



Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Mestrado Acadêmico em Matemática

PAULO VICTOR REIS MOREIRA

**Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos no
espaço de Minkowski**

Brasília/DF
2023

PAULO VICTOR REIS MOREIRA

Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos no espaço de Minkowski

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

Brasília/DF
2023

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Aparecida e Paulo de Faria, minha vó Fia e a minha companheira Nathália Duarte.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, aos meus pais Paulo e Maria Aparecida por estarem presentes e me apoiarem durante esse período, inclusive financeiramente, pois sem este apoio não seria possível terminar este trabalho. Agradeço também a minha companheira Nathália Duarte que esteve comigo me incentivando e me motivando nos momentos em que mais precisei e que foi capaz de me ouvir e me aguentar nesse processo. Aos colegas que caminharam comigo no mestrado. A minha irmã e aos meus parentes que confiaram, acreditaram no meu potencial e me motivaram a superar esta etapa. À minha orientadora, Luciana, que tornou possível a elaboração deste trabalho. E aos meus pets (Zeus e Astrid) que por vezes me assistiram redigir este trabalho.

Ninguém nasce feito, é experimentando-nos no mundo que nós nos fazemos.

—Paulo Freire, *Política e educação*

Resumo

Neste trabalho, estudamos superfícies tipo-espaço no espaço de Minkowski \mathbb{E}_1^3 que satisfazem a equação linear Weingarten do tipo $aH + bK = c$, onde a, b e c são constantes reais, e H e K denotam, respectivamente, a curvatura média e a curvatura gaussiana da superfície. Mostramos que, se essas superfícies são folheadas por círculos em planos paralelos e possuem $H \neq 0$ e $K \neq 0$, então essas superfícies são de revolução. Além disso, mostramos que se uma superfície tipo-espaço satisfaz a equação linear Weingarten e é folheada por círculos em planos que não são paralelos, então essa superfície é pseudo-hiperbólica.

Palavras-chave: Espaço de Minkowski, equação de Weingarten, planos de folheadão, geometria diferencial.

Abstract

In this work, we study spacelike surfaces in Minkowski space \mathbb{E}_1^3 that satisfying the linear Weingarten equation of the type $aH + bK = c$, where a, b and c are real constants and H e K denotes, respectively, the mean curvature and the Gaussian curvature of the surface. We show that if these surfaces are foliated by circles in parallel planes and $H \neq 0$ and $K \neq 0$, then these surfaces must be rotational ones. Furthermore, we show that if a spacelike surface satisfies the linear Weingarten equation and is foliated by circles in planes that are not parallel, then this surface is pseudohyperbolic.

Keywords: Minkowski space, Weingarten equation, foliation planes, differential geometry.

Sumário

Introdução	3
1 Espaço de Minkowski \mathbb{E}_1^3	6
1.1 Definições básicas	6
1.2 Caracterização de subespaços de \mathbb{E}_1^3	9
1.3 Retas e planos em \mathbb{E}_1^3	16
1.4 Teoria local das superfícies em \mathbb{E}_1^3	17
1.5 As equações de Frenet	28
1.5.1 Curvas tipo-tempo	30
1.5.2 Curvas tipo-espaço	31
1.5.3 Curvas tipo-luz	33
2 Superfícies lineares Weingarten, tipo-espaço, folheadas por círculos no espaço de Minkowski	34
2.1 Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos	35
2.2 Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos em planos paralelos	39
2.2.1 Os planos da folheação são tipo-espaço	40
2.2.1.1 Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$	40
2.2.1.2 Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$	46
2.2.2 Os planos da folheação são tipo-tempo	47
2.2.2.1 Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$	47
2.2.2.2 Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$	51

2.2.3	Os planos da folheação são tipo-luz	52
2.2.3.1	Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$	52
2.2.3.2	Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$	55
2.2.4	Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos com com $H = 0$ ou $K = 0$	56
2.2.4.1	Caso $H = 0$	56
2.2.4.2	Caso $K = 0$	58
2.3	Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos em planos não paralelos	60
2.3.1	Os planos da folheação são tipo-espaço	60
2.3.1.1	Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$	62
2.3.1.2	Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$	65
2.3.2	Os planos da folheação são tipo-luz	75
2.3.2.1	Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$	77
2.3.2.2	Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$	79
A	Códigos usados no Capítulo 2	84
A.1	Códigos usados na Subseção 2.2.1	84
A.2	Códigos usados na Subseção 2.2.2	85
A.3	Códigos usados na Subseção 2.2.3	86
A.4	Códigos usados na Subseção 2.3.1	87
A.5	Códigos usados na Subseção 2.3.2	88

Introdução

Na segunda metade do século XIX, em busca das superfícies isométricas às superfícies de revolução, Weingarten [22, 23] introduziu uma classe de superfícies que tem hoje seu nome. Essencialmente, tais superfícies são uma generalização das superfícies de curvatura constante.

Uma superfície é chamada Weingarten se existir uma relação entre suas curvaturas principais, k_1 e k_2 , do tipo $\phi(k_1, k_2) = 0$ onde ϕ é uma função suave de duas variáveis. É natural reescrever essa relação em termos da sua curvatura gaussiana e curvatura média, ou seja, $\Phi(H, K) = 0$, onde Φ é uma função diferenciável. O exemplo mais simples de tal relação é a relação linear dada por

$$aH + bK = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

e neste caso, a superfície é chamada superfície linear Weingarten, ou superfície de Weingarten do tipo linear.

Após os trabalhos desenvolvidos por Weingarten, diversos geômetras estudaram as superfícies de Weingarten como é o caso de Chern [5], Hartman e Winter [7] e mais recentemente por López [9, 16] e Kühnel [11].

Dentre as superfícies que satisfazem (1) destacamos as superfícies com curvatura gaussiana constante, que foram trabalhadas por López em [12], que satisfazem (1) para $a = 0$, e também as superfícies com curvatura média constante, estudadas por López em [15], que satisfazem a Equação (1) para $b = 0$.

Uma abordagem a essas superfícies consiste em procurar aquelas que são lineares Weingarten e que também são superfícies de revolução. Do ponto de vista euclidiano as superfícies de revolução são obtidas pela rotação de uma curva em torno de um eixo determinado. Neste contexto, matemáticos investigaram a existência das superfícies lineares Weingarten de revolução no espaço de Minkowski.

O espaço de Minkowski 3-dimensional, que denotamos por \mathbb{E}_1^3 , é o conjunto \mathbb{R}^3 munido da métrica de Lorentz dada por

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

Esta métrica não é positiva definida e difere da métrica euclidiana, que é positiva definida, por um sinal no último termo. Analisar superfícies lineares Weingarten

que também são de revolução no espaço de Minkowski necessita de uma maior atenção pois neste caso teremos que observar o eixo de rotação levando em consideração se o mesmo é tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

Também na segunda metade do século XIX, Enneper [6] introduziu a definição de superfícies cíclicas, que são as determinadas por uma família suave a 1-parâmetro de planos, cujas interseções com a superfície são partes de círculos. Tais superfícies constituem uma classe mais abrangente que as superfícies de revolução. Quando falamos de círculos estamos falando de curvas planas com curvatura constante, no caso euclidiano, apenas o círculo satisfaz essa característica, porém, quando consideramos o espaço de Minkowski temos três curvas que satisfazem essa condição: os círculos, as hipérbolas e as parábolas. Portanto, fica evidente que essa classe inclui as superfícies de revolução, mas não se limita a elas. Além disso, os planos da folheação não são necessariamente paralelos e mesmo existindo dois círculos da folheação que se encontram em planos paralelos, as direções de seus raios não são necessariamente ortogonais à reta ligando seus centros.

Como exemplo, temos a esfera que é trivialmente cíclica, já que suas interseções com qualquer família de planos serão círculos. Em dimensão superior, a partir dos trabalhos de Nitsche e Jagy [8, 20], hipersuperfícies com curvatura média constante e folheadas por esferas foram estudadas por López [14]. No caso euclidiano, foi mostrado por López, em [16], que toda superfície do espaço euclidiano que é folheada por círculos e que satisfaz uma condição do tipo $aH + bK = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ é uma superfície de revolução, ou uma superfície mínima de Riemann, ou um cone generalizado. Vários outros autores tem se dedicado ao estudo desses temas, ver por exemplo [1, 2, 3, 4, 8, 10, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 24].

Neste trabalho, baseado em [9], estudamos as superfícies no espaço de Minkowski que são lineares Weingarten, cíclicas, com curvaturas média e gaussiana não nulas. Mostramos que se os planos da folheação são paralelos então a superfície é de revolução e, caso os planos não sejam paralelos, então a superfície é pseudo-hiperbólica, ou seja, é uma superfície $\mathcal{H}^{2,1}(r, p)$ em \mathbb{E}_1^3 tais que

$$\mathcal{H}^{2,1}(r, p) = \{x \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle x - p, x - p \rangle = -r^2\},$$

onde o $r > 0$ é chamada raio e $p \in \mathbb{E}_1^3$ é o centro de $\mathcal{H}^{2,1}$.

O trabalho está dividido em dois capítulos. No Capítulo 1, introduzimos os conceitos preliminares referentes ao espaço de Minkowski, iniciamos com as definições básicas, a caracterização de subespaço, propriedades geométricas, teoria local das superfícies e deduzimos as equações de Frenet para curvas tipo-espaço, tipo-tempo e tipo-luz.

No Capítulo 2, estudamos as superfícies lineares Weingarten cíclicas, do tipo-espaço no espaço de Minkowski e mostramos os dois teoremas principais do trabalho. Este capítulo por sua vez, está dividido em três seções.

Na Seção 2.1, caracterizamos curvas regulares e curvas cujas propriedades no

espaço de Minkowski cumprem o papel dos círculos no espaço euclidiano, e definimos conceitos importantes para as demonstrações feitas nas seções seguintes.

Na Seção 2.2, consideramos as superfícies lineares Weingarten, tipo-espaço folheadas por círculos com $H \neq 0$ e $K \neq 0$ e mostramos que se os planos da folheação são paralelos então as superfícies são de revolução. O caso $H = 0$ foi estudado por López em [12] e o caso $K = 0$ foi estudado em [15], também por López. Entretanto, na Subseção 2.2.4, mostramos como ficam caracterizadas as superfícies com curvatura média ou gaussiana nula que são folheadas por círculos em planos paralelos.

Na Seção 2.3, consideramos as superfícies lineares Weingarten tipo-espaço folheadas por círculos, e mostramos que se os planos da folheação não são paralelos, então as superfícies são pseudo-hiperbólicas.

Por último, no Apêndice, listamos alguns códigos do Maple que foram utilizados nas contas da demonstração do Capítulo 2.

Capítulo 1

Espaço de Minkowski \mathbb{E}_1^3

Neste capítulo, introduzimos os resultados preliminares referentes ao espaço de Minkowski. Iniciamos com alguns conceitos da Geometria Diferencial e resultados da Álgebra Linear, bem como conceitos básicos advindos da métrica de Lorentz, da caracterização do espaço de Minkowski, das propriedades geométricas dos vetores e da teoria local das superfícies neste espaço.

1.1 Definições básicas

Iniciamos esta seção com algumas definições e resultados de Álgebra Linear sobre as formas bilineares. Em seguida, introduzimos os conceitos básicos relacionados ao Espaço de Minkowski, bem como sua definição e suas propriedades.

Definição 1.1.1. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e b uma forma bilinear simétrica em V . Dizemos que:*

1. *b é positiva definida (respectivamente negativa definida) desde que, dado $v \neq 0$ em V tivermos que $b(v, v) > 0$ (respectivamente $b(v, v) < 0$).*
2. *b é não-degenerada, desde que para cada $v \in V$ tal que $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ tivermos $v = 0$.*

Similarmente, dizemos que b é *indefinida* caso não seja positiva definida nem negativa definida, e será *degenerada* caso não se verifique o segundo item.

Definição 1.1.2. *Seja b uma forma bilinear simétrica em V . Dizemos que o número inteiro ν é o índice da forma b em V , desde que seja o maior número*

inteiro que coincide com a dimensão de algum subespaço vetorial W de V tal que $b|_W$ é uma forma negativa definida.

Proposição 1. *Seja b uma forma bilinear simétrica em V , espaço vetorial real de dimensão finita n . Então a forma b é não-degenerada se, e somente se, sua matriz representante em alguma base é uma matriz inversível.*

Demonstração. Seja $B = (b_{ij})$ a matriz representante da forma b em uma base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de V e denote por $b^i = (b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni})$, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a i -ésima coluna de B . Lembramos que B é inversível se, e somente se, suas colunas são linearmente independentes. Por bilinearidade de b verificamos que $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ se, e somente se, $b(v, \alpha_i) = 0$ para cada α_i . Deste modo b é degenerada se, e somente se, existe $v = v_1\alpha_1 + \dots + v_n\alpha_n \neq 0$ (isto é, pelo menos um dos v_i é não nulo) tal que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ temos

$$0 = b(v, \alpha_i) = \sum_{j=1}^n v_j b(\alpha_j, \alpha_i) = \sum_{j=1}^n v_j b_{ji},$$

ou ainda

$$0 = v_1 b^1 + v_2 b^2 + \dots + v_n b^n,$$

o que equivale a dizer que as colunas de B são linearmente dependentes. Deste modo garantimos que b é não-degenerado, se, e somente se, sua matriz representativa em alguma base é invertível. □

Definição 1.1.3. *Definimos o Espaço de Minkowski como sendo o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do produto interno $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido pela regra que associa $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ao número real*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 \in \mathbb{R}.$$

A forma $g = \langle, \rangle$ é uma métrica, chamada de métrica de Lorentz.

Usaremos a notação $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ para o espaço de Minkowski.

Proposição 2. *A métrica g é, de fato, uma forma bilinear, simétrica, não-degenerada com índice $v = 1$ em $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$.*

Demonstração. Sejam $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que a métrica g dada acima é bilinear, simétrica e não

degenerada.

Para mostrar que a forma é bilinear, observe que

$$\begin{aligned}\langle u + v, w \rangle &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 - (u_3 + v_3)w_3 \\ &= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 - u_3w_3 - v_3w_3 \\ &= u_1w_1 + u_2w_2 - u_3w_3 + v_1w_1 + v_2w_2 - v_3w_3 \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle ku, w \rangle &= ku_1w_1 + ku_2w_2 - ku_3w_3 \\ &= k(u_1w_1 + u_2w_2 - u_3w_3) \\ &= k\langle u, w \rangle.\end{aligned}$$

Logo temos que g é linear na primeira entrada. Analogamente temos que g é linear na segunda entrada, logo g é bilinear.

Para mostrar que a forma é simétrica, basta observar que

$$\begin{aligned}\langle u, w \rangle &= u_1w_1 + u_2w_2 - u_3w_3 \\ &= w_1u_1 + w_2u_2 - w_3u_3 \\ &= \langle w, u \rangle.\end{aligned}$$

Logo g é simétrica.

Para mostrar que a forma é não degenerada considere

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz associada a forma bilinear \langle, \rangle é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que é invertível, e pela Proposição 1 temos que \langle, \rangle é não degenerada.

Por fim, para mostrar que o índice é igual a 1, seja W o subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 gerado pelo vetor $(0, 0, 1)$, temos então que $\langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle|_W = -1$, logo o subespaço vetorial gerado aplicado a métrica é negativo definido. Portanto, segue da Definição 1.1.2 que \langle, \rangle possui índice 1. □

Definição 1.1.4. *Sejam u e v vetores em \mathbb{E}_1^3 . O produto vetorial Lorentziano de u e v (nesta ordem), denotado por $u \times v$, é o único vetor que satisfaz*

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w), \forall w \in \mathbb{E}_1^3,$$

onde

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

e $u_i, v_i, w_i, i = 1, 2, 3$, são as coordenadas dos vetores u, v, w , respectivamente, na base canônica.

A bilinearidade de \langle, \rangle garante a existência e unicidade de $u \times v$. Fazendo w variar entre os vetores da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$, obtemos as coordenadas de $u \times v$, dadas por

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_2v_1 - u_1v_2).$$

Ou ainda, numa outra notação:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Proposição 3. *Sejam $u, v, x, y \in \mathbb{E}_1^3$. São válidas as seguintes propriedades.*

1. $u \times v = -v \times u$.
2. $u \times v \perp u$ e $u \times v \perp v$.
3. $u \times v = 0$ se, e somente se, u e v são proporcionais.
4. $\langle u \times v, x \times y \rangle = \begin{vmatrix} \langle u, y \rangle & \langle v, y \rangle \\ \langle u, x \rangle & \langle v, x \rangle \end{vmatrix}$.
5. $\langle u \times v, x \rangle = \langle x \times u, v \rangle$.
6. $x \times (u \times v) = \langle x, u \rangle v - \langle x, v \rangle u$.

As demonstrações seguem das propriedades do determinante.

1.2 Caracterização de subespaços de \mathbb{E}_1^3

Nesta seção, apresentamos algumas proposições que são comuns a todo subespaço vetorial, em seguida definimos vetores e subespaços em \mathbb{E}_1^3 , e fornecemos

algumas proposições e corolários decorrentes dessas definições.

Dado um subconjunto finito $A = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^3$, denotamos por,

$$\text{ger}\{u_1, \dots, u_n\} = \langle \{u_1, \dots, u_n\} \rangle,$$

o subespaço vetorial gerado por todas as combinações lineares dos elementos de A por escalares reais, isto é, $\langle \{u_1, \dots, u_n\} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i u_i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ e } u_i \in A, \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}$.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finito, munido de b uma forma bilinear não-degenerada. Dizemos que dois vetores $u, v \in V$ são *ortogonais* em relação a b desde que, $b(u, v) = 0$ e denotamos $u \perp v$. Além disso, dado $A \subset V$ fica definido o conjunto $A^\perp = \{v \in V \mid b(v, a) = 0, \forall a \in A\}$ dito *conjunto ortogonal* a A .

Proposição 4. *Se W é um subespaço de V , então W^\perp também é subespaço de V .*

Demonstração. Sejam v_1 e $v_2 \in W^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in W$ e b a forma bilinear não-degenerada que define W^\perp . Temos, pela definição de vetores ortogonais, que $b(v_1, a) = b(v_2, a) = 0$. Para mostrar que W^\perp é subespaço vetorial de V basta mostrar que $v_1 + \lambda v_2 \in W^\perp$, ou seja, $b(v_1 + \lambda v_2, a) = 0$. Pela linearidade de b temos que

$$b(v_1 + \lambda v_2, a) = b(v_1, a) + \lambda b(v_2, a) = 0.$$

Portanto, W^\perp é subespaço vetorial de V . □

Dito isto, temos algumas caracterizações sobre o caráter casual de um subespaço em relação ao seu ortogonal.

Proposição 5. *Seja (V, b) um espaço tal que a métrica b é não-degenerada e $U \subset V$ é um subespaço vetorial de V .*

1. *Então, $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$.*
2. *Então, $(U^\perp)^\perp = U$.*
3. *Se $b|_U$ é não-degenerado, então $b|_{U^\perp}$ é também, não-degenerado.*

Demonstração. 1. Seja m a dimensão de U e considere $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ uma base para U . Tome uma extensão $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ como base de V . Por linearidade de b , temos que um vetor $x \in V$ pertence a U^\perp se, e somente se,

$b(\alpha_i, x) = 0$ para cada $i = 1, \dots, m$. Denotando $b_{ij} = b(\alpha_i, \alpha_j)$ temos que $x = \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j \in V$ pertence a U^\perp se, e somente se,

$$b\left(\alpha_i, \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) = 0, \forall i = 1, \dots, m,$$

ou seja, se, e somente se, x é solução do seguinte sistema,

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Este é um sistema linear homogêneo de m equações nas n variáveis x_j . De tal modo que a dimensão de U^\perp coincide com a dimensão do espaço de soluções do sistema acima. Matricialmente este sistema é escrito como

$$[0]_{m \times 1} = [B]_{m \times n} [x_j]_{n \times 1},$$

com $B = (b_{ij})$. Então a dimensão do espaço das soluções do sistema coincide com a dimensão do núcleo da transformação $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Agora, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos

$$\dim N(B) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim \text{Im}(B) = n - m.$$

Assim, $\dim(U^\perp) = n - m = \dim(V) - \dim(U)$.

2. Primeiramente se $x \in U$, então $b(x, v) = 0$ para todo $v \in U^\perp$, o que ocorre se, e somente se, $x \in (U^\perp)^\perp$. Deste modo $U \subset (U^\perp)^\perp$. Segue do item anterior que

$$\begin{aligned} \dim(U^\perp)^\perp &= \dim V - \dim U^\perp \\ &= \dim V - (\dim V - \dim U) \\ &= \dim U. \end{aligned}$$

E assim garantimos que $(U^\perp)^\perp = U$.

3. Seja $U \subset V$ um subespaço tal que $b|_U$ é não-degenerado. Suponhamos por contradição que $b|_{U^\perp}$ é degenerado e tome $\bar{u} \in U^\perp$ tal que $\bar{u} \neq 0$ e $b(\bar{u}, v) = 0$ para todo $v \in U^\perp$, isto é, $\bar{u} \in (U^\perp)^\perp = U$ de modo que $b|_U$ é degenerada, um absurdo.

□

Agora, voltado ao espaço de Minkowski, daremos as seguintes definições.

Definição 1.2.1. Dado $u \in \mathbb{E}_1^3$, dizemos que u é um vetor:

1. Tipo-espaço se $\langle u, u \rangle > 0$, ou $u = 0$.
2. Tipo-tempo se $\langle u, u \rangle < 0$.
3. Tipo-luz se $\langle u, u \rangle = 0$ e $u \neq 0$.

Analisando o conjunto dos vetores tipo-luz, temos que a superfície C gerada por esses vetores é da forma

$$\begin{aligned}
 C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \pm \sqrt{x^2 + y^2} = z, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\} \\
 &= \{(x, y, \pm \sqrt{x^2 + y^2}) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 0, 0\}\}.
 \end{aligned}$$

Logo a superfície C gerada por todos os vetores tipo-luz é um cone, chamado de *cone de luz*, que está ilustrado na Figura 1.1.

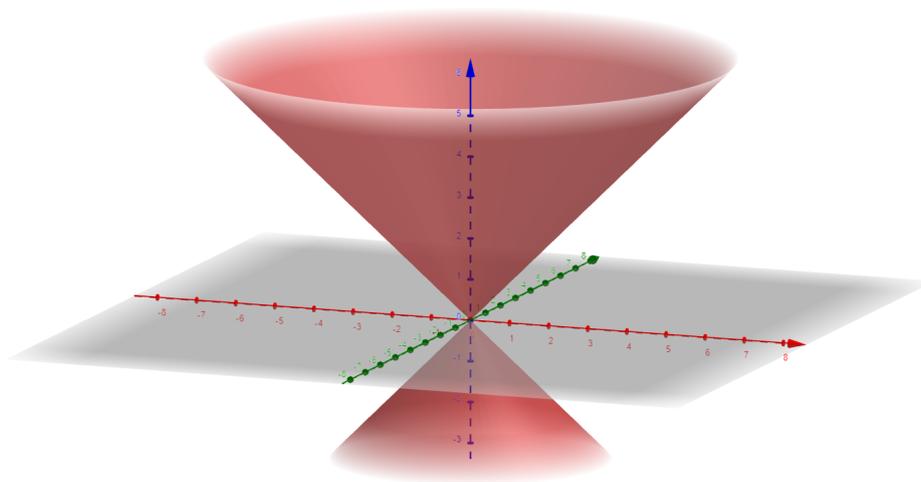


Figura 1.1: Superfície gerada por todos os vetores tipo-luz.

Segue da Definição 1.2.1 que os vetores da base canônica do espaço \mathbb{R}_1^3 , $\{e_1, e_2, e_3\}$, são classificados como $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$ são vetores do tipo-espaço,

$e_3 = (0, 0, 1)$ é um vetor do tipo-tempo e $e_2 + e_3 = (0, 1, 1)$ é um vetor do tipo-luz. Também, podemos caracterizar os vetores do espaço de Minkowski pela união disjunta $\mathbb{E}_1^3 = \mathcal{E} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{L}$, onde $\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{E}_1^3 | u \text{ é o vetor tipo-espaço}\}$, $\mathcal{T} = \{u \in \mathbb{E}_1^3 | u \text{ é o vetor tipo-tempo}\}$ e $\mathcal{L} = \{u \in \mathbb{E}_1^3 | u \text{ é o vetor tipo-luz}\}$.

Definição 1.2.2. Dado $U \subset \mathbb{E}_1^3$ subespaço vetorial, dizemos que U é:

1. tipo-espaço se sua métrica induzida for positiva definida não degenerada ou se $U = 0$.
2. tipo-tempo se sua métrica induzida for não-degenerada de índice 1.
3. tipo-luz se sua métrica induzida for degenerada e $U \neq 0$.

Com essas definições temos as seguintes proposições.

Proposição 6. Seja $v \in \mathbb{E}_1^3$. Então, v é tipo-tempo se, e somente se, $\langle \{v\}^\perp \rangle$ for tipo-espaço. Analogamente v é tipo-espaço se, e somente se, $\langle v \rangle^\perp$ for tipo-tempo. Além disso, nos dois casos $\mathbb{E}_1^3 = \langle \{v\} \rangle \oplus \langle \{v\}^\perp \rangle$.

Demonstração. Vamos mostrar que os vetores que compõem a base de $\langle v \rangle^\perp$ são vetores tipo-espaço. Seja $U = \langle v \rangle$, temos que U é um subespaço não degenerado, então, da Proposição 5, temos que U^\perp também é não degenerado. Logo U^\perp não é tipo-luz. Suponha, por contradição, que existe $u \in U^\perp$ tipo-tempo, tal que $\langle u, v \rangle = 0$.

Sejam $u = (a_1, a_2, a_3)$ e $v = (b_1, b_2, b_3)$. Por hipótese, u e v são tipo-tempo e $\langle u, v \rangle = 0$, logo:

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &= a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 < 0 \\ \langle v, v \rangle &= b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 < 0 \\ 0 = \langle u, v \rangle &= a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$a_1^2 + a_2^2 < a_3^2 \tag{1.1}$$

$$b_1^2 + b_2^2 < b_3^2 \tag{1.2}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_3 b_3. \tag{1.3}$$

Das Inequações (1.1) e (1.2) temos:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 < a_3^2 b_3^2. \tag{1.4}$$

Elevando a Equação (1.3) ao quadrado temos:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_3^2b_3^2 \implies a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2. \quad (1.5)$$

Substituindo (1.5) em (1.4) temos que

$$\begin{aligned} a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 &< a_3^2b_3^2 \\ a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 &< 0 \\ (a_1^2b_2^2 - a_2^2b_1^2)^2 &< 0. \end{aligned}$$

que é um absurdo. Logo $u \in U^\perp$ é um vetor do tipo-espaço. Consideremos $\overline{B} = \{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de U^\perp e v temos três vetores ortogonais e linearmente independentes, ou seja, estes três vetores formam uma base de \mathbb{E}_1^3 . Portanto, $\mathbb{E}_1^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$.

Reciprocamente, se $\langle v \rangle^\perp = \langle v_1, v_2 \rangle$ é um subespaço tipo-espaço então v seria o complemento da base de \mathbb{E}_1^3 e obrigatoriamente seria um vetor tipo-tempo pois do contrário teríamos três vetores linearmente independentes tipo-espaço.

Analogamente, mostramos que v é um vetor tipo-espaço se, e somente se, $\langle v \rangle^\perp$ é um subespaço tipo-tempo. □

Decorrem dessa proposição os dois corolários seguintes.

Corolário 1. *Seja $U \subset \mathbb{E}_1^3$. Então U é tipo-espaço se, e somente se, U^\perp é tipo-tempo. Analogamente U é tipo-tempo se, e somente se, U^\perp é tipo-espaço.*

Corolário 2. *Seja $U \subset \mathbb{E}_1^3$. Então U é tipo-luz se, e somente se, U^\perp é tipo-luz.*

Proposição 7. *Sejam $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ dois vetores tipo-luz. Então, u e v são linearmente dependentes se, e somente se, $g(u, v) = \langle u, v \rangle = 0$*

Demonstração. Primeiramente se $u = \lambda v$, temos

$$g(u, v) = g(\lambda v, v) = \lambda g(v, v) = 0,$$

pois v é tipo-luz, logo $u \perp v$. Reciprocamente suponhamos que $u \perp v$. Vamos mostrar que u é igual a v a menos de um múltiplo escalar.

Considere $\mathcal{L}^3 = \langle \{e_3\} \rangle^\perp \oplus \langle \{e_3\} \rangle$ uma decomposição com e_3 vetor tipo-tempo da base canônica. A menos de um múltiplo escalar podemos escrever $u = x + w$ e $v = y + w$ em que a decomposição w na componente e_3 é a mesma. Vamos mostrar que $x = y$ e concluir a demonstração. Por um lado, como u e v são tipo-luz, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle x + w, x + w \rangle + \langle y + w, y + w \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle x, w \rangle + \langle y, y \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle y, w \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle w, w \rangle + 2\langle x, w \rangle + 2\langle y, w \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por outro lado, como $u \perp v$ temos que $0 = \langle u, v \rangle$ e com isto,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u, v \rangle \\
0 &= \langle x + w, y + w \rangle \\
0 &= \langle x, y \rangle + \langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle + \langle w, w \rangle \\
-\langle x, y \rangle &= \langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle + \langle w, w \rangle.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Substituindo (1.7) em (1.6), temos que:

$$0 = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle = \langle x - y, x - y \rangle.$$

Como $x - y \in \{\{e_3\}\}^\perp$, temos que $x - y$ é tipo-espaço que pela equação devemos ter $x - y = 0$. Logo $x = y$ e assim u é igual a v a menos de um múltiplo escalar e o resultado segue. □

Proposição 8. *Seja $U \subseteq \mathbb{E}_1^3$ um subespaço bidimensional. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. U é tipo-tempo.
2. U contém dois vetores tipo-luz linearmente independentes.
3. U contém um vetor tipo-tempo.

Demonstração. Para o caso (1) \implies (2), suponha que U é tipo-tempo. Então U é não degenerado de índice 1 e, portanto, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de U tal que e_1 é tipo-espaço e e_2 é tipo-tempo. Assim, os vetores $e_1 + e_2$ e $e_1 - e_2$ são tipo-luz, pois

$$\langle e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle \pm 2\langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle = 1 - 1 = 0.$$

Além disso, pela Proposição 7, segue que estes vetores são linearmente independentes, pois $\langle e_1 + e_2, e_1 - e_2 \rangle = 2 \neq 0$.

Para o caso (2) \implies (3), sejam $u, v \in U$ linearmente independentes e tipo-luz. Então, pela Proposição 7, $\langle u, v \rangle \neq 0$. Além disso, $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = 0$. Note que

$$\begin{aligned}
\langle u + v, u + v \rangle &= 2\langle u, v \rangle \neq 0, \\
\langle u - v, u - v \rangle &= -2\langle u, v \rangle \neq 0.
\end{aligned}$$

Do fato de $\langle u, v \rangle \neq 0$, temos que ou $\langle u, v \rangle > 0$ ou $\langle u, v \rangle < 0$. Se for $\langle u, v \rangle > 0$, então $\langle u - v, u - v \rangle = -2\langle u, v \rangle < 0$. Por outro lado, se for $\langle u, v \rangle < 0$, concluímos que $\langle u + v, u + v \rangle = 2\langle u, v \rangle < 0$. Ou seja, sempre existe um vetor tipo-tempo em

U .

Para o caso (3) \implies (1), seja $u \in U$ um vetor tipo-tempo. Então, pela Proposição 6, $Span\{u\}^\perp$ é tipo-espaço. Dado $v \in U^\perp$, temos em particular que $v \perp u$. Assim, $v \in Span\{u\}^\perp$. Logo, $U^\perp \subset Span\{u\}^\perp$ e, assim, U^\perp é também tipo-espaço. Logo, pelo Corolário 1, segue que U é tipo-tempo. \square

Proposição 9. *Seja $U \subseteq \mathbb{E}_1^3$ um subespaço. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. U é tipo-luz.
2. U contém um vetor tipo-luz, mas nenhum vetor tipo-tempo.
3. $U \cap C = L - \{0\}$, onde L é um subespaço de dimensão 1 e C é o cone de luz.

Demonstração. Note que, se $dimU = 1$, o resultado segue. Vejamos para $dimU = 2$.

Para o caso (1) \implies (2), U tipo-luz implica que existe $v \in U$ não nulo tal que $\langle v, u \rangle = 0$, para todo $u \in U$.

Em particular, $\langle v, v \rangle = 0$. Assim, existe $v \in U$ tipo-luz, e, pela Proposição 8, segue que U não contém vetores tipo-tempo.

Para o caso (2) \implies (3), como U contém um vetor tipo-luz, então $U \cap C$ é não vazio. Escreva $U \cap C = L - \{0\}$, onde L é um subespaço de \mathbb{E}_1^3 . Se existissem dois vetores linearmente independentes tipo-luz em L , estes gerariam um subespaço de \mathbb{E}_1^3 de dimensão dois que, pela Proposição 8, conteria um vetor tipo-tempo, gerando uma contradição. Logo, $dimL = 1$.

Para o caso (3) \implies (1), sendo $U \cap C = L - \{0\} \neq \emptyset$, U não pode ser tipo-espaço. Além disso, pela proposição 8, U não pode ser tipo-tempo, já que U não contém dois vetores L.I. tipo-luz. Portanto, U é tipo-luz. \square

1.3 Retas e planos em \mathbb{E}_1^3

Na subseção anterior fornecemos caracterizações dos subespaços vetoriais em \mathbb{E}_1^3 quanto aos seus caracteres casuais (espaço, tempo ou luz). Com isto fica definido o caráter casual de retas (R) e de planos (P) no espaço de Minkowski conforme segue.

Definição 1.3.1. *Sejam $R \subset \mathbb{R}^3$ uma reta e $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano no espaço de Minkowski. Então dizemos que*

1. $R \subset \mathbb{R}^3$ é uma reta tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz desde que o subespaço vetorial unidimensional é, respectivamente, tipo-espaço, tipo-tempo, tipo-luz.
2. $P \subset \mathbb{R}^3$ é um plano tipo-espaço (ou Riemanniano), tipo-tempo (ou Lorentziano) ou tipo-luz (ou degenerado) desde que o subespaço vetorial bidimensional é, respectivamente, tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

Com esta definição podemos usar a caracterização de subespaço vetorial unidimensionais e bidimensionais para caracterizar retas e planos.

Proposição 10. *Sejam $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano e $\vec{n}_{\mathbb{E}^3} \in \mathbb{R}^3$ um vetor normal, em relação a métrica euclidiana, ao plano P . Então, P é tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz se, e somente se, $\vec{n}_{\mathbb{E}^3}$ é tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz, respectivamente.*

Demonstração. De fato, se $P \subset \mathbb{R}^3$ é um plano com $\vec{n}_{\mathbb{E}^3} = (a, b, c)$ um vetor normal a este plano em relação a métrica euclidiana, podemos escrever $\bar{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\}$ em que \bar{P} é a translação de P a origem de \mathbb{R}^3 . Como

$$\bar{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by - (-c)z = 0\} = \langle (a, b, -c) \rangle^\perp,$$

segue da Proposição 6 que o caráter causal de P é o oposto do caráter casual de $(a, b, -c)$, que por sua vez possui o mesmo caráter de $\vec{n}_{\mathbb{E}^3}$. De fato, note que

$$\langle (a, b, -c), (a, b, -c) \rangle = a^2 + b^2 - (-c)^2 = a^2 + b^2 - c^2 = \langle \vec{n}_{\mathbb{E}^3}, \vec{n}_{\mathbb{E}^3} \rangle.$$

E assim a proposição está demonstrada. □

1.4 Teoria local das superfícies em \mathbb{E}_1^3

Nesta seção tratamos das superfícies parametrizadas no espaço de Minkowski.

Definição 1.4.1. *Seja $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma aplicação definida em um subconjunto U aberto e conexo em \mathbb{R}^2 . Dizemos que \mathcal{X} é uma Superfície parametrizada em \mathbb{E}_1^3 se \mathcal{X} é diferenciável em U .*

Definição 1.4.2. *Seja $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma superfície parametrizada. Dizemos que \mathcal{X} é regular em $q \in U$ se a diferencial de \mathcal{X} no ponto q , $d\mathcal{X}_q$, é uma transformação linear injetiva, e dizemos que \mathcal{X} é regular se ela for regular em cada ponto de U . Dizemos que \mathcal{X} é simples se o traço da aplicação $\mathcal{X}(U) \subset \mathbb{R}^3$ não admite auto-interseção.*

Dada uma superfície parametrizada regular $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ no espaço de Minkowski a condição de regularidade nos garante que a cada ponto $q_0 \in U$ é possível associar um espaço vetorial de dimensão 2, chamado de *plano tangente*.

Definição 1.4.3. *Seja $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma superfície parametrizada regular. Dado $q_0 = (u_0, v_0) \in U$ dizemos que $w \in \mathbb{E}_1^3$ é um vetor tangente a superfície \mathbb{X} em q_0 , desde que w seja dado por $w = \alpha'(t_0)$, em que $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ é a imagem por \mathbb{X} de alguma curva $(u(t), v(t))$ em U com $(u(t_0), v(t_0)) = q_0$. Denotaremos por $T_q\mathbb{X}$ o plano tangente a \mathbb{X} em $q \in U$.*

Deste modo, temos que $\mathbb{X}_u(q_0)$ e $\mathbb{X}_v(q_0)$ serão vetores tangentes as curvas coordenadas $\mathbb{X}(u, v_0)$ e $\mathbb{X}(u_0, v)$, respectivamente. Analogamente as superfícies no espaço euclidiano os vetores $\mathbb{X}_u(q_0)$ e $\mathbb{X}_v(q_0)$, ditos vetores tangentes coordenados, formam uma base para o plano tangente a superfície em q_0 . Diremos que $\{\mathbb{X}_u(q), \mathbb{X}_v(q)\}$ é a base coordenada do plano tangente a superfície em $q \in U$.

Como o plano tangente é um subespaço vetorial de \mathbb{E}_1^3 podemos introduzir um produto interno neste espaço, e isto, de certa forma, permitirá introduzir conceitos geométricos na superfície. Assim, dada uma superfície parametrizada regular no espaço de Minkowski, munimos cada plano tangente com a métrica de Lorentz g induzida de \mathbb{E}_1^3 da seguinte forma,

$$g : T_q\mathbb{X} \times T_q\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto g(v, w) = \langle v, w \rangle,$$

de modo que cada plano tangente será também um espaço vetorial de dimensão 2 munido da métrica g . Esta métrica, é uma forma bilinear simétrica, e a ela podemos associar uma forma quadrática dada na seguinte definição.

Definição 1.4.4. *Seja $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma superfície parametrizada regular e $T_q\mathbb{X}$ o plano tangente a \mathbb{X} em q . A forma quadrática*

$$I : T_q\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}; \quad w \in T_q\mathbb{X} \mapsto I_q(w) = g(w, w) = \langle w, w \rangle \in \mathbb{R},$$

é dita *primeira forma fundamental* de \mathbb{X} em $q \in U$.

E assim podemos definir o caráter casual para uma superfície parametrizada regular de acordo com o caráter casual do seu plano tangente.

Definição 1.4.5. *Seja $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma superfície parametrizada regular no espaço de Minkowski, e $q \in U$. Dizemos que:*

1. *A superfície \mathbb{X} é tipo-espaço (respectivamente tipo-tempo) em q desde que, o plano tangente $T_q\mathbb{X}$ a \mathbb{X} em q seja um plano tipo-espaço (respectivamente tipo-tempo).*

2. A superfície \mathcal{X} é tipo-luz ou degenerada em q desde que, o plano tangente $T_q\mathcal{X}$ a \mathcal{X} em q seja um plano tipo-luz.

Dizemos também que \mathcal{X} é superfície tipo-espaço (respectivamente tipo-tempo, tipo-luz ou degenerada) desde que seja tipo-espaço (respectivamente tipo-tempo, tipo-luz) em cada $q \in U$.

Dada \mathcal{X} uma superfície parametrizada regular no espaço de Minkowski, podemos expressar a primeira forma quadrática em termos da base coordenada $\{\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v\}$ da seguinte forma: se $w \in T_q\mathcal{X}$ então $w = a\mathcal{X}_u + b\mathcal{X}_v$ para algum par a e b de números reais, de modo que

$$\begin{aligned} I_q(w) &= \langle a\mathcal{X}_u + b\mathcal{X}_v, a\mathcal{X}_u + b\mathcal{X}_v \rangle \\ &= a^2\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle + 2ab\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle + b^2\langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle \\ &:= a^2E + 2abF + b^2G, \end{aligned}$$

em que, as funções $E, F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} E(q) &= \langle \mathcal{X}_u(q), \mathcal{X}_u(q) \rangle, \\ F(q) &= \langle \mathcal{X}_u(q), \mathcal{X}_v(q) \rangle, \\ G(q) &= \langle \mathcal{X}_v(q), \mathcal{X}_v(q) \rangle. \end{aligned} \tag{1.8}$$

As funções E, F, G são ditas coeficientes da primeira forma fundamental. A matriz de I expressa na base coordenada é dada por:

$$I_q = \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Assim, temos uma caracterização do caráter causal de uma superfície não-degenerada em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental.

Proposição 11. *Seja $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma superfície parametrizada regular não-degenerada no espaço de Minkowski com E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental. Então \mathcal{X} é tipo-espaço (respectivamente tipo-tempo) se, e somente se, $EG - F^2 > 0$ (respectivamente < 0).*

Demonstração. Suponhamos que \mathcal{X} seja não-degenerada. Tome uma base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ortonormal de $T_q\mathcal{X}$ e considere (α_{ij}) a matriz representativa da forma $g|_{T_q\mathcal{X}}$. Podemos supor que

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se a superfície é tipo-espaço,} \\ (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \text{se a superfície é tipo-tempo.} \end{aligned}$$

Pela Proposição 1 garantimos que a matriz representativa de $g|_{T_q\mathcal{X}}$, na base coordenada, dada pela Equação (1.9), também é inversível, donde o determinante dessa matriz é $\det(g_{ij}) = EG - F^2$ é diferente de zero. Seja M a matriz de passagem das base coordenada para a base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Segue das propriedades de mudança de base que

$$(g_{ij}) = M^t(\alpha_{ij})M.$$

Tomando o determinante desta expressão, temos que

$$\det(g_{ij}) = (\det M)^2 \det(\alpha_{ij}),$$

e conseqüentemente

$$EG - F^2 = (\det M)^2 \det(\alpha_{ij}).$$

Como $(\det M)^2 > 0$ e $\det(\alpha_{ij}) = 1 > 0$ se \mathcal{X} é tipo-espaco, ou $\det(\alpha_{ij}) = -1 < 0$ se \mathcal{X} é tipo-tempo, temos que o resultado segue. □

Seja agora a aplicação N_q definida para cada ponto $q \in \mathcal{X}$, onde \mathcal{X} é uma superfície em \mathbb{E}_1^3 como

$$\begin{aligned} N_q : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ (u, v) &\mapsto N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v). \end{aligned} \quad (1.10)$$

A esta aplicação damos o nome de *Aplicação normal de Gauss em \mathbb{E}_1^3* . Como N_q é ortogonal aos vetores $X_u, X_v \in T_q\mathcal{X}$ temos que se $T_q\mathcal{X}$ é tipo-espaco (respectivamente tipo-tempo) segue da Proposição 6, que o vetor N_q é tipo-tempo (respectivamente tipo-espaco).

Como N_q é definida a partir da normal gerada pela métrica de Lorentz temos que

$$\|N_q\|^2 = \langle N_q, N_q \rangle = \frac{\langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle}{\|X_u \times X_v\|^2} = \frac{\|X_u \times X_v\|^2}{\|X_u \times X_v\|^2} = 1.$$

Assim $\|N_q\| = \pm 1$, uma vez que a métrica não é positiva definida.

Seja então $\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ a superfície gerada por todos os vetores unitários N_q do tipo-espaco, ou seja, tais que $\langle N_q, N_q \rangle = 1$. Tal superfície é chamada de hiperboloide de uma folha.

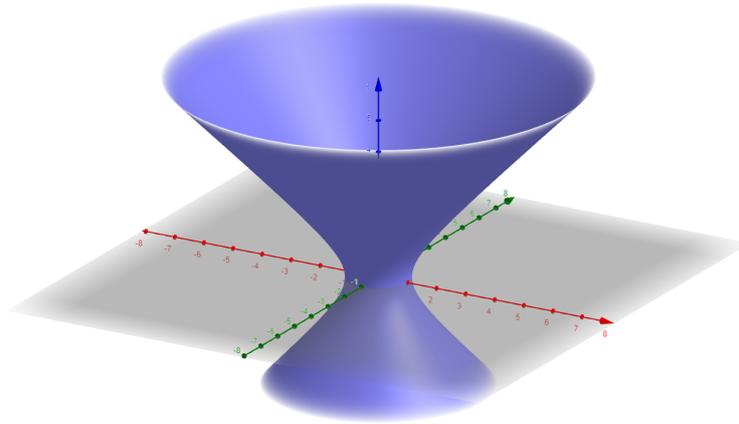


Figura 1.2: Hiperboloide de uma folha.

Da mesma forma podemos construir a superfície $\mathcal{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ gerada por todos os vetores unitários N_q do tipo-tempo, ou seja, tais que $\langle N_q, N_q \rangle = -1$. Tal superfície é chamada de hiperboloide de duas folhas e também pode ser obtido pela rotação da hipérbole $\{x^2 - z^2 = -1, y = 0\}$ em torno do eixo z .

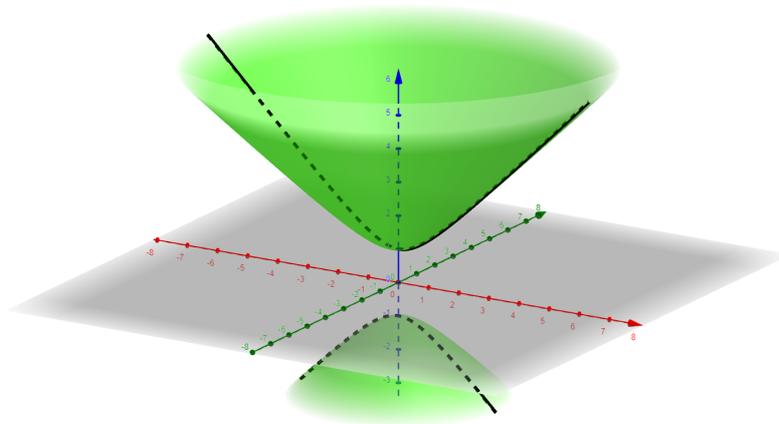


Figura 1.3: Hiperboloide de duas folhas obtido pela rotação de uma hipérbole.

De forma a ordenar as informações definimos:

Definição 1.4.6. *Seja $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ superfície não-degenerada. Definimos a Aplicação normal de Gauss por:*

1.

$$\begin{aligned} N_q : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ q &\mapsto N_q \in \mathcal{H}^2 \text{ na vizinhança de pontos tipo-espaço.} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} N_q : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ q &\mapsto N_q \in \mathcal{S}^2 \text{ na vizinhança de pontos tipo-tempo.} \end{aligned}$$

Observe que podemos tomar U pequeno o suficiente para que U seja tipo-tempo ou tipo-espaço. Como

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\|^2 &= \langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle X_u \times X_u \rangle & \langle X_v \times X_u \rangle \\ \langle X_u \times X_v \rangle & \langle X_v \times X_v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2, \end{aligned}$$

temos que $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{-\epsilon(EG - F^2)}$, onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental e $\epsilon = -1$ se U é tipo-espaço e $\epsilon = 1$ se U é tipo-tempo. Uma vez que a métrica não é positiva definida ϵ tem a função de manter a raiz positiva, sendo assim, podemos reescrever a Equação (1.10) como

$$N_q = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{-\epsilon(EG - F^2)}}.$$

Observe que em \mathbb{R}^3 o vetor normal pode ser reescrito apenas como

$$N_q = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{(EG - F^2)}},$$

uma vez que a métrica é positiva definida.

A aplicação normal de Gauss é diferenciável e a derivada direcional, na direção $v \in \mathbb{R}^2$ no ponto $q \in U$ é

$$dN_q(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{N(q + tv) - N(q)}{t}.$$

Tomando $\alpha(t) = q + tv$ temos que

$$\begin{aligned} dN_q(v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{N(\alpha(t)) - N(\alpha(0))}{t} \\ &= (N \circ \alpha)'(0). \end{aligned}$$

Como $(N \circ \alpha)'$ é tangente à N_q , temos que $dN_q(v) \in T_q\mathbb{X}$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.4.7. *Seja $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma superfície não-degenerada no espaço de Minkowski. Dado $q \in U$ definimos o operador*

$$\begin{aligned} S_q : T_q\mathbb{X} &\rightarrow T_q\mathbb{X} \\ w &\mapsto S_q(w) = -(dN_q \circ d\mathbb{X}_q^{-1})(w), \end{aligned}$$

como sendo o operador Weingarten ou operador forma da superfície \mathbb{X} em q .

Proposição 12. *Seja $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma superfície parametrizada regular no espaço de Minkowski. Então em cada $q \in U$ o operador Weingarten S_q de \mathbb{X} é um operador auto-adjunto em relação ao produto interno de Lorentz.*

Demonstração. Recordamos que S_q é um operador auto-adjunto em $T_q\mathbb{X}$ desde que seja uma aplicação linear neste espaço satisfazendo

$$\langle S_q(v), w \rangle = \langle v, S_q(w) \rangle, \forall v, w \in T_q\mathbb{X}. \quad (1.11)$$

Como $S_q(w) = -dN_q(d\mathbb{X}_q^{-1}w)$ e como dN_q é linear, temos que S_q é linear. Resta mostrar que (1.11) é satisfeito.

Sejam $x, y \in T_q\mathbb{X}$. Na base coordenada podemos escrever $x = a_1X_u + a_2X_v$ e $y = b_1X_u + b_2X_v$. Por linearidade segue que

$$\begin{aligned} -S_q(x) &= dN_q(d\mathbb{X}_q^{-1}x) \\ &= dN_q(a_1d\mathbb{X}_q^{-1}(X_u) + a_2d\mathbb{X}_q^{-1}(X_v)) \\ &= dN_q(a_1e_1 + a_2e_2) \\ &= a_1dN_q(e_1) + a_2dN_q(e_2) \\ &= a_1N_u + a_2N_v. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\langle S_q(x), y \rangle &= \langle a_1N_u + a_2N_v, b_1X_u + b_2X_v \rangle \\ &= a_1b_1\langle N_u, X_u \rangle + a_1b_2\langle N_u, X_v \rangle + a_2b_1\langle N_v, X_u \rangle \\ &\quad + a_2b_2\langle N_v, X_v \rangle. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Como $\langle N, X_u \rangle = 0$, derivando na direção de v temos

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \implies \langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle.$$

De maneira análoga, tomando $\langle N, X_v \rangle = 0$ e derivando na direção de u temos que $\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle$. Como \mathcal{X} é diferenciável temos que $X_{uv} = X_{vu}$. Assim, temos que

$$\langle X_u, N_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle = \langle X_v, N_u \rangle.$$

Reescrevendo então (1.12) temos

$$\begin{aligned} \langle S_q(x), y \rangle &= -(a_1 b_1 \langle N_u, X_u \rangle + a_1 b_2 \langle N_u, X_v \rangle + a_2 b_1 \langle N_v, X_u \rangle + a_2 b_2 \langle N_v, X_v \rangle) \\ &= -(a_1 b_1 \langle X_u, N_u \rangle + a_1 b_2 \langle X_u, N_v \rangle + a_2 b_1 \langle X_v, N_u \rangle + a_2 b_2 \langle X_v, N_v \rangle) \\ &= \langle a_1 X_u + a_2 X_v, -(b_1 N_u + b_2 N_v) \rangle \\ &= \langle x, S_q(y) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, S_q é auto-adjunta. □

Dado S_q a forma auto-adjunta, associamos uma forma em $T_q \mathcal{X}$, a qual denotaremos por B , dada por:

$$\begin{aligned} B : T_q \mathcal{X} \times T_q \mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle S_q(v), w \rangle. \end{aligned}$$

Proposição 13. *A forma B definida acima é bilinear e simétrica.*

Demonstração. Sejam $v, w \in T_q \mathcal{X}$ e $B(v, w) = \langle S_q(v), w \rangle$, queremos mostrar que B é bilinear e simétrica.

Para mostrar que B é simétrica, observe que

$$\begin{aligned} B(v, w) &= \langle S_q(v), w \rangle \\ &= \langle v, S_q(w) \rangle \\ &= \langle S_q(w), v \rangle \\ &= B(w, v). \end{aligned}$$

Para mostrar que B é bilinear basta observar que $B(v, w) = \langle S_q(v), w \rangle$, e que S_q é linear. □

Definição 1.4.8. *Seja \mathbb{X} uma superfície parametrizada regular em \mathbb{E}_1^3 com S_q o operador Weingarten. Então, a forma quadrática induzida pelo operador Weingarten*

$$\begin{aligned} II_q : T_q\mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto II_q(w) = \langle S_q(w), w \rangle, \end{aligned}$$

é dita segunda forma fundamental de \mathbb{X} em $q \in U$.

Definimos a curvatura gaussiana e a curvatura média da superfície.

Definição 1.4.9. *A Curvatura gaussiana, K , e a Curvatura Média, H , da superfície \mathbb{X} no ponto q é dada, respectivamente, por*

$$K(q) = \epsilon \det(S_q), \quad (1.13)$$

$$H(q) = \epsilon \frac{1}{2} \text{traço}(S_q). \quad (1.14)$$

em que $\epsilon = -1$ se a superfície é tipo-espaço em q , e $\epsilon = 1$ se a superfície é tipo-tempo em q .

Assim como fizemos para a primeira forma fundamental, podemos expressar a segunda forma fundamental em termos da base coordenada. Então, dado $w \in T_q\mathbb{X}$, temos que $w = aX_u + bX_v$. Como feito na demonstração da Proposição 12 temos que $S_q(w) = -(aN_u + bN_v)$. Logo

$$\begin{aligned} II_q(w) &= \langle S_q(w), w \rangle \\ &= \langle -(aN_u + bN_v), aX_u + bX_v \rangle \\ &= a^2 \langle -N_u, X_u \rangle + ab \langle -N_u, X_v \rangle + ab \langle -N_v, X_u \rangle + b^2 \langle -N_v, X_v \rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

Como $\langle N, X_u \rangle = 0$, derivando em v temos

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \implies \langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle. \quad (1.16)$$

Analogamente, de $\langle N, X_v \rangle = 0$, temos

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \implies \langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle. \quad (1.17)$$

Segue de (1.16) e (1.17) que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle.$$

Portanto, reescrevendo (1.15), temos que

$$II_q(w) = a^2 \langle -N_u, X_u \rangle + 2ab \langle -N_u, X_v \rangle + b^2 \langle -N_v, X_v \rangle.$$

Os coeficientes de II_q são chamados de coeficientes da segunda forma fundamental e denotados por

$$\begin{aligned} e &= \langle -N_u, X_u \rangle, \\ f &= \langle -N_u, X_v \rangle, \\ g &= \langle -N_v, X_v \rangle. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Como $S_q(X_u) = -N_u$ e como $\langle N, X_u \rangle = 0$ temos

$$\begin{aligned} \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle &= 0 \\ -\langle N_u, X_u \rangle &= \langle N, X_{uu} \rangle \\ \langle -N_u, X_u \rangle &= \langle N, X_{uu} \rangle. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Analogamente, como $S_q(X_v) = -N_v$ e como $\langle N, X_v \rangle = 0$ temos

$$\begin{aligned} \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle &= 0 \\ -\langle N_v, X_v \rangle &= \langle N, X_{vv} \rangle \\ \langle -N_v, X_v \rangle &= \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Usando também (1.16) e (1.17) temos que (1.18) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} e &= \langle S_q(X_u), X_u \rangle = \langle -N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= \langle S_q(X_u), X_v \rangle = \langle -N_u, X_v \rangle = \langle -N_v, X_u \rangle = \langle -N_u, X_v \rangle, \\ g &= \langle S_q(X_v), X_v \rangle = \langle -N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Seja $B : T_q\mathcal{X} \times T_q\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear associada ao operador Weingarten, isto é, $B(u, v) = \langle S_q(u), v \rangle$. Com a expressão dos coeficientes da segunda forma fundamental podemos expressar a matriz representativa de B na base coordenada por

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$B(u, v) = u^T B v = u^T \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} v.$$

Por outro lado, como S_q é uma transformação linear, seja $A = S_q$ a sua matriz representativa em relação a base canônica.

$$\langle u, S_q(v) \rangle = u^T (g_{ij}) A v = u^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A v.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
S_q = A &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ef & -Ff + Eg \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, podemos reescrever (1.14) e (1.13) como,

$$H(q) = \frac{\epsilon}{2} \text{Tr}(S_q) = \frac{\epsilon}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \quad (1.21)$$

$$K(q) = \epsilon \det(S_q) = \epsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (1.22)$$

onde $\epsilon = -1$ se a superfície é tipo-espaço e $\epsilon = 1$ se a superfície é tipo-tempo. Observando que

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uu} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle \\
&= \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} [X_u, X_v, X_{uu}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} [X_u, X_v, X_{uu}] \\
&= \frac{[X_u, X_v, X_{uu}]}{\sqrt{W}},
\end{aligned}$$

onde $W := EG - F^2$. Analogamente, temos que

$$f = \frac{[X_u, X_v, X_{uv}]}{\sqrt{W}} \quad \text{e} \quad g = \frac{[X_u, X_v, X_{vv}]}{\sqrt{W}}.$$

Logo, se considerarmos a superfície como sendo tipo-espaço, podemos reescrever (1.21) e (1.22) como

$$G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}] = -2HW^{3/2}, \quad (1.23)$$

$$[X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2 = -KW^2. \quad (1.24)$$

As Equações (1.23) e (1.24) serão utilizadas no capítulo 2.

1.5 As equações de Frenet

Nesta seção, caracterizamos uma terna de funções diferenciáveis tais que para cada ponto de uma curva parametrizada no espaço de Minkowski essas funções aplicadas neste ponto geram uma base ortonormal do espaço o qual chamamos de triedro de Frenet, e demonstraremos as equações de Frenet.

Definição 1.5.1. *Uma curva paramétrica (ou parametrizada) em \mathbb{E}_1^3 é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.*

Dizemos que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é diferenciável se todas as derivadas das funções coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ existem e são contínuas (isto é, cada função é de classe C^∞). Consideramos daqui em diante curvas diferenciáveis, mesmo que isto não seja mencionado.

Definição 1.5.2. *Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva parametrizada diferenciável. Classificamos α num ponto $t_0 \in I$ como:*

1. *Tipo-tempo, se $\alpha'(t_0)$ é um vetor tipo-tempo.*
2. *Tipo-luz (ou nula), se $\alpha'(t_0)$ é um vetor tipo-luz.*
3. *Tipo-espaço, se $\alpha'(t_0)$ é um vetor tipo-espaço.*

Observamos que uma curva α não precisa ter o mesmo caráter de causalidade em todo o seu domínio. Por exemplo, se $\alpha(t) = (\cosh t, t^2, \sinh t), t \in \mathbb{R}$, então $\alpha'(t) = (\sinh t, 2t, \cosh t)$ e

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \sinh^2 t + 4t^2 - \cosh^2 t = 4t^2 - 1.$$

Assim, α é tipo-tempo em $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tipo-luz em $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ e tipo-espaço em $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

Observamos também que, se α é tipo-tempo em t_0 e tipo-espaço em t_1 então, necessariamente, existe $t_2 \in I$ onde α é tipo-luz. Isto é garantido pelo Teorema do Valor Intermediário, já que α' e $g = \langle, \rangle$ são funções contínuas. E ainda pela continuidade destas funções, se α é tipo-tempo (ou tipo-espaço) em t_0 , então existe uma vizinhança $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ onde α é tipo-tempo (ou tipo-espaço).

Definição 1.5.3. *Uma curva α é regular em $t_0 \in I$ se $\alpha'(t_0) \neq 0$. Dizemos que α é regular se ela é regular em todo $t_0 \in I$.*

Observação 1. *Toda curva tipo-tempo ou tipo-luz é regular. De fato, se α é tipo-tempo (tipo-luz), então $\alpha'(t)$ é um vetor tipo-tempo (tipo-luz), para todo $t \in I$ e, portanto, não nulo, já que o vetor nulo é classificado como tipo-espaço. Logo, $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$.*

Definição 1.5.4. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma curva parametrizada (regular). Definimos a função comprimento de arco de α a partir de um ponto $t_0 \in I$ por*

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(r)\| dr.$$

Dizemos que α está parametrizada pelo comprimento de arco se $\|\alpha'(r)\| = 1$, para todo $t \in I$.

Para curvas tipo-tempo ou tipo-espaço, podemos mostrar, de maneira análoga ao que é feito no espaço euclidiano, que sempre existe uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Para curvas tipo-luz, temos que $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$, ou seja, não podemos parametrizar uma curva tipo-luz pelo comprimento de arco. Mas, derivando a igualdade $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$, obtemos $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Pela Proposição 9, $\text{Span}\{\alpha\}^\perp$ é um plano tipo-luz que não contém vetores tipo-tempo. Assim, α'' é tipo-luz, então pela Proposição 7, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha''(t) = \lambda \alpha'(t)$, o que implica $\alpha(t) = ae^{\lambda t} + b$, com $a, b \in \mathbb{E}_1^3$, $\langle a, a \rangle = 0$. Isto é, α é a parametrização de uma reta tipo-luz. Se α'' é tipo-espaço, existe uma reparametrização de α pelo pseudo-comprimento de arco, como é mostrado no Lema a seguir.

Lema 1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma curva tipo-luz tal que $\alpha''(t)$ é um vetor tipo-espaço para todo t (isto é, α não é uma reta). Existe uma reparametrização de α dada por $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, para alguma função diferenciável ϕ , tal que $\|\beta''(s)\| = 1$. Dizemos que α está pseudo-parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja $\phi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ uma função diferenciável. Dada $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, temos que

$$\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle = \phi'(s)^4 \langle \alpha''(\phi(s)), \alpha''(\phi(s)) \rangle = \phi'(s)^4 \|\alpha''(\phi(s))\|^2.$$

Como buscamos β tal que $\|\beta''(s)\| = 1$, basta tomarmos ϕ como solução da equação diferencial

$$\phi'(s) = \frac{1}{\sqrt{\|\alpha''(\phi(s))\|}},$$

garantida pela teoria das equações diferenciais ordinárias. □

Nosso objetivo agora é descrever uma base de \mathbb{E}_1^3 para cada ponto de uma curva regular $\alpha(s)$, cuja variação descreve a geometria da curva. Consideramos a curva α parametrizada pelo comprimento de arco para os casos tipo-espaço e tipo-tempo

ou pelo pseudo-comprimento de arco para o caso tipo-luz.

Definimos o vetor tangente a α em s por

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s).$$

Observe que \mathbf{t} e \mathbf{t}' são ortogonais, já que $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle$ é constante, igual a $0, 1$ ou -1 . Nos restringiremos às curvas em que $\mathbf{t}'(s) \neq 0$ e \mathbf{t} e \mathbf{t}' não são proporcionais. Analisaremos cada caso separadamente a depender do caráter de causalidade da curva α .

1.5.1 Curvas tipo-tempo

Seja α uma curva tipo-tempo, então α é regular e podemos parametrizá-la pelo comprimento de arco. Considere o vetor tangente $\mathbf{t}(s) \neq 0$ tal que $\mathbf{t}'(s) \neq 0$. Temos que $\mathbf{t}'(s)$ e $\mathbf{t}(s)$ são vetores ortogonais e, assim, $\mathbf{t}'(s)$ é tipo-espaço. Além disso, eles são linearmente independentes.

Definição 1.5.5. *Considere a curva α tipo-tempo. Definimos:*

1. A curvatura de α em s pelo número real positivo $\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$.
2. O vetor normal unitário em s é $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}$.
3. O vetor binormal de α em s é $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$.
4. A torção em s é o escalar $\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

Observe que \mathbf{b} é tipo-espaço e unitário, já que $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{t}\}^\perp$ e

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \mathbf{t} \times \mathbf{n} \rangle} = 1,$$

onde a última igualdade segue do item 4 da Proposição 3. Note ainda que \mathbf{b} e \mathbf{t} , bem como \mathbf{b} e \mathbf{n} , são linearmente independentes. Obtemos assim, para cada $s \in I$, uma base ortonormal para \mathbb{E}_1^3 , $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, denominada o *triedro de Frenet* em s . Note que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ está orientada positivamente, já que $\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = \langle \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1 > 0$.

Deduziremos agora as *Equações de Frenet* que, assim como no caso euclidiano, são expressões para os vetores \mathbf{t}' , \mathbf{n}' , \mathbf{b}' na base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$.

Temos, por definição, que $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$. Para encontrarmos uma expressão para \mathbf{n}' e \mathbf{b}' , escreva

$$\mathbf{n}' = n_1 \mathbf{t} + n_2 \mathbf{n} + n_3 \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = b_1 \mathbf{t} + b_2 \mathbf{n} + b_3 \mathbf{b}.$$

Tomando o produto interno de \mathbf{n}' com cada vetor da base, obtemos $-n_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle$, $n_2 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$, $n_3 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = \tau$. Note que

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0 \implies \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle = 0 \implies \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle = -\kappa.$$

Segue que $\mathbf{n}' = \kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$. Analogamente, obtemos $b_1 = -\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle = 0$, $b_2 = \langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = -\tau$, $b_3 = \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle = 0$ e, portanto, $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$.

Logo, as equações de Frenet para as curvas tipo-tempo ficam definidas como:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= \kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau \mathbf{n}. \end{cases} \quad (1.25)$$

1.5.2 Curvas tipo-espaço

Seja α uma curva tipo-espaço parametrizada pelo comprimento de arco. Sendo $\mathbf{t}' \perp \mathbf{t}$ e \mathbf{t} tipo-espaço, \mathbf{t}' pode ser tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz. Neste caso, o triedro e as equações de Frenet vão depender do caráter de \mathbf{t}' .

1. O vetor \mathbf{t}' é tipo-espaço: Vamos considerar $\mathbf{t}'(s) \neq 0$. As definições neste caso são iguais às anteriores, com exceção da torção τ .

Definição 1.5.6. *Seja α uma curva tipo-espaço tal que \mathbf{t}' é um vetor tipo-espaço não nulo. Definimos:*

- (a) A curvatura de α em s pelo número real positivo $\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$.
- (b) O vetor normal unitário em s é $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}$.
- (c) O vetor binormal de α em s é $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$.
- (d) A torção em s é o escalar $\tau(s) = -\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

Temos que \mathbf{t} e \mathbf{n} são vetores tipo-espaço, implicando que \mathbf{b} é tipo-tempo. Assim, novamente temos uma base ortonormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, desta vez orientada negativamente, pois $\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = \langle \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$.

Escrevendo \mathbf{n}' e \mathbf{b}' nesta base e lembrando que $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ e $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$, temos que as equações de Frenet para curvas tipo-espaço com \mathbf{t}' tipo-espaço são dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= \tau \mathbf{n}. \end{cases} \quad (1.26)$$

2. O vetor \mathbf{t}' é tipo-tempo: Neste caso, a base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ será orientada positivamente e será formada por dois vetores tipo-espço, e o normal tipo-tempo, como podemos ver a partir da definição a seguir.

Definição 1.5.7. *Seja α uma curva tipo-espço tal que \mathbf{t}' é um vetor tipo-tempo. Definiremos:*

- (a) A curvatura de α em s pelo número real positivo $\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$.
- (b) O vetor normal unitário em s é $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}$.
- (c) O vetor binormal de α em s é $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$.
- (d) A torção em s é o escalar $\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

Assim, obtemos as equações de Frenet para curvas tipo-espço com \mathbf{t}' tipo-tempo dadas por:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= \kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= \tau \mathbf{n}. \end{cases} \quad (1.27)$$

3. O vetor \mathbf{t}' é tipo-luz: Seja α uma curva tipo-espço parametrizada pelo comprimento de arco tal que \mathbf{t}' é um vetor tipo-luz. Assim, $\|\mathbf{t}\| = 1$ e $\|\mathbf{t}'\| = 0$. Neste caso, não definimos curvatura. Os vetores normal e binormal e a torção são definidos a seguir.

Definição 1.5.8. *Seja α uma curva tipo-espço tal que \mathbf{t}' é um vetor tipo-luz. Definimos:*

- (a) O vetor normal por $\mathbf{n} = \mathbf{t}'$.
- (b) O vetor binormal \mathbf{b} é o único vetor tipo-luz tal que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 1$ e $\mathbf{b} \perp \mathbf{t}$.
- (c) A torção é definida por $\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

Note que o vetor \mathbf{b} está bem definido pois, sendo \mathbf{t} tipo-espço, temos que $Span\{\mathbf{t}\}^\perp$ é tipo-tempo. Logo, pela Proposição 8, existem dois vetores tipo-luz linearmente independentes em $Span\{\mathbf{t}\}^\perp$. O vetor \mathbf{n} é tipo-luz. Assim, podemos definir \mathbf{b} tipo-luz de modo que \mathbf{n} e \mathbf{b} sejam linearmente independentes. Logo, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$ e podemos escolher $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 1$.

Obtemos assim o triedro de Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ formado por um vetor tipo-espço e dois vetores tipo-luz e, neste caso, é uma base, entretanto, não é ortonormal. Note que os vetores satisfazem

$$\mathbf{t} \perp \mathbf{n}, \mathbf{t} \perp \mathbf{b}, \mathbf{n} \not\perp \mathbf{b}, \|\mathbf{t}\| = 1.$$

Vejam como ficam as equações de Frenet neste caso.

Por definição, $\mathbf{t}' = \mathbf{n}$. Escrevendo $\mathbf{n}' = n_1\mathbf{t} + n_2\mathbf{n} + n_3\mathbf{b}$ e fazendo o produto interno de \mathbf{n}' com cada vetor da base, obtemos $n_1 = n_3 = 0$ e $n_2 = \tau$. Logo, $\mathbf{n}' = \tau\mathbf{n}$. Analogamente, temos $\mathbf{b}' = -\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}$.

Portanto, as equações de Frenet para curvas tipo-espaço com \mathbf{t}' tipo-luz são dadas por:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' &= \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= \tau\mathbf{n} \\ \mathbf{b}' &= -\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}. \end{cases} \quad (1.28)$$

1.5.3 Curvas tipo-luz

Seja α uma curva pseudo-parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\mathbf{t}'(s)$ é um vetor tipo-espaço e unitário. O vetor tangente é $\mathbf{t} = \alpha'$, com $\|\mathbf{t}\| = 0$, e o normal é $\mathbf{n} = \mathbf{t}'$. Em resumo:

Definição 1.5.9. *Seja α uma curva tipo-luz. Definimos:*

1. O vetor normal por $\mathbf{n} = \mathbf{t}'$.
2. O vetor binormal \mathbf{b} é o único vetor tipo-luz ortogonal a \mathbf{n} tal que $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 1$.
3. A torção é definida por $\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

As equações de Frenet para este caso são deduzidas de maneira inteiramente análoga ao que já foi feito nos outros casos, ou seja, escrevemos os vetores \mathbf{t}' , \mathbf{n}' e \mathbf{b}' na base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ e tomamos o produto interno destes vetores com cada vetor da base. Em seguida, basta aplicar as propriedades derivadas da definição de cada um, resultando nas equações de Frenet para curvas tipo-luz:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' &= \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= \tau\mathbf{t} - \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau\mathbf{n}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Capítulo 2

Superfícies lineares Weingarten, tipo-espaço, folheadas por círculos no espaço de Minkowski

Neste capítulo estudamos as superfícies tipo-espaço, no espaço de Minkowski, que são lineares Weingarten e que são folheadas por uma família a 1-parâmetro de círculos. O capítulo é dividido em três seções.

Na Seção 2.1, introduzimos conceitos preliminares que serão usados nas próximas seções. Caracterizamos curvas regulares, e curvas no espaço de Minkowski que satisfazem as mesmas propriedades dos círculos do espaço euclidiano e por fim definimos as superfícies lineares Weingarten e as superfícies de revolução que serão o foco dos estudos nas seções seguinte.

Na Seção 2.2, demonstramos o primeiro teorema que afirma que se M é uma superfície linear Weingarten cíclica, do tipo-espaço, em \mathbb{E}_1^3 com curvaturas média e gaussiana não nulas e com círculos de folheação em planos paralelos, então M é uma superfície de revolução. Como a métrica induzida nesse espaço não é positiva definida, separamos essa demonstração em três subseções de acordo com o caráter casual dos planos da folheação. Caso em que os planos da folheação são tipo-espaço, na Subseção 2.2.1, tipo-tempo, na Subseção 2.2.2, e tipo-luz na Subseção 2.2.3. Fornecemos uma parametrização específica da superfície para cada caso. Consideramos os casos em que $c = 0$ e $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$. Com o auxílio do software de cálculos Maple realizamos os cálculos que são mais extensos.

Na Seção 2.3, provamos o segundo teorema que fornece uma caracterização das superfícies lineares Weingarten do tipo-espaço em \mathbb{E}_1^3 que são folheadas por círculos que não estão em planos paralelos. Mostramos que estas superfícies são superfícies pseudo-hiperbólicas.

2.1 Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos

Nesta seção, caracterizamos curvas regulares, círculos no espaço de Minkowski e, por fim, definimos as superfícies lineares Weingarten e as superfícies de revolução que serão o foco dos estudos nas seções seguintes.

Definição 2.1.1. *Um círculo em \mathbb{E}_1^3 é uma curva plana com curvatura constante.*

Definição 2.1.2. *Uma superfície cíclica em \mathbb{E}_1^3 é uma superfície determinada por uma família suave a 1-parâmetro de círculos.*

De uma maneira mais específica, definimos:

Definição 2.1.3. *Um círculo tipo-espaço em \mathbb{E}_1^3 é uma curva plana do tipo-espaço com curvatura constante.*

Em outras palavras, um círculo tipo-espaço em \mathbb{E}_1^3 é uma curva parametrizada regular $\alpha(s)$ tal que

1. Dado o triedro de Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, temos que sua torção $\tau(s) = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$,
2. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle^{1/2} = 1$,
3. $\kappa(s) = \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^{1/2}$ é constante.

A menos de movimentos rígidos do plano podemos descrever os círculos tipo-espaço em \mathbb{E}_1^3 em três tipos onde a classificação depende do caráter casual dos planos P que contém os círculos. Após isometrias do espaço ambiente \mathbb{E}_1^3 , um círculo pode ser parametrizado como:

1. Se P é o plano horizontal $x_3 = 0$, o círculo é dado por

$$\alpha(s) = r \left(\cos \left(\frac{s}{r} \right), \sin \left(\frac{s}{r} \right), 0 \right), r > 0.$$

De fato, com esta parametrização temos que

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right), \\ \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle^{1/2} &= 1, \\ \alpha''(s) &= -\frac{1}{r} \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0\right), \\ \kappa(s) &= \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^{1/2} = \frac{1}{r}, \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = -\left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0\right), \\ \mathbf{b}(s) &= \alpha'(s) \times \mathbf{n}(s) = (0, 0, -1), \\ \mathbf{b}'(s) &= (0, 0, 0), \\ \tau(s) &= \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\alpha(s)$ é um círculo tipo-espaço no espaço de Minkowski. Neste caso, a curva α é um círculo euclidiano de raio r .

2. Se P é o plano vertical $x_1 = 0$, então

$$\alpha(s) = r \left(0, \operatorname{senh}\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right), r > 0.$$

Com esta parametrização temos que

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \left(0, \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \operatorname{senh}\left(\frac{s}{r}\right)\right), \\ \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle^{1/2} &= 1, \\ \alpha''(s) &= \frac{1}{r} \left(0, \operatorname{senh}\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right), \\ \kappa(s) &= \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^{1/2} = \frac{1}{r}, \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \left(0, \operatorname{senh}\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right), \\ \mathbf{b}(s) &= \alpha'(s) \times \mathbf{n}(s) = (1, 0, 0), \\ \mathbf{b}'(s) &= (0, 0, 0), \\ \tau(s) &= \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\alpha(s)$ é um círculo tipo-espaço no espaço de Minkowski. Neste caso, a curva α é descrita pela hipérbole $x_2^2 - x_3^2 = r^2$ em um plano vertical.

3. Se P é o plano $x_2 - x_3 = 0$, então

$$\alpha(s) = \left(s, r \frac{s^2}{2}, r \frac{s^2}{2}\right), r > 0.$$

Com esta parametrização temos que

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= (1, rs, rs), \\ \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle^{1/2} &= 1, \\ \alpha''(s) &= (0, r, r), \\ \kappa(s) &= \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^{1/2} = 0.\end{aligned}$$

Como a curvatura é nula, temos o equivalente a uma reta no espaço euclidiano, logo vale a Definição 2.1.3 e portanto $\alpha(s)$ é um círculo tipo-espaço no espaço de Minkowski. Neste caso, a curva é uma parábola em P .

Definição 2.1.4. *Seja \mathcal{X} uma superfície parametrizada regular em \mathbb{E}_1^3 com H e K as curvaturas média e gaussiana, respectivamente. Então, a superfície \mathcal{X} é dita linear Weingarten se, para todo ponto de \mathcal{X} , existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ que satisfazem*

$$aH + bK = c. \quad (2.1)$$

Em (1.23) e (1.24) obtemos expressões de H e K em termos da parametrização X . Logo substituindo esses valores em (2.1) temos que

$$\begin{aligned}a \frac{G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}]}{2W^{3/2}} + \\ b \frac{[X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2}{W^2} = c.\end{aligned} \quad (2.2)$$

Definindo

$$G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}] = \mathcal{C}, \quad (2.3)$$

e

$$[X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2 = \mathcal{D}, \quad (2.4)$$

a Equação (2.2) pode ser reescrita como

$$a \frac{\mathcal{C}}{2W^{3/2}} + b \frac{\mathcal{D}}{W^2} = c. \quad (2.5)$$

Daí, vamos analisar os casos $c = 0$ e $c \neq 0$ separadamente.

1. Caso $c = 0$.

Podemos reescrever (2.5) como

$$\begin{aligned}
a\frac{\mathcal{C}}{2W^{3/2}} + b\frac{\mathcal{D}}{W^2} &= 0 \\
a\frac{\mathcal{C}}{2W^{3/2}} &= -b\frac{\mathcal{D}}{W^2} \\
\left(a\frac{\mathcal{C}}{2W^{3/2}}\right)^2 &= \left(-b\frac{\mathcal{D}}{W^2}\right)^2 \\
a^2\frac{\mathcal{C}^2}{4W^3} &= b^2\frac{\mathcal{D}^2}{W^4} \\
a^2\mathcal{C}^2W &= 4b^2\mathcal{D}^2 \\
a^2\mathcal{C}^2W - 4b^2\mathcal{D}^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Substituindo o valor de \mathcal{C} e \mathcal{D} dados por (2.3) e (2.4) em (2.6) segue que a Equação (2.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
a^2 (G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}])^2 W \\
- 4b^2 ([X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2) = 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2. Caso $c \neq 0$.

Podemos reescrever (2.5) como

$$\begin{aligned}
a\frac{\mathcal{C}}{2W^{3/2}} + b\frac{\mathcal{D}}{W^2} &= c \\
a\frac{\mathcal{C}}{2W^{3/2}} &= c - b\frac{\mathcal{D}}{W^2} \\
\left(a\frac{\mathcal{C}}{2W^{3/2}}\right)^2 &= \left(c - b\frac{\mathcal{D}}{W^2}\right)^2 \\
a^2\frac{\mathcal{C}^2}{4W^3} &= c^2 - \frac{2cb\mathcal{D}}{W^2} + b^2\frac{\mathcal{D}^2}{W^4} \\
a^2\mathcal{C}^2W &= 4c^2W^4 - 8cb\mathcal{D}W^2 + 4b^2\mathcal{D}^2 \\
-4c^2W^4 + 8cb\mathcal{D}W^2 + a^2\mathcal{C}^2W - 4b^2\mathcal{D}^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Analogamente, neste caso, usando (2.3) e (2.4) em (2.8) segue que a Equação (2.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
-4c^2W^4 + 8cb ([X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2) W^2 + \\
a^2 (G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}])^2 W - \\
4b^2 ([X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2) = 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Por fim, antes de iniciarmos os teoremas que são o foco deste trabalho, damos as seguintes definições.

Definição 2.1.5. *Uma superfície M em \mathbb{E}_1^3 é uma superfície de revolução (ou uma superfície rotacional) se existe uma reta l tal que M é invariante por rotações em torno de l . Em particular, uma superfície de revolução em \mathbb{E}_1^3 é formada por uma família 1-parâmetro de círculos em \mathbb{E}_1^3 em planos paralelos.*

Definição 2.1.6. *Após um movimento rígido de E_1^3 , uma superfície pseudo-hiperbólica de raio $r > 0$ e centro $p \in \mathbb{E}_1^3$ é dada por*

$$\mathcal{H}^{2,1}(r, p) = \{x \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle x - p, x - p \rangle = -r^2\}.$$

Se p é a origem das coordenadas, no espaço euclidiano, $\mathcal{H}^{2,1}(r, p)$ é o hiperboloide de duas folhas $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -r^2$ que é obtido pela rotação da hipérbole $\{x_1^2 - x_3^2 = r^2, x_2 = 0\}$ em relação ao eixo x_3 . O hiperboloide de duas folhas é uma superfície tipo-espaço com curvatura média constante $H = 1/r$ e com curvatura gaussiana constante $K = 1/r^2$. Em particular, $\mathcal{H}^{2,1}(r, p)$ é uma superfície linear Weingarten.

2.2 Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos em planos paralelos

Nesta seção, consideramos superfícies lineares Weingarten do tipo-espaço em \mathbb{E}_1^3 . Assim, segue da Definição 2.1 que M satisfaz equação

$$aH + bK = c, \tag{2.10}$$

onde a, b, c são constantes, H é a curvatura média e K a curvatura gaussiana de M .

Para os casos $a = 0$ ou $b = 0$ temos que K ou H são constantes. Nestes casos o Teorema 1 foi provado por López em [12, 15]. Logo, temos que $a^2 + b^2 \neq 0$ e M satisfaz (2.7) ou (2.9) dependendo do valor de c .

Os casos em que $H = 0$ ou $K = 0$ serão tratados na Seção 2.2.4.

O objetivo é mostrar o seguinte teorema:

Teorema 1. *Se M é uma superfície linear Weingarten cíclica do tipo-espaço em \mathbb{E}_1^3 com curvaturas média e gaussiana não nulas e com os círculos de folheação em planos paralelos, então M é uma superfície de revolução.*

Como argumentamos no Capítulo 1, temos que, a menos de movimentos rígidos, os planos da folheação podem ser tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

Vamos fazer a demonstração do teorema considerando estes três casos, que estão descritos nas seções 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3.

Parte dos cálculos que aparecem na demonstração foram feitos utilizando o software Maple e os códigos utilizados se encontram no apêndice.

2.2.1 Os planos da folheação são tipo-espaço

Nesta seção, vamos provar o Teorema 1 no caso em que os planos da folheação são tipo-espaço.

Após um movimento rígido em \mathbb{E}_1^3 , vamos assumir que os planos são paralelos ao plano $x_3 = 0$. Então os círculos são os euclidianos horizontais e M é parametrizada por

$$X(u, v) = (f(u), g(u), u) + r(u)(\cos v, \operatorname{sen} v, 0), \quad (2.11)$$

onde $f, g, r > 0$ são funções diferenciáveis na variável u em um intervalo I . Com a parametrização (2.11), M é uma superfície de revolução se, e somente se, f e g são funções constantes.

Considerando M uma superfície linear Weingarten, vimos que a relação $aH + bK = c$ pode ser reescrita como (2.7) quando $c = 0$ e (2.9) quando $c \neq 0$.

Vamos analisar separadamente esses dois casos.

2.2.1.1 Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$

Utilizando o software para os cálculos, substituindo (2.11) em (2.7) e assumindo, sem perda de generalidade, que $4b^2 = 1$. Depois de alguns cálculos e reorganizando, temos que (2.7) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=0}^4 A_j(u) \cos(jv) + B_j(u) \operatorname{sen}(jv) = 0. \quad (2.12)$$

Como $\cos(jv)$ e $\operatorname{sen}(jv)$, $0 \leq j \leq 4$, são linearmente independentes, as funções A_j e B_j dadas em (2.12) devem ser nulas para qualquer que seja $u \in I$, ou seja, $A_j = 0$ e $B_j = 0$, $\forall j = 1, 2, 3, 4$.

Por contradição, vamos assumir que M não é de revolução, ou seja, f' ou g' não se anula em algum intervalo. Vamos então dividir em dois casos:

1. Caso em que uma das funções f ou g é não constante. Por simplicidade, vamos considerar $f' = 0$ e $g' \neq 0$ em algum intervalo.

Calculando o coeficiente A_4 de (2.12) e usando que $f' = 0$ temos

$$A_4 = \frac{1}{8} a^2 r^6 g'^2 (r g'' - 2r' g')^2.$$

Como, por hipótese, $a \neq 0$, $r(u) > 0$ e $g' \neq 0$, temos que $r g'' - 2r' g' = 0$. Assim

$$\begin{aligned} r g'' - 2r' g' &= 0 \\ r g'' &= 2r' g' \\ \frac{g''}{g'} &= 2 \frac{r'}{r} \\ (\ln(g'))' &= 2 (\ln(r))' \\ \int (\ln(g'))' du &= \int 2 (\ln(r))' du & (2.13) \\ \ln(g') &= 2 \ln(r) + c_1 \\ e^{\ln(g')} &= e^{\ln(r)^2} e^{c_1} \\ g' &= \lambda r^2, \end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante e $\lambda = e^{c_1} \neq 0$. Agora, substituindo $g' = \lambda r^2$ e $g'' = 2\lambda r r'$ em A_2 e B_1 da Equação (2.12), temos que

$$A_2 = \frac{1}{2} \lambda^2 r^8 (4r'^2 - a^2 r^2 A^2) \quad \text{e} \quad B_1 = 2\lambda r^7 r' (a^2 r A^2 - 2r''), \quad (2.14)$$

onde

$$A = -1 + \lambda^2 r^4 + r'^2 - r r''. \quad (2.15)$$

Como por hipótese $\lambda \neq 0$ e $r(u) > 0$ de $B_1 = 0$ temos que ou $r' = 0$ ou $a^2 r A^2 - 2r'' = 0$. Vamos analisar esses dois casos:

(a) Caso $r' = 0$ em algum intervalo.

Então r é constante, e como estamos no caso $f' = f'' = 0$ temos, de (2.11), que

$$X_u(u, v) = (0, g'(u), 1) \neq (0, 0, 0).$$

Logo, o coeficiente E da primeira forma fundamental se escreve como

$$E = g'^2(u) - 1. \quad (2.16)$$

Por outro lado, como $A_2 = 0$, de (2.14) temos que $4r'^2 - a^2 r^2 A^2 = 0$, como $r' = 0$, $r > 0$ e $a \neq 0$ segue que $A = 0$. Daí usando (2.13) e (2.16) podemos reescrever A , dado por (2.15), como

$$0 = A = -1 + \lambda^2 r^4 + r'^2 - r r'' = -1 + g'^2 = E,$$

contradição, pois $E = \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2$ e X_u é um vetor tipo-espaço não nulo.

(b) Caso $a^2rA^2 - 2r'' = 0$.

Multiplicando $a^2rA^2 - 2r'' = 0$ por $-r$ temos $-a^2r^2A^2 + 2rr'' = 0$.

Como $A_2 = 0$ e $\lambda, r \neq 0$ temos $4r'^2 - a^2r^2A^2 = 0$, logo

$$\begin{aligned}
4r'^2 - a^2r^2A^2 &= -a^2r^2A^2 + 2rr'' \\
4r'^2 &= 2rr'' \\
2r'^2 &= rr'' \\
2\frac{r'}{r} &= \frac{r''}{r'} \\
2(\ln(r))' &= (\ln(r'))' \\
\int 2(\ln(r))' du &= \int (\ln(r'))' du \\
2\ln(r) &= \ln(r') + c_1 \\
\ln(r^2) &= \ln(r') + c_1 \\
e^{\ln(r^2)} &= e^{\ln(r')+c_1} \\
r^2 &= c_2r'.
\end{aligned}$$

Logo a função r satisfaz $r^2 - c_2r' = 0$, cuja solução é dada por

$$r(u) = \frac{c_2}{u + c_1}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Agora substituindo (2.17) em $A_2 = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lambda^2r^2(4r'^2 - a^2r^2A^2) &= 0 \\
4r'^2 - a^2r^2A^2 &= 0 \\
4\frac{c_2^2}{(u + c_1)^4} - \frac{a^2c_2^2\left(-1 + \frac{\lambda^2c_2^4}{(u+c_1)^4} - \frac{c_2^2}{(u+c_1)^4}\right)^2}{(u + c_1)^2} &= 0 \\
\frac{4}{(u + c_1)^4} - \frac{a^2\left(\frac{-(u+c_1)^4 + \lambda^2c_2^4 - c_2^2}{(u+c_1)^4}\right)^2}{(u + c_1)^2} &= 0 \\
\frac{4}{(u + c_1)^4} - \frac{a^2(-1((u + c_1)^4 - \lambda^2c_2^4 + c_2^2))^2}{(u + c_1)^{10}} &= 0 \\
4(u + c_1)^6 - a^2((u + c_1)^4 + c_2^2 - \lambda^2c_2^4)^2 &= 0 \\
-4(u + c_1)^6 + a^2((u + c_1)^4 + c_2^2 - \lambda^2c_2^4)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Daí, temos um polinômio em u de grau 8 e assim $a^2 = 0$, uma contradição pois $a \neq 0$, por hipótese.

2. Caso em que ambas f e g são funções não constantes, ou seja, $f' \neq 0$ e $g' \neq 0$. Calculando o coeficiente B_4 de (2.12) com auxílio do software, e utilizando que $B_4 = 0$ temos

$$(-4f'g'r' + rg'f'' + rf'g'')(-2f'^2r' + 2g'^2r' + rf'f'' - rf'g'') = 0.$$

Vamos dividir em dois casos:

- (a) Caso $-4f'g'r' + rg'f'' + rf'g'' = 0$.

Então

$$f'' = \frac{4f'g'r' - rf'g''}{rg'}. \quad (2.18)$$

Agora, substituindo (2.18) em $A_4 = 0$ temos que

$$a^2r^6(f'^2 + g'^2)^2(-2g'r' + rg'')^2 = 0.$$

Como, por hipótese, $a \neq 0$, $f' \neq 0$, $g' \neq 0$ e $r > 0$ repetindo os cálculos feitos em (2.13) temos que

$$-2g'r' + rg'' = 0 \implies g' = \lambda r^2 \quad \text{e} \quad g'' = 2\lambda r r' \quad \text{com} \quad \lambda > 0. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.19) em (2.18) temos

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{4f'g'r' - rf'g''}{rg'} \\ f'' &= \frac{4f'\lambda r^2 r' - f'2\lambda r^2 r'}{\lambda r^3} \\ f'' &= \frac{2f'\lambda r^2 r'}{\lambda r^3} \\ f'' &= \frac{2f'r'}{r} \\ rf'' - 2f'r' &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Procedendo de maneira análoga aos cálculos feitos em (2.19), temos, de (2.20), que $f' = \mu r^2$, $\mu > 0$. Substituindo $f' = \mu r^2$ e $g' = \lambda r^2$ em B_2 e B_1 dados por (2.12) temos que

$$B_2 = \lambda \mu r^8 (a^2 r^2 A^2 - 4r'^2) \quad \text{e} \quad B_1 = 2\lambda r^7 r' (a^2 r A^2 - 2r''),$$

onde

$$A = -1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4 + r'^2 - rr''. \quad (2.21)$$

Como $B_1 = 0$ temos duas possibilidades: $r' = 0$ ou $a^2 r A^2 - 2r'' = 0$.

i. No caso em que $r' = 0$, a Equação (2.21) pode ser reescrita como

$$A = -1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4.$$

Assim, B_2 pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} B_2 &= \lambda\mu r^8(a^2 r^2 A^2 - 4r'^2) \\ B_2 &= \lambda\mu r^8 a^2 r^2 A^2 \\ B_2 &= \lambda\mu r^{10} a^2 A^2 \\ B_2 &= \lambda\mu r^{10} a^2 (-1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4)^2. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\lambda, \mu, r > 0$ e $a \neq 0$, e como $B_2 = 0$, segue que

$$-1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4 = 0. \quad (2.22)$$

Usando as condições $f' \neq 0, g' \neq 0$ e $r' = 0$ na parametrização (2.11) temos que:

$$X_u(u, v) = (f'(u), g'(u), 1).$$

Assim, usando que $f' = \mu r^2$ e $g' = \lambda r^2$, temos que o coeficiente E da primeira forma fundamental de $X(u, v)$ é dado por:

$$E = -1 + f'^2 + g'^2 = -1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4 = 0.$$

Uma contradição, uma vez que X_u é um vetor tipo-espaço não nulo.

ii. Suponha agora que $a^2 r A^2 - 2r'' = 0$, multiplicando por $-r$ temos $-a^2 r^2 A^2 + 2rr'' = 0$. Como $B_2 = 0$ e $\lambda \neq 0, r \neq 0$ temos $4r'^2 - a^2 r^2 A^2 = 0$, logo

$$\begin{aligned} 4r'^2 - a^2 r^2 A^2 &= -a^2 r^2 A^2 + 2rr'' \\ 4r'^2 &= 2rr'' \\ 2\frac{r'}{r} &= \frac{r''}{r'} \\ 2(\ln(r))' &= (\ln(r'))' \\ \int 2(\ln(r))' du &= \int (\ln(r'))' du \\ 2\ln(r) &= \ln(r') + c_1 \\ \ln(r^2) &= \ln(r') + c_1 \\ e^{\ln(r^2)} &= e^{\ln(r') + c_1} \\ r^2 &= c_2 r'. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Resolvendo a Equação (2.23), temos que

$$r(u) = \frac{c_2}{c_1 + u}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Substituindo a Equação (2.24) em (2.21) temos que

$$A = -1 + \frac{(\lambda^2 + \mu^2)c_2^4}{(u + c_1^4)} - \frac{c_2}{(u + c_1)^2} - \frac{2c_2^2}{(u + c_1)^4}. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.24) e (2.25) em $B_2 = 0$ temos

$$\begin{aligned} \lambda\mu r^8(a^2r^2A^2 - 4r'^2) &= 0 \\ a^2r^2A^2 - 4r'^2 &= 0 \\ a^2(u + c_1)^8 - 4(u + c_1)^6 + 2a^2c_2^4(1 - c_2^2(\lambda^2 + \mu^2))(u + c_1)^4 \\ &\quad + a^2c_2^4(1 - c_2^2(\lambda^2 + \mu^2))^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo $u + c_1$ por \bar{u} em 2.26, temos que

$$\begin{aligned} a^2(\bar{u})^8 - 4(\bar{u})^6 + 2a^2c_2^4(1 - c_2^2(\lambda^2 + \mu^2))(\bar{u})^4 \\ + a^2c_2^4(1 - c_2^2(\lambda^2 + \mu^2))^2 = 0. \end{aligned}$$

Daí temos um polinômio em \bar{u} , o que implica que $a^2 = 0$, contradição, pois por hipótese $a \neq 0$.

(b) Caso $-2f'^2r' + 2g'^2r' + rf'f'' - rf'g'' = 0$.

Daí, obtemos que

$$f'' = \frac{2f'^2r' - 2g'^2r' + rf'g''}{rf'}. \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) em $A_4 = 0$, temos que:

$$A_4 = -\frac{a^2r^6(f'^2 + g'^2)^2}{8f'^2}(rg'' - 2g'r')^2 = 0.$$

Como $a \neq 0, f' \neq 0, g' \neq 0$ e, por hipótese, $r > 0$ temos então que $rg'' - 2g'r' = 0$. Repetindo os cálculos feitos em (2.19), temos que $g' = \lambda r^2$ com $\lambda > 0$.

Substituindo g' e g'' na Equação (2.27), temos que

$$f'' = \frac{2f'r'}{r}. \quad (2.28)$$

De maneira análoga ao que foi feito para obter a Equação (2.19) temos que $f' = \mu r^2$, $\mu > 0$.

Substituindo $f' = \mu r^2$ e $g' = \lambda r^2$ em B_2 e B_1 podemos escrever

$$B_2 = \lambda \mu r^8 (a^2 r^2 A^2 - 4r'^2) \quad \text{e} \quad B_1 = 2\lambda r^7 r' (a^2 r A^2 - 2r''),$$

onde

$$A = -1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4 + r'^2 - rr''. \quad (2.29)$$

De $B_1 = 0$ temos duas possibilidades: $r' = 0$ ou $a^2 r A^2 - 2r'' = 0$. Repetindo as contas que foram feitas no caso anterior temos uma contradição.

Portanto, a superfície M parametrizada por (2.11) é uma superfície de revolução.

2.2.1.2 Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$

Utilizando o software para os cálculos e substituindo (2.11) em (2.9) e procedendo de maneira análoga ao caso $c = 0$ obtemos

$$\sum_{j=0}^8 A_j(u) \cos(jv) + B_j(u) \sin(jv) = 0. \quad (2.30)$$

Como $\cos(jv)$ e $\sin(jv)$, $0 \leq j \leq 8$, são linearmente independentes, por (2.30) segue que $A_j = 0$ e $B_j = 0$, $\forall j = 1, \dots, 8$.

Calculando os coeficientes A_8 e B_8 da Equação (2.30) temos

$$\begin{aligned} A_8 &= -\frac{1}{32} c^2 r^8 (f'^8 - 28f'^6 g'^2 + 70f'^4 g'^4 - 28f'^2 g'^6 + g'^8), \\ B_8 &= \frac{1}{4} c^2 r^8 f' g' (-f'^6 + 7f'^4 g'^2 - 7f'^2 g'^4 + g'^6). \end{aligned}$$

Seja a curva $\alpha(u) = (f(u), g(u))$, vamos mostrar que $\alpha(u)$ é uma curva constante, ou seja, $f' = 0$ e $g' = 0$ e com isto mostramos que a superfície M dada pela parametrização (2.11) é de revolução. Suponhamos, por contradição, que $\alpha(u)$ não é constante, podemos parametrizá-la pelo comprimento de arco, da forma $(f(u), g(u)) = (x(\phi(u)), y(\phi(u)))$, onde

$$f'(u) = \phi'(u) \cos(\phi(u)), \quad g'(u) = \phi'(u) \sin(\phi(u)), \quad \phi'^2 = f'^2 + g'^2.$$

Com esta mudança de variável, podemos reescrever as funções A_8 e B_8 como

$$A_8 = -\frac{1}{32} c^2 r^8 \phi'^8 \cos(8\phi(u)), \quad B_8 = -\frac{1}{32} c^2 r^8 \phi'^8 \sin(8\phi(u)).$$

Como $c \neq 0$ e $r > 0$, concluímos de $A_8 = 0$ que $\phi' = 0$ em algum intervalo. Portanto, $f'^2 + g'^2 = 0$, o que implica que $f' = 0$ e $g' = 0$, e com isto α é uma curva constante, obtendo uma contradição.

Segue da Definição 2.1.5 que a parametrização (2.11) de M é uma superfície de revolução. Isto finaliza a prova do Teorema 1 para o caso dos planos serem tipo-espaço.

2.2.2 Os planos da folheação são tipo-tempo

Nesta seção, vamos provar o Teorema 1 no caso em que os planos da folheação são tipo-tempo.

Seja M uma superfície tipo-espaço linear Weingarten folheada por círculos em planos paralelos tipo-tempo. Após movimentos rígidos de \mathbb{E}_1^3 , podemos assumir que este planos são paralelos ao plano $x_1 = 0$. Neste caso podemos parametrizar a superfície como

$$X(u, v) = (u, f(u), g(u)) + r(u)(0, \sinh v, \cosh v), \quad (2.31)$$

onde $r > 0$, f e g são funções diferenciáveis. Isto implica que M é formada por uma família de hipérbolas verticais. Para concluir que M é de revolução é suficiente provar que f e g são constantes.

Como M é linear Weingarten, M satisfaz a Equação (2.7) quando $c = 0$ e (2.9) quando $c \neq 0$. Análogo ao que foi feito anteriormente, dividimos a demonstração em dois casos.

2.2.2.1 Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$

De maneira análoga ao caso em que os planos de folheação são tipo-espaço, utilizamos o software Maple para os cálculos. Substituindo (2.31) em (2.7), assumindo, sem perda de generalidade, que $4b^2 = 1$. Depois de alguns cálculos e reorganizando, temos que (2.7) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=0}^4 A_j(u) \cosh(jv) + B_j(u) \sinh(jv) = 0. \quad (2.32)$$

Como $\cosh(jv)$ e $\sinh(jv)$, $0 \leq j \leq 4$, são linearmente independentes, assim pela Equação (2.32) as funções A_j e B_j devem ser nulas para qualquer que seja $u \in I$, ou seja, $A_j = 0$ e $B_j = 0$, $\forall j = 1, 2, 3, 4$.

Assim como no caso em que os planos são do tipo-espaço, o raciocínio é por

contradição.

Vamos assumir que f ou g não são constantes e dividir em dois casos:

1. Caso em que uma das funções f ou g não é constante. Por simplicidade, vamos assumir que $f' = 0$ em algum intervalo. Calculando o coeficiente A_4 da Equação (2.32) e usando que $f' = 0$ temos

$$A_4 = -\frac{1}{8}a^2r^6g'^2(-2r'g' + rg'')^2.$$

Como $g' \neq 0$, segue de $A_4 = 0$ que $rg'' - 2r'g' = 0$. Então, de maneira análoga as contas feitas em (2.19), temos $g' = \mu r^2$, $\mu > 0$.

Substituindo g' em A_2 e A_1 dados por (2.32), temos

$$A_2 = -\frac{1}{2}\mu^2r^8(4r'^2 + a^2r^2A^2), \quad A_1 = -2\mu r^7r'(2r'' + a^2rA^2),$$

onde

$$A = -1 + \mu^2r^4 + r'^2 - rr''. \quad (2.33)$$

De $A_2 = 0$, temos que $4r'^2 + a^2r^2A^2 = 0$, pois $r, \mu > 0$. Daí $4r'^2 = a^2r^2A^2 = 0$ que implica em $r' = 0$ e então $r'' = 0$. De $a^2r^2A^2 = 0$, temos que $A = 0$, pois $a, r > 0$ por hipótese. Portanto, podemos reescrever a Equação (2.33) como sendo

$$A = -1 + \mu^2r^4 = 0. \quad (2.34)$$

Por outro lado, substituindo $f' = 0$ e $r' = 0$ em (2.31) e calculando sua derivada em função de u temos que

$$X_u(u, v) = (1, 0, g'(u)).$$

Como $g' = \mu r^2$, calculando $E = \langle X_u, X_u \rangle$ segue que:

$$E = 1 - g'^2 = 1 - \mu^2r^4 = 0,$$

contradição, pois X_u é um vetor tipo-tempo, cuja norma deve ser negativa.

2. Suponhamos agora que $f' \neq 0$ e $g' \neq 0$. De (2.32) o coeficiente B_4 é da forma

$$(-4f'g'r' + rg'f'' + rf'g'')(-2f'^2r' - 2g'^2r' + rf'f'' + rg'g'') = 0. \quad (2.35)$$

Vamos dividir em dois casos.

(a) Caso $-4f'g'r' + rg'f'' + rf'g'' = 0$.

Então

$$f'' = \frac{f'(4g'r' - rg'')}{rg'}. \quad (2.36)$$

Agora, substituindo (2.36) em (2.32) temos que o coeficiente $A_4 = 0$ é dado por

$$A_4 = \frac{a^2r^6(f'^2 - g'^2)^2(-2g'r' + rg'')^2}{8g'^2} = 0.$$

Como $g' \neq 0$, $a \neq 0$ e $r > 0$ temos então dois casos:

i. Caso $f'^2 - g'^2 = 0$.

Então $g' = \pm f'$. Seja $g' = f'$ (o caso $g' = -f'$ é análogo). Então $g = f + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Substituindo esses valores em B_4 , obtemos

$$B_4 = a^2r^6f'^2(-2f'r' + rf'')^2.$$

Como $a \neq 0$, $f' \neq 0$ e $r > 0$, temos $-2f'r' + rf'' = 0$, o que implica em $2f'r' = rf''$ e logo, fazendo cálculos análogos aos feitos em (2.19), temos $f' = \lambda r^2$, $\lambda > 0$.

Os cálculos de B_2 e B_1 com as substituições de f' e g' nos dá

$$B_2 = \lambda^2r^8(4r'^2 + a^2r^2A^2) \quad \text{e} \quad B_1 = 2\lambda r^7r'(2r'' + a^2rA^2), \quad (2.37)$$

onde

$$A = 1 - r'^2 + rr''. \quad (2.38)$$

De $B_2 = 0$, temos que $4r'^2 + a^2r^2A^2 = 0$, daí $A = 0$ e $r' = 0$, já que, por hipótese, $a \neq 0$ e $r > 0$. Entretanto, $r' = 0$ implica que quando substituído na Equação (2.38), obtemos $A = 1$, uma contradição, pois $A = 0$.

Além disso $B_1 = 0$ implica que $2r'' + a^2rA^2 = 0$ pois $\lambda > 0$, $r > 0$. A combinação dessas igualdades implica em

$$\begin{aligned} 2rr'' + a^2r^2A^2 &= 4r'^2 + a^2r^2A^2 \\ 2rr'' &= 4r'^2 \\ 2r'^2 - rr'' &= 0. \end{aligned}$$

Logo, repetindo os cálculos feitos em (2.23), a função r é dada por

$$r(u) = \frac{c_2}{u + c_1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.39)$$

Substituindo (2.39) em $B_2 = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\lambda^2 r^8 (4r'^2 + a^2 r^2 A^2) &= 0 \\
4r'^2 + a^2 r^2 A^2 &= 0 \\
4 \frac{c_2^2}{(u+c_1)^4} + \frac{a^2 c_2^2 \left(1 - \frac{c_2^2}{(u+c_1)^4} + \frac{2c_2^2}{(u+c_1)^4}\right)^2}{(u+c_1)^2} &= 0 \\
\frac{4}{(u+c_1)^4} + \frac{a^2 \left(\frac{(u+c_1)^4 + c_2^2}{(u+c_1)^4}\right)^2}{(u+c_1)^2} &= 0 \\
\frac{4}{(u+c_1)^4} + \frac{a^2 \left((u+c_1)^4 + c_2^2\right)^2}{(u+c_1)^{10}} &= 0 \\
4(u+c_1)^6 + a^2 \left((u+c_1)^4 + c_2^2\right)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Daí, temos um polinômio em u de grau 8 e assim temos que $a^2 = 0$, contradição, pois por hipótese $a \neq 0$.

ii. Caso $rg'' = 2g'r'$.

Então, repetindo os cálculos feitos em (2.19), temos $g' = \mu r^2$ com $\mu > 0$. Substituindo g' em (2.36) temos $f' = \lambda r^2$, para algum $\lambda > 0$. Calculando A_2 e B_1 usando os valores de f' e g' segue que

$$A_2 = -\frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2)r^8(a^2 r^2 A^2 + 4r'^2) \quad \text{e} \quad B_1 = 2\lambda r^7 r'(2r'' + a^2 r A^2),$$

onde

$$A = -1 + (-\lambda^2 + \mu^2)r^4 + r'^2 - rr''. \quad (2.40)$$

Como $A_2 = 0$ e $\lambda > 0, \mu > 0$ e $r > 0$ temos que $a^2 r^2 A^2 + 4r'^2 = 0$, daí $a^2 r^2 A^2 = 4r'^2 = 0$ e, por consequência, $r' = 0$ e $a^2 r^2 A^2 = 0$ temos $A = 0$ (pois $r > 0$ e $a \neq 0$). Portanto,

$$\begin{aligned}
A &= 0 \\
-1 + (-\lambda^2 + \mu^2)r^4 + r'^2 - rr'' &= 0 \\
-1 + (-\lambda^2 + \mu^2)r^4 &= 0 \\
1 - (-\lambda^2 + \mu^2)r^4 &= 0 \\
(\lambda^2 - \mu^2)r^4 &= -1. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Por outro lado, calculando o coeficiente $E = \langle X_u, X_u \rangle$ usando a parametrização (2.31), temos que $E = 1 + f'^2 - g'^2 = 1 + (\lambda^2 - \mu^2)r^4$ e usando a Equação (2.41) temos que $E = 0$. Contradição, pois E é a norma do vetor X_u que é tipo-tempo.

(b) Caso $-2f'^2r' - 2g'^2r' + rf'f'' + rg'g'' = 0$.

Logo,

$$f'' = \frac{2f'^2r' + 2g'^2r' - rg'g''}{rf'}.$$

Substituindo o valor de f'' em A_4 , temos que

$$A_4 = \frac{a^2r^6(f'^2 - g'^2)^2(-2g'r' + rg'')^2}{8f'^2}.$$

Como $A_4 = 0$, temos então dois casos

i. Caso $f'^2 - g'^2 = 0$.

Logo, $g' = \pm f'$. Então estamos nas mesmas condições do caso anterior.

ii. Caso $rg'' = 2g'r'$.

Então $g' = \lambda r^2$ com $\lambda > 0$. Agora estamos nas mesmas condições do caso anterior.

Assim, concluímos que $f' = 0$ e $g' = 0$, ou seja, da Definição 2.1.5, a parametrização (2.31) de M com $c = 0$ define uma superfície de revolução.

2.2.2.2 Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$

Utilizando o software para os cálculos, substituindo (2.31) em (2.9) e procedendo de maneira análoga ao caso $c = 0$ obtemos

$$\sum_{j=0}^8 A_j(u) \cosh(jv) + B_j(u) \sinh(jv) = 0. \quad (2.42)$$

Como $\cosh(jv)$ e $\sinh(jv)$, $0 \leq j \leq 8$, são linearmente independentes, de (2.42) as funções A_j e B_j devem ser nulas para qualquer que seja $u \in I$, ou seja, $A_j = 0$ e $B_j = 0, \forall j = 1, \dots, 8$.

Calculando os coeficientes A_8 e B_8 de (2.42) temos

$$\begin{aligned} A_8 &= -\frac{1}{32}c^2r^8(f'^8 + 28f'^6g'^2 + 70f'^4g'^4 + 28f'^2g'^6 + g'^8), \\ B_8 &= \frac{1}{4}c^2r^8f'g'(f'^6 + 7f'^4g'^2 + 7f'^2g'^4 + g'^6). \end{aligned}$$

Seja a curva $\alpha(u) = (f(u), g(u))$, vamos mostrar que $\alpha(u)$ é uma curva constante, ou seja, $f' = 0$ e $g' = 0$ e com isto mostrar que a superfície M dada pela parametrização (2.31) é de revolução. Suponhamos, por contradição, que

$\alpha(u) = (f(u), g(u))$ não é uma curva plana constante. Podemos então parametrizá-la pelo comprimento de arco da forma $(f(u), g(u)) = (x(\phi(u)), y(\phi(u)))$, onde

$$f'(u) = \phi'(u) \cosh(\phi(u)), \quad g'(u) = \phi'(u) \sinh(\phi(u)), \quad \phi'^2 = f'^2 - g'^2. \quad (2.43)$$

Com esta mudança de variáveis, podemos reescrever as funções A_8 e B_8 como

$$A_8 = -\frac{1}{32}c^2r^8\phi'^8 \cosh(8\phi(u)) \quad \text{e} \quad B_8 = \frac{1}{32}c^2r^8\phi'^8 \sinh(8\phi(u)).$$

Como $c \neq 0$ e $r > 0$, podemos concluir de $A_8 = 0$ que $\phi' = 0$ em algum intervalo. Portanto, substituindo $\phi'(u) = 0$ em (2.43) temos que $f' = 0$ e $g' = 0$ e, com isto, α é uma curva constante, uma contradição. Portanto $\alpha(u) = (f(u), g(u))$ é uma curva plana constante, o que implica em f e g são funções constantes.

Segue da Definição 2.1.5 que a parametrização (2.31) de M define uma superfície de revolução.

Isto finaliza a prova do Teorema 1 para o caso dos planos serem tipo-tempo.

2.2.3 Os planos da folheação são tipo-luz

Nesta seção vamos provar que o Teorema 1 no caso em que os planos da folheação são tipo-luz.

Seja M uma superfície tipo-espaço linear Weingarten folheada por pedaços de círculos em planos paralelos tipo-luz. Após movimentos rígidos de \mathbb{E}_1^3 , podemos assumir que estes planos são paralelos ao plano $x_2 - x_3 = 0$. Neste caso podemos parametrizar a superfície como

$$X(u, v) = (f(u), g(u) + u, g(u) - u) + \left(v, r(u) \frac{v^2}{2}, r(u) \frac{v^2}{2} \right), \quad (2.44)$$

onde $r > 0$, f e g são funções suaves. Para concluir que M é de revolução é suficiente provar que f é uma função constante. De maneira análoga aos casos anteriores, considerando M uma superfície linear Weingarten, ou seja, M satisfaz (2.7) quando $c = 0$ e (2.9) quando $c \neq 0$, e dividimos a demonstração em dois casos.

2.2.3.1 Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$

De maneira análoga aos casos em que os planos de folheação são tipo-espaço e tipo-tempo, utilizando o software para os cálculos, substituindo (2.44) em (2.7),

assumindo, sem perda de generalidade, $4b^2 = 1$, e agrupando os termos com relação a v^n obtemos a expressão

$$\sum_{j=0}^6 A_j(u)v^n = 0, \quad (2.45)$$

para funções A_j , $0 \leq j \leq 6$. Como consequência, todos os coeficientes A_j , $j = 0, \dots, 6$ se anulam.

De (2.45), temos que A_6 é escrito como

$$A_6 = -2a^2(2r^2 - r')(-4rr' + r'')^2.$$

Como $A_6 = 0$ e $a > 0$, separamos em dois casos:

1. Caso $2r^2 - r' = 0$.

Então r é dado por

$$r(u) = \frac{1}{-2u - \lambda}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da Equação (2.45), temos que A_3 é da forma:

$$A_3 = \frac{16a^2 f'(-4f' + (2u + \lambda)f'')^2}{(2u + \lambda)^5}.$$

De $A_3 = 0$ então dois casos:

(a) Se $f' = 0$ então f é constante e M é de revolução.

(b) Se $-4f' + (2u + \lambda)f'' = 0$ então $f'' = \frac{4f'}{(2u + \lambda)}$.

Substituindo f'' em A_2 dado em (2.45), temos que $A_2 = \frac{-256f'^2}{(2u + \lambda)^6}$. Como $A_2 = 0$ temos que $f' = 0$ e M é de revolução.

2. Caso $-4rr' + r'' = 0$.

Temos que $r'' = 4rr'$. Substituindo r'' na Equação (2.45) temos que o coeficiente A_4 é igual a

$$a^2(rf'' + 2r'f')^2 + 2r'^2(2r^2 - r') = 0. \quad (2.46)$$

Integrando $-4rr' + r'' = 0$ temos que $2r^2 - r' = k$, para alguma constante k . Se $k = 0$ então $2r^2 - r' = 0$ e estamos na situação anterior logo $k \neq 0$. Então, substituindo $2r^2 - r' = k$ em (2.46) segue que

$$a^2(rf'' + 2r'f')^2 + 2r'^2k = 0. \quad (2.47)$$

Como $k \neq 0$ temos então duas possibilidades: $k > 0$ ou $k < 0$.

(a) Se $k > 0$, de (2.47), e utilizando que $a \neq 0$ temos que

$$r f'' + 2r' f' = 0, \quad (2.48)$$

$$2r'^2 = 0. \quad (2.49)$$

De (2.49) temos que $r' = 0$ e de (2.48) temos que $r f'' = 0$. Como $r > 0$ temos $f'' = 0$, e assim

$$f(u) = \lambda u + \mu. \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) e $r' = 0$ em A_2 dado por (2.45), temos que

$$-16a^2 r^2 (\lambda^2 r + 4r g' + g'')^2 = 0.$$

Como $a \neq 0$ e $r > 0$ temos que

$$\lambda^2 r + 4r g' + g'' = 0.$$

Resolvendo a equação acima para g , obtemos que

$$g(u) = -\frac{\lambda^2 u}{4} - \frac{e^{-4ru} c_1}{4r} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0. \quad (2.51)$$

Portanto, substituindo (2.50), (2.51) e $r' = 0$ em (2.45), temos que toda a Equação (2.45) pode ser reescrita como

$$-256c_1 r^4 e^{-8ru} = 0.$$

Uma contradição, pois, $c_1 \neq 0$, $r > 0$.

(b) Se $k = -\lambda < 0$, substituindo em (2.47) temos que

$$r f'' + 2r' f' = \pm r' \sqrt{2\lambda/a^2}. \quad (2.52)$$

Utilizando a parte positiva da raiz (o caso negativo é análogo) obtemos que

$$f'' = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{a} - 2f'\right)(r')}{r}. \quad (2.53)$$

Substituindo (2.53) no coeficiente A_3 dado pela Equação (2.45) e como $A_3 = 0$ podemos isolar g'' e com isto escreve-lo em termos de f' e g' . Com isto, temos

$$g'' = -\frac{\sqrt{2}r}{2\sqrt{\lambda}a^2} \left[2\lambda^{\frac{3}{2}}\sqrt{2} + f'^2\sqrt{2}a^2\sqrt{\lambda} - 2f'a(2r^2 + \lambda) + 4\sqrt{2}\sqrt{\lambda}(a^2g' + r^2) \right]. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.53) e (2.54) no coeficiente A_2 dado pela Equação (2.45) segue que

$$\frac{2r^2 + \lambda}{\lambda - 2r^2}(-2r^2 + \lambda)^2 \left(-a^2 r^2 f'^2 + 2 \left(a^2 g' - 2r^2 \frac{(4r^4 - \lambda^2)}{(-2r^2 + \lambda)^2} \right) \lambda \right) = 0. \quad (2.55)$$

Utilizando o software para os cálculos podemos isolar r em (2.55), obtendo

$$r(u) = -\frac{\sqrt{-2\lambda}}{2}. \quad (2.56)$$

Logo, r é uma função constante, o que por sua vez implica que $r' = 0$. Contradição pois, por hipótese, $r' = 2r^2 + \lambda$, onde $r > 0$ e $\lambda > 0$, o que implica em $r' > 0$.

2.2.3.2 Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$

De maneira análoga aos casos anteriores, utilizando o software para os cálculos, substituindo (2.44) em (2.9), e agrupando os termos com relação a v^n obtemos a expressão

$$\sum_{j=0}^8 B_j(u)v^n = 0, \quad (2.57)$$

para alguma função B_j , $0 \leq j \leq 8$. Como consequência, todos os coeficientes $B_j, j = 0, \dots, 8$ se anulam.

De (2.57), temos que B_8 é escrito como

$$B_8 = -64c^2(-2r^2 + r')^4 = 0. \quad (2.58)$$

Portanto, como $c \neq 0$, temos $-2r^2 + r' = 0$ e r é dado por

$$r(u) = \frac{1}{-2u - \mu}, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.59)$$

Agora, substituindo (2.59) no coeficiente B_4 dado pela Equação (2.57) temos que

$$B_4 = \frac{1024c^2 f'^4}{(2u + \mu)^4}. \quad (2.60)$$

Como $B_4 = 0$ e $c \neq 0$, temos que $f' = 0$ e portanto, f é constante. Logo M é uma superfície de revolução.

2.2.4 Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos com $H = 0$ ou $K = 0$

Como mostramos nas seções anteriores, as superfícies lineares Weingarten cíclicas folheadas em planos paralelos com curvaturas média e gaussiana não nulas são superfícies de revolução.

Nesta seção, fornecemos uma caracterização das superfícies que também são lineares Weingarten com seus círculos de folheação em planos paralelos mas que possuem $H = 0$ ou $K = 0$. Como foi feito nas Seções 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, podemos separar a demonstração em três partes dependendo do caráter casual dos planos da folheação. Assim, as parametrizações da superfície M são dados por (2.11), caso M seja folheada por planos tipo-espaço, por (2.31) caso M seja folheada por planos tipo-tempo ou por (2.44) caso M seja folheada por planos tipo-luz.

2.2.4.1 Caso $H = 0$

Neste caso, como $H = 0$, podemos reescrever a Equação (1.23) como sendo

$$G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}] = 0. \quad (2.61)$$

Consideraremos os casos em que os planos da folheação são tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

1. Planos tipo-espaço.

Neste caso, utilizando o software para os cálculos e substituindo a parametrização de $X(u, v)$ dado por (2.11) na Equação (2.61), temos que o resultado pode ser escrito como

$$A_0(u) + A_1(u) \cos(v) + A_2(u) \sin(v) = 0, \quad (2.62)$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= -r^2 (rr'' - (f')^2 - (g')^2 - (r')^2 + 1), \\ A_1 &= 2r^2 f' r' - f'' r^3, \\ A_2 &= 2r^2 g' r' - g'' r^3. \end{aligned}$$

De $A_2 = 2r' g' r^2 - g'' r^3 = 0$, como $r > 0$, temos que

$$r g'' - 2r' g' = 0.$$

Repetindo os cálculos feitos para encontrar a Equação (2.13), temos que

$$g' = \mu r^2, \mu \neq 0. \quad (2.63)$$

Analogamente de $A_1 = 0$ temos que

$$f' = \lambda r^2, \lambda \neq 0. \quad (2.64)$$

Substituindo (2.63) e (2.64) em (2.62), temos que a mesma pode ser reescrita como

$$1 - (\lambda^2 + \mu^2)r^4 - r'^2 + rr'' = 0.$$

Neste caso, a superfície M parametrizada por (2.11) satisfaz

$$f' = \lambda r^2 \quad g' = \mu r^2 \quad 1 - (\lambda^2 + \mu^2)r^4 - r'^2 + rr'' = 0.$$

2. Planos tipo-tempo.

Neste caso, utilizando o software para os cálculos, substituindo a parametrização de $X(u, v)$ dada por (2.31) em (2.61), temos que o resultado pode ser escrito como

$$A_0(u) + A_1(u) \cosh(v) + A_2(u) \sinh(v) = 0, \quad (2.65)$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= -r^2 (rr'' + (f')^2 - (g')^2 - (r')^2 + 1) \\ A_1 &= 2r^2 g' r' - g'' r^3 \\ A_2 &= -2r^2 f' r' + f'' r^3 \end{aligned}$$

Como $r > 0$, de $A_2 = -2r^2 f' r' + f'' r^3 = 0$, temos que $f'' r - 2r' f' = 0$, ou seja,

$$f' = \lambda r^2, \lambda \neq 0. \quad (2.66)$$

Analogamente, como $r > 0$, de $A_1 = 2r^2 g' r' - g'' r^3 = 0$ segue que $2r' g' - g'' r = 0$, e daí

$$g' = \mu r^2, \mu \neq 0. \quad (2.67)$$

Substituindo (2.66) e (2.67) em (2.65), temos que a mesma pode ser reescrita como

$$1 - (-\lambda^2 + \mu^2)r^4 - r'^2 + rr'' = 0.$$

Neste caso a superfície M descrita pela parametrização (2.31) satisfaz

$$f' = \lambda r^2 \quad g' = \mu r^2 \quad 1 - (-\lambda^2 + \mu^2)r^4 - r'^2 + rr'' = 0.$$

Observação 2. Resumindo o caso em que $H = 0$ e os planos de folheação são tipo-espaço e tipo-tempo as funções f, g, r satisfazem, respectivamente

$$f' = \lambda r^2 \quad g' = \mu r^2 \quad 1 - (\epsilon \lambda^2 + \mu^2) r^4 - r'^2 + r r'' = 0. \quad (2.68)$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$.

As superfícies obtidas são chamadas de superfícies máximas de Riemann e foram estudadas por López [13].

3. Planos são tipo-luz.

Neste caso, utilizamos o software para alguns cálculos e substituímos a parametrização de $X(u, v)$ dada por (2.44) na Equação (2.61), que pode ser reescrita como

$$A_0(u) + A_1(u)v + A_2(u)v^2 = 0, \quad (2.69)$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= (2(f')^2 + 8g')r^2 + 2g'', \\ A_1 &= -4f'r' - 2rf'', \\ A_2 &= -4r'r + r''. \end{aligned}$$

De $A_2 = 0$, resolvendo a equação para r temos, a menos de constante, que

$$r = \operatorname{tg}(2u). \quad (2.70)$$

Substituindo (2.70) em A_1 dado por (2.69), temos que

$$f(u) = \lambda \left(u + \frac{1}{2} \cot(2u) \right). \quad (2.71)$$

Substituindo (2.70) e (2.71) em $A_0 = 0$ dado em (2.69) temos que

$$g(u) = \frac{1}{32} (4(4\mu - 2\lambda^2)u - 4\lambda^2 \cot(2u) + 4\mu \operatorname{sen}(4u)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Com os valores encontrados para f, g, r podemos encontrar $X(u, v)$.

2.2.4.2 Caso $K = 0$

Neste caso, usando que $K = 0$, podemos reescrever a Equação (1.24) como sendo

$$[X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2 = 0. \quad (2.72)$$

Vamos analisar os casos em que os planos da folheação são tipo-espaço, tipo-tempo e tipo-luz.

1. Planos tipo-espaço.

Neste caso, utilizando o software para cálculos e substituindo a parametrização $X(u, v)$ dada por (2.11) em (2.72), temos que

$$g'' \operatorname{sen}(v) + f'' \operatorname{cos}(v) + r'' = 0,$$

e portanto $f'' = g'' = r'' = 0$.

Logo,

$$X(u, v) = (c_1 u + c_2, c_3 u + c_4, u) + (c_5 u + c_6) (\operatorname{cos}(v), \operatorname{sen}(v), 0), \quad (2.73)$$

para $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, 6$. Tal superfície é um cone generalizado.

2. Planos tipo-tempo.

Neste caso, utilizando o software para cálculos e substituindo a parametrização $X(u, v)$ dada por (2.31) em (2.72), temos que:

$$f'' \operatorname{senh}(v) - g'' \operatorname{cosh}(v) - r'' = 0,$$

e portanto $f'' = g'' = r'' = 0$.

Logo,

$$X(u, v) = (u, c_1 u + c_2, c_3 u + c_4) + (c_5 u + c_6) (0, \operatorname{senh}(v), \operatorname{cosh}(v)), \quad (2.74)$$

para $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, 6$.

3. Planos tipo-luz.

Neste caso, utilizando o software para cálculos e substituindo a parametrização $X(u, v)$ dada por (2.44) em (2.72), temos que

$$4g''r - 4r^2 f''v + (2r''r - 4r'^2)v^2 = 0,$$

e portanto, olhando como um polinômio em v e tendo que $r > 0$ por hipótese, segue que $f'' = g'' = 0$ e $r(u) = \lambda/(u + \mu)$.

Logo,

$$X(u, v) = (c_1 u + c_2, (c_3 + 1)u + c_4, (c_3 - 1)u + c_4) + \left(v, \frac{\lambda v^2}{2(u + \mu)}, \frac{\lambda v^2}{2(u + \mu)} \right), \quad (2.75)$$

para $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, 4$.

2.3 Superfícies lineares Weingarten folheadas por círculos em planos não paralelos

Seja M uma superfície linear Weingarten folheada por uma família a 1-parâmetro de círculos.

Nosso objetivo, nessa seção, é mostrar que se os planos não são paralelos então M é uma superfície pseudo-hiperbólica, ou seja, após um movimento rígido de \mathbb{E}_1^3 a superfície M satisfaz $\langle x - p, x - p \rangle = -r^2$ para todo $x \in M$ e para algum $p \in \mathbb{E}_1^3$ e $r \in \mathbb{R}$.

Mais precisamente vamos mostrar o seguinte teorema:

Teorema 2. *Se M uma superfície Linear Weingarten cíclica, do tipo-espaço, em \mathbb{E}_1^3 , folheada por planos que não são paralelos, então M é uma superfície pseudo-hiperbólica.*

Considere o intervalo real $I \subset \mathbb{R}$ e $u \in I$ o parâmetro de cada plano da folheação que define M . Seja $\mathbf{G}(u)$ um campo vetorial unitário suave e ortogonal a cada plano. Então $\|\mathbf{G}'(u)\| \neq 0$ em algum intervalo.

Considere a curva integral Γ do campo vetorial \mathbf{G} , então $\Gamma''(u) \neq 0$. Isto nos permite definir o triedro de Frenet de Γ , $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ conforme descrito na Subseção 1.5.

Nas seções seguintes fornecemos uma demonstração do Teorema 2 considerando se os planos da folheação são tipo-espaço (Subseção 2.3.1), ou tipo-luz (Subseção 2.3.2). No caso em que os planos da folheação são tipo-tempo o raciocínio e as contas são análogos ao caso em que os planos da folheação são tipo-espaço. Como no caso anterior a demonstração é dividida em duas partes, considerando $c = 0$ e $c \neq 0$ na Equação (2.1).

2.3.1 Os planos da folheação são tipo-espaço

Nesta seção, provamos o Teorema 2 no caso em que os planos da folheação são tipo-espaço e estão em planos não paralelos.

Sejam $\{e_1(u), e_2(u)\}$ uma base ortonormal em cada plano da folheação. Então M pode ser parametrizada como

$$X(u, v) = c(u) + r(u)(\cos(v)e_1(u) + \sin(v)e_2(u)),$$

onde $r(u) > 0$ e $c(u)$ são funções diferenciáveis em u . Então $\mathbf{t} = \mathbf{G}$ é o vetor tangente à Γ , logo \mathbf{t} é ortogonal a cada plano da folheação e portanto é tipo-tempo e as equações de Frenet são dadas por (1.25).

Assim, cada plano da folheação é gerado por $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ e M pode ser reescrita como

$$X(u, v) = c(u) + r(u)(\cos(v)\mathbf{n}(u) + \sin(v)\mathbf{b}(u)). \quad (2.76)$$

Chame

$$c' = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}, \quad (2.77)$$

onde α, β, γ são funções diferenciáveis em u . Observe que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ são ortogonais, \mathbf{t} é um vetor unitário do tipo-tempo e \mathbf{n} e \mathbf{b} são vetores unitários do tipo-espaço. Como a curvatura κ de Γ é dada por $\|\mathbf{G}'(u)\| \neq 0$, então $\kappa \neq 0$, onde κ é dado por (1.25).

Derivando (2.76), usando (2.77) e as equações de Frenet dadas por (1.25), temos que

$$\begin{aligned} X_u &= c' + r'(\cos(v)\mathbf{n} + \sin(v)\mathbf{b}) + r(u)\cos(v)\mathbf{n}' + \sin(v)\mathbf{b}' \\ &= (\alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}) + r'(\cos(v)\mathbf{n} + \sin(v)\mathbf{b}) + r(\cos(v)\mathbf{n}' + \sin(v)\mathbf{b}') \\ &= \mathbf{t}(\alpha + \kappa r \cos(v)) + \mathbf{n}(\beta + r' \cos(v) - r\tau \sin(v)) \\ &\quad \mathbf{b}(\gamma + r' \sin(v) + r\tau \cos(v)). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} X_v &= r(-\sin(v)\mathbf{n} + \cos(v)\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{n}(-r \sin(v)) + \mathbf{b}(r \cos(v)). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Como $\langle t, t \rangle = -1$, $\langle n, n \rangle = \langle b, b \rangle = 1$, $\langle t, n \rangle = \langle t, b \rangle = \langle n, b \rangle = 0$ temos que

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= -(\alpha + \kappa r \cos(v))^2 + (\beta + r' \cos(v) - r\tau \sin(v))^2 + \\ &\quad (\gamma + r' \sin(v) + r\tau \cos(v))^2 \\ &= \left(r^2 \tau^2 - \frac{r^2 \kappa^2}{2} + (r')^2 + \gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2 \right) + (2r\gamma\tau + 2r'\beta' - 2r\alpha\kappa) \cos(v) + \\ &\quad (2\gamma' - 2r\tau\beta) \sin(v) + \left(-\frac{r^2 \kappa^2}{2} \right) \cos(2v); \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= (\beta + r' \cos(v) - r\tau \sin(v))(-r \sin(v)) + (\gamma + r' \sin(v) + r\tau \cos(v))(r \cos(v)) \\ &= (r^2 \tau) + (r\gamma) \cos(v) + (-r\beta) \sin(v); \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (-r \sin(v))^2 + (r \cos(v))^2 = r^2. \quad (2.82)$$

De (2.80), (2.81) e (2.82) temos

$$\begin{aligned}
W &= EG - F^2 \\
&= \left(\frac{r^2(-r^2\kappa^2 + \gamma^2 + \beta^2 + 2r'^2 - 2\alpha^2)}{2} \right) + \\
&\quad (-2r^3\kappa\alpha + 2r^2r'\beta) \cos(v) + (2r^2\gamma r') \operatorname{sen}(v) + \\
&\quad \left(\frac{r^2(-r^2\kappa^2 - \gamma^2 + \beta^2)}{2} \right) \cos(2v) + (\gamma\beta r^2) \operatorname{sen}(2v). \quad (2.83)
\end{aligned}$$

Derivando as Equações (2.78) e (2.79) em u e v temos

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \mathbf{t}((\kappa\beta + \alpha') + (r\kappa' + 2\kappa r') \cos(v) + (r\kappa\tau) \operatorname{sen}(v)) + \\
&\quad \mathbf{n}((\alpha\kappa - \gamma\tau + \beta') + (-r\tau^2 + r\kappa^2 + r'') \cos(v) + (-r\tau' - 2\tau r') \operatorname{sen}(v)) + \\
&\quad \mathbf{b}((\tau\beta + \gamma') + (r\tau' + 2\tau r') \cos(v) + (-r\tau^2 + r'') \operatorname{sen}(v)) \quad (2.84) \\
X_{uv} &= \mathbf{t}(-\kappa r \operatorname{sen}(v)) + \mathbf{n}(-\tau r \cos(v) - r' \operatorname{sen}(v)) + \mathbf{b}(r' \cos(v) - \tau r \operatorname{sen}(v)) \\
X_{vv} &= \mathbf{n}(-r \cos(v)) + \mathbf{b}(-r \operatorname{sen}(v)).
\end{aligned}$$

Utilizando o software para os cálculos, usando (2.80), (2.81), (2.82), (2.83) e as equações de (2.84) podemos calcular $[X_u, X_v, X_{uu}]$, $[X_u, X_v, X_{uv}]$ e $[X_u, X_v, X_{vv}]$ e substituir nas equações (2.7) quando $c = 0$ e (2.9) quando $c \neq 0$.

Estes casos serão analisados, separadamente, a seguir.

2.3.1.1 Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$

Utilizando o software para os cálculos, calculando (2.7), assumindo, sem perda de generalidade, $4b^2 = 1$ e reorganizando, temos que (2.7) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=0}^8 A_j \cos(jv) + B_j \operatorname{sen}(jv) = 0, \quad (2.85)$$

onde A_j e B_j são funções diferenciáveis em u , $\forall j = 1, \dots, 8$.

Como $\cos(jv)$ e $\operatorname{sen}(jv)$ são linearmente independentes as funções A_j e B_j , $0 \leq j \leq 8$, devem ser nulas para qualquer que seja $u \in I$, ou seja, $A_j = 0$ e $B_j = 0$, $\forall j = 1, \dots, 8$.

Calculando o coeficiente $B_8 = 0$ de (2.85) temos

$$\beta\gamma(2a^2(3\beta^4 - 10\beta^2\gamma^2 + 3\gamma^4) + \kappa^2(1 + 12a^2r^2)(\gamma^2 - \beta^2) + r^2\kappa^4(1 + 6a^2r^2)) = 0. \quad (2.86)$$

Vamos dividir em três casos considerando $\beta = 0$, $\gamma = 0$ e $\beta\gamma \neq 0$.

1. Caso $\beta = 0$ em um subintervalo de I .

Então substituindo $\beta = 0$ em $A_8 = 0$ dado por (2.85), temos que

$$(\gamma^2 + r^2\kappa^2)^2 (4a^2\gamma^2 + (1 + 4a^2r^2)\kappa^2) = 0.$$

Isto implica em dois casos:

- (a) Se $4a^2\gamma^2 + (1 + 4a^2r^2)\kappa^2 = 0$, logo $4a^2\gamma^2 = \kappa^2 = 0$, que é uma contradição pois $\kappa \neq 0$.
- (b) Se $(\gamma^2 + r^2\kappa^2)^2 = 0$, temos $r\kappa = 0$, contradição, uma vez que, $r > 0, \kappa \neq 0$.

Logo, podemos concluir que este caso é impossível.

2. Caso $\gamma = 0$ em um subintervalo de I .

Então substituindo $\gamma = 0$ em $A_8 = 0$ dado por (2.85), temos que

$$(\beta^2 - r^2\kappa^2)^2 ((1 + 4a^2r^2)\kappa^2 - 4a^2\beta^2) = 0.$$

Temos então dois casos:

- (a) Se $\beta^2 - r^2\kappa^2 = 0$, temos que $\beta^2 = r^2\kappa^2$, substituindo em A_6 dado por (2.85), temos que

$$A_6 = -\frac{9}{32}\kappa^6 r^{10}(\alpha - r')^2.$$

Como $A_6 = 0$ segue que $\alpha = r'$, pois $r > 0, \kappa \neq 0$.

Assim, substituindo $\gamma = 0, \beta^2 = r^2\kappa^2$ e $\alpha = r'$ em (2.83), temos que $W = 0$, uma contradição, pois $W > 0$ já a superfície é tipo-espaço.

- (b) Se $(1 + 4a^2r^2)\kappa^2 - 4a^2\beta^2 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 4a^2\beta^2 &= (1 + 4a^2r^2)\kappa^2 \\ \beta^2 &= \frac{(1 + 4a^2r^2)\kappa^2}{4a^2} \\ \beta &= \pm\sqrt{\frac{(1 + 4a^2r^2)\kappa^2}{4a^2}} \\ \beta &= \pm\kappa\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Substituindo (2.87) e $\gamma = 0$ no coeficiente $A_7 = 0$, dado por (2.85) temos que

$$r^9\kappa^7 \left(2rr'a \mp \alpha\sqrt{1 + 4a^2r^2} \right) = 0,$$

onde o sinal " \mp " depende do sinal " \pm " de (2.87). Vamos considerar o sinal " $+$ " no valor de β dado em (2.87) (o caso do sinal " $-$ " é análogo), logo

$$r^9 \kappa^7 \left(2rr'a - \alpha \sqrt{1 + 4a^2 r^2} \right) = 0.$$

Como $r > 0$ e $\kappa \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{4a^2 r^2 r'^2}{(1 + 4a^2 r^2)}} \\ \alpha &= \frac{rr'}{\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2}}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Usando as Equações (2.87) e (2.88) e que $\gamma = 0$ em (2.77), segue que

$$\begin{aligned} c' &= \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b} \\ &= \frac{rr'}{\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2}} \mathbf{t} + \kappa \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} \right) \mathbf{n} \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} \right)' \mathbf{t} + \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} \right) \kappa \mathbf{n} \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} \right)' \mathbf{t} + \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} \right) \mathbf{t}' \\ &= \left(\left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} \right) \mathbf{t} \right)'. \end{aligned}$$

Logo, existe $c_0 \in E_1^3$ tal que $c = c_0 + \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} \right) \mathbf{t}$.

Daí, a parametrização (2.76) da superfície pode ser reescrita como

$$X(u, v) = c_0 + \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r(u)^2} \right) \mathbf{t} + \cos(v)r(u)\mathbf{n} + \sin(v)r(u)\mathbf{b}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle X - c_0, X - c_0 \rangle &= - \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r(u)^2} \right)^2 + (\cos(v)r(u))^2 + (\sin(v)r(u))^2 \\ &= -\frac{1}{4a^2} - r(u)^2 + r(u)^2 \\ &= -\frac{1}{4a^2}. \end{aligned}$$

Segue então, da Definição 2.1.6, que a superfície é pseudo-hiperbólica.

3. Caso $\beta\gamma \neq 0$.

Considerando como um polinômio de grau 2 em função de β^2 , temos que β^2 é igual a

$$\beta^2 = \frac{1}{12a^2} (20a^2\gamma^2 + (1 + 12a^2r^2)\kappa^2 \pm A), \quad (2.89)$$

onde

$$A = \sqrt{256a^4\gamma^4 + 16a^2\gamma^2\kappa^2 + 192a^4r^2\gamma^2\kappa^2 + \kappa^4}. \quad (2.90)$$

Vamos considerar o sinal "+" no valor de β dado em (2.89) (o caso do sinal "-" é análogo). Substituindo (2.89) em A_8 e considerando que $\kappa \neq 0$, obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} & 26624a^6\gamma^6 + \kappa^6 + 1536a^4\gamma^4\kappa^2(1 + 12a^2r^2) + 72a^2\gamma^2\kappa^4 \\ &= - (1792a^4\kappa^4 + \kappa^4 + 64a^2\gamma^2\kappa^2(1 + 12a^2r^2)) A. \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, substituindo A dado por (2.90), dividindo por $-113246208a^4\gamma^2$, já que $a \neq 0$ e $\gamma \neq 0$, e agrupando todos os termos em um dos lados da igualdade obtemos

$$(\gamma^2 + \kappa^2r^2) ((16a^2\gamma^2 + \kappa^2)^2 + 256a^4r^2\gamma^2\kappa^2)^2 = 0.$$

Temos então dois casos:

- (a) Se $((16a^2\gamma^2 + \kappa^2)^2 + 256a^4r^2\gamma^2\kappa^2)^2 = 0$, temos que $(16a^2\gamma^2 + \kappa^2)^2 = 0$ e $256a^4r^2\gamma^2\kappa^2 = 0$, que é uma contradição pois, $a \neq 0, r > 0, \gamma \neq 0, \kappa \neq 0$.
- (b) Se $\gamma^2 + \kappa^2r^2 = 0$, temos que $\gamma^2 = (\kappa r)^2 = 0$, de onde segue que $\kappa r = 0$, o que é uma contradição, pois $\kappa, r \neq 0$.

Portanto, o caso $\beta\gamma \neq 0$ não ocorre.

2.3.1.2 Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$

Utilizando o software para os cálculos, calculando (2.9), assumindo, sem perda de generalidade, $c = 1$ e reorganizando, temos que (2.9) pode ser reescrita como

$$\sum_{j=0}^8 A_j \cos(jv) + B_j \sin(jv) = 0, \quad (2.91)$$

onde A_j e B_j são funções diferenciáveis em u , $\forall j = 1, \dots, 8$.

Como $\cos(jv)$ e $\sin(jv)$ são linearmente independentes, as funções A_j e B_j ,

$0 \leq j \leq 8$, devem ser nulas para qualquer que seja $u \in I$, ou seja, $A_j = 0$ e $B_j = 0, \forall j = 1, \dots, 8$.

Calculando os coeficientes A_8 e B_8 de (2.91) temos

$$A_8 = -\frac{1}{32}r^8x_1 \quad \text{e} \quad B_8 = \frac{1}{16}\beta\gamma r^8x_2, \quad (2.92)$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 = & \beta^8 - (28\gamma^2 + \kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2))\beta^6 \\ & + (70\gamma^4 + 15\gamma^2\kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2) + \kappa^4(b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 6r^4))\beta^4 \\ & + (-28\gamma^6 - 15\gamma^4\kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2) - \kappa^6r^2(2b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 4r^4) \\ & - 6\gamma^2\kappa^4(b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 6r^4))\beta^2 \\ & + (\gamma^2 + r^2\kappa^2)^2(\gamma^4 + \gamma^2\kappa^2(a^2 + 2b + 2r^2) + \kappa^4(b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)), \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} x_2 = & -4\beta^6 + (28\gamma^2 + 3\kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2))\beta^4 \\ & - 2(14\gamma^4 + 5\gamma^2\kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2) + \kappa^4(b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 6r^4))\beta^2 \\ & + (\gamma^2 + r^2\kappa^2)(4\gamma^4 + \gamma^2\kappa^2(3a^2 + 6b + 8r^2) + \kappa^4(2b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 4r^4)). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Como $B_8 = 0$, temos então que $\gamma = 0$, $\beta = 0$ ou $x_2 = 0$. Vamos analisar os três casos separadamente.

1. Caso $\gamma = 0$ em algum subintervalo de I .

Então, considerando $\gamma = 0$ em $A_8 = 0$ dado por (2.92), temos

$$(\beta^2 - r^2\kappa^2)^2 (\beta^4 - (a^2 + 2b + 2r^2)\beta^2\kappa^2 + (b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)\kappa^4) = 0.$$

Logo, podemos separar em dois casos:

(a) Caso $\beta^2 - r^2\kappa^2 = 0$.

Temos que $\beta^2 = r^2\kappa^2$, ou seja, $\beta = \pm r\kappa$. Vamos analisar os casos separadamente:

i. Se $\beta = r\kappa$ substituindo em (2.91), temos que A_6 é igual à

$$A_6 = -\frac{9}{8}b^2\kappa^6r^{10}(\alpha - r')^2 = 0.$$

Logo, como $b \neq 0$, $\kappa \neq 0$ e $r > 0$, temos que $\alpha - r' = 0$, logo $\alpha = r'$. Substituindo $\alpha = r'$, $\beta = r\kappa$ e $\gamma = 0$ em (2.83), temos que $W = 0$. Uma contradição.

ii. Se $\beta = -r\kappa$ substituindo este valor em (2.91), temos que $A_6 = 0$ pode ser escrito como:

$$A_6 = -\frac{9}{8}b^2\kappa^6r^{10}(\alpha + r')^2 = 0.$$

Logo, como $b, k \neq 0$ e $r > 0$, temos que $\alpha + r' = 0$, logo $\alpha = -r'$. Substituindo $\alpha = -r', \beta = -r\kappa$ e $\gamma = 0$ em (2.83), temos que $W = 0$. Uma contradição.

(b) Caso

$$\beta^4 - (a^2 + 2b + 2r^2)\beta^2\kappa^2 + (b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)\kappa^4 = 0. \quad (2.95)$$

Considerando esta expressão como um polinômio em β^2 , temos um polinômio de grau 2 e o cálculo do discriminante nos dá

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2)^2 - 4(b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)\kappa^4 \\ &= \kappa^4(a^4 + 4a^2b + 4a^2r^2 + 4b^2 + 8br^2 + 4r^4 - 4b^2 - 4a^2r^2 - 8br^2 - 4r^4) \\ &= \kappa^4(a^4 + 4a^2b) \\ &= \kappa^4a^2(a^2 + 4b). \end{aligned}$$

E, por consequência, temos

$$\beta^2 = \frac{\kappa^2}{2} \left(a^2 + 2b + 2r^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4b} \right). \quad (2.96)$$

Logo para que tenha solução devemos ter $\Delta \geq 0$, ou seja, $a^2 + 4b \geq 0$. Temos então dois casos: $a^2 + 4b = 0$ e $a^2 + 4b > 0$ que serão considerados a seguir.

i. Se $a^2 + 4b = 0$ temos $b = -\frac{a^2}{4}$. Substituindo o valor de b em (2.96) temos que

$$\beta^2 = \frac{(a^2 + 4r^2)\kappa^2}{4} \implies \beta = \pm \frac{\kappa\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2}. \quad (2.97)$$

Então, substituindo (2.97), $\gamma = 0$ e $b = -\frac{a^2}{4}$ em $B_5 = 0$ segue que:

$$B_5 = \frac{1}{128}a^4\kappa^5r^7\tau\sqrt{a^2 + 4r^2}(\pm\alpha\sqrt{a^2 + 4r^2} - 2rr')^2 = 0.$$

Como $a \neq 0, \kappa \neq 0$ e $r > 0$, e se $\tau = 0$, substituindo os valores de β, γ, b e τ em $A_5 = 0$ implica que $\pm\alpha\sqrt{a^2 + 4r^2} - 2rr' = 0$. Logo, devemos ter

$$\alpha = \pm \frac{2rr'}{\sqrt{a^2 + 4r^2}}, \quad (2.98)$$

onde o sinal "±" de (2.98) depende do sinal "±" de (2.97). Vamos considerar o sinal "+" em (2.97) (o caso do sinal "-" é análogo). Substituindo os valores encontrados para α, β, γ em $c' = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}$ e utilizando as equações de Frenet dadas em (1.25), temos

$$\begin{aligned} c' &= \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b} \\ c' &= \frac{2rr'}{\sqrt{a^2 + 4r^2}} \mathbf{t} + \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2} \kappa}{2} \mathbf{n} \\ c' &= \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} \right)' \mathbf{t} + \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} \mathbf{t}' \\ c' &= \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} \mathbf{t} \right)' \\ c &= \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} \mathbf{t} + c_0. \end{aligned}$$

Então, existe $c_0 \in E_1^3$ tal que $c = c_0 + \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} \mathbf{t}$. Como consequência, podemos reescrever $X(u, v)$, dada por (2.76), como

$$X(u, v) = c_0 + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4r(u)^2} \mathbf{t} + r(u) (\cos(v) \mathbf{n} + \sin(v) \mathbf{b}),$$

para algum $c_0 \in E_1^3$. Daí

$$\begin{aligned} &\langle X - c_0, X - c_0 \rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} \right)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + r^2 (\cos(v)^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + \sin(v)^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle) \\ &= - \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} \right)^2 + r^2 (\cos(v)^2 + \sin(v)^2) \\ &= - \frac{a^2 + 4r^2}{4} + r^2 \\ &= - \frac{a^2}{4} - r^2 + r^2 \\ &= - \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Logo a superfície é pseudo-hiperbólica.

- ii. Se $a^2 + 4b > 0$. Da Equação (2.91) temos que o coeficiente $A_7 = 0$ pode ser escrito como

$$A_7 = \frac{1}{64} aAB\kappa^5 r^9 (\alpha\kappa^2 - \kappa\beta' + \kappa'\beta) = 0, \quad (2.99)$$

onde

$$A = 2b + a^2 + a\sqrt{a^2 + 4b} \quad \text{e} \quad B = a^3 + 4ab + (a^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b}. \quad (2.100)$$

Como $a \neq 0$, $r > 0$, $\kappa \neq 0$ devemos ter $A = 0$, $B = 0$ ou $\alpha\kappa^2 - \kappa\beta' + \kappa'\beta = 0$, que analisaremos a seguir.

A. Caso $A = 0$.

Como $a \neq 0$ então $a > 0$ ou $a < 0$. Vamos analisar esses casos:

- Caso $a > 0$: Como $a^2 + 4b > 0$, temos que

$$\begin{aligned} A &= 2b + a^2 + a\sqrt{a^2 + 4b} \\ &> 2b + a^2. \end{aligned}$$

Se $b > 0$ então $A > 0$. Se $b < 0$ temos

$$A > 2b + a^2 > 4b + a^2 > 0.$$

Logo temos que $A > 0$.

- Caso $a < 0$: Vamos supor, por absurdo, que

$$a\sqrt{a^2 + 4b} \geq 2b + a^2 \implies \sqrt{a^2 + 4b} \leq \frac{2b + a^2}{a}.$$

Se $b > 0$, isto implica que $2b + a^2 > 0$ e logo

$$0 > \frac{2b + a^2}{a} \geq \sqrt{a^2 + 4b} \geq 0,$$

um contradição.

Se $b < 0$, temos

$$0 < \sqrt{a^2 + 4b} \leq \frac{2b + a^2}{a} < \frac{4b + a^2}{a} < 0,$$

uma contradição.

Portanto, temos que $A > 0$, ou seja, $A \neq 0$.

B. Caso $B = 0$.

De (2.100) temos

$$\begin{aligned} 0 &= a^3 + 4ab + (a^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b} \\ &= (a^2 + 4b)a + (a^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b} \\ &= (a\sqrt{a^2 + 4b} + a^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b} \\ &= A\sqrt{a^2 + 4b}. \end{aligned}$$

Como já verificamos que $A \neq 0$ devemos ter $a^2 + 4b = 0$, contradição, pois estamos supondo que $a^2 + 4b > 0$. Portanto $B \neq 0$.

C. Caso $\alpha\kappa^2 - \kappa\beta' + \kappa'\beta = 0$.

Daí, segue que

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\kappa\beta' - \kappa'\beta}{\kappa^2} \\ \alpha &= \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)'.\end{aligned}$$

Substituindo os valores de $\alpha = \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)'$ e $\gamma = 0$ em (2.77) e usando as equações de Frenet dadas por (1.25), temos que

$$\begin{aligned}c' &= \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \\ &= \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)'\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} \\ &= \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)'\mathbf{t} + \frac{\beta}{\kappa}\kappa\mathbf{n} \\ &= \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)'\mathbf{t} + \frac{\beta}{\kappa}\mathbf{t}' \\ &= \left(\frac{\beta}{\kappa}\mathbf{t}\right)'.\end{aligned}$$

Portanto, $c = c_0 + (\beta/\kappa)\mathbf{t}$ para algum $c_0 \in E_1^3$.

Daí, a expressão de $X(u, v)$ dada por (2.76) pode ser escrita como

$$X(u, v) = c_0 + \frac{\beta}{\kappa}\mathbf{t} + r(\cos(v)\mathbf{n} + \sin(v)\mathbf{b}). \quad (2.101)$$

De (2.101) segue que

$$\begin{aligned}\langle X - c_0, X - c_0 \rangle &= \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + r^2 (\cos(v)^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + \sin(v)^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle) \\ &= -\left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^2 + r^2 (\cos(v)^2 + \sin(v)^2) \\ &= -\frac{\beta^2}{\kappa^2} + r^2.\end{aligned}$$

Agora, de (2.96) temos que

$$\begin{aligned}
\langle X - c_0, X - c_0 \rangle &= -r^2 - \frac{a^2}{2} - b - \frac{a\sqrt{a^2 + 4b}}{2} + r^2 \\
&= -\left(\frac{a^2}{2} + b + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + 4b}\right) \\
&= -\frac{A}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, como $A > 0$, segue então da Definição 2.1.6 que a superfície M é pseudo-hiperbólica.

2. Caso $\beta = 0$ em algum subintervalo I .

Substituindo $\beta = 0$ em A_8 dado por (2.92) e A_7 dado por (2.91) segue que

$$A_8 = -\frac{1}{32}r^8(\gamma^2 + \kappa^2r^2)y_1 \quad \text{e} \quad A_7 = -\frac{1}{16}\alpha\kappa r^9(\gamma^2 + \kappa^2r^2)z_1, \quad (2.102)$$

onde

$$\begin{aligned}
y_1 &= \gamma^4 + (a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2\gamma^2 + (b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)\kappa^4, \\
z_1 &= 8\gamma^4 + (7(a^2 + 2b) + 16r^2)\kappa^2\gamma^2 + (6b^2 + 7(a^2 + 2b)r^2 + 8r^4)\kappa^4.
\end{aligned}$$

Como $A_8 = 0$ e $r > 0$, temos que $\gamma^2 + \kappa^2r^2 = 0$ ou $y_1 = 0$. Entretanto se $\gamma^2 + \kappa^2r^2 = 0$, então devemos ter $\gamma^2 = \kappa^2r^2 = 0$, ou seja, $\kappa r = 0$ o que não ocorre, pois $\kappa \neq 0$ e $r > 0$. Portanto $y_1 = 0$. Considerando y_1 como um polinômio de grau 2 em γ^2 obtemos que

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} \left(\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) \right) \kappa^2. \quad (2.103)$$

Como $A_7 = 0$, de (2.102), segue que $\alpha = 0$ ou $z_1 = 0$ pois $\kappa \neq 0$, $r > 0$ e $\gamma^2 + \kappa^2r^2 \neq 0$. Suponha, por absurdo, que $\alpha \neq 0$, logo $z_1 = 0$. Substituindo

(2.103) em $z_1 = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
a^4 \pm a^3\sqrt{a^2 + 4b} + 4a^2b \pm 2ab\sqrt{a^2 + 4b} &= 0 \\
a^4 + 4a^2b &= \mp(a^3\sqrt{a^2 + 4b} + 2ab\sqrt{a^2 + 4b}) \\
a^2(a^2 + 4b) &= \mp a\sqrt{a^2 + 4b}(a^2 + 2b) \\
\frac{a(a^2 + 4b)}{\sqrt{a^2 + 4b}} &= \mp(a^2 + 2b) \\
a\sqrt{a^2 + 4b} &= \mp(a^2 + 2b) \\
(a\sqrt{a^2 + 4b})^2 &= (\mp(a^2 + 2b))^2 \\
a^2(a^2 + 4b) &= (a^2 + 2b)^2 \\
a^4 + 4a^2b &= a^4 + 4a^2b + 4b^2 \\
0 &= 4b^2 \\
0 &= b.
\end{aligned}$$

Uma contradição, uma vez que por hipótese $b \neq 0$. Portanto, $\alpha = 0$. Queremos provar que $\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2)$ em (2.103) satisfaz

$$\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) \leq 0.$$

Suponha por absurdo que $\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) > 0$.

Como $r > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) > 0 &\implies \pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b) > 0 \\
&\implies \pm a\sqrt{a^2 + 4b} > (a^2 + 2b).
\end{aligned}$$

Observe que se $b > 0$ então $a^2 + 2b > 0$. Se $b < 0$, então $a^2 + 2b > a^2 + 4b \geq 0$. Logo

$$\pm a\sqrt{a^2 + 4b} > (a^2 + 2b) > 0 \implies \pm a\sqrt{a^2 + 4b} > 0 \implies \pm a > 0,$$

uma contradição. Portanto

$$\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) < 0. \quad (2.104)$$

Como consequência deste raciocínio, podemos concluir de (2.103) que $\gamma = 0$, e isso recai no item anterior. Com isto, concluímos que a superfície M é pseudo-hiperbólica.

3. Caso $\beta\gamma \neq 0$, ou seja, $x_2 = 0$.

Chamando $x = \beta^2, y = \gamma^2$ e considerando $x_1 = 0$, na Equação (2.93), depois

de alguns cálculos, podemos reescrever a equação $x_2 = 0$, dada por (2.94) como

$$\left((x+y)^2 + 2(y-x)r^2\kappa^2 + r^4\kappa^4 \right)^2 \left((x+y)^2 + 2(y-x)r^2\kappa^2 - b^2\kappa^4 + r^4\kappa^4 \right) = 0. \quad (2.105)$$

Observe que se $(x+y)^2 + 2(y-x)r^2\kappa^2 + r^4\kappa^4 = 0$ considerando essa equação como um polinômio em $r^2\kappa^2$, e calculando o discriminante chegamos a:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2(y-x))^2 - 4(x+y)^2 \\ &= 4(y^2 - 2xy + x^2 - x^2 - 2xy - y^2) \\ &= 4(-4xy) \\ &= -16xy. \end{aligned}$$

Como $x, y > 0$ temos que $\Delta < 0$, ou seja, o polinômio não tem raiz real, ou seja, $(x+y)^2 + 2(y-x)r^2\kappa^2 + r^4\kappa^4 \neq 0$.

Portanto, de (2.105) segue que

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + 2(y-x)r^2\kappa^2 - b^2\kappa^4 + r^4\kappa^4 &= 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + 2yr^2\kappa^2 - 2xr^2\kappa^2 - b^2\kappa^4 + r^4\kappa^4 &= 0 \\ y^2 + 2(x+r^2\kappa^2)y + (x^2 - 2xr^2\kappa^2 - b^2\kappa^4 + r^4\kappa^4) &= 0. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Considerando a Equação (2.106) como um polinômio em y , temos que o discriminante é

$$\Delta = 4\kappa^2(4xr^2 + b^2\kappa^2).$$

E, portanto, temos que

$$\gamma^2 = y = -(x+r^2\kappa^2) \pm \kappa\sqrt{4xr^2 + b^2\kappa^2}. \quad (2.107)$$

Substituindo γ^2 dada por (2.107) no coeficiente $A_8 = 0$ dado por (2.92), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{32}r^8 (b^2\kappa^4 + 4r^2x\kappa^2 - 4x^2) (16x^2 - 8x(a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2 + (a^4 + 4a^2b)\kappa^4) \\ (256x^4 - 512x^3r^2\kappa^2 - 128x^2(b^2 - 2r^4)\kappa^4 + 64b^2xr^2\kappa^6 + 3b^4\kappa^8) = 0. \end{aligned}$$

Como $r > 0$ podemos separar em três casos:

$$b^2\kappa^4 + 4r^2x\kappa^2 - 4x^2 = 0, \quad (2.108)$$

ou

$$16x^2 - 8x(a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2 + (a^4 + 4a^2b)\kappa^4 = 0, \quad (2.109)$$

ou

$$256x^4 - 512x^3r^2\kappa^2 - 128x^2(b^2 - 2r^4)\kappa^4 + 64b^2xr^2\kappa^6 + 3b^4\kappa^8 = 0. \quad (2.110)$$

Analisando a primeira possibilidade dada em (2.108) e isolando x temos que

$$x = \frac{(r^2 - \sqrt{r^4 + b^2})\kappa^2}{2}.$$

Entretanto como $\sqrt{r^4 + b^2} > r^2$, temos que, neste caso, $x < 0$, contradição, pois $x = \beta^2$.

Analisando a segunda possibilidade dada em (2.109) (a terceira dada em (2.110) é análoga). Se

$$16x^2 - 8x(a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2 + (a^4 + 4a^2b)\kappa^4 = 0.$$

Considerando esta equação como polinômio em x temos que

$$x = \frac{\kappa^2}{4} (a^2 + 2b + 2r^2 \pm 2Q), \quad (2.111)$$

onde

$$Q = \sqrt{a^2r^2 + (b + r^2)^2}.$$

Substituindo o valor de (2.111) em (2.107), temos que

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{4} \left(4\sqrt{b^2 + r^2(a^2 + 2b + 2r^2 \pm 2Q)} - (a^2 + 2b + 6r^2) \mp 2Q \right), \quad (2.112)$$

Seja a mudança

$$p = x - y \quad \text{e} \quad q = (x - y)^2 - 4xy, \quad (2.113)$$

temos que, de (2.111) e (2.112), as equações de (2.113) podem ser reescritas como

$$p = \frac{\kappa^2}{2} (a^2 + 6r^2 + 2b) \quad (2.114)$$

$$q = \frac{\kappa^4}{2} \left((-4a^2 - 12r^2 - 8b \pm 2Q)(Q \mp r^2) \mp (4a^2 + 20r^2 + 8b)Q + 12r^4 + 4(a^2 + 2b)r^2 + a^4 + 4a^2b + 10Q \right) \quad (2.115)$$

Por outro lado, de (2.113) temos que

$$x = (p + \sqrt{2p^2 - q})/2 \quad \text{e} \quad y = (-p + \sqrt{2p^2 - q})/2. \quad (2.116)$$

Substituindo (2.116) em (2.106) temos

$$2p^2 - q - 2pr^2\kappa^2 + (r^4 - b^2)\kappa^4 = 0 \implies q = 2p^2 + 2pr^2\kappa^2 + (r^4 - b^2)\kappa^4. \quad (2.117)$$

Substituindo (2.113) em $x_1 = 0$, dado por (2.93), podemos isolar q que dependerá de p, r, κ . Substituindo q em $x_2 = 0$, onde x_2 é dado por (2.94), temos que

$$(p - r^2\kappa^2) (2p - (a^2 + 2(b + r^2))\kappa^2) \\ (4p^2 - 2p(a^2 + 2b + 4r^4)\kappa^2 + (b^2 + 2a^2r^2 + 4br^2 + 4r^4)\kappa^4)^2 = 0.$$

Isolando o valor de p na equação acima, temos que:

$$p = \frac{\kappa^2}{4} (4r^2 + a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b}). \quad (2.118)$$

Substituindo (2.118) em (2.117), temos que

$$q = \frac{\kappa^4}{4} \left(-a(a^2 + 2r^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b} + 4r^4 + 2(a^2 + 2b)r^2 + a^4 + 4a^2b - 2b^2 \right). \quad (2.119)$$

Igualando os valores obtidos para p , dado por (2.114) e (2.118), e q , dado por (2.115) e (2.119), temos que r depende unicamente de a, b , ou seja, $r(u)$ é uma função constante.

Substituindo $r' = 0$, β, γ encontrados em (2.111) e (2.112) em (2.91) podemos recalcular os coeficientes. De $B_7 = 0$ temos que $\alpha = 0$. Substituindo α no coeficiente $B_5 = 0$, obtemos $\tau = 0$. Finalmente, substituindo $\alpha = \tau = 0$ no coeficiente B_8 temos $\kappa = 0$, obtendo uma contradição, pois $\kappa \neq 0$.

2.3.2 Os planos da folheação são tipo-luz

Nesta seção, provaremos o Teorema 2 no caso em que os planos da folheação são tipo-luz. Sejam $\{e_1(u), e_2(u), e_3(u)\}$ uma base ortonormal do espaço \mathbb{E}_1^3 e $\{e_1(u), e_2(u) + e_3(u)\}$ uma base ortonormal em cada plano tipo-luz da folheação. Então a superfície M pode ser parametrizada por

$$X(u, v) = c(u) + ve_1 + \frac{r(u)v^2}{2}(e_2 + e_3),$$

onde $r(u) > 0$ e $c(u)$ são funções diferenciáveis em u . Então $t = \mathbf{G}$ é o vetor tangente à Γ , logo t é ortogonal a cada plano da folheação e portanto é tipo-luz.

Portanto, cada plano da folheação é gerado por $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}\}$, onde \mathbf{n} o vetor normal à Γ e tipo-espaço, e onde M pode ser localmente reescrita como

$$X(u, v) = c(u) + v\mathbf{n}(u) + r(u)v^2\mathbf{t}(u), \quad (2.120)$$

Novamente, escrevemos

$$c' = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}. \quad (2.121)$$

Derivando (2.120), usando (2.121) e as equações de Frenet dadas por (1.29), temos que

$$\begin{aligned} X_u &= c'(u) + v\mathbf{n}'(u) + (r'(u)\mathbf{t}(u) + r(u)\mathbf{t}'(u))v^2 \\ &= \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} + v(\tau\mathbf{t} - \mathbf{b}) + (r'\mathbf{t} + r\mathbf{n})v^2 \\ &= \mathbf{t}(\alpha + v\tau + v^2r') + \mathbf{n}(\beta + rv^2) + \mathbf{b}(\gamma - v). \end{aligned} \quad (2.122)$$

Analogamente

$$X_v = \mathbf{n}(u) + 2r(u)v\mathbf{t}(u). \quad (2.123)$$

De (2.122) e (2.123) podemos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental.

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= 2(\alpha + v\tau + v^2r')(\gamma - v) + (\beta + rv^2)^2 \\ &= (2\alpha\gamma + \beta^2) + 2(\tau\gamma - \alpha)v + 2(\beta r + r'\gamma - \tau)v^2 - 2r'v^3 + r^2v^4 \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = (\beta + rv^2) + (\gamma - v)(2r(u)v) = \beta + 2rv\gamma - rv^2 \quad (2.125)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1. \quad (2.126)$$

De (2.124), (2.125) e (2.126) temos

$$\begin{aligned} W &= EG - F^2 \\ &= 2\gamma\alpha + (-4\gamma r\beta + 2\gamma\tau - 2\alpha)v + (-4r^2\gamma^2 + 2\gamma r' + 4r\beta - 2\tau)v^2 + \\ &\quad (4r^2\gamma - 2r')v^3. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Derivando as Equações (2.122) e (2.123) em u e v temos

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \mathbf{t}(\alpha' + v\tau' + v^2r'' + \tau(\beta + rv^2)) + \\ &\quad \mathbf{n}(\beta' + 2v^2r' + (2v - \gamma)\tau + \alpha) \\ &\quad \mathbf{b}(\gamma' - \beta - rv^2) \\ X_{uv} &= \mathbf{t}(\tau + 2r'v) + \mathbf{n}(2rv) + \mathbf{b}(-1) \\ X_{vv} &= \mathbf{t}(2r). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Utilizando o software para os cálculos, substituindo os elementos (2.124), (2.125), (2.126), (2.127) e as equações de (2.128) podemos calcular $[X_u, X_v, X_{uu}]$, $[X_u, X_v, X_{uv}]$ e $[X_u, X_v, X_{vv}]$ que são substituídos na Equação (2.7) quando $c = 0$ e na Equação (2.9) quando $c \neq 0$. Esses casos serão estudados nas seções seguintes.

2.3.2.1 Caso $c = 0$ na equação $aH + bK = c$

Utilizando o software para os cálculos, calculando (2.7), assumindo, sem perda de generalidade, $b = 1/2$ e reorganizando como um polinômio em v , temos que (2.7) pode ser reescrita como

$$\sum_{j=0}^{11} A_j(u)v^j = 0, \quad (2.129)$$

onde A_j e B_j são funções diferenciáveis em u , $\forall j = 1, \dots, 11$.

Calculando o coeficiente $A_{11} = 0$ de (2.129) temos que

$$A_{11} = 98a^2r^2(2r^2\gamma - r')^3 = 0.$$

Como $a \neq 0$ e $r > 0$ temos que

$$2r^2\gamma - r' = 0 \implies r' = 2r^2\gamma \implies \gamma = \frac{r'}{2r^2}. \quad (2.130)$$

Substituindo (2.130) em $A_8 = 0$ dado por (2.129), temos que

$$A_8 = -64r^2(\tau - 2r\beta)^2(-4a^2r\beta + r^2 + 2a^2\tau) = 0.$$

Como $r > 0$, vamos separar a igualdade anterior em dois casos:

1. Caso $\tau - 2r\beta = 0$.

Então, $\tau = 2r\beta$. Substituindo os valores de τ e r' em A_6 dado por (2.129) temos

$$A_6 = -100r^4\alpha^2 = 0.$$

Logo $\alpha = 0$, pois $r \neq 0$.

Substituindo os valores de $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\tau}{2r}$ e $\gamma = \frac{r'}{2r^2}$ em (2.121) temos que $c' = \frac{\tau}{2r}\mathbf{n} + \frac{r'}{2r^2}\mathbf{b}$ o qual substituindo em (2.127) temos que $W = 0$ uma contradição.

2. Caso $-4a^2r\beta + r^2 + 2a^2\tau = 0$.

Então,

$$\tau = (4a^2r\beta - r^2)/2a^2, \quad (2.131)$$

$$\beta = \frac{r}{4a^2} + \frac{1}{2r}\tau. \quad (2.132)$$

Substituindo os valores de τ dada em (2.131) e de γ dada em (2.130) em $A_7 = 0$ temos

$$A_7 = 12r^6 (\gamma r^2 - 2a\alpha) = 0.$$

Portanto, como $r > 0$, $\gamma r^2 - 2a\alpha = 0$, ou seja, $\alpha = r^2\gamma/2a^2$. De (2.130) temos que

$$\alpha = \frac{r'}{4a}. \quad (2.133)$$

Usando os valores encontrados para α, β, γ em (2.133), (2.132) e (2.130), respectivamente, e usando as equações de Frenet dadas por (1.29) em (2.121) segue que

$$\begin{aligned} c' &= \frac{r'}{4a^2}\mathbf{t} + \left(\frac{r}{4a^2} + \frac{1}{2r}\tau\right)\mathbf{n} + \frac{1}{2r^2}\mathbf{b} \\ &= \frac{r'}{4a^2}\mathbf{t} + \frac{r}{4a^2}\mathbf{n} + \frac{1}{2r^2}\mathbf{b} + \frac{1}{2r}\tau\mathbf{n} \\ &= \frac{r'}{4a^2}\mathbf{t} + \frac{r}{4a^2}\mathbf{t}' + \frac{1}{2r^2}\mathbf{b} - \frac{1}{2r}\mathbf{b}' \\ &= \left(\frac{r}{4a^2}\mathbf{t}\right)' - \left(\frac{1}{2r}\mathbf{b}\right)' \\ &= \left(\frac{r}{4a^2}\mathbf{t} - \frac{1}{2r}\mathbf{b}\right)'. \end{aligned}$$

Logo, existe $c_0 \in \mathbb{E}_1^3$ tal que

$$c(u) = c_0 + \frac{r}{4a^2}\mathbf{t} - \frac{1}{2r}\mathbf{b}.$$

Portanto, de (2.120) temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= c_0 + \left(\frac{r}{4a^2}\mathbf{t} - \frac{1}{2r}\mathbf{b}\right) + v\mathbf{n} + rv^2\mathbf{t} \\ &= c_0 + \left(\frac{r}{4a^2} + rv^2\right)\mathbf{t} + v\mathbf{n} - \frac{1}{2r}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle &= -\frac{1}{r} \left(\frac{r}{4a^2} + rv^2 \right) \langle t, b \rangle + v^2 \langle n, n \rangle \\
&= -\frac{1}{r} \left(\frac{r}{4a^2} + rv^2 \right) + v^2 \\
&= -\frac{1}{4a^2} - v^2 + v^2 \\
&= -\frac{1}{4a^2}.
\end{aligned}$$

Segue então da Definição 2.1.6 que a superfície é uma superfície pseudo-hiperbólica.

2.3.2.2 Caso $c \neq 0$ na equação $aH + bK = c$

Utilizando o software para os cálculos, calculando (2.9), assumindo, sem perda de generalidade, $c = 1$ e reorganizando como um polinômio em v , temos que (2.9) pode ser reescrita como

$$\sum_{j=0}^{12} A_j(u)v^j = 0, \quad (2.134)$$

onde A_j e B_j são funções diferenciáveis em u , $\forall j = 1, \dots, 12$.

Calculando o coeficiente $A_{12} = 0$ de (2.134) temos

$$A_{12} = -64(r' - 2r^2\gamma)^4 = 0.$$

Logo,

$$r' - 2r^2\gamma = 0 \implies r' = 2r^2\gamma \implies \gamma = \frac{r'}{2r^2}. \quad (2.135)$$

Substituindo (2.135) no coeficiente $A_8 = 0$ dado por (2.134) temos que

$$(\tau^2 + 2r\tau(-2\beta + (a^2 + 2b)r) + 4(\beta^2 - (a^2 + 2b)r\beta + b^2r^2)r^2)(2\beta r - \tau)^2 = 0,$$

Analisamos a igualdade anterior separando em dois casos:

1. Caso $(2\beta r - \tau)^2 = 0$.

Daí $\beta = \frac{\tau}{2r}$, substituindo em $A_6 = 0$, dado por (2.134), segue que

$$A_6 = b^2\alpha^2r^4 = 0.$$

Portanto $\alpha = 0$, uma vez que $b \neq 0, r > 0$. Substituindo $\beta = \frac{\tau}{2r}$, $\alpha = 0$ e

$\gamma = \frac{r'}{2r^2}$ em (2.127), temos que $W = 0$, uma contradição.

2. Caso

$$\tau^2 + 2r\tau(-2\beta + (a^2 + 2b)r) + 4(\beta^2 - (a^2 + 2b)r\beta + b^2r^2)r^2 = 0. \quad (2.136)$$

Como (2.136) é um polinômio de grau dois em τ , temos que o discriminante é

$$\Delta = 4r^4a^2(a^2 + 4b).$$

E, por consequência, temos

$$\tau = 2r\beta - a^2r^2 - 2br^2 \pm ar^2\sqrt{a^2 + 4b}. \quad (2.137)$$

Em particular, $\Delta \geq 0$, ou seja, $a^2 + 4b \geq 0$. Vamos assumir a escolha de " + " na identidade acima (similar para " - "). Substituindo (2.137) em $A_\tau = 0$, dado por (2.134), obtemos

$$\alpha = \frac{1}{2}(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b})r'. \quad (2.138)$$

Substituindo γ dado em (2.135) e α , dado em (2.138), em (2.136) temos que

$$\beta = \frac{1}{2r} \left((a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b})r^2 + \tau \right) = \frac{1}{2r} (Ar^2 + \tau), \quad (2.139)$$

onde

$$A = a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b}. \quad (2.140)$$

Substituindo γ, α, β dados por (2.135), (2.138) e (2.139), respectivamente, em (2.121) e usando as equações de Frenet dadas por (1.29), temos que

$$\begin{aligned} c'(u) &= \frac{1}{2}Ar't + \left(\frac{Ar^2 + \tau}{2r} \right) \mathbf{n} + \frac{r'}{2r} \mathbf{b} \\ &= \frac{A}{2}r't + \frac{Ar}{2} \mathbf{n} + \frac{1}{2r}(\tau \mathbf{n}) + \frac{r'}{2r} \mathbf{b} \\ &= \frac{A}{2}r't + \frac{Ar}{2} \mathbf{t}' - \frac{1}{2r} \mathbf{b}' + \frac{r'}{2r} \mathbf{b} \\ &= \left(\frac{Ar}{2} \mathbf{t} \right)' - \left(\frac{1}{2r} \mathbf{b} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}Art - \frac{1}{2r} \mathbf{b} \right)'. \end{aligned}$$

Portanto, existe $c_0 \in E_1^3$ tal que

$$c = c_0 + \frac{1}{2}Art - \frac{1}{2r} \mathbf{b}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} X(u, v) &= c_0 + \frac{1}{2}A r \mathbf{t} - \frac{1}{2r} \mathbf{b} + v \mathbf{n} + r v^2 \mathbf{t} \\ &= c_0 + \left(\frac{1}{2}A r + r v^2 \right) \mathbf{t} - \frac{1}{2r} \mathbf{b} + v \mathbf{n}, \end{aligned}$$

e, assim

$$\begin{aligned} \langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle &= 2 \left(\frac{1}{2}A r + r v^2 \right) \left(-\frac{1}{2r} \right) \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + v^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}A r + r v^2 \right) \left(-\frac{1}{2r} \right) + v^2 \\ &= -\frac{1}{2}A + v^2 - v^2 \\ &= -\frac{1}{2}A. \end{aligned}$$

Observe que em (2.104) mostramos que

$$\begin{aligned} \pm a \sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) < 0 &\implies \pm a \sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b) < 0 \\ &\implies a \sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b) < 0 \\ &\implies a^2 + 2b - a \sqrt{a^2 + 4b} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.140), temos que $A > 0$, logo segue da Definição 2.1.6 que a superfície é uma superfície pseudo-hiperbólica.

Isto mostra o Teorema 2 para o caso em que os planos da folheação são tipo-luz.

Referências Bibliográficas

- [1] F. K. Alves, *Transformações de Bäcklund no Espaço-Tempo de Minkowski 3-Dimensional*, dissertação (mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, p.128, 2017.
- [2] I. A. Barroso, *Superfícies de Weingarten especiais folheadas por círculos*, dissertação (mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, p.51, 2013.
- [3] L. P. J. Borges, *Curvas de Interseção entre duas Superfícies no Espaço euclidiano e no Espaço de Lorentz-Minkowski*, dissertação (mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, p.114, 2016.
- [4] P. Carretero, I. Castro, *A New Approach to Rotational Weingarten Surfaces*, *Mathematics*, 10, 578. <https://doi.org/10.3390/math10040578>, 2022.
- [5] S. S. Chern, *Some new characterizations of the Euclidean sphere*, *Duke Math. J.* 12, 279-290, 1945.
- [6] A. Enneper, *Die cyklischen Flächen*, *Z. Math. Phys.* 14, 393-421, 1869.
- [7] P. Hartman, W. Winter, *Umbilical points and W-surfaces*, *Am J Math* 76, 502-508, 1954.
- [8] W. C. Jagy, *Minimal hypersurfaces foliated by spheres*, *Michigan Math J* 38, 255-270, 1991.
- [9] Ö. B. Kalkan, R. López, D. Saglam, *Linear Weingarten surfaces foliated by circles in Minkowski space*, *Taiwanese J. Math.* 15 (5) 1897 - 1917, 2011.
- [10] W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves, Surfaces, Manifolds*, American Mathematical Society, 2002.

- [11] W. Kühnel, M. Steller, *On closed Weingarten surfaces*, Monatsh Math 146, 113-129, 2005.
- [12] R. López, *Constant mean curvature surfaces foliated by circles in Lorentz-Minkowski space*, Geom. Dedicata, 76, 81-95, 1999.
- [13] R. López, *Constant mean curvature hypersurfaces foliated by spheres*, Diff. Geom. App., 11, 245-256, 1999.
- [14] R. López, "Cyclic hypersurfaces of constant curvature", In: K. Fukaya et al (eds), *Minimal Surfaces, Geometric Analysis and Symplectic Geometry*, Tokyo: Math Soc of Japan, 185-199, 2002.
- [15] R. López, *Surfaces of constant Gauss curvature in Lorentz-Minkowski 3-space*, Rocky Mountain J. Math., 33, 971-993, 2003.
- [16] R. López, *Linear Weingarten surfaces in Euclidean and Hyperbolic space*, Matemática Contemporânea, Vol 35, 95-113, 2008.
- [17] R. López, *On linear Weingarten surfaces*, International Journal of Mathematics 19, 439-448, 2008.
- [18] R. López, *Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*, International Electronic Journal of Geometry, volume 7, No. 1, 44-107, 2014.
- [19] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego, 1983.
- [20] J. C. C. Nitsche, *Cyclic surfaces of constant mean curvature*, Nach Akad Wiss Göttingen, Math Phys II, 1, 1-5, 1989.
- [21] K. Tenenblat, *Introdução à geometria diferencial*, Blucher, São Paulo, 2008.
- [22] J. Weingarten, *Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, J Reine Angew Math 59, 382-393, 1861.
- [23] J. Weingarten, *Über die Flächen, derer Normalen eine gegebene Flächen berühren*, J Reine Angew Math 62, 61-63, 1863.
- [24] T. Weinstein, *An Introduction to Lorentz Surfaces*, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

Apêndice A

Códigos usados no Capítulo 2

Neste apêndice, encontram-se os códigos que foram utilizados nas contas do Capítulo 2. Eles foram gerados utilizando o software Maple (sistema algébrico computacional comercial de uso genérico).

Utilizamos o software para calcular as Equações (2.12), (2.30), (2.32), (2.42), (2.45), (2.57), (2.85), (2.91), (2.129), (2.134), e para aplicar as substituições mais complexas apresentadas pelo texto, como ocorre no cálculo de (2.14). Além dos códigos apresentados nas seções a seguir, foram utilizados *simplify* para agrupar os elementos de forma reduzida, *subs* para substituir valores em outras equações, *expand* para expandir todos os termos de forma que não haja parênteses e *isolate* para isolar um determinado termo.

O uso do software foi essencial para que conseguíssemos demonstrar os resultados pois a maior parte das contas são extensas e de fácil confusão.

A escolha do software Maple se deve ao fato dele ser disponibilizado aos alunos da pós-graduação em matemática pelo departamento de matemática sendo assim mais prático mas ressaltamos que os cálculos podem ser feitos utilizando qualquer outros software como o *Mathematica*.

A.1 Códigos usados na Subseção 2.2.1

Na Figura A.1, listamos os códigos que foram utilizados na demonstração da Subseção 2.2.1 comum aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, na Figura A.2 listamos os códigos específicos dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$ que descrevem as Equações (2.12) e (2.30), respectivamente.

```

with(LinearAlgebra) :
with(linalg) :
x := f(u) + r(u) · cos(v) :
y := g(u) + r(u) · sin(v) :
E := combine((d/d u x)^2 + (d/d u y)^2 - 1, trig) :
G := combine((d/d v x)^2 + (d/d v y)^2, trig) :
F := combine(d/d u (x) · d/d v (x) + d/d u (y) · d/d v (y), trig) :
W := combine(E G - F^2, trig) :
e := combine(det(transpose(matrix([[d/d u (x), d/d u (y), 1], [d/d v (x), d/d v (y), 0], [d^2/d u^2 (x), d^2/d u^2 (y), 0]]))), trig) :
ge := combine(det(transpose(matrix([[d/d u (x), d/d u (y), 1], [d/d v (x), d/d v (y), 0], [d^2/d v^2 (x), d^2/d v^2 (y), 0]]))), trig) :
efe := combine(det(transpose(matrix([[d/d u (x), d/d u (y), 1], [d/d v (x), d/d v (y), 0], [d/d v (d/d u (x)), d/d v (d/d u (y)), 0]]))), trig) :
C := combine(e G - 2 F efe + ge E, trig) :
De := combine(e ge - efe^2, trig) :

```

Figura A.1: Códigos usados na Subseção 2.2.1 comum aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$.

```

c = 0
LV := combine(a^2 · C^2 · W - D e^2, trig) :

c ≠ 0
LV := combine(-4 W^4 c^2 + W a^2 C^2 + 8 W^2 c b D e - 4 b^2 D e^2 = 0, trig) :

```

Figura A.2: Códigos usados na Subseção 2.2.1 específico dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, respectivamente.

A.2 Códigos usados na Subseção 2.2.2

Na Figura A.3, listamos os códigos que foram utilizados na demonstração da Subseção 2.2.2 comum aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, na Figura A.4 listamos os códigos específicos dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$ que descrevem as Equações (2.32) e (2.42), respectivamente.

```

with(LinearAlgebra):
with(linalg):
z := g(u) + r(u) · cosh(v):
y := f(u) + r(u) · sinh(v):
E := combine(- (d/d u z)² + (d/d u y)² + 1, trig):
G := combine(- (d/d v z)² + (d/d v y)², trig):
F := combine(- d/d u (z) · d/d v (z) + d/d u (y) · d/d v (y), trig):
W := combine(E G - F², trig):
e := combine(det(transpose(matrix([[d/d u (z), d/d u (y), 1], [d/d v (z), d/d v (y), 0], [d²/d u² (z), d²/d u² (y), 0]]))), trig):
ge := combine(det(transpose(matrix([[d/d u (z), d/d u (y), 1], [d/d v (z), d/d v (y), 0], [d²/d v² (z), d²/d v² (y), 0]]))), trig):
efe := combine(det(transpose(matrix([[d/d u (z), d/d u (y), 1], [d/d v (z), d/d v (y), 0], [d/d v (d/d u (z)), d/d v (d/d u (y)), 0]]))), trig):
C := combine(e G - 2 F efe + ge E, trig):
De := combine(e ge - efe², trig):

```

Figura A.3: Códigos usados na Subseção 2.2.2 comum aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$.

```

c = 0
LV := combine(a² · C² · W - De², trig):

c ≠ 0
LV := combine(- 4 W⁴ c² + W a² C² + 8 W² c b D e - 4 b² De² = 0, trig):

```

Figura A.4: Códigos usados na Subseção 2.2.2 específico dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, respectivamente.

A.3 Códigos usados na Subseção 2.2.3

Na Figura A.5 listamos os códigos que foram utilizados na demonstração da Subseção 2.2.3 que são comuns aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, na Figura A.6 listamos os códigos específicos dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$ que descrevem as Equações (2.45) e (2.57), respectivamente.

```

with(LinearAlgebra):
with(linalg):
x:= f(u) + v:
y:= g(u) + u +  $\frac{r(u) \cdot v^2}{2}$ :
z:= g(u) - u +  $\frac{r(u) \cdot v^2}{2}$ :
E:= combine( $-\left(\frac{d}{du}z\right)^2 + \left(\frac{d}{du}y\right)^2 + \left(\frac{d}{du}x\right)^2$ , trig):
G:= combine( $-\left(\frac{d}{dv}z\right)^2 + \left(\frac{d}{dv}y\right)^2 + \left(\frac{d}{dv}x\right)^2$ , trig):
F:= combine( $-\frac{d}{du}(z) \cdot \frac{d}{dv}(z) + \frac{d}{du}(y) \cdot \frac{d}{dv}(y) + \frac{d}{du}(x) \cdot \frac{d}{dv}(x)$ , trig):
W:= combine(E G - F^2, trig):
e:= combine(det(transpose(matrix( $\left[\left[\frac{d}{du}(z), \frac{d}{du}(y), \frac{d}{du}(x)\right], \left[\frac{d}{dv}(z), \frac{d}{dv}(y), \frac{d}{dv}(x)\right], \left[\frac{d^2}{du^2}(z), \frac{d^2}{du^2}(y), \frac{d^2}{du^2}(x)\right]\right]$ ))))):
ge:= combine(det(transpose(matrix( $\left[\left[\frac{d}{dv}(z), \frac{d}{dv}(y), \frac{d}{dv}(x)\right], \left[\frac{d}{du}(z), \frac{d}{du}(y), \frac{d}{du}(x)\right], \left[\frac{d^2}{dv^2}(z), \frac{d^2}{dv^2}(y), \frac{d^2}{dv^2}(x)\right]\right]$ ))))):
efe:= combine(det(transpose(matrix( $\left[\left[\frac{d}{du}(z), \frac{d}{du}(y), \frac{d}{du}(x)\right], \left[\frac{d}{dv}(z), \frac{d}{dv}(y), \frac{d}{dv}(x)\right], \left[\frac{d}{dv}\left(\frac{d}{du}(z)\right), \frac{d}{dv}\left(\frac{d}{du}(y)\right), \frac{d}{dv}\left(\frac{d}{du}(x)\right)\right]\right]$ ))))):
C:= combine(e G - 2 F efe + ge E):
De:= combine(e ge - efe^2):

```

Figura A.5: Códigos usados na Subseção 2.2.3 comum aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$.

```

c=0
LV:= combine( $a^2 \cdot C^2 \cdot W - D e^2$ , trig):

c≠0
LV:= combine( $-4 W^4 c^2 + W a^2 C^2 + 8 W^2 c b D e - 4 b^2 D e^2 = 0$ , trig):

```

Figura A.6: Códigos usados na Subseção 2.2.3 específico dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, respectivamente.

A.4 Códigos usados na Subseção 2.3.1

Na Figura A.7 listamos os códigos que foram utilizados na demonstração da Subseção 2.3.1 que são comuns aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, na Figura A.8 listamos os códigos específicos dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$ que descrevem as Equações (2.85) e (2.91), respectivamente.

```

with(LinearAlgebra):
with(linalg):
tu := f(u) + κ(u) · r(u) · cos(v):
nuf := g(u) +  $\frac{d}{du}$ r(u) · cos(v) - r(u) · σ(u) · sin(v):
bu := h(u) +  $\frac{d}{du}$ r(u) · sin(v) + σ(u) · r(u) · cos(v):
tv := 0:
nv := -r(u) · sin(v):
bv := r(u) · cos(v):
xuut :=  $\frac{d}{du}$ tu + κ(u) · nuf:
xuun := κ(u) · tu +  $\frac{d}{du}$ nuf - σ(u) · bu:
xuub :=  $\frac{d}{du}$ bu + σ(u) · nuf:
xuvt := -κ(u) · r(u) · sin(v):
xuvn := -( $\frac{d}{du}$ r(u)) · sin(v) - σ(u) · r(u) · cos(v):
xuvb := ( $\frac{d}{du}$ r(u)) · cos(v) - σ(u) · r(u) · sin(v):
xvvt := 0:
xvvn := -r(u) · cos(v):
xvvb := -r(u) · sin(v):
E := combine(-tv2 + nuf2 + bu2, trig):
F := combine(-tu · tv + nuf · nv + bu · bv, trig):
G := combine(-tv2 + nv2 + bv2, trig):
e := combine(det(transpose(matrix([[tu, nuf, bu], [tv, nv, bv], [xuut, xuun, xuub]]))), trig):
ge := combine(det(transpose(matrix([[tu, nuf, bu], [tv, nv, bv], [xvvt, xvvn, xvvb]]))), trig):
efe := combine(det(transpose(matrix([[tu, nuf, bu], [tv, nv, bv], [xuvt, xuvn, xuvb]]))), trig):
C := combine(e · G - 2 · F · efe + ge · E, trig):
De := combine(e · ge - efe2, trig):
W := combine(E · G - F2, trig):

```

Figura A.7: Códigos usados na Subseção 2.3.1 comum aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$.

```

c = 0
LV := combine(a2 · C2 · W - De2, trig):

c ≠ 0
LV := combine(-4 W4 c2 + W a2 C2 + 8 W2 c b D e - 4 b2 D e2 = 0, trig):

```

Figura A.8: Códigos usados na Subseção 2.3.1 específico dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, respectivamente.

A.5 Códigos usados na Subseção 2.3.2

Na Figura A.9 listamos os códigos que foram utilizados na demonstração da Subseção 2.3.2 que são comuns aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, na Figura A.10 listamos os códigos específicos dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$ que descrevem as Equações (2.129) e (2.134), respectivamente.

```

with(LinearAlgebra):
with(linalg):
tu := f(u) + v·σ(u) + v2 ·  $\frac{d}{du}$ r(u):
nuf := g(u) + r(u) · v2:
bu := h(u) - v:
tv := 2 · r(u) · v:
nv := 1:
bv := 0:
xuut :=  $\frac{d}{du}$ tu + σ(u) · nuf:
xuun := κ(u) · tu +  $\frac{d}{du}$ nuf - σ(u) · bu:
xuub :=  $\frac{d}{du}$ bu - κ(u) · nuf:
xuvt :=  $\frac{d}{du}$ tv + σ(u):
xuvn := κ(u) · tv:
xuvb := -κ(u):
xvvt := 2 · r(u):
xvvn := 0:
xvvb := 0:
E := combine(2 tu bu + nuf2):
F := combine(tv bu + nuf nv):
G := combine(1):
e := combine(det(transpose(matrix([tu, nuf, bu], [tv, nv, bv], [xuut, xuun, xuub])))), trig):
ge := combine(det(transpose(matrix([tu, nuf, bu], [tv, nv, bv], [xvvt, xvvn, xvvb])))), trig):
efe := combine(det(transpose(matrix([tu, nuf, bu], [tv, nv, bv], [xuvt, xuvn, xuvb])))), trig):
C := combine(e G - 2 F efe + ge E, trig):
De := combine(e ge - efe2, trig):
W := combine(E G - F2, trig):

```

Figura A.9: Códigos usados na Subsecção 2.3.2 comum aos casos $c = 0$ e $c \neq 0$.

```

c = 0
LV := combine(a2 · C2 · W - De2, trig):

c ≠ 0
LV := combine(-4 W4 c2 + W a2 C2 + 8 W2 c b D e - 4 b2 D e2 = 0, trig):

```

Figura A.10: Códigos usados na Subsecção 2.3.2 específico dos casos $c = 0$ e $c \neq 0$, respectivamente.