Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Mestrado acadêmico em Matemática

Eliézer Soares Pereira

Comportamento Assintótico da Probabilidade da Ruína em Modelos de Risco de Renovação com Indenizações Subexponenciais

Brasília/DF

2023

Eliézer Soares Pereira

Comportamento Assintótico da Probabilidade da Ruína em Modelos de Risco de Renovação com Indenizações Subexponenciais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cátia Regina Gonçalves

Brasília/DF

2023

Ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

Eu tenho muita gratidão por tudo que vivi no mestrado, por isso, quero aproveitar a oportunidade de escrever, ainda que de forma simples e curta, meus agradecimentos àqueles que compartilharam comigo essa etapa.

Primeiramente, eu agradeço à Deus que de tudo sabe e em Quem sempre tive a confiança de que havia um propósito em trilhar esta trajetória. Foi dEle, por Ele e para Ele esse sonho.

Eu agradeço às pessoas que sempre me amaram e se sacrificaram por mim, ao meu pai Ronaldo, à minha mãe Sandra, à minha irmã Kézia, à meus avós, meus tios e meus primos. À esses eu também sou grato pela compreensão e pelo apoio perseverante e incondicional. Em especial, minha gratidão pelo incentivo e suporte do meu pai, que apesar de eu não poder mostrar a ele esta dissertação, foi quem lutou com todas as forças para que eu pudesse chegar até aqui.

O motivo de ter a oportunidade de estar escrevendo esses agradecimentos foi ter vivido um grande sonho que sempre me aparentou estar distante. Desse modo, sou muito grato ao Departamento de Matemática da UnB por ter me proporcionado estudar matemática com excelência em um ambiente onde essa linda ciência é tratada com a devida seriedade e amor. Meus agradecimentos a todos os professores e demais colaboradores do Mat.

E agora, eu agradeço à pessoa que foi fundamental para que esse trabalho viesse a se tornar o que se tornou. Minha gratidão e grande admiração à professora Cátia que, desde meu pedido para que fosse minha orientadora até a entrega da versão final desta dissertação, sempre foi presente, me apoiando e olhando positivamente para o meu futuro no mestrado. Sou muito grato pela honra singular de ter aprendido matemática com o exímio profissionalismo, rigor e destreza da primeira doutora em matemática da UnB.

Sou muito grato ao IFB por ter me proporcionado iniciar minha trajetória na matemática com muitas oportunidade. Minha gratidão a todos os professores e servidores do IFB por propiciarem todo o suporte para uma formação docente e matemática sólida e abrangente. Em particular, agradeço aos meus orientadores de TCC e PIBIC, professor Pedro e Professor Wembesom, respectivamete, ao professor Tiago, professor Bruno Marx, professor Jorge e professora Adriana, que sempre me motivaram e me inspiraram a seguir na matemática como professor e pesquisador e que foram fundamentais pra que eu chegasse até aqui.

Aos meus parceiros/amigos do mestrado, condição necessária para que eu o concluísse, minha gratidão por ter conhecido pessoas incríveis e ter feito grandes amizades na UnB. Muito obrigado Julia, Amanda, Fran, Wendy, Adolfo, Saulo, Júlio, Hevenício, Leonardo, Guilherme e Henrylla. Os grupos de estudo pelo teams, zoom e meet e os estudos no Mat, me ajudaram muito nas disciplinas, nas qualificações e na escrita da dissertação.

Aos meus companheiros e companheiras do IFB, minha gratidão por abrilhantarem minha trajetória na matemática. Essa parceria me ajudou a superar desafios como álgebra, teoria dos números, desenho geométrico e práticas de ensino de 1 à 5. Particularmente, minha gratidão aos meus amigos que vieram do IFB para o Mat, Paulo e Gabriel Miranda, trazendo mais esperança ao mestrado e apoio diariamente em meio a uma pandemia. Muito obrigado pelos momentos de estudo e descontração online e presencialmente.

Aos meus amigos que estão comigo além da matemática, minha gratidão e carinho por desejarem o melhor pra mim e acreditarem na minha vitória me trazendo ânimo para persistir. Obrigado por suportarem meus lamentos e ouvir minhas ansiedades sempre tendo uma palavra de compreensão e encorajamento. Muito obrigado também por não me deixarem me isolar tanto, fazer algo diferente em meio a tanta pressão era revitalizante. Em particular, minha gratidão à Talyta, que me apresentou a UnB, o Mat e o RU, antes mesmo de eu ser aluno do mestrado, e que apoiou esse sonho quando ele ainda era uma utopia. Sou muito grato por esta amizade que, desde a camisa do mestrado, luminária, etc., me deu suporte diversas vezes em termos práticos e psicológicos para eu seguir em frente.

Agradeço ao PPG/Mat UnB e às agências de fomento, que possibilitaram minha permanência no mestrado, a saber, o CNPq e a Misley Uniformes (Tito e tia Diva).

Enfim, minha gratidão por ter vivido todos os momentos que fizeram que esse processo me tornasse a pessoa que eu me tornei. E que o progresso continue...

"It's not only the question, but the way you try to solve it."
- Maryam Mirzakhani

RESUMO

Nesta dissertação, apresentamos inicialmente um estudo sobre o comportamento caudal da distribuição de somas ponderadas aleatoriamente de variáveis aleatórias subexponenciais. Baseados em Yang e Li (2019), esses resultados são utilizados para a obtenção de relações assintóticas para a probabilidade da ruína em modelos de risco de renovação, com a inclusão de juro e com indenizações primárias e secundárias.

Palavras-chave: Cauda Pesada; Classe Subexponencial; Indenizações Atrasadas; Processos de Reserva de Risco; Probabilidade da Ruína.

ABSTRACT

In this dissertation, we present a study on the tail behavior of the distribution of randomly weighted sums of subexponential random variables. Based on Yang and Li (2019), these results are used to obtain asymptotic relationships for the ruin probability in renewal risk models with the inclusion of interest and with primary and secondary claims.

Keywords: Heavy Tail; Subexponential Class; Delayed Claims; Risk Reserve Processes; Ruin Probability.

SUMÁRIO

Introdução **1**

1 Distribuições Subexponenciais e Somas Ponderadas Aleatoriamente **5**

1.1 **Introdução** 5

1.2 **Preliminares** 6

1.3 **Distribuições Subexponenciais** 7

1.4 **Somas Ponderadas Aleatoriamente** 22

2 Probabilidade Assintótica da Ruína em Modelos de Risco de Renovação com Indenizações Subexponenciais **36**

2.1 **Introdução** 36

2.2 **Processos de Renovação** 37

2.3 **Processos de Reserva de Risco** 39

2.4 **Probabilidade Assintótica da Ruína** 44

Introdução

Os modelos matemáticos que descrevem a evolução, ao longo do tempo, da reserva de capital de uma empresa de seguros de não-vida, tais como seguros de automóveis e de residências, são chamados *processos de reserva de risco* ou *modelos de risco*.

A subárea da ciência atuarial que estuda os modelos de risco é chamada Teoria de Risco, que teve início com o trabalho pioneiro de F. Lundberg em 1903.

O modelo de risco mais simples, conhecido como *modelo clássico*, cujo tratamento matemático foi apresentado por Lundberg em 1926, considera que o superávit da seguradora consiste apenas do capital inicial, dos ganhos obtidos pelo recebimento de prêmio a uma taxa constante e das perdas provenientes do pagamento de sinistros.

Assim, a reserva de capital ao longo do tempo é representada por

$$U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

em que $x = U(0)$ é o capital inicial; $c > 0$ é a taxa de pagamento de prêmios; $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo que descreve o número de chegada de sinistros ao longo do tempo e $\{X_n,\ n \geq 1\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias ($v.a.'s$) independentes e identicamente distribuídas ($i.i.d.$) não-negativas e independentes do processo $\{N(t),\ t \geq 0\}$, tal que X_n representa o valor pago referente ao n-ésimo sinistro.

Uma extensão do modelo clássico consiste em assumir que o processo de chegada dos sinistros $\{N(t),\ t \geq 0\}$, é um processo de renovação , ou seja, um processo de contagem definido por

$$N(t) = \sup\{n \geq 1;\ \tau_n \leq t\}, \qquad t \geq 0,$$

em que os tempos entre as ocorrências de sinistros, $\tau_1,\ \tau_{n+1} - \tau_n,\ n \geq 1$, são variáveis aleatórias $i.i.d.$ com uma distribuição arbitrária. Esse modelo foi proposto por F. Sparre Andersen em 1957 e é conhecido como *modelo de renovação* ou *modelo de Sparre-Andersen*. No caso particular em que a distribuição de $\tau_1,\ \tau_{n+1} - \tau_n,\ n \geq 1$ é a exponencial, o processo de chegadas $\{N(t),\ t \geq 0\}$ reduz-se ao processo de Poisson e o modelo de risco associado é o modelo clássico.

Ao longo dos anos, diversos modelos de risco oriundos do modelo clássico foram propostos e estudados com o objetivo de torná-los mais próximos das situações reais e que tivessem mais relevância prática e teórica.

Neste trabalho, estamos interessados em uma classe de modelos de risco, oriundos do modelos de renovação, que incorpora na descrição do superávit da seguradora a inclusão de juro decorrente do investimento em aplicações financeiras tanto do capital inicial, quanto do capital proveniente do pagamento de prêmios. Além disso, considera-se a situação em que a cada sinistro está associado o pagamento imediato de indenizações, chamadas principais e também pagamento de indenizações, chamadas secundárias, que ocorrem depois de um período de tempo aleatório.

Modelos com sinistros atrasados ou com inclusão de juros foram estudados por diversos autores como Yuen et al. (2005), Dassios e Zhao (2013) e Yang e Li (2019) dentre outros.

Nesse contexto, o modelo de renovação com sinistros secundários e com a inclusão de juro composto continuamente é descrito como

$$U(t) = xe^{rt} + c\int_0^t e^{r(t-s)}ds - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i e^{r(t-\tau_i)} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i e^{r(t-\tau_i-D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq t\}}, \qquad t \geq 0. \quad (2)$$

em que $U(0) = x > 0$ é o capital inicial; $c > 0$ é a taxa de prêmios; $r \geq 0$ é a taxa de juro; $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de renovação, com tempos de chegadas de sinistros principais $\{\tau_n,\ n \geq 0\}$; $\{D_n,\ n \geq 0\}$ é uma sequência de *v.a.'s i.i.d.* que representam os tempos de atraso das ocorrências dos sinistros secundários; $\{X_i,\ i \geq 1\}$ e $\{Y_i,\ i \geq 1\}$, os valores das indenizações principais e secundárias, respectivamente, são sequências de *v.a.'s i.i.d.* e para cada $i \geq 1$ as variáveis $X_i,\ Y_i,\ \tau_i$ e D_i são independentes.

Dado um modelo de risco $\{U(t),\ t \geq 0\}$, um dos principais interesses da Teoria de Risco é analisar a *probabilidade da ruína*, ou seja, a probabilidade de que a reserva de capital de risco caia abaixo de zero em algum instante de tempo finito. Especificamente, deseja-se analizar a *probabilidade da ruína em um horizonte finito* definida por

$$\psi(x,T) = \mathcal{P}\left(\inf_{0<t\leq T} U(t) < 0 \middle| U(0) = x\right) = \mathcal{P}(\gamma(x) \leq T | U(0) = x). \quad (3)$$

em que $\gamma(x)$ é chamado o *tempo de ruína* definido por

$$\gamma(x) = \inf\{t \geq 0;\ U(t) < 0 | U(0) = x\}. \quad (4)$$

Ou ainda, deseja-se analizar a *probabilidade da ruína em um horizonte infinito*, dada por

$$\psi(x) = \mathcal{P}(\gamma(x) < +\infty | U(0) = x) = \lim_{T\to\infty} \psi(x,T). \tag{5}$$

Para a maioria dos modelos de risco não é possível obter a expressão exata da probabilidade da ruína. Nesses casos, uma das alternativas utilizadas é a análise do comportamento assintótico da probabilidade da ruína à medida que o capital inicial cresce.

Nesse sentido, a expressão assintótica de $\psi(x,T)$, associada ao modelo de risco (2), bem como o tratamento matemático a ser utilizado para a obtenção dessa aproximação, dependem consideravelmente do comportamento assintótico das caudas (à direita) das distribuições das indenizações principais, $\{X_i,\ i \geq 1\}$ e das indenizações secundárias $\{Y_i,\ i \geq 1\}$.

Existem vários estudos sobre a probabilidade da ruína, do modelo (2), sob hipóteses particulares para $\{N(t),\ t \geq 0\}$, a taxa de juro e assumindo que a distribuição das indenizações, principais e/ou secundárias, possuem cauda leve, isto é, tem um decaimento de ordem $O(e^{-\varepsilon x})$, quando $x \to \infty$ para algum $\varepsilon > 0$.

No entanto, é bem conhecido entre os estudiosos da ciência atuarial que a maioria das distribuições das indenizações possuem cauda pesada, conforme as referências que podem ser encontrada em Yang e Li (2019).

Nesta dissertação, apresentamos detalhadamente o estudo realizado por Yang e Li (2019) que obtiveram expressões assintóticas para $\psi(x,T)$ quando $x \to \infty$, associada ao modelo (2), quando a distribuição das indenizações principais pertence à classe subexponencial, que abrange a grande maioria das distribuições de cauda pesada que são comumente utilizadas.

Em especial, no tratamento matemático utilizado por Yang e Li (2019), o comportamento da cauda de somas de variáveis aleatórias ponderadas aleatoriamente tem um papel fundamental para a obtenção da aproximação assintótica da probabilidade da ruína.

Assim, no Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos gerais preliminares. Ademais, apresentamos o conceito formal de cauda pesada, bem como as definições de subclasses das distribuições de cauda pesada e as relações entre elas, com especial destaque às propriedades da classe subexponencial. Em seguida, na seção 1.4, apresentamos alguns resultados recentes sobre o comportamento assintótico caudal de somas de variáveis aleatórias com caudas subexponenciais, ponderadas aleatóriamente, especialmente os resultados auxiliares obtidos por Yang e Li (2019) que são de grande relevância para a obteção das expansões assintóticas para $\psi(x,T)$ quando $x \to \infty$.

No Capítulo 2, apresentamos em detalhes os resultados principais de Yang Li (2019) sobre o comportamento assintótico da probabilidade da ruína para o modelo de renovação (2). Para isso, primeiramente apresentamos a definição e um resumo das principais propriedades de processos de renovação. Em seguida, apresentamos um breve relato sobre a evolução dos processos de reserva de risco oriundos do modelo clássico de Lundberg, e que deram origem ao modelo descrito em (2). Finalizamos o capítulo, apresentando as relações assintóticas obtidas por Yang e Li (2019) (Teorema 2.4 e Teorema 2.5) para a probabilidade da ruína $\psi(x, T)$, associada ao modelo de risco de renovação com indenizações atrasadas, com a inclusão de juro e com indenizações subexponenciais.

Capítulo 1

Distribuições Subexponenciais e Somas Ponderadas Aleatoriamente

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados preliminares para o desenvolvimento do Capítulo 2.

Inicialmente, na seção 1.2 introduzimos a terminologia e conceitos básicos utilizados em toda a dissertação.

Na seção 1.3, apresentamos uma síntese das propriedades da classe de distribuições subexponenciais, que abrange a grande maioria das distribuições de cauda pesada que são normalmente utilizadas para a modelagem dos valores das indenizações associadas aos modelos de reserva de capital de risco em empresas seguradoras. Primeiramente, definimos distribuições de cauda pesada, as suas principais subclasses e descrevemos as relações entre elas. Em seguida, apresentamos em detalhes propriedades específicas das distribuições da classe subexponencial.

As principais referências bibliográficas utilizadas na seção 1.3 são Embrechts et al. (1997), Asmussen (1984), Santana (2006), Cline (1986), Tang e Tsitsashvili (2003b), Cline e Samorodnitsky (1994), entre outras.

A análise do comportamento assintótico da probabilidade da ruína em modelos de risco, que é o principal objetivo desta dissertação, está fortemente relacionado com o comportamento da cauda de somas de variáveis aleatórias ponderadas aleatoriamente.

Assim, na seção 1.4 apresentamos resultados sobre o comportamento assintótico caudal de somas ponderadas de variáveis aleatórias pertencentes às classes de distribuições de cauda pesada que serão relevantes para o desenvolvimento do Capítulo 2.

As referências utilizadas na seção 1.4 são Tang e Yuen (2014) e (2016) e Yang e Li (2019).

1.2 Preliminares

Nesta seção apresentamos diversos conceitos e terminologias básicas que serão utilizadas ao longo de toda a dissertação.

Iniciamos com a definição de relações assintóticas entre funções reais e entre variáveis aleatórias.

Definição 1.1. Sejam duas funções reais positivas $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

(a) Se
$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1,$$
dizemos que $f(x)$ é *assintoticamente menor* que $g(x)$ e denotamos $f(x) \lesssim g(x)$. Por outro lado, dizemos também que $g(x)$ é *assintoticamente maior* que $f(x)$ e denotamos por $g(x) \gtrsim f(x)$.

(b) Se
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$
dizemos que a função $f(x)$ é *assintóticamente igual a* $g(x)$ e denotamos $f(x) \sim g(x)$.

(c) Se
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$
denotamos $f(x) = o(g(x))$.

(d) Se
$$\limsup_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty,$$
denotamos $f(x) = O(g(x))$.

(e) Se
$$0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty,$$
denotamos $f(x) \asymp g(x)$.

Definição 1.2. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se

$$P(X > x) \leq P(Y > x), \qquad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R},$$

dizemos que X é *estocasticamente menor ou igual* a Y e denotamos $X \leq_{st} Y$.

A seguir, apresentamos o conceito de convolução de funções de distribuição e sua relação com a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes.

Definição 1.3. Sejam F e G funções de distribuição de probabilidade sobre $\mathbb{R}$. Definimos a *convolução* de F e G como sendo a função, denotada por $F * G$, dada por

$$(F * G)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z - x) dG(x), \tag{1.1}$$

em que a integral é a de Lesbegue-Stieltjes.

Além disso, para $n \geq 2$, denotamos por F^{*n} a *n-ésima convolução de* F, definida recursivamente por $F^{*2} = F * F$ e $F^{*n} = F^{*(n-1)} * F$.

Em particular, se $F(x) = G(x) = 0$, para todo $x < 0$, então

$$(F * G)(z) = \int_{0}^{z} F(z - x) dG(x). \tag{1.2}$$

Usando propriedades de esperança condicional, não é difícil provar que a convolução de funções de distribuição é a função de distribuição ($f.d.$) da soma de variáveis aleatórias independentes. Especificamente, se X e Y são $v.a.'s$ independentes com função de distribuição F_X e F_Y, respectivamente, então a função de distribuição de $X+Y$ é dada por

$$F_{X+Y}(z) = P(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z - y) dF_Y(y) = (F * G)(z). \tag{1.3}$$

Dessa forma, a convolução de duas funções de distribuição de probabilidade é também uma função de distribuição de probabilidade sobre $\mathbb{R}$. Generalizando, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são $v.a.'s$ independentes e com a mesma $f.d.$ F, então a $f.d.$ da soma de $X_1 + \cdots + X_n$ é a n-ésima convolução de F, ou seja,

$$F_{X_1 + \cdots + X_n}(x) = F^{*n}(x). \tag{1.4}$$

1.3 Distribuições Subexponenciais

Em diferentes áreas de aplicação da Teoria de Probabilidade os modelos matemáticos traduzem melhor os fenômenos de interesse ao se trabalhar com distribuições de cauda pesada. Essa modelagem inclui vários campos como na física, meteorologia e finanças. Em particular, em modelos de risco do capital volátil de uma seguradora, a distribuição das indenizações arcadas pelo seguro é de cauda pesada.

Uma subclasse importante de cauda pesada é a classe das distribuições subexponenciais, que tem importante relevância em trabalhos de probabilidade aplicada em geral e especialmente na teoria de atuária.

Nesta seção, vamos apresentar uma síntese dos conceitos e propriedades das distribuições de cauda pesada e, em especial, das distribuições subexponenciais que são de interesse para o estudo dos processos de reserva de risco a ser apresentado no próximo capítulo. Um estudo mais detalhado dessa clase de distribuições pode ser encontrado, por exemplo, em Embrechts et al. (1997) e Foss et al. (2011).

Iniciamos com as definições e caracterização das distribuições de cauda pesada.

Definição 1.4. Dada $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de distribuição de probabilidade, chamamos de *cauda* (à direita) *de* F à função

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em outros contextos da Estatística, costuma-se chamar $\overline{F}$ de *função de sobrevivência.*

Definição 1.5. Dizemos que uma função de distribuição F tem *cauda leve à direita* se para algum $\varepsilon > 0$ temos $\overline{F}(x) = O(e^{-\varepsilon x})$, ou seja,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}} < \infty.$$

Caso contrário, se

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}} = +\infty, \qquad \forall\ \varepsilon > 0,$$

dizemos que F tem *cauda pesada à direita*, ou simplesmente *cauda pesada.* Denotamos por $\mathcal{K}$ a família das $f.d.'s$ de cauda pesada.

Uma variável aleatória é classificada como sendo de cauda leve ou pesada de acordo com a sua distribuição de probabilidade: se a $f.d.$ for de cauda leve ou pesada, a variável aleatória será de cauda leve ou pesada, respectivamente.

Uma caracterização bastante utilizada para classificar uma função de distribuição como sendo de cauda leve ou pesada está relacionada com a existência da função geradora de momentos associada à F, ou seja,

$$\hat{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x),$$

em uma vizinhança de $s = 0$, conforme a proposição a serguir.

Proposição 1.1. Uma *f.d.* F é de cauda pesada se, e somente se,

$$\hat{F}(s) = \infty, \qquad \forall s > 0.$$

Consequentemente, F é de cauda leve se $\hat{F}(s) < +\infty$, ou seja, está definida para algum $s > 0$.

Demonstração. Vide Santana (2006). □

Exemplo 1.1. São exemplos de distribuições de cauda leve: Geométrica, Poisson, Normal e a Weibull com taxa de falha crescente, ou seja, com *f.d.* dada por

$$F(x) = 1 - e^{cx^\tau}, \qquad c > 0,\ \tau \geq 1.$$

Exemplo 1.2. São exemplos de distribuição de cauda pesada:

(a) T-Student, com r graus de liberdade, tem densidade dada por $f(x) = \dfrac{\Gamma((r+1)/2)}{\sqrt{\pi r}\Gamma(r/2)} \cdot \dfrac{1}{(1+x^2/r)^{(r+1)/2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) F-Snedecor, também conhecida como função de Fisher, com parâmetros v_1 e v_2 tem densidade $f(x) = \dfrac{\Gamma((v_1+v_2)/2)(v_1/v_2)^{v_1/2}x^{v_1/2-1}}{\Gamma(v_1/2)\Gamma(v_2/2)[(v_1/v_2)x+1]^{(v_1+v_2)/2}}$, $0 < x < \infty$ e $v_1, v_2 = 1, 2, 3, \ldots$.

(c) Gumbel tipos I, II e III.

(d) Fréchet tipos I, II e III.

(e) Cauchy, com densidade dada por $f(x) = \dfrac{1}{\pi\beta\left[1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}$, $x \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$.

(f) Weibull com taxa de falha decrescente, isto é, com cauda $\overline{F}(x) = e^{cx^\tau}$, $x > 0$ onde $c > 0$ e $0 < \tau < 1$.

(g) Pareto, com cauda $\overline{F}(x) = \left(\dfrac{\kappa}{\kappa + x}\right)^\alpha$, $x > 0$ com $\alpha,\ \kappa > 0$.

(h) Lognormal, com densidade dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x > 0$, com $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Dentre as distribuições de cauda pesada, a subclasse das distribuições subexponenciais terá destaque no presente trabalho. Essas distribuições modelam sistemas em diversos campos representando bem situações em que há a ocorrência de eventos extremos.

Definição 1.6. Uma função de distribuição F com suporte $[0,\ \infty)$ é *subexponencial* se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n, \qquad \forall\, n \geq 2. \tag{1.5}$$

Denotamos por $\mathcal{S}$ a família de todas as $f.d.'s$ subexponenciais.

Se definirmos a $f.d.$ F no suporte $(-\infty, \infty)$ pode-se provar que se $F^{+}(x) = F(x)I_{\{0\leq X<\infty\}}$ é subexponencial então $F \in \mathcal{S}$.

Para uma interpretação da condição (1.5), que justifica sua importância na modelagem de sistemas de finanças e seguros, observe inicialmente que (1.5) é equivalente a

$$\overline{F^{*n}}(x) \sim n\overline{F}(x), \qquad \textit{quando } x \to \infty. \tag{1.6}$$

Agora, por um lado, conforme (1.4) temos que

$$F^{*n}(x) = F_{X_1+\cdots+X_n}(x),$$

com $X_1, \ldots, X_n$ $v.a.'s$ $i.i.d.$ com $f.d.$ F. Assim, considerando $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ então

$$\overline{F^{*n}}(x) = P(S_n > x). \tag{1.7}$$

Por outro lado, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n\overline{F}(x)}{1 - F^n(x)} = 1, \tag{1.8}$$

pois podemos escrever

$$1 - F^n(x) = (1 - F(x)) \sum_{k=0}^{n-1} [F(x)]^k = \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x)$$

e $F(x) \to 1$ quando $x \to \infty$.

Mas, denotando $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, com $X_1, \ldots, X_n$ $v.a.'s$ $i.i.d.$ F, então

$$1 - F^n(x) = 1 - P(M_n \leq x) = P(M_n > x).$$

e por (1.8) segue que

$$P(M_n > x) \sim n\overline{F}(x), \qquad quando\ x \to \infty. \tag{1.9}$$

Logo, por (1.7) e (1.9), segue que a condição (1.5) é equivalente a

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \qquad quando\ x \to \infty. \tag{1.10}$$

Ou seja, a cauda da maior parcela da soma é assintoticamente igual à cauda da soma de todas as parcelas. No próximo capítulo veremos uma interpretação dessa propriedade no contexto de processos de reserva de risco de uma seguradora.

Exemplo 1.3. São exemplos de funções de distribuição subexponenciais:

(a) Pareto: vide **Exemplo 1.2**.

(b) Weibull: vide **Exemplo 1.2**.

(c) Lognormal: vide **Exemplo 1.2**.

(d) Loggamma, com densidade $f(x) = \dfrac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1},\ x \in (1, \infty)\ e\ \alpha,\ \beta > 0.$

(e) Burr, com cauda $\overline{F}(x) = \left(\dfrac{\kappa}{\kappa + x^\tau}\right)^\alpha$, com $\alpha,\ \kappa,\ \tau > 0$.

(f) Benktander tipo I, sendo a cauda $\overline{F}(x) = \left[1 + 2\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\ln x\right] e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x},\ x \in (1, \infty)$, com $\alpha,\ \beta > 0$.

(g) Benktander tipo II, cuja cauda é dada por $\overline{F}(x) = e^{\frac{\alpha}{\beta}}x^{-(1-\beta)}e^{-\alpha\frac{x^\beta}{\beta}},\ x \in (1, \infty)$, com $\alpha > 0$ e $0 < \beta < 1$.

A subclasse $\mathcal{S}$ abrange outras subclasses de distribuições de cauda pesada relativamente comum em diversas aplicações. Vamos nos restringir a algumas subfamílias da classe das distribuições subexponenciais que serão importantes para o desenvolvimento dos principis resultados apresentados no Capítulo 2.

Inicialmente, uma subclasse de $\mathcal{S}$ é a família das distribuições com cauda de variação regular.

Definição 1.7. Dizemos que uma função de distribuição F com suporte $[0,\ \infty)$ tem *cauda de variação regular*, se $\exists\ 0 \leq \alpha < \infty$ tal que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha}, \qquad \text{para todo } y > 0. \tag{1.11}$$

Denotamos por $\mathcal{R}$ a família de $f.d.'s$ com suporte $[0,+\infty)$ com cauda de variação regular.

Observação 1.1. O expoente α da definição da subfamília $\mathcal{R}$ especifica os tipos de variação de $\overline{F}$, a saber

(a) se $\alpha \in (0,\infty)$ então dizemos que $\overline{F}$ é $(-\alpha)$ variante e denotamos por $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$;

(b) se $\alpha = 0$, dizemos que $\overline{F}$ é lentamente variante e denotamos $\overline{F} \in \mathcal{R}_0$.

Exemplo 1.4. As distribuições Benktander tipos I e II, Lognormal e Weibull apresentadas no **Exemplo 1.3** são exemplos de distribuições da classe $\mathcal{R}$.

Em especial, se o limite em (1.11) é satisfeito para $\alpha = +\infty$, então dizemos que $\overline{F}$ é rapidamente variante e neste caso temos a seguinte definição.

Definição 1.8. Dizemos que uma função de distribuição F com suporte $[0,+\infty)$ tem *cauda de variação rápida*, se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 0, \qquad \forall y > 0.$$

Denotamos por $\mathcal{R}_{-\infty}$ a família de distribuições com cauda de variação rápida.

Uma extensão da subclasse das distribuição com cauda de variação regular é a família das distribuições com cauda de variação consistente, denotada por $\mathcal{C}$.

Definição 1.9. Dizemos que uma $f.d.$ F com suporte $[0,\infty)$ tem *cauda de variação consistente*, se

$$\lim_{y\uparrow 1} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1$$

ou equivalentemente, se

$$\lim_{y\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

A última subclasse de cauda pesada que se relaciona com $\mathcal{S}$ que iremos apresentar é a família das distribuições de cauda longa, que denotamos por $\mathcal{L}$.

Definição 1.10. Dizemos que uma função de distribuição F com suporte $[0,\infty)$ é de *cauda longa*, se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1, \qquad \text{para todo } y > 0, \tag{1.12}$$

ou equivalentemente, se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1, \qquad \text{para todo } y > 0.$$

Na proposição a seguir apresentamos as relações entre essas subclasses de funções de distribuição. Sua demonstração será omitida e pode ser encontrada em Embrechts et al. (1997) ou Santana (2006).

Proposição 1.2. São válidas as seguintes relações de inclusão entre as subclasses de $\mathcal{K}$ listadas acima.

1. $\mathcal{R} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K}$.

2. $\mathcal{C} \neq \mathcal{R}$ e $\mathcal{L} \neq \mathcal{S}$.

No restante dessa seção vamos apresentar algumas propriedades específicas das distribuições subexponenciais que são de nosso interesse.

Para auxiliar na demonstração da próxima proposição, enunciamos o seguinte lema.

Lema 1.1. Se a função positiva $h \in R_0$ então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x+y)}{h(x)} = 1,$$

uniformemente em $y \in [a,b]$, com $0 < a \leq b < \infty$.

Proposição 1.3. Se $F \in \mathcal{S}$ então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1, \qquad \text{para todo } y > 0.$$

Mais ainda, o limite acima é uniforme sobre todo compacto em $(0,\infty)$.

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1 - F^{*(n+1)}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{F(x) - F^{*(n+1)}(x)}{\overline{F}(x)}.$$

Podemos denotar a $(n+1)$-ésima convolução como

$$F^{*(n+1)}(x) = \int_0^x F^{*n}(x-y)dF(y),$$

pois a $f.d.$ F está definida em $[0,+\infty)$.

Assim,

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{F(x)}{\overline{F}(x)} - \frac{F^{*(n+1)}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1}{\overline{F}(x)} dF(z) - \int_0^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z).$$

Logo,

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F^{*n}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z). \tag{1.13}$$

Analogamente ao processo acima, para $y > 0$ fixo com $x > y$, podemos obter que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^x \frac{1 - F(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\ &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z).\end{aligned}$$

Sabemos que F é não-decrescente e $\overline{F}$ é não-crescente, então para $z > 0$, $\dfrac{F(x-z)}{F(x)} \leq 1$, e para $z > y$, $\overline{F}(x-z) \geq \overline{F}(x) \implies \dfrac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} \geq 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} &\geq 1 + \int_0^y dF(z) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\ &= 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)),\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y)\right] [F(x) - F(y)]^{-1},$$

tomando x suficientemente grande , tal que, $F(x) > F(y)$.

Por hipótese $F \in \mathcal{S}$, logo, segue por definição que $\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\overline{F}(x)$, e consequentemente,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{2 - 1 - F(y)}{1 - F(y)} = 1.$$

Por outro lado, como $\overline{F}$ é não-crescente, para $y > 0$, segue que

$$\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \geq 1, \ \forall x.$$

Assim, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$, para cada $y > 0$. Agora, note que $\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}((x+y)-y)}$. Destarte, analogamente, tem-se $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$.

Agora, note que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F}(\ln xt)}{\overline{F}(\ln x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F}(\ln x + \ln t)}{\overline{F}(\ln x)} = 1$. Assim, pela **Definição 1.7** $\overline{F} \circ \ln \in R_0$. Portanto, pelo **Lema 1.1** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$ para todo $y > 0$ unifomemente sobre todo compacto em $(0, \infty)$. □

Com este resultado é possível mostrar que para a verificação da condição (1.5) basta verificar para $n = 2$ conforme a proposição abaixo.

Proposição 1.4. $F \in \mathcal{S}$ se, e somente se,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F * F}(x)}{\overline{F}(x)} = 2. \tag{1.14}$$

Demonstração. Por um lado, se $F \in \mathcal{S}$ então (1.14) segue da **Definição 1.6** para $n = 2$.

Por outro lado, assumindo (1.14), para provar que $F \in \mathcal{S}$, vamos obter a relação (1.5) usando indução sobre n. Por (1.14) vale a relação (1.5) para $n = 2$. Agora, suponha $\dfrac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \to m$ quando $x \to \infty$ para algum inteiro $m \geq 2$. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher y grande, tal que, $\left| \dfrac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} - m \right| \leq \varepsilon$, para $x \geq y$.

De (1.13), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{*m+1}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \cdot \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= 1 + \int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \cdot \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) + \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \cdot \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z).
\end{aligned}$$

Majorando ambos os termos do integrando da segunda integral do último lado da igualdade, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \cdot \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) &\leq \int_{x-y}^{x} \sup_{v\geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \cdot \frac{1}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= \sup_{v\geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \int_{x-y}^{x} \frac{dF(z)}{\overline{F}(x)} \\
&= \sup_{v\geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \cdot \frac{F(x)-F(x-y)}{\overline{F}(x)} \\
&= \sup_{v\geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \cdot \frac{1-\overline{F}(x)-1+\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \\
&= \sup_{v\geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \left[-1+\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\right] \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, novamente por (1.13) e pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{x-y} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \cdot \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) &= \int_{0}^{x-y} [m+o(\varepsilon)] \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= [m+o(\varepsilon)] \int_{0}^{x-y} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= [m+o(\varepsilon)] \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} - \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z)\right] \\
&= [m+o(\varepsilon)] \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z)\right] \\
&\geq [m+o(\varepsilon)] \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_{x-y}^{x} dF(z)\right] \\
&= [m+o(\varepsilon)] \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - \frac{F(x)-F(x-y)}{\overline{F}(x)}\right].
\end{aligned}$$

Aplicando o limite na expansão acima, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} [m+o(\varepsilon)] \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - \frac{F(x)-F(x-y)}{\overline{F}(x)}\right] &= \lim_{x\to\infty} [m+o(\varepsilon)] \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\right] \\
&= m+o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Assim, retomando a construção até aqui, obtemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*(m+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1+m+o(\varepsilon).$$

E pela arbitrariedade de ε segue o resultado. $\square$

Assim, por (1.5) da **Definição 1.6** e a **Proposição 1.4**, uma *f.d.* F é subexponencial se, e só se,

$$\overline{F * F}(x) \sim \overline{F}(x) + \overline{F}(x). \tag{1.15}$$

O próximo resultado mostra que, se a cauda de distribuições são assintóticamente equivalentes a distribuições subexponenciais então elas também pertencem a $\mathcal{S}$.

Proposição 1.5. Suponha que F e G são funções de distribuição sobre $[0, \infty)$. Se $F \in \mathcal{S}$ e

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c,$$

onde $c \in (0, \infty)$, então $G \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Sejam X e Y *v.a.'s i.i.d.* com *f.d.* G. Para os seguintes eventos disjuntos segue que

$$\begin{aligned}\{X + Y > x\} =& \{X \leq v,\ X + Y > x\} \cup \{Y \leq v,\ X + Y > x\} \\ & \cup \{v < X \leq x - v,\ X + Y > x\} \cup \{Y > v,\ X > x - v\}.\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\frac{P(X + Y > x)}{\overline{G}(x)} = \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\overline{G}(x)} &= (\overline{G}(x))^{-1} \int_0^v \overline{G}(x - y) dF(y) + (\overline{G}(x))^{-1} \int_0^v \overline{G}(x - y) dG(y) \\ &+ (\overline{G}(x))^{-1} \int_v^{x-v} \overline{G}(x - y) dF(y) + (\overline{G}(x))^{-1} \overline{G}(v) \overline{G}(x - v) \\ &= 2 \int_0^v \frac{\overline{G}(x - y)}{\overline{G}(x)} dG(y) + \int_v^{x-v} \frac{\overline{G}(x - y)}{\overline{G}(x)} dG(y) + \frac{\overline{G}(v)\overline{G}(x - v)}{\overline{G}(x)} \\ &=: I_1(x, v) + I_2(x, v) + I_3(x, v).\end{aligned}$$

Por hipótese $F \in \mathcal{S}$, então pela **Proposição 1.3** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\overline{F}(x - v)}{\overline{F}(x)} = 1$, para todo $v > 0$. Além disso, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c > 0$, por hipótese. Logo,

$$\frac{\overline{G}(x - v)}{\overline{G}(x)} = \frac{\overline{G}(x - v)}{\overline{F}(x - v)} \cdot \frac{\overline{F}(x - v)}{\overline{F}(x)} \cdot \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1.$$

Portanto, como $\overline{G}(x)$ é não-crescente, segue que

$$I_1(x,v) = 2\int_0^v \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)} dG(y) \geq 2\int_0^v dG(y) = 2G(v).$$

Por outro lado, pela integração por partes da integral de Riemann-Stieltjes,

$$I_1(x,v) \leq 2\overline{G}(v)\frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 2G(v).$$

Portanto,

$$I_1(x,v) \xrightarrow[x\to\infty]{} 2G(v). \tag{1.16}$$

Para $I_3(x,v)$, temos

$$I_3(x,v) = \frac{\overline{G}(v)\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \overline{G}(v). \tag{1.17}$$

Retomando a hipótese de que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c$, temos que para $\varepsilon > 0$ existe $x_0(\varepsilon)$, tal que, para todo $x \geq x_0$ tem-se

$$c - \varepsilon \leq \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} \leq c + \varepsilon. \tag{1.18}$$

Tomando v grande, segue que

$$\begin{aligned} I_2(x,v) &= \int_v^{x-v} \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)} dG(y) \\ &= \int_v^{x-v} \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{F}(x-y)} \cdot \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} \cdot \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dG(y) \\ &\leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon} \int_v^{x-v} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dG(y). \end{aligned}$$

Agora, usando a fórmula de integração por partes da integral de Riemann-Stieltjes, temos

$$\int_v^{x-v} \overline{F}(x-y) dG(y) = \overline{F}(v)G(x-v) - \overline{F}(x-v)G(v) - \int_v^{x-v} G(y) d\overline{F}(x-y).$$

Fazendo a substituição $t = x - y$, podemos reescrever

$$
\begin{aligned}
\int_v^{x-v} \overline{F}(x-y)dG(y) =& \overline{F}(v)G(x-v) - \overline{F}(x-v)G(v) + \int_v^{x-v} G(x-t)d\overline{F}(t) \\
=& \overline{F}(v)(1-\overline{G}(x-v)) - \overline{F}(x-v)(1-\overline{G}(v)) \\
& + \int_v^{x-v} (1-\overline{G}(x-t))d\overline{F}(t) \\
=& \overline{F}(v) - \overline{F}(v)\overline{G}(x-v) - \overline{F}(x-v) + \overline{F}(x-v)\overline{G}(v) + \overline{F}(x-v) \\
& - \overline{F}(v) - \int_v^{x-v} \overline{G}(x-t)d\overline{F}(t) \\
=& [\overline{F}(x-v)\overline{G}(v) - \overline{F}(v)\overline{G}(x-v)] - \int_v^{x-v} \overline{G}(x-t)d[1-F](t) \\
=& \overline{F}(x-v)\overline{G}(v) - \overline{F}(v)\overline{G}(x-v) - \int_v^{x-v} \overline{G}(x-t)dF(t).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
I_2(x,v) \leq& \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\frac{1}{\overline{F}(x)}\left[\overline{G}(v)\overline{F}(x-v) - \overline{G}(x-v)\overline{F}(v) + \int_v^{x-v} \overline{G}(x-t)dF(t)\right] \\
=& \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left[\frac{\overline{F}(x-v)}{\overline{F}(x)}\overline{G}(v) - \overline{F}(v)\frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} + \int_v^{x-v} \frac{\overline{G}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}\cdot\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\right]
\end{aligned}
$$

Pela relação (1.18), temos que

$$
I_2(x,v) \leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left[\frac{\overline{F}(x-v)}{\overline{F}(x)}\overline{G}(v) - \overline{F}(v)\frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)}\cdot\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} + (c+\varepsilon)\int_v^{x-v} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\right].
$$

Ademais, pela **Proposição 1.3**, pelo Terema da Convergência Dominada e usando a hipótese de que $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c$, segue que

$$
\limsup_{x\to\infty} I_2(x,v) \leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left[\overline{G}(v) - \overline{F}(v)c + (c+\varepsilon)\int_v^{\infty} \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\right].
$$

Assim,

$$
\limsup_{x\to\infty} I_2(x,v) \leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left[\overline{G}(v) - \overline{F}(v)c + (c+\varepsilon)\overline{F}(v)\right]. \tag{1.19}
$$

Logo, por (1.16), (1.19) e (1.17), obtemos

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\overline{G}(x)} \leq 2G(v) - \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left[cF(v) - \overline{G}(v) - (c+\varepsilon)\overline{F}(v)\right] + \overline{G}(v).$$

Como ε é arbitrário, segue da última expressão que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\overline{G}(x)} \leq 2.$$

Portanto, pela **Proposição 1.4**, $G \in \mathcal{S}$. □

Agora, observe que por (1.10), segue que: se X_1 e X_2 são *v.a.'s i.i.d.* com distribuição F subexponencial então

$$P(X_1 + X_2 > x) \sim P(\max\{X_1, X_2\} > x), \qquad \textit{quando } x \to \infty. \tag{1.20}$$

Por outro lado, se X_1 e X_2 são *v.a.'s* independentes, mas com *f.d.'s* F_1 e F_2, respectivamente, então podemos escrever

$$\begin{aligned} P(\max\{X_1, X_2\} > x) &= P(\{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}) \\ &= P(X_1 > x) + P(X_2 > x) - P(X_1 > x)P(X_2 > x). \end{aligned}$$

Assim, quando $x \to \infty$, como $\overline{F}_i(+\infty) = 0,\ i = 1, 2$, segue que

$$\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) \sim \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) - \overline{F}_1(x)\overline{F}_2(x) = P(\max\{X_1, X_2\} > x). \tag{1.21}$$

As distribuições F_1 e F_2 que satisfazem (1.20) e (1.21), ou seja, tais que

$$\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x), \qquad \text{quando } x \to \infty, \tag{1.22}$$

são chamadas distribuições *max-soma-equivalentes* e denotadas por $F_1 \sim_M F_2$.

Note que, $F \in \mathcal{S}$ se, e somente se, $F \sim_M F$. Nesse sentido, uma questão de interesse é saber se a classe $\mathcal{S}$ é fechada para convoluções. Isto é, queremos verificar se para $F_1,\ F_2 \in \mathcal{S}$ tem-se que $F_1 * F_2 \in \mathcal{S}$. O próximo resultado estabelece condições suficientes para que a afirmação seja verdadeira.

Proposição 1.6. Sejam F_1 e F_2 funções de distribuições concentradas em $[0, \infty)$. Se $F_1 \in \mathcal{S}$, $F_2 \in \mathcal{L}$ e $\overline{F}_2(x) = O(\overline{F}_1(x))$, então $F_1 * F_2 \in \mathcal{S}$ e $F_1 \sim_M F_2$, isto é, vale (1.22). Em particular, se $F_1,\ F_2 \in \mathcal{S}$ então $F_1 * F_2 \in \mathcal{S}$, pois $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$.

Demonstração. Será omitida e pode ser encontrada em Cline (1986). □

Extensões da proposição anterior foram provadas em Tang e Tsitsashvili (2003b) considerando a combinação linear X_1+cX_2 com $0<c\leq 1$ e $0<c<+\infty$, respectivamente. Acrescentamos também, com algumas modificações, os resultados de Tang e Tsitsashvili (2003b) considerando as somas ponderadas $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ como segue.

Proposição 1.7. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentse com distribuições F_1 e F_2, respectivamente, concentradas em $[0,\infty)$. Se $F_1\in\mathcal{S}$, $F_2\in\mathcal{L}$ tal que $\overline{F}_2(x)=O(\overline{F}_1(x))$, e para $0<a\leq 1$ fixado, então a relação

$$P(X_1+cX_2>x)\sim\overline{F}_1(x)+\overline{F}_2\left(\frac{x}{c}\right)$$

vale uniformemente para $c\in[a,1]$ e a uniformidade é entendida como

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{c\in[a,1]}\left|\frac{P(X_1+cX_2>x)}{\overline{F}_1(x)+\overline{F}_2(\frac{x}{c})}-1\right|=0.$$

Corolário 1.1. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentse com distribuições F_1 e F_2, respectivamente, e $F_1\in\mathcal{S}$ e $F_2\in\mathcal{L}$. Para $0<a\leq b<+\infty$ fixados, se $\overline{F}_2\left(\frac{x}{b}\right)=O(\overline{F}_1(x))$ então a relação

$$P(X_1+cX_2>x)\sim\overline{F}_1(x)+\overline{F}_2\left(\frac{x}{c}\right)$$

vale uniformemente para $c\in[a,b]$.

Proposição 1.8. Sejam as n $v.a.'s$ $Z_1,\ldots,Z_n$ independentes com valores reais e distribuições $F_1,\ldots,F_n$, respectivamente. Se $F_i\in\mathcal{L}$ e $\overline{F_i}(x)\asymp\overline{F}(x)$ para algum $F\in\mathcal{S}$ e todo $i=1,\ldots,n$ então para todo $0<a\leq b<\infty$ fixados, temos

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}c_iZ_i>x\right)\sim\sum_{i=1}^{n}P\left(c_iZ_i>x\right) \tag{1.23}$$

vale uniformemente para todo $(c_1,\ldots,c_n)\in[a,b]^n$.

Finalizamos a seção com um resultado, apresentado em Cline e Samorodnitsky (1994), que estabelece condições para que o produto da $v.a.$ Z de cauda longa por um peso aleatório θ seja também de cauda longa.

Proposição 1.9. Sejam Z e θ duas $v.a.'s$ independentes não-negativas. Se Z é de cauda longa, θ não degenerada em zero e $P(\theta>ux)=o(1)P(\theta Z>x)$ para todo $u>0$ então o produto θZ é de cauda longa.

Este resultado será útil para estabelecer relações, análogas a da **Proposição 1.8**, para as caudas de somas de *v.a.'s* ponderadas aleatoriamente que serão apresentadas na próxima seção.

1.4 Somas Ponderadas Aleatoriamente

Nos processos de reserva de risco, que é objeto central desta dissertação, somas de variáveis aleatórias ponderadas aleatoriamente são utilizadas na modelagem do superávit de uma empresa de seguros.

Neste sentido, consideramos as somas parciais do tipo

$$S_n^\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i,$$

em que $Z_i,\ 1 \leq i \leq n$, são variáveis aleatórias independentes, $\theta_i,\ 1 \leq i \leq n$, são variáveis aleatórias positivas, não-degeneradas no zero, e as sequências $\{Z_i\}$ e $\{\theta_i\}$ são mutuamente independentes.

O comportamento assintótico da cauda da distribuição de S_n^θ está relacionado com a probabilidade assintótica da ruína nos modelos de risco que serão estudados no Capítulo 2.

Assim, nesta seção apresentaremos resultados sobre o comportamento assintótico caudal de S_n^θ, no caso em que as distribuições de $\{Z_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ são de cauda pesada. Particularmente, apresentamos extensões da **Proposição 1.8** para as somas ponderadas S_n^θ e que serão fundamentais para a obtenção dos resultados principais do Capítulo 2.

Iniciamos com o Teorema de Tang e Yuen (2014).

Teorema 1.1. Sejam $Z_1, \ldots, Z_n$ variáveis aleatórias independentes e com funções de distribuição $F_1, \ldots, F_n$, respectivamente, e $\theta_1, \ldots, \theta_n$ variáveis aleatórias, não-negativas, não degeneradas em zero e tais que $\{Z_i\}$ e $\{\theta\}$ são independentes. Se $F_i \in \mathcal{L}$ e $\overline{F_i}(x) \asymp \overline{F}(x)$ para algum $F \in \mathcal{S}$ e todo $i = 1, \ldots, n$, e se $\theta_1, \ldots, \theta_n$ são limitados superiormente, então temos

$$P\left(\bigvee_{i=1}^{n} S_i^\theta > x\right) \sim P\left(S_n^\theta > x\right) \sim P\left(\bigvee_{i=1}^{n} \theta_i Z_i > x\right) \sim \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right), \tag{1.24}$$

em que $S_n^\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i Z_i$ e $\bigvee_{i=1}^n S_i^\theta = \max\{S_1^\theta, \ldots, S_n^\theta\}$. As variáveis $\{\theta_i\}$ são normalmente chamadas de pesos aleatórios.

Demonstração. Primeiramente, note que, como os pesos aleatórios θ_i's são limitados superiormente, temos a relação

$$\sum_{1\le j\ne k\le n} P\left(\theta_j Z_j > x,\ \theta_k Z_k > x\right) = o(1)\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right). \tag{1.25}$$

Assim, resta provar as seguintes relações

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x\right) \gtrsim \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right) \tag{1.26}$$

e

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i^{+} > x\right) \lesssim \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right). \tag{1.27}$$

Sem perda de generalidade, vamos assumir que os pesos aleatórios $\theta_1,\ldots,\theta_n$ são limitados superiormente por 1. Primeiramente, para provar (1.26) vamos assumir que $Z_1,\ldots,Z_n$ são não-negativas. Temos

$$S_n^{\theta} = \sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i \ge \max_{1\le i\le n}\{\theta_i Z_i\},$$

então

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x\right) &\ge P\left(\max_{1\le i\le n}\theta_i Z_i > x\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\theta_i Z_i > x\}\right). \end{aligned}$$

Mas, podemos provar por indução sobre n, que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i\ne j\le n} P(A_i\cap A_j),$$

para qualquer sequência de eventos de um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Logo, podemos escrever

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x\right) \ge \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right) - \sum_{1\le i\ne j\le n} P(\theta_i Z_i > x,\ \theta_j Z_j > x)$$

e por (1.25) obtemos

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x\right) \geq (1+o(1))\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right),$$

o que equivale a (1.26).

Agora, para o caso geral em que $Z_1, \ldots, Z_n$ podem ser negativas, para cada conjunto arbitrário $I \subset \{1, \ldots, n\}$, considere a partição

$$\Omega_I(Z) = \{\omega \in \Omega : \ Z_i \geq 0 \ para \ i \in I \ e \ Z_j < 0 \ para \ j \in I^c\}.$$

Observe que para dois conjuntos I_1 e I_2 diferentes, temos $\Omega_{I_1}(Z) \cap \Omega_{I_2}(Z) = \emptyset$. Logo, desmembrando S_n^θ em somas nos índices i e j teremos a partição

$$\left\{S_n^\theta > x\right\} = \bigcup_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} \left\{\sum_{i\in I}\theta_i Z_i + \sum_{j \in I^c}\theta_j Z_j > x, \ \Omega_I(Z)\right\}$$

Como cada peso aleatório θ_i é limitado superiormente por 1 e notando também que $\sum_{j\in I^c}\theta_j Z_j < 0$, obtemos

$$\left\{S_n^\theta > x\right\} \supset \bigcup_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} \left\{\sum_{i\in I}\theta_i Z_i + \sum_{j \in I^c} Z_j > x, \ \Omega_I(Z)\right\},$$

e, consequentemente,

$$P\left(S_n^\theta > x\right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i + \sum_{j \in I^c} Z_j > x, \ \Omega_I(x)\right), \tag{1.28}$$

Agora, denotando $Y = \sum_{j\in I^c} Z_j$, temos que Y é independente de $\sum_{i\in I}\theta_i Z_i$ e usando as propriedades de esperança condicional segue que

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i + \sum_{j \in I^c} Z_j > x, \ \Omega_I(Z)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i + \sum_{j \in I^c} Z_j > x, \ \Omega_I(Z) \middle| Y = y\right) dF_Y(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i > x - y, \ \Omega_I(Z) \middle| Y = y\right) dF_Y(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i > x - y, \ \Omega_I(Z)\right) dF_Y(y) \quad (1.29)
\end{aligned}$$

Por um lado, podemos reescrever (1.29) como

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i+\sum_{j\in I^c} Z_j > x,\ \Omega_I(Z)\right)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i > x-y,\ \Omega_I(Z)\right)}{\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i > x-y,\ \Omega_I(Z)\right)}\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i > x-y,\ \Omega_I(Z)\right)dF_Y(y) \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

Observe que sobre Ω_I as $v.a.'s$ $Z_i's$ são não-negativas, então aplicando a relação (1.26) para o caso não negativo, temos

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i+\sum_{j\in I^c} Z_j > x,\ \Omega_I(Z)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}[1+o(1)]\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i > x-y,\ \Omega_I(Z)\right)dF_Y(y)\\
&=\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i+\sum_{j\in I^c} Z_j > x,\Omega_I(Z)\right)\\
&\quad + o\left(\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i+\sum_{j\in I^c} Z_j > x,\ \Omega_I(Z)\right)\right).
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

Assim, de (1.31) segue que

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i+\sum_{j\in I^c} Z_j > x,\ \Omega_I(Z)\right)}{\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i+\sum_{j\in I^c} Z_j > x,\ \Omega_I(Z)\right)}=1. \tag{1.32}
$$

Por outro lado, como θ_i é limitado, segue da **Proposição 1.9** que $\theta_i Z_i$ é de cauda longa. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$
\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\left(\theta_i Z_i > x-y,\ \Omega_I(Z)\right)}{P\left(\theta_i Z_i > x,\ \Omega_I(Z)\right)}dF_Y(y)=1.
$$

Então, segue que

$$
\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i+\sum_{j\in I^c} Z_j > x,\ \Omega_I(Z)\right)\sim\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i > x,\ \Omega_I(Z)\right). \tag{1.33}
$$

Assim, por (1.32) e (1.33) temos

$$
P\left(\sum_{i\in I}\theta_i Z_i+\sum_{j\in I^c} Z_j > x,\ \Omega_I(Z)\right)\sim\sum_{i\in I}P\left(\theta_i Z_i > x,\ \Omega_I(Z)\right). \tag{1.34}
$$

Logo, usando (1.34) em (1.28) e rearranjando os somatórios, obtemos

$$
\begin{aligned}
P\left(S_n^\theta > x\right) &\gtrsim \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} \sum_{i \in I} P\left(\theta_i Z_i > x,\ \Omega_I(Z)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right).
\end{aligned}
$$

e a relação (1.26) está provada.

Agora, para provar (1.27) procederemos de maneira análoga, assumindo inicialmente que os pesos aleatórios θ_i's são positivos. Para um conjunto arbitrário I e $0 < \varepsilon < 1$ dado, definimos o conjunto $\Omega_I^\varepsilon(\theta)$ como

$$
\Omega_I^\varepsilon(\theta) = \{\omega \ :\ \theta_i > \varepsilon \ para \ i \in I \ e \ \theta_j \leq \varepsilon \ para \ j \in I^c\}, \qquad 0 < \varepsilon < 1. \tag{1.35}
$$

Note que sobre $\Omega_I^\varepsilon(\theta)$, temos que $\theta_j \leq \varepsilon$, então podemos escrever

$$
P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i^+ > x\right) \leq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} P\left(\sum_{i \in I} \theta_i Z_i^+ + \sum_{j \in I^c} \varepsilon Z_j^+ > x,\ \Omega_I^\varepsilon(\theta)\right). \tag{1.36}
$$

Mas, pela **Proposição 1.8** segue que

$$
P\left(\sum_{i \in I} \theta_i Z_i^+ + \sum_{j \in I^c} \varepsilon Z_j^+ > x,\ \Omega_I^\varepsilon(\theta)\right) \sim \sum_{i \in I} P\left(\theta_i Z_i > x,\ \Omega_I^\varepsilon(\theta)\right) + \sum_{j \in I^c} P\left(\varepsilon Z_j > x,\ \Omega_I^\varepsilon(\theta)\right). \tag{1.37}
$$

Pela independência de Z e θ, temos para cada $j \in I^c$ que

$$
P(\varepsilon Z_j > x,\ \Omega_I^\varepsilon(\theta)) = P(\varepsilon Z_j > x,\ \theta_j > \varepsilon) \cdot P(\Omega_I^\varepsilon(\theta)),
$$

e (1.37) torna-se

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sum_{i \in I} \theta_i Z_i^+ + \sum_{j \in I^c} \varepsilon Z_j^+ > x,\ \Omega_I^\varepsilon(\theta)\right) = \\
&= \sum_{i \in I} P\left(\theta_i Z_i > x,\ \Omega_I^\varepsilon(\theta)\right) + \sum_{j \in I^c} P\left(\varepsilon Z_j > x, \theta_j > \varepsilon\right) \frac{P\left(\Omega_I^\varepsilon(\theta)\right)}{P(\theta_j > \varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{1.38}
$$

Agora, de (1.36) e (1.38), rearranjando os somatórios obtemos

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i^{+} > x\right) \lesssim & \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\ldots,n\}}\ \sum_{i\in I} P\left(\theta_i Z_i > x,\ \Omega_I^{\varepsilon}(\theta)\right) \\
& + \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\ldots,n\}}\ \sum_{j\in I^c} P\left(\varepsilon Z_j > x, \theta_j > \varepsilon\right)\frac{P\left(\Omega_I^{\varepsilon}(\theta)\right)}{P(\theta_j > \varepsilon)} \\
= & \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{I: i\in I\subset\{1,\ldots,n\}} P\left(\theta_i Z_i > x,\ \Omega_I^{\varepsilon}(\theta)\right) \\
& + \sum_{j=1}^{n}\ \sum_{I: j\notin I\subset\{1,\ldots,n\}} P\left(\varepsilon Z_j > x, \theta_j > \varepsilon\right)\frac{P\left(\Omega_I^{\varepsilon}(\theta)\right)}{P(\theta_j > \varepsilon)}
\end{aligned}$$

Mas, sobre $\Omega_I^{\varepsilon}(\theta)$ se $i \in I,\ \theta_i > \varepsilon$ e como $\{\varepsilon Z_j > x,\ \theta_j > \varepsilon\} \subset \{\theta_j Z_j > x\}$, então segue que

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i^{+} > x\right) & \lesssim \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x, \theta_j > \varepsilon\right) + \sum_{j=1}^{n} P\left(\theta_j Z_j > x\right)\frac{P(\theta_j \leq \varepsilon)}{P(\theta_j > \varepsilon)} \\
& \leq \sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\theta_i Z_i > x\right) + P\left(\theta_j Z_j > x\right)\frac{P(\theta_j \leq \varepsilon)}{P(\theta_j > \varepsilon)}\right] \\
& = \sum_{i=1}^{n}\left[1 + \frac{P(\theta_j \leq \varepsilon)}{P(\theta_j > \varepsilon)}\right] P\left(\theta_i Z_i > x\right) \\
& \leq \left[1 + \max_{1\leq i\leq n}\frac{P(\theta_j \leq \varepsilon)}{P(\theta_j > \varepsilon)}\right]\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right).
\end{aligned}$$

Como cada θ é estritamente positivo, fazendo $\varepsilon \downarrow 0$ obtem-se (1.27).

Por fim, vamos considerar o caso onde os pesos aleatórios podem ser zero com probabilidade positiva. Tomando novamente um conjunto arbitrário I e seu complementar I^c, definimos o conjunto

$$\Omega_I^{0}(\theta) = \{\omega\ :\ \theta_i > 0\ para\ i \in I\ e\ \theta_j = 0\ para\ j \in I^c\}.$$

Então, usando o que provamos em (1.27) no caso em que θ é estritamente positivo e como em $\Omega_I^{\varepsilon}(\theta)$ temos que $\theta_i > 0$ para $i \in I$, então segue que

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i^{+} > x\right) &= \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} P\left(\sum_{i \in I} \theta_i Z_i^{+} > x,\ \Omega_I^{0}(\theta)\right) \\
&\lesssim \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} \sum_{i \in I} P\left(\theta_i Z_i^{+} > x,\ \Omega_I^{0}(\theta)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x).
\end{aligned}
$$

Logo, (1.27) está provada para os pesos θ_i não-negativos.

Portanto, por (1.26) e (1.27) obtemos

$$
P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i > x\right) \sim \sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x). \tag{1.39}
$$

□

Como consequência do **Teorema 1.1**, Tang e Yuen (2016), obtiveram condições suficientes para que a soma ponderada S_n^{θ} tenha cauda subexponencial. Apresentamos este resultado a seguir.

Proposição 1.10. Sejam $Z_1, \ldots, Z_n$ variáveis aleatórias não-negativas e independentes, cada uma com distribuição $F_i \in \mathcal{L}$, respectivamente, tal que, $\overline{F_i}(x) \asymp \overline{F}(x)$ para algum $F \in \mathcal{S},\ i = 1, \ldots, n$. Sejam os n pesos aleatórios $\theta_1, \ldots, \theta_n$ não negativos e limitados superiormente, não degenerados em zero e independentes de $Z_1, \ldots, Z_n$. Sob tais hipóteses, a soma ponderada aleatoriamente $\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i$ tem cauda subexponencial.

Demonstração. Pelo Teorema de Existência de Kolmogorov, existe um vetor $2n-$dimensional $(\theta_1^*, \ldots, \theta_n^*, Z_1^*, \ldots, Z_n^*)$ independente e com a mesma distribuição conjunta de $(\theta_1, \ldots, \theta_n, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Agora, por facilidade, denotemos

$$
\tilde{\theta}_i = \begin{cases} \theta_i, & i = 1, \ldots, n; \\ \theta_{i-n}^*, & i = n+1, \ldots, 2n; \end{cases} \tag{1.40}
$$

e

$$
\tilde{Z}_i = \begin{cases} Z_i, & i = 1, \ldots, n; \\ Z_{i-n}^*, & i = n+1, \ldots, 2n. \end{cases} \tag{1.41}
$$

Então, pelo **Teorema 1.1** obtemos

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i + \sum_{i=1}^{n}\theta_i^* Z_i^* > x\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{2n}\tilde{\theta}_i \tilde{Z}_i > x\right) \\ &\sim \sum_{i=1}^{2n} P(\tilde{\theta}_i \tilde{Z}_i > x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x) + \sum_{i=1}^{n} P(\theta_i^* Z_i^* > x) \\ &\sim P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x\right) + P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i^* Z_i^* > x\right). \end{aligned}$$

Como os vetores $(\theta_1, \ldots, \theta_n, Z_1, \ldots, Z_n)$ e $(\theta_1^*, \ldots, \theta_n^*, Z_1^*, \ldots, Z_n^*)$ tem a mesma distribuição, segue que

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i + \sum_{i=1}^{n}\theta_i^* Z_i^* > x\right) \sim 2P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x\right).$$

Portanto, pela **Proposição 1.4** a distribuição de $\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i$ pertence a $\mathcal{S}$. □

Combinando o **Teorema 1.1** e a **Proposição 1.10** obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.2. Sejam n $v.a.'s$ independentes com distribuições $V_1, \ldots, V_n$ tal que $V_i \in \mathcal{S}$ e $\overline{V}_i(x) \asymp \overline{V}_1(x)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sejam $\theta_1, \ldots, \theta_n$, n $v.a.'s$ não-negativas limitadas superiormente, não degeneradas em zero e independentes de $Z_1, \ldots, Z_n$. Então a distribuição de $\sum_{k=1}^{n}\theta_k Z_k$ é de classe subexponencial e

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k Z_k > x\right) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k Z_k > x). \tag{1.42}$$

Como consequência do **Corolário 1.2**, Yang e Li (2019), provaram o resultado a seguir que foi utilizado como um lema para a obtenção da probabilidade assintótica da ruína do modelo de risco estudado pelos autores e que será apresentado no próximo capítulo.

Proposição 1.11. Sejam $Z_1, \ldots, Z_{n+m}$ $v.a.'s$ independentes assumindo valores reais e distribuídas por $V_1, \ldots, V_{n+m}$, tais que, $V_i \in \mathcal{S}$, $\overline{V}_i(x) \asymp \overline{V}_1(x)$ e $\overline{V}_j(x) = o(\overline{V}_1(x))$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $n+1 \leq j \leq n+m$. Sejam $\theta_1, \ldots, \theta_{n+m}$, $n+m$ $v.a.'s$ não-negativas onde $\theta_1, \ldots, \theta_n$ são limitadas superiormente. Assuma que para cada $n+1 \leq j \leq n+m$ existe algum $1 \leq i_j \leq n$ tal que $\theta_j \leq_{st} \theta_{i_j}$. Assuma também que $\{Z_1, \ldots, Z_{n+m}\}$ e $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n+m}\}$

independentes. Então, a distribuição de $\sum_{k=1}^{n+m} \theta_k Z_k$ pertence a classe $\mathcal{S}$ e

$$P\left(\sum_{k=1}^{n+m} \theta_k Z_k > x\right) \sim \sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x). \tag{1.43}$$

Demonstração. A prova de que a distribuição de $\sum_{k=1}^{n+m} \theta_k Z_k$ é da classe subexponencial é análoga a **Proposição 1.10** tomando (1.43). Assim, vamos nos deter a obter (1.43).

Sem perda de generalidade, vamos supor que $\theta_{n+1}, \ldots, \theta_{n+m}$ também são não degeneradas no zero.

Inicialmente, passemos a analisar o limite inferior de (1.43). Temos por hipótese que para $i = 1, \ldots, n,\ P(\theta_i \leq b_i) = 1$, com $b_i > 0$ e que para cada $j = n+1, \ldots, n+m$ existe $1 \leq i_j \leq n$ tal que $P(\theta_j > x) \leq P(\theta_{i_j} > x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Então, $P(\theta_{i_j} \leq b_{i_j}) = 1$ e

$$P(\theta_j \leq b_{i_j}) \geq P(\theta_{i_j} \leq b_{i_j}) = 1.$$

Logo, para $n+1 \leq j \leq n+m$, θ_j também é limitado superiormente. Seja

$$b = \max\{b_{i_j},\ j = n+1, \ldots, n+m\}.$$

Agora, expandindo o lado esquerdo de (1.43), temos

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{k=1}^{n+m} \theta_k Z_k > x\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i + \sum_{j=n+1}^{n+m} \theta_j Z_j > x\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i + \sum_{j=n+1}^{n+m} \theta_j Z_j^+ - \sum_{j=n+1}^{n+m} \theta_j Z_j^- > x\right) \\
&\geq P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} \theta_j Z_j^- > x\right) \\
&\geq P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} b Z_j^- > x\right).
\end{aligned}$$

Mas, denotando $Y = \sum_{j=n+1}^{n+m} b Z_j^+$, das propriedades de esperança condicional, como as Z_n's são independentes, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right) &= \int_0^\infty P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x \middle| Y = y\right) dF_Y(y)\\
&= \int_0^\infty P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x + y \middle| Y = y\right) dF_Y(y)\\
&= \int_0^\infty P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x + y\right) dF_Y(y)\\
&= \int_0^\infty \frac{P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x+y\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x+y\right)} \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x+y\right) dF_Y(y).
\end{aligned} \tag{1.44}
$$

e pelo **Corolário 1.2** temos

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x+y\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x+y\right)} = 1,
$$

pois $y \geq 0$. Ou seja, podemos escrever

$$
\frac{P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i > x+y\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x+y\right)} = 1 + o(1).
$$

Assim, de 1.44 obtemos

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right) &= \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x+y\right)\right.\\
&\quad \left. + o(1)\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x+y\right)\right] dF_Y(y)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty P\left(\theta_i Z_i > x+y\right) dF_Y(y)\\
&\quad + \int_0^\infty o(1)\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x+y\right) dF_Y(y)\\
&= \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty o(1) P\left(\theta_i Z_i - Y > x\right) dF_Y(y).
\end{aligned}
$$

Agora, note que

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty o(1)P\left(\theta_i Z_i - Y > x\right)dF_Y(y) = o\left(\sum_{i=1}^{\infty} P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right)\right),$$

ou seja,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty o(1)P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right)dF_F(y)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x)} = 0. \qquad (1.45)$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right)} = 1.$$

Isto é,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right) \sim \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right). \qquad (1.46)$$

Mas, utilizando novamente a esperança condicional de forma análoga ao passo anterior, obtemos

$$P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right) = \int_0^\infty P(\theta_i Z_I > x+y)dF_Y(y).$$

Note que a razão $\dfrac{P(\theta_i Z_i > x+y)}{P(\theta_i Z_i > x)}$ é menor ou igual a um. Assim, pelo *Teorema da Convergência Dominada*, temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right)}{P(\theta_i Z_i > x)} = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty}\frac{P(\theta_i Z_i > x+y)}{P(\theta_i Z_i > x)}dF_Y(y).$$

Agora, como $Z_i \in \mathcal{S}$ temos que $\theta_i Z_i \in \mathcal{S}$, então como $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ segue pela **Proposição 1.3** que $\theta_i Z_i \in \mathcal{L}$ para cada $1 \le i \le n$. Logo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right)}{P(\theta_i Z_i > x)} = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty}\frac{P(\theta_i Z_i > x+y)}{P(\theta_i Z_i > x)}dF_Y(y) = 1.$$

Assim,

$$P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right) \sim P(\theta_i Z_i > x). \tag{1.47}$$

Destarte, de (1.45), (1.46) e (1.47) segue que

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{k=1}^{n+m} \theta_k Z_k > x\right) &\geq P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right) \\ &\sim \sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i - \sum_{j=n+1}^{n+m} bZ_j^- > x\right) \\ &\sim \sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x), \end{aligned}$$

que implica

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P\left(\sum_{k=1}^{n+m} \theta_k Z_k > x\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x)} \geq 1. \tag{1.48}$$

Por outro lado, vamos obter o limite superior de (1.43). Temos por hipótese que $\overline{V}_j(x) = o(\overline{V}_1(x))$ e $\overline{V}_i(x) \asymp \overline{V}_1(x)$, ou seja $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\overline{V}_j(x)}{\overline{V}_1(x)} = 0$ e $\limsup_{x\to\infty} \dfrac{\overline{V}_1(x)}{\overline{V}_{i_j}(x)} < \infty$.

Então,

$$0 \leq \frac{\overline{V}_j(x)}{\overline{V}_{i_j}(x)} = \frac{\overline{V}_j(x)}{\overline{V}_1(x)} \cdot \frac{\overline{V}_1(x)}{\overline{V}_{i_j}(x)} \leq \frac{\overline{V}_j(x)}{\overline{V}_1(x)} \frac{\overline{V}_1(x)}{\overline{V}_{i_j}(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0,$$

e, consequentemente, para todo $0 < \varepsilon < 1$ e x grande, temos

$$\overline{V}_j(x) \leq \varepsilon \overline{V}_{i_j}(x). \tag{1.49}$$

Agora, vamos introduzir m novas variáveis aleatórias independentes $Z_{n+1}^*, \ldots, Z_{n+m}^*$ com funções de sobrevivência definidas por

$$\overline{V_j^*}(x) := \max\{\varepsilon \overline{V}_{i_j}(x), \overline{V}_j(x)\} \geq \overline{V}_j(x), \qquad n+1 \leq j \leq n+m. \tag{1.50}$$

Por (1.50), temos $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{V}_j(x) \leq \overline{V_j^*}(x)$. Segue que $P(Z_j > x) \leq P(Z_j^* > x)$, ou seja, $Z_j \leq_{st} Z_j^*$. Temos ainda, por (1.49) e (1.50) $\overline{V_j^*}(x) \sim \varepsilon \overline{V}_{i_j}(x)$.

Então,

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{V_j^*}(x)}{\overline{V}_1(x)}=\liminf_{x\to\infty}\left[\frac{\overline{V_j^*}(x)}{\varepsilon\overline{V}_{i_j}(x)}\cdot\frac{\varepsilon\overline{V}_{i_j}(x)}{\overline{V}_1(x)}\right]\geq\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{V_j^*}(x)}{\varepsilon\overline{V}_{i_j}(x)}\cdot\liminf_{x\to\infty}\frac{\varepsilon\overline{V}_{i_j}(x)}{\overline{V}_1(x)}>0$$

e

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{V_j^*}(x)}{\overline{V}_1(x)}=\limsup_{x\to\infty}\left[\frac{\overline{V_j^*}(x)}{\varepsilon\overline{V}_{i_j}(x)}\cdot\frac{\varepsilon\overline{V}_{i_j}(x)}{\overline{V}_1(x)}\right]\leq\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{V_j^*}(x)}{\varepsilon\overline{V}_{i_j}(x)}\cdot\limsup_{x\to\infty}\frac{\varepsilon\overline{V}_{i_j}(x)}{\overline{V}_1(x)}<\infty.$$

Logo, $\overline{V_j^*}(x)\asymp\overline{V}_1(x)$ e, como por hipótese $V_1\in\mathcal{S}$, segue da **Proposição 1.5** que $\overline{V_j^*}\in\mathcal{S}$. Assim, usando o **Corolário 1.2** obtemos

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{k=1}^{n+m}\theta_kZ_k>x\right)&=P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_iZ_i+\sum_{j=n+1}^{n+m}\theta_jZ_j>x\right)\\&\leq P\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_iZ_i+\sum_{j=n+1}^{n+m}\theta_jZ_j^*>x\right)\\&\sim\sum_{i=1}^{n}P\left(\theta_iZ_i>x\right)+\sum_{j=n+1}^{n+m}P(\theta_jZ_j^*>x).\end{aligned}\tag{1.51}$$

Agora, por hipótese, $\theta_j\leq_{st}\theta_{i_j}$, então

$$\sum_{j=n+1}^{n+m}P(\theta_jZ_j^*>x)\leq\sum_{j=n+1}^{n+m}P(\theta_{i_j}Z_j^*>x).\tag{1.52}$$

Mas, como θ_{i_j} e Z_j^* são independentes, segue que

$$\begin{aligned}P(\theta_{i_j}Z_j^*>x)&=\int_0^\infty P\left(Z_j^*>\frac{x}{a}\right)dF_{\theta_{i_j}}(a)\\&=\int_0^\infty\frac{\overline{V_j^*}\left(\frac{x}{a}\right)}{\varepsilon\overline{V_{i_j}}\left(\frac{x}{a}\right)}\varepsilon\overline{V}_{i_j}\left(\frac{x}{a}\right)dF_{\theta_{i_j}}(a).\end{aligned}$$

E como $\overline{V_j^*}(x)\sim\varepsilon\overline{V_{i_j}}(x)$, obtemos

$$P(\theta_{i_j}Z_j^*>x)=\int_0^\infty\left[\varepsilon\overline{V}_{i_j}\left(\frac{x}{a}\right)+o(1)\varepsilon\overline{V}_{i_j}\left(\frac{x}{a}\right)\right]dF_{\theta_{i_j}}(a).$$

Analogamente ao raciocínio utilizado para obter (1.45), podemos concluir que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(\theta_{i_j}Z_j^*>x)}{\varepsilon P(\theta_{i_j}Z_{i_j}>x)}=1,$$

e por (1.52) segue que

$$\sum_{j=1}^{n+m} P(\theta_j Z_j^* > x) \leq \sum_{j=1}^{n+m} P(\theta_{i_j} Z_j^* > x) \sim \varepsilon \sum_{j=1}^{n+m} P(\theta_{i_j} Z_{i_j} > x). \tag{1.53}$$

Assim, de (1.51) e (1.53) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{P\left(\sum_{k=1}^{m+n} \theta_k Z_k > x\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x) + \varepsilon \sum_{j=n+1}^{n+m} P(\theta_{i_j} Z_{i_j} > x)} \\
\leq &\frac{P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i + \sum_{j=1}^{n+m} \theta_j Z_j^* > x\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x) + \varepsilon \sum_{j=n+1}^{n+m} P(\theta_{i_j} Z_{i_j} > x)} \\
= &\frac{P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i + \sum_{j=1}^{n+m} \theta_j Z_j^* > x\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right) + \sum_{j=n+1}^{n+m} P(\theta_j Z_j^* > x)} \\
&\cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right) + \sum_{j=n+1}^{n+m} P(\theta_j Z_j^* > x)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x) + \varepsilon \sum_{j=n+1}^{n+m} P(\theta_{i_j} Z_{i_j} > x)} \\
\leq &\frac{P\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i Z_i + \sum_{j=1}^{n+m} \theta_j Z_j^* > x\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right) + \sum_{j=n+1}^{n+m} P(\theta_j Z_j^* > x)} \\
&\cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} P\left(\theta_i Z_i > x\right) + \sum_{j=n+1}^{n+m} P(\theta_{i_j} Z_j^* > x)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x) + \varepsilon \sum_{j=n+1}^{n+m} P(\theta_{i_j} Z_{i_j} > x)} \\
&\xrightarrow[x \to \infty]{} 1.
\end{aligned}$$

Logo, pela arbitrariedade de ε, temos

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{P\left(\sum_{k=1}^{n+m} \theta_k Z_k > x\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x)} \leq 1. \tag{1.54}$$

Portanto, por (1.48) e (1.54) concluímos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P\left(\sum_{k=1}^{n+m} \theta_k Z_k > x\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i Z_i > x)} = 1.$$

$\square$

Capítulo 2

Probabilidade Assintótica da Ruína em Modelos de Risco de Renovação com Indenizações Subexponenciais

2.1 Introdução

O objetivo central deste capítulo é apresentar em detalhes os resultados obtidos por Yang e Li (2019), sobre o comportamento assintótico da probabilidade da ruína para uma classe de modelos de renovação, oriundos do modelo clássico de Lundberg, modificado com a inclusão de juro e com indenizações primárias e secundárias na classe subexponencial.

Primeiramente, na seção 2.2, apresentamos a definição de processos de renovação e uma síntese das suas principais propriedades.

Na seção 2.3, apresentamos um breve relato sobre a evolução dos modelos de risco desde o modelo pioneiro de Lundberg (1903) até o modelo com inclusão de juro e indenizações secundárias estudado por Yang e Li (2019).

Finalmente, na seção 2.4, abordamos o problema de analizar a probabilidade assintótica da ruína associada ao modelo de risco com indenizações de cauda pesada.

Dividimos a apresentação do resultado principal de Yang e Li (2019) em dois teoremas, Teorema 2.4 e Teorema 2.5, de acordo com as hipóteses assumidas, para a obtenção de uma aproximação assintótica da probabilidade da ruína. Apresentamos em detalhes as demonstrações dos teoremas, bem como dos lemas auxiliares.

2.2 Processos de Renovação

Os modelos de risco estudados neste capítulo assumem que o processo de contagem dos sinistros de uma seguradora é um processo de renovação. Assim, para facilitar o entendimento desses modelos, nesta seção relembramos a definição e algumas das principais propriedades dos processos de renovação.

Um estudo mais detalhado dos processos de renovação pode ser encontrado em S. Ross (1980), Asmussen (1984) ou Grimmett e StirzaKer (2001).

Definição 2.1. Um processo de contagem $\{N(t),\ t \geq 0\}$ definido por

$$N(t) = \sup\{n \geq 1;\ \tau_n \leq t\}, \qquad t \geq 0,$$

em que $\tau_0 = 0$ e $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \ldots$ são $v.a.'s$ $i.i.d.$ não-negativas, com distribuição arbitrária, tal que a $P(\tau_n - \tau_{n-1} = 0) < 1$, é chamado *processo de renovação.*

As $v.a.'s$ τ_n $n \geq 0$ são chamadas *tempos de chegadas* das renovações e $\tau_{n+1} - \tau_n,\ n \geq 0$ são chamadas *tempos entre chegadas* das renovações.

Um caso especial de um processo de renovação $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é quando a distribuição dos tempos entre chegadas é exponencial. Nesse caso particular, temos um *processo de Poisson.*

Denotamos a distribuição dos tempos entre chegadas por F e a média do tempo entre sucessivos eventos por

$$\mu = E(\tau_{n+1} - \tau_n), \qquad n \geq 0.$$

A função

$$\lambda(t) = EN(t)$$

é chamada *função de renovação* do processo $\{N(t),\ t \geq 0\}$.

Proposição 2.1. (Propriedades Básicas). Seja $\{N(t),\ t \geq 0\}$ um processo de renovação com tempos de chegadas $\tau_i,\ i \geq 1$, e função de distribuição dos tempos entre chegadas F. Então,

(a) para cada $t > 0,\ P(N(t) < +\infty) = 1$,

(b) $P(N(t) = n) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$

(c) $\lambda(t) = EN(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_i \leq t),$

(d) $\lambda(t) < +\infty,\ \forall t \geq 0,$

(e) $E[N(t)]^r < +\infty,\ \forall t \geq 0$ e $r > 0$ e

(f) $\psi_F(\theta) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\theta x} dF(x) = \frac{\psi_\lambda(\theta)}{1+\psi_\lambda(\theta)}$, $\theta > 0$, em que ψ_F e ψ_λ são as transformadas de Laplace associadas a F e λ, respectivamente.

Observação 2.1. Pelos itens (**c**) e (**f**), segue que a função de renovação $\lambda(t) = EN(t)$ determina unicamente o processo de renovação $\{N(t),\ t \geq 0\}$.

A seguir, apresentamos os teoremas de limites de processos de renovação.

O primeiro deles estabelece que a taxa com que $N(t)$ vai para infinito é $\dfrac{1}{\mu}$, denominada de *taxa de renovação*. No caso em que $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de Poisson, segue que a taxa de renovação é λ.

Teorema 2.1. Se $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de renovação então

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu},\ \textit{com probabilidade } 1.$$

Teorema 2.2. (Teorema Elementar de Renovação). Seja $\{N(t),\ t \geq 0\}$ um processo de renovação com função de renovação $\lambda(t)$, então

$$\frac{\lambda(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \qquad \textit{quando } t \to \infty,$$

em que, por convenção, $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

Teorema 2.3. (Teorema do Limite Central para Processos de Renovação). Seja $\{N(t),\ t \geq 0\}$ um processo de renovação, com tempos entre chegadas $\{\beta_n,\ n \geq 1\}$. Se $\mu = E\beta_1$ é finita e $0 < \sigma^2 = var(\beta_1) < +\infty$, então

$$\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \xrightarrow{D} N(0,1), \qquad \text{quando } t \to \infty.$$

Isto é, $N(t)$ é assintoticamente normal com média $\dfrac{t}{\mu}$ e variância $\dfrac{t\sigma^2}{\mu^3}$.

Os modelos de risco clássicos são casos especiais dos chamados *processos de recompensas* por renovações que descrevemos a seguir.

Seja um processo de renovação $\{N(t),\ t \geq 0\}$ e suponha que a cada chegada de uma renovação, nós recebemos uma recompensa. Denote por X_n a recompensa recebida no tempo τ_n de chegada da n-ésima renovação. Assuma que $\{X_n,\ n \geq 1\}$ são $v.a.'s\ i.i.d.$ e são independentes do processo $\{N(t),\ t \geq 0\}$.

Assim, a quantia total de recompensas recebidas até o tempo t, pode ser descrita por

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

e o processo $\{R(t),\ t \geq 0\}$ é chamado um *processo de recompensas* por renovações.

Usando propriedades básicas de esperança condicional podemos obter as seguintes relações para $ER(t)$ e $varR(t)$.

Proposição 2.2. Sejam $\{N(t),\ t \geq 0\}$ um processo de renovação e $\{X_n,\ n \geq 1\}$ uma sequência de $v.a.'s\ i.i.d.$, independente do processo $\{N(t),\ t \geq 0\}$.
Considere $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \geq 0$. Então,

(a) $ER(t) = EN(t)EX_1$, desde que EX_1 é finita,

(b) $varR(t) = EN(t)var(X_1) + varN(t)(EX_1)^2$, desde que $EX_1^2 < +\infty$.

2.3 Processos de Reserva de Risco

Em linhas gerais, os *processos de reserva de risco* ou modelos de risco são modelos matemáticos que descrevem a evolução da reserva de capital de uma empresa de seguros de não-vida, como por exemplo, seguros de automóveis e residências, ao longo do tempo.

O trabalho pioneiro no desenvolvimento da *Teoria de Risco*, subárea da atuária, foi apresentada por F. Lundberg em sua tese de doutorado em 1903. Embora o modelo proposto por Lundberg seja bastante simples, ele serviu como base para a evolução de modelos de risco de maior relevância prática e teórica.

Nesta seção vamos apresentar um breve relato sobre a evolução de uma classe de modelos de risco, oriunda do modelo clássico de Lundberg.

Para isso, iniciamos com a descrição do *modelo clássico*, cujo tratamento matemático foi apresentado por Lundberg em 1926, no qual considera-se que o superávit da seguradora consiste do capital inicial, dos ganhos pelo recebimento de prêmios a uma taxa constante ao longo do tempo e das perdas provenientes do pagamento de sinistro.

Assim, o processo clássico de reserva de risco $\{U(t),\ t \geq 0\}$, em que $U(t)$ representa a reserva de capital de risco no tempo t, é dado por

$$U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0, \tag{2.2}$$

em que

(i) $x = U(0)$ é o capital inicial;

(*ii*) $c > 0$ é a taxa de prêmios;

(*iii*) $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de Poisson, que descreve o número de pedidos de sinistros ao longo do tempo;

(*iv*) $\{X_n,\ n \geq 1\}$ é uma sequência de $v.a.'s$ $i.i.d.$ não-negativas e independentes do processo $\{N(t),\ t \geq 0\}$, tal que X_n representa o valor da indenização paga referente ao n-ésimo sinistro.

Observe que as hipóteses de independência entre os valores das sucessivas indenizações $X_n,\ n \geq 1$ e a independência desses valores com o número de sinistros ocorridos até o tempo t é plausível, já que o valor pago referente a um determinado sinistro não pode ser influenciado pelos valores pagos em outros sinistros ou pelo número de sinistros ocorridos.

Além disso, temos que o processo de Poisson pode ser caracterizado como um processo de contagem tal que os tempos entre as sucessivas chegadas de eventos são variáveis aleatórias $i.i.d.$ com distribuição exponencial. Assim, no modelo de risco clássico de Lundberg assume-se que os tempos entre as ocorrências de sinistros são $v.a.'s$ $i.i.d.$ com distribuição exponencial e são independentes dos respectivos valores das indenizações.

Nesse sentido, uma extensão natural do modelo clássico é considerar o processo do número de sinistros ocorridos ao longo do tempo $\{N(t),\ t \geq 0\}$ como sendo um processo de renovação, conforme descrito na **Definição 2.1**.

Essa extensão foi proposta por E. Sparre Andersen (1957) e é conhecido como *modelo de Sparre Andersen* ou *modelo de renovação*, que considera o processo de reserva de risco $\{U(t),\ t \geq 0\}$ descrito por (2.2), com as mesmas hipóteses (*i*), (*ii*) e (*iv*) assumidas no modelo clássico e substituindo a hipótese (*iii*) pela seguinte condição mais geral:

(*iii*) $\{N(t),\ t \geq 0\}$, o processo que descreve o número de sinistros ocorridos ao longo do tempo, é um processo de renovação, ou seja, o número de sinistros ocorridos no intervalo $[0, t]$ é dado por

$$N(t) = \sup\{n \geq 1;\ \tau_n \leq t\}, \qquad t \geq 0,$$

em que $\tau_n,\ n \geq 1$ são os sucessivos tempos de ocorrências dos sinistros e os tempos entre ocorrências dos sinistros, $\tau_1,\ \tau_{n+1} - \tau_n,\ n \geq 1$, são variáveis aleatórias $i.i.d.$ com distribuição arbitrária H.

Observe que se H é a distribuição exponencial, então $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de Poisson e o modelo de Sparre Andersen reduz-se ao modelo de Lundberg.

Vale ressaltar que o processo das quantias de indenizações agregadas

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \qquad t \geq 0$$

é um processo de recompensa por renovação, conforme definido em (2.1), na seção anterior, e, assim, pela **Proposição 2.2** segue que

$$EU(t) = x + ct - EN(t)EX_1$$

e

$$varU(t) = EN(t)varX_1 + varN(t)(EX_1)^2$$

desde que $EX_1^2 < +\infty$.

Em particular, no caso do modelo clássico de Lundberg, se os tempos entre chegadas têm distribuição Exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, então $EN(t) = varN(t) = \lambda t$, já que $N(t)$ tem distribuição Poisson com parâmetro λt, e, consequentemente, temos

$$EU(t) = x + ct - \lambda t EX_1$$

e

$$varU(t) = \lambda t[varX_1 + (EX_1)^2].$$

Nos modelos descritos acima, supõe-se que os sinistros são pagos no momento de sua chegada. No entanto, em um contexto mais realista nem sempre isso acontece. Desse modo, temos que os sinistros podem ser pagos com um tempo de atraso em relação a sua chegada. Isso pode ocorrer devido a uma série de fatores reais, como sinistros que ocorreram mas não foram declarados ou que foram relatados mas não liquidados.

Uma outra situação é que, na prática, um desastre natural ou um acidente automobilístico grave pode desencadear uma série de sinistros que poderão ser resolvidos imediatamente, enquanto outros só chegarão posteriormente ou necessitarão de mais tempo para serem liquidados. Os sinistros imediatos e atrasados são também chamados de *sinistros principais* e *sinistros secundários*, respectivamente.

Essas hipóteses interferirão no modelo, visto que a perda do capital da seguradora ocorrerá na liquidação do sinistro e não em sua ocorrência ou chegada.

Nesse contexto, existem diversos trabalhos na literatura apresentando modelos de risco com a incorporação de indenizações secundárias. Dentre eles, citamos Waters e Papatriandafylou (1985), que propuseram um modelo de risco, onde os sinistros são liquidados com atraso, a tempo discreto e Yuen et al. (2005) que propuseram um modelo a tempo contínuo, que aborda a situação descrita acima, em que um desastre de grandes proporções pode gerar um sinistro principal que é imediatamente liquidado e um outro sinistro secundário associado, cuja indenização será liquidada com atraso.

O modelo a tempo contínuo que abrange o modelo estudado por Yuen et al, pode ser descrito como:

$$U(t) = x + c \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \mathbf{1}_{\{\tau_i + D_i \leq t\}}, \tag{2.3}$$

em que para cada inteiro positivo i, assumimos que o i-ésimo sinistro principal X_i de uma seguradora ocorrendo no tempo τ_i induzirá um sinistro atrasado Y_i ocorrendo em $\tau_i + D_i$, onde D_i denota um tempo de atraso aleatório e as seguintes hipóteses são assumidas:

(a) $\{X_i,\ i \geq 1\}$ e $\{Y_i,\ i \geq 1\}$ são sequências de variáveis aleatórias *i.i.d.*, com funções de distribuições comum F e G, respectivamente.

(b) O processo de contagem $\{N(t),\ t \geq 0\}$ do número de ocorrência de sinistros principais até o tempo t é um processo de renovação, com tempos de chegadas dos sinistros principais $\tau_n,\ n \geq 1$.

(c) Os tempos de atrasos $\{D_i,\ i \geq 1\}$ formam uma sequência de $v.a.'s$ não-negativas (possivelmente degeneradas no zero) *i.i.d.* com uma distribuição comum H.

(d) Para cada $i \geq 1$, as variáveis $X_i,\ Y_i,\ \tau_i$ e D_i são independentes.

Observe que, se $P(D_i = 0) = 1$ então o modelo (2.3) reduz-se ao modelo de renovação de Sparre Andersen.

O caso em que $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de Poisson e a sequência $\{D_i,\ i \geq 1\}$ tem distribuição comum exponencial foi estudado por Yuen et al. (2005).

Seguindo a ideia dos modelos oriundos do modelo clássico de Lundberg, de tal forma que a modelagem matemática seja a mais próxima possível das situações práticas reais, observemos que nos modelos descritos até o momento, a dinâmica da movimentação do capital da seguradora considerada não é muito realista, já que pressupõe que a empresa possui um capital inicial não negativo e a entrada de capital posterior é assumida ser contínua a uma taxa constante ao longo do tempo.

No entando, numa situação real é natural assumir que a empresa invista em aplicações financeiras tanto o seu capital inicial, quanto o capital oriundo do recebimento de prêmios, e assim sobre o capital principal sejam calculados juros ao longo do tempo.

Dessa forma, vamos analisar a inclusão de juros composto continuamente nos modelos descritos.

Para facilitar a compreensão, consideremos inicialmente a situação em que um capital $x \geq 0$ seja investido a uma taxa de juros $r > 0$, composto continuamente, durante um período de tempo de comprimento t. Então, o montante do capital ao final do tempo de aplicação t, denotado por $M(t)$, é a solução da equação

$$\frac{dM}{dt}(t) = rM(t)$$

com a condição inicial $M(0) = x$ (capital inicial investido). Ou seja,

$$M(t) = xe^{rt} \tag{2.4}$$

Agora, vamos implementar a aplicação de juro composto continuamente no modelo de renovação descrito por (2.2), ou seja,

$$U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0.$$

Primeiramente, aplicando o capital inicial $x \geq 0$ a juro composto continuamente no período de comprimento t, com taxa $r > 0$, por (2.4), no tempo t o capital inicial será substituido por xe^{rt}.

Por outro lado, para o cálculo do montante do capital referente a entrada de capital constante (recebimento de prêmios) acrescido do juro composto continuamente a uma taxa r ao longo do tempo, consideremos o seguinte raciocínio: particionando o período de comprimento t em n subintervalos de tamanho $\frac{t}{n}$ recebe-se um capital fixo de $\frac{c \cdot t}{n}$ ao final de cada subintervalo. Note que no tempo $\frac{t}{n}$ o capital acumulado será exatamente $\frac{c \cdot t}{n}$ e por (2.4) o capital acumulado até o tempo $\frac{2t}{n}$ será $\frac{c \cdot t}{n} + \frac{c \cdot t}{n} e^{\frac{\delta t}{n}} = \frac{c \cdot t}{n}\left(1 + e^{\frac{\delta t}{n}}\right)$.

Desse modo, ao final do k-ésimo intervalo o capital acumulado é de

$$\frac{c \cdot t}{n}\left(1 + e^{\frac{rt}{n}} + \cdots + e^{\frac{(k-1)rt}{n}}\right). \tag{2.5}$$

e, consequentemente, no tempo t, o capital será

$$\frac{c \cdot t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{krt}{n}} \tag{2.6}$$

Note que a soma acima é a soma de Riemann associada à função $f(t) = ce^{rt}$ relativa a partição $P = \left\{0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \ldots t\right\}$ do intervalo $[0, t]$. Logo, o valor acumulado no final do período t será

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c \cdot t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{krt}{n}} = c \int_0^t e^{rx} dx = c \left(\frac{e^{rt} - 1}{r} \right).$$

Agora, olhemos para os valores subtraídos no processo de risco. Quando ocorrer a liquidação do i-ésimo sinistro, o valor X_i será retirado do caixa. Logo, X_i não será mais aplicado continuamente a taxa e^{rt}. Ou seja, a aplicação da quantia X_i só é realizada até o instante τ_i e após esse período ela será subtraída do montante de capital.

Assim, o modelo de renovação modificado pela inclusão de juro é dado por

$$U(t) = xe^{rt} + c \int_0^t e^{r(t-s)} ds - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i e^{r(t-\tau_i)}, \qquad t \geq 0. \tag{2.7}$$

Finalmente, para obtermos a descrição matemática do modelo de renovação com sinistros secundários (dado por (2.3)) modificado pela inclusão de juro, resta analisarmos o termo referente ao pagamento dos sinistros atrasados.

Para isso, notemos que para o sinistro atrasado se o tempo de sua ocorrência $\tau_i + D_i$ for anterior a t, então o valor Y_i será debitado do caixa da seguradora. Caso contrário, o valor permanece no caixa. Assim, a aplicação da quantia Y_i só é realizada até o instante $\tau_i + D_i$ e após esse período ela será subtráida do montante principal, caso este instante ocorra antes de t.

Portanto, o modelo de renovação com sinistros secundários e com a inclusão de juro composto continuamente é descrito como

$$U(t) = xe^{rt} + c \int_0^t e^{r(t-s)} ds - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i e^{r(t-\tau_i)} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i e^{r(t-\tau_i-D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i \leq t\}}, \qquad t \geq 0. \tag{2.8}$$

Observe que o modelo (2.8) engloba todos os modelos descritos anteriormente. Este modelo tem sido estudado por diversos autores, entre eles Yang e Li (2019), cujos resultados sobre o comportamento assintótico da probabilidade da ruína serão apresentados na próxima seção.

2.4 Probabilidade Assintótica da Ruína

Uma questão central no estudo dos processos de reserva de risco é analisar a probabilidade de que ocorra a *ruína* da empresa, ou seja, a probabilidade de que a reserva de capital de risco caia abaixo de zero, indicando um desequilíbrio entre os débitos e a receita da seguradora.

Dado um processo de risco $\{U(t),\ t \geq 0\}$ com capital inicial $U(0) = x$, definimos a *probabilidade da ruína em um horizonte infinito* como sendo

$$\psi(x) = \mathcal{P}\left(\inf_{t\geq 0} U(t) < 0 \middle| U(0) = x\right), \tag{2.9}$$

e o primeiro instante de tempo em que ocorre a ruína é chamado *tempo de ruína*, que é definido por

$$\gamma(x) = \inf\{t \geq 0;\ U(t) < 0 | U(0) = x\}, \tag{2.10}$$

em que adota-se a convenção $\inf \emptyset = \infty$.

Note que (2.9), é equivalente a

$$\psi(x) = \mathcal{P}(\gamma(x) < \infty | U(0) = x). \tag{2.11}$$

A probabilidade de que a ruína ocorra antes de um determinado tempo T é chamada *probabilidade da ruína em um horizonte finito* e é dada por

$$\psi(x, T) = \mathcal{P}\left(\inf_{0<t\leq T} U(t) < 0 \middle| U(0) = x\right) = \mathcal{P}(\gamma(x) \leq T | U(0) = x). \tag{2.12}$$

Note que

$$\psi(x) = \lim_{T\to\infty} \psi(x, T).$$

Em geral, não é possível calcular exatamente a probabilidade da ruína e o que se procura é analisar o comportamento assintótico da probabilidade da ruína a medida que o capital inicial x cresce.

Considerando o modelo de risco descrito por (2.8) existem diversos trabalhos na literatura que analisam o comportamento assintótico da probabilidade da ruína, sob hipóteses variadas com respeito as distribuições dos tempos entre chegadas dos sinistros, bem como das distribuições de indenizações. Dentre eles podemos citar Yuen et al. (2005), Dassios e Zhao (2013), Waters and Papatriandafylou (1985), que estudaram o problema no caso das distribuições das indenizações serem de cauda leve. Li et al. (2010), Yang e Konstantinides (2015), Chen et al. (2015), Peng e Wang(2018), entre outros trabalhos recentes, consideram as distribuições de indenizações em classes específicas de caudas pesadas.

Nosso objetivo nesta seção é apresentar em detalhes os resultados principais obtidos por Yang e Li (2019), sobre o comportamento assintótico de $\psi(x, T)$ quando $x \to \infty$, para o modelo de risco de renovação definido em (2.8), quando as indenizações principais e secundárias possuem distribuições subexponenciais.

A escolha da classe subexponencial, dentre as distribuições de cauda pesada, para as distribuições das indenizações é motivada pelo fato de que podem existir sinistros com baixa probabilidade de ocorrência, mas que exercem forte influência no montante total das indenizações em um determinado período de tempo.

Mais especificamente, suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam os valores das indenizações referentes a n $(n \geq 2)$ sinistros ocorridos num intervalo de tempo de comprimento t (ou seja, $N(t) = n$). Assumindo, que $X_1, \ldots, X_n$ sejam *v.a.'s i.i.d.* com função de distribuição F, o que desejamos é estabelecer condições para modelar matematicamente a situação em que o maior valor das indenizações seja aproximadamente igual a soma total de todas as indenizações, ou que ambas sejam da mesma ordem. Ou seja, se $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ então desejamos que

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \qquad x \to \infty.$$

Vimos na seção 1.3, no Capítulo 1, que a condição acima é equivalente a condição (1.5) da **Definição 1.6** de distribuição subexponencial, isto é, a função de distribuição F deve satisfazer

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

Dessa forma, consideremos o processo de reserva de risco $\{U(t),\ t \geq 0\}$ descrito por (2.8), ou seja,

$$U(t) = xe^{rt} + c\int_0^t e^{r(t-s)}ds - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i e^{r(t-\tau_i)} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i e^{r(t-\tau_i-D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i \leq t\}}, \qquad t \geq 0, \tag{2.13}$$

em que

(i) $U(0) = x > 0$ é o capital inicial;

(ii) $c > 0$ é a taxa de prêmios;

(iii) $r \geq 0$ é a taxa de juro;

(iv) $\{N(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de renovação, com tempos de chegadas dos sinistros principais $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$;

(v) os tempos de atraso $\{D_i,\ i \geq 1\}$ formam uma sequência de $v.a.'s$ $i.i.d.$ com distribuição comum H;

(vi) $\{X_i,\ i \geq 1\}$ e $\{Y_i,\ i \geq 1\}$, os valores das indenizações principais e secundárias, são sequencias de $v.a.'s$ $i.i.d.$ com funções de distribuição F e G, respectivamente;

(vii) para cada $i \geq 1$, as variáveis $X_i,\ Y_i,\ \tau_i$ e D_i são independentes.

Nosso interesse é analisar o comportamento assintótico da probabilidade da ruína em um horizonte finito a medida que o capital inicial cresce, ou seja, analisar $\psi(x, T)$ quando $x \to \infty$. Como será mostrado nos resultado seguintes, o comportamento assintótico mencionado é a aproximação para a cauda das somas dos sinistros principais e secundários ser maior que o capital inicial e o capital oriundo do recebimento dos prêmios. Assim, para x suficientemente grande, se esta probabilidade for consideravelmente grande, há um indicativo de que algum ajuste deve ser realizado no modelo afim de que um capital inicial x não traga um risco grande de ruína para a seguradora.

Por outro lado, ao considerar $x = U(0)$, não necessariamente estamos analizando o processo de reserva de risco na criação da empresa seguradora. Ou seja, o momento $t = 0$ pode estar em anos de existência da segurados, logo, seu capital $U(0) = x$ é um capital acumulado, e o comportamento assintótico da ruína se dará a partir desse momento para um x grande.

Nesse sentido, o primeiro teorema que apresentamos faz parte do resultado principal de Yang e Li (2019).

Teorema 2.4. Considere o modelo de risco (2.8) com as hipóteses $(i) - (vii)$. Seja $T > 0$ algum tempo fixado tal que $P(\tau_1 \leq T) > 0$. Se $F,\ G \in \mathcal{S}$ e $\overline{G}(x) \asymp \overline{F}(x)$, então

$$\psi(x;T) \sim \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt) + \int_{0-}^{T} \overline{G}(xe^{rt})(\lambda * H)(dt), \tag{2.14}$$

onde $\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_i \leq t)$ e $\lambda * H(t) = \int_{0-}^{t} H(t-s)\lambda(ds)$.

Para demonstrar o **Teorema 2.4** necessitamos de dois lemas auxiliares.

O primeiro deles foi extraído do Teorema 2.1 de Hao e Tang (2008) onde também pode ser encontrada sua demonstração, que omitiremos no presente trabalho.

Lema 2.1. Seja $\{Z_i,\ i \geq 1\}$ uma sequência de $v.a.'s$ $i.i.d$ não negativas com função de distribuição comum $V \in \mathcal{S}$ e seja $\{N(t),\ t \geq 0\}$ um processo de renovação com tempos de chegadas $\tau_1, \tau_2, \ldots$ e função de renovação $\lambda(t)$. Assuma que $\{Z_i,\ i \geq 1\}$ e $\{N(t),\ t \geq 0\}$

são independentes. Então, para qualquer $r \geq 0$ e $T > 0$ tal que $P(\tau_1 \leq T) > 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \sup_{x\geq 0} \frac{P\left(\sum_{i=1}^{N(T)} Z_i e^{-r\tau_i} > x,\ N(T) > m\right)}{\int_{0-}^{T} \overline{V}(xe^{rt})\lambda(dt)} \\
=&\lim_{m\to\infty} \sup_{x\geq 0} \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P(Z_i e^{-r\tau_i} > x,\ N(T) = n)}{\int_{0-}^{T} \overline{V}(xe^{rt})\lambda(dt)} = 0.
\end{aligned}$$

O segundo lema foi apresentado por Yang e Li (2019), e tem um papel central na prova do **Teorema 2.4**.

Lema 2.2. Sob as hipóteses do **Teorema 2.4**, temos

$$P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) > x\right) \sim \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt) + \int_{0-}^{T} \overline{G}(xe^{rt})(\lambda * H)(dt)$$

$$\textit{quando } x \to \infty. \tag{2.15}$$

em que $\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_i \leq t)$ e $\lambda * H(t) = \int_{0-}^{t} H(t-s)\lambda(ds)$.

Demonstração do Lema 2.2. Primeiramente, vamos fazer a escolha arbitrária de um inteiro m grande, para fins de passos futuros. Utilizando da partição $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty}\{N(t) = n\}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) > x\right) \\
=&P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} (X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) > x,\ N(t) = n\right) \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) > x,\ N(t) = n\right) \\
=&\sum_{n=m+1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) > x,\ N(t) = n\right) \\
&+\sum_{n=1}^{m} P\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) > x,\ N(t) = n\right) \\
=:&I_1(x;T) + I_2(x;T).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Por um lado, note que,

$$I_1(x;T) \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)e^{-r\tau_i} > x,\ N(t)=n\right) \tag{2.17}$$

Agora, como X_i e Y_i são independentes e como X_i tem *f.d.* F e Y_i tem *f.d.* G, então por (1.3) segue que $X+Y$ tem *f.d.* $F*G$.

Sob as hipóteses: $G \in \mathcal{S}$ e $\overline{G}(x) \asymp \overline{F}(x)$, pela **Proposição 1.6**, temos que $F*G \in \mathcal{S}$ e

$$\overline{F*G}(x) \sim \overline{F}(x) + \overline{G}(x). \tag{2.18}$$

Considerando $\beta = \limsup_{x\to\infty} \dfrac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}$, temos que $0 < \beta < +\infty$, pois, por hipótese, $\overline{G}(x) \asymp \overline{F}(x)$.

Então, obtemos

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)+\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 1+\beta$$

e consequentemente,

$$\overline{F*G}(x) \sim \overline{F}(x) + \overline{G}(x) \lesssim (1+\beta)\overline{F}(x) = \beta'\overline{F}(x) \tag{2.19}$$

em que $\beta' = 1+\beta$.

Por outro lado, pelo **Lema 2.1**, temos que, para qualquer $\varepsilon > 0$ podemos escolher m suficientemente grande tal que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)e^{-r\tau_i} > x,\ N(t)=n\right)}{\int_{0-}^{T} \overline{F*G}(xe^{rt})\lambda(dt)} \leq \varepsilon. \tag{2.20}$$

Assim, aplicando (2.20) e (2.19) em (2.17) segue que

$$\begin{aligned} I_1(x;T) &\lesssim \varepsilon \int_{0-}^{T} \overline{F*G}(xe^{rt})\lambda(dt) \\ &\lesssim \varepsilon\beta' \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Logo, podemos escrever

$$I_1(x;T) \lesssim \varepsilon\beta' \left[\int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt}\lambda(dt) + \int_{0-}^{T} \overline{G}(xe^{rt})(\lambda * H)(dt)\right]. \tag{2.22}$$

O próximo passo será analisar $I_2(x;T)$ dado em (2.16).

Para isso, notemos que podemos escrever para cada $1 \leq n \leq m$

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(t)=n\right) \\ =&P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Agora, por um lado, se n é suficientemente grande tal que $P(N(T)=n)=0$, então temos

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(T)=n\right) = 0, \tag{2.24}$$

e, consequentemente,

$$P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) = P(X_i e^{-r\tau_i} > x,\ N(t)=n) = 0$$

e

$$P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) = P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(t)=n) = 0.$$

Destarte, temos a seguinte relação de igualdade

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(T)=n\right) \\ =&\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) + \sum_{i=1}^{n} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, para o caso em que n é tal que $P(N(T)=n)>0$, vamos destacar inicialmente que na expressão

$$\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} \tag{2.25}$$

temos

(i) $e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}$ e $e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}$ com $i=1,\ldots,n$ são $2n$ pesos aleatórios menores ou iguais a 1;

(ii) esses pesos aleatórios são não degenerados em zero para pelo menos os n primeiros pesos aleatórios $e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}$, pois, $e^{-r\tau_i} > 0$ e $P(N(T) = n) > 0$, logo $P(e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}} = 0) = P(N(T) \neq n) < 1$;

(iii) $e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}} \leq e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Agora, para facilitar a demonstração vamos reescrever os termos de (2.25) considerando

$$Z_j = \begin{cases} X_j, & j = 1, \ldots, n; \\ Y_{j-n}, & j = n+1, \ldots, 2n; \end{cases} \tag{2.26}$$

e

$$\theta_j = \begin{cases} e^{-r\tau_j}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}, & j = 1, \ldots, n; \\ e^{-r(\tau_{j-n}+D_{j-n})}\mathbf{1}_{\{\tau_{j-n}+D_{j-n}\geq t\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}}, & j = n+1, \ldots, 2n. \end{cases} \tag{2.27}$$

Assim, por hipótese, as $v.a.'s$ Z_i's têm funções de sobrevivência

$$\overline{V}_j(x) = \begin{cases} \overline{F}_j(x), & j = 1, \ldots, n; \\ \overline{G}_j(x), & j = n+1, \ldots, 2n. \end{cases} \tag{2.28}$$

Sendo assim definidas, temos pelas hipóteses que $V_j \in \mathcal{S}$, pois $F \in \mathcal{S}$, $G \in \mathcal{S}$ e também $\overline{V}_j(x) \asymp \overline{V}_1(x)$ para todo $j = 1, \ldots, 2n$, pois $\overline{F}(x) \asymp \overline{F}(x)$ e $\overline{G}(x) \asymp \overline{F}(x)$ por hipótese.

Pelos fatos $(i) - (iii)$ destacados anteriormente e pela hipótese de independência de θ_j e Z_j, temos pelo **Corolário 1.2** que $\sum_{j=1}^{2n} \theta_j Z_j \in \mathcal{S}$ e

$$P\left(\sum_{j=1}^{2n} \theta_j Z_j > x\right) \sim \sum_{j=1}^{2n} P\left(\theta_j Z_j > x\right).$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(T) = n\right) \\ =&\sum_{i=1}^{n}(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) + \sum_{i=1}^{n}(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

e quando $x \to \infty$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x\right)$$
$$\sim \sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) + \sum_{i=1}^{n} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x). \tag{2.29}$$

Assim, para m suficientemente grande considerado inicialmente, segue pela definição de $I_2(x;T)$ em (2.16) que

$$I_2(x;T) \sim \sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) + \sum_{i=1}^{n} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x). \tag{2.30}$$

Para facilitar os próximos passos da demonstração, vamos denotar

$$I_{21}(x;T) := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) + \sum_{i=1}^{n} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x)\right) \tag{2.31}$$

e

$$I_{22}(x;T) := \sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) + \sum_{i=1}^{n} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x)\right). \tag{2.32}$$

Assim, podemos reescrever (2.30) como

$$I_2(x;T) \sim I_{21}(x;T) - I_{22}(x;T) \tag{2.33}$$

Para analisar o comportamento assintótico de $I_{21}(x;T)$, notemos primeiramente que para $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} = \mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}$, pois $\tau_i \leq T$ para todo $i = 1, \ldots, n$, e também para $i > n$, $\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} = 0$, pois $\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} = 0$ para todo $i = n+1, n+2, \ldots$. Assim, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\{N(T)=n\}} > x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} > x).$$

E invertendo a ordem dos somatórios, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} > x) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} > x,\ N(T)=n)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} > x) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x)\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x)\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(T)=n)\\ =&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(T)=n)\\ =&\sum_{i=1}^{\infty} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Logo, substituindo (2.34) e (2.35) em (2.31) obtemos

$$I_{21}(x;T) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} > x) + \sum_{i=1}^{\infty} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x). \tag{2.36}$$

Mas, como $\{N(t),\ t\geq 0\}$ é um processo de renovação com tempos de chegadas $\{\tau_i,\ i\geq 1\}$ e função de renovação $\lambda(t)$, por (c) da **Proposição 2.1** temos que $\lambda(t) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\tau_i \leq t)$. Logo, das propriedades de esperança condicional e das propriedades da integral de Lebesgue-Stieltjes, podemos obter

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} P\left(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} > x\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{0^-}^{T} P\left(X_i e^{-rt} > x\right) d[P(\tau_i\leq t)]\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{0^-}^{T} \overline{F}\left(xe^{rt}\right) d[P(\tau_i\leq t)]\\ &= \int_{0^-}^{T} \overline{F}\left(xe^{rt}\right)\lambda(dt). \end{aligned}$$

De maneira análoga, como $\{\tau_i,\ i\geq 1\}$ e $\{D_i,\ i\geq 1\}$ são independentes e $D_i,\ i\geq 1$, são *i.i.d.* com *f.d.* comum H, podemos obter

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\le T\}} > x) &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{0^-}^{T}\overline{G}\left(xe^{rt}\right) d[P(\tau_i+D_i\le t)]\\ &= \int_{0^-}^{T}\overline{G}\left(xe^{rt}\right)(\lambda * H)(dt).\end{aligned}$$

Assim, substituindo em (2.36) obtemos

$$I_{21}(x;T) = \int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt) + \int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})(\lambda * H)(dt). \tag{2.37}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}I_{22}(x;T) &= \sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x)\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{i=1}^{n} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\le T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x)\right)\\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i} > x,\ N(T)=n)\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{i=1}^{n} P(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\le T\}} > x,\ N(T)=n)\right).\end{aligned}$$

Mas, $\{Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\le T\}} > x\} \subseteq \{Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} > x\}$ e $Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \le Y_i e^{-r\tau_i}$, pois D_i é não negativo, então segue

$$I_{22}(x;T) \le \sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[P(X_i e^{-r\tau_i} > x,\ N(T)=n) + P(Y_i e^{-r\tau_i} > x,\ N(T)=n)\right]. \tag{2.38}$$

Agora, por (2.18) temos $\overline{F * G}(x) \sim \overline{F}(x) + \overline{G}(x)$ e usando o **Lema 2.1** podemos obter

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\sup_{x\geq 0}\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(P(X_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)+P(Y_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)\right)}{\int_{0-}^{T}[\overline{F}(xe^{rt})+\overline{G}(xe^{rt})]\lambda(dt)}\\
&=\lim_{m\to\infty}\sup_{x\geq 0}\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(P(X_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)+P(Y_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)\right)}{\int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt)+\int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})\lambda(dt)}\\
&\leq\lim_{m\to\infty}\sup_{x\geq 0}\left[\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(X_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)}{\int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(Y_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)}{\int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})\lambda(dt)}\right]\\
&\leq\lim_{m\to\infty}\sup_{x\geq 0}\left[\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(X_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)}{\int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt)}\right]\\
&\quad+\lim_{m\to\infty}\sup_{x\geq 0}\left[\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(Y_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)}{\int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})\lambda(dt)}\right]\\
&=0.
\end{aligned}$$

Assim, para m suficientemente grande

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(P(X_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)+P(Y_ie^{-r\tau_i}>x,\ N(T)=n)\right)}{\int_{0-}^{T}[\overline{F}(xe^{rt})+\overline{G}(xe^{rt})]\lambda(dt)}<\varepsilon. \tag{2.39}$$

Portanto, aplicando (2.39) em (2.32) e usando (2.19), temos

$$\begin{aligned}
I_{22}(x;T)&\lesssim\varepsilon\int_{0-}^{T}(\overline{F}+\overline{G})(xe^{rt})\lambda(dt)\\
&\lesssim\varepsilon\beta'\int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt)
\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$I_{22}(x;T)\lesssim\varepsilon\beta'\int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt)+\int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})(\lambda*H)(dt)=:\varepsilon\beta'\delta(x;T) \tag{2.40}$$

em que

$$\delta(x;T):=\int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt)+\int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})(\lambda*H)(dt).$$

A combinação dos resultados que foram obtidos anteriormente em (2.16), (2.22), (2.33), (2.37) e (2.40), nos fornecem as seguintes relações

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{I_1 + I_2}{\delta(x;T) + \varepsilon\beta'\delta(x;T)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\delta(x;T)}{\delta(x;T) + \varepsilon\beta'\delta(x;T)} \leq 1 \tag{2.41}$$

e

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\delta(x;T) - \varepsilon\beta'\delta(x;T)}{I_1 + I_2} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\delta(x;T) - \varepsilon\beta'\delta(x;T)}{\delta(x;T)} \leq 1.$$

Ou seja, substituindo $I = I_1 + I_2$ dada em (2.16) obtemos

$$(1 - \varepsilon\beta')\delta(x;T) \lesssim P\left(\sum_{i=1}^{N(T)} (X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i + D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i + D_i \leq T\}}) > x\right) \lesssim (1 + \varepsilon\beta')\delta(x;T).$$

Assim, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que quando $x \to \infty$,

$$P\left(\sum_{i=1}^{N(T)} (X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i + D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i + D_i \leq T\}}) > x\right) \sim \delta(x;T) \tag{2.42}$$

e (2.15) está provada.

$\square$

Agora, podemos provar o **Teorema 2.4**.

Demonstração do Teorema 2.4. Considerando o modelo $\{U(t),\ t \geq 0\}$ dado em (2.13), então, para algum $T > 0$ fixado, a probabilidade da ruína associada ao modelo pode ser escrita por

$$\begin{aligned}
\psi(x,T) &= P\left(\inf_{0<t\leq T} U(t) < 0 | U(0) = x\right) \\
&= P(e^{-rt}U(t) < 0 \textit{ para algum } 0 < t \leq T | U(0) = x) \\
&= P\Bigg(x + c\int_0^t e^{-rs} ds - \sum_{i=1}^{N(T)} \left(X_i e^{-r\tau_i} - Y_i e^{-r(\tau_i + D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i + D_i \leq T\}}\right) < 0 \\
&\qquad \textit{para algum } 0 < t \leq T | U(0) = x\Bigg).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Por um lado, pelo **Lema 2.2,** segue que

$$\psi(x,T) \leq P\left(\sum_{i=1}^{N(T)}\left(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\right) > x\right)$$
$$\sim \int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt) + \int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})(\lambda * H)(dt).$$

Ou seja,

$$\psi(x,T) \lesssim \int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt) + \int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})(\lambda * H)(dt). \tag{2.44}$$

Por outro lado, pelas hipóteses sobre V_j's, segue do **Corolário 1.2** que

$$\sum_{i=1}^{N(T)}(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) \text{ pertence à } \mathcal{S} \tag{2.45}$$

e, consequentemente, pela **Proposição 1.2**, também é de cauda longa, isto é, pertence a $\mathcal{L}$.

Logo, de (2.43) e da relação (1.12) da definição de cauda longa, obtemos

$$\psi(x,T) \geq P\left(\sum_{i=1}^{N(T)}\left(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\right) > x + c\int_0^T e^{-rs}ds\right)$$
$$\sim P\left(\sum_{i=1}^{N(T)}\left(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\right) > x\right).$$

Agora, novamente usando o **Lema 2.2**, segue que

$$\psi(x,T) \gtrsim \int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt) + \int_{0-}^{T}\overline{G}(xe^{rt})(\lambda * H)(dt). \tag{2.46}$$

Portanto, de (2.44) e (2.46) obtemos (2.14) e o teorema está provado. $\square$

No próximo teorema apresentamos a segunda parte do resultado principal de Yang e Li (2019), no qual é obtida uma outra aproximação assintótica para a probabilidade da ruína, assumindo-se condições alternativas sobre as distribuições F e G.

Teorema 2.5. Considere o modelo de risco (2.13) com as hipóteses $(i)-(vii)$. Seja $T > 0$

algum tempo fixado tal que $P(\tau_1 \leq T) > 0$. Se $F \in \mathcal{S}$ e $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$ então

$$\psi(x;T) \sim \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt). \tag{2.47}$$

Para a demonstração deste teorema, necessitamos do próximo lema, também demonstrado por Yang e Li (2019).

Lema 2.3. Sob as mesmas hipóteses do **Teorema 2.5**, temos

$$P\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) > x\right) \sim \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt). \tag{2.48}$$

Demonstração do Lema 2.3. A demonstração é análoga à do **Lema 2.2**.

Primeiramente, como por hipótese $F \in \mathcal{S}$ e $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$, podemos aplicar a **Proposição 1.11** considerando $n = m = 1$, $Z_1 = X$, $Z_2 = Y$ com funções de distribuição $V_1 = F$ e $V_2 = G$, respectivamente. De fato, por hipótese temos $V_1 \asymp V_1$ e $V_2 = o(V_1)$ e para $\theta_1 = \theta_2 = 1$, segue que $F * G \in \mathcal{S}$ e $\overline{F * G}(x) \sim \overline{F}(x) + \overline{G}(x)$. Além disso, temos que como $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$ então

$$\overline{F * G}(x) \sim \overline{F}(x) + \overline{G}(x) \sim \overline{F}(x). \tag{2.49}$$

Agora, seguindo os passos da demonstração do **Lema 2.2**, podemos escrever, como em (2.16)

$$P\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}) > x\right) =: I_1(x;T) + I_2(x;T).$$

Por um lado, usando (2.20) e (2.49) em $I_1(x;T)$ obtemos

$$I_1(x;T) \leq \varepsilon \int_{0-}^{T} \overline{F * G}(xe^{rt})\lambda(dt) \lesssim \varepsilon \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt}\lambda(dt). \tag{2.50}$$

Por outro lado, para analisar $I_2(x;T)$, consideremos inicialmente o caso em que n é suficientemente grande tal que $P(N(t) = n) = 0$ e procedendo da mesma forma que na demonstração do **Lema 2.2** chegamos a conclusão que

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(T)=n\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) = 0.
\end{aligned}
$$

Agora, para o caso em que n é tal que $P(N(T)=n)>0$, considerando (2.25) temos (i), (ii) e (iii) na demonstração do **Lema 2.2** e usando (2.26), (2.27) e (2.28), temos pela **Proposição 1.11** que $\sum_{j=1}^{2n}\theta_j Z_j \in \mathcal{S}$ e

$$
P\left(\sum_{j=1}^{2n}\theta_j Z_j > x\right) \sim \sum_{j=1}^{n} P\left(\theta_j Z_j > x\right).
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}} > x,\ N(T)=n\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) + \sum_{i=1}^{n}(Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x) \in \mathcal{S}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I_2(x;T) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} + \sum_{i=1}^{n} Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x\right)\\
&\sim \sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x). \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Usando a mesma estratégia da parte final da demonstração do **Lema 2.2**, reescreveremos a última expressão acima como

$$
I_2(x;T) \sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} > x)\right) =: I_{21}(x;T) - I_{22}(x;T). \qquad (2.52)
$$

Notando que,

$$
I_{21}(x;T) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}} > x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P(X_i e^{-r\tau_i}\mathbf{1}_{\{N(T)=n\}}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}} > x).
$$

e invertendo a ordem dos somatórios, obtemos

$$I_{21}(x;T) = \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt). \tag{2.53}$$

Para analisar $I_{22}(x;T)$, pelo **Lema 2.1** e por (2.49), obtemos para m suficientemente grande que

$$\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(P(X_i e^{-r\tau_i} > x,\ N(T) = n)\right)}{\int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt)} \leq \varepsilon$$

e consequentemente, temos

$$I_{22}(x;T) \lesssim \varepsilon \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt).$$

Agora, usando (2.52) e (2.53) e procedendo como nos passos finais da demonstração do **Lema 2.2**, obtemos

$$(1-\varepsilon)\eta(x;T) \lesssim P\left(\sum_{i=1}^{N(T)}\left(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\right) > x\right) \lesssim (1+\varepsilon)\eta(x;T),$$

em que

$$\eta(x;T) := \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt).$$

Portanto, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue (2.48). $\square$

Finalmente, podemos provar o **Teorema 2.5**.

Demonstração do Teorema 2.5. Novamente seguimos os mesmos passos da demonstração do **Teorema 2.4** utilizando o **Lema 2.3** no lugar o **Lema 2.2**.

Assim, usando (2.43) e o **Lema 2.3**, obtemos, por um lado, que

$$\begin{aligned}
\psi(x;T) &= P\left(\sum_{i=1}^{N(T)}\left(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\right) > x + c\int_0^t e^{-rs}ds\right)\\
&\leq P\left(\sum_{i=1}^{N(T)}\left(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\right) > x\right)\\
&\sim \int_{0-}^{T} \overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt). \qquad (2.54)
\end{aligned}$$

e, por outro lado, que

$$\begin{aligned}
\psi(x,T) &\geq P\left(\sum_{i=1}^{N(T)}\left(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\right) > x + c\int_0^T e^{-rs}ds\right)\\
&\sim P\left(\sum_{i=1}^{N(T)}\left(X_i e^{-r\tau_i} + Y_i e^{-r(\tau_i+D_i)}\mathbf{1}_{\{\tau_i+D_i\leq T\}}\right) > x\right)\\
&\sim \int_{0-}^{T}\overline{F}(xe^{rt})\lambda(dt). \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

Portanto, de (2.54) e (2.55) segue (2.47) e o teorema está demonstrado. □

Bibliografia

[1] ASMUSSEN, Soren; ALBRECHER, Hansjorg. **Ruin probabilities**. World scientific, 2010.

[2] CLINE, Daren BH. Convolution tails, product tails and domains of attraction. **Probability Theory and Related Fields**, 72.4: 529-557, 1986.

[3] CLINE, Daren BH; SAMORODNITSKY, Gennady. Subexponentiality of the product of independent random variables. **Stochastic Processes and their Applications**, 49.1: 75-98, 1994.

[4] CHEN, Yiqing; LIU, Jiajun; LIU, Fei. Ruin with insurance and financial risks following the least risky FGM dependence structure. **Insurance: Mathematics and Economics**, 62: 98-106, 2015.

[5] DASSIOS, Angelos; ZHAO, Hongbiao. A risk model with delayed claims. **Journal of Applied Probability**, 50.3: 686-702, 2013.

[6] EMBRECHTS, Paul; KLÜPPELBERG, Claudia; MIKOSCH, Thomas. **Modelling extremal events: for insurance and finance**. Springer Science & Business Media, 2013.

[7] FOSS, Sergey, et al. **An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions**. New York: Springer, 2011.

[8] GRIMMETT, Geoffrey; STIRZAKER, David. **Probability and random processes**. Oxford university press, 2001.

[9] HAO, Xuemiao; TANG, Qihe. A uniform asymptotic estimate for discounted aggregate claims with subexponential tails. **Insurance: Mathematics and Economics**, 43.1: 116-120, 2008.

[10] LI, Jinzhu; TANG, Qihe; WU, Rong. Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model. **Advances in Applied Probability**, 42.4: 1126-1146, 2010.

[11] LUNDBERG, F.; RISKUTJÄMNING, Försäkringsteknisk. **I: Teori. II: Statistik (Insurance technical smoothing of risks)**. F. Englunds Boktryckeri AB, Stockholm, 1926.

[12] PENG, Jiangyan; WANG, Dingcheng. Uniform asymptotics for ruin probabilities in a dependent renewal risk model with stochastic return on investments. **Stochastics**, 90.3: 432-471, 2018.

[13] ROSS, Sheldon M. **Stochastic processes**. John Wiley Sons, 1995.

[14] SANTANA, Fabiana Tristão de. **Propriedades assintóticas de somas ponderadas de variáveis aleatórias com aplicação à teoria da ruína**. 2006. 64 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

[15] TANG, Qihe; TSITSIASHVILI, Gurami. Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory. **Extremes**, 6: 171-188, 2003.

[16] TANG, QiHe; YUAN, ZhongYi. Random difference equations with subexponential innovations. **Science China Mathematics**, 59: 2411-2426, 2016.

[17] TANG, Qihe; YUAN, Zhongyi. Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to capital allocation. **Extremes**, 17: 467-493, 2014.

[18] THOMPSON, J. G; HUGHES, D. H. **The H_p-problem and the structure of H_p-groups**. Pacif. J. of Math, v. 9, p. 1097-1101, 1959.

[19] WATERS, Howard R.; PAPATRIANDAFYLOU, Alex. Ruin probabilities allowing for delay in claims settlement. **Insurance: Mathematics and Economics**, 4.2: 113-122, 1985.

[20] YANG, Yang; KONSTANTINIDES, Dimitrios G. Asymptotics for ruin probabilities in a discrete-time risk model with dependent financial and insurance risks. **Scandinavian Actuarial Journal**, 2015.8: 641-659, 2015.

[21] YANG, Haizhong; LI, Jinzhu. On asymptotic finite-time ruin probability of a renewal risk model with subexponential main claims and delayed claims. **Statistics Probability Letters**, 149: 153-159, 2019.

[22] YUEN, Kam C.; GUO, Junyi; NG, Kai W. On ultimate ruin in a delayed-claims risk model. **Journal of Applied Probability**, 42.1: 163-174, 2005.