Universidade de Brasília

Soluções de Sistemas Elípticos Sem Estrutura Variacional Via Ponto Fixo em Cones

Daniel dos Santos Abreu

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 13 de Abril de 2023

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Soluções de sistemas elípticos sem estrutura variacional via ponto fixo em cones.

por

DANIEL DOS SANTOS ABREU

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 13 de abril de 2023.

Comissão Examinadora:

Willian Cintra da Silva

Prof. Dr. Willian Cintra da Silva- MAT/UnB (Orientador)

Jiazheng Zhou

Prof. Dr. Jiazheng Zhou – MAT/UnB (Membro)

Ricardo Lima Alves

Prof. Dr. Ricardo Lima Alves– UFAC (Membro)

Dedico esse trabalho as famílias que perderam seus entes queridos nessa pandemia de Covid-19. Em especial, as famílias de alguns amigos. Sobrevivemos a uma política genocida, mas o custo foi muito alto. Meus sentimentos.

Agradecimentos

Gostaria de iniciar agradecendo a minha família, a do Piauí e a do Ceará, em especial a minha mãe, dona Maria de Lourdes. A mulher mais forte que conheço. Sempre foi pai e mãe e nunca me deixou faltar nada. Sem a senhora, sem sua força e sua luta, eu provavelmente não teria chegado até aqui. Amo muito a senhora e me orgulho de ser seu filho.

A amigos(as) que tive oportunidade de conhecer no mestrado: Henrylla, Marcio, Joyce, Victor M., Jadde, Gabi S. F., Gabriel, Ismael, Caio, Zaban (que me acolheu quando cheguei no DF), Fran, Deyfila, Amanda, Gustavo (pela assistência nas figuras desse trabalho), Rodolfo, Dona Claudinha e alguns outros. Direta e/ou indiretamente, vocês contribuíram muito para a conclusão deste trabalho. Obrigado mesmo.

A amigos(as) de fora mestrado. Nas saídas pra um café ou lugares aleatórios. Aos que deixei em casa para concluir esse sonho, saudades. A Jason, por me ajudar a me instalar em Brasília.

Ao meu orientador, professor Willian Cintra da Silva, que com toda sua saberia, cedeu muito de seu tempo e paciência. Não tenho palavras pra descrever o quão eu sou grato.

Agradeço aos membros da banca, professor Jiazheng Zhou e professor Ricardo Lima Alves, por aceitarem avaliar este trabalho.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. E, em particular, aos professores(as) que fizeram parte da minha formação como mestrando.

Aos professores/amigos Haroldo Rodrigues Clark, Sissy da Silva Souza e Paulo Sérgio Marques dos Santos, que me incentivaram e recomendaram para esse programa de mestrado. E aos demais professores/amigos do departamento de matemática da UFDPar que fizeram parte da minha formação acadêmica.

A CAPES, pelo apoio financeiro durante todo o período do mestrado.

Resumo

Neste trabalho, seguimos Cosner [9] para estudar dois resultados de existência de soluções positivas para sistemas elípticos sem estrutura variacional via ponto fixo em cones, que nos permite inclusive tratar de sistemas superlineares. Mais especificamente, vamos estudar soluções não negativas do seguinte sistema com condição de contorno de Dirichlet:

$$\begin{cases} L_1 u_1 = f_1(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \qquad \vdots & \\ L_m u_m = f_m(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ u_1 = \cdots = u_m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

No primeiro resultado de existência, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, um domínio limitado com fronteira regular e L_μ sendo o operador uniformemente elíptico de segunda ordem na forma divergente com coeficientes regulares. No segundo resultado, adicionamos à Ω a hipótese de convexidade e consideramos $L_\mu = -\Delta$. Em ambos os casos, enunciamos algumas hipóteses sobre $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$, incluindo condições de crescimento.

Para determinar a existência de solução de (1), nossa principal ferramenta é um Teorema do Ponto Fixo em Cones. Para isso, seguiremos os trabalhos de Amann [3] e Deimling [10] e desenvolveremos a teoria de espaços de Banach Ordenados e do Índice do Ponto fixo.

Palavras-Chave: Espaços de Banach Ordenado, Grau Topológico de Leray-Schauder, Índice de Ponto Fixo em Cones, Sistemas Elípticos.

Abstract

In this work, we follow Cosner [9] to study two existence results of positive solutions for elliptic systems without variational structure via fixed point in cones, which allows us to even deal with superlinear systems. More specifically, we will study the solution of the following system with Dirichlet boundary condition:

$$\begin{cases} L_1 u_1 = f_1(\vec{u}) & \text{in } \Omega, \\ \qquad \vdots & \\ L_m u_m = f_m(\vec{u}) & \text{in } \Omega, \\ u_1 = \cdots = u_m = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

In the first existence result, we will consider $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, with $N \geq 2$, a bounded domain with smooth boundary and the operator L_μ is uniformly elliptic in its divergent form with regular coefficients. In the second result, we add the hypothesis of convexity to Ω and consider $L_\mu = -\Delta$. In both cases, we states some assumptions about $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$, including some growth conditions.

To guarantie the existence of solutions for (2), our main tool is a Fixed Point Theorem at Cones. To this end, we follow Amann [3] and Deimling [10] and we develop the theory of Ordered Banach Space and Fixed Point Index.

Keywords: Ordered Banach Space, Fixed Point Index in Cones, Leray–Schauder Topological Degree, Elliptic Systems.

Conteúdo

Notações

$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não-negativos.
$\mathbb{R}^N$	Espaço euclidiano N-dimensional.
$B_r(x)$	Bola aberta de centro x e raio r.
Ω	Domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira regular.
$\overline{\Omega}$	Fecho do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
η_y	Vetor normal unitário exterior em $y \in \partial\Omega$.
$\delta = \delta(x)$	Função distância de x a $\partial\Omega$.
(E,P)	Espaço de Banach E com ordem induzida por pelo cone P .
P_ρ	$B_\rho(0) \cap P = B_\rho^+(0)$, com $\rho > 0$.
$S_\rho(0)$	$\partial B_\rho(0)$, com $\rho > 0$.
$S_\rho^+(0)$	$S_\rho(0) \cap P$, com $\rho > 0$.
A^c	Complementar do conjunto A.
$\mathrm{col}(x_1, \cdots, x_m)$	Matriz coluna $m \times 1$.
$\mathrm{Fix}(f)$	Conjunto dos pontos fixos da aplicação f.
$\hookrightarrow$	Imersão.
$N = N(\cdot)$	Núcleo de um operador.
$C(X,Y)$	Espaço das funções contínuas de X em Y.
$C^k(\overline{\Omega})$	Espaço das funções de classe C^k em $\overline{\Omega}$.
$C_0^k(\overline{\Omega})$	Espaço das funções de classe C^k em $\overline{\Omega}$ que se anulam sobre $\partial\Omega$.
$C_c^\infty(\Omega)$	Espaço das funções de classe C^∞ de suporte compacto.
$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$	Espaço de Hölder.
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev.
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$, para todo inteiro não negativo k.
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com repeito a norma de $W^{k,p}(\Omega)$.
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espaço dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	Fecho do conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ na norma do espaço $W^{1,2}(\Omega)$.
$L_{loc}^1(\Omega)$	Espaço das funções localmente integráveis em Ω.
$L_n^{p'}(\Omega)$	Produto cartesiano dos $L^{p'}(\Omega)$'s. Isto é, $L_n^{p'}(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} L^{p'}(\Omega)$.

$\partial_i u$ ou u_{x_i}	Derivada parcial de u com respeito à i-ésima coordenada, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.
∇u	$(\partial_1 u, \cdots, \partial_N u)$ para $u \in H_0^1(\Omega)$.
p^*	Conjugado de Sobolev ou Expoente crítico de Sobolev. $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$.
λ_1	Principal autovalor de $-\Delta$ em Ω com condição de fronteira homogênea de Dirichlet.
$\lvert \cdot \rvert$	Norma da soma.
$\lVert \cdot \rVert_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$	Norma no espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \alpha < 1$.
$\lVert \cdot \rVert_{L^p(\Omega)}$	Norma do espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.
$\lVert \cdot \rVert_{W^{k,p}(\Omega)}$	Norma do espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$.
$\lVert \cdot \rVert_{L_n^{p'}(\Omega)}$	Norma do espaço $L_n^{p'}(\Omega)$.

Lista de Figuras

Introdução

O principal objetivo desse trabalho é estudar uma classe de sistemas elípticos via ponto fixo em cones. Para isso, precisamos desenvolver a teoria de Índice de Ponto Fixo, que será baseada principalmente em Amann [3] e Deimling [10], e as aplicações serão baseadas no artigo de Cosner [9]. Particularmente, estamos interessados em determinar existência de solução não-negativa e não-trivial para o seguinte sistema elíptico

$$\begin{cases} L_1 u_1 = f_1(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \quad\vdots & \\ L_m u_m = f_m(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ u_1 = \cdots = u_m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, na Seção 2.4, é domínio limitado com fronteira regular e, na Seção 2.5, adicionaremos a hipótese de convexidade, Os operadores L_μ's são uniformemente elípticos de segunda ordem na forma divergente, isto é,

$$L_\mu \cdot := -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i (a_{\mu_{ij}}(x)\partial_j \cdot) + \sum_{i=1}^{N} b_{\mu_i}(x)\partial_i \cdot + c_\mu(x) \cdot, \tag{4}$$

é tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{\mu_{ij}}(x)\xi_i\xi_j \geq a_\mu^0 |\xi|^2, \tag{5}$$

para constantes $a_\mu^0 > 0$ e todo $x \in \Omega$ e $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^N$. Além disso, assumiremos que os coeficientes $a_{\mu_{ij}}$, b_{μ_i} e c_μ são regulares e que

$$c_\mu(x) \geq 0, \ \forall x \in \Omega, \ \forall \mu \in \{1, \cdots, m\}. \tag{6}$$

As hipóteses de regularidade dos coeficientes, bem como as hipóteses (5) e (6) nos permitirão usar uma versão do Princípio do Máximo para soluções fracas em $W^{1,2}(\Omega)$ (ver Apêndice D, Teorema C.2), e o Princípio do Máximo de E. Hopf para soluções clássicas (ver Apêndice D, Teorema C.1).

Além disso f_μ satisfaz as seguintes hipóteses:

(H0) $\vec{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação regular;

(H1) Se $x_\mu \geq 0$, com $\mu \in \{1, \cdots, m\}$, então

$$f_\mu(\vec{x}) \geq 0 \text{ para } \quad \mu = 1, \ldots, m;$$

(H2) Para cada $\mu \in \{1, \cdots, m\}$,

$$\lim_{x_\mu \to \infty} \frac{f_\mu(\vec{x})}{x_\mu} > \lambda_1^{\mu^*} \text{ uniformemente em } x_\nu \geq 0 \text{ para } \nu \neq \mu,$$

onde $\lambda_1^{\mu^*}$ é o autovalor principal do problema

$$\begin{cases} L_\mu^* \phi = \lambda_1^{\mu^*} \phi & \text{em } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde L_μ^* é o operador adjunto de L_μ;

(H3) Seja $\lambda_1 > 0$ é o autovalor principal do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet em Ω. Assuma que o

$$\inf_\mu \left\{ a_\mu^0 \lambda_1 - b_\mu^0 \sqrt{\lambda_1} \right\} > 0,$$

onde

$$b_\mu^0 := \sup_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(b_{\mu_i} \right) \right]^{1/2};$$

(H4) Seja

$$\gamma_0 := \inf_\mu \left\{ a_\mu^0 \lambda_1 - b_\mu^0 \sqrt{\lambda_1} + c_\mu^0 \right\} > 0,$$

onde $c_\mu^0 := \inf_\Omega c_\mu$. Existe $\gamma < \gamma_0$ tal que

$$\left\langle \vec{x}, \vec{f}(\vec{x}) \right\rangle \leq \gamma |\vec{x}|, \text{ sempre que } |\vec{x}| < \gamma_0;$$

(H5) Por fim, assumiremos que $\vec{f}$ é função quase-monótona, isto é,

$$\frac{\partial f_\mu(\vec{x})}{\partial x_\nu} \geq 0, \text{ para } \mu \neq \nu, \text{ e } x_i \geq 0, \forall i = 1, \cdots, m.$$

A hipótese (H1), juntamente com o conceito de função quase-irredutível (a ser definida posteriormente) e o Princípio do Máximo de E. Hopf para soluções clássicas (ver Apêndice D, Teorema C.1), servirá para mostrar que se uma solução $\vec{u}$ não-trivial de (3) é não-negativa, então todas as componentes desta solução são estritamente positiva. A hipótese (H2) é a **superlinearidade de** f_μ. As hipóteses (H3) e (H4) são de natureza mais técnica e sua utilidade ficará clara no decorrer das demonstrações. A hipótese (H5) nos permitirá usar um corolário de um Princípio do Máximo para soluções fracas $W^{1,2}(\Omega)$ (ver Apêndice D, Teorema C.2).

Assumiremos também que $\vec{f}$ satisfaz as seguintes hipóteses de crescimento (HC):

(HC1) Para o primeiro teorema de existência, Seção 2.4, assumiremos

$$\lim_{|\vec{x}| \to \infty} \frac{|\vec{f}(\vec{x})|}{|\vec{x}|^\beta} = 0, \quad \text{onde } \beta = \frac{N+1}{N-1};$$

(HC2) Para o segundo teorema de existência, Seção 2.5, assumiremos

$$\lim_{|\vec{x}| \to \infty} \frac{|\vec{f}(\vec{x})|}{|\vec{x}|^\beta} = 0, \text{ onde } \begin{cases} \beta < \dfrac{N}{N-2} & \text{se } N \geq 3, \\ \beta < \infty & \text{se } N = 2. \end{cases}$$

Como motivação, Cosner [9] destaca que a ideia de estudar o problema (3) surgiu a partir de uma questão em aberto do artigo de Lions [20]. Nesse trabalho, o autor busca determinar a existência de solução positiva para o problema semilinear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u \in C^2(\overline{\Omega}), \end{cases} \tag{7}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular e f é ou superlinear ou sublinear. Em [20, 4.2 Open Question c)], Lions questiona sobre como seria um resultado de existência se estendêssemos (7) para sistemas. Cosner [9], resolveu tal questão em aberto e estendeu esse resultado para operadores elípticos mais gerais.

No estudo de equações diferenciais parciais, quando impomos algumas condições sobre os termos do problema pedimos algumas restrições no método que resolve tal equação. Por exemplo, considere a formulação geral do seguinte problema de contorno de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

onde o operador L é uniformemente elíptico da forma (4). O problema (8) pode ser estudado via métodos variacionais se o operador L tem estrutura variacional, isto é:

i) $b_i = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$;

ii) Os coeficientes $a_{i,j}$ e c possuem regularidades adequadas;

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui condição de crescimento adequada.

É conhecido que o sistema (3), onde cada L_μ é da forma (4) (em geral, $L_\mu \neq L_\upsilon$ para $\mu \neq \upsilon$), pode ser estudado via métodos variacionais se, além das condições anteriores, a não-linearidade $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ é tal que

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial u_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial u_\mu} \text{ para } \quad \mu, \upsilon = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Por exemplo, considerando o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = u_1 & \text{em } \Omega, \\ -\Delta u_2 = u_1 + u_2 & \text{em } \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

temos que (10) não possui estrutura variacional. Nesse trabalho, estamos particularmente interessados em sistemas sem estrutura variacional. Sendo assim, não assumiremos a hipóteses (9) como verdade.

Como forma de contornar essa problemática, usaremos um Método Topológico conhecido como Método do Ponto Fixo em Cones. Diversos autores tem usado essa ferramenta para encontrar soluções positivas de equações e sistemas elípticos (ver [24] e [7]).

Organizamos esse trabalho do seguinte modo. No Capítulo 1, desenvolveremos a Teoria de Pontos Fixos em Cones. Na Seção 1.1, começamos com algumas noções preliminares com o objetivo de concluir que todo cone positivo de um espaço de Banach ordenado E é um retrato de E. Na Seção 1.2, descrevemos o Grau Topológico de Leray-Schauder com o objetivo de definir o Índice de Ponto Fixo, que será feito na Seção 1.3. Na Seção 1.4, vamos enunciar e demonstrar um Teorema do Ponto Fixo em Cones.

No Capítulo 2, começamos na Seção 2.1 introduzimos o problema (3) novamente seguido de sua formulação matricial e todas a hipóteses necessárias a não-linearidade $\vec{f}$. Na Seção 2.2, convencionamos o uso de algumas normas, enunciamos alguns lemas técnicos e definimos o conceito de função quase-irredutível. Tal conceito será importante para obter soluções estritamente positivas do problema (3). Na Seção 2.3, iremos construir o operador solução associado ao problema (3) e que esteja nas hipóteses do teorema de Ponto Fixo em Cone. Sendo assim, os pontos fixos deste operador serão as soluções do problema (3). Dedicamos a Seção 2.4, a demonstrar a existência de solução fraca do problema (3). Na Seção 2.5, trataremos um caso particular do problema (3) onde o operador L_μ será dado pelo operador Laplaciano e ao domino limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira regular, adicionaremos a propriedade de convexidade. Em contrapartida, usaremos condições mais gerais de crescimento em relação a não-linearidade $\vec{f}$. Para isso, faremos uma descrição geométrica do método de mover planos paralelos em relação a uma direção fixa. É importante comentar que, a *priori*, essa ferramenta foi utilizada por Serrin [26, Theorem 1] para mostrar que se uma equação elíptica de segunda ordem satisfazendo certas condições de contorno admite solução não-trivial, então o domínio no qual a solução está definida é necessariamente uma bola e que a solução é esfericamente simétrica. Tal resultado é conhecido como o Teorema de Serrin. Posteriormente, Gidas, Ni e Niremberg [15] descrevem e usam a mesma ferramenta para generalizar o Teorema de Serrin. Um ano depois, Troy [28], utiliza o mesmo método para investigar propriedades de simetria de soluções de sistemas de equações semilinear elípticas. Na seção 2.5, seguiremos Troy [28] e faremos uma descrição geométrica desta ferramenta. Além disso, faremos uso de alguns lemas.

Finalmente, os apêndices são dedicados a alguns resultados clássicos. No Apêndice A, colecionamos algumas desigualdades elementares, resultados sobre espaço de Sobolev, solução fraca, regularidade elíptica e o problema de autovalor. No Apêndice 1.1.1, demonstramos o Teorema 1.2, que garante a existência de uma extensão para uma dada aplicação contínua. No Apêndice B, resumimos os conceitos e definições a respeito do Grau Topológico de Brouwer, enunciamos e demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, Teorema B.2, como consequência do Teorema 1.2. Por fim, o Apêndice C trata de dois princípios do máximo. O primeiro, é o princípio do Máximo de E. Hopf para soluções clássicas, Teorema C.1. E o segundo, é uma adaptação do princípio do máximo para soluções fracas, Teorema C.2. Além disso, uma caracterização do princípio do máximo é enunciada. Os corolários desse apêndice serão de grande importância no decorrer do texto.

Capítulo 1

Ponto Fixo em Cones

Diversos fenômenos em Física, Biologia, Engenharia, etc, são modelados por equações diferenciais. E em muitas situações, é necessário buscar por soluções positivas desses problemas. Por exemplo, em Dinâmica Populacional, quando uma equação descreve o comportamento de uma ou mais espécies, e a solução mede a densidade populacional, é necessário buscar soluções não-negativas.

Um dos métodos que nos permite encontrar solução positiva é o chamado Ponto Fixo em Cones. Para desenvolver essa ferramenta é necessário utilizar o grau Topológico de Leray-Schauder. Mas apenas é possível definir o grau de Leray-Schauder para aplicações compactas definidas no fecho de um subconjunto aberto de um espaço de Banach. Como estamos interessados em soluções não negativas, é natural considerar aplicações definidas em abertos relativos definidos em cones positivos. Porém, se o cone positivo não tem pontos interiores (isto é, não tem abertos relativos), o grau de Leray-Schauder não pode ser imediatamente aplicado. Para contornar esse problema, definiremos o objeto matemático chamado de "retrato de um espaço de Banach". Veremos que todo cone positivo é um retrato de um espaço de Banach. Nesse novo objeto matemático, é possível definir o que chamaremos posteriormente de "Índice de Ponto Fixo"de operadores compactos definidos em retratos de um espaço de Banach. Mostraremos que o Índice de Ponto Fixo terá propriedades equivalentes ao grau de Leray-Schauder.

Encerraremos esse capítulo com alguns teoremas não triviais de existência de ponto fixo para operadores compactos e contínuos fazendo uso do Índice de Ponto Fixo.

1.1 Noções e Resultados Preliminares

Nesta seção, buscaremos enunciar algumas definições e resultados preliminares que serão úteis ao longo do texto. Seguiremos [23], Amman [3], Deimling [10] e Dugundju [11] como principais referências desta seção.

1.1.1 Extensão de Aplicações Contínuas

O objetivo desta subseção é demonstrar um teorema que garante a existência de uma extensão para uma dada aplicação contínua. Naturalmente, tal extensão deve preservar a continuidade da aplicação original. Mas antes, vejamos algumas definições e resultados de topologia geral. A Definição 1.1 pode ser encontrada em [6, p. 17]. As Definições 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5 podem ser encontradas em [23, Chapter 6]. Além disso, X sempre denotará um espaço vetorial normado.

Definição 1.1. ***(Envoltória Convexa)*** *Seja A um subconjunto de X. Chamamos de* ***envoltória convexa*** *de A, denotada por $conv(A)$, o menor subconjunto convexo de X que contém A. Note que, $conv(A)$ consiste de todas as combinações convexas finitas de elementos de A, isto é,*

$$conv(A) = \left\{ \sum_{t \in I} t_i a_i \ : \ I\text{-finito},\ a_i \in A,\ t_i \in [0,1],\ \forall i \text{ e } \sum_{t \in I} t_i = 1 \right\}.$$

Definição 1.2. ***(Cobertura Aberta)*** *A coleção de $\mathcal{A}$ subconjuntos de X é chamada de cobertura de X, se*

$$\bigcup_{U \in \mathcal{A}} U = X.$$

$\mathcal{A}$ é chamada cobertura aberta de X, se seus elementos são subconjuntos abertos de X.

Definição 1.3. ***(Cobertura Localmente Finita)*** *Dizemos que uma cobertura $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é* ***localmente finita****, se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança $V(x)$ tal que a vizinhança intersecta apenas uma quantidade finita de elementos da cobertura $\mathcal{A}$. Isto é, dada uma cobertura $\mathcal{A} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de X, existe uma vizinhança $V(x)$ tal que o conjunto $I_x = \{\lambda \in \Lambda; V(x) \cap U_\lambda \neq \emptyset\}$ é finito, para todo $x \in X$.*

Definição 1.4. ***(Refinamento)*** *Um* ***refinamento*** *de uma cobertura $\mathcal{A}$ de X é uma nova cobertura $\mathcal{B}$ de X tal que todo elemento de $\mathcal{B}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{A}$. Isto é, $\mathcal{B} = \{U_\sigma; \sigma \in \Pi\}$ é refinamento de $\mathcal{A} = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ se, e só se, para todo U_σ em $\mathcal{B}$ existe U_λ em $\mathcal{A}$ tal que $U_\sigma \subseteq U_\lambda$. Também dizemos que a cobertura $\mathcal{B}$ refina a cobertura $\mathcal{A}$.*

Definição 1.5. ***(Espaço Paracompacto)*** *Um espaço topológico X é chamado de* ***paracompacto*** *se toda cobertura aberta possui refinamento aberto localmente finito.*

Teorema 1.1. *Todo espaço metrizável é paracompacto.*

Demonstração. Ver [23, Theorem 41.4]. □

Observação 1.1. Perceba que o Teorema 1.1 é aplicado a um espaço metrizável X. Porém, se X é um espaço normado temos que X é claramente metrizável, pois toda norma $\|\cdot\|$ induz a métrica dada por $d(x,y) = \|x-y\|$. Além disso, para X metrizável, seja τ a topologia definida por uma métrica de X. Dado um subconjunto aberto B de X na topologia τ, segue que $\mathcal{B}$ é espaço topológico na topologia τ de X relativo ao aberto $\mathcal{B}$. Desta forma, o subconjunto aberto B de X pode ser visto como espaço metrizável. Daí, segue do Teorema 1.1, aplicado ao espaço metrizável B (na topologia relativa), que B é paracompacto. Isto é, dado um subconjunto aberto B de um espaço metrizável X e $\mathcal{B} = \{U_\sigma; \sigma \in \Pi\}$ uma cobertura aberta (relativo) de B, então existe uma cobertura $\mathcal{A} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de B localmente finita que refina $\mathcal{B}$.

O Teorema 1.2 a seguir é um caso particular do Teorema de Extensão de Dugundji [12, Chapter IX.6]. Para demonstração-lo, buscamos detalhar e justificar todas as implicações encontradas em [10, Theorem 7.2] .

Teorema 1.2. ***(Teorema de Extensão de Aplicações Contínuas)*** *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, $A \subset X$ fechado e $F : A \to Y$ contínua. Então F admite uma extensão contínua $\tilde{F} : X \to Y$ tal que $\tilde{F}(X) \subset conv(F(A))$.*

Demonstração. Inicialmente, considere uma cobertura aberta $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ localmente finita de $X\backslash A$. Isto é,

$$X\backslash A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda, \tag{1.1}$$

U_λ um aberto contido em $X\backslash A$, e para todo $x \in X\backslash A$ existe uma vizinhança V_x tal que o conjunto

$$I_x = \{\lambda \in \Lambda; V_x \cap U_\lambda \neq \emptyset\} \tag{1.2}$$

é finito. Em seguida, para cada $\lambda \in \Lambda$, defina as aplicações $\varphi_\lambda : X\backslash A \to [0,\infty)$ e $\psi_\lambda : X\backslash A \to [0,\infty)$ tais que

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin U_\lambda, \\ \operatorname{dist}(x, \partial U_\lambda) & \text{se } x \in U_\lambda, \end{cases} \tag{1.3}$$

e

$$\psi_\lambda(x) = \frac{\varphi_\lambda(x)}{\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x)}. \tag{1.4}$$

Observemos que φ e ψ estão bem definidas, pois a distância de x a ∂U_λ sempre será atingida, já que é distância entre um conjunto fechado (a fronteira de U_λ) e um conjunto compacto (um ponto). Além disso, se $x \in V_x \cap U_\lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$, então $V_x \cap U_\lambda \neq \emptyset$. Logo, por (1.2), temos que $\lambda \in I_x$-finito. Assim, $V_x \cap U_\mu = \emptyset$ para uma infinidade de índices $\mu \in \Lambda \backslash I_x$. Logo, $\varphi_\mu(x) = 0$ para todo $\mu \in \Lambda \backslash I_x$. Dai, se $x \in U_\lambda$ então

$$\sum_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x) = \sum_{\mu\in\Lambda\backslash I_x} \varphi_\mu(x) + \sum_{\mu\in I_x} \varphi_\mu(x) = \sum_{\mu\in I_x} \varphi_\mu(x). \tag{1.5}$$

Logo, a somatória $\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x)$ é finita, pois I_x é finito. Mais ainda, $\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x) \neq 0$ para todo $x \in X\backslash A$. De fato, por (1.1), se $x \in X\backslash A$ então $x \in U_\lambda$ par algum $\lambda \in \Lambda$. Daí,

$$\sum_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x) = \varphi_\lambda(x) + \sum_{\mu\in\Lambda\backslash\{\lambda\}} \varphi_\mu(x) \geq \varphi_\lambda(x) = \operatorname{dist}(x, \partial U_\lambda) > 0, \tag{1.6}$$

onde a última desigualdade segue do fato de U_λ ser aberto e $x \in U_\lambda$. Afirmamos que φ_λ é contínua, para todo $\lambda \in \Lambda$. De fato, como para todo $x \in X\backslash A$ temos que ou $x \in U_\lambda$ ou $x \in \partial U_\lambda$ ou $x \notin \overline{U_\lambda}$. Se $x \in U_\lambda$ então $\varphi_\lambda(x) = \operatorname{dist}(x, \partial U_\lambda)$, logo é contínua. Se $x \notin \overline{U_\lambda}$ então $\varphi_\lambda(x) = 0$, logo é contínua. Se $x \in \partial U_\lambda$ então $\varphi_\lambda(x) = 0$ e queremos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que: se $y \in B_\delta(x)$ então $|\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(y)| = |\varphi_\lambda(y)| < \varepsilon$. Dado $y \in B_\delta(x)$, vamos analisar os seguintes casos: ou $y \in B_\delta(x) \cap U_\lambda$, ou $y \in B_\delta(x) \cap \partial U_\lambda$ ou $y \in B_\delta(x) \cap (U_\lambda)^c$. Se $y \in B_\delta(x) \cap \partial U_\lambda$ ou $y \in B_\delta(x) \cap (U_\lambda)^c$ então $\varphi_\lambda(y) = 0$ e a continuidade segue imediato. Se $y \in B_\delta(x) \cap U_\lambda$ então basta tomar $\delta = \varepsilon$. Assim, para $y \in B_\varepsilon(x) \cap \partial U_\lambda$ temos que

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(y)| &= \operatorname{dist}(y, \partial U_\lambda) \\ &= \inf\{\|y - x\| \ : \ x \in \partial U_\lambda\} \\ &\leq \|y - x\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Mais ainda, ψ_λ tem as seguinte propriedades,

$$0 \leq \psi_\lambda(x) = \frac{\varphi_\lambda(x)}{\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x)} \leq \frac{\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x)}{\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x)} = 1 \tag{1.7}$$

e

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x) = \frac{\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(x)}{\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \varphi\mu(x)} = 1. \tag{1.8}$$

Agora, para cada $\lambda \in \Lambda$, fixemos um $a_\lambda \in A$ a ser escolhido posteriormente. Defina uma aplicação $\tilde{F} : X \to Y$ dada por

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{se } x \in A, \\ \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x)F(a_\lambda) & \text{se } x \notin A. \end{cases} \tag{1.9}$$

Note que se $x \notin A$ então $x \in X \backslash A$, isto é, $x \in U_\lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$. Daí, usando argumento análogo ao usado em (1.5), obtemos que existe um conjunto finito de índices $I_x \subset \Lambda$ tal que:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x)F(a_\lambda) = \sum_{\lambda\in I_x} \psi_\lambda(x)F(a_\lambda). \tag{1.10}$$

Portanto, $\tilde{F}$ está bem definida. Além disso, podemos afirmar que:

i) $\tilde{F}$ é extensão de F à X, isto é, $\tilde{F}\big|_A = F$;

ii) $\tilde{F}(X) \subset \operatorname{conv}(F(A))$;
De fato, seja $y \in \tilde{F}(X)$ então $\tilde{F}(x) = y$, para algum $x \in X$. Se $x \in A$ então $y = F(x) \in F(A) \subset \operatorname{conv}(F(A))$. Se $x \notin A$, então

$$y = \tilde{F}(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x)F(a_\lambda).$$

Por (1.10), temos que

$$y = \sum_{\lambda\in I_x} \psi_\lambda(x)F(a_\lambda),$$

onde I_x é finito. Por (1.7) e (1.8), segue que $0 \leq \psi_\lambda(x) \leq 1$ e $\sum\limits_{\lambda\in I_x} \psi_\lambda(x) = 1$. Como $F(a_\lambda) \in F(A)$, segue da Definição 1.1 de envoltória convexa, que $y \in \operatorname{conv}(F(A))$.

iii) $\tilde{F}$ é contínua em todo ponto interior de A (se houver), já que, nesse caso, $\tilde{F} \equiv F$ e F é contínua por hipótese;

iv) $\tilde{F}$ é contínua em todo $X \backslash A$. Pois, nesse caso, $\tilde{F}$ é localmente a somatória finita de aplicações contínuas.

v) Para $x \notin A$ e $x_0 \in A$, segue de (1.10) e (1.8) que

$$\begin{aligned}
|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0)| &= |\tilde{F}(x) - F(x_0)| \\
&= \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) F(a_\lambda) - F(x_0) \right| \\
&= \left| \sum_{\lambda \in I_x} \psi_\lambda(x) F(a_\lambda) - F(x_0) \right| \\
&= \left| \sum_{\lambda \in I_x} \psi_\lambda(x) F(a_\lambda) - \sum_{\lambda \in I_x} \psi_\lambda(x) F(x_0) \right| \\
&\leq \sum_{\lambda \in I_x} \psi_\lambda(x) |F(a_\lambda) - F(x_0)| \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) |F(a_\lambda) - F(x_0)|.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Para concluir o resultado, precisamos provar que $\tilde{F}$ é uma função contínua. Isso significa provar que $\tilde{F}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio X. Como $X = \text{int}.A \cup \partial A \cup (X \backslash A)$ e já sabemos que $\tilde{F}$ é contínua em int.A e $X \backslash A$ então resta apenas mostrar que $\tilde{F}$ é contínua em $x_0 \in \partial A \subset A$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que $|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0)| < \varepsilon$ sempre que $x \in B_\delta(x_0)$. Por (1.11), para provar a continuidade de $\tilde{F}$ em x_0, devemos ter que $\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) \neq 0$ (isto é, $x \in U_\lambda$) com $\|x - x_0\|$ suficientemente pequeno de modo a garantir que o a_λ correspondente esteja em $B_\delta(x_0)$. Assim, pela continuidade da F, (1.11) e (1.8), teremos que

$$\begin{aligned}
|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0)| &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) |F(a_\lambda) - F(x_0)| \\
&< \varepsilon \sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Para encontrar U_λ e a_λ apropriados de modo a garantir que (1.12) ocorre, denote por B_x a bola aberta de centro em $x \in X \backslash A$ tal que

$$0 < \text{diam}(B_x) \leq \text{dist}(B_x, A), \tag{1.13}$$

por exemplo, $B_x = B_r(x)$ com $r = \text{dist}(x,A)/6$ (ver Figura 1.1).

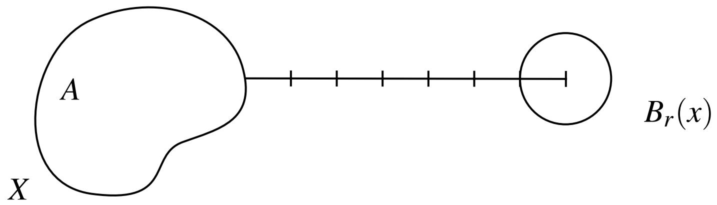

Figura 1.1 Exemplo de bola com a propriedade (B.12).

Assim, podemos cobrir $X \backslash A$ do seguinte modo

$$X \backslash A = \bigcup_{x \in X \backslash A} B_x.$$

Isto é, $(B_x)_{x \in X \backslash A}$ é uma cobertura aberta de $X \backslash A$. Por hipótese, X é espaço métrico. Daí, segue do Teorema 1.1 e da Observação 1.1 que a cobertura aberta $(B_x)_{x \in X \backslash A}$ de $X \backslash A$ admite um refinamento aberto $(U_\lambda)_\lambda$ localmente finito. Assim, $U_\lambda \subset B_z$ para algum $z \in X \backslash A$.

Note que, $U_\lambda \subset B_z$ implica que

$$0 < \text{dist}(B_z,A) \leq \text{dist}(U_\lambda,A). \tag{1.14}$$

Como ∂B_z é compacta e A é fechado, temos que existem $b \in \partial B_z$ e $\bar{x} \in A$ tal que $\|\bar{x} - b\| = \text{dist}(\partial B_z,A)$. Além disso, $\text{dist}(\partial B_z,A) = \text{dist}(B_z,A)$. Denote por M o número real tal que $M = \text{diam}(B_z) > 0$ e considere a bola aberta $B_M(\bar{x})$. Assim, dado $\lambda \in \Lambda$ escolha $a_\lambda \in B_M(\bar{x}) \cap A$, isto é, $\|a_\lambda - \bar{x}\| < M$ e $a_\lambda \in A$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\text{dist}(a_\lambda,U_\lambda) &\leq \|a_\lambda - \bar{x}\| + \text{dist}(U_\lambda,A), \ \ \text{por desigualdade triangular.} \\
&< M + \text{dist}(U_\lambda,A) \\
&= \text{diam}(B_z) + \text{dist}(U_\lambda,A) \\
&\leq \text{dist}(B_z,A) + \text{dist}(U_\lambda,A), \ \ \text{por (1.13).} \\
&\leq \text{dist}(U_\lambda,A) + \text{dist}(U_\lambda,A), \ \ \text{por (1.14).} \\
&= 2\text{dist}(U_\lambda,A).
\end{aligned}$$

Assim, sempre podemos escolher $a_\lambda \in A$ tal que

$$\text{dist}(a_\lambda,U_\lambda) < 2\text{dist}(U_\lambda,A). \tag{1.15}$$

Então, tomando um $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \dfrac{\delta}{4}$, onde $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) \neq 0$ (isto é, $x \in U_\lambda \subset B_z$ para algum $z \in X \backslash A$), e considerando $x' \in \partial U_\lambda$ tal que

$$\|x' - a_\lambda\| = \text{dist}(a_\lambda, \partial U_\lambda) = \text{dist}(a_\lambda, U_\lambda), \tag{1.16}$$

x' existe pois ∂U_λ é compacto. Assim:

$$\begin{aligned}
\|x - a_\lambda\| &\leq \|x - x' + x' - a_\lambda\| \\
&\leq \|x' - a_\lambda\| + \|x - x'\| \\
&\leq \text{dist}(a_\lambda, U_\lambda) + \text{diam}(U_\lambda), \;\; \text{por (1.16).} \\
&\leq 2\text{dist}(U_\lambda, A) + \text{diam}(B_z), \;\; \text{por (1.15).} \\
&\leq 2\text{dist}(U_\lambda, A) + \text{dist}(B_z, A), \;\; \text{por (1.13).} \\
&\leq 2\text{dist}(U_\lambda, A) + \text{dist}(U_\lambda, A), \;\; \text{por (1.14).} \\
&= 3\text{dist}(U_\lambda, A) \\
&\leq 3\|x - x_0\|.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|x_0 - a_\lambda\| &= \|x_0 - x + x - a_\lambda\| \\
&\leq \|x_0 - x\| + \|x - a_\lambda\| \\
&\leq \|x_0 - x\| + 3\|x - x_0\| \\
&= 4\|x - x_0\|.
\end{aligned}$$

Logo, por (1.12), para todo $\varepsilon > 0$ existe $\overline{\delta} = \dfrac{\delta}{4}$ tal que

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| < \overline{\delta} &\implies \|x_0 - a_\lambda\| < 4\|x - x_0\| \leq 4\overline{\delta} = 4\frac{\delta}{4} = \delta \\
&\implies |F(a_\lambda) - F(x_0)| < \varepsilon, \\
&\implies |\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. □

1.1.2 Cones e Espaços de Banach Ordenados

Veremos que a teoria de Índice de Ponto Fixo, segundo Amann [3], é aplicada para uma classe específica de conjuntos chamados de retratos de um espaço de Banach (a ser detalhada posteriormente). Como usaremos essa teoria para garantir existência de solução não-negativa para um sistema de equações elípticas, o conjunto mais natural a se considerar é o chamado Cone Positivo. Sendo assim, o objetivo desta subseção é garantir que todo cone positivo é um retrato de espaço de Banach. Logo, poderemos aplicar a teoria de Índice de Ponto Fixo para cones positivos.

Iniciamos esta subseção com algumas definições que nos guiarão ao conceito de Espaço de Banach Ordenado.

Definição 1.6. ***(Ordem e Conjunto Ordenado)*** *Seja X um conjunto não vazio. Uma* ***ordem*** *em X, usualmente denotada por $\leq$, é uma relação binária em X que obedece as seguinte propriedades:*

(i) ***(Reflexiva)*** *Para todo $x \in X$, tem-se que $x \leq x$;*

(ii) ***(Anti-Simetria)*** *Para todo $x, y \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;*

(iii) ***(Transitiva)*** *Para todo $x, y, z \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.*

Um conjunto não vazio munido de uma relação de ordem é chamado de ***conjunto ordenado****.*

Segue alguns exemplos de conjuntos ordenados.

Exemplo 1.1. *O conjunto das partes $\mathcal{P}(X)$ de um conjunto não vazio X munido da relação de inclusão entre conjuntos, isto é, dados $A, B \in \mathcal{P}(X)$ então*

$$A \leq B \text{ se, e somente se, } A \subset B.$$

Exemplo 1.2. *O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, munido da relação $\leq$ usual é um conjunto ordenado. Ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$, então*

$$x \leq y \text{ se, e somente se, existe } z \geq 0 \text{ tal que } y = x + z.$$

Exemplo 1.3. *Dados $x = (x_1, \cdots, x_N), y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, com $N \in \mathbb{N}$, definimos a seguinte relação de ordem*

$$x \leq y \text{ se, e somente se, } x_i - y_i \leq 0, \text{ para todo } i \in \{1, \cdots, N\}.$$

Assim, o conjunto $\mathbb{R}^N$ munido da relação acima é um conjunto ordenado. Perceba que nem todos os elementos de $\mathbb{R}^N$ se relacionam. Com $N = 2$, temos que o elemento $(1,0)$ não se relaciona com o elemento $(0,0)$.

As vezes, escreveremos $y \geq x$ em vez de $x \leq y$. E além disso, $x < y$ significará que $x \leq y$ mas $x \neq y$. Analogamente, $x > y$ significará que $x \geq y$ mas $x \neq y$.

Definição 1.7. ***(Intervalo Ordenado, Conjunto Ordenadamente Limitado e Conexo)*** *Seja X um conjunto não vazio. Para todo par de elementos $x,y \in X$, denotaremos por $[x,y]$ o subconjunto de X dado por*

$$[x,y] := \{z \in X \mid x \leq z \leq y\}.$$

Chamaremos o conjunto $[x,y]$ de ***intervalo ordenado*** *entre os elementos x e y. Um subconjunto A de X será chamado de* ***ordenadamente limitado*** *quando A estiver contido em algum intervalo ordenado. Por ultimo, um subconjunto A de X será chamado de* ***ordenadamente conexo*** *quando dados $x,y \in A$ implicar que $[x,y] \subset A$.*

Segue imediato das propriedades de reflexividade e transitividade da relação $\leq$ que o intervalo ordenado $[x,y]$ é não vazio se, e somente se, $x \leq y$.

Assim como Exemplo 1.3, estamos particularmente interessados em conjuntos ordenados que são espaços vetoriais. Desse modo, daqui em diante, consideraremos apenas espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$. Sendo assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.8. ***(Espaço Vetorial Ordenado-EVO)*** *Seja V um espaço vetorial. Uma ordem em V é chamada de* ***linear*** *se:*

(i) $a \leq b$ *implica que* $a + c \leq b + c$, *para todo* $c \in V$;

(ii) $a \leq b$ *implica que* $\alpha a \leq \alpha b$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}_+ := [0,\infty)$.

Um espaço vetorial real V munido de uma ordem linear é chamado de ***Espaço Vetorial Ordenado****.*

Por exemplo, $\mathbb{R}^N$ munido com a relação de ordem do Exemplo 1.3 é um exemplo de espaço vetorial ordenado. Logo, no caso de E.V.O, faz sentido falar em elementos positivos. O próximo resultado fornece algumas propriedade desse conjunto de elementos positivos.

Proposição 1.1. *Seja V um espaço vetorial ordenado e considere o subconjunto de V dado por*

$$P := \{x \in V \mid 0 \leq x\}.$$

Então P satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $P+P \subset P$;

(P2) $\mathbb{R}_+ P \subset P$;

(P3) $P \cap (-P) = \{0\}$, *onde* $-P := \{x \in V \mid -x \in P\}$.

Demonstração. Dado $x \in P+P$ então $x = a+b$ com $a,b \in P$, isto é, $0 \leq a$ e $0 \leq b$. Como V é E.V.O, segue da propriedade (i) da Definição 1.8 que $0 \leq a$ implica que $b \leq a+b$. Como $0 \leq b$, segue que $0 \leq b = a+b = x$. Logo, $0 \leq x$ e com isso $(P1)$ está provada.

Seja agora $x \in \mathbb{R}_+ P$, isto é, $x = \alpha a$ com $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $a \in P$. Daí, segue da propriedade (ii) da Definição 1.8 que $0 \leq a$ implica que $0 \leq \alpha a = x$. Portanto, $(P2)$ está provada.

Por fim, se $x \in P \cap (-P)$ então $0 \leq x$ e $0 \leq -x$. Pela propriedade (i) da Definição 1.8, segue que $0 \leq -x$ implica que $x \leq -x+x$, logo $x \leq 0$. Assim, $0 \leq x$ e $x \leq 0$. Segue então da propriedade anti-simétrica da relação $\leq$ que $x = 0$. $\square$

Motivados pelas propriedades da proposição anterior, temos a seguinte definição.

Definição 1.9. ***(Cone)*** *Todo subconjunto não vazio P de um espaço vetorial real V(não necessariamente ordenado) será chamado de* ***cone*** *quando P satisfazer as propriedades* $(P1)-(P3)$.

Como exemplo, segue da Proposição 1.1 que se V é um espaço vetorial ordenado então $P = \{x \in V \mid 0 \leq x\}$ é um cone.

Veremos agora que um cone sempre é convexo (no sentido clássico), quando definido em um espaço vetorial real V (não necessariamente ordenado). Por outro lado, as propriedades que definem um cone também definem uma relação de ordem sobre V. Assim, ficará fácil concluir que, na relação de ordem induzida pelas propriedades de cone, todo cone é ordenadamente convexo.

Proposição 1.2. *Todo cone P definido em um espaço vetorial real V(não necessariamente ordenado) é convexo.*

Demonstração. Queremos provar que dados quaisquer elementos $x,y \in P$ e $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, temos que $tx+(1-t)y \in P$. Se fato, como $x,y \in P$, $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ e P é um cone, segue da propriedade $(P2)$ que $tx \in P$ e $(1-t)y \in P$. Daí, segue da propriedade $(P1)$ que $tx+(1-t)y \in P$. $\square$

Proposição 1.3. *Todo cone P definido em um espaço vetorial real V define uma relação de ordem linear em V dada por*

$$x \leq y \ \text{ se, e somente se, } \ y - x \in P.$$

Demonstração. A relação acima é de ordem em V pois:

- É reflexiva. Pois, por (P3), para todo $x \in V$, temos que $x - x = 0$ e $0 \in P$. Logo $x \leq x$ para todo $x \in V$;

- É anti-simétrica, pois para todo $x, y \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
x \leq y \ \text{ e } \ y \leq x &\Leftrightarrow y - x \in P \ \text{ e } \ x - y \in P \\
&\Leftrightarrow y - x \in P \ \text{ e } \ -(y - x) \in P, \quad \text{pois V é espaço vetorial,} \\
&\Leftrightarrow y - x \in P \ \text{ e } \ (y - x) \in -P, \quad \text{por definição de -P,} \\
&\Leftrightarrow y - x \in P \cap (-P) = \{0\} \\
&\Leftrightarrow y - x = 0 \\
&\Leftrightarrow y = x;
\end{aligned}$$

- É transitiva, pois para todo $x, y, z \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
x \leq y \ \text{ e } \ y \leq z &\Rightarrow y - x \in P \ \text{ e } \ z - y \in P \\
&\Rightarrow (z - y) + (y - x) \in P, \ \text{ por (P1),} \\
&\Rightarrow z - x \in P \\
&\Rightarrow x \leq z.
\end{aligned}$$

A ordem é linear, pois;

- Para todo $x, y, z \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
x \leq y &\Rightarrow y - x \in P \\
&\Rightarrow y + (z - z) - x \in P, \ \text{ para todo } z \in V \\
&\Rightarrow (y + z) - (x + z) \in P \\
&\Rightarrow x + z \leq y + z;
\end{aligned}$$

- Para todo $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$\begin{aligned} x \le y &\Leftrightarrow y - x \in P \\ &\Rightarrow \alpha(y-x) \in P, \;\; \text{por (P2)}, \\ &\Rightarrow \alpha y - \alpha x \in P \\ &\Leftrightarrow \alpha x \le \alpha y. \end{aligned}$$

□

Corolário 1.1. *Sejam P um cone de um espaço vetorial real V e "$\le$"a relação de ordem induzida por P em V então:*

i) $P = \{x \in V \mid 0 \le x\}$*;*

ii) *P é ordenadamente convexo.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3, temos que $x - 0 \in P$ se, e somente se, $0 \le x$. Portanto, o resultado $i)$ segue. Usando a ordem $\le$ em (1.3), segue do item $i)$ que dados $x, y \in P$ temos que $0 \le x, y$. Logo, dado $z \in [x, y]$ temos que $x \le z \le y$. Daí, por transitividade, $0 \le x \le z$ implica que $0 \le z$. Pelo item $i)$, novamente segue que $z \in P$. Portanto, o resultado $ii)$ segue. □

Observação 1.2. Se o espaço vetorial V já estiver munido de uma relação de ordem "$\le$", então chamaremos o conjunto $P = \{x \in V \mid 0 \le x\}$ de **Cone Positivo**. A partir de agora, consideraremos em V a ordem "$\le$" induzida pelo cone P. Além disso, P será cone positivo de V com relação a ordem considerada. Por fim, em consonância com a Proposição 1.2 e o Corolário 1.1-*ii*), diremos simplesmente que o cone é conexo em vez de ordenadamente conexo.

Segue alguns exemplos de cones positivos:

Exemplo 1.4. ***(A reta real)*** *A reta real $\mathbb{R}$ visto como espaço vetorial munido da relação de ordem usual. O cone positivo P de $\mathbb{R}$ é dado por $P = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x\}$.*

Exemplo 1.5. ***(Espaço de funções)*** *Seja X um espaço topológico. Considere o espaço vetorial de todas as funções continuas de X em $\mathbb{R}$, isto é, $C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$. Temos que um cone positivo de $C(X; \mathbb{R})$ pode ser dado pelo conjunto $P = \{f \in C(X; \mathbb{R}) \mid 0 \le f(x), \text{ para todo } x \in X\}$.*

Exemplo 1.6. ***(Cone Positivo Fechado)*** *Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido da métrica Euclidiana e os subconjuntos*

$$P_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\; x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ ou } x_1 = x_2 = 0\ \},$$
$$P_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ ou } x_1 = x_2 = 0\ \}.$$

Vendo $\mathbb{R}^2$ como espaço vetorial, temos que P_1 e P_2 são cones em $\mathbb{R}^2$. Mais ainda, na topologia induzida pela métrica de $\mathbb{R}^2$, temos que P_2 é um conjunto fechado $\mathbb{R}^2$ mas P_1 não é fechado em $\mathbb{R}^2$. Se considerando as ordens $\overset{\sim}{\leq}$ e $\leq$ dadas por

$$(x_1,x_2) \overset{\sim}{\leq} (y_1,y_2) \;\text{ se, e somente se, }\; (y_1,y_2) - (x_1,x_2) \in P_1$$

e

$$(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2) \;\text{ se, e somente se, }\; (y_1,y_2) - (x_1,x_2) \in P_2,$$

então, pelo Corolário 1.1 e pela topologia do $\mathbb{R}^2$, temos que o cone positivo $P_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (0,0) \leq (x_1,x_2)\}$ é fechado e o cone positivo $P_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (0,0) \overset{\sim}{\leq} (x_1,x_2)\}$ não é fechado.

Note que, pela Proposição 1.3, o Exemplo 1.6 nos diz que um cone em um espaço de Banach pode ou não ser fechado. Estamos particularmente interessados no primeiro caso. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.10. ***(Espaço de Banach Ordenado-E.B.O.)*** *Sejam E um espaço de Banach e $P \subset E$ um cone positivo. Denotaremos por (E,P) o espaço de Banach E com ordem induzida pelo cone P. Diremos que (E,P) é um* ***Espaço de Banach Ordenado-E.B.O.****, quando o cone positivo P for fechado.*

Exemplo 1.7. *$(\mathbb{R}^2,P_1)$ não é E.B.O, mas $(\mathbb{R}^2,P_2)$ é E.B.O.*

Definiremos a seguir o que se entende por retrato de um espaço de Banach.

Definição 1.11. ***(Retrato)*** *Um subconjunto não vazio A de um espaço métrico X é chamado retrato de X quando existe uma aplicação contínua $R : X \to A$ tal que $R\big|_A = I\big|_A$. Em outras palavras, A* ***é retrato de*** *X se a identidade em A admite uma extensão contínua em X. Nesse caso, a aplicação contínua $R : X \to A$ recebe o nome de* ***retração de*** *X* ***em*** *A.*

Observação 1.3. Amann [3] afirma que a Definição 1.11 pode ser generalizada para o caso em que X é um espaço topológico.

Exemplo 1.8. *$A = [0,1]$ é retrato de $X = \mathbb{R}$, pois a aplicação $R : X \to A$ dado por*

$$R(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in (-\infty, 0], \\ x & se \quad x \in [0,1] = A, \\ \dfrac{1}{x} & se \quad x \in (1, +\infty), \end{cases}$$

é contínua e tal que $R\big|_A = I\big|_A$. Portanto, R é retração de X em A. Note que, se substituímos x^2 por x^3 obtemos uma nova retração. Logo, a retração de X em A não é única.

Exemplo 1.9. *Seja X um espaço métrico. Então o fecho da bola unitária $\overline{B_1(0)}$ é um retrato de X. A retração de X em $\overline{B_1(0)}$ é dada pela aplicação $R : X \to \overline{B_1(0)}$ definida por*

$$R(x) = \begin{cases} x, & se \quad \|x\| \leq 1, \\ \dfrac{x}{\|x\|} & se \quad \|x\| > 1. \end{cases}$$

Amman [2] comenta que essa aplicação é chamada de retração radial.

Exemplo 1.10. *Dugundji [11] provou que a esfera unitária $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ é um retrato de E, se $\dim E = +\infty$.*

Por outro lado, se o espaço for de dimensão finita, o grau de Brouwer (ver Apêndice B.2) nos permite obter o seguinte resultado:

Exemplo 1.11. *Vendo o conjunto $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ como espaço métrico, temos que $\partial B_1(0)$ não é um retrato de $\overline{B_1(0)}$. Isto é, não existe aplicação contínua $R : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$ tal que $R(x) = x$, para todo $x \in \partial B_1(0)$.*

Demonstração. Suponha que exista uma aplicação contínua $R : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$ tal que $R(x) = x$, para todo $x \in \partial B_1(0)$. Defina a aplicação $g : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ dada por $g(x) = -R(x)$. Claramente g é contínua e $\overline{B_1(0)}$ é um compacto convexo não vazio. Logo, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer (ver Apêndice B.2), g tem ponto fixo. Isto é, existe $x_0 \in \overline{B_1(0)}$ tal que $x_0 = g(x_0)$. Como $g(x) = -R(x)$, temos que $x_0 = -R(x_0)$, ou ainda, $R(x_0) = -x_0$. Como $Im(R) \subset \partial B_1(0)$, temos que $-x_0 \in \partial B_1(0)$. Logo, temos que $\|x_0\| = \|-x_0\| = 1$, ou seja, $x_0 \in \partial B_1(0)$. Daí, $R(x_0) = x_0$, pois R é retração. Segue então que, $x_0 = g(x_0) = -R(x_0) = -x_0$. Portanto, $x_0 = 0$. Contradição, pois $x_0 \in \partial B_1(0)$. □

Em verdade, Deimling [10] demonstra que o Exemplo 1.11 é equivalente ao teorema do ponto fixo de Brouwer (ver Apêndice B.2) para bola unitária.

Proposição 1.4. *Sejam A um subconjunto não vazio de um espaço métrico X. Se A é retrato de X então A é um subconjunto fechado em X.*

Demonstração. Sejam $R : X \to A$ um retrato de X em A e $y_n \in A$ uma sequência tal que $R(y_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pela continuidade de R, segue que

$$y = \lim y_n = \lim R(y_n) = R(\lim y_n) = Ry.$$

Logo, $y \in Im(R) = A$. Portanto, A é um subconjunto fechado em X. $\square$

Proposição 1.5. *Todo subconjunto fechado convexo não vazio de um espaço de Banach E é um retrato de E.*

Demonstração. Seja K um subconjunto fechado convexo não vazio de um espaço de Banach E. Faremos uso do Teorema de Extensão Contínua de Aplicação Contínua (Apêndice 1.2) pondo $A = K, Y = X$ e $F = I\big|_K$. Daí, segue que $F = I\big|_K$ tem uma extensão contínua $\tilde{F} : X \to X$ tal que $\tilde{F}(X) \subset conv(I(K))$. Daí, $\tilde{F}(X) \subset conv(K)$. Como K é convexo, segue que $K = conv(K)$. Logo, $\tilde{F}(X) \subset K$. Ou seja, existe uma aplicação $\tilde{F} : X \to K$ tal que $\tilde{F}\big|_K = I\big|_K$, isto é, $\tilde{F}(x) = x$ para todo $x \in K$. Portanto K é retrato de E. $\square$

Como já sabemos que o cone positivo é conexo e, por definição, é fechado em espaços de Banach ordenado, segue o seguinte corolário da Proposição 1.5.

Corolário 1.2. *O cone positivo de um espaço de Banach ordenado (E,P) é um retrato de E.*

Assim como no início desta subseção, frisamos novamente a importância do Corolário 1.2 para o desenvolvimento da teoria de Índice de Ponto Fixo em cones, já que tal teoria é apenas aplicada em uma classe de conjuntos chamada de retratos de espaço de Banach.

1.2 Grau Topológico de Leray-Schauder

Nesta seção, iremos fazer uma breve revisão do grau Topológico de Leray-Schauder. Os pioneiros na construção de uma Teoria do grau para operadores atuando em subconjuntos abertos U limitados de espaços de Banach E com dimensão infinita foram os matemáticos Jean Leray (1906–1998) e Juliusz Schauder (1906 – 1998), que juntos publicaram esse importante resultado em 1934, (veja [18]). Desde então o grau de Leray-Schauder, como passou a ser chamado, vem sendo estudado amplamente e citado por importantes autores como Deimling [10] e outros.

Em resumo, Jean Leray e Juliusz Schauder estenderam as propriedades que definem o grau de Brouwer para aplicações definidas em espaço de dimensão infinita. Para isso, os autores construíram um novo grau para uma classe restrita de aplicações definidas em espaços de dimensão infinita, no caso, considerando apenas pertubações compactas da identidade. Ou seja, consideraram apenas operadores da forma $I-K:\overline{U}\to E$, onde I é a identidade, K é um operador compacto e U é um subconjunto aberto limitado de um Espaço de Banach real E.

O primeiro passo foi considerar o operador $I-T$, onde $T:\overline{U}\to E$ é um operador tal que $Im(T)\subset Y$, sendo Y um subespaço de dimensão finita de E, ou seja, T tem posto finito. A partir daí, os autores definem o grau de Leray-Schauder de $I-T$ como o grau de Brouwer de $I-T$ restrito a $\overline{U}\cap Y$. Depois disso, mostraram que qualquer perturbação compacta da identidade $I-K$ pode ser aproximada por um perturbação da identidade $I-T$, onde T é um operador com posto finito. Por fim, definiram o grau de Leray-Schauder de $I-K$ como o grau de $I-T$.

Enunciaremos a seguir o grau de Leray-Schauder como discutido acima de maneira formal e, em seguida, algumas de suas propriedades. Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 1.12. ***(Terna Admissível para o grau de Leray-Schauder)*** *Sejam U um subconjunto não vazio do espaço de Banach E e uma aplicação $K:\overline{U}\to E$. Dizemos que a terna $(I-K,U,y)$ é admissível para o grau de Leray-Schauder se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(L_1) $U\subset E$ é um aberto de E;

(L_2) $K:\overline{U}\to E$ é uma aplicação contínua e compacta;

(L_3) $y\notin(I-K)(\partial U)$.

Assim, para a terna admissível $(I-K,U,y)$, busca-se definir uma aplicação deg com valores em $\mathbb{Z}$, que satisfaça as seguintes propriedades:

(D1) **(Normalização)** $\deg(I,U,y)=1$, para todo $y\in U$;

(D2) **(Aditividade)** $\deg(I-K,U,y)=\deg(I-K,U_1,y)+\deg(I-K,U_2,y)$, onde U_1 e U_2 subconjuntos disjunto de U tais que $y\notin(I-K)(\overline{U}/(U_1\cup U_2))$;

(D3) **(Invariância Por Homotopia)** $\deg(I-H(t,\cdot),U,\lambda(t))$ independe de $t\in[0,1]$ sempre que $H:[0,1]\times\overline{U}\to E$ é contínua e compacto, $\lambda:[0,1]\to E$ é contínua e $\lambda(t)\notin(I-H(t,\cdot))(\partial U)$ para todo $t\in[0,1]$.

Tais propriedades são análogas as propriedades usadas para definir o grau de Brouwer (ver Apêndice B). A existência e unicidade do grau de Leray-Schauder seguem do seguinte teorema:

Teorema 1.3. ***(O grau de Leray-Schauder)*** *Sejam E um espaço de Banach real e o conjunto*

$$M = \{(I-K,U,y) \mid (I-K,U,y) \text{ é terna admissível para o grau de Leray-Schauder}\}.$$

Então existe uma única função $\deg : M \to \mathbb{Z}$*, o grau de Leray-Schauder, satisfazendo (D1)-(D3).*

Demonstração. Ver [10, Theorem 8.1]. □

Além da referência acima, temos que a existência e unicidade do grau de Leray-Schauder, é amplamente discutido em Amann [2], Amman e Weiss [4], Ambrosetti [5] e dentre outros. Seguem mais algumas propriedades importantes do grau de Leray-Schauder.

Teorema 1.4. ***(Propriedades do grau de Leray-Schauder)*** *Além das propriedades (D1)-(D3), o grau de Leray-Schauder satisfaz as seguintes propriedades:*

(D4) ***(Existência de Solução)*** $\deg(I-K,U,y) \neq 0$ *implica que* $(I-K)^{-1}(y) \neq 0$*;*

(D5) ***(Constante em Componente Conexa)*** $\deg(I-G,U,y) = \deg(I-K,U,y)$*, para* $G \in \mathcal{K}(\overline{U}) \cup B_r(K)$ *e* $\deg(I-K,U,\cdot)$ *é constante em* $B_r(y)$*, onde* $r = dist(y,(I-K)(\partial U))$*. Mais ainda:* $\deg(I-K,U,\cdot)$ *é constante em toda componente conexa de* $E/(I-K)(\partial U)$*;*

(D6) ***(Dependência da Fronteira)*** $\deg(I-G,U,y) = \deg(I-K,U,y)$ *sempre que* $G\big|_{\partial U} = K\big|_{\partial U}$*;*

(D7) ***(Excisão)*** $\deg(I-K,U,y) = \deg(I-K,U_1,y)$*, para todo subconjunto* U_1 *de* U *tal que* $y \notin (I-K)(\overline{U} \backslash U_1)$*;*

(D8) ***(Invariância por Translação)*** $\deg(I-K,U,y) = \deg(I-K-y,U,0)$.

Deimling [10] afirma que as propriedades (D1)-(D7) são herdadas do grau de Brouwer (ver Apêndice B). Em Kesavan [17, Chapter III] encontram-se as demonstrações destes e outros resultados envolvendo o grau Leray-Schauder. '. Segue a demonstração da propriedade (D8).

Demonstração. Primeiramente, considere as aplicações $\lambda : [0,1] \to E$ e $H : [0,1] \times \overline{U} \to E$ dadas por $\lambda(t) = (1-t)y$ e $H(t,x) = K(x) + ty$. Como K é uma aplicação contínua e compacta, então H é uma aplicação contínua e compacta. Claramente, $\lambda(t)$ é contínua.

Perceba que $\lambda(t) \notin (I - H(t,\cdot))(\partial U)$, para todo $t \in [0,1]$. Caso contrário, existiria $t_0 \in [0,1]$ tal que $x - H(t_0,x) = \lambda(t_0)$, para algum $x \in \partial U$. Daí,

$$\begin{aligned} x - H(t_0,x) &= \lambda(t_0) \\ x - K(x) - t_0 y &= (1-t_0)y \\ x - K(x) &= y. \end{aligned}$$

Logo, $y \in (I-K)(\partial U)$. Contradição, pois $(I-K,U,y)$ é terna admissível para o grau de Leray-Schauder.

Como $H(0,x) = K(x)$ e $H(1,x) = K(x) + y$, segue que H é uma homotopia entre a aplicação K e a aplicação $K + ty$. Assim, pela propriedade (D3), temos que

$$\deg(I - H(0,\cdot),U,\lambda(0)) = \deg(I - H(1,\cdot),U,\lambda(1)). \tag{1.17}$$

Portanto, por (1.17), temos que

$$\begin{aligned} \deg(I-K,U,y) &= \deg(I - H(0,\cdot),U,\lambda(0)) \\ &= \deg(I - H(1,\cdot),U,\lambda(1)) \\ &= \deg(I - (K+y),U,0) \\ &= \deg(I - K - y,U,0). \end{aligned}$$

□

1.3 Índice de Ponto Fixo

O objetivo desta seção é definir o Índice de Ponto Fixo e suas principais propriedades. Mostraremos que o índice é calculado, de um certo modo, em termos do grau Topológico de Leray-Schauder. Assim, o Índice de Ponto Fixo não somente existirá como será único (propriedades herdadas do grau de Leray- Schauder).

É importante mencionar que as definições e resultados desta seção foram baseados no artigo de Amann [3]. Além disso, quando mencionarmos alguns conceitos topológicos (fecho, fronteira, etc.), sempre consideraremos a topologia relativa. E para uma dada aplicação $g : A \to A$, denotaremos por $\mathrm{Fix}(g)$ o conjunto dos pontos fixos de g, isto é,

$$\mathrm{Fix}(g) := \{x \in A : g(x) = x\}.$$

Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 1.13. ***(Terna Admissível para o Índice de Ponto Fixo)*** *Sejam X um subconjunto não vazio de um espaço de Banach E, $U \subset X$ um aberto e uma aplicação $f : \overline{U} \to X$. Diremos que a terna (f,U,X) é admissível para o Índice de Ponto Fixo, se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(P_1) X é retrato de E;

(P_2) U é um aberto limitado de X;

(P_3) $f : \overline{U} \to X$ é uma aplicação contínua e compacta;

(P_4) $Fix(f) \cap \partial U = \emptyset$.

Perceba que a condição (P_4) é equivalente a condição:

(P_4^*) $0 \notin (I - f)(\partial U)$.

Pois,

$$\begin{aligned} 0 \in (I-f)\,(\partial U) &\Leftrightarrow x - f(x) = 0, \text{ para algum } \ x \in \partial U \\ &\Leftrightarrow x = f(x), \text{ para algum } \ x \in \partial U \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Fix}(f) \cap \partial U \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Fix}(f) \cap \partial U \neq \emptyset. \end{aligned} \tag{1.18}$$

A proposição a seguir estabelece uma relação muito importante entre a definição de terna admissível para o Índice de Ponto Fixo e a definição de terna admissível para o grau de Leray-Schauder.

Proposição 1.6. *Se a terna (f,U,X) é admissível para o Índice de Ponto Fixo então a terna $(I - f \circ r|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0)$ é admissível para o grau de Leray-Schauder, onde r é uma retração de E em X.*

Demonstração. Queremos mostrar que:

(L_1) $r^{-1}(U) \subset E$ é um aberto de E;

(L_2) $f \circ r : \overline{r^{-1}(U)} \to X$ é uma aplicação contínua e compacta;

(L_3) $0 \notin (I - f \circ r)(\partial r^{-1}(U))$.

(L_1) é imediato, pois U é aberto de X e r é aplicação contínua. Para demonstrar (L_2), primeiramente note que a aplicação composta $f \circ r : \overline{r^{-1}(U)} \subset E \to X$ está bem definida. De fato, como $\overline{U}$ é fechado e r é contínua então $r^{-1}(\overline{U})$ é fechado. Assim, $r^{-1}\left(\overline{U}\right) = \overline{r^{-1}\left(\overline{U}\right)}$. Daí segue que,

$$\begin{aligned} U \subset \overline{U} &\Rightarrow r^{-1}(U) \subset r^{-1}(\overline{U}) \\ &\Rightarrow \overline{r^{-1}(U)} \subset \overline{r^{-1}(\overline{U})} = r^{-1}(\overline{U}) \\ &\Rightarrow \overline{r^{-1}(U)} \subset r^{-1}(\overline{U}) \\ &\Rightarrow r(\overline{r^{-1}(U)}) \subset r(r^{-1}(\overline{U})) = \overline{U}. \end{aligned}$$

Logo,

$$r\left(\overline{r^{-1}(U)}\right) \subset \overline{U}. \tag{1.19}$$

Com isso, $f \circ r$ está bem definido. Portanto, $f \circ r$ é compacta e contínua, pois r é contínua e f é compacta e contínua.

Para demonstrar o item (L_3), suponha que exista $x \in \partial(r^{-1}(U))$ tal que $f(r(x)) = x$. Daí, $x \in Im(f) \subset X$, logo $r(x) = x$. Assim, $f(x) = f(r(x)) = x$. Ou seja, $x \in \text{Fix}(f)$. De $x \in \partial(r^{-1}(U))$, existem sequências $x_n \in r^{-1}(U)$ e $y_n \in E \backslash r^{-1}(U)$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to x$. Portanto, $r(x_n) \in U$ e $r(y_n) \notin U$, isto é, $r(x_n) \in U$ e $r(y_n) \in E \backslash U$. Por continuidade de r, segue que, $r(x_n), r(y_n) \to r(x) = x$. Logo, $x \in \partial U$. Assim, temos que $x \in \text{Fix}(f) \cup \partial U$. Mas isso contradiz o fato de (f,U,X) ser terna admissível para o Índice de Ponto Fixo. Portanto, o resultado segue.

□

O próximo resultado é o mais importante desta seção pois não somente garante a existência e unicidade do Índice de Ponto Fixo como, através de sua demonstração, nos fornece um meio de computa-lo usando o grau de Leray-Schauder. Aqui, seguimos Amann (ver [3, Theorem 11.1]).

Teorema 1.5. ***(O Índice de Ponto Fixo)*** *Seja (f,U,X) uma terna admissível para o Índice de Ponto Fixo. Então existe um numero inteiro* $\mathrm{i}(f,U,X)$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) ***(Normalização)*** *Se $k \in U$, então a aplicação constante $f : \overline{U} \to U$ dada por $f(x) = k$ verifica $i(f,U,X) = 1$;*

(ii) ***(Aditividade)*** *Dados $U_1, U_2 \subset U$ abertos disjuntos tais que Fix$(f) \cap \left(\overline{U} \backslash (U_1 \cup U_2)\right) = \emptyset$, tem-se que*

$$i(f,U,X) = i(f,U_1,X) + i(f,U_2,X),$$

onde $i(f,U_k,X) := i\left(f|_{\overline{U_k}},U_k,X\right)$, $k = 1,2$;

(iii) ***(Invariância por Homotopia)*** *Para todo intervalo compacto* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *e para toda aplicação compacta e contínua* $h : \Lambda \times \overline{U} \to X$ *tal que*

$$h(\lambda,x) \neq x, \;\; \forall(\lambda,x) \in \Lambda \times \partial U,$$

tem-se que, $i\,(h(\lambda,\cdot),U,X)$ *está bem definida e independe de* $\lambda \in \Lambda$;

(iv) ***(Permanência)*** *Se* Y *é retrato de* X *e* $f(\overline{U}) \subset Y$, *então*

$$i(f,U,X) = i(f,U\cap Y,Y),$$

onde $i(f,U\cap Y,Y) = i\left(f|_{\overline{U\cap Y}},U\cap Y,Y\right)$

Além disso, a família de inteiros

$$\left\{i(f,U,X) \mid (f,U,X) \text{ é terna admissível para o Índice de Ponto Fixo}\right\}$$

é unicamente determinada pelas propriedades $(i)-(iv)$. *Chamamos o número* $i(f,U,X)$ *de* ***Índice de Ponto Fixo de*** f ***sobre*** U ***com relação ao retrato*** X.

Dividiremos a demonstração deste teorema em etapas. Primeiramente, mostraremos a unicidade. Para isso, considere a família de inteiros $\{i(f,U,X)\}$ que satisfazem (i)-(iv), onde (f,U,X) é uma terna admissível para o Índice de Ponto Fixo. Assim, seguiremos as etapas:
Etapa 1: Mostrar a unicidade do Índice de Ponto Fixo para o caso em que $X = E$;
Etapa 2: Mostrar a unicidade do Índice de Ponto Fixo para o caso em que X é um retrato qualquer de E;

Ao final da Etapa 2, será possível definir uma expressão para o cálculo de $i(f,U,X)$ em função do grau Topológico de Leray-Schauder e de uma retração. Para concluir a demonstração, a próxima fase será mostrar existência. Para isso, devemos mostrar que tal expressão está bem definida, isto é, que independe da escolha da retração. Além disso, devemos verificar que de fato valem as propriedades (i)-(iv). Assim, as próximas etapas são as seguintes:
Etapa 3: Mostrar que a definição de $i(f,U,X)$, obtido na Etapa 2, está bem definida;
Etapa 4: Mostrar que $i(f,U,X)$ verifica (i)-(iv).

Demonstração. Vamos começar pela Etapa 1. Suponha que $X = E$ então $(f,U,X) = (f,U,E)$. Por hipótese, (f,U,E) é terna admissíveis para o Índice de Ponto Fixo, isto é, satisfaz as propriedades:

(P_1) E é retrato de E;

(P_2) $U \subset E$ é aberto limitado;

(P_3) $f : \overline{U} \to X$ é contínua e compacta;

(P_4) $\text{Fix}(f) \cap \partial U = \emptyset$.

Recorde que (P_2), (P_3) e (P_4) são exatamente as propriedades (L_1), (L_2) e (L_3) que caracterizam a terna $(I - f, U, 0)$ como sendo admissível para o grau de Leray-Schauder. Sendo assim, por unicidade do grau de Leray-Schauder (ver Teorema 1.3) segue que

$$i(f,U,E) = \deg(I - f, U, 0). \tag{1.20}$$

Para demonstrar a etapa 2, considere $r : E \to X$ uma retração, isto é, r é uma aplicação contínua tal que $r\big|_X = I\big|_X$. Primeiramente, note que $(f \circ r, r^{-1}(U), E)$ é terna admissível para o Índice de Ponto Fixo, pois:

- $r : E \to X$ é uma retração;
- $r^{-1}(U)$ é aberto, pois U é aberto de X e r é uma aplicação contínua;
- $f \circ r : \overline{r^{-1}(U)} \subset E \to X$ é uma aplicação contínua e compacta. De fato, pois tal afirmação segue exatamente igual a que foi feito demonstração da Proposição 1.6.
- $Fix(f \circ r) \cap \partial(r^{-1}(U)) = \emptyset$. De fato, por (1.18), basta mostrar que $0 \in Fix(I - f \circ r)\left(\partial r^{-1}(U)\right)$. Segue exatamente igual ao que foi feito na demonstração da Proposição 1.6.

Mais ainda, como é imediato que $f\left(r\left(\overline{r^{-1}(U)}\right)\right) \subset X$, podemos aplicar a propriedade (iv), Permanência do Índice de Ponto Fixo. Logo,

$$i(f \circ r, r^{-1}(U), E) = i\left(f \circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U) \cap X}}, r^{-1}(U) \cap X, X\right). \tag{1.21}$$

Agora note que $r^{-1}(U) \cap X = U$. Pois,

$$\begin{aligned} x \in r^{-1}(U) \cap X &\Longleftrightarrow x \in r^{-1}(U) \ \text{ e } x \in X \\ &\Longleftrightarrow r(x) \in U \ \text{ e } x \in X \\ &\Longleftrightarrow x \in U, \ \text{pois } r(x) = x \text{ quando } \ x \in X. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$f \circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U)\cap X}} = f \circ r\big|_{\overline{U}}. \tag{1.22}$$

Além disso, para todo $x \in \overline{U} \subset X$, temos que $(f \circ r)(x) = f(r(x)) = f(x)$, pois $r\big|_X = I\big|_X$. Logo, temos que

$$f \circ r\big|_{\overline{U}} = f. \tag{1.23}$$

Assim, usando (1.22) e (1.23), temos que (1.21) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} i(f \circ r, r^{-1}(U), E) &= i\left(f \circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U)\cap X}}, r^{-1}(U) \cap X, X\right) \\ &= i\left(f \circ r\big|_{\overline{U}}, U, X\right) \\ &= i(f, U, X). \end{aligned}$$

Logo,

$$i(f \circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), E) = i(f, U, X). \tag{1.24}$$

Pela Etapa 1, o Índice de Ponto Fixo de $f \circ r$ sobre $r^{-1}(U)$ com relação a E, $i(f \circ r, r^{-1}(U), E)$, é unicamente calculado em termos de grau de Leray-Schauder como em (1.20) isto é,

$$i(f \circ r, r^{-1}(U), E) = \deg(I - f \circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0). \tag{1.25}$$

Assim, por (1.24) e (1.25), temos que

$$i(f, U, X) = i(f \circ r, r^{-1}(U), E) = \deg(I - f \circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0). \tag{1.26}$$

Portanto, por (1.26), a unicidade do Índice do Ponto Fixo de f sobre U com relação a X segue.

A unicidade acima induz a seguinte definição:

$$i(f, U, X) := \deg(I - f \circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0), \tag{1.27}$$

onde $r : E \to X$ é uma retração arbitrária de E em X.

Como mencionado anteriormente, para mostrar a existência, a próxima etapa é mostrar que a definição acima é uma boa definição. Isto é, devemos mostrar que $i(f, U, X)$ é invariante por retração. Para isso, considere $r_0, r_1 : E \to X$ duas retrações distintas. Queremos mostrar que

$$\deg\left(I - f\circ r_0\big|_{\overline{r_0^{-1}(U)}}, r_0^{-1}(U), 0\right) = \deg\left(I - f\circ r_1\big|_{\overline{r_1^{-1}(U)}}, r_1^{-1}(U), 0\right). \tag{1.28}$$

Primeiramente, para $i = 0,1$, note que $I - f\circ r_i : \overline{r_i^{-1}(U)} \to X$ é contínua e compacta, pois f é contínua e compacta e r_i é contínua. Agora, denote por V o subconjunto de E dado por

$$V := r_0^{-1}(U)\cap r_1^{-1}(U).$$

Claramente, para $i = 0$ ou $i = 1$, $V \subset r_i^{-1}(U)$. Além disso, como U é aberto de X então, por continuidade, $r_i^{-1}(U)$ também é aberto de E. Logo, V é aberto de $r_i^{-1}(U)$ pois V é interseção de abertos de E. Mais ainda, temos que $0 \notin (I - f\circ r_i)\left(\overline{r_i^{-1}(U)}\backslash V\right)$, com $i = 0,1$. Caso contrário, fixando $i = 0$, existiria $x \in \overline{r_0^{-1}(U)}\backslash V$ tal que $f(r_0(x)) = x$. Como f é uma aplicação de $\overline{U}$ em X, segue que $x = f(r_0(x)) \in X$. E como $r_0\big|_X = I\big|_X$, segue que $x = f(r_0(x)) = f(x)$, isto é, $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Por outro lado, como $x \in \overline{r_0^{-1}(U)}\backslash V$ temos que $x \in \overline{r_i^{-1}(U)}$ e $x \notin V = r_0^{-1}(U)\cap r_1^{-1}(U)$. De $x \in \overline{r_0^{-1}(U)}$, temos que existe uma sequência $x_n \in\ r_0^{-1}(U)$ tal que $x_n \to x$. Como $x_n \in r_0^{-1}(U)$, segue que a sequência $r_0(x_n) \in U$. Por continuidade de r_0, temos que se $x_n \to x$ então $r_0(x_n) \to r_0(x) = x$. Como $r_0(x_n) \in U$ então $x \in \overline{U}$. De $x \notin r_0^{-1}(U)\cap r_1^{-1}(U)$, temos que $r_0(x) \notin U$ ou $r_1(x) \notin U$. Daí, $x \notin U$, caso contrário, como $U \subset X$ segue que $r_0(x) = r_1(x) = x$, contradição. Logo, temos que $x \in \overline{U}$ e $x \notin U$, isto é, $x \in \partial U$. Assim, temos que $x \in \mathrm{Fix}(f)\cap\partial U$. Contradizendo o fato da terna (f,U,X) ser admissível para o Índice do Ponto Fixo. O caso $i = 1$ segue análogo.

Em resumo, para $i = 0,1$, temos que:

- V é aberto de $r_i^{-1}(U)$;
- $I - f\circ r_i : \overline{r_i^{-1}(U)} \to X$ é uma aplicação contínua e compacta;
- $0 \notin (I - f\circ r_i)\left(\overline{r_i^{-1}(U)}\backslash V\right)$.

Logo, podemos aplicar a propriedade (D7), Excisão do grau de Leray-Schauder, e obter

$$\deg\left(I - f\circ r_i\big|_{\overline{r_i^{-1}(U)}}, r_0^{-1}(U), 0\right) = \deg\left(I - f\circ r_i\big|_{\overline{V}}, V, 0\right),\ \ i = 0,1. \tag{1.29}$$

Defina agora a aplicação $h : [0,1]\times\overline{V} \to X$ dada por

$$h(\lambda,x) = r_0\left[(1-\lambda)f(r_0(x)) + \lambda f(r_1(x))\right].$$

Note que h é contínua e compacta, pois $f \circ r_i$ é contínua e compacta. Assim, h está bem definida, pois $(1-\lambda)f(r_0(x)) + \lambda f(r_1(x)) \in E$ e $Im(h) \subset Im(r_i) = X$. Além disso, como $Im(f) \subset X$, temos que $f(r_i(x)) \in X$. Logo, $r_0(f(r_i(x))) = f(r_i(x))$, pois r_0 é uma retração. Daí, temos que h é uma homotopia entre $f(r_0(x))$ e $f(r_1(x))$, pois

$$\begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow h(0,x) = r_0(f(r_0(x))) = f(r_0(x)), \\ \lambda = 1 \Rightarrow h(1,x) = r_0(f(r_1(x))) = f(r_1(x)). \end{cases}$$

Mais ainda, para todo $\lambda \in [0,1]$ e para todo $x \in \partial V$, temos que $x - h(x,\lambda) \neq 0$. Caso contrário, existiriam $\bar{x} \in \partial V$ e $\overline{\lambda} \in [0,1]$, tais que $\bar{x} - h(\bar{x},\overline{\lambda}) = 0$. Isto é, $\bar{x} = h(\bar{x},\overline{\lambda}) \in X$. Logo, $r_0(\bar{x}) = r_1(\bar{x}) = \bar{x}$. Como $f(\bar{x}) \in X$, também temos que $r_0(f(\bar{x})) = f(\bar{x})$. Daí,

$$\begin{aligned} \bar{x} - h(\bar{x},\overline{\lambda}) &= 0 \\ \bar{x} - r_0\left[(1-\overline{\lambda})f(r_0(\bar{x})) + \overline{\lambda} f(r_1(\bar{x}))\right] &= 0 \\ \bar{x} - r_0\left[(1-\overline{\lambda})f(\bar{x}) + \overline{\lambda} f(\bar{x})\right] &= 0 \\ \bar{x} - r_0\left[f(\bar{x}) - \overline{\lambda} f(\bar{x}) + \overline{\lambda} f(\bar{x})\right] &= 0 \\ \bar{x} - r_0\left(f(\bar{x})\right) &= 0 \\ \bar{x} - f(\bar{x}) &= 0. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Novamente, como $r_0(\bar{x}) = r_1(\bar{x}) = \bar{x}$, podemos reescrever (1.30) de duas maneiras:

$$\begin{cases} \bar{x} - f(r_0(\bar{x})) = 0 \\ \bar{x} - f(r_1(\bar{x})) = 0. \end{cases}$$

Ou seja, $\bar{x} \in \mathrm{Fix}(f \circ r_0)$ e $\bar{x} \in \mathrm{Fix}(f \circ r_1)$. Por outro lado, de $\bar{x} \in \partial V = \partial\left(r_0^{-1}(U) \cap r_1^{-1}(U)\right)$ temos que $\bar{x} \in \partial r_0^{-1}(U) \cup \partial r_1^{-1}(U)$, pois $\partial\left(r_0^{-1}(U) \cap r_1^{-1}(U)\right) \subset \partial r_0^{-1}(U) \cup \partial r_1^{-1}(U)$. Daí, temos que $\bar{x} \in \mathrm{Fix}(f \circ r_0) \cap \partial r_0^{-1}(U)$ ou $\bar{x} \in \mathrm{Fix}(f \circ r_1) \cap \partial r^{-1}(U)$. Assim, $(I - f \circ r_0, r_0^{-1}(U), X)$ ou $(I - f \circ r_1, r_1^{-1}(U), X)$ não são ternas admissíveis para o grau de Leray-Schauder. Pela contra positiva da Proposição 1.6, temos que a (f,U,X) não é admissíveis para o Índice de Ponto Fixo. Contradição.

Em resumo, temos que:

- V é aberto de $r_i^{-1}(U)$, logo é aberto de X;
- $h : [0,1] \times \overline{V} \to X$ é aplicação contínua e compacta;
- $x - h(x,\lambda) \neq 0, \forall \lambda \in [0,1]$, $x \in \partial V$.

Logo, podemos aplicar a propriedade (D3), invariância por homotopia do grau de Leray-Schauder, e obter

$$\deg\left(I - f\circ r_0|_{\overline{V}}, V, 0\right) = \deg\left(I - f\circ r_1|_{\overline{V}}, V, 0\right). \tag{1.31}$$

Com isso, temos que (1.28) se verifica combinando (1.29) e (1.31), do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\deg\left(I - f\circ r_0|_{\overline{r_0^{-1}(U)}}, r_0^{-1}(U), 0\right) &= \deg\left(I - f\circ r_0|_{\overline{V}}, V, 0\right)\\ &= \deg\left(I - f\circ r_1|_{\overline{V}}, V, 0\right)\\ &= \deg\left(I - f\circ r_1|_{\overline{r_1^{-1}(U)}}, r_1^{-1}(U), 0\right).\end{aligned}$$

Portanto, o índice $i(f,U,X)$ independe da retração.

Finalmente, vamos a ultima etapa da demonstração do Teorema 1.27. Isto é, devemos mostrar que

$$i(f,U,X) := \deg(I - f\circ r|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0)$$

satisfaz as propriedade (i)-(iv) do Índice de Ponto Fixo.

(i) **(Normalização)** Para toda aplicação constante $f : \overline{U} \to U$, devemos mostrar que $i(f,U,X) = 1$.

Seja $r : E \to X$ um retração e considere a aplicação $f\circ r : \overline{r^{-1}(U)} \to U$. Pela propriedade (D8), invariância por translação grau de Leray-Schauder com $K \equiv 0$ e $y = k$, temos que,

$$\deg(I|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), k) = \deg(I - k|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0). \tag{1.32}$$

Por hipótese, f é constante, logo seja $f(r(x)) = k$, para todo $x \in \overline{r^{-1}(U)}$. Claramente $k \in U$, pois $Im(f\circ r) \subset U$. Daí, como r é retração e $U \subset X$, segue que $r(k) = k$. Logo, $r(k) \in U$, isto é, $k \in r^{-1}(U)$. Pela propriedade (D1), normalização do grau de Leray-Schauder, temos que

$$\deg(I|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), k) = 1. \tag{1.33}$$

Portanto, por (1.27), $f \circ r$ constante, (1.32) e (1.33), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} i(f,U,X) &= \deg(I - f \circ r|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0) \\ &= \deg(I - k|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0) \\ &= \deg(I|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), k) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii) **(Aditividade)** Queremos mostrar que para todo par de subconjuntos U_1, U_2 de U tal que $\mathrm{Fix}(f) \cap (\overline{U} \backslash U_1 \cup U_2) = \emptyset$ tem-se que

$$i(f,U,X) = i(f|_{\overline{U_1}}, U_1, X) + i(f|_{\overline{U_2}}, U_2, X).$$

Primeiramente, note que para qualquer retrato r de E em X, tem-se que $r^{-1}(U_1), r^{-1}(U_2)$ são subconjuntos abertos de $r^{-1}(U)$, pois U_1, U_2 são abertos de X e r é uma aplicação contínua. Além disso, temos que $r^{-1}(U_1) \cap r^{-1}(U_2) = \emptyset$. Caso contrário, existiria $x \in E$ tal que $x \in r^{-1}(U_1)$ e $x \in r^{-1}(U_2)$. Logo $r(x) \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, contradizendo a hipótese de U_1 e U_2 serem disjuntos.

Agora, note que $0 \notin (I - f \circ r)(\overline{r^{-1}(U)} \backslash r^{-1}(U_1) \cup r^{-1}(U_2))$. Caso contrário, existiria $x \in \overline{r^{-1}(U)} \backslash r^{-1}(U_1) \cup r^{-1}(U_2)$ tal que $f(r(x)) = x$. Como f é uma aplicação de $\overline{U}$ em X, segue que $x = f(r(x)) \in X$. Logo $r(x) = x$, pois $r|_X = I|_X$. Assim $x = f(r(x)) = f(x)$, isto é, $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Por outro lado, $x \in \overline{r^{-1}(U)}$, segue que existe sequência $y_n \in r^{-1}(U)$ tal que $y_n \to x$. Por continuidade de r, segue que $r(y_n) \to r(x) = x$. Segue que existe sequência $r(y_n) \in U$ tal que $r(y_n) \to x$. Logo $x \in \overline{U}$. De $x \notin r^{-1}(U_1) \cup r^{-1}(U_2)$ temos que $r(x) \notin U_1 \cup U_2$. Ou seja, que $x \notin U_1 \cup U_2$, pois $r(x) = x$. Dai temos que $x \in \overline{U} \backslash U_1 \cup U_2$. Logo $x \in \mathrm{Fix}(f) \cap (\overline{U} \backslash U_1 \cup U_2)$, contradizendo o enunciado de (ii).

Assim, em resumo, temos que:

- $r^{-1}(U_1), r^{-1}(U_2)$ são subconjuntos abertos disjuntos de $r^{-1}(U)$;
- $0 \notin (I - f \circ r)\left(\overline{r^{-1}(U)} \backslash \left(r^{-1}(U_1) \cup r^{-1}(U_2)\right)\right)$.

Daí, pela propriedade (D2), aditividade do grau de Larey-Schauder, temos que

$$\begin{aligned} \deg(I - f \circ r|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r(U), 0) = {} & \deg(I - f \circ r|_{\overline{r^{-1}(U_1)}}, r^{-1}(U_1), 0) \\ & + \deg(I - f \circ r|_{\overline{r^{-1}(U_2)}}, r^{-1}(U_2), 0). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Portanto, segue de (1.27) e (1.34) que

$$
\begin{aligned}
i(f,U,X) &= \deg(I - f\circ r|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r(U), 0)\\
&= \deg(I - f\circ r|_{\overline{r^{-1}(U_1)}}, r^{-1}(U_1), 0)\\
&+ \deg(I - f\circ r|_{\overline{r^{-1}(U_2)}}, r^{-1}(U_2), 0)\\
&= i(f,U_1,X) + i(f,U_2,X).
\end{aligned}
$$

Queremos mostrar que, para todo intervalo compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}$, e toda aplicação contínua e compacta $h : \Lambda \times \overline{U} \to X$ tal que

$$h(\lambda,x) \neq x,\ \forall(\lambda,x) \in \Lambda \times \partial U,$$

tem-se que

$$i\,(h(\lambda,\cdot),U,X)\,,$$

está bem definida e independe de Λ.

Começamos fixando arbitrariamente um elemento $\lambda \in \Lambda$. Por hipótese, a aplicação h é contínua e compacta, logo a aplicação projeção $h(\lambda,\cdot) : \overline{U} \to X$ também é contínua e compacta. Além disso, como $h(\lambda,x) \neq x$, para todo $x \in \partial U$, segue que $h(\lambda,\cdot)$ não tem ponto fixo em ∂U. Logo, $(h(\lambda,\cdot),U,X)$ é uma terna admissível para Índice de Ponto Fixo. Sendo assim, por (1.27), temos que

$$i(h(\lambda,\cdot),U,X) = \deg(I - h(\lambda, r(\cdot)), r^{-1}(U), 0), \tag{1.35}$$

onde r é um retrato de E em X. Como U é um aberto de X, r é contínua e $h(\lambda,\cdot)$ é contínua e compacto, segue que $r^{-1}(U)$ é aberto de E e $h(\lambda,\cdot)\circ r$ é contínua e compacto para todo $\lambda \in \Lambda$.

Além disso, temos que $0 \notin (I - h(\lambda,\cdot)\circ r)(\partial U)$, isto é, $x - h(\lambda, r(x)) \neq 0$ para todo $x \in \partial U$. Caso contrário, existiria um $\overline{x} \in \partial U$ e $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tal que $h(\overline{\lambda}, r(\overline{x})) = \overline{x}$. Por outro lado, como h é uma aplicação de $\Lambda \times \overline{U}$ em X, segue que $\overline{x} = h(\overline{\lambda}, r(\overline{x})) \in X$. Logo $r(\overline{x}) = \overline{x}$, pois $r\big|_X = I\big|_X$. Daí, temos que $h(\overline{\lambda},\overline{x}) = \overline{x}$, para $(\overline{\lambda},\overline{x}) \in \Lambda \times \partial U$. Contradição com a hipótese do enunciado.

Em resumo, fixando arbitrariamente um elemento $\lambda \in \Lambda$, temos que:

- $r^{-1}(U)$ é aberto de E;
- $h(\lambda, r(\cdot)) : \overline{r^{-1}(U)} \to X \subset E$ é aplicação contínua e compacta;

- $x - h(\lambda, r(x)) \neq 0, \ \forall x \in \partial U$.

Segue então da propriedade (D3), invariância por homotopia do grau de Leray-Schauder, que

$$\deg(I - h(\lambda, r(\cdot)), r^{-1}(U), 0),$$

está bem definido e independe de $\lambda \in \Lambda$. Portanto, por (1.35), segue que

$$i(h(\lambda, \cdot), U, X),$$

está bem definido e independe de $\lambda \in \Lambda$.

(iii) **(Permanência)** Sejam Y um retrato de X e $f\left(\overline{U}\right) \subset Y$. Além disso, sejam $r_0 : E \to X$ e $r_1 : X \to Y$ retrações.

Primeiramente, perceba que $(f\big|_{\overline{U \cap Y}}, U \cap Y, Y)$ é terna admissível para o Índice de Ponto Fixo, pois:

- Y é retrato de E;

  De fato, como $r_0 : E \to X$ e $r_1 : X \to Y$ são retrações, segue que r_0 e r_1 são aplicações contínuas. Logo, $r = r_1 \circ r_0 : E \to Y$ é uma aplicação contínua. Além disso, dado $y \in Y \subset X$, temos que $r(y) = r_1(r_0(y)) = r_1(y) = y$. isto é, $r\big|_Y = I\big|_Y$. Portanto, r é retração de E em Y.

- $U \cap Y \subset Y$ é um aberto de Y na topologia induzida por X, pois U é aberto de X e $Y \subset X$;

- A aplicação $f : \overline{U \cap Y} \to Y$ é contínua e compacta, pois é restrição de uma aplicação contínua e compacta;

- $Fix\left(f\big|_{\overline{U \cap Y}}\right) \cap \partial(U \cap Y) = \emptyset$.

  Caso contrário, existiria $x \in \partial(U \cap Y)$ tal que $f(x) = x$. Assim, $x \in Fix\left(f\big|_{\overline{U \cap Y}}\right)$. Por outro lado, $\partial(U \cap Y) \subset \partial U \cap Y$ na topologia de Y induzida por X. Daí, $x \in \partial U \cap Y$. Logo, $x \in \mathrm{Fix}(f) \cap \partial U$. Contradição, pois a terna (f, U, X) é admissível para o Índice de Ponto Fixo.

Sendo assim, por (1.27), temos que

$$i(f\big|_{\overline{U \cap Y}}, U \cap Y, Y) = \deg(I - f \circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U \cap Y)}}, r^{-1}(U \cap Y), 0), \tag{1.36}$$

onde $r : E \to Y$ é uma retração. Logo, por (1.27) e (1.36), para mostrar que $i(f,U,X) = i(f,U\cap Y,Y)$, devemos mostrar que

$$\deg\left(I - f\circ r_0\big|_{\overline{r_0^{-1}(U)}}, r_0^{-1}(U), 0\right) = \deg\left(I - f\circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U\cap Y)}}, r^{-1}(U\cap Y), 0\right). \quad (1.37)$$

Para isso, denote por V o subconjunto de E dado por $V = r_0^{-1}(U)\cap r^{-1}(U\cap Y)$. Claramente, $V\subset r_0^{-1}(U)$ e $V\subset r^{-1}(U\cap Y)$. Como U é aberto de X e $U\cap Y$ é aberto de Y então, por continuidade, $r_0^{-1}(U)$ e $r^{-1}(U\cap Y)$ são abertos de E. Daí, V é aberto de $r_0^{-1}(U)$ e aberto de $r^{-1}(U\cap Y)$, pois é intersecção de abertos de E.

Afirmamos que $0\notin (I - f\circ r_0)\left(\overline{r_0^{-1}(U)}\backslash V\right)$. Caso contrário, existiria $x\in\overline{r_0^{-1}(U)}\backslash V$ tal que $f(r_0(x)) = x$. Como f é uma aplicação de $\overline{U}$ em $Y\subset X$, segue que $x = f(r_0(x))\in Y$. E como $r_0\big|_X = I\big|_X$, segue que $x = f(r_0(x)) = f(x)\in Y$, isto é, $x\in \mathrm{Fix}(f)$. Por outro lado, de $x\in\overline{r_0^{-1}(U)}\backslash V$ temos que $x\in\overline{r_0^{-1}(U)}$ e $x\notin V = r_0^{-1}(U)\cap r^{-1}(U\cap Y)$. De $x\in\overline{r_0^{-1}(U)}$, temos que existe uma sequência $x_n\in\ r_0^{-1}(U)$ tal que $x_n\to x$. Como $x_n\in r_0^{-1}(U)$, segue que a sequência $r_0(x_n)\in U$. Por continuidade de r_0, temos que se $x_n\to x$ então $r_0(x_n)\to r_0(x) = x$. Como $r_0(x_n)\in U$ então $x\in\overline{U}$. De $x\notin r_0^{-1}(U)\cap r^{-1}(U\cap Y)$, temos que $r_0(x)\notin U$ ou $r(x)\notin (U\cap Y)$. Daí, $x\notin U$, caso contrário, $r_0(x) = x$ e então $r(x) = r_1(r_0(x)) = r_1(x)$. Como $x = f(x)\in Y$ e $r_1\big|_Y = I\big|_Y$, segue que $r(x) = r_1(r_0(x)) = r_1(x) = x\in Y$. Logo, $r_0(x)\in U$ e $r(x)\in (U\cap Y)$, contradição. Com isso, temos que $x\in\overline{U}$ e $x\notin U$, isto é, $x\in\partial U$. Portanto, $x\in\mathrm{Fix}(f)\cap\partial U$. Contradição com o fato da terna (f,U,X) ser admissível para o Índice do Ponto Fixo.

Em resumo, temos que:

- V é aberto de $r_0^{-1}(U)$;
- $I - f\circ r_0 : \overline{r_0^{-1}(U)}\to Y$ é uma aplicação contínua e compacta;
- $0\notin (I - f\circ r_0)\left(\overline{r_0^{-1}(U)}\backslash V\right)$.

Logo, podemos aplicar a propriedade (D7), excisão do grau de Leray-Schauder, e obter

$$\deg\left(I - f\circ r_0\big|_{\overline{r_0^{-1}(U)}}, r_0^{-1}(U), 0\right) = \deg\left(I - f\circ r_0\big|_{\overline{V}}, V, 0\right). \quad (1.38)$$

De modo essencialmente análogo ao que foi feito acima, em resumo, temos que:

- V é aberto de $r^{-1}(U\cap Y)$;
- $I - f\circ r : \overline{r^{-1}(U\cap Y)}\to Y$ é contínua e compacta;
- $0\notin (I - f\circ r)\left(\overline{r^{-1}(U\cap Y)}\backslash V\right)$.

Novamente, podemos aplicar a propriedade (D7), excisão do grau de Leray-Schauder, e obter

$$\deg\left(I - f\circ r\big|_{\overline{r^{-1}(U\cap Y)}}, r^{-1}(U\cap Y), 0\right) = \deg\left(I - f\circ r\big|_{\overline{V}}, V, 0\right). \tag{1.39}$$

Defina agora a aplicação $h : [0,1]\times\overline{V} \to Y$ dada por

$$h(\lambda, x) = r\left[(1-\lambda)f(r(x)) + \lambda f(r_0(x))\right].$$

Note que h é contínua e compacto, pois $f\circ r$ e $f\circ r_0$ são contínuas e compactas. h está bem definida, pois $(1-\lambda)f(r(x)) + \lambda f(r_0(x)) \in E$ e $Im(h) \subset Im(r) = Y$. Além disso, como $Im(f) \subset Y$, temos que $f(r(x)),\ f(r_0(x)) \in Y$. Logo, $r(f(r(x))) = f(r(x))$ e $r(f(r_0(x))) = f(r_0(x))$ pois $r\big|_Y = I\big|_Y$. Daí, temos que h é uma homotopia entre $f\circ r$ e $f\circ r_0$ e pois

$$\begin{cases} \lambda = 0 \;\Rightarrow\; h(0,x) = r(f(r(x))) = f(r(x)), \\ \lambda = 1 \;\Rightarrow\; h(1,x) = r(f(r_0(x))) = f(r_0(x)). \end{cases}$$

Mais ainda, para todo $\lambda \in [0,1]$ e todo $x \in \partial V$, temos que $x - h(x,\lambda) \neq 0$. Caso contrário, existiriam $\bar{x} \in \partial V$ e $\overline{\lambda} \in [0,1]$, tais que $\bar{x} - h(\bar{x},\overline{\lambda}) = 0$. Isto é, $\bar{x} = h(\bar{x},\overline{\lambda}) \in Y$. Logo, $r_0(\bar{x}) = r(\bar{x}) = \bar{x}$. Como $f(\bar{x}) \in Y$, também temos que $r(f(\bar{x})) = f(\bar{x})$. Daí,

$$\begin{aligned} \bar{x} - h(\bar{x},\overline{\lambda}) &= 0 \\ \bar{x} - r\left[(1-\overline{\lambda})f(r(\bar{x})) + \overline{\lambda} f(r_0(\bar{x}))\right] &= 0 \\ \bar{x} - r\left[(1-\overline{\lambda})f(\bar{x}) + \overline{\lambda} f(\bar{x})\right] &= 0 \\ \bar{x} - r\left[f(\bar{x}) - \overline{\lambda} f(\bar{x}) + \overline{\lambda} f(\bar{x})\right] &= 0 \\ \bar{x} - r(f(\bar{x})) &= 0 \\ \bar{x} - f(\bar{x}) &= 0. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Novamente, como $r_0(\bar{x}) = r(\bar{x}) = \bar{x}$, podemos reescrever (1.40) de duas maneias:

$$\begin{cases} \bar{x} - f(r_0(\bar{x})) = 0, \\ \bar{x} - f(r(\bar{x})) = 0. \end{cases}$$

Ou seja, $\bar{x} \in Fix(f\circ r_0)$ e $\bar{x} \in Fix(f\circ r)$. De $\bar{x} \in \partial V = \partial\left(r_0^{-1}(U) \cap r^{-1}(U\cap Y)\right)$, temos que $\bar{x} \in \partial r_0^{-1}(U) \cup \partial r^{-1}(U\cap Y)$, pois $\partial\left(r_0^{-1}(U)\cap r^{-1}(U\cap Y)\right) \subset \partial r_0^{-1}(U) \cup$

$\partial r^{-1}(U \cap Y)$. Daí, temos que $\bar{x} \in Fix(f \circ r_0) \cap \partial r_0^{-1}(U)$ ou $\bar{x} \in Fix(f \circ r) \cap \partial r^{-1}(U \cap Y)$. Daí, temos que $(I - f \circ r_0, r_0^{-1}(U), X)$ ou $(I - f \circ r, r^{-1}(U \cap Y), Y)$ não são ternas admissíveis para o grau de Leray-Schauder. Daí, pela contra positiva da Proposição 1.6, temos que as ternas (f, U, X) ou $(f|_{\overline{U \cap Y}}, U \cap Y, Y)$ não são admissíveis para o Índice de Ponto Fixo. Contradição.

Em resumo, temos que:

- V é aberto de $r_0^{-1}(U)$, logo é aberto de X;
- $h : [0,1] \times \overline{V} \to Y$ é contínua e compacta;
- $x - h(x, \lambda) \neq 0, \forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x \in \partial V$.

Logo, podemos aplicar a propriedade (D3), invariância por homotopia, e obter

$$\deg\left(I - f \circ r_0|_{\overline{V}}, V, 0\right) = \deg\left(I - f \circ r|_{\overline{V}}, V, 0\right). \tag{1.41}$$

Finalmente, por (1.38), (1.41) e (1.39), respectivamente, podemos mostra que (1.37) ocorre do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\deg\left(I - f \circ r_0|_{\overline{r_0^{-1}(U)}}, r_0^{-1}(U), 0\right) &= \deg\left(I - f \circ r_0|_{\overline{V}}, V, 0\right) \\
&= \deg\left(I - f \circ r|_{\overline{V}}, V, 0\right) \\
&= \deg\left(I - f \circ r|_{\overline{r^{-1}(U \cap Y)}}, r^{-1}(U \cap Y), 0\right).
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue.

□

Observação 1.4. É importante ressaltar que a demonstração do Teorema 1.5 nos fornece um meio de calcular $i(f, U, X)$ em virtude de (1.27). Isto é, dado (f, U, X) uma terna admissível para o Índice de Ponto Fixo e $r : E \to X$ é uma retração, temos que o Índice de Ponto Fixo de f sobre U com relação ao retrato X é dado por

$$i(f, U, X) := \deg(I - f \circ r|_{\overline{r^{-1}(U)}}, r^{-1}(U), 0). \tag{1.42}$$

Finalizamos essa seção com dois importantes resultados imediatos do teorema anterior.

Corolário 1.3. *O Índice de Ponto Fixo satisfaz as seguintes propriedades:*

(v) ***(Excisão)*** *Para todo subconjunto aberto de* $V \subset U$ *tal que* f *não possui ponto fixo em* $\overline{U} \backslash V$,

$$i(f,U,X) = i(f,V,X);$$

(vi) ***(Existência de Solução)*** *Se* $i(f,U,X) \neq 0$, *então* f *possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Primeiramente, temos que $i(f,\emptyset,X) = 0$. De fato, tomando $A = A_1 = A_2 = \emptyset$, segue que A_1 e A_2 são subconjuntos aberto de A e $\overline{A} \backslash (A_1 \cup A_2) = \emptyset$. Logo f não tem pontos fixos em $\overline{A} \backslash (A_1 \cup A_2) = \emptyset$. Daí, pelo propriedade de aditividade do Índice de Ponto Fixo, segue que

$$i(f,A,X) = i(f,A_1,X) + i(f,A_2,X),$$

isto é,

$$i(f,\emptyset,X) = i(f,\emptyset,X) + i(f,\emptyset,X).$$

Como $i(f,\emptyset,X) \in \mathbb{Z}$, segue que a igualdade acima só é valida se, e somente se,

$$i(f,\emptyset,X) = 0. \tag{1.43}$$

Sendo assim, tomando $U_1 = V$ e $U_2 = \emptyset$, temos que U_1 e U_2 são subconjuntos abertos contidos em U. Além disso, $\overline{U} \backslash (U_1 \cup U_2) = \overline{U} \backslash (V \cup \emptyset) = \overline{U} \backslash V$. Como f não tem ponto fixo em $\overline{U} \backslash V$ segue que f não tem ponto fixo em $\overline{U} \backslash (U_1 \cup U_2)$. Daí, pela aditividade do Índice de Ponto Fixo e por (1.43), segue que

$$\begin{aligned} i(f,U,X) &= i(f,U_1,X) + i(f,U_2,X) \\ &= i(f,V_1,X) + i(f,\emptyset,X) \\ &= i(f,V_1,X) + 0 \\ &= i(f,V_1,X). \end{aligned}$$

Portanto, o item (v) está provado.

Para demonstrar o item (vi) suponha, por contradição, que f não possua ponto fixo em U. Ou seja, para todo aberto $V \subset U$, segue que f não tem ponto fixo em $\overline{U} \backslash V$. Daí, pela propriedade de excisão do Índice de Ponto Fixo temos que $i(f,U,X) = i(f,V,X)$, para todo $V \subset U$. Tomando $V = \emptyset$, segue de (1.43) que $i(f,U,X) = i(f,\emptyset,X) = 0$. Contradição com a hipótese. $\square$

1.4 Teorema do Ponto Fixo em Cones

O objetivo desta seção é enunciar e demonstrar um teorema de ponto fixo em cones. No Capítulo 2, esse teorema será a principal ferramenta que usaremos para determinar a existência de solução não-negativa e não-trivial para um sistema de equações diferencias parciais.

Nesta seção, sempre assumiremos que (E,P) é um espaço de Banach ordenado. Além disso, nas notações, lemas e teoremas desta seção ρ será um número real positivo qualquer. Iniciaremos com algumas notações e resultados topológicos.

Começaremos denotando por P_ρ a parte positiva da bola aberta $B_\rho(0)$ (ver Figura 1.2), isto é,

$$P_\rho := B_\rho(0) \cap P = B_\rho^+(0). \tag{1.44}$$

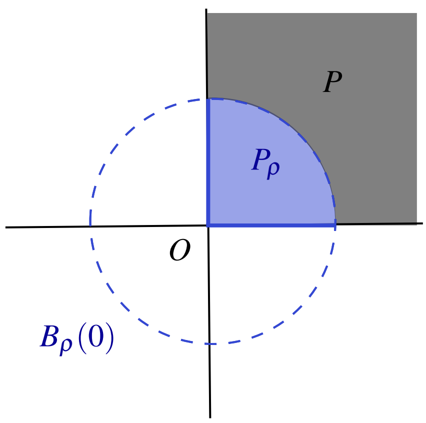

Figura 1.2 Definição de P_ρ.

Note que P_ρ é uma vizinhança aberta da origem na topologia relativa de P, pois $B_\rho(0)$ é um aberto da topologia de E e $0 \in P_\rho$.

Além disso, temos que

$$\overline{P_\rho} = \overline{B_\rho(0)} \cap P, \tag{1.45}$$

onde o fecho é na topologia relativa de P. De fato, primeiramente note que

$$\begin{aligned} \overline{P_\rho} &= \overline{B_\rho(0) \cap P} \\ &= (B_\rho(0) \cap P) \cup \partial(B_\rho(0) \cap P) \\ &= P_\rho \cup \partial P_\rho. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
\overline{B_\rho(0)} \cap P &= (B_\rho(0) \cup \partial B_\rho(0)) \cap P \\
&= (B_\rho(0) \cup P) \cap (\partial B_\rho(0) \cap P) \\
&= P_\rho \cup (\partial B_\rho(0) \cap P).
\end{aligned}
$$

Com isso para mostrar que $\overline{P_\rho} = \overline{B_\rho(0)} \cap P$, basta mostrar que $\partial P_\rho = \partial B_\rho(0) \cap P$ (ver Figura 1.3).

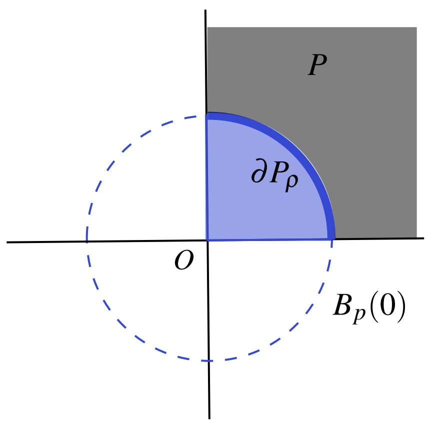

Figura 1.3 A fronteira de P_ρ destacado em azul.

Primeiramente, suponha que $y \in \partial P_\rho$ então $y \in P$, pois a fronteira de P_ρ é relativa ao cone P. Além disso, se $y \in \partial P_\rho$ então existem sequências $x_n \in P \backslash P_\rho$ e $y_n \in P_\rho$ tais que $x_n, y_n \to y$. Como $y_n \in P_\rho$, por (1.44), temos que e $y_n \in B_\rho(0)$. Por (1.44) novamente, temos que se $x_n \in P \backslash P_\rho$ então $x_n \in P \backslash (B_\rho(0) \cap P)$. Como $P \subset E$, temos que $x_n \in E \backslash B_\rho(0)$, $y_n \in B_\rho(0)$ e $x_n, y_n \to y$. Isto, é $y \in \partial B_\rho(0)$. Portanto, $y \in \partial B_\rho(0) \cap P$.

Suponha agora que $y \in \partial B_\rho(0) \cap P$. Assim, $y \in P$ e $y \in \partial B_\rho(0)$. Logo, existem sequências $x_n \in P \backslash B_\rho(0)$ e $y_n \in B_\rho(0) \cap P$ tais que $x_n, y_n \to y$. Como $B_\rho(0) \cap P = P_\rho$, segue imediato que $y_n \in P_\rho$. Por outro lado, como $P_\rho \subset B_\rho(0)$, temos que $x_n \in P \backslash P_\rho$. Portanto, $y \in \partial P_\rho$.

Denotaremos por $S_\rho(0)$ a fronteira de $B_\rho(0)$, isto é, $S_\rho(0) := \partial B_\rho(0)$ e denotaremos por $S_\rho^+(0)$ a fronteira de P_ρ, isto é, $S_\rho^+(0) = \partial P_\rho$. Assim, como $P_\rho = B_\rho(0) \cap P$ e $\partial(B_\rho(0) \cap P) = \partial B_\rho(0) \cap P$, segue que

$$
\begin{aligned}
S_\rho^+(0) &= \partial P_\rho \\
&= \partial(B_\rho(0) \cap P) \\
&= \partial B_\rho(0) \cap P \\
&= S_\rho(0) \cap P. \qquad (1.46)
\end{aligned}
$$

A seguir, mostraremos alguns teoremas de ponto fixo para aplicações contínuas e compactas usando o Índice de Ponto Fixo. Como E é o espaço de Banach ordenado, temos que o cone positivo é um conjunto fechado. Além disso, todo cone é convexo, logo, por (1.5), o cone positivo é um retrato de E. Daí, para todo subconjunto aberto U do cone positivo P e toda aplicação contínua e compacta $f:\overline{U}\to P$ tem-se que o índice $i(f,U,P)$ estará bem definido, se f não possuir pontos fixos na ∂U, isto é, a terna (f,U,P) for admissível para o Índice de Ponto Fixo. Nesse caso, temos os seguinte lema:

Lema 1.1. *Seja $f:\overline{P_\rho}\to P$ uma aplicação contínua e compacta.*

i) Se $f(x)\neq\lambda x$ para todo $x\in S^+_\rho(0)$ e para todo $\lambda\geq 1$, então

$$i(f,P_\rho,P)=1. \tag{1.47}$$

ii) Suponha que existe um elemento $y\in P\setminus\{0\}$ tal que $x-f(x)\neq\lambda y$ para todo $x\in S^+_\rho(0)$ e para todo $\lambda\geq 0$, então

$$i(f,P_\rho,P)=0. \tag{1.48}$$

Demonstração. Começamos a demonstração pelo item (i). Para isso, defina a aplicação $h:[0,1]\times\overline{P_\rho}\to P$ dada por $h(\tau,x)=\tau f(x)$. Como f é uma aplicação contínua e compacta então h também é uma aplicação contínua e compacta. Além disso, h é uma homotopia entre a aplicação nula e a aplicação $f:\overline{P_\rho}\to P$, pois

$$\begin{cases}\tau=0 & \Rightarrow \quad h(0,x)=0f(x)=0,\\ \tau=1 & \Rightarrow \quad h(1,x)=1f(x)=f(x).\end{cases}$$

Por outro lado, como $\lambda\neq 0$, temos que

$$f(x)\neq\lambda x\Rightarrow\frac{1}{\lambda}f(x)\neq x.$$

Como $\lambda\geq 1$ então $0\leq\dfrac{1}{\lambda}\leq 1$. Assim, fazendo $\tau=\dfrac{1}{\lambda}$, segue da desigualdade acima que $h(\tau,x)\neq x$, para todo $x\in S^+_\rho(0)=\partial B^+_\rho(0)=\partial P_\rho$ e para todo $\tau\in[0,1]$. Portanto, pelas propriedades de invariância por homotopia (iii) em h e da normalização (i) aplicada a função nula, temos que

$$\begin{aligned} i(f,P_\rho,P) &= i(h(1,\cdot),P_\rho,P) \\ &= i(h(0,\cdot),P_\rho,P) \\ &= i(0,P_\rho,P) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, o item (i) está provado.

Vejamos agora a demonstração do item (ii). Dado $y \in P \setminus \{0\}$, tome $\lambda \geq 0$ (a ser escolhido posteriormente pois tal escolha depende y). Defina a aplicação $h : [0,\lambda] \times \overline{P_\rho} \to P$ dada por $h(\tau,x) = f(x) + \tau y$. Como $h(0,x) = f(x)$ e $h(\lambda,x) = f(x) + \lambda y$, temos que h é homotopia entre a aplicação $f : \overline{P_\rho} \to P$ e a aplicação $g : \overline{P_\rho} \to P$ dada por $g(x) = f(x) + \lambda y$. Além disso, por hipótese do enunciado, temos que $x - f(x) \neq \tau y$, isto é, $h(\tau,x) \neq x$, para todo $x \in S_\rho^+(0)$ e para todo $\tau \in [0,\lambda]$. Daí, segue da propriedade (iii), invariância por homotopia do Índice de Ponto Fixo, que para todo $\lambda_1 \in [0,\lambda]$ vale que

$$\begin{aligned} i(f,P_\rho,P) &= i(h(0,\cdot),P_\rho,P) \\ &= i(h(\lambda_1,\cdot),P_\rho,P) \\ &= i(f+\lambda_1 y,P_\rho,P). \end{aligned}$$

Isto é,

$$i(f,P_\rho,P) = i(f(\cdot)+\lambda_1 y,P_\rho,P). \tag{1.49}$$

Por outro lado, como f é compacta temos que f é limitada. Logo, seja $\mu \in [0,+\infty)$ tal que $\mu = \sup\left\{\|f(x)\|; x \in \overline{P_\rho}\right\}$.

Agora suponha, por contradição, que $i(f,P_\rho,P) \neq 0$. Assim, por (1.49), temos que $i(f(\cdot)+\lambda_1 y,P_\rho,P) \neq 0$, para todo $\lambda_1 \in [0,\lambda]$. Pelo Corolário (1.3-$v$), existência de solução do Índice de Ponto Fixo, temos que $f(\cdot)+\lambda_1 y$ possui ao menos um ponto fixo. Isto é, existe $x_0 \in P_\rho$ (que depende de λ_1) tal que

$$f(x_0) + \lambda_1 y = x_0. \tag{1.50}$$

Além disso, como $y \in P \setminus \{0\}$, isto é, $\|y\| \neq 0$, temos que ρ pode ser reescrito como

$$\rho = \rho + \mu - \mu = \left(\frac{\rho+\mu}{\|y\|}\right)\|y\| - \mu. \tag{1.51}$$

Por definição do supremo μ, temos que $-\mu \leq -\|f(x)\|$, para todo $x \in \overline{P_\rho}$. Aplicando esta desigualdade em (1.51), temos que

$$\rho \leq \left(\frac{\rho+\mu}{\|y\|}\right)\|y\| - \|f(x)\|, \tag{1.52}$$

para todo $x \in \overline{P_\rho}$. Escolhendo λ suficientemente grande tal que $\dfrac{\rho+\mu}{\|y\|} \in (0,\lambda)$ e $\lambda_1 > \dfrac{\rho+\mu}{\|y\|}$ temos que

$$\begin{aligned}
\rho &\leq \left(\frac{\rho+\mu}{\|y\|}\right)\|y\| - \|f(x)\| \\
&< \lambda_1\|y\| - \|f(x)\| \\
&= \|\lambda_1 y\| - \|f(x)\| \\
&= \|-\lambda_1 y\| - \|f(x)\| \\
&\leq \|-\lambda_1 y - f(x)\| \\
&= \|\lambda_1 y + f(x)\|.
\end{aligned}$$

Daí, $\rho < \|\lambda_1 y + f(x)\|$, para todo $x \in \overline{P_\rho}$. Em particular, tomando $x = x_0$ em P_ρ, temos da desigualdade anterior que $\rho < \|\lambda_1 y + f(x_0)\|$. Mas, por (1.50), temos que $\lambda_1 y + f(x_0) = x_0$. Logo,

$$\rho < \|\lambda_1 y + f(x_0)\| = \|x_0\|.$$

Isto é, $x_0 \notin P_\rho$, contradição. Portanto, $i(f,P_\rho,P) = 0$. □

Segue, o primeiro teorema de existência do ponto fixo em um cone P de um espaço de Banach ordenado E.

Teorema 1.6. *Seja $f : \overline{P_\rho} \to P$ uma aplicação compacta e contínua tal que $f(x) \neq \lambda x$ para todo $x \in S^+_\rho(0)$ e $\lambda \geq 1$. Então f admite um ponto fixo.*

Demonstração. De fato, pelo Lema 1.1 item $i)$ segue que $i(f,P_\rho,P) \neq 0$. Daí pela propriedade da existência de solução do Índice de Ponto Fixo, segue que f tem pelo menos um ponto fixo em em P_ρ. □

O vetor nulo de um espaço de Banach pode corresponder as soluções triviais de uma equação diferencial. Este fato não é vantajoso quando queremos provar a existência de soluções não-negativas onde $0 \in P$ é um ponto fixo do operador, pois não podemos distinguir o ponto fixo encontrado da solução nula. O teorema anterior, infelizmente, não exclui essa possibilidade. A forma mais simples de contornar essa problemática é buscar pontos fixos no conjunto, as vezes chamado de "concha cônica" (ver Figura 1.4),

$$\{x \in P \mid \min\{\theta,\tau\} < \|x\| < \max\{\theta,\tau\} \text{ com } \theta \neq \tau \text{ e } \theta,\tau \in [0,\rho]\}.$$

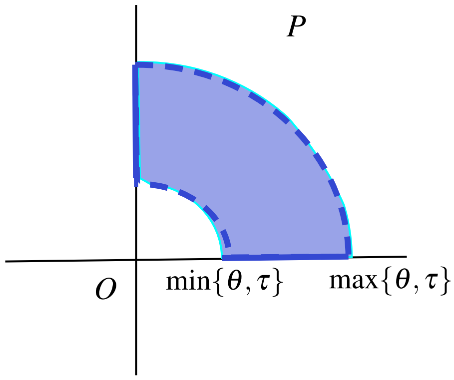

Figura 1.4 A concha cônica.

Sendo assim, segue o principal resultado desta secção: o teorema de pontos fixos não triviais em cones.

Teorema 1.7. ***(Teorema do Ponto Fixo em Cone)*** *Seja $f : \overline{P_\rho} \to P$ uma aplicação contínua e compacta e sejam $\theta,\tau \in (0,\rho]$ com $\theta \neq \tau$. Suponha que:*

(i) *$f(x) \neq \lambda x$ para todo $x \in S_\theta^+(0)$ e para todo $\lambda \geq 1$;*

(ii) *existe um elemento $y \in P \setminus \{0\}$ tal que $x - f(x) \neq \lambda y$ para todo $x \in S_\tau^+(0)$ e para todo $\lambda \geq 0$.*

Então f tem ao menos um ponto fixo satisfazendo $\min\{\theta,\tau\} < \|x\| < \max\{\theta,\tau\}$.

Demonstração. Primeiramente, defina $\rho_0,\rho_1 \in (0,\rho]$ tais que

$$\begin{cases} \rho_0 := \min\{\theta,\tau\} \text{ e} \\ \rho_1 := \max\{\theta,\tau\}, \end{cases}$$

onde $\theta,\tau \in (0,\rho]$ (ver Figura 1.4). Como $\theta \neq \tau$, segue que $\rho_0 < \rho_1$. Logo $B_{\rho_0}(0) \subset B_{\rho_1}(0)$ e consequentemente, $(B_{\rho_0}(0) \cap P) \subset (B_{\rho_1}(0) \cap P)$, isto é, $P_{\rho_0} \subset P_{\rho_1}$.

Buscaremos usar a propriedade (ii), aditividade do Índice de Ponto Fixo, para os conjuntos P_{ρ_0}, P_{ρ_1} e $P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}$. Para isso note que:

(a) P_{ρ_0} e $P_{\rho_1}\backslash\overline{P_{\rho_0}}$ são subconjuntos de P_{ρ_1}, pois $P_{\rho_0} \subset P_{\rho_1}$;

(b) P_{ρ_0} e $P_{\rho_1}\backslash\overline{P_{\rho_0}}$ são disjuntos. Caso contrário, existiria $x \in P$ tal que $x \in P_{\rho_0}$ e $x \in P_{\rho_1}\backslash\overline{P_{\rho_0}}$. Daí, $x \in P_{\rho_0}$ e $x \notin \overline{P_{\rho_0}}$. Absurdo;

(c) $f\big|_{\overline{P_{\rho_1}}}$ não tem ponto fixo em $\overline{P_{\rho_1}}\backslash\left(P_{\rho_0} \cup \left(P_{\rho_1}\backslash\overline{P_{\rho_0}}\right)\right)$.

De fato, como f é contínua e compacta então $f\big|_{\overline{P_\theta}}$ e $f\big|_{\overline{P_\tau}}$ são contínuas e compactas. Daí, pelos itens (i) e (ii) do lema (1.1), temos que é possível o cálculo de $i(f\big|_{\overline{P_\theta}}, P_\theta, P)$ e $i(f\big|_{\overline{P_\tau}}, P_\tau, P)$. Logo, as ternas $(f\big|_{\overline{P_\theta}}, P_\theta, P)$ e $(f\big|_{\overline{P_\tau}}, P_\tau, P)$ são admissíveis para o Índice de Ponto Fixo. Assim, $f\big|_{\overline{P_{\rho_i}}}$, com $i = 0, 1$, não tem ponto fixo em $\partial P_{\rho_1} \cup \partial P_{\rho_0}$. Logo, para provar o item (c), basta mostrar que

$$\overline{P_{\rho_1}}\backslash\left(P_{\rho_0}\backslash\overline{P_{\rho_0}}\right) = \partial P_{\rho_1} \cup \partial P_{\rho_0}. \tag{1.53}$$

Primeiramente, por (1.44) e (1.45), recorde que $P_{\rho_i} = B_{\rho_i}(0) \cap P$ e $\overline{P_{\rho_i}} = \overline{B_{\rho_i}(0)} \cap P$. Ou ainda,

$$P_{\rho_i} = \{y \in X; y \in P \text{ e } \|y\| < \rho_i\} \tag{1.54}$$

e

$$\overline{P_{\rho_i}} = \{y \in X; y \in P \text{ e } \|y\| \leq \rho_i\}, \tag{1.55}$$

com $i = 0, 1$. Assim, por (1.54) e (1.55), temos que $\overline{P_{\rho_1}}\backslash P_{\rho_0}$ e $P_{\rho_1}\backslash\overline{P_{\rho_0}}$ pode ser escritos como

$$\overline{P_{\rho_1}}\backslash P_{\rho_0} = \{y \in P; \rho_0 \leq \|y\| \leq \rho_1\} \tag{1.56}$$

e

$$P_{\rho_1}\backslash\overline{P_{\rho_0}} = \{y \in P; \rho_0 < \|y\| < \rho_1\}. \tag{1.57}$$

Daí, por (1.55) e (1.57), temos que

$$\overline{P_{\rho_1}}\backslash\left(P_{\rho_1}\backslash\overline{P_{\rho_0}}\right) = \{y \in P; \|y\| \leq \rho_0 \text{ ou } \|y\| = \rho_1\}. \tag{1.58}$$

Assim, por (1.56) e (1.58), temos que

$$\begin{aligned}
\overline{P_{\rho_1}} \setminus \left(P_{\rho_0} \cup (P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}})\right) &= \left(\overline{P_{\rho_1}} \setminus P_{\rho_0}\right) \cap \left(\overline{P_{\rho_1}} \setminus (P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}})\right) \\
&= \{y \in P; \rho_0 \leq \|y\| \leq \rho_1\} \cap \{y \in P; \|y\| \leq \rho_0 \text{ ou } \|y\| = \rho_1\} \\
&= \{y \in P; \rho_0 \leq \|y\| \leq \rho_1 \text{ e } \|y\| \leq \rho_0\} \cup \\
&\quad \{y \in P; \rho_0 \leq \|y\| \leq \rho_1 \text{ e } \|y\| = \rho_1\} \\
&= \{y \in P; \|y\| = \rho_0\} \cup \{y \in P; \|y\| = \rho_1\} \\
&= \partial P_{\rho_0} \cup \partial P_{\rho_1}.
\end{aligned}$$

Logo, vale (1.53). Portanto, o item (c) está provado.

Pelos item $(a),(b)$ e (c), podemos aplicar a propriedade (ii), aditividade do Índice de Ponto Fixo, e obter

$$i(f|_{\overline{P_{\rho_1}}}, P_{\rho_1}, P) = i(f|_{\overline{P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}}}, P_{P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}}, P) + i(f|_{\overline{P_{\rho_0}}}, P_{\rho_0}, P),$$

isto é,

$$i(f|_{\overline{P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}}}, P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}, P) = i(f|_{\overline{P_{\rho_1}}}, P_{\rho_1}, P) - i(f|_{\overline{P_{\rho_0}}}, P_{\rho_0}, P). \tag{1.59}$$

Pelo Lema 1.1, segue que

$$i(f|_{\overline{P_k}}, P_k, P) = \begin{cases} 1 & se \quad k = \theta, \\ 0 & se \quad k = \tau. \end{cases} \tag{1.60}$$

Logo, por (1.59) e (1.60), segue que

$$i(f|_{\overline{P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}}}, P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}, P) = \begin{cases} 1 & se \quad \rho_1 = \theta, \\ -1 & se \quad \rho_1 = \tau. \end{cases}$$

Em todo caso, $i(f|_{\overline{P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}}}, P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}, P) \neq 0$. Daí, segue do Corolário 1.3-(v), existência de solução do índice, que $f|_{\overline{P_1 \setminus \overline{P_0}}}$ tem ao menos um ponto fixo em $P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
P_{\rho_1} \setminus \overline{P_{\rho_0}} &= \{x \in P \mid \rho_0 < \|x\| < \rho_1\} \\
&= \{x \in P \mid \min\{\theta, \tau\} < \|x\| < \max\{\theta, \tau\} \text{ com } \theta \neq \tau \text{ e } \theta, \tau \in (0, \rho]\}.
\end{aligned}$$

Portanto, f possui ponto fixo satisfazendo $\min\{\theta, \tau\} < \|x\| < \max\{\theta, \tau\}$. $\square$

Capítulo 2

Sistemas Elípticos Superlineares

2.1 Introdução

Neste capítulo, seguimos Cosner [9] para estudar dois resultados de existência de soluções positivas para sistemas elípticos sem estrutura variacional via ponto fixo em cones, que nos permite inclusive tratar de sistemas superlineares. Mais especificamente, vamos estudar as soluções (fracas e clássicas) não-negativas e não-triviais do seguinte sistema com condição de contorno de Dirichlet

$$\begin{cases} L_1 u_1 = f_1(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \qquad \vdots & \\ L_m u_m = f_m(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ u_1 = \cdots = u_m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Observe que, adotando a seguinte notação

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & L_m \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{f}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{u}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{u}) \end{bmatrix},$$

o problema (2.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} A\vec{u} = \vec{f}(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Sendo assim, determinar as soluções de (2.1) equivale a determinar as soluções de (2.2).

Para a conveniência do leitor, iremos descrever novamente as hipóteses inciais sobre o problema (2.1).

No primeiro resultado de existência (ver Seção 2.4), consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio limitado com fronteira regular e L_μ o operador uniformemente elíptico de segunda ordem na forma divergente, isto é,

$$L_\mu v := -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{\mu_{ij}}(x)\partial_j\, v) + \sum_{i=1}^{N} b_{\mu_i}(x)\partial_i v + c_\mu(x)v, \tag{2.3}$$

tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{\mu_{ij}}(x)\xi_i\xi_j \geq a_\mu^0|\xi|^2, \tag{2.4}$$

para constantes $a_\mu^0 > 0$ e todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$. Além disso, assumiremos que os coeficientes $a_{\mu_{ij}}$, b_{μ_i} e c_μ são regulares e que

$$c_\mu(x) \geq 0,\ \forall x \in \Omega,\ \forall \mu \in \{1, \cdots, m\}. \tag{2.5}$$

No segundo resultado (ver Seção 2.5), adicionamos à Ω a hipótese de convexidade e consideramos $L_\mu = -\Delta$, para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$.

Sobre o termo de não-linearidade $\vec{f}$, temos as seguintes hipóteses:

(H0) $\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é regular;

(H1) Se $x_\mu \geq 0$, com $\mu \in \{1, \cdots, m\}$, então

$$f_\mu(x) \geq 0 \ \text{ para } \ \mu = 1, \ldots, m;$$

(H2) Para cada $\mu \in \{1, \cdots, m\}$,

$$\lim_{x_\mu \to \infty} \frac{f_\mu(x)}{x_\mu} > \lambda_1^{\mu^*} \text{ uniformemente em } x_\nu \geq 0 \text{ para } \nu \neq \mu,$$

onde $\lambda_1^{\mu^*}$ é o autovalor principal do problema

$$\begin{cases} L_\mu^*\phi = \lambda_1^{\mu^*}\phi & \text{em } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde L_μ^* é o operador adjunto de L_μ;

(H3) Seja $\lambda_1 > 0$ é o autovalor principal do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet em Ω. Assuma que o

$$\inf_{\mu}\left\{a_{\mu}^{0}\lambda_1 - b_{\mu}^{0}\sqrt{\lambda_1}\right\} > 0,$$

onde

$$b_{\mu}^{0} := \sup_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_{\mu_i}\right)\right]^{1/2};$$

(H4) Seja

$$\gamma_0 := \inf_{\mu}\left\{a_{\mu}^{0}\lambda_1 - b_{\mu}^{0}\sqrt{\lambda_1} + c_{\mu}^{0}\right\} > 0, \tag{2.6}$$

onde $c_{\mu}^{0} := \inf_{\Omega} c_{\mu}$. Existe $\gamma < \gamma_0$ tal que

$$\left\langle x, \vec{f}(x)\right\rangle \leq \gamma|x|, \text{ sempre que } |x| < \gamma_0;$$

(H5) Por fim, assumiremos que $\vec{f}$ é função quase-monótona, isto é,

$$\frac{\partial f_{\mu}(x)}{\partial x_{\nu}} \geq 0, \text{ para } \mu \neq \nu, \text{ e } x_i \geq 0, \forall i = 1, \cdots, m.$$

Além das hipóteses (H1)-(H5), temos as seguintes hipóteses de crescimento (HC):

(HC1) Para o primeiro teorema de existência (ver Seção 2.4), assumiremos

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{|\vec{f}(x)|}{|x|^{\beta}} = 0, \quad \text{onde } \beta = \frac{N+1}{N-1};$$

(HC2) Para o segundo teorema de existência (ver Seção 2.5), assumiremos

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{|\vec{f}(x)|}{|x|^{\beta}} = 0, \text{ onde } \begin{cases}\beta < \dfrac{N}{N-2} & \text{se } N \geq 3,\\ \beta < \infty & \text{se } N = 2.\end{cases}$$

Para ambos os resultados de existência, precisaremos de algumas notações e lemas técnicos a serem enunciados na Seção 2.2 e no inicío da Seção 2.5.

2.2 Notações e Resultados Preliminares

Nesta seção apresentaremos algumas notações e resultados que serão utilizados ao longo deste capítulo. Iniciamos com as definições de algumas normas.

Para um elemento $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, convencionamos $|x|$ como a norma da soma, isto é,

$$|x| := \sum_{\mu=1}^{m} |x_\mu|.$$

Para um elemento $\vec{u} = (u_1 \cdots, u_m) \in E^m$, onde E é um espaço métrico qualquer E, que não seja um espaço de Sobolev, definimos a norma de $\vec{u}$ como

$$\|\vec{u}\|_{E^m} := \sum_{\mu=1}^{m} \|u_\mu\|_E. \tag{2.7}$$

Por outro lado, para espaços de Sobolev construídos a partir do espaço L^p, com $1 \leq p < \infty$, incluindo o próprio L^p, definimos a norma de $\vec{u}$ como

$$\|\vec{u}\|_{(W^{k,p}(\Omega))^m} := \left(\sum_{\mu=1}^{m} \|u_\mu\|^p_{W^{k,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.8}$$

para todo inteiro k não-negativo.

Como mencionado anteriormente, sob hipóteses adicionais sobre $\vec{f}$, qualquer solução não-trivial não-negativa de (2.2) é positiva em todos as componentes. Para detalhar esse fato, precisaremos do conceito de função quase-irredutível abaixo e do subsequente lema.

Definição 2.1. ***(Função quase-irredutível)*** *Dizemos que $\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é quase-irredutível se, sempre que $x \in \mathbb{R}^m$ for tal que $x_\mu \geq 0$ para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$ e $x_\mu > 0$ para $\mu \in \Gamma \subsetneq \{1, \cdots, m\}$, então $f_\nu(\vec{x}) > 0$ para algum $\nu \notin \Gamma$.*

Exemplo 2.1. *Considere as aplicações $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$ e $\vec{g}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1)$. $\vec{f}$ é quase-irredutível, mas $\vec{g}$ não é.*

Lema 2.1. *Suponha que $\vec{f}$ é quase-irredutível e satisfazendo (H1). Se $\vec{u} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^m$ é solução fraca de (2.2) com $u_\mu \geq 0$ q.t.p em Ω, para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$ e $\vec{u} \not\equiv 0$, então Então $u_\mu > 0$ q.t.p em Ω, para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$.*

Demonstração. Por (2.5), temos que

$$\int_\Omega c_\mu w \, dx \geq 0, \; \forall w \geq 0, \; w \in W_0^{1,1}(\Omega), \forall \mu \in \{1, \cdots, m\}. \tag{2.9}$$

Como $u_\mu \geq 0$ q.t.p em Ω, segue de (H1) que $f_\mu(\vec{u}) > 0$ ou $f_\mu(\vec{u}) = 0$ q.t.p em Ω. Logo, por (2.2), temos que $L_\mu u_\mu \geq 0$. Em adicional, como L_μ satisfaz (2.4), (2.9) e possui coeficientes regulares, podemos aplicar o Corolário C.2 e concluir que ou $u_\mu \equiv 0$ ou $u_\mu(x) > 0$ q.t.p em Ω, para cada $\mu \in \{1, \cdots, m\}$. Pela hipótese, $\vec{u} \not\equiv 0$, logo há pelo menos um índice $\mu \in \{1, \cdots, m\}$ tal que $u_\mu \neq 0$. Assim, defina o conjunto de índice Γ tal que

$$\Gamma = \{\mu \in \{1, \cdots, m\}; u_\mu > 0 \text{ q.t.p em } \Omega\}.$$

Note que, $\Gamma \neq \varnothing$ e $\Gamma \subseteq \{1, \cdots, m\}$. Afirmamos que $\Gamma = \{1, \cdots, m\}$. Suponha, por contradição, que $\Gamma \subsetneq \{1, \cdots, m\}$. Logo, $\Gamma^c \neq \varnothing$. Como $\vec{f}$ é quase-irredutível, segue que $f_\nu(\vec{u}) > 0$ para algum $\nu \notin \Gamma$. Ou seja, é falso que $u_\nu > 0$ q.t.p em Ω. Isto é, $u_\nu \equiv 0$. Daí, $L_\nu u_\nu = f_\nu(\vec{u}) = 0$, contradição. Assim, $\Gamma = \{1, \cdots, m\}$ e portanto $u_\mu > 0$ para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$. $\square$

No desenvolver das Seções 2.4 e 2.5, precisaremos também dos seguintes lemas técnicos.

Lema 2.2. *Se $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $0 \leq \tau \leq 1$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| \frac{v}{\delta^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.10}$$

sempre que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1-\tau}{N}$, onde $\delta = \delta(x)$ é a função distância de x a $\partial\Omega$.

Demonstração. Seja $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$, com $r, s \geq 1$. Pela desigualdade de Hölder, A.6, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v}{\delta^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} &= \left\| \frac{v^\tau}{\delta^\tau} v^{1-\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \left\| \frac{v^\tau}{\delta^\tau} \right\|_{L^r(\Omega)} \| v^{1-\tau} \|_{L^s(\Omega)} \\ &= \left\| \frac{v}{\delta} \right\|^\tau_{L^{r\tau}(\Omega)} \| v \|^{1-\tau}_{L^{s(1-\tau)}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Note que, tomando $r\tau = 2$ e $s(1-\tau) = 2^*$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} &= \frac{1}{\frac{2}{\tau}} + \frac{1}{\frac{2^*}{1-\tau}} \\
&= \frac{\tau}{2} + \frac{(1-\tau)(N-2)}{2N} \\
&= \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{N} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1-\tau}{N}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo desigualdade de Hardy-Sobolev (ver Teorema A.10) com $r\tau = 2$, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{v}{\delta} \right\|_{L^{r\tau}(\Omega)}^{\tau} = \left\| \frac{v}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\tau} \leq c_1 \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}^{\tau}. \tag{2.12}$$

Aplicando (2.12) em (2.11), segue que

$$\left\| \frac{v}{\delta^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq c_1 \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}^{\tau} \left\| v \right\|_{L^{s(1-\tau)}(\Omega)}^{1-\tau}. \tag{2.13}$$

Da desigualdade de Poincaré (ver Teorema A.9) com $q = 2^*$, segue que existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\left\| v \right\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq c_2 \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.14}$$

Elevando (2.14) a $1-\tau$ e como $s(1-\tau) = 2^*$, temos que

$$\left\| v \right\|_{L^{s(1-\tau)}(\Omega)}^{1-\tau} \leq c_2 \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)}^{1-\tau}. \tag{2.15}$$

Portanto, aplicando (2.15) em (2.13), temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{v}{\delta^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} &\leq c_1 \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}^{\tau} \left\| v \right\|_{L^{s(1-\tau)}(\Omega)}^{1-\tau} \\
&\leq c_1 \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}^{\tau} c_2 \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)}^{1-\tau} \\
&= c_3 \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}^{\tau} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}^{1-\tau} \\
&= c_3 \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

onde $c_3 = c_1 c_2 > 0$. □

Finalizaremos está secção mostrando o seguinte resultado.

Lema 2.3. *Seja* $u_\mu : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *lipschitziana tal que* $u_\mu \equiv 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então* $\dfrac{u_\mu}{\delta} \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Sabemos que dado $x \in \Omega$ existe $y_x \in \partial\Omega$ tal que $\delta(x) = |x - y_x|$. Como, u_μ é lipshitziana, temos que existe $k > 0$ tal que

$$|u_\mu(x) - u_\mu(y_x)| \leq k|x - y_x| = k\delta(x).$$

Desde que $u_\mu \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$ então $u_\mu(y_x) = 0$. Logo $|u_\mu(x)| \leq k\delta(x)$, para todo $x \in \Omega$. Daí, temos que

$$\left|\frac{u_\mu(x)}{\delta(x)}\right| \leq k, \quad \forall x \in \Omega.$$

Portanto $\dfrac{u_\mu}{\delta} \in L^\infty(\Omega)$. □

2.3 Construção do Operador Compacto

Como mencionamos anteriormente, a principal ferramenta que usaremos para mostrar existência de solução para o sistema (2.1), será o Teorema 1.7, isto é, o Teorema do Ponto Fixo em Cones. Para aplicá-lo, precisamos reescrever (2.2), de modo que sua solução seja o ponto fixo de um operador compacto e contínuo $\vec{F}$ definido em um cone positivo. Esta seção tem o objetivo de definir tal operador e em seguida reescrever o Teorema 1.7.

Iniciamos definindo o operador resolvente $(L_\mu)^{-1} : C\left(\overline{\Omega}\right) \to C\left(\overline{\Omega}\right)$ associado ao problema auxiliar

$$\begin{cases} L_\mu v = g & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} (L_\mu)^{-1} : C\left(\overline{\Omega}\right) &\longrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right) \\ g &\longmapsto (L_\mu)^{-1} g = v, \end{aligned}$$

onde $v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é a única solução de (2.16). Pelo Corolário C.3, temos que $(L_\mu)^{-1}$ está bem definida. Assim, dada $v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ temos que

$$v = (L_\mu)^{-1} g \Leftrightarrow \begin{cases} L_\mu v = g & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Daí, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} A^{-1} : (C(\overline{\Omega}))^m &\longrightarrow (C(\overline{\Omega}))^m \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{w} = A^{-1}\vec{v}, \end{aligned}$$

como sendo

$$\vec{w} = A^{-1}\vec{v} \quad = \begin{bmatrix} (L_1)^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (L_m)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_1)^{-1}v_1 \\ \vdots \\ (L_m)^{-1}v_m \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, considere $\vec{u} \in (C(\overline{\Omega}))^m$. Como $\vec{f}$ é regular, então $f_\mu(\vec{u}) \in C(\overline{\Omega})$. Logo, podemos tomar $g = f_\mu(\vec{u})$. Daí, faz sentido calcular $(L_\mu)^{-1}g = (L_\mu)^{-1}(f_\mu(\vec{u}))$. Sendo assim, se $u_\mu = (L_\mu)^{-1}(f_\mu(\vec{u}))$ então temos que u_μ verifica

$$\begin{cases} L_\mu u_\mu = f_\mu(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí, podemos calcular $A^{-1}(\vec{f}(\vec{u}))$. Isso define um operador:

$$\begin{aligned} \vec{F} : (C(\overline{\Omega}))^m &\longrightarrow (C(\overline{\Omega}))^m \\ \vec{u} &\longmapsto \vec{F}\vec{u} = A^{-1}(\vec{f}(\vec{u})). \end{aligned}$$

A aplicação composta $\vec{F}$ é contínua e compacta. Pois, f_μ é uma contínua, pelo Corolário C.3, $(L_\mu)^{-1}$ é contínua e compacta (ver Figura 2.1).

$$\begin{tikzcd} \vec{u} \arrow[r, "\boxed{\vec{f}}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{\vec{F} = A^{-1} \circ \vec{f}}"'] & \vec{f}(\vec{u}) \arrow[r, "\boxed{A^{-1}}"] & \vec{F}\vec{u} = A^{-1}(\vec{f}(\vec{u})) \end{tikzcd}$$

Figura 2.1 Esquema da composta $\vec{F} = A^{-1} \circ \vec{f}$.

Mais ainda, se $\vec{u} \in (C(\overline{\Omega}))^m$ é ponto fixo de $\vec{F}$, então

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & \vec{F}\vec{u} \\ \vec{u} & = & A^{-1}(\vec{f}(\vec{u})) \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} (L_1)^{-1}(f_1(\vec{u})) \\ \vdots \\ (L_m)^{-1}(f_m(\vec{u})) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Isto é, $u_\mu = (L_\mu)^{-1}(f_\mu(\vec{u}))$, para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$. Por (2.17), temos que

$$\begin{aligned} u_\mu = (L_\mu)^{-1}(f_\mu(\vec{u})) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_\mu u_\mu = f_\mu(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ u_\mu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_1 u_1 = f_1(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \vdots & \vdots \\ L_m u_\mu = f_m(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ u_1 = \cdots = u_m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, determinar os pontos fixos do operador contínuo e compacto $\vec{F} : (C(\overline{\Omega}))^m \to (C(\overline{\Omega}))^m$ equivale a determinar as soluções do sistema (2.1).

Agora, considere o cone positivo

$$P_{C(\overline{\Omega})} = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u(x) \geq 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}\}.$$

Note que $P_{(C(\overline{\Omega}))^m} = \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$. Assim, pela Definição 1.10, temos que $\left((C(\overline{\Omega}))^m, \|\cdot\|_{(C(\overline{\Omega}))^m}\right)$ é um espaço de Banach ordenado, já que o cone positivo $\left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$ é fechado. Por fim, considere a restrição

$$\begin{aligned} \vec{F}\Big|_{\left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m} : \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m & \longrightarrow \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m \\ \vec{u} & \longmapsto \vec{F}\vec{u} = A^{-1}(\vec{f}(\vec{u})). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Tal restrição está bem definida, pois se $\vec{u} \in \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$ então $\vec{F}(\vec{u}) \in \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$. De fato, se $\vec{u} \in \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$ então $u_\mu(x) \geq 0$, com $\mu \in \{1, \cdots, m\}$. Por (H1), temos que $f_\mu(\vec{u}(x)) \geq 0$. Seja

$v \in (C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}))^m$ tal que $v = \vec{F}\vec{u} = A^{-1}(\vec{f}(\vec{u}))$, isto é,

$$\begin{cases} L_1 v_1 = f_1(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \vdots & \vdots \\ L_m v = f_m(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ v_1 = \cdots = v_m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $f_\mu \geq 0$ sempre que $u_\mu \geq 0$, segue que $L_\mu v = f_\mu(\vec{u}) \geq 0$ para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$. Pelo principio do Máximo de E. Hopf (ver Apêndice D, Teorema C.1) segue que $v \geq 0$, para todo μ. Portanto, $\vec{F}\vec{u} = v \in \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$.

Por construção, os pontos fixos do operador (2.18) são soluções não-negativa de (2.2) e, consequentemente, do sistema (2.1).

Agora, vamos apenas enunciar novamente o Teorema do Ponto Fixo em Cones, Teorema 1.7, usando operador o compacto $\vec{F}$, de modo a deixá-lo menos carregado de notações. Para isso, denotaremos apenas de P o cone positivo $\left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$. Assim, por (1.44) e para qualquer $\rho \in (0, \infty)$, temos que

$$\begin{aligned} P_\rho &= B_\rho(0) \cap P \\ &= \{\vec{u} \in \left(C(\overline{\Omega})\right)^m : \vec{u} \in P \text{ e } \|\vec{u}\|_{\left(C(\overline{\Omega})\right)^m} < \rho\}. \end{aligned}$$

Faremos $r = \theta$, $R = \tau$, onde $r < R$ e $r, R \in (0, \rho]$, e usando (1.46), temos que

$$\begin{aligned} S_r^+(0) = S_r(0) \cap P = \{\vec{u} \in \left(C(\overline{\Omega})\right)^m : \vec{u} \in P \text{ e } \|\vec{u}\|_{\left(C(\overline{\Omega})\right)^m} = r\}, \\ S_R^+(0) = S_R(0) \cap P = \{\vec{u} \in \left(C(\overline{\Omega})\right)^m : \vec{u} \in P \text{ e } \|\vec{u}\|_{\left(C(\overline{\Omega})\right)^m} = R\}. \end{aligned}$$

Com isso, o Teorema 1.7, pode ser reescrito na forma do seguinte teorema:

Teorema 2.1. *(Teorema do Ponto Fixo)* *$\vec{F} : \overline{P_\rho} \to P$ terá um ponto fixo $\vec{u}$, com $0 < r \leq \|\vec{u}\|_{\left(C(\overline{\Omega})\right)^m} < R < \infty$, se*

$$\vec{F}\vec{u} \neq s\vec{u}, \;\; s \geq 1, \; para \;\; \|\vec{u}\|_{\left(C(\overline{\Omega})\right)^m} = r, \tag{2.19}$$

$$\vec{F}\vec{u} \neq \vec{u} - t\psi_*, \;\; t \geq 0, \; para \;\; \|\vec{u}\|_{\left(C(\overline{\Omega})\right)^m} = R, \tag{2.20}$$

onde $\psi_* > 0$ é alguma função pertencente ao cone positivo $P = \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$.

Um ponto fixo de $\vec{F}$, gerado pelo Teorema 2.1, produzirá uma soluções clássica de (2.2) pelo procedimento usual de bootstrap para mostrar regularidade.

Observamos que um ponto fixo de $\vec{F}$, não precisa ser positivo em todos os seus componentes. Porém, se adicionamos no sistema (2.1) a hipótese que $\vec{f}$ é quase-irredutível, temos de imediato, pelo Lema 2.1, que qualquer ponto fixo de $\vec{F}$ possui componentes estritamente positivas. O exemplo a seguir mostra que um sistema pode ter solução em $P = \left(P_{C(\overline{\Omega})}\right)^m$ sem que suas componentes sejam todas positivas.

Exemplo 2.2. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_1 u_1 & em\ \Omega, \\ -\Delta u_2 = u_1 + \lambda_1 u_2 & em\ \Omega, \\ u_1, u_2 = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano. Vamos mostrar que o sistema (2.21) *não admite solução $(u_1, u_2) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ tal que $u_1, u_2 > 0$. De fato, as únicas soluções da primeira equação são do tipo $u_1 = k\phi_1$, onde $\phi_1 > 0$ é a autofunção associada ao primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω com condição de contorno homogênea de Dirichlet e $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Agora, note que a segunda equação, com $u_1 = k\phi_1$, gera o seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta u_2 - \lambda_1 u_2 = k\phi_1 & em\ \Omega, \\ u_2 = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.22}$$

Pelo Teorema A.3-iii), o problema acima admite solução fraca se, e somente se,

$$\int_\Omega k\phi_1 v = 0, \ \ \forall v \in N[(-\Delta - \lambda_1)^*].$$

Como $-\Delta - \lambda_1$ é auto adjunto, então afirmação acima equivale à

$$\int_\Omega \phi_1 v = 0, \ \ \forall v \in N[-\Delta - \lambda_1].$$

Mas $v \in N[-\Delta - \lambda_1]$ se, e somente se, $v = k\phi_1$, $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Assim, (2.22) *admite solução fraca se, e somente se,*

$$\int_\Omega \phi_1 k\phi_1 = 0.$$

Ou seja,

$$\int_\Omega \phi_1^2 = 0.$$

O que não ocorre. Portando, (2.21) *não possui solução positiva em todas as suas componentes. No entanto,* $u_1 = 0$ *e* $u_2 = \phi_1$ *fornece uma solução não-trivial não-negativa em* $P_{C(\overline{\Omega})} \times P_{C(\overline{\Omega})}$.

A chave para aplicar o Teorema do Ponto Fixo, Teorema 2.1, é obter uma estimativa a priori das soluções de (2.19) e (2.20), então escolher R e r de modo que as hipóteses do Teorema 2.1 se verifiquem. Para isso, precisamos fazer uma boa escolha de ψ_* bem como fazer uso de alguns lemas técnicos. Precisamente, vamos considerar $\psi_* = A^{-1}col(\psi_1^*, \cdots, \psi_m^*)$, onde $\psi_\mu^* > 0$ é autofunção associada ao primeiro autovalor, $\lambda_1^{\mu^*}$, do problema

$$\begin{cases} L_\mu^* \phi = \lambda_1^{\mu^*} \phi & \text{em } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

onde o operador L_μ^* é o operador adjunto de L_μ. Sem perda de generalidade, podemos normalizar ψ_μ^* de modo que $\displaystyle\int \psi_\mu^* dx = 1$. Além disso, é conhecido que se $\psi_\mu^* > 0$ é autofunções principal, então existe uma constante C_0 tal que

$$\psi_\mu^*(x) \geq C_0 \delta(x), \tag{2.24}$$

para todo $x \in \Omega$ (ver Apêndice A.11). Assim, para obter (2.20), buscaremos uma limitação a priori das soluções do seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} L_\mu u_\mu = f_\mu(\vec{u}) + t\psi_\mu^* & \text{em } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.25}$$

Para obter tais limitações, precisamos de algumas condições de crescimentos sobre $\vec{f}$. A primeira dessas condições segue do seguinte lema:

Lema 2.4. *Suponha que* $\vec{u} \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^m$ *é uma solução não-negativa de* (2.25) *e que* $\vec{f}$ *satisfaz (H2). Então t,* $\displaystyle\int_\Omega u_\mu \delta$ *e* $\displaystyle\int_\Omega f_\mu(\vec{u})\delta$ *são limitados superiormente por uma constante* $C > 0$ *que é independente de* $\vec{u}$.

Demonstração. Seja $L = \displaystyle\lim_{x_\mu \to \infty} \frac{f_\mu(\vec{x})}{x_\mu} > \lambda_1^{\mu^*}$. Pela hipótese (H2), segue que existe $M > 0$ tal que

$$x_\mu > M \Longrightarrow f_\mu(\vec{x}) \geq k_1 x_\mu,$$

para algum $k_1 \in \left(\lambda_1^{\mu^*}, L\right)$. Daí, temos que $f_\mu(\vec{x}) \geq k_1 x_\mu - k_2$ para $x_\mu > M$ e para todo $k_2 > 0$. Defina a função $h\colon \overline{\Omega} \times [0,M] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x,y) = f_\mu(\vec{x}) - yk_1.$$

Como h é contínua e o conjunto $\overline{\Omega} \times [0,M]$ é compacto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(x,y) \geq c,\ \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega} \times [0,M].$$

Assim, $f_\mu(\vec{x}) - yk_1 \geq c$, ou ainda, $f_\mu(\vec{x}) \geq yk_1 + c$. Sem perda de generalidade, escolha $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $c_0 < 0$ e $c_0 < c$. Tomando $y = x_\mu$ e $k_2 = -c_0$, segue que $f_\mu(\vec{x}) \geq x_\mu k_1 - k_2,$ para $x_\mu \in [0,M]$. Portanto f_μ tem a seguinte propriedade

$$f_\mu(\vec{x}) \geq x_\mu k_1 - k_2,\ \ \forall x_\mu \geq 0. \tag{2.26}$$

Em particular, para $\vec{x} = \vec{u}$, temos que

$$f_\mu(\vec{u}) \geq u_\mu k_1 - k_2,\ \ \forall u_\mu \geq 0. \tag{2.27}$$

Tomando ψ_μ^* como função teste na definição de solução fraca de (2.25) (ver Definições A.2 e A.7), temos que

$$\int_\Omega L_\mu u_\mu \psi_\mu^* = \int_\Omega f_\mu(\vec{u})\psi_\mu^* + t(\psi_\mu^*)^2.$$

Como L_u^* é adjunto de L_μ, segue da igualdade acima que

$$\lambda_1^{\mu^*} \int_\Omega u_\mu \psi_\mu^* = \int_\Omega f_\mu(\vec{u})\psi_{\mu^*} + t(\psi_\mu^*)^2. \tag{2.28}$$

Aplicado (2.27) em (2.28) e como $\displaystyle\int_\Omega \psi_\mu^* = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{\mu^*} \int_\Omega u_\mu \psi_\mu^* &\geq \int_\Omega (u_\mu k_1 - k_2)\psi_\mu^* + t(\psi_\mu^*)^2 \\
&= k_1 \int_\Omega u_\mu \psi_\mu^* - k_2 \int_\Omega \psi_\mu^* + t \int_\Omega (\psi_\mu^*)^2 \\
&\geq k_1 \int_\Omega u_\mu \psi_\mu^* - k_2 + t \int_\Omega (\psi_\mu^*)^2.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Isolando a parcela $t\int_\Omega(\psi_\mu^*)^2$ em (2.29) e como $\lambda_1^{\mu^*}<k_1$, segue que

$$\begin{aligned} t\int_\Omega(\psi_\mu^*)^2 &\leq \lambda_1^{\mu^*}\int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* - k_1\int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* + k_2 \\ &\leq k_1\int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* - k_1\int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* + k_2 \\ &= k_2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$t \leq \frac{k_2}{\int_\Omega(\psi_\mu^*)^2}. \tag{2.30}$$

Por outro lado, elevando ao quadrado (2.24) e integrando, temos que

$$(C_0)^2\delta^2 \leq (\psi_\mu^*)^2 \tag{2.31}$$

$$(C_0)^2\int_\Omega\delta^2 \leq \int_\Omega(\psi_\mu^*)^2. \tag{2.32}$$

Por (2.30) e (2.32), temos que

$$t \leq \frac{k_2}{\int_\Omega(\psi_\mu^*)^2} \leq \frac{k_2}{C_0^2\int_\Omega\delta^2}.$$

Portanto, t é limitado por uma constante que independente de $\vec{u}$.
Agora, por (2.29), temos que

$$\begin{aligned} \lambda_1^{\mu^*}\int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* &\geq k_1\int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* - k_2 \\ \left(k_1-\lambda_1^{\mu^*}\right)\int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* &\leq k_2 \\ \int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* &\leq \frac{k_2}{k_1-\lambda_1^{\mu^*}}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Daí, integrando (2.24) e aplicando (2.33), temos que

$$\begin{aligned} C_0\int_\Omega u_\mu\delta \leq \int_\Omega u_\mu\psi_\mu^* &\leq \frac{k_2}{k_1-\lambda_1^{\mu^*}} \\ \int_\Omega u_\mu\delta &\leq \frac{k_2}{C_0\left(k_1-\lambda_1^{\mu^*}\right)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_\Omega u_\mu \delta$ é limitado por uma constante que independente de $\vec{u}$.

Finalmente, por (2.28) e (2.24), temos que

$$\begin{aligned}\gamma_1^{\mu^*}\int_\Omega u_\mu \psi_\mu^* &= \int_\Omega f_\mu(\vec{u})\psi_\mu^* + \int_\Omega t(\psi_\mu^*)^2\\ &\geq \int_\Omega f_\mu(\vec{u})\psi_\mu^*\\ &\geq C_0\int_\Omega f_\mu(\vec{u})\delta.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\int_\Omega f_\mu(\vec{u})\delta \leq \frac{\lambda_1^{\mu^*}}{C_0}\int_\Omega u_\mu \psi_\mu^*. \tag{2.34}$$

Daí, aplicando (2.33) em (2.34), temos que

$$\int_\Omega f_\mu(\vec{u})\delta \leq \frac{\lambda_1^{\mu^*}}{C_0}\int_\Omega u_\mu \psi_\mu^* \leq \frac{\lambda_1^{\mu^*}k_2}{C_0(k_1-\lambda_1^{\mu^*})}.$$

Portanto, $\int_\Omega f_\mu(\vec{u})\delta$ é limitado por uma constante que independente de $\vec{u}$. □

2.4 Primeiro Teorema de Existência

Esta seção é dedicada exclusivamente a demonstrar a existência de solução fraca do problema (2.1) quando $\vec{f}$ satisfaz (H0), (H1), (H2), (H3), (H4) e (HC1). Recorde que

$$c_\mu^0 := \inf_\Omega c_\mu \ \text{ e } \ b_\mu^0 := \sup_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(b_{\mu_i}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{2.35}$$

Segue o primeiro resultado.

Teorema 2.2. ***(Primeiro Teorema de Existência)*** *Seja $N \geq 3$ e supondo que $\vec{f}$ satisfaz (H0), (H1), (H2), (H3), (H4) e (HC1). Então,* (2.1) *tem solução não-negativa não-trivial. Em particular, se $\vec{f}$ é quase-irredutível então cada componente da solução é estritamente positiva em Ω.*

Demonstração. Como discutido logo antes do Teorema do Ponto Fixo, Teorema 2.1, é suficiente mostrar que vale (2.19) e (2.20).

Começamos com (2.20), no qual é equivale a mostrar que não há solução não-negativa para o problema (2.25), isto é,

$$\begin{cases} L_\mu u_\mu = f_\mu(\vec{u}) + t\psi_\mu^* & \text{em } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.36}$$

com $t \geq 0$ e $\|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m} = R$. De fato, como $\vec{F}\vec{u} = A^{-1}(\vec{f}(\vec{u}))$ e $\vec{F}\vec{u} = \vec{u} - t\psi^*$ temos que

$$\begin{aligned} A^{-1}(\vec{f}(\vec{u})) &= \vec{u} - t\psi^* \\ A^{-1}(\vec{f}(\vec{u})) &= \vec{u} - tA^{-1}\text{col.}(\psi_1^*, \cdots, \psi_m^*) \\ A^{-1}(\vec{f}(\vec{u}) + t\text{col.}(\psi_1^*, \cdots, \psi_m^*)) &= \vec{u} \\ \begin{bmatrix} (L_1)^{-1}(f_1(\vec{u}) + t\psi_1^*) \\ \vdots \\ (L_m)^{-1}(f_m(\vec{u}) + t\psi_m^*) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Isto é, $u_\mu = (L_\mu)^{-1}(f_\mu(\vec{u}) + t\psi_\mu^*)$, para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$. Por (2.17), temos que

$$u_\mu = (L_\mu)^{-1}(f_\mu(\vec{u}) + t\psi_\mu^*) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_\mu u_\mu = f_\mu(\vec{u}) + t\psi_\mu^* & \text{em } \Omega, \\ u_\mu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como mencionado anteriormente, qualquer solução fraca de (2.25) em $C(\overline{\Omega})$ pode ser regularizada via método usual de bootstrap. Além disso, se $\|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m} = R > 0$ então, pelo principio do Máximo de E. Hopf (ver Apêndice D, Teorema C.1), temos que $u_\mu > 0$ em Ω para pelo menos um índice μ.

Além disso, vale a desigualdade

$$\|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \sum_{\mu=1}^{m} \|\nabla u_\mu\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.37}$$

para alguma constante $C_0 > 0$. Pois,

$$(\nabla|\vec{u}|)^2 = \left(\nabla \sum_{\mu=1}^{m} |u_\mu|\right)^2 = \left(\sum_{\mu=1}^{m} \nabla|u_\mu|\right)^2 \leq C \sum_{\mu=1}^{m} \left|\nabla|u_\mu|\right|^2,$$

para alguma constante $C > 0$. Integrando a desigualdade acima e como $\left|\nabla |u_\mu|\right|^2 = \left|\nabla u_\mu\right|^2$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla |\vec{u}||^2 \leq C \sum_{\mu=1}^{m} \int_\Omega \left|\nabla |u_\mu|\right|^2 = C \sum_{\mu=1}^{m} \int_\Omega \left|\nabla u_\mu\right|^2.$$

Logo, (2.37) segue tomando $C_0 = \sqrt{C}$.

Para mostrar que podemos escolher R de tal modo que (2.25) não tenha solução com $\|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m} = R$, obteremos uma limitação a priori na norma $\|\cdot\|_{(C(\overline{\Omega}))^m}$ de uma solução de (2.25) e escolheremos R maior que tal limitação. Para isso, tomamos u_μ como função teste na formulação de solução fraca de (2.25) e obtemos

$$\int_\Omega L_\mu u_\mu u_\mu = \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + t \int_\Omega u_\mu \psi_\mu^*.$$

A desigualdade de Estimativa de Energia (ver Teorema A.2), aplicada ao operador bilinear associado a L_μ (ver Definição A.6),

$$B\left[u_\mu, u_\mu\right] = \int_\Omega L_\mu u_\mu u_\mu,$$

garante que existem $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$, tais que

$$\begin{aligned} \beta \|u_\mu\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \gamma \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq B\left[u_\mu, u_\mu\right] \\ \beta \|u_\mu\|^2_{w_0^{1,2}(\Omega)} &\leq \gamma \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + t \int_\Omega u_\mu \psi_\mu^*. \end{aligned}$$

Como $\beta = \dfrac{a_\mu^0}{2}$ (ver Observação A.4, Teorema A.2), $\|u_\mu\|^2_{w_0^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)}$ e pelo Lema 2.4, segue que existe uma constante C_2, que independe de $\vec{u}$, tal que

$$\frac{1}{2} a_\mu^0 \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \gamma \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + C_2 \int_\Omega u_\mu \psi_\mu^*. \tag{2.38}$$

Como discutido no Lema 2.4, segue que $f_\mu(\vec{u}) \geq k_1 u_\mu - k_2$, onde k_1, k_2 são constantes e $k_1 > \gamma_1^\mu$. Multiplicando cada termo desta desigualdade por u_μ e integrando temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu &\geq k_1 \int_\Omega (u_\mu)^2 - k_2 \int_\Omega u_\mu \\
\frac{1}{k_1}\left(\int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu + k_2 \int_\Omega u_\mu\right) &\geq \int_\Omega (u_\mu)^2 \\
\|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{k_1}\left(\int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu + k_2 \int_\Omega u_\mu\right). \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Aplicando (2.39) em (2.38) e sabendo que $\psi^*_\mu \leq \|\psi^*_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}a^0_\mu \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{\gamma}{k_1}\left(\int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu + k_2 \int_\Omega u_\mu\right) + \int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu + C_2\|\psi^*_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega u_\mu \\
a^0_\mu \|\nabla u_\mu\|_{L^2(\Omega)} &\leq 2\left(\frac{\gamma + k_1}{k_1}\right) \int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu + 2\left(\frac{\gamma k_2}{k_1} + C_2\|\psi^*_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \int_\Omega u_\mu.
\end{aligned}$$

Seja $C_3 = \max\left\{2\left(\frac{\gamma + k_1}{k_1}\right), 2\left(\frac{\gamma k_2}{k_1} + C_2\|\psi^*_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right\}$. Como, pela hipótese (H1), se $u_\mu \geq 0$ então $f_\mu \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
a^0_\mu \|\nabla u_\mu\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_3 \int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu + C_3 \int_\Omega u_\mu \\
&\leq C_3 \int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu + C_3\|u_\mu\|_{L^1(\Omega)}. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

Por outro lado, a Desigualdade de Young com ε (ver desigualdade (A.5)) diz que $ab \leq \varepsilon a^2 + k(\varepsilon)b^2$ onde $k = k(\varepsilon)$, $a, b > 0$ e $\varepsilon > 0$. Daí, dado $v \in L^2(\Omega)$, fazendo $a = |v|, b = 1$ segue que $|v| \leq \varepsilon|v|^2 + k(\varepsilon)$. Integrando esta desigualdade temos que,

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \overline{k}(\varepsilon), \qquad (2.41)$$

onde $\overline{k}(\varepsilon) = k(\varepsilon)|\Omega|$. Além disso, pela caracterização variacional do autovalor principal λ_1 (ver Apêndice (A.16)), temos que

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2}{\int_\Omega v^2} = \frac{\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Daí,

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{2.42}$$

Em particular, por (2.41) e (2.42), para $v = u_\mu \in W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}$, segue que

$$\|u_\mu\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + \overline{k}(\varepsilon) \tag{2.43}$$

$$\|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.44}$$

Aplicando (2.43) e (2.44) em (2.40), temos que

$$\begin{aligned} a^0_\mu \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_3 \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + C_3 \|u_\mu\|_{L^1(\Omega)} \\ &3 \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + C_3 \varepsilon_1 \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + C_3 \overline{k}(\varepsilon) \\ &\leq C_3 \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + \frac{C_3 \varepsilon_1}{\lambda_1} \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + C_3 \overline{k}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Daí,

$$\left(a^0_\mu - \frac{C_3 \varepsilon_1}{\lambda_1} \right) \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + C_3 \overline{k}(\varepsilon).$$

Escolhendo $\varepsilon_1 = \overline{\varepsilon}$ tal que $\dfrac{C_3 \overline{\varepsilon}}{\lambda_1} = \dfrac{a^0_\mu}{2}$, temos que

$$\frac{a^0_\mu}{2} \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \leq \quad C_3 \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + C_4,$$

onde $C_4 = C_3 \overline{k}(\varepsilon)$. Logo,

$$\frac{a^0_\mu}{2C_4} \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_3}{C_4} \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + 1.$$

Fazendo $a_1 = \dfrac{a^0_\mu}{2C_4}$ e $C_5 = \dfrac{C_3}{C_4}$, segue que

$$a_1 \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_5 \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu + 1. \tag{2.45}$$

Note que a integral do lado direito de (2.45) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\int_\Omega f_\mu u_\mu = \int_\Omega (f_\mu)^\alpha \delta^\alpha (f_\mu)^{1-\alpha} \frac{u_\mu}{\delta^\alpha}, \tag{2.46}$$

onde $0 < \alpha < 1$. Perceba que, pelo Lema 2.4, existe uma constante $C_6 > 0$ que independe de $\vec{u}$ tal que

$$\int_\Omega \left|(f_\mu)^\alpha \delta^\alpha\right|^{\frac{1}{\alpha}} = \int_\Omega f_\mu \delta < C_6.$$

Logo $(f_\mu)^\alpha \delta^\alpha \in L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega)$. Por outro lado, novamente pelo Lema 2.4 e pelo Lema 2.3 existe uma constante $C_7 > 0$, que independe de $\vec{u}$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|(f_\mu)^{1-\alpha} \frac{u_\mu}{\delta^\alpha}\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \int_\Omega f_\mu \left(\frac{u_\mu}{\delta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&= \int_\Omega f_\mu \delta \left(\frac{u_\mu}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\le \left\|\frac{u_\mu}{\delta}\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_\Omega f_\mu \delta \\
&< C_7.
\end{aligned}$$

Assim, $(f_\mu)^{1-\alpha} \frac{u_\mu}{\delta^\alpha} \in L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)$. Com isso, podemos aplicar a desigualdade de Hölder (ver Desigualdade (A.6)) em (2.46) e obter

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_\mu u_\mu &= \int_\Omega (f_\mu)^\alpha \delta^\alpha (f_\mu)^{1-\alpha} \frac{u_\mu}{\delta^\alpha} \\
&\le \|f_\mu \delta\|_{L^1(\Omega)}^\alpha \left(\int_\Omega f_\mu \left(\frac{u_\mu}{\delta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} \\
&\le C_8 \left(\int_\Omega f_\mu \left(\frac{u_\mu}{\delta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

onde $C_8 > 0$ é uma constante tal que $\|f_\mu \delta\|_{L^1(\Omega)}^\alpha < C_8$. Daí, segue que

$$\int_\Omega f_\mu u_\mu \le C_8 \left(\int_\Omega |\vec{f}| \left(\frac{|\vec{u}|}{\delta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}. \tag{2.47}$$

Pela hipótese (HC1), temos que para todo $\varepsilon_2 > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|\vec{u}| > M \Longrightarrow \frac{|\vec{f}(\vec{u})|}{|\vec{u}|^\beta} < \varepsilon_2.$$

Assim, $|\vec{f}(\vec{u})| \leq |\vec{u}|^{\beta}\varepsilon_2 + C(\varepsilon_2)$, sempre que $|\vec{u}| > M$ e $C(\varepsilon_2)$ é uma constante que depende de ε_2. Caso $|\vec{u}| \leq M$, defina $h\colon \overline{\Omega}\times[0,\mu] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = y^{\beta}\varepsilon_2 - |\vec{f}(\vec{u}(x))|$. Claramente h é contínua e $\overline{\Omega}\times[0,\mu]$ é compacto. Daí, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) \geq C$ para todo $(x,y) \in \overline{\Omega}\times[0,\mu]$. Logo $y^{\beta}\varepsilon_2 - |\vec{f}(\vec{u}(x))| \geq C$, isto é, $|\vec{f}(\vec{u}(x))| \leq y^{\beta}\varepsilon_2 - C$. Com isso, tomando $y = |\vec{u}|$ e $C = -C(\varepsilon_2)$, segue que $|\vec{f}(\vec{u}(x))| \leq |\vec{u}|^{\beta}\varepsilon_2 + C(\varepsilon_2)$, sempre que $0 \leq |\vec{u}| \leq M$. Com isso, segue que

$$|\vec{f}(\vec{u}(x))| \leq |\vec{u}|^{\beta}\varepsilon_2 + C(\varepsilon_2), \quad \forall \varepsilon_2 > 0,\ |\vec{u}| \geq 0. \tag{2.48}$$

Logo, aplicando (2.48) em (2.47), temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_\mu u_\mu &\leq C_8\left[\int_\Omega \left(|\vec{u}|^{\beta}\varepsilon_2 + C(\varepsilon_2)\right)\left(\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{1-\alpha}\\
&= C_8\left(\int_\Omega \frac{\varepsilon_2|\vec{u}|^{\beta+\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} + \int_\Omega \frac{C(\varepsilon_2)|\vec{u}|^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha}\\
&\leq C_8\left(\int_\Omega \frac{\varepsilon_2|\vec{u}|^{\beta+\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} + C_8\left(\int_\Omega \frac{C(\varepsilon_2)|\vec{u}|^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha}\\
&= C_8\varepsilon_2^{1-\alpha}\left(\int_\Omega \frac{|\vec{u}|^{\beta+\frac{1}{1-\alpha}}}{|\delta|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} + C_8\left(C(\varepsilon_2)\right)^{1-\alpha}\left(\int_\Omega \frac{|\vec{u}|^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha}\\
&\leq C_8\varepsilon_2\left(\int_\Omega \frac{|\vec{u}|^{\beta+\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} + C_8C(\varepsilon_2)\left(\int_\Omega \frac{|\vec{u}|^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha}.
\end{aligned}\tag{2.49}$$

Pela hipótese (HC1), temos que $\beta = \dfrac{n+1}{n-1}$. Fazendo $\alpha = \dfrac{2}{n-1}$ temos que $n = \dfrac{2}{\alpha} - 1$. Logo

$$\beta = \frac{n+1}{n-1} = \frac{\frac{2}{\alpha}-1+1}{\frac{2}{\alpha}-1-1} = \frac{\frac{2}{\alpha}}{\frac{2}{\alpha}-2} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Com isso, temos que

$$\beta + \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} = \frac{2}{1-\alpha}.$$

Assim, (2.49) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_\mu u_\mu &\leq C_8\varepsilon_2\left[\int_\Omega\left(\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}}\right]^{1-\alpha} + C_8C(\varepsilon_2)\left[\int_\Omega\left(\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{1-\alpha}\\ &\leq C_8\varepsilon_2\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|^2_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(\Omega)} + C_8C(\varepsilon_2)\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}}\right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)}. \end{aligned}\tag{2.50}$$

Aplicando (2.50) em (2.45), temos que

$$\begin{aligned}a_1\|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_5\int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu + 1\\ &\leq C_5C_8\varepsilon_2\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|^2_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(\Omega)} + C_5C_8C(\varepsilon_2)\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}}\right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)} + 1.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{a_1}{C_5C_8}\|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_2\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|^2_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(\Omega)} + C(\varepsilon_2)\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}}\right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)} + \frac{1}{C_5C_8}.$$

Fazendo $a_2 = \dfrac{a_1}{C_5C_8}$ e $C_9 = \dfrac{1}{C_5C_8}$, temos que

$$a_2\|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_2\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|^2_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(\Omega)} + C(\varepsilon_2)\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}}\right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)} + C_9. \tag{2.51}$$

Como $|\vec{u}| \in W_0^{1,2}(\Omega)$, segue do Lema 2.2, para $\tau_1 = \dfrac{\alpha}{2}$, que existe uma constante $C_{10} > 0$ tal que

$$\left\|\frac{|\vec{u}|}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{10}\|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.52}$$

onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1-\tau_1}{N}$. Note que, como $\tau_1 = \dfrac{\alpha}{2}$ e $\alpha = \dfrac{2}{N+1}$, segue que

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-\frac{\alpha}{2}}{\frac{2}{\alpha}-1} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Logo $q = \dfrac{2}{1-\alpha}$. Daí, elevando (2.52) ao quadrado e substituindo $q = \dfrac{2}{1-\alpha}$, temos que

$$\left\| \frac{|\vec{u}|}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}} \right\|^2_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(\Omega)} \leq C_{10}^2 \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.53}$$

Mais uma vez pelo Lema 2.2, agora para $\tau_2 = \alpha$, segue que existe uma constante $C_{11} > 0$ tal que

$$\left\| \frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{11} \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.54}$$

onde q agora é dado por $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1-\tau_2}{N}$. Note que, como $N \geq 3$ então $q > \dfrac{1}{1-\alpha}$. De fato,

$$\begin{aligned} q = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-\alpha)}{N}\right)^{-1} > \frac{1}{1-\alpha} &\Leftrightarrow 1-\alpha > \frac{1}{2} - \frac{(1-\alpha)}{N} \\ &\Leftrightarrow (1-\alpha)\left(1+\frac{1}{N}\right) > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{N+1}\right)\left(\frac{N+1}{N}\right) > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{N-1}{N} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow N > 2. \end{aligned}$$

Além disso, por Desigualdade de Interpolação (ver desigualdade A.1), segue que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)$, isto é, existe uma constante $C_{12} > 0$ tal que

$$\left\| \frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}} \right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)} \leq C_{12} \left\| \frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}} \right\|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.55}$$

Aplicando (2.54) em (2.55), temos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{|\vec{u}|}{\delta^{\alpha}} \right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)} &\leq C_{12} C_{14} \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{13} \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

onde $C_{13} = C_{12}C_{14}$. Aplicando (2.56) e (2.53) em (2.51), temos que

$$a_2 \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_2 C_{10}^2 \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon_2) C_{13} \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} + C_9. \tag{2.57}$$

Somando todas as desigualdades acima com μ de 1 à m, temos que

$$a_2 \sum_{\mu=1}^{m} \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_2 C_{10}^2 m \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon_2) C_{13} m \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} + m C_9. \tag{2.58}$$

Por outro lado, a desigualdade (2.37) nos garante que

$$\|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0^2 \left(\sum_{\mu=1}^{m} \|\nabla u_\mu\| \right)^2 \leq C_0^2 \sum_{\mu=1}^{m} \|\nabla u_\mu\|^2. \tag{2.59}$$

Logo, multiplicando (2.59) por $a_2 > 0$, temos que

$$a_2 \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0^2 a_2 \sum_{\mu=1}^{m} \|\nabla u_\mu\|^2. \tag{2.60}$$

Multiplicando (2.58) por $C_0^2 > 0$ e por (2.60), temos que

$$a_2 \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0^2 \varepsilon_2 C_{10}^2 m \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} + C_0^2 C(\varepsilon_2) C_{13} m \|\nabla|\vec{u}|\|_{(L^2(\Omega))^m} + m C_0^2 C_9.$$

Fazendo $C_{14} = \max\left\{C_0^2 C_{10}^2 m, C_0^2 C_{13} m, m C_0^2 C_9\right\}$, temos que

$$a_2 \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{14} \varepsilon_2 \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{14} C(\varepsilon_2) \|\nabla|\vec{u}|\|_{(L^2(\Omega))^m} + C_{14}.$$

E fazendo $a_3 = \dfrac{a_2}{C_{14}}$, temos que

$$a_3 \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_2 \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon_2) \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} + 1. \tag{2.61}$$

$$(a_3 - \varepsilon_2) \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\varepsilon_2) \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} + 1. \tag{2.62}$$

Escolhendo $\varepsilon_2 = \dfrac{a_3}{2}$, temos

$$\frac{a_3}{2} \|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\frac{a_3}{2}\right) \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} + 1.$$

Fazendo $C_{15} = \dfrac{2C(\frac{a_3}{2})}{a_3}$ e $C_{16} = \dfrac{2}{a_3}$, temos

$$\|\nabla|\vec{u}|\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{15} \|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} + C_{15}.$$

Logo, que existe uma constante $C_{17} > 0$ tal que

$$\|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{17}. \tag{2.63}$$

Para estimar $|\vec{u}|$ começaremos usando Regularidade Elíptica (ver Apêndice A.4, com $f_\mu + t\psi_\mu^* \in L^p$ e $1 < p < \infty$) temos que existe $C_{18} = C_{18}(p, |\Omega|) > 0$ tal que

$$\|u_\mu\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_{18}\|f_\mu + t\psi_\mu^*\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.64}$$

Além disso, para $p > \dfrac{N}{2}$, pelo Teorema A.7, temos que $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$. Isto é, existe $C_{19} > 0$ tal que

$$\|u_\mu\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_{19}\|u_\mu\|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

Como $\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_\mu\|_{C(\overline{\Omega})}$, segue que

$$\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{19}\|u_\mu\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \tag{2.65}$$

Logo, aplicando (2.65) em (2.64), temos que

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{19}C_{18}\|f_\mu + t\psi_\mu^*\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C_{20}\|f_\mu\|_{L^p(\Omega)} + tC_{20}\|\psi_\mu^*\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

onde $C_{20} = C_{19}C_{18}$. Pelo Lema 2.4, existe $C_{21} > 0$ tal que $t \leq C_{21}$. Portanto,

$$\begin{aligned} C_{20}t\|\psi_\mu^*\|_{L^p(\Omega)} &\leq C_{20}C_{21}\|\psi_\mu^*\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C_{20}C_{21}\|\psi_\mu^*\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Fazendo $C_{22} = C_{20}C_{21}\|\psi_\mu^*\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{p}}$, temos

$$C_{20}t\|\psi_\mu^*\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{22}. \tag{2.68}$$

Aplicando (2.68) em (2.66), segue que

$$\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{20}\|f_\mu\|_{L^p(\Omega)} + C_{22}. \tag{2.69}$$

Como $|\vec{f}| = |f_1| + \cdots + |f_m|$, segue que $\|f_\mu\|_{L^p(\Omega)} \leq \||\vec{f}|\|_{L^p(\Omega)}$. Logo, por (2.69), temos que

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{20}\|f_\mu\|_{L^p(\Omega)} + C_{22} \\ &\leq C_{20}\||\vec{f}|\|_{L^p(\Omega)} + C_{22}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Já sabemos que $|\vec{f}(\vec{u}(x))| \leq |\vec{u}|^\beta \varepsilon_2 + C(\varepsilon_2)$, para todo $\varepsilon_2 > 0$ e $|\vec{u}| \geq 0$ (veja novamente (2.48)). Logo, aplicando esta desigualdade em (2.70), temos que

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{20}\||\vec{f}|\|_{L^p(\Omega)} + C_{22} \\ &\leq C_{20}\left\|\varepsilon_2|\vec{u}|^\beta + C(\varepsilon_2)\right\|_{L^p(\Omega)} + C_{22} \\ &\leq C_{20}\varepsilon_2\left\||\vec{u}|^\beta\right\|_{L^p(\Omega)} + C_{20}\,\|C(\varepsilon_2)\|_{L^p(\Omega)} + C_{22} \\ &= C_{20}\varepsilon_2\left\||\vec{u}|^\beta\right\|_{L^p(\Omega)} + C_{20}C(\varepsilon_2)|\Omega|^{\frac{1}{p}} + C_{22}. \end{aligned}$$

Fazendo $\overline{C}(\varepsilon_2) = C_{20}C(\varepsilon)|\Omega|^{\frac{1}{p}} + C_{22}$, temos que

$$\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{20}\varepsilon_2\left\||\vec{u}|^\beta\right\|_{L^p(\Omega)} + \overline{C}(\varepsilon_2). \tag{2.71}$$

Somando todas as desigualdade (2.71) com μ variando de 1 á m, temos que

$$\sum_{\mu=1}^{m}\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq mC_{20}\varepsilon_2\left\||\vec{u}|^\beta\right\|_{L^p(\Omega)} + m\overline{C}(\varepsilon_2). \tag{2.72}$$

Segue da desigualdade triangular que

$$\||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\|\sum_{\mu=1}^{m}|u_\mu|\right\|_{L^\infty} \leq \sum_{\mu=1}^{m}\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.73}$$

Então, por (2.73) e (2.72), temos que

$$\begin{aligned} \||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \sum_{\mu=1}^{m}\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C_{20}m\varepsilon_2\left\||\vec{u}|^\beta\right\|_{L^p(\Omega)} + \overline{C}(\varepsilon_2)m. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Com relação a (2.74), note que é possível estimar $\left\| |\vec{u}|^{\beta} \right\|_{L^p(\Omega)}$ do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\vec{u}|^{\beta p} &= \int_\Omega |\vec{u}|^{\beta p - p + p} \\
&= \int_\Omega |\vec{u}|^{p(\beta-1)} |\vec{u}|^{p} \\
&\leq \int_\Omega |\vec{u}|^{p(\beta-1)} \| |\vec{u}| \|^{p}_{L^\infty(\Omega)} \\
&= \| |\vec{u}| \|^{p}_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\vec{u}|^{p(\beta-1)}. \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

Elevando (2.75) a $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\beta - 1}{p(\beta-1)}$, temos que

$$\left(\int_\Omega |\vec{u}|^{\beta p} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \| |\vec{u}| \|^{\frac{p}{p}}_{L^\infty(\Omega)} \left[\left(\int_\Omega |\vec{u}|^{p(\beta-1)} \right)^{\frac{1}{p(\beta-1)}} \right]^{\beta-1}.$$

Assim, uma estimativa para $\left\| |\vec{u}|^{\beta} \right\|_{L^p(\Omega)}$ é dada por

$$\left\| |\vec{u}|^{\beta} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \| |\vec{u}| \|_{L^\infty(\Omega)} \| |\vec{u}| \|^{\beta-1}_{L^{p(\beta-1)}(\Omega)}. \qquad (2.76)$$

Aplicando (2.76) em (2.74), temos que

$$\begin{aligned}
\| |\vec{u}| \|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{20} m \varepsilon_2 \left\| |\vec{u}|^{\beta} \right\|_{L^p(\Omega)} + \overline{C}(\varepsilon_2) m \\
&\leq C_{20} m \varepsilon_2 \| |\vec{u}| \|_{L^\infty(\Omega)} \| |\vec{u}| \|^{\beta-1}_{L^{p(\beta-1)}(\Omega)} + \overline{C}(\varepsilon_2) m. \qquad (2.77)
\end{aligned}$$

Como, pela hipótese (HC1), $b = \dfrac{N+1}{N-1}$ então para $N \geq 3$, segue que $\beta > 1$ e que

$$\beta - 1 = \frac{N+1}{N-1} - 1 = \frac{2}{N-1} < \frac{2}{N-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
N(\beta - 1) &< \frac{2N}{N-2} = 2^* \\
N &< \frac{2^*}{\beta - 1}.
\end{aligned}$$

Daí, escolhendo p tal que $p \in \left(N, \dfrac{2^*}{\beta-1}\right)$, segue que $p(\beta-1) < 2^*$. Assim, da desigualdade de Poincaré, Teorema A.9 com $q = p(\beta-1) \in [1, 2^*]$, temos que existe uma constante C_{21} tal que

$$\||\vec{u}|\|_{L^{p(\beta-1)}(\Omega)} \leq C_{21}\|\nabla|\vec{u}|\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.78}$$

Aplicando (2.78) em (2.77), temos que

$$\begin{aligned} \||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{20} m \varepsilon_2 \||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} \||\vec{u}|\|^{\beta-1}_{L^{p(\beta-1)}(\Omega)} + \overline{C}(\varepsilon_2)m. \\ &\leq C_{20} m \varepsilon_2 \||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} C_{21}^{\beta-1} \|\nabla|\vec{u}|\|^{\beta-1}_{L^2(\Omega)} + \overline{C}(\varepsilon_2)m. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Aplicando (2.63) em (2.79), temos que

$$\begin{aligned} \||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{20} m \varepsilon_2 \||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} C_{21}^{\beta-1} \|\nabla|\vec{u}|\|^{\beta-1}_{L^2(\Omega)} + \overline{C}(\varepsilon_2)m \\ &\leq C_{20} m \varepsilon_2 \||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} C_{21}^{\beta-1} C_{17}^{\beta-1} + \overline{C}(\varepsilon_2)m. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(1 - m\varepsilon_2 C_{17}^{\beta-1} C_{20} C_{21}^{\beta-1}\right) \||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{C}(\varepsilon_2)m.$$

Escolhendo $\varepsilon_2 = \overline{\varepsilon_2}$ tal que $m\overline{\varepsilon_2} C_{17}^{\beta-1} C_{20} C_{21}^{\beta-1} = \dfrac{1}{2}$, então

$$\||\vec{u}|\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2\overline{C}(\overline{\varepsilon_2})m.$$

Portanto, $|\vec{u}|$ é limitado em $L^\infty(\Omega)$. Logo, escolhendo $R > 2\overline{C}(\overline{\varepsilon_2})m$ segue que a hipótese (2.20) do Teorema do Ponto Fixo está satisfeita.

Agora mostraremos que vale (2.19). Porém, mostrar (2.19) equivale a mostrar que, para $s \geq 1$ e $\|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m} = r$, não existe solução não-negativa para o problema

$$\begin{cases} L_\mu u_\mu = \dfrac{1}{s} f_\mu(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.80}$$

De fato, como $\vec{F}\vec{u} = A^{-1}(\vec{f}(\vec{u}))$ e $\vec{F}\vec{u} = s\vec{u}$, temos que

$$\begin{aligned}
A^{-1}(\vec{f}(\vec{u})) &= s\vec{u} \\
A^{-1}\left(\frac{1}{s}\vec{f}(\vec{u})\right) &= \vec{u} \\
\begin{bmatrix} (L_1)^{-1}\left(\frac{1}{s}f_1(\vec{u})\right) \\ \vdots \\ (L_m)^{-1}\left(\frac{1}{s}f_m(\vec{u})\right) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Isto é, $u_\mu = (L_\mu)^{-1}\left(\frac{1}{s}f_\mu(\vec{u})\right)$, para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$. Por (2.17), temos que

$$u_\mu = (L_\mu)^{-1}\left(\frac{1}{s}f_\mu(\vec{u})\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\Delta u_\mu = \frac{1}{s}f_\mu(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ u_\mu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora note que, por uniformidade elíptica, com $\xi = \nabla u_\mu$, $\xi_i = (u_\mu)_{x_i}$ e $\xi_j = (u_\mu)_{x_j}$, por definição de supremo em b^0_μ e por definição de ínfimo em c^0_μ seguem, respectivamente, que:

$$\sum_{i,j}^{m} a^\mu_{ij}(x)(u_\mu)_{x_i}(u_\mu)_{x_j} \geq a^0_\mu |\nabla u_\mu|^2; \tag{2.81}$$

$$b^0_\mu \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(b_{\mu_i}\right)^2\right)^{1/2}; \tag{2.82}$$

$$c^0_\mu \leq c_\mu. \tag{2.83}$$

Tomando u_μ como função teste na formulação de solução fraca de (2.80), temos que

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^\mu_{ij}(u_\mu)_{x_i}(u_\mu)_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_{\mu_i}(u_\mu)_{x_i}u_\mu + c_\mu u_\mu^2\right) dx = \frac{1}{s}\int_\Omega f_\mu(\vec{u})u_\mu dx.$$

Somando todas as integrais acima com μ de 1 à m, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{\mu=1}^{m} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a^\mu_{ij}(u_\mu)_{x_i}(u_\mu)_{x_j} + \sum_{i=1}^{\mu} b_{\mu_i}(u_\mu)_{x_i}u_\mu + c_\mu u_\mu^2\right] dx &= \frac{1}{s}\int_\Omega \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu(\vec{u})u_\mu dx \\
&= \frac{1}{s}\int_\Omega \langle \vec{f}, \vec{u}\rangle dx.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Por outro lado, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver desigualdade (A.2)) e por (2.82), que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{\mu} b_\mu (u_\mu)_{x_i} u_\mu\right| &\leq \int_\Omega u_\mu \left|\sum_{i=1}^{\mu} b_{\mu_i} (u_\mu)_{x_i}\right| \\ &= \int_\Omega u_\mu \left|\langle \vec{b_\mu}, \nabla u_\mu \rangle\right| \\ &\leq \int_\Omega u_\mu |\vec{b_\mu}| |\nabla u_\mu| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u_\mu| u_\mu b_\mu^0. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Usando a desigualdade de Young (ver desigualdade (A.4)), com $p = q = 2$, temos que

$$|\nabla u_\mu| u_\mu b_\mu^0 = \left(\sqrt{\varepsilon} |\nabla u_\mu|\right) \left(\frac{u_\mu b_\mu^0}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \leq \frac{\varepsilon |\nabla u_\mu|^2}{2} + \frac{u_\mu^2 \left(b_\mu^0\right)^2}{2\varepsilon}. \tag{2.86}$$

Aplicando (2.86) em (2.85), temos que

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{\mu} b_{\mu_i} (u_\mu)_{x_i} u_\mu\right| \leq \int_\Omega |\nabla u_\mu| u_\mu b_\mu^0 \leq \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\mu|^2 + \int_\Omega \frac{\left(b_\mu^0\right)^2 u_\mu^2}{2\varepsilon}.$$

Em particular, segue que

$$-\int_\Omega \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\mu|^2 - \int_\Omega \frac{\left(b_\mu^0\right)^2 u_\mu^2}{2\varepsilon} \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_{\mu_i} (u_\mu)_{x_i} u_\mu. \tag{2.87}$$

Além disso, integrando (2.81) e (2.83), temos as seguintes desigualdades:

$$\int_\Omega a_\mu^0 |\nabla u_\mu|^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}^\mu (u_\mu)_{x_i} (u_\mu)_{x_j}; \tag{2.88}$$

$$\int_\Omega c_0 u_\mu^2 \leq \int_\Omega c_\mu^0 u_\mu^2. \tag{2.89}$$

Por (2.87), (2.88) e (2.89) aplicados em (2.84) temos que

$$\sum_{\mu=1}^{m} \int_\Omega a_\mu^0 |\nabla u_\mu|^2 - \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\mu|^2 - \frac{\left(b_\mu^0 u_\mu\right)^2}{2\varepsilon} + c_\mu^0 u_\mu^2 \leq \frac{1}{s} \int_\Omega \langle \vec{f}, \vec{u} \rangle. \tag{2.90}$$

Por outro lado, perceba que

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}|^2 = \left(\sum_{\mu=1}^{m} |u_\mu|\right)^2 &\leq \left(\sum_{\mu=1}^{m} \max_{\Omega} |u_\mu(x)|\right)^2 \\
&= \left(\sum_{\mu=1}^{m} \|\vec{u}\|_{C(\overline{\Omega})}\right)^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2_{(C(\overline{\Omega}))^m}. \qquad (2.91)
\end{aligned}
$$

Logo, se $\|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m} = r$ então $|\vec{u}| \leq r$. Daí, para r suficientemente pequeno temos que $|\vec{u}|$ é menor ainda. Pela hipótese (H4), com $x = \vec{u}$, existe $\gamma < \gamma_0$ tal que $\left\langle \vec{u}, \vec{f}(\vec{u}) \right\rangle \leq \gamma |\vec{u}|$, sempre que $|\vec{u}| < \gamma_0$. Daí, segue de (2.90) que

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{m} \int_{\Omega} \left(a^0_\mu - \frac{\varepsilon}{2}\right) |\nabla u_\mu|^2 - \frac{\left(b^0_\mu u_\mu\right)^2}{2\varepsilon} + c^0_\mu u^2_\mu &\leq \frac{1}{s} \int_{\Omega} \gamma |\vec{u}|^2 \\
&\leq \gamma \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 \text{ (pois, } s > \text{ ou } = 1) \\
&= \gamma \int_{\Omega} \sum_{\mu=1}^{m} |u_\mu|^2 \\
&= \gamma \sum_{\mu=1}^{m} \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \gamma \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m}. \qquad (2.92)
\end{aligned}
$$

Escolhendo $\varepsilon = \dfrac{b^0_\mu}{\sqrt{\lambda_1}}$ em (2.92),

$$
\sum_{\mu=1}^{m} \int_{\Omega} \left(a^0_\mu - \frac{b^0_\mu}{2\sqrt{\lambda_1}}\right) |\nabla u_\mu|^2 - \frac{\sqrt{\lambda_1} b^0_\mu u^2_\mu}{2} + c^0_\mu u^2_\mu \leq \gamma \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m}. \qquad (2.93)
$$

Da hipótese (H3), temos que

$$
\begin{aligned}
\inf_{\mu} \left\{ a^0_\mu \lambda_1 - b^0_\mu \sqrt{\lambda_1} \right\} > 0 &\implies a^0_\mu \lambda_1 - b^0_\mu \sqrt{\lambda_1} > 0 \\
&\implies a^0_\mu - \frac{b^0_\mu}{2\sqrt{\lambda_1}} > 0. \qquad (2.94)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, segue da caracterização de primeiro autovalor (ver Apêndice (A.16)) que

$$\lambda_1 \int_\Omega u_\mu^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_\mu|^2.$$

Por (2.94),

$$\int_\Omega \left(a_\mu^0 - \frac{b_\mu^0}{2\sqrt{\lambda_1}} \right) \lambda_1 u_\mu^2 \leq \int_\Omega \left(a_1^\mu - \frac{b_\mu^0}{2\sqrt{\lambda_1}} \right) |\nabla u_\mu|^2. \tag{2.95}$$

Aplicando (2.95) em (2.93),

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^m \int_\Omega \left(a_\mu^0 - \frac{b_\mu^0}{2\sqrt{\lambda_1}} \right) \lambda_1 u_\mu^2 - \frac{\sqrt{\lambda_1} b_\mu^0 u_\mu^2}{2} + c_\mu^0 u_\mu^2 &\leq \gamma \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} \\
\sum_{\mu=1}^m \int_\Omega \left(a_\mu^0 \lambda_1 - \frac{b_\mu^0 \sqrt{\lambda_1}}{2} - \frac{\sqrt{\lambda_1} b_\mu^0}{2} + c_\mu^0 \right) u_\mu^2 &\leq \gamma \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} \\
\sum_{\mu=1}^m \int_\Omega \left(a_\mu^0 \lambda_1 - b_\mu^0 \sqrt{\lambda_1} + c_\mu^0 \right) u_\mu^2 &\leq \gamma \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} \\
\sum_{\mu=1}^m \int_\Omega \lambda_0 u_\mu^2 &\leq \gamma \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} \\
\gamma_0 \sum_{\mu=1}^m \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \gamma \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} \\
\gamma_0 \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} &\leq \gamma \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} \\
\gamma_0 &\leq \gamma, \qquad (2.96)
\end{aligned}$$

contradição. Assim, temos que (2.96) não ocorre para r suficientemente pequeno. Portanto, (2.80) não tem solução não-negativa, e (2.19) é válido, e podemos escolher $r < R$. Logo, a demonstração está completa. $\square$

2.5 Segundo Teorema de Existência

A partir de agora, buscaremos obter um resultado de existência sob condições de crescimento mais gerais em relação a função $\vec{f}$. No entanto, devemos assumir condições mais rigorosas sob o sistema. O operador L_μ será dado pelo operador $-\Delta$. Ao domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira regular, adicionaremos a propriedade de convexidade. E assim, como mencionado anteriormente, estudaremos o seguinte sistema com condição de contorno de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f_1(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \quad\vdots & \\ -\Delta u_m = f_m(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ u_1 = \cdots = u_m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.97}$$

Antes de começarmos, veremos que ao mudar o operador L_μ para $-\Delta$, obtemos uma condição mais geral sobre o termo de não-linearidade $\vec{f}$. De fato, se $L_\mu = -\Delta$, então $b_{\mu_i} = c_\mu = 0$ e

$$a_{\mu_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\xi_i\xi_j &\geq a_0^\mu |\xi|^2 \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_i\xi_i &\geq a_0^\mu |\xi|^2 \\ |\xi|^2 &= a_0^\mu |\xi|^2. \end{aligned}$$

Por, (2.4) e (2.35), temos que $a_0^\mu = 1$ e $b_0^\mu = c_0^\mu = 0$ para todo $\mu \in \{1,\ldots,m\}$. Assim,

$$\lambda_0 = \inf_\mu a_0^\mu \lambda_1 - b_0^\mu \sqrt{\lambda_1} + c_0^\mu = \inf_\mu \lambda_1 = \lambda_1 > 0.$$

Portanto, a hipótese (H4) pode ser reescrita como:

($\overline{H}$4) Existe $\gamma < \lambda_1$ tal que

$$\left\langle x, \vec{f}(x) \right\rangle \leq \gamma|x|, \text{ sempre que } |x| < \lambda_1;$$

Agora, como mencionado na introdução deste trabalho, seguiremos Troy [28] para fazer uma descrição geométrica do método de mover planos paralelos em relação a uma direção fixa. Em seguida, enunciaremos alguns lemas que serão usados na demonstração do segundo resultado de existência.

Seja y um vetor unitário em $\mathbb{R}^N$ e seja T_τ o hiperplano $\langle y, x \rangle = \tau$. Como Ω é limitado, para algum $\overline{\tau} > 0$ suficientemente grande, o plano $T_{\overline{\tau}}$ não intercepta $\overline{\Omega}$. Diminuímos τ (ou seja, o plano se move continuamente em direção a Ω, preservando a normal y) até T_τ

começar a intersectar $\overline{\Omega}$. A partir desse valor τ, o plano T_τ "corta" Ω e cria uma "capa aberta". Denotaremos esta capa por $\Sigma(\tau)$, isto é,

$$\Sigma(\tau) = \{x \in \Omega : \langle y, x\rangle > \tau\}.$$

Assim, $\Sigma(\tau)$ é a parte de Ω que está entre T_τ e $T_{\tilde{\tau}}$.

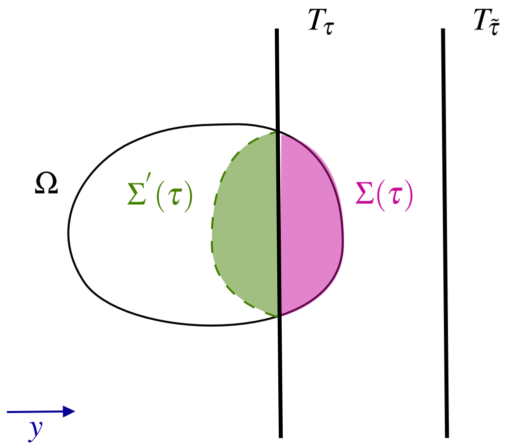

Figura 2.2 Capa Σ e a Reflexão Σ'.

Denotemos por $\Sigma'(\tau)$ a reflexão de $\Sigma(\tau)$ em relação ao plano T_τ (ver Figura 2.2).

No início, quando T_τ começar a intersectar $\overline{\Omega}$, temos que $\Sigma'(\tau) \subseteq \Omega$ e, a medida que τ diminui, permanecerá $\Sigma'(\tau) \subseteq \Omega$ até ocorrer uma das seguintes situações:

i) ou $\Sigma'(\tau)$ torna-se tangente internamente a $\partial\Omega$ em algum ponto $P \notin T_\tau$ (ver Figura 2.3);

ii) ou T_τ atinge uma posição na qual é ortogonal a $\partial\Omega$ em algum $Q \in T_\tau \cap \partial\Omega$ (ver Figura 2.4).

Denotamos por $T_{\tau_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle = \tau_1\}$, o plano T_τ quando atinge pela primeira vez uma posição $i)$ ou $ii)$. Segue da definição que $\Sigma'(\tau_1) \subseteq \Omega$. Também definimos

$$\tau_0 := \inf\{\hat{\tau} < \tilde{\tau} | \text{se } \hat{\tau} < \tau < \tilde{\tau}, \text{ então } T_\tau \cap \overline{\Omega} = \emptyset\}.$$

Daí, τ_0 é o primeiro valor de τ para o qual T_τ intercepta $\overline{\Omega}$.

Agora estamos prontos para enunciar o primeiro lema desta seção.

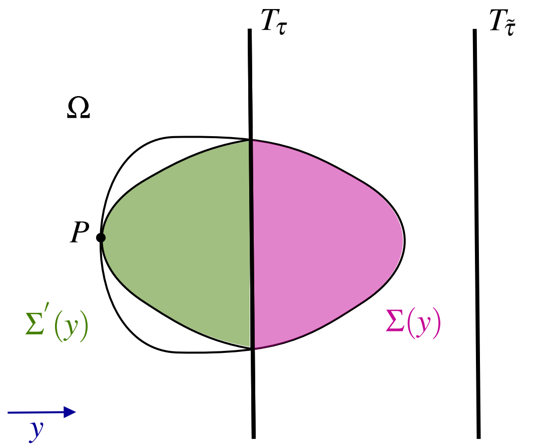

Figura 2.3 Caso i).

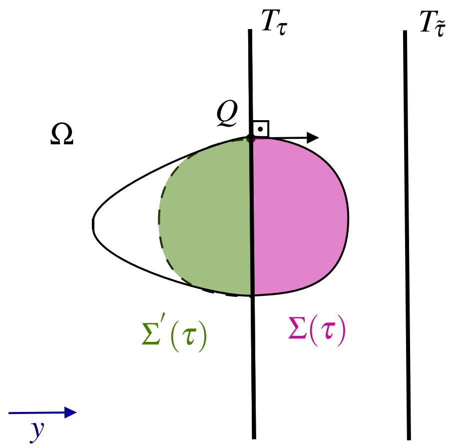

Figura 2.4 Caso ii).

Lema 2.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio convexo limitado com fronteira regular. Suponha que $\vec{f}$ satisfaz (H0) e (H5). Seja $\vec{u}$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta u_\mu = f_\mu(\vec{u}) & em\ \Omega, \\ \vec{u} = 0 & sobre\ \partial\Omega, \\ u_i > 0 & q.t.p\ em\ \Omega, \end{cases}$$

com $i \in \{1, \cdots, m\}$, e seja tau $\in (\tau_1, \tau_0)$. Então, $\dfrac{\partial u_\mu}{\partial y} < 0$ em $\Sigma(\tau)$.

Demonstração. Ver [28, Lemma 4.3]. □

Vamos usar este resultado para provar o seguinte lema:

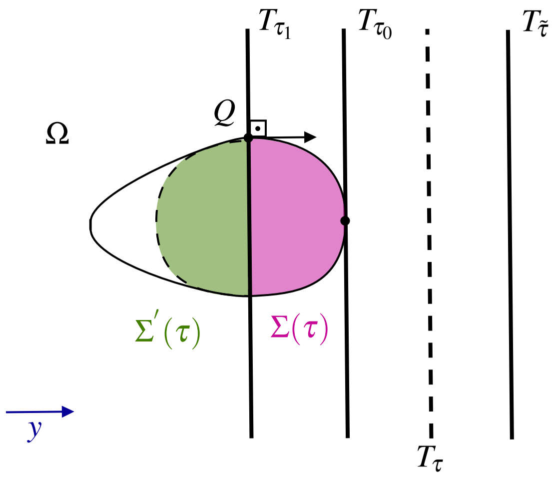

Figura 2.5 Definição de τ_0 e τ_1.

Lema 2.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado convexo com fronteira regular. Suponha que $\vec{f}$ satisfaz (H1) e (H5). Se $\vec{u}$ é não-negativo e satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u_\mu = f_\mu(\vec{u}) + t\psi & em\ \Omega, \\ \vec{u} = 0 & sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.98}$$

para algum $t \geq 0$, então ou $u_\mu \equiv 0$ em Ω ou $\dfrac{\partial u_\mu}{\partial y} < 0$ em $\Sigma(\tau)$, com $\tau \in (\tau_1, \tau_0)$.

Observação 2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ser domínio limitado convexo com fronteira regular é necessária para garantir que para cada ponto de $\partial\Omega$ podemos tomar o vetor unitário y como sendo o vetor normal a $\partial\Omega$ e assim cobrir uma vizinhança da $\partial\Omega$ com regiões $\Sigma(\tau)$.

Demonstração. Como $\vec{u}$ é não-negativo então $u_\mu \geq 0$ para todo $\mu \in \{1, \cdots, m\}$. Por (H1), temos que $f_\mu(\vec{u}) \geq 0$ para todo μ. Além isso, como $t, \psi \geq 0$, temos que

$$-\Delta u_\mu \quad = f_\mu(\vec{u}) + t\psi \geq 0.$$

Pelo Corolário C.2, com $L = -\Delta$, ou $u \equiv 0$ ou $u_\mu > 0$ q.t.p. em Ω. Se $u \equiv 0$ então o resultado segue de imediato. Suponha que $u > 0$ q.t.p. em Ω. Por (H5), temos que

$$\frac{\partial}{\partial u_\nu}(f_\mu(\vec{u}) + t\psi) = \frac{\partial f_\mu(\vec{u})}{\partial u_\nu} \geq 0, \tag{2.99}$$

para todo $\mu \neq \nu$ e $\vec{u}$ não-negativo. Fazendo $u_\mu = u_i$ e $f_i = f_\mu(\vec{u}) + t\psi$, temos que as hipóteses (2.98) e (2.99) nos permitem usar o Lema 2.5 e concluir que $\dfrac{\partial u_\mu}{\partial y} < 0$ em $\Sigma(\tau)$. □

Lema 2.7. *Nas hipérteses do Lema 2.6, existe um domínio ω, com $\overline{\omega} \subset \Omega$, tal que ou $u_\mu \equiv 0$ q.t.p em Ω ou $|\nabla u_\mu| \neq 0$ em $\Omega \backslash \overline{\omega}$.*

Demonstração. Dado $y \in \partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$, defina o conjunto $\Omega_\varepsilon := \Omega \cap B_\varepsilon(y)$ (Ver Figura 2.6).

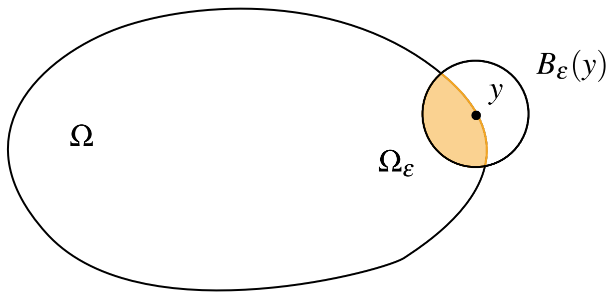

Figura 2.6 $\Omega_\varepsilon := \Omega \cap B_\varepsilon(y)$.

Denote por η_y o vetor normal exterior unitário à Ω em y. Pelo Lema 2.6, temos que ou $u_\mu \equiv 0$ q.t.p em Ω ou $\dfrac{\partial u_\mu}{\partial \eta_y} < 0$ em $\Sigma(\tau)$, com $\tau \in (\tau_1, \tau_0)$. Escolha $\tau \in (\tau_1, \tau_0)$ de modo que $\operatorname{dist}(T_\tau, T_{\tau_1}) = \operatorname{dist}(T_\tau, T_{\tau_0})$ (por construção de T_τ, tem-se que $\tau = \tau(y)$)(ver Figura 2.7). Seja $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que $\varepsilon(y) = \operatorname{dist}(T_\tau, T_{\tau_0})$. Sendo assim, temos que

$$\Omega_{\varepsilon(y)} \subset \Sigma(\tau(y)). \tag{2.100}$$

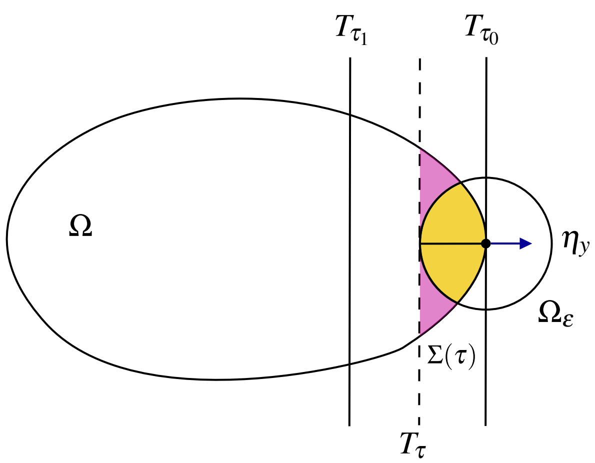

Figura 2.7 $\operatorname{dist}(T_\tau, T_{\tau_1}) = \operatorname{dist}(T_\tau, T_{\tau_0})$.

Por outro lado, $\partial\Omega$ admite uma cobertura aberta do seguinte modo

$$\partial\Omega = \bigcup_{y \in \partial\Omega} \{y\} \subset \bigcup_{y \in \partial\Omega} B_\varepsilon(y).$$

Como $\partial\Omega$ é compacto, então existem $y_1, \cdots, y_k \in \partial\Omega$, tais que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\varepsilon(y_i)}(y_i),$$

veja Figura 2.8.

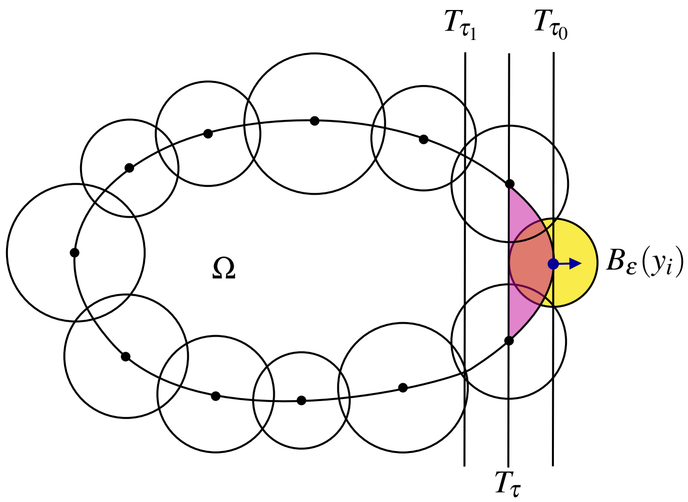

Figura 2.8 Cobertura de $\partial\Omega$.

Assim, para $i \in \{1, \cdots, k\}$, tome $\tau(y_i)$ e $\varepsilon(y_i)$ satisfazendo (2.100). Isto é,

$$\Omega_{\varepsilon(y_i)} \subset \Sigma(\tau(y_i)), \ \ \forall i \in \{1, \cdots, k\}. \tag{2.101}$$

Seja $\delta = \min\{\varepsilon(y_i) : \ i \in \{1, \cdots, k\}\}$ e denote por F_δ o subconjunto de Ω tal que

$$F_\delta = \{x \in \Omega : \ \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Note que F_δ é uma espécie de "faixa"interna de Ω (ver Figura 2.9).

Por (2.101) e como $\delta \leq \varepsilon(y_i)$, temos que

$$F_\delta \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_{\varepsilon(y_i)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma(\tau(y_i)).$$

Assim, em particular, temos que ou $u_\mu \equiv 0$ q.t.p em Ω ou $\dfrac{\partial u_\mu}{\partial \eta_y} < 0$ em F_δ. Isto é, u_μ não pode atingir um máximo em F_δ. Denote por ω o subconjunto de Ω tal que $F_\delta = \Omega \backslash \overline{\omega}$. Portanto, o resultado segue. $\square$

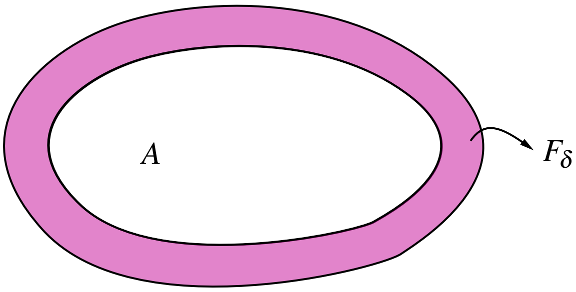

Figura 2.9 A faixa F_δ.

Finalmente, enunciaremos e demonstraremos o segundo resultado de existência de solução fraca do problema (2.97).

Teorema 2.3. ***(Segundo Teorema de Existência)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado convexo com fronteira regular. Suponha que $\vec{f}$ satisfaz (H0), (H1), (H2), ($\overline{H}$4), (H5) e (HC2). Então* (2.97) *tem uma solução não-trivial não-negativa. Se $\vec{f}$ for quase-irredutível, então cada componente da solução é estritamente positiva em Ω.*

Demonstração. A ideia da demonstração é análoga a demonstração do Teorema 2.2. Inicialmente, vamos mostra que vale (2.19). Assim como em (2.80), mostrar (2.19) equivale a mostrar que, para $s \geq 1$ e $\|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m} = r$, não existe solução não-negativa para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\mu = \dfrac{1}{s} f_\mu(\vec{u}) & \text{em } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.102}$$

Tomando u_μ como função teste na formulação de solução fraca de (2.102), temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_\mu \nabla u_\mu &= \frac{1}{s}\int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu \\ \int_\Omega |\nabla u_\mu|^2 &= \frac{1}{s}\int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Somando todas as μ's equações (2.103), obteremos que

$$\sum_{\mu=1}^m \int_\Omega |\nabla u_\mu|^2 = \frac{1}{s}\sum_{\mu=1}^m \int_\Omega f_\mu(\vec{u}) u_\mu = \frac{1}{s}\int_\Omega \sum_{\mu=1}^m f_\mu(\vec{u}) u_\mu = \frac{1}{s}\int_\Omega \langle \vec{f}(\vec{u}), \vec{u}\rangle. \tag{2.104}$$

Por (2.91), $|\vec{u}| \leq \|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m}$. Logo, se $\|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m} = r$ então $|\vec{u}| \leq r$. Daí, para r suficientemente pequeno temos que $|\vec{u}|$ é menor ainda. Pela hipótese ($\overline{H}$4), com $x = \vec{u}$, existe $\gamma < \lambda_1$

tal que $\left\langle \vec{u}, \vec{f}(\vec{u}) \right\rangle \leq \gamma|\vec{u}|^2$ sempre que $|\vec{u}| < \lambda_1$. Daí, por (2.104)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{\mu=1}^{m} |\nabla u_\mu|^2 &\leq \frac{1}{s}\int_\Omega \langle \vec{f}(\vec{u}), \vec{u}\rangle \\
&\leq \frac{1}{s}\int_\Omega \gamma|\vec{u}|^2 \\
&\leq \gamma\int_\Omega |\vec{u}|^2 \text{ (pois, } s > \text{ ou } = 1) \\
&= \gamma\int_\Omega \sum_{\mu=1}^{m} |u_\mu|^2 \\
&= \gamma\sum_{\mu=1}^{m} \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \gamma\|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m}. \qquad (2.105)
\end{aligned}$$

Por caracterização variacional do primeiro autovalor (ver Apêndice (A.16)), temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_\Omega |u_\mu|^2 &\leq \int_\Omega |\nabla u_\mu|^2 \\
\lambda_1 \sum_{\mu=1}^{m} \int_\Omega |u_\mu|^2 &\leq \int_\Omega \sum_{\mu=1}^{m} |\nabla u_\mu|^2 \\
\lambda_1 \sum_{\mu=1}^{m} \|u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_\Omega \sum_{\mu=1}^{m} |\nabla u_\mu|^2 \\
\lambda_1 \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} &\leq \int_\Omega \sum_{\mu=1}^{m} |\nabla u_\mu|^2 \qquad (2.106)
\end{aligned}$$

Por (2.105) e (2.106), tem-se que

$$\lambda_1 \|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m} \leq \int_\Omega \sum_{\mu=1}^{m} |\nabla u_\mu|^2 \leq \gamma\|\vec{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^m}.$$

Portanto, $\lambda_1 \leq \gamma$. Mas pela hipótese ($\overline{H}4$), esta última desigualdade não pode ocorrer quando $r = \|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m}$ é suficiente pequeno. Logo, (2.102) não tem solução. Portanto, podemos tomar $r < R$ e a demonstração desta etapa está completa.

Vamos mostrar agora que vale (2.20). Assim como (2.36), mostrar (2.20) equivale mostrar que não há solução não-negativa para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\mu = f_\mu(\vec{u}) + t\psi & \text{em } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $t \geq 0$ e $\|\vec{u}\|_{(C(\overline{\Omega}))^m} = R$.

Iniciamos notando que, pelo Lema 2.7, existe um domínio ω, com $\overline{\omega} \subset \Omega$ tal que ou $u_\mu \equiv 0$ q.t.p em Ω ou $|\nabla u_\mu| \neq 0$ em $\Omega \backslash \overline{\omega}$. Se $u_\mu \equiv 0$ q.t.p em Ω então não há o que demonstrar. Se $|\nabla u_\mu| \neq 0$ em $\Omega \backslash \overline{\omega}$ então u_μ não tem ponto de máximo positivo em $\Omega \backslash \overline{\omega}$. Daí, todo ponto de máximo positivo de u_μ está em ω. Logo

$$\sup_{\Omega} u_\mu \leq \sup_{\omega} u_\mu. \tag{2.107}$$

Assim, para estimar $\|\vec{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$ basta estimar $\|\vec{u}\|_{L^\infty(\omega)}$.

Afirmamos que $t, \|\vec{f}(\vec{u})\|_{L^1(\omega)}$ e $\|\vec{u}\|_{L^1(\omega)}$ são limitados por uma constante que independe de $\vec{u}$. De fato, como $\overline{\omega} \subset \Omega$ então $\partial\omega \cap \partial\Omega = \emptyset$. Daí, $\delta(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\omega}$. Como $\overline{\omega}$ é compacto, existe $\kappa > 0$ tal que

$$\delta(x) \geq \kappa, \ \forall\, x \in \overline{\omega}. \tag{2.108}$$

Pelo Lema 2.4, existe uma constante $c_0 > 0$, independente de $\vec{u}$, tal que

$$\int_\Omega \delta u_\mu \leq c_0. \tag{2.109}$$

Por (2.108) e (2.109), segue que

$$\begin{aligned} c_0 \geq \int_\Omega \delta u_\mu \geq \int_\omega \delta u_\mu \quad &\geq \quad \int_\omega u_\mu \kappa = \kappa \|u_\mu\|_{L^1(\omega)} \\ \|u_\mu\|_{L^1(\Omega)} \quad &\leq \quad c_1, \end{aligned} \tag{2.110}$$

onde $c_1 = \dfrac{c_0}{\kappa}$. Assim,

$$\|\vec{u}\|_{L^1(\omega)} = \sum_{\mu=1}^{m} \|u_\mu\|_{L^1(\omega)} \leq \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_1}{\kappa} = c_2. \tag{2.111}$$

Logo, $\vec{u}$ é limitado em $L^1(\omega)$ e independe da solução considerada. De maneira análoga, temos que existem constantes $c_3, c_4 > 0$, que não dependem de $\vec{u}$, tais que:

$$\|f^\mu(\vec{u})\|_{L^1(\omega)} \leq c_3; \tag{2.112}$$

$$\|\vec{f}(\vec{u})\|_{L^1(\omega)} \leq c_4. \tag{2.113}$$

Por fim, segue imediato do Lema 2.4, que existe uma constante c_5, que não depende de $\vec{u}$, tal que

$$t \leq c_5. \tag{2.114}$$

Daí, por (2.112), (2.114) e como $\|\psi\|_{L^1(\omega)} \leq c_6$, temos que

$$\begin{aligned} \|f^\mu(\vec{u}) + t\psi\|_{L^1(\omega)} &\leq \|f^\mu\|_{L^1(\omega)} + t\|\psi\|_{L^1(\omega)} \\ &\leq c_4 + c_5c_6 \\ &= c_7, \end{aligned} \tag{2.115}$$

onde $c_7 = c_4 + c_5c_6$ é uma constante que independe de $\vec{u}$. Note que, para $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \dfrac{N}{N-2}$ temos que

$$p' > \left(\frac{N}{N-2}\right)' = \frac{\frac{N}{N-2}}{\frac{N}{N-2} - 1} = \frac{N}{2}.$$

Logo, por imersão compacta (ver Teorema A.8), temos que

$$W_0^{2,p'}(\omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\omega}), \tag{2.116}$$

com $0 < \lambda < 2 - \dfrac{N}{p'}$. Por imersões em espaço de Hölder (ver Teorema A.6) com $0 < \lambda \leq 1$,

$$C^{0,\lambda}(\overline{\omega}) \hookrightarrow C^0(\overline{\omega}). \tag{2.117}$$

Por (2.116), (2.117) e $C^0(\overline{\omega}) \hookrightarrow L^\infty(\omega)$, temos que

$$W_0^{2,p'}(\omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\omega}) \hookrightarrow L^\infty(\omega). \tag{2.118}$$

Por propriedade de espaço de Banach, se vale (2.118) então

$$(L^\infty(\omega))' \hookrightarrow \left(W_0^{2,p'}(\omega)\right)'. \tag{2.119}$$

Sabendo que $\left(W_0^{2,p'}(\omega)\right)' = W^{-2,p}(\omega)$ (ver observações do Teorema A.1), segue de (2.119) que

$$(L^\infty(\omega))' \hookrightarrow W^{-2,p}(\omega). \tag{2.120}$$

Como $L^1(\omega) \hookrightarrow (L^\infty(\omega))'$, segue de (2.120) que $L^1(\omega) \hookrightarrow W^{-2,p}(\omega)$ quando $1 < p < \dfrac{N}{N-2}$. Isto é, existe $c_8 > 0$ tal que

$$\|f_\mu(\vec{u}) + t\psi\|_{W^{-2,p}(\omega)} \leq c_8 \|f_\mu(\vec{u}) + t\psi\|_{L^1(\omega)}. \tag{2.121}$$

Aplicando (2.115) em (2.121), temos que

$$\begin{aligned} \|f_\mu(\vec{u}) + t\psi\|_{W^{-2,p}(\omega)} &\leq c_8 \|f_\mu(\vec{u}) + t\psi\|_{L^1(\omega)} \\ &\leq c_8 c_7 \\ &= c_9 \end{aligned} \tag{2.122}$$

onde $c_9 = c_8 c_7$. Daí, por regularidade elíptica de Stampacchia (ver [27, Theorems 4.4 e 4.5]), $u_\mu \in L^p(\omega)$ e existe $c_{10} > 0$ tal que

$$\|u_\mu\|_{L^p(\omega)} \leq c_{10} \|f_\mu(\vec{u}) + t\psi\|_{W^{-2,p}(\omega)}. \tag{2.123}$$

Aplicando (2.122) em (2.123), temos que

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{L^p(\omega)} &\leq c_{10} \|f_\mu(\vec{u}) + t\psi\|_{W^{-2,p}(\omega)} \\ &\leq c_{10} c_9. \\ &= c_{11}, \end{aligned} \tag{2.124}$$

onde $c_{11} = c_9 c_{10}$. Por (HC2), existe $\beta \in \left(1, \dfrac{N}{N-2}\right)$ tal que

$$\lim_{|\vec{u}| \to \infty} \frac{\vec{f}(\vec{u})}{|\vec{u}|^\beta} = 0.$$

Desde que $\beta < \dfrac{N}{N-2}$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\beta + \delta_0 < \dfrac{N}{N-2}$. Assim, podemos tomar $p > \beta$, sem perda de generalidade, visto que fizemos anteriormente é verdade para todo $p \in \left(1, \dfrac{N}{N-2}\right)$. Recordemos que, por (2.48), vale

$$|\vec{f}| \leq \varepsilon |\vec{u}|^\beta + c(\varepsilon), \tag{2.125}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $c(\varepsilon) > 0$ é uma constante que depende de ε. Então, para $\dfrac{p}{\beta} > 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
|\vec{f}|^{\frac{p}{\beta}} &\leq (\varepsilon|\vec{u}|^{\beta} + c(\varepsilon))^{\frac{p}{\beta}} \\
&\leq c(p,\beta)\varepsilon^{\frac{p}{\beta}}|\vec{u}|^{p} + c(p,\beta)(c(\varepsilon))^{\frac{p}{\beta}},
\end{aligned} \tag{2.126}
$$

onde $c(p,\beta) > 0$ é uma constante que depende de p e β. Integrando (2.126) sobre ω e por (2.124), temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega} |\vec{f}|^{\frac{p}{\beta}} &\leq c(p,\beta)\varepsilon^{\frac{p}{\beta}} \int_{\omega} |\vec{u}|^{p} + c(p,\beta)(c(\varepsilon))^{\frac{p}{\beta}}|\omega| \\
&= c(p,\beta)\varepsilon^{\frac{p}{\beta}} \int_{\omega} \left(\sum_{\mu=1}^{m} |u_{\mu}|\right)^{p} + c(p,\beta)(c(\varepsilon))^{\frac{p}{\beta}}|\omega| \\
&\leq c(p,\beta)\varepsilon^{\frac{p}{\beta}} c(p) \int_{\omega} \sum_{\mu=1}^{m} |u_{\mu}|^{p} + c(p,\beta)(c(\varepsilon))^{\frac{p}{\beta}}|\omega| \\
&= c(p,\beta)\varepsilon^{\frac{p}{\beta}} \sum_{\mu=1}^{m} \int_{\omega} |u_{\mu}|^{p} + c(p,\beta)(c(\varepsilon))^{\frac{p}{\beta}}|\omega| \\
&= c(p,\beta)\varepsilon^{\frac{p}{\beta}} \sum_{\mu=1}^{m} \|u_{\mu}\|_{L^{p}}^{p} + c(p,\beta)(c(\varepsilon))^{\frac{p}{\beta}}|\omega| \\
&= c(p,\beta)\varepsilon^{\frac{p}{\beta}} \sum_{\mu=1}^{m} (c_{11})_{L^{p}}^{p} + c(p,\beta)(c(\varepsilon))^{\frac{p}{\beta}}|\omega|.
\end{aligned} \tag{2.127}
$$

Tome $\varepsilon = \overline{\varepsilon} = 1$ e seja $c_{12} = c(p,\beta) \displaystyle\sum_{\mu=1}^{m} (c_{11})_{L^{p}}^{p} + c(p,\beta)(c(\overline{\varepsilon}))^{\frac{p}{\beta}}|\omega|$. Assim, por (2.127), temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega} |\vec{f}|^{\frac{p}{\beta}} &\leq c_{12} \\
\left(\int_{\omega} |\vec{f}|^{\frac{p}{\beta}}\right)^{\frac{\beta}{p}} &= c_{12}^{\frac{\beta}{p}} \\
\|\vec{f}\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)} &\leq c_{13},
\end{aligned}
$$

onde $c_{13} = (c_{12})^{\frac{\beta}{p}}$. Daí, temos que

$$
\|f_{\mu}(\vec{u})\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)} \leq \|\vec{f}\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)} \leq c_{13}, \tag{2.128}
$$

com $\dfrac{p}{\beta} > 1$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\omega} |f_{\mu}(\vec{u}) + t\psi|^{\frac{p}{\beta}} &\leq c(p,\beta)\int_{\omega} |f_{\mu}(\vec{u})|^{\frac{p}{\beta}} + c(p,\beta)t^{\frac{p}{\beta}}\int_{\omega}|\psi|^{\frac{p}{\beta}} \\ &= c(p,\beta)\|f_{\mu}(\vec{u})\|^{\frac{\beta}{p}}_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)} + c(p,\beta)t^{\frac{p}{\beta}}\|\psi\|^{\frac{p}{\beta}}_{L^{\infty}(\omega)}|\omega|. \end{aligned} \tag{2.129}$$

Aplicando (2.114) e (2.128) em (2.129), segue que

$$\int |f_{\mu}(\vec{u}) + t\psi|^{\frac{p}{\beta}} \leq c(p,\beta)(c_{13})^{\frac{p}{\beta}} + c(p,\beta)(c_5)^{\frac{p}{\beta}}\|\psi\|^{\frac{p}{\beta}}_{L^{\infty}(\omega)}|\omega|.$$

Logo $f_{\mu}(\vec{u}) + t\psi \in L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)$, com $\dfrac{p}{\beta} > 1$. Daí, pelo Teorema A.4, $u_{\mu} \in W^{2,\frac{p}{\beta}}(\omega)$ e existe $c_{16} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|u_{\mu}\|_{W^{2,\frac{p}{\beta}}(\omega)} &\leq c_{16}\|f_{\mu}(\vec{u}) + t\psi\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)} \\ &\leq c_{16}\|f_{\mu}(\vec{u})\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)} + tc_{16}\|\psi\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)}.\end{aligned}$$

Por (2.128) e (2.114) , segue que

$$\|u_{\mu}\|_{W^{2,\frac{p}{\beta}}(\omega)} \leq c_{16}c_{13} + c_{16}c_5c_{16}\|\psi\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)} = c_{17}, \tag{2.130}$$

onde $c_{17} = c_{16}c_{13} + c_{16}c_5\|\psi\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\omega)}$. Via método de Bootstrap e repetindo o processo uma quantidade finita de vezes, podemos concluir que $\|u_{\mu}\|_{W^{2,q}(\omega)} \leq c_{18}$, para algum $q > \dfrac{N}{2}$. Então, pela imersões $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{\gamma}(\overline{\Omega})$, com $q > N$, temos que $\|u_{\mu}\|_{L^{\infty}(\omega)} \leq c_{19}$. Logo, $\|\vec{u}\|_{L^{\infty}(\omega)} \leq c_{19}$. Assim, $\|\vec{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq c_{19}$. Daí, a hipótese (2.20) segue exatamente como no Teorema 2.2 e, portanto, a existência de solução do problema (2.97) decorre do Teorema 2.1. $\square$

Apêndice A

Definições e Resultados Básicos

A.1 Desigualdades Elementares

Nesse apêndice iremos apresentar uma coleção de desigualdades elementares. As principais referências usadas aqui foram [29], [14] e [8] .

i) Seja f uma função real, contínua e estritamente crescente definida no intervalo $[0,c]$, com $c \geq 0$. Se $f(0) = 0$, $a \in [0,c]$ e $b \in [0, f(c)]$, então

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx. \tag{A.1}$$

Demonstração. Ver [29, Section 2.7, Theorem 1] □

ii) **(Desigualdade de Cauchy)**.

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \; (a,b \in \mathbb{R}). \tag{A.2}$$

Demonstração. Segue de (A.1) tomando $f(x) = x$. □

iii) **(Desigualdade de Cauchy com ε)**.

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \; (a,b > 0, \varepsilon > 0). \tag{A.3}$$

Demonstração. Segue de (A.1) tomando $f(x) = 2\varepsilon x$, com $\varepsilon > 0$. □

iv) **(Desigualdade de Young)**. Seja $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ (a, b > 0). \tag{A.4}$$

Demonstração. Segue de (A.1) tomando $f(x) = x^{p-1}$. □

v) **(Desigualdade de Young com ε)**. Seja $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \ (a, b > 0, \varepsilon > 0), \tag{A.5}$$

para $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Demonstração. Segue de (A.1) tomando $f(x) = \varepsilon p x^{p-1}$, com $\varepsilon > 0$. □

vi) **(Desigualdade de Hölder)**. Suponha que $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{A.6}$$

Demonstração. Ver [14, 6.2 Hölder's inequality]. □

vii) **(Desigualdade de Minkowski)**. Suponha que $1 \leq p \leq \infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$, então

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{A.7}$$

Demonstração. Ver [14, 6.5 Minkowski's inequality]. □

viii) **(Desigualdade de interpolação)**. Se $0 < p < q < r \leq \infty$ então $(L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)) \subset L^q(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}, \tag{A.8}$$

onde $\lambda \in (0, 1)$ é definido por

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1 - \lambda}{r}, \text{ isto é, } \lambda = \frac{q^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - r^{-1}}.$$

Demonstração. Ver [14, 6.10 Proposition]. $\square$

ix) **(Desigualdade de Hölder Generalizada)**. Seja $1 \leq p_j \leq \infty$ com $j = 1, \ldots, n$ de modo que $\sum_{j=1}^{n} p_j^{-1} = r^{-1} \leq 1$. Se $f_j \in L^{p_j}$ para $j = 1, \ldots, n$; então:

$$\prod_{j=1}^{n} f_j \in L^r \quad \text{e} \quad \left\| \prod_{1}^{n} f_j \right\|_r \leq \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{p_j}. \tag{A.9}$$

Demonstração. Ver [8, Theorem 2.1]. $\square$

A.2 O Dual de $W_0^{k,p}$

Os resultados e notações desta seção foram baseados em [13, Section 5.2.1, 5.2.2 e Appendex A.3] e [1, Chapter 3]. Iniciamos introduzindo a notação de multi índice para derivada parcial. Em seguida, definiremos derivada fraca, o espaço o Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, o subespaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ e o dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$. Para isso, fixaremos $1 \leq p \leq \infty$, k inteiro não negativo e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto.

Definição A.1. ***(Multi-índice α para derivada)***

i) O vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ é chamado multi-índice de ordem

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i.$$

ii) Dado o multi-índice α, denotamos a derivada α-ésima de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definição A.2. ***(Derivada Fraca)*** *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Dizemos que v é a α-ésima derivada fraca de u, e escrevemos*

$$v = D^\alpha u,$$

quando a igualdade

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi u \tag{A.10}$$

for satisfeita, para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

A derivada fraca, se existir, é única (ver [13, p. 243]).

Definição A.3. ***(O Espaço de Sobolev*** $W^{k,p}(\Omega)$***)*** *Seja* $1 \leq p \leq \infty$*. Para cada multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *com* $|\alpha| \leq k$*, definimos o espaço de Sobolev como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega);\ D^\alpha u \text{ existe e pertence a } L^p(\Omega)\}.$$

Observação A.1. i) Se $p = 2$, costuma-se escrever

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

ii) $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ são iguais se, e somente se, $u = v$ q.t.p em Ω.

Definimos uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$ do seguinte modo:

Definição A.4. ***(Norma em*** $W^{k,p}(\Omega)$***)*** *Seja* $u \in W^{k,p}(\Omega)$*, definimos sua norma como sendo*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & se\ 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & se\ p = \infty. \end{cases}$$

Definição A.5. ***(O subespaço*** $W_0^{k,p}(\Omega)$***)*** *Definimos por* $W_0^{k,p}(\Omega)$*, o fecho do conjunto* $C_c^\infty(\Omega)$ *com respeito a norma de* $W^{k,p}(\Omega)$*. Isto é,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Assim, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ *se, e somente se, existe uma sequencia* $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Por fim, segue a definição do dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Teorema A.1. ***(O espaço dual*** $W^{-k,p'}$***)*** *Seja* $1 \leq p < \infty$*, o espaço dual* $(W_0^{k,p}(\Omega))'$ *é isometricamente isomorfo ao espaço de Banach das distribuições* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *satisfazendo*

$$T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha T_{\upsilon_\alpha}, \tag{A.11}$$

onde $T_{\upsilon_\alpha} = \langle \phi, \upsilon_\alpha \rangle$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, *para algum vetor* $\upsilon \in L_n^{p'}(\Omega)$ *escrito na forma* $(\upsilon_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m}$, *normado por*

$$\|T\| = \inf\left\{ \|v\|_{L_N^{p'}(\Omega)} : v \textit{ satisfazendo } (\text{A.11}) \right\},$$

onde a norma $\|\cdot\|_{L_N^{p'}(\Omega)}$ *é dada por*

$$\|v\|_{L_N^{p'}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \textit{se } 1 \leq p' < \infty, \\ \max\limits_{1\leq i\leq N} \|v_i\|_{L^\infty(\Omega)} & \textit{se } p' = \infty. \end{cases}$$

Em geral, não se pode esperar nenhuma caracterização tão simples de $(W^{k,p}(\Omega))'$ *se* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *é um subespaço próprio de* $W^{k,p}(\Omega)$.

Observação A.2. Se $k = 1, 2, \ldots$ e $1 \leq p < \infty$, denote por $W^{-k,p'}(\Omega)$ o espaço de Banach das distribuições em Ω referido no Teorema A.1. Além disso, $W^{-k,p'}(\Omega)$ é separável e reflexivo se $1 < p < \infty$. Então, temos

$$(W_0^{k,p}(\Omega))' \cong W^{-k,p'}(\Omega). \tag{A.12}$$

Observação A.3. Para $k = 1, 2, \ldots$ e $1 < p < \infty$, o dual $(W^{k,p}(\Omega))'$ pode ser caracterizado como o completamento de $L^{p'}(\Omega)$ com respeito a norma

$$\|\upsilon\|_{W^{-k,p'}} = \sup_{u \in W^{k,p},\ \|u\|_{W^{k,p}} \leq 1} |\langle u, \upsilon \rangle|. \tag{A.13}$$

Demonstração. Ver [1, Section 3.1 - 3.14]. □

A.3 Solução Fraca e Regularidade Elíptica

Nesta seção, vamos considerar o problema de contorno de Dirichlet (P) e sua versão homogênea (P_0), dados por

$$(P) \begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad (P_0) \begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira regular, e

$$L\cdot := -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j \cdot) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i \cdot + c(x)\cdot \tag{A.14}$$

é o operador uniformemente elíptico com matriz (a_{ij}) simétrica e com constante de uniformidade elíptica igual a $\lambda > 0$. Além disso, denotamos por δ a função distância de x a $\partial\Omega$

Seguindo [13, p. 296], iniciamos com as definições de forma bilinear associada ao operador uniformemente elíptico L e a solução fraca do problema (P).

Definição A.6. ***(Forma Bilinear)*** *A forma bilinear $B[\cdot,\cdot]$ associada ao operador uniformemente elíptico L é dado por*

$$B[u,v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}v + c(x)uv\, dx,$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Definição A.7. ***(Solução Fraca)*** *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (P) se*

$$B[u,v] = \int_{\Omega} fv\, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema A.2. ***(Estimativas de Energia)*** *Existem constantes $\alpha, \beta > 0$ve $\gamma \geq 0$ tais que*

$$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$$
$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[u,v] + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [13, Section 6.2, Theorem 2]. □

Observação A.4. No desenvolver da demonstração do Teorema A.2, temos que β e γ são tomados de modo que

$$\beta := \frac{\lambda}{2} \quad \text{e} \quad \gamma := \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \|b_i\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)^2}{2\lambda},$$

onde $\lambda > 0$ é a constante de uniformidade elíptica do operador L .

Para o próximo teorema, precisaremos da definição de operador adjunto [13, p. 302].

Definição A.8. ***(Operador Adjunto)*** *O operador L^*, o adjunto formal de L, é dado por*

$$L^* \cdot := -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j \cdot) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i \cdot + \left(c(x) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i(b_i(x))\right)\cdot,$$

onde $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, para todo $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Teorema A.3. ***(Segundo Teorema de Existência de Solução Fraca)***

i) Precisamente uma das seguintes afirmações vale:
ou

α) para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ para o problema (P);

ou

β) existe uma única fraca $u \not\equiv 0$ para o problema homogêneo (P_0).

ii) Se β) vale, então a dimensão do subespaço $N \subset H_0^1(\Omega)$ das soluções fracas de (P_0) é finito e igual a dimensão do subespaço $N^* \subset H_0^1(\Omega)$ das soluções fracas de

$$\begin{cases} L^* v = 0 & em\ \Omega, \\ v = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

iii) Finalmente, o problema (P) admite uma solução fraca se, e somente se,

$$\int_\Omega fg = 0,\ \forall v \in N^*.$$

A dicotomia α),β) é conhecida como Alternativa de Fredholm.

Demonstração. Ver [13, Section 6.2.3, Theorem 4]. □

Teorema A.4. ***(Agmon - Douglis - Nirenberg)*** *Para $1 < p < +\infty$, suponha que $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), b_j, c, f \in L^p(\Omega)$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P), então $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ (que não depende de u) tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Mais ainda, se $a_{ij} \in C^1(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, $b_j, c, f \in W^{k,p}(\Omega)$ então $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [6, Theorem 9.32] ou [16, Theorem 9.11 e 9.13]. □

Teorema A.5. ***(Schauder)*** *Para $0 < \alpha < 1$, suponha que $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), b_j, c, f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P), então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ (que não depende de u) tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Mais ainda, se tivermos também $a_{ij}, b_j, c, f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ então $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Demonstração. Ver [6, Theorem 9.33] ou [16, Theorem 6.2 e 6.6]. □

Teorema A.6. ***(Imersões em Espaços de Hölder)*** *As seguintes imersões são compactas para k inteiro não negativo e $0 < \alpha' < \alpha \leq 1$:*

$$\begin{aligned} &C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega); \\ &C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha'}(\Omega); \\ &C^{k+1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\Omega). \end{aligned}$$

A seguinte imersão é continua :

$$C^{k+1}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega).$$

Demonstração. Ver [1, Theorem 1.31]. □

Teorema A.7. ***(Imersões de Sobolev)*** *As seguintes imersões são contínuas para $k \in \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$:*

1. *Se $p < \dfrac{n}{k}$, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*],$$

onde $p^* = \dfrac{Np}{N-kp}$. Em particular, para $N > 2$ e $k = 1$, temos que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, 2^*];$$

2. *Se* $p = \frac{n}{k}$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1,+\infty)\,;$$

3. *Se* $p > \frac{n}{k}$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\nu}(\overline{\Omega}),$$

onde:

$$\nu = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p} & se\ \left[\dfrac{n}{p}\right] < \dfrac{n}{p}, \\ \alpha\ \forall \alpha \in (0,1)\,, & se\ \left[\dfrac{n}{p}\right] = \dfrac{n}{p}. \end{cases}$$

e $[\cdot]$ *denota a parte inteira. Em particular, se* $p > N$, *então* $\left[\frac{n}{p}\right] = 0$ *e*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Ver [22, Theorem 4.15] ou [1, Theorem 5.4]. □

Teorema A.8. ***(Rellich-Kondrachov)*** *As seguintes imersões são compactas para* $k \in \mathbb{N}$ *e* $1 \le p < \infty$*:*

i) Se $p < \frac{n}{k}$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*).$$

Em particular, se $N > 2$ *e* $k = 1$, *temos que*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, 2^*);$$

ii) Se $p = \frac{n}{k}$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1,+\infty)\,;$$

iii) Se $p > \frac{n}{k}$, então

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\beta}(\overline{\Omega}),\ \forall \beta < \nu.$$

Em particular, se $p > N$, então

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1,\beta}(\overline{\Omega}),\ \forall \beta < 1 - \frac{n}{p};$$

iv) Como Ω é domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, as imersões i), ii) e iii) continuam compactas se substituirmos $W^{k,p}(\Omega)$ por $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [22, Theorem 4.19] ou [1, Theorem 6.2]. □

Teorema A.9. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C = C(p,q,n,|\Omega|)$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},\ \ \forall q \in [1, p^*].$$

Em particular, para todo $1 \leq p \leq \infty$, segue que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [13, Section 5.3 Theorem 3]. □

Teorema A.10. ***(Desigualdade de Hardy - Sobolev).*** *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ então existe uma constante $C > 0$*

$$\left\|\frac{u}{\delta}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $\delta = \delta(x)$ é função distância de x a $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [19, p. 76] ou [6, p. 313]. □

Teorema A.11. *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ tal que $Lu \geq 0$ em Ω e $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$u(x) \geq C\delta(x),\ \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. Ver [22, Theorem 1.6.2] juntamente com [22, Theorem 1.8.4] e [22, Definition 1.3.1]. □

A.4 Autovalores

Considere o seguinte problema de contorno de Dirichlet

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema A.12. *O problema (P_λ) admite uma sequência de autovalores λ_k tal que*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \ \ \lambda_k \to \infty$$

e

$$\lambda_1 = \min\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\}. \tag{A.15}$$

Demonstração. Ver [5, Theorem 1.13]. □

Definição A.9. ***(Autovalor Principal ou Primeiro Autovalor)*** *Chamaremos $\lambda_1 > 0$ de autovalor principal de $-\Delta$ ou primeiro autovalor.*

Observação A.5. Segundo [13, p. 336] e [5, p. 9], a igualdade (A.15) é conhecida como caracterização variacional do primeiro autovalor ou fórmula de Rayleigh e é equivalente a

$$\lambda_1 = \min\left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x} : u \in W_0^1(\Omega) \text{ e } u \not\equiv 0 \right\}. \tag{A.16}$$

Apêndice B

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Esse apêndice tem o objetivo de resumir os conceitos e definições a respeito do Grau Topológico de Brouwer, bem como enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer como consequência do Teorema 1.2. Iniciaremos com uma breve descrição do grau topológico de Brouwer.

Segundo [10, Chapter 1], de modo geral, desejamos obter uma ferramenta que possa dá informações sobre a existência de soluções de equações da forma

$$f(x) = y, \tag{B.1}$$

onde são dados:

i) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto;

ii) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação contínua ;

iii) $y \in \mathbb{R}^N$.

Tal ferramenta deve ajudar-nos a responder algumas questões como: Quando a equação (B.1) tem ao menos uma solução $x \in \Omega$?; A solução é única ou não?; Como as soluções estão distribuídas em Ω?; O que ocorre com as soluções de (B.1) quando mudarmos drasticamente a função f e o ponto $y \in \mathbb{R}^N$?. Sendo assim, a partir desses três objetos matemáticos (o aberto Ω, a função f e o ponto y), devemos ser possível estudar as soluções de (B.1) através desta ferramenta. A Teoria do Grau, mais precisamente o Grau Topológico de Brouwer, fará esse importante papel. Entretanto, será necessário algumas considerações iniciais sobre a terna Ω, f e y, para construir o Grau de Brouwer. Tais condições são enunciadas na forma da definição abaixo.

Definição B.1. ***(Terna Admissível para o Grau de Brouwer)*** *Sejam Ω um subconjunto não vazio do $\mathbb{R}^N$ e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação. Dizemos que a terna (f, Ω, y) é terna admissível para o Grau de Brouwer se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(B_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um aberto de* $\mathbb{R}^N$*;*

(B_2) $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *é uma aplicação contínua ;*

(B_3) $y \notin f(\partial\Omega)$.

A ideia do grau topológico de Brouwer é garantir a existência de uma aplicação d que associa cada terna admissível (f, Ω, y) a um inteiro de tal modo que as propriedades da função d nos permita responder as questões levantadas anteriormente. Vamos então exigir que d tenha as seguintes propriedades:

i) A primeira é o desejo natural de que se $f \equiv I$, aplicação identidade, então a equação $f(x) = y$ tem uma única solução.

ii) A segunda propriedade reflete o desejo de que d possa dá informação sobre onde a solução se encontra. Por exemplo, suponha que Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos disjunto de Ω tais que $f(x) = y$ tenha uma quantidade finita de soluções em $\Omega_1 \cup \Omega_2$ mas não tenha solução em $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Então, é natural pedir que o número de soluções encontradas em Ω seja a soma das soluções encontradas em Ω_1 e Ω_2.

iii) A terceira e última propriedade reflete o desejo de que se a aplicação f é muito complicada, então o número inteiro $d(f, \Omega, y)$ pode ser calculado por $d(g, \Omega, y)$ sempre que tal f possa ser deformada contínuamente na função g de modo que, no processo de deformação, mantenha-se a propriedade de (B_3).

As propriedades acimas são conhecidas como normalização, aditividade e invariância por homotopia, respectivamente. Em resumo, para uma terna admissível para o grau de Brouwer (f, Ω, y), busca-se definir uma aplicação d com valores em $\mathbb{Z}$, que satisfaça as seguintes propriedades:

(B1) **(Normalização)** $d(I, \Omega, y) = 1$, para todo $y \in \Omega$;

(B2) **(Aditividade)** $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$, onde Ω_1 e Ω_2 subconjuntos disjunto de Ω tais que $y \notin f(\overline{\Omega}/(\Omega_1 \cup \Omega_2))$;

(B3) **(Invariância Por Homotopia)** $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ independe de $t \in [0, 1]$ sempre que $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ e $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ são contínuas e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, para todo $t \in [0, 1]$.

É possível obter a aplicação d por construção migrando de um caso mais simples para um caso mais geral. As próximas três definições têm exatamente esse objetivo e são, precisamente, as definições 2.1, 2.2 e 2.3 de [10, Chapter 1], respectivamente.

Definição B.2. ***(Valor Regular)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, e $y \notin f(\partial\Omega \cup S_f)$. Então, definimos*

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn\, J_f(x),$$

onde $J_f(x) = \det f'(x)$, o Jacobiano de f em x, e $S_f = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$, o conjunto dos pontos criticos de f.

Definição B.3. ***(De Valor Regular para Valor Singular)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, e $y \notin f(\partial\Omega)$. Então, definimos*

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega,y_1),$$

onde y_1 é qualquer valor regular de f tal que $\|y_1 - y\| < dist(y, f(\partial\Omega))$ e $d(f,\Omega,y_1)$ é dada pela Definição B.2.

Definição B.4. ***(De $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para $C(\overline{\Omega})$)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $f \in C(\overline{\Omega})$, e $y \notin f(\partial\Omega)$. Então, definimos*

$$d(f,\Omega,y) := d(g,\Omega,y),$$

onde $g \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é qualquer aplicação tal que $\|g - f\| < dist(y, f(\partial\Omega))$ e $d(g,\Omega,y)$ é dada pela Definição B.3.

Finalmente podemos enunciar o teorema de existência do Grau de Brouwer.

Teorema B.1. ***(O Grau de Brouwer)*** *Seja*

$$M = \{(f,\Omega,y) \mid (f,\Omega,y) \text{ é terna admissível para o Grau de Brouwer}\}.$$

Então existe uma única função $d : M \to \mathbb{Z}$, o Grau de Brouwer, satisfazendo (B1)-(B3).

Demonstração. Ver [10, Theorem 3.1]. □

Corolário B.1. *Seguem mais algumas propriedades importantes do Grau de Brouwer:*

(B4) ***(Existência de Solução)*** *$d(f,\Omega,y) \neq 0$ implica que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$;*

(B5) ***(Constante em Componente Conexa)*** *$d(\cdot,\Omega,y)$ e $d(f,\Omega,\cdot)$ são constantes em $\{g \in C(\overline{\Omega}) : \|g-f\| < r\}$ e $B_r(y) \subset \mathbb{R}^N$, respectivamente, onde $r = dist(y, f(\partial\Omega))$. Mais ainda, $d(f,\Omega,\cdot)$ é constante em toda componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$;*

(B6) ***(Dependência da Fronteira)*** *$d(g,\Omega,y) = d(f,\Omega,y)$ sempre que $g\big|_{\partial\Omega} = f\big|_{\partial\Omega}$;*

(B7) ***(Excisão)*** *$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y)$, para todo subconjunto Ω_1 de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega_1)$.*

Demonstração. Ver [10, Theorem 3.1]. □

Agora temos todas as ferramentas para enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema B.2. ***(O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)*** *Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto convexo compacto não-vazio e $f : D \to D$ contínua. Então f tem um ponto fixo. O mesmo é verdade se D é apenas homeomorfo à um convexo compacto não-vazio.*

Demonstração. Suponha primeiramente que $D = \overline{B_r(0)}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $f(x) \neq x$ em ∂D, caso contrário não há o que demonstrar. Daí, a terna $(I - f, \text{int}.D, 0)$ é admissível para o grau de Brouwer, onde $\text{int}.D = B_r(0)$. Defina a aplicação $h : [0,1] \times D \to \mathbb{R}^N$ dada por $h(t,x) = x - tf(x)$. Claramente, h é contínua. Como

$$\begin{aligned}
\|h(t,x)\| &= \|x - tf(x)\| \\
&\geq \|x\| - t\|f(x)\| \\
&\geq r - tr \\
&= (1-t)r \\
&> 0,
\end{aligned}$$

em $[0,1) \times \partial D$ e $f(x) \neq x$ para $\|x\| = r$, temos que $0 \notin h([0,1] \times \partial D)$. Além disso, h é homotopia entre a aplicação $I - f$ e a aplicação identidade I. Pela invariância por homotopia (B3), segue que

$$d(I - f, \text{int}.D, 0) = d(I, B_r(0), 0).$$

Por (B1), normalização, temos que $d(I, B_r(0), 0) = 1$. Logo, $d(I - f, \text{int}.D, 0) = 1$. Pela propriedade de existência de solução (B4), temos que existe $x \in \text{int}.D = B_r(0)$ tal que $x - f(x) = 0$. Portanto, f tem um ponto fixo em $D = \overline{B_r(0)}$.

Suponha agora que D é um compacto convexo qualquer. Pelo Teorema 1.2, f admite uma extensão $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$(a mesma da demonstração do teorema 1.2) tal que $\tilde{f}(\mathbb{R}^N) \subset$

$\text{conv}(f(D))$. Como $\text{conv}(f(D)) \subset \overline{\text{conv}(f(D))} \subset D$, temos que $\tilde{f}(\mathbb{R}^N) \subset D$. Como D é limitado, podemos tomar $r > 0$ tal que $D \subset \overline{B_r(0)}$. De modo análogo ao caso anterior, podemos encontrar um ponto fixo x de $\tilde{f}$ em $\overline{B_r(0)}$. Mas $\tilde{f} \in D$, logo $x = \tilde{f}(x) = f(x)$. Portanto f admite um ponto fixo.

Finalmente, assuma que $D = h(D_0)$ onde h é um homeomorfismo e D_0 é compacto e convexo. Então a aplicação $h^{-1}fh : D_0 \to D_0$ tem um ponto fixo pelo caso anterior e $f(h(x)) = h(x) \in D$. Portanto, o resultado segue.

$\square$

Apêndice C

Princípio do Máximo

O objetivo desse apêndice é enunciar e demonstrar alguns resultados sobre princípios do máximo. Segundo Protter e Weinberger [25], o princípio do máximo é uma das melhores e mais usadas ferramentas conhecidas no estudo de equações diferencias parciais. Esse princípio é uma generalização natural do seguinte fato: se a função contínua f, definida em um intervalo compacto $[a,b]$, é tal que $f'' > 0$ então f não pode atingir seu máximo em um ponto do (a,b). Isto é, o máximo de f somente poderá ocorrer na fronteira do intervalo $[a,b]$. O mesmo argumento se aplica para o mínimo.

Existem diversos princípios máximo, mas esse apêndice irá tratar de apenas dois princípios. O primeiro, é o princípio do Máximo de E. Hopf para soluções clássicas. E o segundo, é uma adaptação do princípio do máximo para soluções fracas $W^{1,2}(\Omega)$, encontrado em [16, Theorem 8.19]. Além disso, enunciaremos um teorema de caracterização para o princípio do máximo.

Neste apêndice, vamos considerar o problema

$$(P)\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular e o operador elíptico de segunda ordem na forma divergente, isto é,

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{C.1}$$

onde aos coeficientes a_{ij}, b_i e c são tão suaves quanto necessário. Assumiremos que L é uniformemente elíptico, isto é, existe um número positivo λ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \tag{C.2}$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Os coeficientes de L são limitados do seguinte modo:

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)|^2 \leq A^2 \quad \text{e} \quad \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n} |b_i(x)|^2 + \lambda^{-1}|c(x)| \leq B^2, \tag{C.3}$$

para constantes $A, B \in \mathbb{R}$, com $B \geq 0$, e para todo $x \in \overline{\Omega}$. Por fim, assumiremos que

$$\int_\Omega cw\, dx \geq 0, \ \forall w \geq 0, \ w \in W_0^{1,1}(\Omega). \tag{C.4}$$

Definição C.1. *Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Dizemos que $Lu \geq 0$ em Ω, se*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j} + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}\phi + \int_\Omega c(x)u\phi \geq 0,$$

para todo $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Definição análoga vale para $Lu \leq 0$, trocando $\geq$ por $\leq$.

Temos então os seguinte princípio do máximo.

Teorema C.1. ***(Princípio do Máximo de E. Hopf)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave. Suponha que L é um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \geq 0$ e seja $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo*

$$Lu \geq 0 \ \text{ em } \ \Omega \quad \text{e} \quad m := \inf_\Omega u \in (-\infty, 0].$$

Então, ou $u = m$ em Ω, ou $u(x) > m$ para todo $x \in \Omega$. Em outras palavras, u não pode atingir m em Ω, a menos que $u = m$ em Ω . Consequentemente,

$$\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} = m,$$

se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [21, Theorem 2.1]. □

Teorema C.2. ***(Princípio do Máximo Forte)*** *Seja L satisfazendo as condições* (C.2), (C.3) *e* (C.4). *E seja* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *satisfazendo* $Lu \leq 0$ *em* Ω. *Então, se para alguma bola* $B \subset\subset \Omega$ *tivermos que*

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0, \tag{C.5}$$

a função u é constante q.t.p. em Ω.

Demonstração. Ver [16, Theorem 8.19]. □

Corolário C.1. *Seja L satisfazendo as condições* (C.2), (C.3) *e* (C.4). *E seja* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *satisfazendo* $Lu \geq 0$ *em* Ω. *Então, se para alguma bola* $B \subset\subset \Omega$ *tivermos que*

$$\inf_B u = \inf_\Omega u \leq 0, \tag{C.6}$$

a função u é constante q.t.p. em Ω.

Demonstração. Note que,

$$Lu \geq 0 \Rightarrow -Lu \leq 0 \Rightarrow L(-u) \leq 0.$$

Se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$ tivermos que

$$\inf_B u = \inf_\Omega u \leq 0,$$

então, para essa mesma bola $B \subset\subset \Omega$, temos que

$$-\inf_B u = -\inf_\Omega u \geq 0$$
$$\sup_B(-u) = \sup_\Omega(-u) \geq 0.$$

Logo, pelo Teorema C.2, segue que $-u$ é constante q.t.p. em Ω. Portanto, u é constante q.t.p. em Ω. □

Corolário C.2. *Seja L satisfazendo as condições* (C.2), (C.3) *e* (C.4). *E seja* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *satisfazendo* $Lu \geq 0$ *em* Ω *e* $u \geq 0$. *Então, ou* $u \equiv 0$ *ou* $u > 0$ *q.t.p. em* Ω.

Demonstração. Se $\inf_\Omega u > 0$ então não há o que provar. Suponha que $\inf_\Omega u \leq 0$. Por hipótese, $u \geq 0$, então $\inf_\Omega u = 0$.

Suponha que exista uma bola $B \subset\subset \Omega$ tal que

$$\inf_B u = \inf_\Omega u = 0.$$

Nesse caso, pelo Corolário C.1, temos que $u \equiv k(costante) \geq 0$ q.t.p. em Ω. Mas como $\inf_\Omega u = 0$, então $u \equiv 0$ q.t.p. em Ω.

Suponha agora que não exista uma bola $B \subset\subset \Omega$ tal que $\inf_B u = \inf_\Omega u = 0$. Isto é, para toda bola bola $B \subset\subset \Omega$ vale que

$$\inf_B u > \inf_\Omega u = 0. \tag{C.7}$$

Nesse caso, $u > 0$ q.t.p. em Ω. Caso contrário, existiria um subconjunto de medida positiva $M \subset \Omega$ tal que $u(x) \leq 0$, para todo $x \in M$. Como $|M| > 0$ então $M \neq \emptyset$. Agora, se Ω é aberto então para cada $y \in M \subset \Omega$ existe um raio r_y tal que $B_{r_y}(y) \subset \Omega$ e $u(y) \leq 0$. Para cada raio r_y, tome um novo raio $0 < \bar{r}_y < r_y$ tal que $B_{\bar{r}_y}(y) \subset\subset \Omega$. Daí,

$$\inf_{B_{\bar{r}_y}(y)} u \leq u(y) \leq 0,$$

contradizendo (C.7).

Em resumo, mostramos que:

i) Se existe uma bola $B \subset\subset \Omega$ tal que $\inf_B u = \inf_\Omega u = 0$, então $u \equiv 0$ q.t.p. em Ω;

ii) Se não existe uma bola $B \subset\subset \Omega$ tal que $\inf_B u = \inf_\Omega u = 0$, então $u > 0$ q.t.p. em Ω.

Portanto, ou $u > 0$ ou $u \equiv 0$ q.t.p. em Ω. □

Seguindo [21], antes de enunciar o próximo teorema precisaremos de algumas definições.

Definição C.2. ***(Supersolução Estrita)*** *A função $h \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, será uma supersolução do problema (P) se*

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & em\ \Omega, \\ u \geq 0 & em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

A função h será uma supersolução estrita de (P) se, em adicional, algumas das desigualdades acima é estrita em um conjunto de medida positiva.

Definição C.3. *Diremos que o problema* ***(P) satisfaz o princípio do máximo*** *se qualquer supersolução $h \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, de (P) satisfaz $h(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.*

Teorema C.3. ***(Caracterização do Principio do Máximo)*** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) (P) admite uma supersolução estrita $h \in W^{2,p}(\Omega)$*, para algum* $p > N$*;*

ii) (P) satisfaz o princípio do máximo;

iii) O operador resolvente $R : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ *associado ao problema (P) está bem definido e é contínuo e compacto.*

Demonstração. Ver [21, Theorem 4.2]. □

Corolário C.3. ***(Boa Definição do Operador Resolvente)*** *Se* $c(x) \geq 0$*, então o operador resolvente* $(L)^{-1} : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ *associado ao problema (P) está bem definido e é compacto e contínuo.*

Demonstração. Como $c(x) \geq 0$, temos que a função constante $h(x) = k > 0$ é supersolução estrita associado ao problema (P), pois

$$\begin{cases} Lh = Lk = c(x)k \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ h = k > 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema C.3, o operador solução associado ao operador L está bem definido. A compacidade de $(L)^{-1}$ é dada por regularidade elíptica e imersões compactas. □

Bibliografia

[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces*. Elsevier, 2003.

[2] H. Amann. *Lectures on Some Fixed Point Theorems*. IMPA, Rio de Janeiro, 1974.

[3] H. Amann. Fixed point theorems and nonlinear eigenvalue problems in ordered banach spaces. *SIAM Review*, 19(4):vii–vii, 1977.

[4] H. Amann and S. Weiss. On the uniqueness of the topological degree. *Mathematische Zeitschrift*, 130:39–54, 03 1973.

[5] A. Ambrosetti and A. Malchiodi. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, volume 10 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2007.

[6] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[7] H. Brezis and R. E. L. Turner. On a class of superlinear elliptic problems. *Communications in Partial Differential Equations*, 2(6):601–614, 1977.

[8] W. S. Cheung. Generalizations of hölder's inequality. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 26:7–10, 2001.

[9] C. Cosner. Positive solutions for superlinear elliptic systems without variational structure. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 8(12):1427–1436, 1984.

[10] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[11] J. Dugundji. An extension of tietze's theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, 1:353–367, 1951.

[12] J. Dugundji. *Topology, 8th print*. Allyn and Bacon series in advanced mathematics. Allyn and Bacon, Boston, 1973.

[13] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, 2010.

[14] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 1999.

[15] W-M. Gidas, B. Ni and L. Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Communications in Mathematical Physics*, 68(3):209–243, 1979.

[16] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. ACTA Neurochirurgica. Springer Berlin Heidelberg, 1983.

[17] S. Kesavan. *Functional Analysis*. Texts and Readings in Mathematics. Hindustan Book Agency, 2009.

[18] J. Leray and J. Schauder. *Topologie Et Équations Fonctionnelles*. University of Tennessee, Department of Mathematics, 1955.

[19] J. L. Lions and E. Magenes. Problmes aux limites non homogenes et applications. *travaux et recherches mathématiques*, 1:76, 1968.

[20] P. L. Lions. On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. *SIAM review*, 24(4):441–467, 1982.

[21] J. Lopéz-Gómez. The strong maximum principle (mathematical analysis on the self-organization and self-similarity). *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B15:113–123, 12 2009.

[22] J. Lopéz-Gómez. *Linear Second Order Elliptic Operators*. World Scientific, 2013.

[23] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall of India, 2004.

[24] R. Nussbaum. Positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 51(2):461–482, 1975.

[25] M. H. Protter and H. F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer New York, 2012.

[26] J. Serrin. A symmetry problem in potential theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 43(4):304–318, 1971.

[27] G. Stampacchia. Le problème de dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Annales de l'institut Fourier*, 15(1):189–257, 1965.

[28] W. C. Troy. Symmetry properties in systems of semilinear elliptic equations. *Journal of Differential Equations*, 42(3):400–413, 1981.

[29] P. M. Vasic and D. S. Mitrinovic. *Analytic Inequalities*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

Índice