45** (2017), 3792-3797.

[5] AMIRI, S. M. J. MADADI, H. ROSTAMI, H. **Groups with exactly ten centralizers**. Bull. Iran. Math. Soc. **44** (2018), 1163-1170.

[6] AMIRI, S. M. J. MADADI, H. ROSTAMI, H. **On 9-centralizers groups**. J. Algebra Appl. **14** (2015), 1550003 (13 pages).

[7] AMIRI, S. M. J. ROSTAMI, H. **Centralizers and the maximum size of the pairwise noncommuting elements in finite groups**. Hacet. J. Math. Stat. **46** (2017), 193-198.

[8] AMIRI, S. M. J. ROSTAMI, H. **Groups with a few nonabelian centralizers**. Publ. Math. Debrecen **87** (2015), 429-437.

[9] ASHRAFI, A. R. **On finite groups with a given number of centralizers**. Algebra Colloq. **7** (2000), 139-146.

[10] ASHRAFI, A. R. KOOREPAZAN-MOFTAKHAR, F. SALAHSHOUR, M. A. **Counting the number of centralizers of 2-element subsets in a finite group**. Comm. Algebra **48** (2020), 4647-4662.

[11] ASHRAFI, A. R. TAERI, B. **On finite groups with a certain number of centralizers**. J. Appl. Math & Computing **17** (2005), 217-227.

[12] ASHRAFI, A. R. TAERI, B. **On finite groups with exactly seven element centralizers**. J. Appl. Math. & Computing **22** (2006), 403-410.

[13] BAER, R. **Groups with preassigned central and central quotient group**. Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 387-412.

[14] BAISHYA, S. J. **On finite groups with specific number of centralizers**. Int. Electron. J. Algebra **13** (2013), 53-62.

[15] BELCASTRO, S. M. SHERMAN, G. J. **Counting centralizers in finite groups**. Math. Mag. **5** (1994), 111-114.

[16] BERKOVICH, Y. G. ZHMU'D, E. M. **Characters of Finite Groups - Part 1**. Transl. Math. Monographs **172**. Providence: Amer. Math. Soc., 1998.

[17] BRYCE, R. A. FEDRI, V. SERENA, L. **A Hughes-like property for finite groups**. Proc. Edinburgh. Math. Soc. **38** (1995), 533-541.

[18] DOLFI, S. HERZOG, M. JABARA, E. **Finite groups whose noncentral commuting elements have centralizers of equal size**. Bull. Aust. Math. Soc. **82** (2010), 293-304.

[19] ENDIMIONI, G. **Groupes finis satisfaisant la condition** $(\mathcal{N}, n)$. C. R. Acad. Sci. Paris I **319** (1994), 1245-1247.

[20] GARONZI, M. **Notas de Aulas de Representações de Grupos I**. Brasília: UnB, 2017.

[21] GRECO, D. **Sui gruppi che sono somma di quattro o cinque sottogruppi**. Rend. Accad. delle Scienze di Napoli **23** (1956), 49-56.

[22] HALL, P. **The classification of prime-power groups**. J. reine angew. Math **182** (1940), 130-141.

[23] ISAACS, I. M. **Finite Group Theory**. Grad. Stud. Math. **92**. Providence: Amer. Math. Soc., 2008.

[24] LIMA, I. S. RODRIGUES, C. B. **On solubility of groups with finitely many centralizers**. Int. Elet. J. Algebra **32** (2022), 241-245.

[25] PAKIANATHAN, J. SHANKAR, K. **Nilpotent numbers**. Amer. Math. Monthly **107** (2000), 631-634.

[26] PYBER, L. **The number of pairwise non-commuting elements and the index of the centre in a finite group**. J. Lond. Math. Soc. **35** (1987), 287-295.

[27] REZAEI, M. FORUZANFAR, Z. **On primitive 11-centralizer groups of odd order**. Malay. J. Math. Sci. **10** (2016), 361-368.

[28] ROBINSON, D. J. S. **A Course in the Theory of Groups**. New York: Springer Verlag, 1986.

[29] ROSE, H. E. **A Course on Finite Groups**. London: Springer Verlag, 2009.

[30] SCORZA, G. **Gruppi che possono pensarsi come somma di tre sottogruppi**. Boll. Un. Mat. Ital. **5** (1926), 216-218.

[31] SCOTT, W. R. **Group Theory**. New York: Dover Publications, 1987.

[32] SCHMIDT, R. **Subgroup Lattice of Groups**. De Gruyter Exp. Math. **14**. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

[33] The GAP Group. **GAP - Groups, Algorithms, and Programming**. `https://www.gap-system.org/`. Version **4.1.11** (2021).

[34] TOMKINSON, M. J. **Groups covered by finitely many cosets or subgroups**. Comm. Algebra **15** (1987), 845-859.

[35] ZARRIN, M. **On element-centralizers in finite groups**. Arch. Math. **93** (2009), 497-503.

[36] ZARRIN, M. **On noncommuting sets and centralizers in infinite group**. Bull. Aust. Math. Soc. **93** (2016), 42-46.

[37] ZARRIN, M. **On solubility of groups with finitely many centralizers**. Bull. Iran. Math. Soc. **39** (2013), 517-521.