Universidade de Brasília

Efeito Regularizante para um Sistema de Equações de Maxwell-Schrödinger

Amanda Clara Arruda

Orientador: Dr. Luís Henrique de Miranda

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre(a) em Matemática*

Brasília, 06 de abril de 2023

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Clara Arruda, Amanda
CA779e Efeito Regularizante para um Sistema de Equações de Maxwell-Schrödinger / Amanda Clara Arruda; orientador Luís Henrique de Miranda. -- Brasília, 2023.
96 p.

Dissertação(Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2023.

1. Efeito Regularizante. 2. Equações de Maxwell Schrödinger. 3. Sistema Elíptico. I. Henrique de Miranda, Luís, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Efeito Regularizante para um Sistema de Equações de Maxwell-Schrödinger

Amanda Clara Arruda *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRA EM MATEMÁTICA

Brasília, 06 de abril de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Luís Henrique de Miranda - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Ma To Fu – MAT/UnB (Membro)

Adilson Presoto

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto – UFSCar (Membro)

Dedico este trabalho a todos aqueles que torceram para que ele desse certo e que contribuíram de alguma forma, direta ou indiretamente, para a sua construção.

Agradecimentos

Eu não saberia a quem agradecer se me dispussesse aqui a agradecer a todos que de alguma forma fizeram com que isso fosse possível. Então, limito-me a agradecer primeiramente a minha família, pais, irmão, tios, tias, primos... Eu sou o resultado de uma forte corrente de apoio que sempre esteve presente e que nunca deixou de acreditar em mim.

Agradeço ao meu noivo, peça fundamental neste processo, e aos amigos e colegas que se mostraram sempre muito solícitos às minhas necessidades. Em particular, agradeço à colega Ayana, pois sem sua ajuda, este trabalho não seria possível. Agradeço também aos colegas André, Felipe, Thiago, George, Daniel Abreu, Franchesca, Wendy, Júlia... entre outros, que me apoiaram em momentos importantes e que tornaram a caminhada um pouco menos pesada.

Agradeço ao meu orientador, que não deixou que eu desanimasse e fez com que este sonho pudesse acontecer.

No mais, agradeço a todos aqueles que enviaram energias positivas para que isso desse certo. Sou muito agradecida a todos !!!

Resumo

Neste trabalho, estudamos um sistema de equações do tipo Maxwell-Schrödinger buscando solução e possíveis efeitos regularizantes devido ao acoplamento das equações se comparados a regularidade esperada devido aos estudos de Guido Stampacchia com EDP's simples.

Com esta finalidade, dedicamos parte do trabalho a uma retomada da Teoria de Stampacchia para regularidade de soluções de EDP's e posteriormente, baseado no trabalho de Lucio Boccardo [2], mostramos que o sistema estudado possui solução e que as duas soluções possuem de fato uma regularidade melhor do que o esperado pela teoria com EDP's simples.

Palavras-chave: Efeito Regularizante, Equações de Maxwell-Schrödinger, Sistema Elíptico.

Abstract

In this work, we study a system of Maxwell-Schrödinger equations looking for a solution and possible regularizing effects due to the coupling of the equations compared to the expected regularity due to Guido Stampacchia's studies with single PDE's.

For this purpose, we dedicate part of the work to a resumption of the Stampacchia Theory for the regularity of PDE's solutions and later, based on the work of Lucio Boccardo [2], we show that the studied system has a solution and that the two solutions actually have a better regularity than the expected by theory with single PDE's.

Keywords: Regularizing Effect, Maxwell-Schrödinger equations, Elliptic System.

Conteúdo

Introdução

No presente texto, discutiremos resultados sobre a regularidade de soluções de equações do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + h(x,u) = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Sob condições adequadas, mostra-se nos cursos clássicos de EDP que se $f \in L^p(\Omega)$, então as soluções fracas de (1) pertencem a $W^{2,p}(\Omega)$.

Estes resultados são conhecidos como Teoria de Calderón-Zygmund e podem ser vistos em [9].

O estudo da regularidade de soluções de (1) consiste na análise das propriedades das soluções fracas de (1), dependendo de qual espaço de funções f pertencer ou das hipóteses sobre $h(\cdot,\cdot)$ ou Ω.

Grosseiramente, na "Teoria de Calderón-Zygmund", se f for mais regular então u será mais regular. O caso oposto foi investigado por diversos matemáticos, dentre os quais destacamos Guido Stampacchia. De maneira superficial, podemos estudar o comportamento de u enfraquecendo as informações sobre f. Stampacchia fez importantes avanços neste segundo ramo e a presente dissertação tratará de temas correlatos.

Nos trabalhos de Stampachia da década de 60, [11] e [12], em que lida com operadores de segunda ordem com coeficientes descontínuos, observamos resultados significativos no estudo da irregularidade de EDP's. Todo este trabalho, conhecido como Teoria de Regularidade de Stampacchia, fortaleceu o estudo das propriedades das soluções de EDP's simples e proporcionou um conjunto relevante de informações obtidas sobre as soluções ou a própria EDP caso se saibam informações sobre os dados.

Sobre a Teoria de Stampacchia, de forma menos particular que em (1), será importante aqui o conhecimento de três casos. Seja $f \in L^m(\Omega)$, dada uma equação do tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,Du)) + h(x,u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{no } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

sob certas hipóteses, é conhecido pela Teoria de Stampacchia que

a) se $m > N/2$ então $u \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$

b) se $(2^*)' \leq m < N/2$ então $u \in L^{m^{**}}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$

c) se $1 < m < (2^*)'$ então $u \in L^{m^{**}}(\Omega) \cap W_0^{1,m^*}(\Omega)$

onde $m^* = \dfrac{Nm}{N-m}$ e $m^{**} = \dfrac{Nm}{N-2m}$.

Os resultados a), b) e c) acima são todos ótimos, no sentido que não podemos, em geral, esperar mais regularidade para soluções de (2) nas hipóteses acima. Entretanto, uma questão relevante é como a Teoria de Stampacchia poderia ser analisada no caso de um sistema de equações acopladas.

Na realidade, recentemente em [2], Lucio Boccardo descobriu um fenômeno interessante para soluções de um sistema proposto por Benci e Fortunato em [1]. Em [2], Boccardo obteve soluções mais regulares do que a Teoria de Stampacchia garantiria, o que chamaremos de "Efeito Regularizante."

Em [2], Boccardo nos apresenta o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)Du) + \varphi(x)|u|^{r-2}u = f(x) \geq 0, \\ -\operatorname{div}(M(x)D\varphi) = |u|^r. \end{cases} \tag{3}$$

Este sistema serviu como base para um problema um pouco mais geral, problema este que efetivamente foi tratado no seu artigo e também o problema que será trabalhado na nossa dissertação:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)Du(x)) + a(x)\varphi(x)g(u(x)) = f(x), \\ -\operatorname{div}(M(x)D\varphi(x)) = a(x)G(u(x)), \end{cases} \tag{4}$$

Mas as origens de (3) remontam, como dito, a trabalhos de Benci e Fortunato em [1].

Eles iniciaram explorando o seguinte tipo de sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\Delta u - \phi(x)u = \omega u \\ \Delta\phi = 4\pi u^2, \end{cases} \tag{5}$$

conhecido como equações de Maxwell-Schrödinger. Neste trabalho, Benci e Fortunato buscavam encontrar números reais e soluções para um outro sistema derivado de (5).

Na presente dissertação, também buscamos encontrar solução para o nosso sistema (4), que aqui chamamos de equações de Maxwell-Schrödinger em referência ao problema (5) que o originou. Mas o objetivo principal deste texto, é investigar a (ir)regularidade das soluções desse sistema e, como já dito, o comparativo entre os resultados obtidos para este sistema e o que já é conhecido pela Teoria de Stampacchia.

Posteriores ao trabalho de Boccardo aqui estudados nessa dissertação, temos, por exemplo, os trabalhos de Riccardo Durastanti em [6] e de Boccardo e Luigi Orsina em [4].

Dito isto, o nosso trabalho se organizará da seguinte forma: primeiro teremos um Capítulo 1 de resultados preliminares, que servirão de base para os nossos objetivos. Posteriormente, no Capítulo 2, estudaremos a Teoria de Stampacchia para o caso particular de $-\Delta u$. Aqui, será usado bastante uma importante ferramenta enunciada no Capítulo 1, que são os Truncamentos de Stampacchia. Essas funções, que compostas com funções testes também podem ser usadas como tal, facilitaram em muito a tarefa da busca por estimativas para as soluções das EDP's.

No Capítulo 3 estudaremos um problema aproximado ao nosso sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)Du(x)) + a(x)\varphi(x)g(u(x)) = F(x), \\ -\operatorname{div}(M(x)D\varphi(x)) = a(x)G(u(x)), \end{cases} \tag{6}$$

onde $F \in L^\infty(\Omega)$, com o objetivo de no capítulo seguinte poder garatir a existência de solução para (4). Um resultado importante usado neste capítulo, será o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Construíremos uma aplicação solução S que relaciona as duas equações de (6) e mostrando que S satisfaz as hipóteses do teorema, garantiremos solução para (6).

Por fim, nos Capítulos 4 e 5 estudaremos os resultados de regularidade sobre o sistema (4). O que será chamado de efeito regularizante, por de fato o acoplamento das duas equações produzir para as soluções do sistema um resultado melhor do que o esperado pela Teoria de Stampacchia para EDP's simples. No Capítulo 4, trataremos da regularidade sobre a segunda variável e no Capítulo 5, a regularidade sobre a primeira variável.

No Capítulo 4, será obtido que o dado da segunda equação de (4) está em $L^1(\Omega)$. Pela caso c) aqui apresentado, se $m = 1+\varepsilon$ a regularidade ótima esperada para EDP's simples é $\varphi \in W_0^{1,(1+\varepsilon)^*}(\Omega)$. Grosseiramente, como $(1+\varepsilon)^* = \dfrac{N - N\varepsilon}{N-1+\varepsilon}$, fazendo ε tenter a 0, espera-se então uma regularidade ótima para a φ de $\varphi \in W_0^{1,1^*}(\Omega)$, que é menos regular do que $W_0^{1,2}(\Omega)$. Mas devido ao acoplamento das duas EDP's, neste capítulo, será mostrado que (4) possui soluções $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, por isso, será dito que o acoplamento proporcionou um efeito regularizante sobre a segunda variável.

No Capítulo 5, o sistema (4) será trabalhado com o dado na faixa que aqui chamamos de b). Assim, como dito acima, era de se esperar pela Teoria de Regularidade de Stampachia para EDP's simples, que $u \in L^{m^{**}}(\Omega)$. Mas, aqui será visto que, para $r \geq 0$ sob certa hipótese, $u \in L^{rm}(\Omega)$ com $rm > m^{**}$. Novamente, devido ao acoplamento das EDP's, será obtido uma regularidade maior do que a esperada para a solução, o que será chamado aqui de efeito regularizante sobre a primeira variável.

Sobre a importância do estudo da regularidade, dentro da matemática, contribui para a compreensão da própria natureza das EDP's e das propriedades das funções que elas descrevem e é útil também na busca de soluções ou garantia de existência de solução para EDP's. Possui importância em várias áreas da matemática aplicada e da física teórica. A regularidade das soluções de EDP's está relacionada com a suavidade das funções que as representam e, em muitos casos, soluções suaves são necessárias para que a EDP seja útil em aplicações práticas.

Esperamos que este texto motive novos alunos a se interessarem por este tema.

Capítulo 1

Definições e resultados preliminares

Neste capítulo, enunciaremos algumas definições e resultados que serão usados neste trabalho de maneira direta ou que serão importantes para uma melhor compreensão deste.

1.1 Teoremas de Ponto Fixo

Nesta seção, veremos dois resultados de ponto fixo. O primeiro, o Teorema do Ponto Fixo das Contrações, será necessário para a demonstração do Teorema de Stampacchia, resultado importante de garantia de existência de solução de EDP's. Já o segundo, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, será útil para a garantia de existência de solução para um sistema de EDP's fundamental para os resultados obtidos neste trabalho.

Teorema 1.1 (Teorema do Ponto Fixo das Contrações). Sejam (M,d) um espaço métrico completo e $H : M \longrightarrow M$ uma aplicação de modo que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$d(H(x),H(y)) \leq \theta d(x,y), \ \ \forall \, x,y \in M.$$

Então, existe um único $z \in M$ de modo que

$$H(z) = z.$$

Demonstração. Ver [3, Teorema 2.1, pág 5]. □

A seguinte definição será importante para o próximo resultado, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Definição 1.1. Seja E um espaço vetorial normado. Uma aplicação $S : E \longrightarrow E$ é dita compactamente contínua, se é contínua e se para todo subconjunto limitado $B \subset E$, o fecho

da imagem de B por S é compacto.
De modo equivalente, S é compactamente contínua, se é contínua e para toda sequência limitada $\{x_n\} \subset E$, existem subsequência $\{x_{n_k}\}$ e $x \in \overline{S(B)}$ tais que $S(x_{n_k}) \longrightarrow x$.

Veremos agora o resultado final desta seção.

Teorema 1.2 (Teorema do Ponto de Fixo Schauder). Sejam E um espaço vetorial normado e $S : E \longrightarrow E$ uma aplicação compactamente contínua e seja $K \subset E$ convexo, limitado, fechado e invariante pela aplicação S, ou seja, $S(K) = K$. Então S tem um ponto fixo em K.

Demonstração. Ver [3, Teorema 2.10, pág 10]. □

1.2 Espaços $L^p(X)$

Nesta seção, resultados importantes sobre os espaços $L^p(X)$ serão apresentados. Ao longo de todo este trabalho, trataremos apenas do caso real e μ representará a medida de Lebesgue.

Uma desigualdade de uso recorrente neste texto é a conhecida Desigualdade de Hölder. Enunciaremos e demonstraremos ela aqui. Mas antes disso, enunciaremos outra conhecida desigualdade que será usada na demonstração da Desigualdade de Hölder.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Young). Sejam $a, b \geq 0$ e $1 < p < +\infty$. Então vale a seguinte desigualdade:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

Demonstração. Consideremos

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} - x, \quad x \geq 0$$

Assim,

$$f'(x) = x^{p-1} - 1, \quad x \geq 0,$$

e portanto, $f'(x) = 0$ para $x = 1$.

Além disso, notemos que

$$f'(x) < 0, \quad \text{se} \quad 0 \leq x < 1$$

e

$$f'(x) > 0, \quad \text{se} \quad x > 1$$

Logo, $x = 1$ é o mínimo global de f em $x \geq 0$. Ou seja,

$$f(x) \geq f(1) = 0, \ \ \forall x \geq 0. \tag{1.1}$$

Tomemos, $x = \dfrac{a}{b^{p'/p}}$. Assim, por 1.1

$$\frac{a^p}{pb^{p'}} + \frac{1}{p'} - \frac{a}{b^{p'/p}} \geq 0.$$

O que significa que

$$\frac{a}{b^{p'/p}} \leq \frac{a^p}{pb^{p'}} + \frac{1}{p'},$$

e multiplicando $b^{p'}$ dos dois lados,

$$ab^{p' - \frac{p'}{p}} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

E do fato de, $p' - \dfrac{p'}{p} = 1$, temos o que queríamos mostrar. $\square$

Observação: Usaremos também, em outro momento do texto, a Desigualdade de Young em uma outra forma, conhecida como Desigualdade de Young com ε:

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^{p'},$$

com $C_\varepsilon = \dfrac{1}{p'}(\varepsilon p)^{\frac{-p'}{p}}$.

Vamos agora para a Desigualdade de Hölder.

Teorema 1.4 (Desigualdade de Hölder). Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dados $u \in L^p(X)$ e $v \in L^{p'}(X)$, $p \geq 1$, então

$$\left| \int_X uv \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \|u\|_{L^p(X)} \|v\|_{L^{p'}(X)}$$

Observação: a Desigualdade de Hölder vale também para funções mensuráveis u e v que não pertençam a nenhum $L^p(X)$, ou seja, com o lado direito assumindo o valor $+\infty$.

Demonstração. Se $p = 1$, temos que $u \in L^1(X)$ e $v \in L^\infty(X)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_X |uv| \,\mathrm{d}\mu &= \int_X |u||v| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |u| \|v\|_{L^\infty(X)} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \|v\|_{L^\infty(X)} \int_X |u| \,\mathrm{d}\mu \\
&= \|u\|_{L^1(X)} \|v\|_{L^\infty(X)}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_X |uv| \,\mathrm{d}\mu \leq \|u\|_{L^1(X)} \|v\|_{L^\infty(X)},$$

e, portanto,

$$\left| \int_X uv \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \|u\|_{L^1(X)} \|v\|_{L^\infty(X)}.$$

Para $p = +\infty$, por simetria, o argumento é o mesmo.

Seja agora $1 < p < +\infty$ e $\gamma > 0$. Pela Desigualdade de Young, nós temos que

$$\gamma |u||v| \leq \frac{\gamma^p}{p} |u|^p + \frac{1}{p'} |v|^{p'},$$

o que implica que,

$$|u||v| \leq \frac{\gamma^{p-1}}{p} |u|^p + \frac{1}{\gamma p'} |v|^{p'}.$$

Integrando-se os dois lados, temos que

$$\int_X |u||v| \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{\gamma^{p-1}}{p} \int_X |u|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{\gamma p'} \int_X |v|^{p'} \,\mathrm{d}\mu \,.$$

O que implica que

$$\int_X |u||v| \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{\gamma^{p-1}}{p} \|u\|_{L^p(X)}^p + \frac{1}{\gamma p'} \|v\|_{L^{p'}(X)}^{p'}.$$

Tomando $\gamma = \|u\|_{L^p(X)}^{-1} \|v\|_{L^{p'}(X)}^{p'/p}$,

$$\begin{aligned}
\int_X |u||v|\,\mathrm{d}\mu &\leq \frac{1}{p}\left(\frac{\|v\|_{L^{p'}(X)}^{p'/p}}{\|u\|_{L^p(X)}}\right)^{p-1}\|u\|_{L^p(X)}^p + \frac{\|v\|_{L^{p'}(X)}^{p'}}{p'\|v\|_{L^{p'}(X)}^{p'/p}}\|u\|_{L^p(X)} \\
&= \frac{\|v\|_{L^{p'}(X)}^{\frac{p'(p-1)}{p}}}{p}\|u\|_{L^p(X)} + \frac{\|v\|_{L^{p'}(X)}^{\frac{p'(p-1)}{p}}}{p'}\|u\|_{L^p(X)} \\
&= \|u\|_{L^p(X)}\|v\|_{L^{p'}(X)},
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, por definição, e $\dfrac{p'(p-1)}{p}=1$, por decorrência desta definição. Assim, também para $1<p<+\infty$,

$$\int_X |u||v|\,\mathrm{d}\mu = \|u\|_{L^p(X)}\|v\|_{L^{p'}(X)},$$

o que significa dizer que para todo $p \geq 1$,

$$\left|\int_X uv\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \|u\|_{L^p(X)}\|v\|_{L^{p'}(X)}.$$

$\square$

Veremos agora um colorário da Desigualdade de Holder, mas para isso, precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.2. Sejam $(A,\|\ \|_A)$ e $(B,\|\ \|_B)$ dois espaços de Banach. Dizemos que A é imerso continuamente em B e denotamos por $A \hookrightarrow B$ se e somente se $A \subset B$ e existe $c>0$ tal que

$$\|u\|_B \leq c\|u\|_A,\ \forall\ u \in A.$$

Vamos agora para o seguinte corolário.

Corolário 1.5. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, X limitado. Então,

$$L^q(X) \hookrightarrow L^p(X),\ \ \forall\ q \geq p.$$

Demonstração. Seja $u \in L^q(X),\ q<+\infty$.

Suponhamos $p < q$ (para $p = q$, o resultado é imediato). Pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_X |u|^p \cdot 1 \, \mathrm{d}\mu &\leq \left(\int_X (|u|^p)^{\frac{q}{p}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X 1^{\frac{q}{q-p}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \left(\int_X |u|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p}{q}} \mu(X)^{\frac{q-p}{q}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\int_X |u|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |u|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \mu(X)^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Ou seja,

$$\|u\|_{L^p(X)} \leq c\|u\|_{L^q(X)}, \ \ \forall u \in L^q(X)$$

com $c = \mu(X)^{\frac{q-p}{pq}}$. O que significa dizer que,

$$L^q(X) \hookrightarrow L^p(X).$$

Para $u \in L^\infty(X)$,

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(X)}, \ \ \text{q.t.p. em } X.$$

O que significa que,

$$\begin{aligned}\left(\int_X |u|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_X \|u\|^p_{L^\infty(X)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{L^\infty(X)} \mu(X)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

E então,

$$\|u\|_{L^p(X)} \leq c\|u\|_{L^\infty(X)}, \ \ \forall u \in L^\infty(X),$$

onde $c = \mu(X)^{\frac{1}{p}}$. E temos que,

$$L^\infty(X) \hookrightarrow L^p(X),$$

para todo p. □

A seguir, mais uma definição que será usada ao longo deste texto.

Definição 1.3. Sejam $(A, \| \, \|_A)$ e $(B, \| \, \|_B)$ dois espaços de Banach. Dizemos que A é imerso compactamente em B e denotamos por $A \hookrightarrow\hookrightarrow B$ se e somente se A é imerso continuamente em B e para toda sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em A, existem subsequência $\{u_n\}_{n \in N' \subset \mathbb{N}}$ e $u \in B$ tais que $u_n \longrightarrow u$ em B.

1.3 Resultados de Convergência

Os resultados de convergência serão essenciais no uso de limite de sequências envolvendo integrais. Por isso, apresentamos aqui vários resultados e algumas de suas demonstrações.

O primeiro será o Teorema da Convergência Monótona, que será usado na demonstração do resultado seguinte, o Lema de Fatou. Mas antes disso, vejamos a seguinte definição.

Definição 1.4. Seja $X \subset \mathbb{R}^N$, então

$$L^+(X) = \{f : X \to [0, +\infty] : f \text{ é Lebesgue-mensurável}\}.$$

Segue o enunciado do Teorema da Convergência Monótona.

Teorema 1.6 (Teorema da Convergência Monótona). Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^+(X)$. Suponhamos que

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \text{q.t.p. em } X.$$

Consideremos,

$$f : X \to [0, +\infty]$$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \quad \text{q.t.p. em } X.$$

Então

$$\lim_n \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Demonstração. Ver [8, Teorema 2.14, pág 50]. □

Segue agora enunciado e demonstração do Lema de Fatou.

Teorema 1.7 (Lema de Fatou). Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^+(X)$ e $f : X \to [0, +\infty]$ de modo que

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x), \ \forall x \in X$$

Então, $f \in L^+(X)$ e $\displaystyle\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Demonstração. Seja $h_k(x) = \inf\limits_{n\geq k} f_n(x)$. Então

$$h_k(x) \leq h_{k+1}(x), \ \text{q.t.p. em } X, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Além disso,

$$\int_X h_k(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_j(x)\,\mathrm{d}\mu, \ \forall j \geq k$$

Logo,

$$\int_X h_k(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{j\geq k}\int_X f_j(x)\,\mathrm{d}\mu \tag{1.2}$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona, ver Teorema 1.6, aplicado à sequência $\{h_k\}_{n\in\mathbb{N}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_X \lim_{k\to+\infty}\left(\inf_{n\geq k} f_n(x)\right)\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X \lim_{k\to+\infty} h_k(x)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{k\to+\infty}\int_X h_k(x)\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Mas por (1.2),

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty}\int_X h_k(x)\,\mathrm{d}\mu &\leq \lim_{k\to+\infty}\left(\inf_{j\geq k}\int_X f_j(x)\right)\mathrm{d}\mu \\
&= \liminf_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Ou seja, pelas duas últimas equações,

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

□

Agora, enunciaremos e demonstraremos o importante Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema 1.8 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). Seja $X\subset\mathbb{R}^n$. Consideremos

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ Lebesgue-mensuráveis, } f \text{ e } g \text{ onde:}$$

a) $g : X \to [0,+\infty]$ é μ-integrável (e Lebesgue-mensurável).

b) $f_n \longrightarrow f$ q.t.p. em X.

c) $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em X.

Então, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X), f\in L^1(X)$ e $\lim_n \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu\,.$

Demonstração. Primeiro, temos que f é Lebesgue-mensurável, pois μ é uma medida completa, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são Lebesgue-mensuráveis e $f_n \longrightarrow f$ q.t.p. em X.

Além disso, de $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. para todo n, temos que $|f(x)| \leq g(x)$ q.t.p., de modo que

$$\int_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

pois $g \in L^1(X)$. Ou seja, $f \in L^1(X)$ e pelo mesmo argumento $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X)$.

Vamos agora para a prova de

$$\lim_n \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

De forma equivalente, queremos provar as seguintes desigualdades

i) $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu$

ii) $\displaystyle\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$

Mas antes, notemos que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| \leq g(x), \forall n \in \mathbb{N},\ \text{q.t.p. em } X \quad &\Leftrightarrow \quad -g(x) \leq f_n(x) \leq g(x),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{q.t.p. em } X \\ &\Leftrightarrow \quad f_n(x) + g(x) \geq 0 \text{ e } g(x) - f_n(x) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \text{q.t.p. em } X. \end{aligned}$$

Logo

$$f_n + g \in L^+(X) \text{ e } g - f_n \in L^+(X)$$

E pelo Lema de Fatou, segue que

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} (f_n(x) + g(x))\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X (f_n(x) + g(x))\,\mathrm{d}\mu \tag{1.3}$$

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} (g(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X (g(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}\mu \tag{1.4}$$

Comecemos pela prova de i)

$$\begin{aligned}
\int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_X (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X (g(x)-\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X (g(x)-\liminf_{n\to+\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X \liminf_{n\to+\infty}(g(x)-f_n(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_X (g(x)-f_n(x))\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

por (1.4).

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu &\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_X (g(x)-f_n(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to+\infty}\left(-\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right) \\
&= \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

E cancelando o termo comum dos dois lados, temos que

$$-\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leq -\limsup_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$$

O que finalmente, implica que

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Agora, provaremos ii)

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_X (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X (\lim_{n\to+\infty} f_n(x)+g(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X (\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)+g(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X \liminf_{n\to+\infty}(f_n(x)+g(x))\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_X (f_n(x)+g(x))\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

por (1.3).

Ou seja

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X (f_n(x)+g(x))\,\mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

E novamente, cancelando-se o termo comum dos dois lados, temos

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

E sendo válidos i) e ii), temos finalmente que

$$\lim_n \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

□

Segue agora, o enunciado de um resultado que será ultilizado neste trabalho e é conhecido como a recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que acabamos de demonstrar.

Corolário 1.9 (Recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X)$ e $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, Lebesgue-mensurável, onde $f_n \longrightarrow f$ em $L^1(X)$.

Então existem $\{f_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ subsequência e $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, tais que:

i) $g \geq 0$ q.t.p. e $g \in L^1(X)$;

ii) $f_{n_k} \longrightarrow f$ q.t.p.;

iii) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em X.

Demonstração. [5]. □

O resultado que segue será ultilizado na demonstração do importante Teorema de Vitali que será demonstrado em breve nesta seção.

Teorema 1.10 (Teorema de Egorov). Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ e $f, f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, Lebesgue-mensuráveis.

Suponhamos que

a) $\mu(\{|f_n(x)| = +\infty\}) = \mu(\{|f(x)| = +\infty\}) = 0, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$;

b) $f_n \longrightarrow f$ q.t.p.;

c) $\mu(X) < +\infty$.

Então

$$f_n \longrightarrow f \text{ quase uniformemente na medida } \mu.$$

Demonstração. Ver [8, Teorema 2.33, pág 62]. □

Para os dois próximos resultados, a seguinte definição se faz necessária.

Definição 1.5. Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ limitado, e $A \subset L^1(X)$. Então, A é dito uniformemente integrável se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que para todo $f \in A$,

$$\text{se } \mu(E) < \sigma, \text{ então } \left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \varepsilon,$$

com $E \subset A$.

A proposição a seguir trata de um exemplo útil de um conjunto uniformemente integrável.

Proposição 1.11. Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$, limitado, e $\{f\} \subset L^1(X)$. Então, $\{f\}$ é uniformemente integrável.

Demonstração. Ver [8]. □

E finalmente, partimos agora para o resultado final desta seção, o Teorema de Vitali.

Teorema 1.12 (Vitali). Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$, com $1 \leq p < +\infty$. São equivalentes:

I) Existe $f \in L^p(X)$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(X)$

II) Existe $\{f_{n_j}\}_{n_j\in\mathbb{N}}$ subsequência tal que

   a) $f_{n_j} \to f$ q.t.p.

   b) $\{|f_{n_j}|^p\}_{n_j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente integrável.

Demonstração. II) $\Rightarrow$ I)

Queremos mostrar que

$$\int_X |f(x) - f_n(x)|^p \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow 0, \text{ se } n \to +\infty.$$

O que de forma equivalente, é o mesmo que, dado $\varepsilon > 0$, existem E_0, pertencente a sigma álgebra de Lebesgue, e $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\int_{E_0} |f_n - f|^p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

e

$$\int_{X\setminus E_0} |f_n - f|^p < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall n \geq n_0. \tag{1.6}$$

Mas (1.5) é verdade pois, tomando $f_{n_j} = f_n$, por IIb), pelo fato de $\{|f|^p\}$ ser uniformemente integrável e por $(a+b)^{p-1} \leq 2^p(a^p + b^p)$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{E_0} |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq c \int_{E_0} |f_n|^p + |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon c}{2},$$

para todo E_0, de modo que, $\mu(E_0) < \delta$.

Já para (1.6), pelo Teorema 1.10, dado $\delta > 0$, existe $E_0 \in \Sigma_X$ tal que $\mu(E_0) < \delta$ e $f_n \longrightarrow f$ uniforme em $X \setminus E_0$.

Logo, em particular, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)} \ \ \forall x \in X \setminus E_0.$$

Em particular,

$$|f_n(x) - f(x)|^p < g = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2\mu(X)}, \text{ se } n \geq \hat{n}_0 \\ \max\limits_{1 \leq i \leq n_0} \{|f_i(x) - f(x)|^p\}. \end{cases}$$

e

$$f_n \longrightarrow f \text{ q.t.p. em } \ X \setminus E_0.$$

Note que $g \in L^1(X)$ e g não dependente de n. Logo, pelo TCDL, existe n_0 : se $n \geq n_0$

$$\int_{X\setminus E_0} |f_n - f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E temos o que queríamos.

Para a prova que $I) \Rightarrow II)$, ver [3, Teorema 3.3].

□

1.4 Espaços de Sobolev

Para o estudo de EDP's, é de fundamental importância o estudo dos espaços de Sobolev. Logo, nesta seção, definiremos esses espaços e apresentaremos alguns resultados.

A maior parte das definições e resultados aqui presentes tiveram como base as referências [5] e [7].

Definição 1.6. Dado $X \subset \mathbb{R}^N$, aberto, e $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço de Sobolev $W^{1,p}(X)$ será dado por

$$W^{1,p}(X) = \{f \in L^p(X) \ \mid \ \exists\, f_i, i = 1,...N \text{ que satisfaçam } *\},$$

onde $*$ é dada por $\displaystyle\int_X f\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_X f_i\phi \ \ \forall\phi \in C_c^\infty(X)$.

A norma de u em $W^{1,p}(X)$ será dada por

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(X)} = \|u\|^p_{L^p(X)} + \|Du\|^p_{L^p(X)}$$

Segue um lema que será útil para a manipulação do expoente crítico e do conjugado.

Lema 1.13. Dado $p \in [1,N)$, consideremos

$$p^* = \frac{Np}{N-p} \ \text{ e } \ p_* = \frac{Np}{N+p},$$

conhecidos como inversos.

Então

$$(p^*)_* = p \ \text{ e } \ (p_*)^* = p.$$

Além disso,

$$(p^*)' = (p')_*.$$

Demonstração. Pelas definições, temos que

$$\begin{aligned}
(p^*)_* &= \frac{N\frac{Np}{N-p}}{N+\frac{Np}{N-p}} \\
&= \frac{\frac{Np}{N-p}}{1+\frac{p}{N-p}} \\
&= p.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
(p_*)^* &= \frac{N\frac{Np}{N+p}}{N-\frac{Np}{N+p}} \\
&= \frac{\frac{Np}{N+p}}{1-\frac{p}{N+p}} \\
&= p.
\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
(p^*)' &= \frac{\frac{Np}{N-p}}{\frac{Np}{N-p}-1} \\
&= \frac{Np}{N(p-1)+p} \\
&= \frac{N\frac{p}{p-1}}{N+\frac{p}{p-1}} \\
&= (p')_*.
\end{aligned}
$$

□

Enunciaremos agora resultados fundamentais sobre os espaços de Sobolev, cujas demonstrações podem ser encontradas em [5]. O próximo teorema, trata sobre as imersões contínuas em espaços de Sobolev.

Teorema 1.14. As seguintes imersões são contínuas

i. $W^{1,p}(X) \subset L^{p^*}(X)$ se $1 \le p < N$;

ii. $W^{1,p}(X) \subset L^q(X)$, $\forall\, q \in [p, +\infty)$ se $p = N$;

iii. $W^{1,p}(X) \subset L^\infty(X)$ se $p > N$.

Em particular, para cada $u \in W_0^{1,p}(X)$, existe uma constante positiva S dependendo só de N e p tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(X)} \le S\|Du\|_{L^p(X)}; \tag{1.7}$$

esta desigualdade é chamada desigualdade de Sobolev.

O próximo teorema trata de imersões compactas em espaços de Sobolev.

Teorema 1.15. (Rellich-Kondrachov) As seguintes imersões são compactas

i. $W^{1,p}(X) \subset\subset L^q(X)$, $\forall\, q \in [1, p^*)$ se $1 \le p < N$;

ii. $W^{1,p}(X) \subset\subset L^q(X)$, $\forall\, q \in [1, +\infty)$ se $p = N$;

iii. $W^{1,p}(X) \subset\subset C(\overline{X})$ se $p > N$.

Em particular, $W_0^{1,p}(X) \subset L^p(X)$ para todo p e a imersão é compacta.

Por fim, segue a Desigualdade de Poincaré, também bastante ultilizada nesse nosso contexto de espaços de Sobolev.

Teorema 1.16. (Desigualdade de Poincaré). Seja $1 \leq p < +\infty$. Então existe uma constante positiva $c = c(X,p)$ tal que

$$\|u\|_{L^p(X)} \leq c\|Du\|_{L^p(X)}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(X). \tag{1.8}$$

Em particular, $\|Du\|_{(L^p(X))^n(X)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(X)$ que é equivalente à norma $\|u\|_{W_0^{1,p}(X)}$.

1.5 Resultado de existência de solução para EDP

As demonstrações feitas nesta seção foram baseadas em [10]. Aqui, temos resultados de existência de solução para EDP, com destaque para o Teorema de Stampacchia, que será ultilizado em mais de um momento ao longo deste trabalho.

Começaremos com o Teorema de Lax-Milgram. Mas antes, serão importantes as seguintes definições.

Definição 1.7. Sejam V_1, V_2 espaços vetoriais e $f : V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Então f é dita bilinear se

$$f(u,\cdot) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é linear e

$$f(\cdot,v) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é linear, $\forall u \in V_1$ e $\forall v \in V_2$.

Segue a definição de função coerciva.

Definição 1.8. Seja N espaço vetorial normado e $f : N \times N \longrightarrow \mathbb{R}$. Então a função f é dita coerciva se existe $\alpha > 0$ tal que

$$f(u,u) \geq \alpha\|u\|^2, \ \ \forall u \in N.$$

E agora, vamos para o teorema.

Teorema 1.17 (Lax-Milgram). Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, bilinear, contínua e coerciva. Então, dada $\phi \in H'$, existe uma única $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \phi(v), \ \ \forall v \in H.$$

Demonstração. Ver [5, Corolário 5.8, pág 140]. □

Um resultado de existência de solução de EDP que será usado neste trabalho é o Teorema de Stampacchia, que é um resultado mais geral do que o Lax-Milgram. Mas para a demonstração dele, precisaremos do lema a seguir.

Lema 1.1. Seja H espaço de Hilbert e $A : H \longrightarrow H$ de modo que existam $\eta, \zeta > 0$ tais que

$$\|A(x) - A(y)\|_H \leq \zeta \|x - y\|_H \ \forall \ x, y \in H$$

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle_H \geq \eta \|x - y\|_H^2.$$

Sendo assim, para todo $f \in H$, existe um único $u \in H$ de modo que

$$A(u) = f.$$

Demonstração. Seja $K_\lambda : H \to H$, com $\lambda \in (0, \frac{2\eta}{\zeta^2})$, definida da seguinte forma

$$K_\lambda(v) = v - \lambda A(v) + \lambda f.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|K_\lambda(v) - K_\lambda(w)\|_H^2 &= \|v - w - \lambda(A(v) - A(w))\|_H^2 \\
&= \|v - w\|_H^2 - 2\lambda\langle v - w, A(v) - A(w)\rangle_H + \lambda^2\|A(v) - A(w)\|_H^2 \\
&\leq \|v - w\|_H^2 - 2\lambda\zeta\|v - w\|_H^2 + \lambda^2\eta\|v - w\|_H^2 \\
&= (1 - 2\lambda\zeta + \lambda^2\eta^2)\|v - w\|_H.
\end{aligned}$$

Mas de $\lambda \in (0, \frac{2\eta}{\zeta^2})$, temos que $(1 - 2\lambda\zeta + \lambda^2\eta^2) \in (0, 1)$, e assim

$$\|K_\lambda(v) - K_\lambda(w)\|_H^2 \leq \theta\|v - w\|_H^2,$$

onde $\theta \in (0, 1)$. E pelo Teorema 1.1, temos que existe $u \in H$ de modo que

$$K_\lambda(u) = u.$$

Ou seja,

$$u - \lambda A(u) + \lambda f = u.$$

O que implica em

$$A(u) = f.$$

□

Vamos agora para o Teorema de Stampachia.

Teorema 1.18 (Stampacchia). Sejam H espaço de Hilbert e $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, onde:

i) para toda $u \in H$, $a(u, \cdot\ ) : H \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear e contínua.

ii) Existe $\beta > 0$ tal que

$$|a(u_1, v) - a(u_2, v)| \leq \beta \|u_1 - u_2\|_H \|v\|_H, \ \ \forall\, u_1, u_2, v \in H.$$

iii) Existe $\zeta > 0$ tal que

$$a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) \geq \zeta \|u_1 - u_2\|_H^2, \ \ \forall\, u_1, u_2 \in H.$$

Então, dada $\phi \in H'$, existe uma única $u \in H$ tal que:

$$a(u, v) = \phi(v), \ \ \forall\, v \in H.$$

Demonstração. Dado $v \in H$, seja $B_v : H \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$B_v(w) = a(v, w).$$

Assim, $B_v \in H'$ para todo $v \in H$, pois $a(v, \cdot)$ é linear e contínuo. Além disso, pelo Teorema da Representação de Riesz, temos que existe um único $x \in H$ de modo que

$$B_v(w) = \langle x, w \rangle_H, \ \ \forall w \in H.$$

Tomemos então $A : H \longrightarrow H$, tal que

$$A(v) = x.$$

Queremos mostrar que A satisfaz o Lema 1.1. Dados $v_1, v_2 \in H$ e sejam $x_1 = A(v_1)$ e $x_2 = A(v_2)$, assim

$$\begin{aligned}
|\langle A(v_1) - A(v_2), A(v_1) - A(v_2) \rangle_H| &= |\langle A(v_1), A(v_1) - A(v_2) \rangle_H - \langle A(v_2), A(v_1) - A(v_2) \rangle_H| \\
&= |a(v_1, x_1 - x_2) - a(v_2, x_1 - x_2)| \\
&\leq \beta \|v_1 - v_2\|_H \|x_1 - x_2\|_H \\
&= \beta \|v_1 - v_2\|_H \|A(v_1) - A(v_2)\|_H,
\end{aligned}$$

onde usamos (ii). Ou seja,

$$\|A(v_1)-A(v_2)\|_H \leq \beta\|v_1-v_2\|_H, \tag{1.9}$$

o que satisfaz o primeiro item do Lema 1.1. E além disso,

$$\begin{aligned}
\langle A(v_1)-A(v_2), v_1-v_2\rangle_H &= \langle A(v_1), v_1-v_2\rangle_H - \langle A(v_2), v_1-v_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, v_1-v_2\rangle_H - \langle x_2, v_1-v_2\rangle_H \\
&= a(v_1, v_1-v_2) - a(v_2, v_1-v_2) \\
&\geq \zeta\|v_1-v_2\|_H^2,
\end{aligned}$$

onde usamos $iii)$.

E portanto, A satisfaz o Lema 1.1. Ou seja, dada $f \in H$ existe um único $u \in H$ de modo que $A(u) = f$. O que é equivalente a dizer que, existe um único $u \in H$, tal que

$$a(u,w) = \langle f, w\rangle, \ \ \forall w \in H.$$

O que pelo Teorema da representação de Riesz, significa que dada $\phi \in H'$, existe uma única $u \in H$ tal que:

$$a(u,w) = \phi(w), \ \ \forall\, w \in H.$$

□

Por fim, segue mais um resultado de existência de solução para EDP.

Teorema 1.19. Seja X um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $p \in (1,\infty)$. Seja $c : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $H : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções Carathéodory, com as seguintes propriedades:

i. existe $\beta > 0$ tal que $|c(x,s,\xi)| \leq \beta[|s|^{(p-1)} + |\xi|^{(p-1)}]$;

ii. existe $\alpha > 0$ tal que $c(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$;

iii. $[c(x,s,\xi) - c(x,s,\eta)]\cdot[\xi-\eta] > 0$ se $\xi \neq \eta$;

iv. existe $f \in L^{p'}(X)$ tal que $|H(x,s,\xi)| \leq f(x)$.

Então existe uma solução $u \in W_0^{1,p}$ para o problema:

$$\int_X c(x,u,Du)D\phi = \int_X H(x,u,Du)\phi, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p'}(X)$$

Demonstração. Ver [3]. □

1.6 Truncamentos de Stampacchia

Os Truncamentos de Stampacchia são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ bastante úteis ao longo deste trabalho, por isso, essa seção se dedica às suas definições e a dois resultados relacionados a elas.

Seja $k > 0$. Definimos

$$T_k(x) = \begin{cases} x, \text{ se } |x| \leq k \\ k, \text{ se } x > k \\ -k, \text{ se } x < -k. \end{cases}$$

Além disso, $G_k(x) := x - T_k(x)$. Ou seja,

$$G_k(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } |x| \leq k \\ x-k, \text{ se } x > k \\ x+k, \text{ se } x < -k. \end{cases}$$

Segue agora um lema que, em particular, é satisfeito para os Truncamentos de Stampacchia.

Lema 1.20. Sejam $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} h(x) \geq 0, \text{ se } x \geq 0 \\ h(x) \leq 0, \text{ se } x \leq 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Assim,

$$g(x)x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

é equivalente a

$$g(x)h(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Em particular, temos que

$$g(x)T_k(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$g(x)G_k(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Sendo que a função identidade é uma função h que satisfaz (1.10), então

$$g(x)h(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

se reduz a

$$g(x)x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Agora, suponhamos que

$$g(x)x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

seja verdade e que h satisfaça (1.10).
Se $x \geq 0$, temos de $g(x)x \geq 0$, que $g(x) \geq 0$ e de (1.10) que $h(x) \geq 0$. Ou seja, $g(x)h(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Por outro lado, se $x \leq 0$, $g(x)x \leq 0$ implica em $g(x) \leq 0$, já de (1.10), temos $h(x) \leq 0$, logo $g(x)h(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. □

Agora enunciaremos um lema envolvendo a função G_k que será usado posteriormente.

Lema 1.21. Seja $f \in L^1(X)$ tal que existam $k_1 > 1$ e $k_2 > 0$ de modo que

$$\int_X |G_k(f(x))| \leq k_2 \mu(\{|f| > k\})^{k_1},$$

para todo k.

Então, $f \in L^\infty(X)$ e, além disso,

$$\|f\|_{L^\infty(X)} \leq k_2 \zeta,$$

onde ζ depende de k_1 e de X.

Demonstração. [3] □

1.7 Regra da Cadeia

No nosso contexto de aplicações em espaços de Sobolev é importante sabermos quais regras da cadeia são válidas e quais hipóteses são necessárias para utilizá-las. Seguem então três resultados sobre regra da cadeia.

Teorema 1.22. Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz e $1 \leq p < +\infty$. Então

a) Se $f \circ u \in L^p(X)$ então $f \circ u \in W^{1,p}(X)$, $\forall \, u \in W^{1,p}(X)$, e além disso

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{q.t.p. em } X, \ i = 1, \ldots, N$$

b) Se $f(0) = 0$ então $f \circ u \in W_0^{1,p}(X)$, $\forall \, u \in W_0^{1,p}(X)$

c) Se $\mu(X) < +\infty$ então $f \circ u \in W^{1,p}(X)$, $\forall\, u \in W^{1,p}(X)$

Demonstração. a) Ver [13, Teorema 2.1.1, pág. 48].

b) Pelo fato de f ser Lipschitz, temos que

$$\begin{aligned} |f(u(x))| &= |f(u(x)) - f(0)| \\ &\leq c|u(x) - 0| \\ &= c|u(x)|, \end{aligned}$$

para algum $c > 0$.

Ou seja,

$$\left(\int_X |f(u(x))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\int_X |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

Logo, de $u \in L^p(X)$, temos que $f \circ u \in L^p(X)$, o que pelo item a), significa que $f \circ u \in W^{1,p}(X)$. E finalmente, de $f(0) = 0$, temos que $f \circ u \in W_0^{1,p}(X)$.

c) Seja

$$F(s) = f(s) - f(0).$$

F é Lipschitz e $F(0) = 0$.

Logo, por b), temos que $F(u) \in L^p(X)$. Assim,

$$f(u) = F(u) + f(0) \in L^p(X),$$

pois $f(0)$ é constante e $\mu(X) < +\infty$.

E então, por a), $f(u) \in W^{1,p}(X)$. □

O corolário que segue se aplica as nossas necessidades de forma mais direta, por envolver compostas de funções truncamentos com aplicações em $W_0^{1,p}(X)$, que serão muito utilizadas ao longo do texto.

Corolário 1.23. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado, e $k > 0$. Se $u \in W_0^{1,p}(X)$, com $1 \leq p < +\infty$, então

a) $T_k(u) \in W_0^{1,p}(X)$

$$DT_k(u) = \begin{cases} Du, \text{ se } |u| \leq k \\ 0, \text{ se } |u| > k, \end{cases}$$

q.t.p. em X.

b) $G_k(u) \in W_0^{1,p}(X)$

$$DG_k(u) = \begin{cases} 0, \text{ se } |u| \leq k \\ Du, \text{ se } |u| > k. \end{cases}$$

q.t.p. em X.

Demonstração. De T_k e G_k Lipschitz e $T_k(0) = G_k(0) = 0$, pelo Teorema 1.22 b), temos de fato que $T_k(u)$ e $G_k(u) \in W_0^{1,p}(X)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(X)$.

Mas,

$$T_k'(s) = \begin{cases} 1, & |s| < k \\ 0, & |s| > k. \end{cases}$$

$$G_k'(s) = \begin{cases} 0, & |s| < k \\ 1, & |s| > k. \end{cases}$$

E $\mu(\{x : |u(x)| = k\}) = 0$. Então, pelo pelo Teorema 1.22 a), segue o resultado. $\square$

O teorema a seguir mostra que a regra da cadeia também pode ser usada com a hipótese de f Lipschitz do Teorema 1.22 levemente enfraquecida.

Teorema 1.24 (Regra da Cadeia Localmente Lipschitz). Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz e $1 \leq p < +\infty$. Então

a) $\forall\, u \in W^{1,p}(X) \cap L^\infty(X)$, $f \circ u \in W^{1,p}(X)$ e $D(f \circ u) = f'(u)Du$ q.t.p. em X.

b) Se $f(0) = 0$ então $f \circ u \in W_0^{1,p}(X)$, $\forall\, u \in W_0^{1,p}(X) \cap L^\infty(X)$ e $D(f \circ u) = f'(u)Du$ q.t.p. em X.

Demonstração. a) Notemos que $f \circ T_k$ é globalmente Lipschitz, pois é Lipschitz em $[-k,k]$, já que f é localmente Lipschitz e $T_k([-k,k])$ é compacto, e é Lipschitz em $\mathbb{R} \setminus [-k,k]$, já que $f \circ T_k(\mathbb{R} \setminus [-k,k])$ é constante.

Seja $k > \|u\|_{L^\infty(X)}$, assim

$$|f(T_k(u))| \leq c,$$

para algum c > 0.

Logo, $f \circ T_k \in L^\infty(X)$ e portanto $f \circ T_k \in L^p(X)$, e pelo Teorema 1.22 a), $f \circ T_k \in W^{1,p}(X)$ e

$$(f \circ T_k)'(s) = f'(T_k(s))T_k'(s).$$

Mas, de $|u(x)| < k$ q.t.p. em X, temos

$$\begin{aligned} f'(u(x)) &= f'(u(x)) \cdot 1 \\ &= f'(T_k(u(x)))T_k'(u(x)). \end{aligned}$$

Ou seja, $(f \circ T_k) \circ u = f \circ u$ q.t.p. em X. E portanto, $f \circ u \in L^p(X)$.
Mas novamente pelo Teorema 1.22 a), $f \circ u \in W^{1,p}(X)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(u) = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ q.t.p. em } X.$$

b) Basta usar o item a) deste teorema mais o Teorema 1.22 b). □

Capítulo 2

Regularidade de Stampacchia

Neste capítulo, exibiremos os resultados clássicos sobre a regularidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + h(x,u) = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, $f \in L^m(\Omega)$, 1 < m < N, $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Carathéodory, não decrescente com relação à segunda variável q.t.p. em Ω, existe $c \geq 0$ tal que

$$|h(x,s) - h(x,t)| \leq c|s-t|, \ \ \forall\, s,t \in \mathbb{R} \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \Omega \tag{2.2}$$

e

$$h(x,0) = 0. \tag{2.3}$$

Em particular, vale que

$$\begin{aligned} |h(x,s)| &= |h(x,s) - h(x,0)| \\ &\leq c|s-0| \\ &= c|s|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Além disso,

$$h(x,s)s \geq 0, \ \ \forall s \in \mathbb{R} \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \Omega, \tag{2.5}$$

afinal, $h(x,0) = 0$ e pelo fato de h ser não decrescente em relação à segunda variável, se $s \geq 0$ então $h(x,s) \geq 0$, se $s \leq 0$ então $h(x,s) \leq 0$.

Os resultados aqui exibidos são devidos a Guido Stampacchia conforme [11], [12] e [3].

Em resumo, veremos que

a) se $m > N/2$ então $u \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$

b) se $(2^*)' \le m < N/2$ então $u \in L^{m^{**}}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$

c) se $1 < m < (2^*)'$ então $u \in L^{m^{**}}(\Omega) \cap W_0^{1,m^*}(\Omega)$

onde $m^* = \dfrac{Nm}{N-m}$ e $m^{**} = \dfrac{Nm}{N-2m}$.

Nos casos clássicos $(2^*)' \le m < \dfrac{N}{2}$ e $m > \dfrac{N}{2}$, trataremos somente da regularidade das soluções. Cabe ressaltar que se $m < (2^*)'$ então $m^* < 2$.

No caso irregular, $1 < m < (2^*)'$, para maior conveniência do leitor, provaremos existência e regularidade de soluções.

Nosso objetivo é fornecer os resultados e ideias básicas desta vasta teoria de maneira a tornar a presente dissertação autocontida.

Começaremos pelo caso com regularidade mais alta dos dados.

2.1 Integrabilidade de Soluções, caso $m > N/2$

Teorema 2.1. Seja $f \in L^m(\Omega)$, onde $m > N/2$. Então, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ for solução fraca de (2.1), então $u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le c\|f\|_{L^m(\Omega)},$$

onde $c = c(\Omega, N, m) > 0$.

Demonstração. Consideremos $v = G_k(u)$. Pelo Corolário 1.23, temos que $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Tomemos então v como função teste em (2.1). Assim

$$\int_\Omega Du(x) \cdot DG_k(u(x)) + \int_\Omega h(x,u) G_k(u(x)) = \int_\Omega f(x) G_k(u(x)). \tag{2.6}$$

Mas,

$$\int_\Omega f(x) G_k(u(x)) = \int_{|u| \ge k} f(x) G_k(u(x)), \tag{2.7}$$

e pela Desigualdade de Hölder,

$$\int_{|u|\ge k} f(x) G_k(u(x)) \le \left(\int_{|u|\ge k} |f(x)|^m \right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_{|u|\ge k} |G_k(u(x))|^{m'} \right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{2.8}$$

Novamente, pela Desigualdade de Hölder para $\dfrac{2^*}{m'}$ e $\dfrac{2^*}{2^*-m'}$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{|u|\geq k}|G_k(u(x))|^{m'} &\leq \left(\int_{|u|\geq k}|G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{m'}{2^*}}\left(\int_{|u|\geq k}1\right)^{\frac{2^*-m'}{2^*}}\\ &= \left(\int_{|u|\geq k}|G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{m'}{2^*}}\mu(\{|u|\geq k\})^{\frac{2^*-m'}{2^*}} \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Assim, por (2.7), (2.8) e (2.9)

$$\begin{aligned}\int_\Omega fG_k(u(x)) &\leq \left(\int_{|u|\geq k}|f(x)|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_{|u|\geq k}|G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}\mu(\{|u|\geq k\})^{\frac{2^*-m'}{2^*m'}}\\ &= \|f\|_{L^m(\Omega)}\|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\mu(\{|u|\geq k\})^{\frac{2^*-m'}{2^*m'}} \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Agora, vamos analisar o lado esquerdo da equação (2.6).

$$\begin{aligned}\int_\Omega Du(x)\cdot DG_k(u(x))+\int_\Omega h(x,u(x))G_k(u(x)) &\geq \int_\Omega Du(x)\cdot DG_k(u(x))\\ &= \int_\Omega |DG_k(u(x))|^2, \qquad (2.11)\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\int_\Omega Du(x)\cdot DG_k(u(x)) &= \int_{\{|u|\geq k\}} Du(x)\cdot DG_k(u(x))\\ &= \int_{\{|u|\geq k\}} DG_k(u(x))\cdot DG_k(u(x))\\ &= \int_\Omega |DG_k(u(x))|^2,\end{aligned}$$

e $h(x,u)G_k(u)\geq 0$ por (2.5).

Assim, por (2.6), (2.10) e (2.11)

$$\int_\Omega |DG_k(u(x))|^2 \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\mu(\{|u|\geq k\})^{\frac{2^*-m'}{2^*m'}}$$

E por (1.7)

$$\left(\int_\Omega |G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c\|f\|_{L^m(\Omega)}\|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\mu(\{|u|\geq k\})^{\frac{2^*-m'}{2^*m'}}$$

Ou seja,

$$\|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^m(\Omega)}\mu(\{|u| \geq k\})^{\frac{2^*-m'}{2^*m'}} \tag{2.12}$$

Agora, mais uma vez, pela Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |G_k(u(x))| &\leq \left(\int_{|u|\geq k} |G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{|u|\geq k} 1\right)^{\frac{1}{(2^*)'}} \\
&= \|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\mu(\{|u| \geq k\})^{\frac{1}{(2^*)'}} \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Segue de (2.12) e (2.13) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |G_k(u(x))| &\leq c\|f\|_{L^m(\Omega)}\mu(\{|u| \geq k\})^{\frac{2^*-m'}{2^*m'}+\frac{1}{(2^*)'}} \\
&= c\|f\|_{L^m(\Omega)}\mu(\{|u| \geq k\})^{1+\frac{2}{N}-\frac{1}{m}} \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Entretanto, pelo Lema 1.21, como 1 + $\dfrac{2}{N} - \dfrac{1}{m} > 1$, afinal $m > \dfrac{N}{2}$, segue que $u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^m(\Omega)}$$

□

2.2 Integrabilidade de Soluções, caso $(2^*)' \leq m < N/2$

Vejamos agora os resultados padrão para regularidade de solução.

Teorema 2.2. Seja $f \in L^m(\Omega)$, onde $(2^*)' \leq m < N/2$. Então, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ for solução fraca de (2.1), então $u \in L^{m^{**}}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^m(\Omega)},$$

onde $c = c(\Omega, N, m) > 0$.

Demonstração. Sejam $\lambda \geq \dfrac{1}{2}$, $k > 0$ e $v = \dfrac{|T_k(u)|^{2\lambda}}{2\lambda+1}T_k(u)$. Queremos usar v como função teste em (2.1). Isso faz sentido pois, de $T_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, pelo Corolário 1.23, então v também pertence a $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, e assim, por (2.1), temos que

$$\int_\Omega Du \cdot Dv + \int_\Omega h(x,u)v = \int_\Omega fv.$$

Mas de, $Dv = |T_k(u)|^{2\lambda} DT_k(u)$, temos que

$$\int_\Omega Du|T_k(u)|^{2\lambda} DT_k(u) + \int_\Omega h(x,u)\frac{|T_k(u)|^{2\lambda}}{2\lambda+1}T_k(u) = \int_\Omega f\frac{|T_k(u)|^{2\lambda}}{2\lambda+1}T_k(u). \tag{2.15}$$

Por Hölder, temos que

$$\int_\Omega f\frac{|T_k(u)|^{2\lambda}}{2\lambda+1}T_k(u) \leq \frac{1}{2\lambda+1}\left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\lambda+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{2.16}$$

Agora, para o lado esquerdo da equação (2.15), temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega Du|T_k(u)|^{2\lambda} DT_k(u) \quad &+ \quad \int_\Omega h(x,u)\frac{|T_k(u)|^{2\lambda}}{2\lambda+1}T_k(u) \\ &\geq \quad \int_\Omega Du|T_k(u)|^{2\lambda} DT_k(u) = \int_\Omega \frac{|D(T_k(u)|T_k(u)|^\lambda)|^2}{(\lambda+1)^2}\end{aligned} \tag{2.17}$$

Pois,

$$\begin{aligned}\int_\Omega Du|T_k(u)|^{2\lambda} DT_k(u) &= \int_{|u|\leq k} Du|T_k(u)|^{2\lambda} DT_k(u) \\ &= \int_{|u|\leq k} |DT_k(u)|^2|T_k(u)|^{2\lambda} \\ &= \int_\Omega |DT_k(u)|^2|T_k(u)|^{2\lambda} \\ &= \int_\Omega \frac{|D(T_k(u)|T_k(u)|^\lambda)|^2}{(\lambda+1)^2}\end{aligned} \tag{2.18}$$

e $\int_\Omega h(x,u)\frac{|T_k(u)|^{2\lambda}}{2\lambda+1}T_k(u) \geq 0$, pois $h(x,u)T_k(u) \geq 0$ por (2.5).

Assim, por (2.15), (2.16) e (2.17), temos que

$$\int_\Omega \frac{|D(T_k(u)|T_k(u)|^\lambda)^2}{(\lambda+1)^2} \leq \frac{1}{2\lambda+1}\left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\lambda+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{2.19}$$

Mas por Imersão de Sobolev

$$\frac{1}{(\lambda+1)^2}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(\lambda+1)|2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{S}{2\lambda+1}\left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\lambda+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{2.20}$$

Agora, tomemos

$$\lambda = \frac{2^* - m'}{2m' - 2^*}.$$

$\lambda > 0$, pois $(2^*)' < m < \frac{N}{2}$.

Além disso, teremos que

$$(\lambda+1)2^* = (2\lambda+1)m' = m^{**}.$$

Assim, por (2.20)

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m^{**}}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c\|f\|_{L^m}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m^{**}}\right)^{\frac{1}{m'}},$$

onde c depende de λ e da constante de Sobolev. Ou seja,

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m^{**}}\right)^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}} \leq c\|f\|_{L^m}.$$

Por Fatou, usando do fato que $\lim_{k\to+\infty} T_k(u) = u$, e que $\frac{2}{2^*} - \frac{1}{m'} = \frac{1}{m^{**}}$, temos que

$$\left(\int_\Omega |u|^{m^{**}}\right)^{\frac{1}{m^{**}}} \leq c\|f\|_{L^m}.$$

O que é o mesmo que dizer que

$$\|u\|_{L^{m^{**}}} \leq c\|f\|_{L^m}.$$

□

Como já assumimos $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, não provaremos regularidade para Du. Porém, notemos que, como $m \geq (2^*)'$ então $m^* \geq 2$. Em geral, não é trivial obter $Du \in L^{m^*}$ se $m \geq (2^*)'$.

2.3 Integrabilidade de Soluções, caso irregular, $1 < m < (2^*)'$

No próximo resultado, trataremos de existência e regularidade de soluções para (2.1) quando f está abaixo do nível de energia ou dualidade, isto é,

$$f \in L^m(\Omega), \quad 1 < m < (2^*)'.$$

Como não esperamos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ em geral, para conveniência do leitor, introduzimos uma nova noção de solução para (2.1).

Definição 2.1. Dada $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável, diremos que u é solução no sentido das Distribuições de (2.1) se e somente se:

i) $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$

ii) $h(x,u) \in L^1(\Omega)$

iii) $\int_\Omega Du \cdot D\phi + \int_\Omega h(x,u)\phi = \int_\Omega f\phi, \ \ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Primeiramente, veremos uma versão aproximada de (2.1).

Consideraremos $f_n = T_n(f) \in L^\infty(\Omega)$, $|f_n| \le |f|$ q.t.p. em Ω e $f_n \longrightarrow f$ em $L^m(\Omega)$. Seja então o problema aproximado

$$\begin{cases} -\Delta u_n + h(x,u_n) = f_n(x), \Omega \\ u_n = 0, \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

Proposição 2.3. Sejam f, f_n e (2.21) como acima. Suponhamos que $h : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja Carathéodory, não decrescente com relação à segunda variável q.t.p. em Ω e satisfaça (2.2) - (2.3).

Então existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sequência de soluções fracas para (2.21) onde

a) $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, existem $c_1 = c_1(\Omega, n, \|f\|_{L^1(\Omega)})$ e $c_2 = c_2(\Omega, n, \|f\|_{L^1(\Omega)})$, tais que

b) $\|u_n\|_{L^{m^{**}}} \le c_1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) $\|Du_n\|_{L^{m^*}} \le c_2, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Primeiro, mostraremos a), observando que $f_n \in W^{-1,2}(\Omega) = (W_0^{1,2}(\Omega))'$, via identificação padrão.

Agora, definimos $a : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$a(u_n, v) = \int_\Omega Du_n \cdot Dv + \int_\Omega h(x,u_n)v,$$

e $\Phi_n : W_0^{1,2} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi_n(\phi) = \int_\Omega f_n\phi.$$

Afirmação: a satisfaz as hipóteses do Teorema de Stampacchia, ver o Teorema 1.18.

Primeiro, verificaremos as hipóteses sobre a segunda entrada, que são a linearidade e a continuidade na segunda variável de a.

- $a(u_n,\cdot):W_0^{1,2}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ é linear.

  Sejam $v_1,v_2\in W_0^{1,2},\lambda\in\mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} a(u_n,\lambda v_1+v_2) &= \int_\Omega Du_n\cdot D(\lambda v_1+v_2)+\int_\Omega h(x,u_n)(\lambda v_1+v_2) \\ &= \lambda\int_\Omega Du_n\cdot Dv_1+\lambda\int_\Omega h(x,u_n)v_1+\int_\Omega Du_n\cdot Dv_2+\int_\Omega h(x,u_n)v_2 \\ &= \lambda a(u_n,v_1)+a(u_n,v_2). \end{aligned}$$

  Como dito, segue agora a continuidade na segunda entrada.

- $a(u_n,\cdot):W_0^{1,2}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ é contínua.

  Seja $v\in W_0^{1,2}$, assim temos que

$$|a(u_n,v)|\leq\int_\Omega|Du_n||Dv|+\int_\Omega|h(x,u_n)||v|.$$

  Mas pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |a(u_n,v)| &\leq \int_\Omega|Du_n||Dv|+\int_\Omega|h(x,u_n)||v| \\ &\leq \left(\int_\Omega|Du_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|Dv|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\int_\Omega|h(x,u_n)||v| \end{aligned} \tag{2.22}$$

  Porém, por (2.4)

$$|h(x,u_n)||v|\leq c|u_n||v|.$$

  Assim,

$$\int_\Omega|h(x,u_n)||v|\leq c\int_\Omega|u_n||v|,$$

  e da Desigualdade de Hölder para 2^* e $(2^*)'$ e como $L^{2^*}(\Omega)\hookrightarrow L^{(2^*)'}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega|h(x,u_n)||v| &\leq c\int_\Omega|u_n||v| \\ &\leq c\|u_n\|_{L^{(2^*)'}}\|v\|_{L^{2^*}} \\ &\leq c\|u_n\|_{L^{2^*}}\|v\|_{L^{2^*}}, \end{aligned}$$

pois $2^* > (2^*)'$. Então, por (1.7)

$$\int_\Omega |h(x,u_n)||v| \leq c\|Du_n\|_{L^2}\|Dv\|_{L^2} \tag{2.23}$$

Logo, por (2.22) e (2.23)

$$|a(u_n,v)| \leq (c+1)\|u_n\|_{W_0^{1,2}}\|v\|_{W_0^{1,2}}$$

Agora, veremos as hipóteses sobre a primeira variável. Primeiro, teremos que vale que

- $|a(u_1,v)-a(u_2,v)| \leq \beta\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,2}}\|v\|_{W_0^{1,2}}, \ \forall u_1,u_2,v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,
  pois

$$\begin{aligned} |a(u_1,v)-a(u_2,v)| &= \left|\int_\Omega Du_1\cdot Dv + \int_\Omega h(x,u_1)v \right. \\ &\quad \left. -\int_\Omega Du_2\cdot Dv - \int_\Omega h(x,u_2)v\right| \\ &\leq \left|\int_\Omega (Du_1-Du_2)\cdot Dv\right| + \int_\Omega |h(x,u_1)-h(x,u_2)||v| \end{aligned}$$

Porém, por (2.2)

$$|h(x,u_1)-h(x,u_2)| \leq c|u_1-u_2|.$$

Então, das duas últimas desigualdades segue que

$$\begin{aligned} |a(u_1,v)-a(u_2,v)| &\leq \int_\Omega |Du_1-Du_2||Dv| + c\int_\Omega |u_1-u_2||v| \\ &\leq \left(\int_\Omega |Du_1-Du_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |Dv|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad c\left(\int_\Omega |u_1-u_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u_1-u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + c\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (c+1)\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde usamos a Desigualdade de Poincaré.

Vejamos agora que,

- $a(u_1,u_1-u_2)-a(u_2,u_1-u_2) \leq \zeta\|u_1-u_2\|^2_{W_0^{1,2}}, \ \forall u_1,u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned}
a(u_1,u_1-u_2)-a(u_2,u_1-u_2) &= \int_\Omega Du_1\cdot D(u_1-u_2)+\int_\Omega h(x,u_1)(u_1-u_2)\\
&\quad -\int_\Omega Du_2\cdot D(u_1-u_2)-\int_\Omega h(x,u_2)(u_1-u_2)\\
&= \int_\Omega (Du_1\cdot Du_1-2Du_1\cdot Du_2+Du_2\cdot Du_2)\\
&\quad +\int_\Omega (h(x,u_1)-h(x,u_2))(u_1-u_2)\\
&= \int_\Omega |Du_1-Du_2|^2+\int_\Omega (h(x,u_1)-h(x,u_2))(u_1-u_2)\\
&\geq \int_\Omega |Du_1-Du_2|^2,
\end{aligned}$$

pela monotonia de $h(x,\cdot)$.

Então pelo Teorema 1.18, existe $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ para cada n, única, solução fraca de (2.21). Porém, pelo Teorema 2.1, como $f_n \in L^p(\Omega), p > N/2$, temos que $u_n \in L^\infty(\Omega)$.

Vejamos agora a prova de b).

Seja $0 < \varepsilon < 1$. Notemos que, u_n^+ e $u_n^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e então, pela Proposição 1.24

$$v = (u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma$$

e

$$w = -(u_n^- + \varepsilon)^\gamma + \varepsilon^\gamma$$

pertencem à $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Consideremos v como função teste em (2.21). Logo,

$$\gamma\int_\Omega Du_n\cdot Du_n^+(u_n^++\varepsilon)^{\gamma-1}+\int_\Omega h(x,u_n)((u_n^++\varepsilon)^\gamma-\varepsilon^\gamma)=\int_\Omega f_n((u_n^++\varepsilon)^\gamma-\varepsilon^\gamma). \quad (2.24)$$

Agora, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega h(x,u_n)((u_n^++\varepsilon)^\gamma-\varepsilon^\gamma)=\int_\Omega h(x,u_n)(u_n^+)^\gamma, \quad (2.25)$$

pois de $0 < \varepsilon < 1$, temos que

$$(u_n^+ + \varepsilon)^\gamma \leq (u_n^+ + 1)^\gamma,$$

ou seja

$$(u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma \leq (u_n^+ + 1)^\gamma + 1,$$

além disso, temos também que

$$-(u_n^+ + 1)^\gamma - 1 \le (u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma,$$

assim,

$$|(u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma| \le (u_n^+ + 1)^\gamma + 1, \tag{2.26}$$

e portanto,

$$|h(x,u_n)(u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma| \le |h(x,u_n)|(u_n^+ + 1)^\gamma + 1.$$

Tomando $g(x) = |h(x,u_n)|(u_n^+ + 1)^\gamma + 1$, temos que g é integrável e

$$|h(x,u_n)(u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma| \le g(x) \ \text{ q.t.p. em}\Omega.$$

Além disso,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} h(x,u_n)((u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma) = h(x,u_n)(u_n^+)^\gamma,$$

e segue (2.25).

Porém,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(x,u_n)(u_n^+)^\gamma &= \int_{\Omega^+} h(x,u_n)(u_n^+)^\gamma \\
&= \int_\Omega h(x,u_n^+)(u_n^+)^\gamma \\
&\ge 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Além disso, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega f_n((u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma) = \int_\Omega f_n(u_n^+)^\gamma, \tag{2.28}$$

pois de (2.26),

$$|f_n(x)(u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma| \le |f_n(x)|(u_n^+ + 1)^\gamma + 1.$$

Tomando $g(x) = |f_n(x)|(u_n^+ + 1)^\gamma + 1$ e usando de que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_n((u_n^+ + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma) = f_n(u_n^+)^\gamma,$$

temos (2.28).

Mais ainda,

$$\gamma \int_\Omega Du_n \cdot Du_n^+ (u_n^+ + \varepsilon)^{\gamma-1} = \gamma \int_\Omega |Du_n^+|^2 (u_n^+ + \varepsilon)^{\gamma-1},$$

e então, pelo Lema de Fatou

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\gamma\int_\Omega Du_n\cdot Du_n^+(u_n^+ +\varepsilon)^{\gamma-1}\geq \gamma\int_\Omega |Du_n^+|^2(u_n^+)^{\gamma-1}, \tag{2.29}$$

onde $Du_n^+ = 0$ se $u_n^+ = 0$.

Logo, de (2.24), (2.25) (2.27), (2.28) e (2.29), obtemos que

$$\begin{aligned}\gamma\int_\Omega |Du_n^+|^2(u_n^+)^{\gamma-1} &\leq \int_\Omega f_n(u_n^+)^\gamma\\ &\leq \int_\Omega |f_n||u_n|^\gamma. \end{aligned}\tag{2.30}$$

Agora, considerando $w = -(u_n^- +\varepsilon)^\gamma + \varepsilon^\gamma$ como função teste em (2.21), obtemos

$$-\gamma\int_\Omega Du_n\cdot Du_n^-(u_n^- +\varepsilon)^{\gamma-1} + \int_\Omega h(x,u_n)(-(u_n^- +\varepsilon)^\gamma+\varepsilon^\gamma) = \int_\Omega f_n(-(u_n^- +\varepsilon)^\gamma+\varepsilon^\gamma). \tag{2.31}$$

E de maneira análoga a (2.25)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega h(x,u_n)(-(u_n^- +\varepsilon)^\gamma+\varepsilon^\gamma) = -\int_\Omega h(x,u_n)(u_n^-)^\gamma, \tag{2.32}$$

pois

$$|(u_n^- +\varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma| \leq (u_n^- +1)^\gamma + 1, \tag{2.33}$$

e então,

$$|h(x,u_n)(-(u_n^- +\varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma)| \leq |h(x,u_n)|(u_n^- +1)^\gamma + 1.$$

E tomando $g(x) = |h(x,u_n)|(u_n^+ +1)^\gamma + 1$, mais o fato de

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} h(x,u_n)(-(u_n^- +\varepsilon)^\gamma+\varepsilon^\gamma) = -h(x,u_n)(u_n^-)^\gamma,$$

temos (2.33).

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(x,u_n)(u_n^-)^\gamma &= -\int_{\Omega^-} h(x,u_n)(u_n^-)^\gamma\\ &= -\int_\Omega h(x,-u_n^-)(u_n^+)^\gamma\\ &\geq 0.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Além disso, de novo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega f_n(-(u_n^-+\varepsilon)^\gamma+\varepsilon^\gamma)=\int_\Omega -f_n(u_n^-)^\gamma, \tag{2.35}$$

pois de (2.33), temos que

$$|f_n(x)(-(u_n^-+\varepsilon)^\gamma-\varepsilon^\gamma)|\le |f_n(x)|(u_n^-+1)^\gamma+1.$$

E para $g(x)=|f_n(x)|(u_n^-+1)^\gamma+1$ e usando do fato de que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_n(-(u_n^-+\varepsilon)^\gamma+\varepsilon^\gamma)=-f_n(u_n^-)^\gamma, \tag{2.36}$$

segue (2.35).

Por fim,

$$\begin{aligned}
-\gamma\int_\Omega Du_n\cdot Du_n^-(u_n^-+\varepsilon)^{\gamma-1} &= -\gamma\int_{\Omega^-} Du_n\cdot Du_n^-(u_n^-+\varepsilon)^{\gamma-1}\\
&= \gamma\int_{\Omega^-}|Du_n^-|^2(u_n^-+\varepsilon)^{\gamma-1}\\
&= \gamma\int_\Omega |Du_n^-|^2(u_n^-+\varepsilon)^{\gamma-1}.
\end{aligned}$$

Logo, mais uma vez pelo Lema de Fatou,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} -\gamma\int_\Omega Du_n\cdot Du_n^-(u_n^-+\varepsilon)^{\gamma-1}\ge \gamma\int_\Omega |Du_n^-|^2(u_n^-)^{\gamma-1}, \tag{2.37}$$

Então, por (2.31), (2.32), (2.34), (2.35) e (2.37)

$$\begin{aligned}
\gamma\int_\Omega |Du_n^-|^2(u_n^-)^{\gamma-1} &\le \int_\Omega -f_n(u_n^-)^\gamma\\
&\le \int_\Omega |f_n||u_n|^\gamma.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Porém, por (2.30)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Du_n^+|^2(u_n^+)^{\gamma-1} &= \int_\Omega |Du_n^+(u_n^+)^{\frac{\gamma-1}{2}}|^2\\
&= \int_{|u_n|>0} |Du_n^+(u_n^+)^{\frac{\gamma-1}{2}}|^2
\end{aligned}$$

Agora, pela Regra da Cadeia

$$\begin{aligned}\int_{|u_n|>0}|Du_n^+(u_n^+)^{\frac{\gamma-1}{2}}|^2 &= c\int_{|u_n|>0}|D(u_n^+)^{\frac{\gamma-1}{2}}|^2\\ &= c\int_{\Omega}|D(u_n^+)^{\frac{\gamma-1}{2}}|^2.\end{aligned}$$

Então, por imersão de Sobolev e por (2.30)

$$\left(\int_{\Omega^+}((u_n^+)^{\frac{\gamma+1}{2}})^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c\int_{\Omega}|f_n||u_n|^{\gamma}.$$

Analogamente, por (2.38)

$$\left(\int_{\Omega^-}((u_n^-)^{\frac{\gamma+1}{2}})^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c\int_{\Omega}|f_n||u_n|^{\gamma}.$$

Das duas últimas desigualdades

$$\left(\int_{\Omega}(|u_n|^{\frac{\gamma+1}{2}})^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq 2c\int_{\Omega}|f_n||u_n|^{\gamma} \tag{2.39}$$

Para $\gamma = \dfrac{N(m-1)}{N-2m}$, temos que $m'\gamma = \dfrac{(\gamma+1)2^*}{2} = m^{**}$.

E então, por (2.39)

$$\left(\int_{\Omega}|u_n|^{m^{**}}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c\left(\int_{\Omega}|f_n|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_{\Omega}|u_n|^{m^{**}}\right)^{\frac{1}{m'}},$$

de modo que

$$\left(\int_{\Omega}|u_n|^{m^{**}}\right)^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}} \leq c\left(\int_{\Omega}|f_n|^m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Agora, $\dfrac{2}{2^*} - \dfrac{1}{m'} = \dfrac{1}{m^{**}}$ e então

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega}|u_n|^{m^{**}}\right)^{\frac{1}{m^{**}}} &\leq c\left(\int_{\Omega}|f_n|^m\right)^{\frac{1}{m}} &(2.40)\\ &\leq c\left(\int_{\Omega}|f|^m\right)^{\frac{1}{m}} &(2.41)\\ &= c_1. &(2.42)\end{aligned}$$

Mostraremos agora que vale c).

De fato, observemos que m^* pois $m < (2^*)'$. Então $q = \dfrac{2}{m^*} > 1$ e $q' = \dfrac{2}{2-m^*}$.

Sabemos que, por (2.30), (2.38) e (2.40)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |D|u_n||^2|u_n|^{\gamma-1} &\leq c\int_\Omega |f_n||u_n|^\gamma \\
&\leq c\left(\int_\Omega |f_n|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Omega |u_n|^{m'\gamma}\right)^{\frac{1}{m'}} \\
&= c\left(\int_\Omega |f_n|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Omega |u_n|^{m^{**}}\right)^{\frac{1}{m'}} \\
&\leq c\left(\int_\Omega |f_n|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{m^{**}}{m}\frac{1}{m'}},
\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde $\gamma = \dfrac{N(m-1)}{N-2m}$.

Porém, por Hölder

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |D|u_n||^{m^*} &= \int_\Omega |D|u_n||^{m^*}|u_n|^{\frac{\gamma-1}{2}m^*}|u_n|^{\frac{-\gamma+1}{2}m^*} \\
&\leq \left(\int_\Omega |D|u_n||^2|u_n|^{\gamma-1}\right)^{\frac{m^*}{2}}\left(\int_\Omega |u_n|^{\frac{(\gamma-1)m^*}{2-m^*}}\right)^{\frac{2-m^*}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega |D|u_n||^2|u_n|^{\gamma-1}\right)^{\frac{m^*}{2}}\left(\int_\Omega |u_n|^{m^{**}}\right)^{\frac{2-m^*}{2}} \\
&= c_2,
\end{aligned}$$

por (2.43) e $u \in L^{m^{**}(\Omega)}$. □

E agora, passaremos o limite nas estimativas da Proposição anterior e em (2.21) para finalmente obtermos o seguinte resultado

Teorema 2.4. Com as mesmas hipóteses da Proposição 2.3, temos que existe solução fraca para (2.1) onde

a) $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Além disso, existe $c_1 = c_1(\Omega, \|f\|_{L^1(\Omega)})$ e $c_2 = c_2(\Omega, \|f\|_{L^1(\Omega)})$, tais que

b) $\|u\|_{L^{m^{**}}} \leq c_1$.

c) $\|Du\|_{L^{m^*}} \leq c_2$.

Demonstração. Pela Proposição 2.3, temos que

$$\|u_n\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq c_1 \text{ e } \|Du_n\|_{L^{m^*}(\Omega)} \leq c_2,$$

temos que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $W_0^{1,m^*}(\Omega)$ e $L^{m^{**}}(\Omega)$.

Assim, existe $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$ de modo que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } W_0^{1,m^*}(\Omega), \text{ a menos de subsequências}$$

$$u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^{m^{**}}(\Omega), \text{ a menos de subsequências}$$

Então

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} &\leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \\ &\leq c_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|Du\|_{L^{m^*}(\Omega)} &\leq \liminf_{n\to+\infty} \|Du_n\|_{L^{m^*}(\Omega)} \\ &\leq c_2, \end{aligned}$$

e mostramos b) e c).

Além disso, como para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que u_n é solução fraca de (2.21). Então

$$\int_\Omega Du_n \cdot D\phi + \int_\Omega h(x,u_n)\phi = \int_\Omega f_n\phi, \ \ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Mas como $f_n \to f$ forte em $L^m(\Omega)$, pela definição de convergência fraca em $L^m(\Omega)$, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\phi = \int_\Omega f\phi, \ \ \forall\ \phi \in L^{m'}(\Omega),$$

e em particular, $\forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

De $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,m^*}(\Omega)$ temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega Du_n \cdot D\phi = \int_\Omega Du \cdot D\phi, \ \ \forall\ \phi \in W_0^{1,(m^*)'}(\Omega), \tag{2.44}$$

pois $W_0^{1,(m^*)'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,(m^*)'}(\Omega) = (W_0^{1,m^*})'(\Omega)$.

Porém, $C_c^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,(m^*)'}(\Omega)$.

Logo, (2.44) vale $\forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Por fim, por (2.4), temos que

$$|h(x,u_n)| \leq c|u_n|.$$

Mas de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em em $W_0^{1,m^*}(\Omega)$, temos por imersão compacta

$$u_n \longrightarrow u \text{ forte em } L^r(\Omega), \text{ a menos de subsequências,}$$

para $1 \leq r < m^{**}$.

Em particular, pela Recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Corolário 1.9, existe $g \in L^r(\Omega)$ tal que

$$|u_n| \leq g \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$u_n \longrightarrow u \text{ q.t.p. em} \Omega.$$

Então, dado $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} |h(x,u_n)\phi| &\leq c|u_n||\phi| \\ &\leq g|\phi| \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

E

$$\lim_{n\to+\infty} h(x,u_n)\phi = h(x,u)\phi \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.8

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega h(x,u_n)\phi = \int_\Omega h(x,u)\phi, \quad \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

□

Capítulo 3

Solução para sistema de EDP

Começaremos agora a parte primordial do nosso trabalho. Como dito no capítulo anterior, vimos para o caso particular de $-\Delta u$ a já conhecida Teoria de Stampacchia para uma única EDP. A partir de agora, começaremos o estudo de um sistema de EDP's com o objetivo de analisar as possíveis soluções e qual seria a regularidade dessas, caso existam. Será que poderíamos esperar algo similar ou diferente do que vimos no Capítulo 2? É o que vamos começar a responder a partir de agora.

O nosso sistema de estudo será o seguinte sistema elíptico

$$\begin{cases} -\text{div}(M(x)Du) + a(x)\varphi(x)g(u) = f(x), \\ -\text{div}(M(x)D\varphi) = a(x)G(u), \end{cases} \tag{3.1}$$

$u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, onde Ω é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$ com $N > 2$ e $\partial\Omega \in C^\infty$.

$M(x)$ é uma matriz simétrica mensurável e existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi\xi, \tag{3.2}$$

$$|M(x)| \leq \beta \tag{3.3}$$

e

$$M(x) \in C^\infty \tag{3.4}$$

Para as funções a e f, temos que

$$0 \leq a \in L^\infty(\Omega), \tag{3.5}$$

$$0 \leq f \in L^{(2^*)'}(\Omega). \tag{3.6}$$

Para as funções reais g e G, assumimos que são contínuas, crescentes, positivas, satisfazem $g(0) = 0 = G(0)$, g é Lipschitz,

$$g(y)y \geq 0, \ \ \forall\, y \in \Omega \tag{3.7}$$

e

$$\exists\, \Sigma > 0, \ \lambda > 0 \mid y \geq \Sigma \ \Rightarrow \ G(y) \leq \lambda g(y)y. \tag{3.8}$$

Porém, com a finalidade de encontrarmos solução para (3.1), neste capítulo, estudaremos o problema aproximado

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)\varphi(x)g(u) = F(x), \\ -\mathrm{div}(M(x)D\varphi) = a(x)G(u), \end{cases} \tag{3.9}$$

$u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, para $F \in L^\infty(\Omega)$.

3.1 Existência de solução para o problema aproximado desacoplado

Para encontrar solução para o sistema (3.9), encontraremos solução para EDP's geradas por cada uma das equações em separado. Vejamos então nosso primeiro resultado

Teorema 3.1. Seja $F \in L^\infty(\Omega)$ e $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então, existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a única solução fraca de

$$-\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)|\psi(x)|g(u(x)) = F(x). \tag{3.10}$$

Demonstração. Seja $B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$B(u,v) = \int_\Omega M(x)Du \cdot Dv(x) + \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))v(x),$$

Mostraremos que valem as hipóteses do Teorema de Stampacchia, ver Teorema 1.18.

Como de costume, começaremos mostrando que valem as hipóteses sobre a segunda variável.

Primeiro, temos que

- $B(u, \cdot) : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear.

De fato, sejam $v_1, v_2 \in W_0^{1,2}(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\begin{aligned}
B(u,\lambda v_1+v_2) &= \int_\Omega M(x)Du\cdot D(\lambda v_1(x)+v_2(x)) \\
&\quad + \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))(\lambda v_1(x)+v_2(x)) \\
&= \lambda \int_\Omega M(x)Du\cdot Dv_1(x) + \int_\Omega M(x)Du\cdot Dv_2(x) \\
&\quad +\lambda \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))v_1(x) + \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))v_2(x) \\
&= \lambda B(u,v_1)+B(u,v_2).
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

- $B(u,\cdot) : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua,

pois seja $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, desse modo

$$|B(u,v)| \leq \int_\Omega |M(x)Du||Dv(x)| + \int_\Omega |a(x)|\psi(x)|g(u(x))||v(x)|.$$

Usando (3.3) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|B(u,v)| \leq \beta \left(\int_\Omega |Du|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |Dv(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega |a(x)|\psi(x)|g(u(x))||v(x)|. \tag{3.11}$$

Porém, de $\psi, a \in L^\infty(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |a(x)|\psi(x)|g(u(x))||v(x)| &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g(u(x))||v(x)| \\
&\leq L\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u(x)||v(x)| \\
&\leq L\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|v\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)} \\
&\leq cL\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|v\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\leq cLS\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde L vem do fato de g ser Lipschitz, c da imersão e S é da Desigualdade de Sobolev. Lembrando que $g(0)=0$.

Assim, por (3.11) e (3.12)

$$|B(u,v)| \leq C\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

onde C é uma constante.

Agora,vejamos as hipóteses sobre a primeira variável. Temos que

- Existe $\zeta > 0$ tal que $|B(u_1,v) - B(u_2,v)| \leq \zeta \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \ \forall u_1, u_2, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
|B(u_1,v) - B(u_2,v)| &= \left| \int_\Omega M(x)Du_1(x)\cdot Dv(x) + \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u_1(x))v(x) \right.\\
&\quad \left. - \int_\Omega M(x)Du_2(x)\cdot Dv(x) - \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u_2(x))v(x) \right|\\
&\leq \int_\Omega |M(x)(Du_1(x) - Du_2(x))\cdot Dv(x)| + \\
&\quad \int_\Omega |a(x)|\psi(x)|v(x)||g(u_1(x)) - g(u_2(x))|\\
&\leq \beta \left(\int_\Omega |D(u_1(x) - u_2(x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |Dv(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad \int_\Omega |a(x)|\psi(x)|v(x)||g(u_1(x)) - g(u_2(x))|,
\end{aligned}$$

por (3.3) e Cauchy-Schwarz.

Porém, como g é Lipschitz e $a, \psi \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |a(x)|\psi(x)|v(x)||g(u_1(x)) - g(u_2(x))| &\leq C\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |v(x)||u_1(x) - u_2(x)|\\
&\leq C\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^{(2^*)'}}\|u_1 - u_2\|_{L^{2^*}(\Omega)}\\
&\leq CS^2\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},
\end{aligned}$$

lembrando que $L^{2^*}(\Omega)(\Omega) \hookrightarrow L^{(2^*)'}(\Omega)$.

Por fim,

- Existe $\eta > 0$ tal que $B(u_1, u_1 - u_2) - B(u_2, u_1 - u_2) \geq \eta \|u_1 - u_2\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \ \forall u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

De fato, por (3.2),

$$
\begin{aligned}
B(u_1,u_1-u_2)-B(u_2,u_1-u_2) &= \int_\Omega M(x)Du_1\cdot D(u_1-u_2)+\int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u_1)(u_1-u_2)\\
&\quad -\int_\Omega M(x)Du_2\cdot D(u_1-u_2)-\int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u_2)(u_1-u_2)\\
&\geq \alpha\int_\Omega |Du_1+Du_2|^2+\int_\Omega (g(u_1)-g(u_2))(u_1-u_2)\\
&\geq \alpha\int_\Omega |Du_1+Du_2|^2,
\end{aligned}
$$

de g crescente e (3.7).

Assim, pelo Teorema de Stampacchia, ver Teorema 1.18, existe uma única $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$B(u,\phi)=\int_\Omega F\phi,\ \ \forall\ \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

e o resultado segue. □

No próximo resultado, obtemos existência de solução para um problema gerado a partir da segunda equação do problema aproximado.

Teorema 3.2. Seja $F\in L^\infty(\Omega)$ e $u\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, solução de (3.10). Então, existe $\Psi\in W_0^{1,2}(\Omega)$ de forma que o problema

$$-\mathrm{div}(M(x)D\Psi(x))=a(x)G(u(x)), \tag{3.13}$$

possui solução no sentido fraco e ela é única.

Demonstração. Mais uma vez, aplicaremos o Teorema de Stampacchia.

Seja $E:W_0^{1,2}(\Omega)\times W_0^{1,2}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ de modo que

$$E(\Psi,v)=\int_\Omega M(x)D\Psi(x)\cdot Dv(x)$$

Começaremos mostrando que E é linear na segunda entrada:

- $E(\Psi,\cdot):W_0^{1,2}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ é linear.

  De fato, sejam $v_1,v_2\in W_0^{1,2}(\Omega),\lambda\in\mathbb{R}$, então

$$
\begin{aligned}
E(\Psi,\lambda v_1+v_2) &= \int_\Omega M(x)D\Psi(x)\cdot D(\lambda v_1(x)+v_2(x))\\
&= \lambda\int_\Omega M(x)D\Psi(x)\cdot Dv_1(x)+\int_\Omega M(x)D\Psi(x)\cdot Dv_2(x)\\
&= \lambda E(\Psi,v_1)+E(\Psi,v_2).
\end{aligned}
$$

Agora veremos que E é contínua na segunda entrada.

- $E(\Psi,\cdot): W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

De fato, seja $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, assim, por (3.3) e pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|E(\Psi,v)| &\leq \int_\Omega |M(x)D\Psi(x)||Dv(x)| \\
&\leq \beta \int_\Omega |M(x)D\Psi(x)||Dv(x)| \\
&\leq \beta \left(\int_\Omega |D\Psi(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |Dv(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde C é uma constante que depende de β e de Ψ.

Para a segunda entrada de E, temos que

- Existe $\zeta > 0$ tal que $|E(\Psi_1,v)-E(\Psi_2,v)| \leq \zeta\|\Psi_1-\Psi_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \ \forall\, \Psi_1,\Psi_2,v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

pois

$$\begin{aligned}
|E(\Psi_1,v)-E(\Psi_2,v)| &= \left|\int_\Omega M(x)D\Psi_1(x)\cdot Dv(x) - \int_\Omega M(x)D\Psi_2(x)\cdot Dv(x)\right| \\
&= \left|\int_\Omega M(x)D(\Psi_1(x)-\Psi_2(x))\cdot Dv(x)\right| \\
&\leq \int_\Omega |M(x)D(\Psi_1(x)-\Psi_2(x))||Dv(x)| \\
&\leq \beta \int_\Omega |D(\Psi_1(x)-\Psi_2(x))||Dv(x)| \\
&\leq \beta \left(\int_\Omega |D\Psi_1(x)-D\Psi_2(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |Dv(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \beta\|\Psi_1-\Psi_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

E finalmente temos que:

- Existe $\eta > 0$ tal que $E(\Psi_1,\Psi_1-\Psi_2)-E(\Psi_2,\Psi_1-\Psi_2) \geq \eta\|\Psi_1-\Psi_2\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$,

$\forall\ \Psi_1,\Psi_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned}
E(\Psi_1,\Psi_1-\Psi_2)-E(\Psi_1,\Psi_1-\Psi_2) &= \int_\Omega M(x)D\Psi_1(x)\cdot D(\Psi_1(x)-\Psi_2(x)) \\
&\quad -\int_\Omega M(x)D\Psi_2(x)\cdot D(\Psi_1(x)-\Psi_2(x)) \\
&= \int_\Omega M(x)D(\Psi_1(x)-\Psi_2(x))\cdot D(\Psi_1(x)-\Psi_2(x)) \\
&\geq \alpha\int_\Omega |D(\Psi_1(x)-\Psi_2(x))|^2 \\
&= \alpha\|\Psi_1-\Psi_2\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Stampacchia, temos que o problema (3.13) tem solução e ela é única. □

3.2 Estimativas de Energia para o problema aproximado desacoplado

Ainda no objetivo de garantirmos solução para o sistema (3.9), serão necessárias certas estimativas, que serão tratadas nos três lemas que se seguem.

Os dois primeiros, tratam de estimativas para u dada pela equação (3.10). O lema que segue dá estimativa de u na norma $L^\infty(\Omega)$.

Lema 3.3. Fixado $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução do problema

$$-\mathrm{div}(M(x)Du)+a(x)|\psi(x)|g(u(x)) = F(x)$$

então existe $C_1 > 0$ de modo que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1\|F\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Demonstração. De u solução do problema (3.3), temos que

$$\int_\Omega M(x)Du\cdot D\phi + \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))\phi(x) = \int_\Omega F(x)\phi(x),\ \ \forall\ \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Façamos agora $\phi = G_k(u)$, temos que

$$\int_\Omega M(x)Du\cdot DG_k(u(x)) + \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))G_k(u(x)) = \int_\Omega F(x)G_k(u(x)).$$

E então

$$\int_\Omega M(x)Du\cdot G_k'(u(x))Du+\int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))G_k(u(x))=\int_\Omega F(x)G_k(u(x)).$$

Mas de $a(x)|\psi(x)|g(u(x))G_k(u(x))\geq 0$, temos que

$$\int_\Omega M(x)Du\cdot G_k'(u(x))Du\leq\int_\Omega F(x)G_k(u(x)).$$

Que por (3.2), implica em

$$\alpha\int_\Omega G_k'(u(x))|Du|^2\leq\int_\Omega F(x)G_k(u(x)). \tag{3.14}$$

Mas, como $G_k'(u(x))=1$ ou $G_k'(u(x))=0$, e pela Regra da Cadeia

$$\int_\Omega G_k'(u(x))|Du|^2=\int_\Omega |DG_k(u(x))|^2, \tag{3.15}$$

por (3.14) e (3.15), temos que

$$\alpha\int_\Omega |DG_k(u(x))|^2\leq\int_\Omega F(x)G_k(u(x)).$$

Agora, aplicando Hölder para o lado direito da desigualdade,

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega |DG_k(u(x))|^2 &= \alpha\int_{|u|>k}|DG_k(u(x))|^2\\ &\leq \left(\int_{|u|>k}|F(x)|^{(2^*)'}\right)^{\frac{1}{(2^*)'}}\left(\int_\Omega |G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}.\end{aligned}$$

E novamente pela Desigualdade de Hölder para o primeiro fator do lado direito para os expoentes $\dfrac{N}{(2^*)'}$ e $\left(\dfrac{N}{(2^*)'}\right)'$

$$\alpha\int_\Omega |DG_k(u(x))|^2\leq\left(\int_\Omega |F(x)|^N\right)^{\frac{1}{N}}\mu(\{|u|>k\})^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{N}}\left(\int_\Omega |G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}},$$

afinal $\dfrac{N}{(2^*)'}=\dfrac{N+2}{2}$, $(2^*)'=\dfrac{2N}{N+2}$, $\left(\dfrac{N}{(2^*)'}\right)'=\dfrac{N+2}{N}$ e $\left(\dfrac{N}{(2^*)'}\right)'=\dfrac{N}{N-(2^*)'}$.

E pela Desigualdade de Sobolev, temos que

$$\frac{\alpha}{S^2}\left(\int_\Omega |G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}\leq\left(\int_\Omega |F(x)|^N\right)^{\frac{1}{N}}\mu(\{|u|>k\})^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{N}}\left(\int_\Omega |G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

Ou seja,

$$\frac{\alpha}{S^2}\left(\int_\Omega |G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \left(\int_\Omega |F(x)|^N\right)^{\frac{1}{N}} \mu(\{|u|>k\})^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{N}}.$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Hölder temos que

$$\int_\Omega |G_k(u(x))| \leq \left(\int_\Omega |G_k(u(x))|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \mu(\{|u|>k\})^{\frac{1}{(2^*)'}}.$$

Assim, das duas últimas desigualdades

$$\begin{aligned}\int_\Omega |G_k(u(x))| &\leq \frac{S^2}{\alpha}\left(\int_\Omega |F(x)|^N\right)^{\frac{1}{N}} \mu(\{|u|>k\})^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{1}{N}}\\ &= \frac{S^2}{\alpha}\|F\|_{L^N(\Omega)}\mu(\{|u|>k\})^{1+\frac{1}{N}}.\end{aligned}$$

Tomemos $k_1 = 1+\dfrac{1}{N}$ e $k_2 = \dfrac{S^2}{\alpha}\|F\|_{L^N(\Omega)}$.
Então, pelo Lema 1.21, temos que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{S^2}{\alpha}\|F\|_{L^N(\Omega)}\zeta,$$

onde $\zeta = \mu(\{|u|>k\})^{1+\frac{1}{N}}$.
Mas como $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^N(\Omega)$, existe $c>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \frac{cS^2}{\alpha}\|F\|_{L^\infty(\Omega)}\zeta\\ &= C_1\|F\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Agora, uma estimativa para u na norma $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Lema 3.4. Fixado $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução do problema

$$-\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)|\psi(x)|g(u) = F(x)$$

então existe $C_2 > 0$ de modo que

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C_2\|F\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Demonstração. De u solução do problema em questão, temos que

$$\int_\Omega M(x)Du\cdot D\phi + \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))\phi(x) = \int_\Omega F(x)\phi(x), \ \ \forall\ \phi\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Fazendo $\phi = u$,

$$\int_\Omega M(x)Du\cdot Du + \int_\Omega a(x)|\psi(x)|g(u(x))u(x) = \int_\Omega F(x)u.$$

Mas por (3.7), temos que $a|\psi|g(u)u \geq 0$, então

$$\int_\Omega M(x)Du\cdot Du \leq \int_\Omega F(x)u.$$

Agora, por (3.2)

$$\alpha\int_\Omega |Du|^2 \leq \int_\Omega F(x)u.$$

O que implica em

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\int_\Omega F(x)u.$$

Pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{c}{\alpha}\int_\Omega F(x)u$$

para algum $c > 0$.

E pela Desigualdade de Hölder, lembrando que $W_0^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &\leq \frac{c}{\alpha}\|F\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^1(\Omega)}\\ &\leq C_1\|F\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\end{aligned}$$

para algum $C_1 > 0$. E, portanto,

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C_1\|F\|_{L^\infty(\Omega)}$$

□

Veremos agora estimativa de energia para Ψ dada por (3.13).

Lema 3.5. Fixado $\psi\in W_0^{1,2}(\Omega)$, seja $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ solução de

$$-\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)|\psi(x)|g(u) = F.$$

E $\Psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solução de

$$-\text{div}(M(x)D\Psi) = a(x)G(u) \tag{3.16}$$

Então existem, $C(\|u\|_{L^\infty}, a), C(F,a) > 0$ tais que

$$\|\Psi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, a) \leq C(F,a)$$

Demonstração. De Ψ solução de (3.16), temos que

$$\int_\Omega M(x)D\Psi \cdot D\phi = \int_\Omega a(x)G(u)\phi, \ \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Fazendo, $\phi = \Psi$, temos que

$$\int_\Omega M(x)D\Psi \cdot D\Psi = \int_\Omega a(x)G(u)\Psi.$$

Por (3.2),

$$\alpha \int_\Omega |D\Psi|^2 \leq \int_\Omega a(x)G(u)\Psi.$$

O que implica em

$$\|D\Psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\int_\Omega a(x)G(u)\Psi.$$

Usando a Desigualdade de Poincaré,

$$\|\Psi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{c}{\alpha}\int_\Omega a(x)G(u)\Psi,$$

para algum $c > 0$.
Mas de

$$\int_\Omega a(x)G(u)\Psi = \int_{u>\Sigma} a(x)G(u)\Psi + \int_{u\leq\Sigma} a(x)G(u)\Psi,$$

usando do fato de que G é crescente, temos

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &\leq \frac{c}{\alpha}\int_{u>\Sigma} a(x)G(u)\Psi + \frac{c}{\alpha}\int_{u\leq\Sigma} a(x)G(u)\Psi \\
&\leq \frac{c}{\alpha}\int_{u>\Sigma} a(x)G(u)\Psi + \frac{c}{\alpha}\int_{u\leq\Sigma} a(x)G(\Sigma)\Psi \\
&\leq \frac{c}{\alpha}\int_\Omega a(x)G(u)\Psi + \frac{c}{\alpha}\int_\Omega a(x)G(\Sigma)\Psi.
\end{aligned}$$

E usando (3.8) no primeiro termo do lado direito, temos que

$$\|\Psi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{c\lambda}{\alpha}\int_\Omega a(x)g(u)u\Psi + \frac{cG(\Sigma)}{\alpha}\int_\Omega a(x)\Psi.$$

Assim, de $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$, pelo Lema 3.3, temos

$$\|\Psi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{c\lambda}{\alpha}\|g(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega a(x)\Psi + \frac{cG(\Sigma)}{\alpha}\int_\Omega a(x)\Psi.$$

E pela Desigualdade de Hölder e por Sobolev

$$\begin{aligned}\|\Psi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &\leq \frac{c\lambda}{\alpha}\|g(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|a\|_{L^{(2^*)'}}\|\Psi\|_{L^{2^*}(\Omega)(\Omega)} + \frac{cG(\Sigma)}{\alpha}\|a\|_{L^{(2^*)'}}\|\Psi\|_{L^{2^*}(\Omega)}\\ &\leq \frac{cS\lambda}{\alpha}\|g(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|a\|_{L^{(2^*)'}}\|\Psi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \frac{cSG(\Sigma)}{\alpha}\|a\|_{L^{(2^*)'}}\|\Psi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.\end{aligned}$$

O que implica em

$$\|\Psi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^\infty}, a),$$

e pelo Lema 3.3, segue também que

$$\|\Psi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^\infty}, a) \leq C(F, a).$$

□

3.3 Existência de solução para o problema acoplado

Agora provaremos o resultado principal deste capítulo, que é a existência de solução para o sistema aproximado (3.9). Mas antes disso, enunciaremos um lema que será usado na demonstração do teorema.

Lema 3.6. Seja $\Psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solução fraca de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)D\Psi(x)) = h, & \Omega\\ \Psi(x) = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $h \in L^2(\Omega)$.

Então existe $C = C(M, N, \Omega)$ tal que

$$\|\Psi\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C\|h\|_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração. Ver [9], Teo. 1.14, p. 240 □

Vamos agora para o resultado principal do capítulo.

Proposição 3.7. Seja $F(\Omega) \in L^\infty$. Então existe uma solução fraca (u, φ) do sistema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)\varphi(x)g(u) = F, \\ -\mathrm{div}(M(x)D\varphi) = a(x)G(u), \end{cases}$$

onde $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Além disso, se $F \geq 0$, então $u \geq 0$ e $\varphi \geq 0$.

Demonstração. Fixemos $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pelo Teorema 3.1, temos que o problema

$$-\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)|T_k(\psi(x))|g(u) = F, \quad \text{com } u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

possui solução.

A partir de u, solução do problema anterior, observemos agora o seguinte problema

$$-\mathrm{div}(M(x)D\Psi) = a(x)G(u), \quad \text{com } \Psi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Pelo Teorema 3.2, também temos garantida uma solução e pelo Princípio do Máximo, $u \geq 0$ e $\Psi \geq 0$.

Tomemos então a aplicação $S : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$, que para cada $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ associa uma $\Psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ como feito acima.

Essa aplicação é compactamente contínua. É contínua por um argumento padrão.

Seja então $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ uma sequência limitada. Pelo Lema 3.6, $\Psi_n = S(\psi_n)$ é limitada em $W^{2,2}(\Omega)$.

Porém, $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$, o que faz de S uma aplicação compactamente contínua.

Então, pelo Teorema 1.2, existe $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $S(\psi) = \psi$, isto é

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)|T_k(\psi(x))|g(u) = F, \\ -\mathrm{div}(M(x)D\psi) = a(x)G(u), \end{cases}$$

Porém, pelo Lema 3.5, existe $C > 0$ tal que $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

Tomando $k > C$, segue que $T_k(\psi) = \psi$ e então $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é solução do sistema aproximado.

Além disso, novamente pelo Lema 3.5, temos que $B[0,C] \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, que é um conjunto convexo, limitado e fechado, é invariante por S, logo, pelo Teorema 1.2, existe um ponto fixo em $B[0,C]$. □

Segue agora para um Corolário que será muito utilizado no próximo capítulo.

Corolário 3.8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$f_n = \frac{f}{1+\frac{1}{n}f}$$

Existe uma solução do sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)Du_n(x)) + a(x)\varphi_n(x)g(u_n(x)) = f_n(x), \\ -\operatorname{div}(M(x)D\varphi_n(x)) = a(x)g(u_n(x)), \end{cases} \tag{3.17}$$

com $u_n, \varphi_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $u_n, \varphi_n \geq 0$.

Demonstração. Como $f \geq 0$,

$$f_n = \frac{f}{1+\frac{1}{n}f} \leq \frac{f}{\frac{1}{n}f} = n. \tag{3.18}$$

Logo, $f_n \in L^\infty$.

Além disso, $f \geq 0$ por hipótese, assim pela Proposição 3.7 existe solução para o sistema e $u_n, \varphi_n \geq 0$. □

No próximo capítulo, também será importante o seguinte resultado.

Corolário 3.9. Como definida no resultado anterior, $f_n \longrightarrow f$ fortemente em $L^1(\Omega)$ se $n \to +\infty$.

Demonstração. Primeiramente,

$$|f_n| \leq f \in L^1(\Omega) \text{ q.t.p. em } \Omega \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $f_n \longrightarrow f$ q.t.p. em Ω, pois

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x)}{1+\frac{1}{n}f(x)} = f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Logo, $|f_n - f| \longrightarrow 0$ q.t.p. em Ω e

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \\ &\leq 2|f| \in L^1(\Omega) \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 1.8,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Isto é,

$$f_n \longrightarrow f \text{ fortemente em } L^1(\Omega).$$

□

Capítulo 4

Efeito regularizante - parte I

Este capítulo e o próximo concentram o objetivo principal do nosso trabalho, que é observar o ganho no efeito regularizante sobre as soluções de um sistema de EDP's se comparado à regularidade de uma única EDP dada pela Teoria Clássica de Stampacchia. Para maior clareza de exposição, neste capítulo, trataremos do efeito regularizante apenas em φ.

Nosso sistema de interesse continua sendo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)\varphi(x)g(u) = f(x), \\ -\mathrm{div}(M(x)D\varphi) = a(x)G(u), \end{cases} \tag{4.1}$$

com $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Recolocaremos aqui as hipóteses válidas de agora em diante, para maior facilidade do leitor.

Temos que Ω é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$ com $N > 2$ e $\partial\Omega \in C^\infty$.

$M(x)$ é simétrica mensurável com $M(x) \in C^\infty$ e existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi\xi, \tag{4.2}$$

e

$$|M(x)| \leq \beta \tag{4.3}$$

As funções a, f satisfazem

$$0 \leq a \in L^\infty(\Omega), \tag{4.4}$$

$$0 \leq f \in L^{(2^*)'}(\Omega). \tag{4.5}$$

Para $g:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $G:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, temos que são contínuas, crescentes, satisfazem $g(0) = 0 = G(0)$, g é Lipschitz, e

$$\exists\, \Sigma > 0,\ \lambda > 0 \mid y \geq \Sigma \ \Rightarrow\ G(y) \leq \lambda g(y) y. \tag{4.6}$$

Por fim, quando falarmos em solução do sistema (4.1), estamos falando no seguinte sentido:

$$\begin{cases} \int_\Omega M(x) Du \cdot D\phi + \int_\Omega a(x)\varphi(x) g(u)\phi(x) = \int_\Omega f(x)\phi(x),\ \ \forall\, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \\ \int_\Omega M(x) D\varphi \cdot D\omega = \int_\Omega a(x) G(u)\omega(x),\ \ \forall\, \omega \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

4.1 Efeito regularizante em φ

O resultado principal desta seção garante que o sistema (4.1) possui solução e que $a\varphi g(u) \in L^1(\Omega)$ e $aG(u) \in L^1(\Omega)$. Além disso, essa solução será mais regular do que o previsto pelos resultados do Capítulo 2. Mas antes, precisaremos de alguns lemas.

Lema 4.1. Sob as hipóteses deste capítulo, temos que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e a sequência $\{a\varphi_n g(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^1(\Omega)$, onde (u_n,φ_n) é solução fraca de (3.17). Além disso, existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, de modo que:

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } W_0^{1,2}(\Omega), \text{ a menos de subsequências} \\ u_n \longrightarrow u \text{ fortemente em } L^2(\Omega), \text{ a menos de subsequências} \\ u_n \longrightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ a menos de subsequências.} \end{cases}$$

Demonstração. Usaremos aqui o sistema aproximado (3.17). Tomemos u_n como função teste para a primeira equação, usemos (4.2) e observemos que $f_n \leq f$, assim

$$\alpha \int_\Omega |Du_n|^2 + \int_\Omega a(x)\varphi_n(x) g(u_n) u_n(x) \leq \int_\Omega f(x) u_n(x).$$

Pela Desigualdade de Hölder, usando o fato de que $f \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ e $u_n \in L^{2^*}(\Omega)$, segue

$$\alpha \int_\Omega |Du_n|^2 + \int_\Omega a(x)\varphi_n(x) g(u_n) u_n(x) \leq \|f\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)} \|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Mas pela Desigualdade de Sobolev, temos

$$\alpha \int_\Omega |Du_n|^2 + \int_\Omega a(x)\varphi_n(x) g(u_n) u_n(x) \leq S\|f\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)} \|Du_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ou seja,

$$\alpha\|Du_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega a(x)\varphi_n(x)g(u_n)u_n(x) \le S\|f\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)}\|Du_n\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.7}$$

Como, $\int_\Omega a(x)\varphi_n(x)g(u_n)u_n(x) \ge 0$,

$$\|Du_n\|_{L^2} \le C_1, \tag{4.8}$$

que pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|u_n\|_{W_0^{1,2}} \le C_1.$$

onde C_1 depende de f, da constante de Sobolev e de α.

E portanto, $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Assim, de $W_0^{1,2}(\Omega)$ espaço de Banach reflexivo, temos que existe u em $W_0^{1,2}(\Omega)$ de modo que u_n converge fracamente para u em $W_0^{1,2}(\Omega)$, a menos de subsequências.

Além disso, de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(\Omega)$, a menos de subsequências. E portanto, pela recíproca do TCDL, $u_n \longrightarrow u$, q.t.p. em Ω, a menos de subsequências.

Observe que pela equação (4.7), temos também que

$$\int_\Omega a(x)\varphi_n(x)g(u_n)u_n(x) \le S\|f\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)}\|Du_n\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.9}$$

que por (4.8), significa que

$$\int_\Omega a(x)\varphi_n(x)g(u_n)u_n(x) \le C_2. \tag{4.10}$$

□

Como no lema anterior, trataremos no próximo lema da limitação e da convergência de certas sequências que serão importantes para o objetivo de se encontrar solução e obter regularidade para o sistema.

Lema 4.2. Sob as hipóteses deste capítulo, temos que a sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e a sequência $\{aG(u_n)\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^1(\Omega)$, onde (u_n,φ_n) é solução fraca de (3.17). Além disso, existe $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, de modo que:

$$\begin{cases} \varphi_n \rightharpoonup \varphi \text{ fracamente em } W_0^{1,2}(\Omega), \text{ a menos de subsequências} \\ \varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ fortemente em } L^2(\Omega), \text{ a menos de subsequências} \\ \varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ a menos de subsequências.} \end{cases}$$

Demonstração. Novamente, usaremos o sistema aproximado (3.17). Desta vez, para a segunda equação, tomemos φ_n como função teste e usemos a condição (4.2), então

$$\alpha \int_\Omega |D\varphi_n|^2 \leq \int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x). \tag{4.11}$$

Mas,

$$\int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x) = \int_{u_n>\Sigma} a(x)G(u_n)\varphi_n(x) + \int_{u_n\leq\Sigma} a(x)G(u_n)\varphi_n(x).$$

De G crescente,

$$\int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x) \leq \int_{u_n>\Sigma} a(x)G(u_n)\varphi_n(x) + G(\Sigma)\int_{u_n\leq\Sigma} a(x)\varphi_n(x).$$

E pela condição (4.6),

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x) &\leq \lambda \int_{u_n>\Sigma} a(x)g(u_n)u_n(x)\varphi_n(x) + G(\Sigma)\int_{u_n\leq\Sigma} a(x)\varphi_n(x) \\ &\leq \lambda \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n(x)\varphi_n(x) + G(\Sigma)\int_\Omega a(x)\varphi_n(x). \end{aligned}$$

Assim, de (4.11), temos que

$$\alpha \int_\Omega |D\varphi_n(x)|^2 \leq \lambda \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n(x)\varphi_n(x) + G(\Sigma)\int_\Omega a(x)\varphi_n(x).$$

E somando as duas últimas equações,

$$\alpha \int_\Omega |D\varphi_n(x)|^2 + \int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x) \leq 2\lambda \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n(x)\varphi_n(x) + 2G(\Sigma)\int_\Omega a(x)\varphi_n(x).$$

Mas por Hölder, Desigualdade de Sobolev e Desigualdade de Young com ε

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x)\varphi_n(x) &\leq \|a\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)}\|\varphi_n\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\leq \|a\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)}\|D\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_\varepsilon\|a\|^2_{L^{(2^*)'}(\Omega)} + \varepsilon\|D\varphi_n\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Ou seja, fazendo $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{4G(\Sigma)}$

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |D\varphi_n(x)|^2 + \int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x) &\leq 2\lambda \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n(x)\varphi_n(x) + \\ &\quad 2G(\Sigma)c_\varepsilon \|a\|^2_{L^{(2^*)'}(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |D\varphi_n|^2.\end{aligned}$$

E então,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2} \int_\Omega |D\varphi_n(x)|^2 + \int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x) &\leq 2\lambda \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n(x)\varphi_n(x) + \\ &\quad 2G(\Sigma)c_\varepsilon \|a\|^2_{L^{(2^*)'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

E usando de que a sequência $\{aG(u_n)\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^1(\Omega)$, Lema 4.1, temos

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |D\varphi_n|^2 + \int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x) \leq C_3.$$

Ou seja,

$$\|a(x)G(u_n)\varphi_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C_3 \text{ e } \|\varphi_n\|_{W_0^{1,2}} \leq C_4,$$

onde C_3 e C_4 não dependem de n.

Portanto, φ_n é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. E pelo mesmo motivo do Lema anterior, temos que existe φ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ de modo que φ_n converge fracamente para φ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, a menos de subsequências.

Além disso, de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em $L^2(\Omega)$, a menos de subsequências. E portanto, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, q.t.p. em Ω, a menos de subsequências. $\square$

Os dois lemas que se seguem são mais delicados e tratam da convergência de $\{a\varphi_n g(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{aG(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^1(\Omega)$.

Lema 4.3. Sob as hipóteses deste capítulo, $\{a\varphi_n g(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para $a\varphi g(u)$ em $L^1(\Omega)$, onde (u_n, φ_n) é solução fraca de (3.17).

Demonstração. Consideremos

$$H_k(s) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq s < k; \\ \dfrac{s-k}{\theta}, \text{ se } k \leq s < k+\theta; \\ 1, \text{ se } s \geq k+\theta; \end{cases}$$

Assim, $H_k : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ é Lipschitz e $H_k(0) = 0$.

Então, pela Regra da Cadeia Localmente Lipschitz, Proposição 1.24, $F_n = H_k(u_n) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e assim, é uma função teste válida, onde

$$DF_n = Du_n H_k'(u_n) = \begin{cases} 0, \text{ se } u_n(x) < k \text{ ou } u_n(x) \geq k+\theta; \\ \dfrac{Du_n}{\theta}, \text{ se } k \leq u_n(x) < k+\theta; \end{cases}$$

Então, na primeira equação de (3.17), com F_n de função teste, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\int_{k<u_n<k+\theta} M(x)Du_n \cdot Du_n &+ \int_{k\leq u_n<k+\theta} a(x)\varphi_n(x)g(u_n)\left(\frac{u_n(x)-k}{\theta}\right) \\ &+ \int_{k+\theta\leq u_n} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) \\ &= \int_{k\leq u_n<k+\theta} f_n(x)\left(\frac{u_n(x)-k}{\theta}\right) + \int_{k+\theta\leq u_n} f_n(x). \end{aligned}$$

Usando (4.2) e que $f_n \leq f$

$$\frac{\alpha}{\theta}\int_{k<u_n<k+\theta} |Du_n|^2 + \int_{k\leq u_n<k+\theta} a(x)\varphi_n(x)g(u_n)\left(\frac{u_n(x)-k}{\theta}\right) +$$

$$\int_{k+\theta\leq u_n} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) \leq \int_{k\leq u_n<k+\theta} f(x)\left(\frac{u_n(x)-k}{\theta}\right) + \int_{k+\theta\leq u_n} f(x)$$

O que implica em

$$\int_{k+\theta\leq u_n} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) \leq \int_{k\leq u_n<k+\theta} f(x)\left(\frac{u_n(x)-k}{\theta}\right) + \int_{k+\theta\leq u_n} f(x), \tag{4.12}$$

pois os outros dois termos do lado esquerdo são não negativos.

Mas (4.12) é equivalente a

$$\begin{aligned} \int_{k\leq u_n} a(x)\varphi_n(x)g(u_n)\chi_{\{k+\theta\leq u_n\}}(x) &\leq \int_\Omega f(x)\left(\frac{u_n(x)-k}{\theta}\right)\chi_{\{k\leq u_n<k+\theta\}}(x) + \\ &\quad \int_{k\leq u_n} f(x)\chi_{\{k+\theta\leq u_n\}}(x), \end{aligned}$$

Vejamos agora as passagens de limites com relação a θ. Primeiro, do Lema de Fatou

$$\int_{k\leq u_n} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) \leq \liminf_{\theta\to 0^+}\int_{k\leq u_n} a(x)\varphi_n(x)g(u_n)\chi_{\{k+\theta\leq u_n\}}(x).$$

Em segundo lugar, consideremos

$$\xi(x) = f(x)\left(\frac{u_n - k}{\theta}\right)\chi_{\{k \le u_n < k+\theta\}}(x).$$

Se $u_n(x) < k$ em $k \le u_n < k+\theta$, então $\xi(x) = 0$. Se $k \le u_n < k+\theta$, então

$$\begin{aligned} |\xi(x)| &= |f(x)|\left|\frac{u_n - k}{\theta}\right| \\ &= f(x)\left(\frac{u_n - k}{\theta}\right) \\ &< f(x)\frac{\theta}{\theta} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Então,

$$|\xi(x)| \le f(x) \in L^1(\Omega) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{4.13}$$

Agora dado $x \in \Omega$, se $u_n(x) \le k$, claramente

$$\lim_{\theta \to 0^+} \xi(x) = 0. \tag{4.14}$$

Se $u_n(x) > k$, seja θ_0 tal que, para $0 < \theta < \theta_0$,

$$u_n(x) > k + \theta.$$

Logo,

$$\lim_{\theta \to 0^+} \xi(x) = 0. \tag{4.15}$$

Então, por (4.14) e (4.15)

$$\xi(x) \longrightarrow 0, \text{ se } \theta \to 0^+, \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{4.16}$$

Assim por (4.13), (4.16) e o TCDL,

$$\lim_{\theta \to 0^+} \int_\Omega f(x)\left(\frac{u_n - k}{\theta}\right)\chi_{\{k \le u_n < k+\theta\}}(x) = 0$$

Logo, por (4.12)

$$\int_{k \le u_n} a(x)\varphi_n(x) g(u_n) \le \int_{k \le u_n} f(x). \tag{4.17}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como $f \in L^1(\Omega)$, $\{f\}$ é uniformemente integrável. Assim, existe $\sigma_1 \geq 0$ tal que

$$\int_{k \leq u_n} f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

se $\mu(\{k \leq u_n\}) \leq \sigma_1$.

Mas de $\{u_n\}$ limitada em $L^1(\Omega)$, temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k_0$, $\mu(\{k \leq u_n\}) \leq \sigma$. Ou seja, para $k \geq k_0$

$$\int_{k \leq u_n} f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.18}$$

Seja E subconjunto mensurável de Ω, então

$$\begin{aligned}
\int_E a(x)\varphi_n(x)g(u_n) &= \int_{E\cap\{u_n \leq k\}} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) + \int_{E\cap\{u_n > k\}} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) \\
&\leq \int_{E\cap\{u_n \leq k\}} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) + \int_{u_n > k} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) \\
&\leq g(k)\int_{E\cap\{u_n \leq k\}} a(x)\varphi_n(x) + \int_{u_n > k} a(x)\varphi_n(x)g(u_n) \\
&\leq g(k)\int_E a(x)\varphi_n(x) + \int_{u_n > k} a(x)\varphi_n(x)g(u_n)
\end{aligned}$$

pois g é crescente.

Pela Desigualdade de Hölder, por (4.17), pela Desigualdade de Sobolev e pelo Lema 4.2,

$$\begin{aligned}
\int_E a(x)\varphi_n(x)g(u_n) &\leq g(k)\|\varphi_n(x)\|_{L^{2^*}(E)} \left(\int_E a(x)^{(2^*)'}\right)^{\frac{1}{(2^*)'}} + \int_{k \leq u_n} f \\
&\leq g(k)\|D\varphi_n\|_{L^2(E)} \left(\int_E a(x)^{(2^*)'}\right)^{\frac{1}{(2^*)'}} + \int_{k \leq u_n} f \\
&\leq C_5 \left(\int_E a(x)^{(2^*)'}\right)^{\frac{1}{(2^*)'}} + \int_{k \leq u_n} f.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Mas como $a \in L^{(2^*)'}(\Omega)$, existe σ_2 de modo que

$$\left(\int_E a(x)^{(2^*)'}\right)^{\frac{1}{(2^*)'}} < \frac{\varepsilon}{2C_5}, \tag{4.20}$$

se $\mu(E) < \sigma_2$.

Assim, tomando $\mu(E) < \sigma_2$ e $k > k_0$, temos por (4.18), (4.19) e (4.20), que

$$\int_E a(x)\varphi_n(x)g(u_n) < \varepsilon$$

Ou seja, $\{a\varphi_n g(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente integrável. Além disso, $a(x)\varphi_n(x)g(u_n) \longrightarrow a(x)\varphi(x)g(u)$ q.t.p. em Ω, pois pelos Lemas 4.1 e 4.2, $u_n \longrightarrow u$ e $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ q.t.p. em Ω. Logo, pelo Teorema de Vitali, $\{a\varphi_n g(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para $a\varphi g(u)$ em $L^1(\Omega)$. □

Lema 4.4. Sob as hipóteses deste capítulo, $\{aG(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para $aG(u)$ em $L^1(\Omega)$, onde u_n é solução fraca de (3.17).

Demonstração. Usemos φ_n como função teste na primeira equação de (3.17), assim

$$\int_\Omega M(x)Du_n D\varphi_n + \int_\Omega a(x)\varphi_n^2(x)g(u_n) = \int_\Omega f_n(x)\varphi_n.$$

E u_n como função teste na segunda equação de 3.17

$$\int_\Omega M(x)D\varphi_n Du_n = \int_\Omega a(x)G(u_n)u_n.$$

Combinando as duas últimas equações, temos então que

$$\int_\Omega a(x)G(u_n)u_n + \int_\Omega a(x)\varphi_n^2(x)g(u_n) = \int_\Omega f_n(x)\varphi_n.$$

E como $a, g \geq 0$,

$$\int_\Omega a(x)G(u_n)u_n \leq \int_\Omega f_n(x)\varphi_n.$$

Lembrando que $f_n \leq f$, usando Desigualdade de Hölder e Desigualdade de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x)G(u_n)u_n &\leq \int_\Omega f(x)\varphi_n \\ &\leq \|f\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)}\|\varphi_n\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)}\|D\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_6,\end{aligned}$$

pois, pelo Lema 4.2, a sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Agora, dado $E \subset \Omega$ mensurável

$$\begin{aligned}
\int_E a(x)G(u_n) &= \int_{E\cap\{u_n\leq k\}} a(x)G(u_n) + \int_{E\cap\{u_n>k\}} a(x)G(u_n) \\
&\leq \int_{E\cap\{u_n\leq k\}} a(x)G(u_n) + \int_{u_n>k} a(x)G(u_n) \\
&\leq G(k)\int_{E\cap\{u_n\leq k\}} a(x) + \int_{u_n>k} a(x)G(u_n)\frac{u_n}{k} \\
&\leq G(k)\int_E a(x) + \int_{u_n>k} a(x)G(u_n)\frac{u_n}{k} \\
&\leq G(k)\int_E a(x) + \frac{C_6}{k}, \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

pois G é crescente e quando $u_n > k$, $\dfrac{u_n}{k} > 1$.

Mas de $\{a\}$ uniformemente integrável, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\sigma > 0$, tal que

$$\int_E a(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

se $\mu(E) < \sigma$.

Assim, se $\mu(E) < \sigma$ e tomando k de modo que $\dfrac{C_6}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, temos por (4.21)

$$\int_E a(x)G(u_n) < \varepsilon.$$

Então, $\{a(x)G(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente integrável, e como $a(x)G(u_n) \longrightarrow a(x)G(u)$ q.t.p. em Ω (pois $u_n \longrightarrow u$ q.t.p. em Ω pelo Lema 4.1) pelo Teorema de Vitali, temos que $\{aG(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para $aG(u)$ em $L^1(\Omega)$. □

Por fim, veremos agora o resultado mais importante deste capítulo. O resultado que segue, como dito no início do capítulo, garante a existência de solução para o sistema (4.1). Mas mais do que isso, o teorema abaixo garante a existência de soluções em $W_0^{1,2}(\Omega)$ quando pela Teoria de Stampacchia, por exemplo, $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$. Porém, se m for próximo a 1 claramente $m^* < 2$. Assim temos ganho de regularidade.

Teorema 4.5. Consideremos que valham as hipóteses (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6). Então existe (u,φ) solução fraca de (4.1), com $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $a\varphi g(u) \in L^1(\Omega)$, $aG(u) \in L^1(\Omega)$.

Demonstração. Pelo Colorário 3.8, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\varphi_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$, não-negativos, de modo que

$$\begin{cases} \int_\Omega M(x)Du_n \cdot D\phi + \int_\Omega a(x)\varphi(x)g(u_n)\phi(x) = \int_\Omega f_n(x)\phi(x), \ \forall\ \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \\ \int_\Omega M(x)D\varphi_n \cdot D\omega = \int_\Omega a(x)g(u_n)\omega(x), \ \forall\ \omega \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

onde $f_n = \dfrac{f}{1+\frac{1}{n}f}$.

Passaremos o limite no sistema (3.17).

Primeiramente, pelo Lema 4.3, $a\varphi_n g(u_n) \longrightarrow a\varphi g(u)$ forte em $L^1(\Omega)$. Em particular, para cada $\phi \in L^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x)\varphi_n g(u_n)\phi(x) = \int_\Omega a(x)\varphi g(u)\phi(x).$$

Analogamente, como pelo Corolário 3.9, $f_n \longrightarrow f$ fortemente em $L^1(\Omega)$, temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\phi(x) = \int_\Omega f(x)\phi(x),$$

quando $\phi \in L^\infty(\Omega)$.

Por fim, como $M(x)$ é simétrica, dado $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega M(x)Dv\cdot D\phi = \int_\Omega M(x)D\phi Dv$$

e como $M(x)$ é limitado

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega M(x)D\phi\cdot Dv\right| &\le \beta\int_\Omega |D\phi||Dv| \\ &\le \beta\|D\phi\|_{L^2(\Omega)}\|Dv\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \beta\|\phi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$M(x)D\phi \in W^{-1,2}(\Omega) = (W_0^{1,2}(\Omega))'.$$

Agora, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,2}(\Omega)$, pelo Lema 4.1, e então da definição de convergência fraca em $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega M(x)Du_n\cdot D\phi &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega M(x)D\phi\cdot Du_n\\ &= \int_\Omega M(x)D\phi\cdot Du.\end{aligned}$$

E passando o limite de forma equivalente na segunda equação, temos que o sistema (4.1) possui solução no sentido enunciado neste capítulo. □

4.2 Observações

Vejamos as estimativas de energia da solução.

$$a(x)\varphi(x)g(u_n)u_n \longrightarrow a(x)\varphi(x)g(u_n)u_n$$

e

$$a(x)G(u_n)\varphi_n(x) \longrightarrow a(x)G(u)\varphi(x)$$

q.t.p. em Ω.

Assim, pelo Lema de Fatou, pelo Lema 4.1 e pelo Lema 4.2

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x)\varphi_n(x)g(u)u &\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x)\varphi_n(x)g(u)u\\ &\leq C_2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x)G(u)\varphi(x) &\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x)G(u_n)\varphi_n(x)\\ &\leq C_3.\end{aligned}$$

Mais ainda, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, pela semicontinuidade inferior fraca da norma

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Du|^2 &\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega |Du_n|^2\\ &\leq C_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D\varphi|^2 &\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega |D\varphi_n|^2\\ &\leq C_4.\end{aligned}$$

Capítulo 5

Efeito regularizante - parte II

Como dito do Capítulo 4, nosso interesse neste capítulo também é analisar o ganho de regularidade que nosso sistema de estudo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)Du) + a(x)\varphi(x)g(u) = f(x), \\ -\mathrm{div}(M(x)D\varphi) = a(x)G(u), \end{cases} \tag{5.1}$$

com $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pode proporcionar em sua solução – se comparado com o ganho de regularidade em uma EDP simples. Mas aqui, estamos interessados no efeito regularizante sobre a primeira solução.

5.1 Efeito regularizante em u

Da Teoria Clássica de Stampacchia, sabemos que para o caso em que o dado pertence a $L^{(p^*)'}(\Omega)$, a solução do problema de Dirichlet com operador de segunda ordem elíptico satisfazendo certas condições pertence a $L^{m_p^{**}}(\Omega)$.

Vimos neste trabalho, para o caso particular em que o operador de segunda ordem era $-\Delta u$ mais uma aplicação h com certas propriedades, $f \in L^{(2^*)'}(\Omega)$, que a solução do problema de Dirichlet pertencia a $L^{m^{**}}(\Omega)$.

Mas o que podemos esperar de um sistema de Dirichlet com EDPs elípticas, sob certas condições? É sobre isto que tratará nosso próximo resultado devido a Lucio Boccardo. Por simplicidade, consideraremos tanto para o sistema (3.17) como para o sistema (5.1)

$$a(x) = 1, \ \forall x \in \Omega \tag{5.2}$$

$$g(y) = \lambda y^{r-1}, \text{ com } y \geq 0, \lambda > 0 \text{ e } r > 1 \tag{5.3}$$

e

$$G(y) = y^r, \text{ com } y \geq 0 \text{ e } r > 1 \tag{5.4}$$

Teorema 5.1. Consideremos que valha (4.2) e tomemos

$$f \in L^m(\Omega), \;\; 2 \leq m \leq \frac{(r-1)N}{2r}, \;\; \frac{N}{N-2} < r. \tag{5.5}$$

Então $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{rm}(\Omega)$, onde u é a solução da primeira equação do sistema (5.1).

Demonstração. Novamente, trabalharemos aqui com o sistema aproximado (3.17).

Seja $C(y),\; y \geq 0$, uma função real, crescente, convexa e de classe C^2, com $C(0) = 0$ e $C'(0) = 0$. Para a primeira equação de (3.17), tomemos $\varphi_n C'(u_n)$ como função teste, lembrando que $a \equiv 1$, assim

$$\int_\Omega M(x)Du_n \cdot D\varphi_n C'(u_n(x)) + \int_\Omega M(x)Du_n \cdot Du_n \varphi_n(x) C''(u_n(x))$$

$$+ \int_\Omega \varphi_n^2(x) g(u_n(x)) C'(u_n(x)) = \int_\Omega f_n(x)\varphi_n(x) C'(u_n(x)).$$

O que por (4.2), implica em

$$\int_\Omega M(x)Du_n \cdot D\varphi_n(x) C'(u_n(x)) + \alpha \int_\Omega |Du_n|^2 \varphi_n(x) C''(u_n(x))$$

$$+ \int_\Omega \varphi_n^2(x) g(u_n(x)) C'(u_n(x)) \leq \int_\Omega f_n(x)\varphi_n(x) C'(u_n(x)).$$

Mas como C é crescente e convexa, então $C''(u_n) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Além disso, $f_n \leq f$, então

$$\int_\Omega M(x)Du_n \cdot D\varphi_n(x) C'(u_n(x)) + \int_\Omega \varphi_n^2(x) g(u_n(x)) C'(u_n(x)) \leq \int_\Omega f(x)\varphi_n(x) C'(u_n(x)). \tag{5.6}$$

Para a segunda equação de (3.17), tomemos $C(u_n)$ como função teste. Assim

$$\int_\Omega M(x)D\varphi_n \cdot Du_n C'(u_n(x)) = \int_\Omega G(u_n(x)) C(u_n(x)(x)). \tag{5.7}$$

Assim, de (5.6) e (5.7),

$$\int_\Omega G(u_n(x)) C(u_n(x)) + \int_\Omega \varphi_n^2(x) g(u_n(x)) C'(u_n(x)) \leq \int_\Omega f(x)\varphi_n(x) C'(u_n(x)).$$

O que implica em

$$\int_\Omega G(u_n(x))C(u_n(x))+\int_\Omega \varphi_n^2(x)g(u_n(x))C'(u_n(x))\leq \int_{fC'(u_n)\leq \frac{1}{2}\varphi_n g(u_n)C'(u_n)} f(x)\varphi_n(x)C'(u_n(x))$$

$$+\int_{fC'(u_n)>\frac{1}{2}\varphi_n(x)g(u_n)C'(u_n)} f(x)\varphi_n(x)C'(u_n). \tag{5.8}$$

Para o primeiro termo do lado direito de (5.8) , como $fC'(u_n)\leq \dfrac{1}{2}\varphi_n g(u_n)C'(u_n)$, temos que

$$\int_{fC'(u_n)\leq \frac{1}{2}\varphi_n g(u_n)C'(u_n)} f(x)\varphi_n(x)C'(u_n(x))\leq \frac{1}{2}\int_{fC'(u_n)\leq \frac{1}{2}\varphi_n g(u_n)C'(u_n)} \varphi_n^2(x)g(u_n(x))C'(u_n(x)) \tag{5.9}$$

Para o segundo termo do lado direito de (5.8), como $fC'(u_n)>\dfrac{1}{2}\varphi_n g(u_n)C'(u_n)$, ou seja, $\varphi_n<\dfrac{2fC'(u_n)}{g(u_n)C'(u_n)}$, temos que

$$\int_{fC'(u_n)>\frac{1}{2}\varphi_n g(u_n)C'(u_n)} f(x)\varphi_n(x)C'(u_n(x))\leq \int_{fC'(u_n(x))>\frac{1}{2}\varphi_n g(u_n(x))C'(u_n(x))} \frac{2f^2(x)C'(u_n(x))}{g(u_n(x))}. \tag{5.10}$$

E assim, por (5.8), (5.9) e (5.10), temos que

$$\int_\Omega G(u_n(x))C(u_n(x))+\int_\Omega \varphi_n^2(x)g(u_n(x))C'(u_n(x))\leq$$

$$\frac{1}{2}\int_{fC'(u_n)\leq \frac{1}{2}\varphi_n g(u_n)C'(u_n)} \varphi_n^2(x)g(u_n(x))C'(u_n(x))+\int_{fC'(u_n)>\frac{1}{2}\varphi_n g(u_n)C'(u_n)} \frac{2f^2(x)C'(u_n(x))}{g(u_n(x))}.$$

O que implica em

$$\int_\Omega G(u_n(x))C(u_n(x))+\int_\Omega \varphi_n^2(x)g(u_n(x))C'(u_n(x))\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi_n^2(x)g(u_n(x))C'(u_n(x))$$

$$+\int_\Omega \frac{2f^2(x)C'(u_n(x))}{g(u_n(x))}.$$

E portanto,

$$\int_\Omega G(u_n(x)C(u_n(x)+\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi_n^2(x)g(u_n(x))C'(u_n(x))\leq \int_\Omega \frac{2f^2(x)C'(u_n(x))}{g(u_n(x))}.$$

Mas de C crescente, temos que

$$\int_\Omega G(u_n(x))C(u_n(x)) \leq \int_\Omega \frac{2f^2(x)C'(u_n(x)}{g(u_n(x)}.$$

Agora, faremos duas escolhas diferentes para C. Se $m=2$, tomemos $C(y)=y^r$, e lembrando que $g(y)=\lambda y^{r-1}$ e $G(y)=y^r$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_n(x)^{2r} &= \int_\Omega G(u_n(x))C(u_n(x)) \\
&\leq \int_\Omega \frac{2f(x)^2C'(u_n(x))}{g(u_n(x))} \\
&= \frac{2r}{\lambda}\int_\Omega f(x)^2 \\
&\leq \frac{2r}{\lambda}\left(\int_\Omega |f(x)|^m\right)^{\frac{2}{m}} \mu(\Omega)^{\frac{m-2}{m}} \\
&= K_1,
\end{aligned}$$

onde $K_1>0$ é uma constante.

Se $m>2$, tomemos $C(y)=y^{rm-r}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_n(x)^{rm} &= \int_\Omega G(u_n(x))C(u_n(x)) \\
&\leq \int_\Omega \frac{2f(x)^2C'(u_n(x))}{g(u_n(x))} \\
&= \frac{2r(m-1)}{\lambda}\int_\Omega f(x)^2(x)u_n(x)^{r(m-2)} \\
&\leq \frac{2r(m-1)}{\lambda}\left(\int_\Omega |f(x)|^m\right)^{\frac{2}{m}}\left(\int_\Omega |u_n(x)|^{r(m-2)\frac{m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \\
&= K_2\left(\int_\Omega |u_n(x)|^{rm}\right)^{\frac{m-2}{m}},
\end{aligned}$$

onde $K_2>0$ é uma constante.

Assim,

$$\left(\int_\Omega |u_n(x)|^{rm}\right)^{1-\frac{m-2}{m}} \leq K_2.$$

Então, para todo $m\geq 2$, temos que

$$\int_\Omega u_n(x)^{rm} \leq K.$$

E portanto, a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{rm}(\Omega)$. $\square$

5.2 Observações

No teorema anterior, por (5.5), observa-se que como $\dfrac{N}{N-2} < r$, então $r > 1$ e portanto $\dfrac{(r-1)}{r} > 0$.

Além disso, de $(2^*)' < 2$ e $\dfrac{(r-1)N}{2r} < \dfrac{N}{2}$, temos (5.5) que

$$(2^*)' < m < \frac{N}{2}. \tag{5.11}$$

Assim, pela Regularidade de Stampacchia, era esperado como regularidade ótima que

$$u \in L^{m^{**}(\Omega)}.$$

Mas como vimos pelo Teorema 5.1,

$$u \in L^{rm(\Omega)},$$

onde $rm \geq m^{**}$, pois de $m \leq \dfrac{(r-1)N}{2r}$, temos que

$$N - \frac{N}{r} \geq 2m,$$

o que significa que

$$N - 2m \geq \frac{N}{r},$$

e como $N - 2m > 0$, pois $m < \dfrac{N}{2}$,

$$r \geq \frac{N}{N-2m},$$

e assim

$$rm \geq \frac{Nm}{N-2m},$$

o que finalmente resulta em

$$rm \geq m^{**}.$$

Bibliografia

[1] Benci, V. and Fortunato, D. (1998). An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations. *Journal of the Juliusz Schauder Center*.

[2] Boccardo, L. (2015). Elliptic systems of Schrödinger type in the spirit of Benci-Fortunato. *Advanced Nonlinear Studies*, 15(2):321–331.

[3] Boccardo, L. and Croce, G. (2014). *Elliptic Partial Differential Equations, Existence and Regularity of Distributional Solutions*, volume 55. de Gruyter.

[4] Boccardo, L. and Orsina, L. (2020). A semilinear system of Schrödinger–Maxwell equations. *Nonlinear Analysis*, 194:111453.

[5] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer.

[6] Durastanti, R. (2019). Regularizing effect for some p-Laplacian systems. *Nonlinear Analysis*, 188:425–438.

[7] Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society.

[8] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons.

[9] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer.

[10] Miranda, L. H. d. (2023). *Tópicos em Teoria de Regularidade*.

[11] Stampacchia, G. (1963). Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Séminaire Jean Leray*, (3):1–77.

[12] Stampacchia, G. (1965). Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 15, pages 189–257.

[13] Ziemer, W. P. (2012). *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*, volume 120. Springer Science & Business Media.